

列车节能运控建模思考

——关于混合整数线性规划中的分段精度问题

作者：冯敏玲

日期：2021-12-20

在进行凸优化 (CVX) 算法评估的过程中, 拟构建起一个算法的对比框架, 来评估 CVX 与混合整数线性规划 (MILP) 的计算能力。要进行公平对比的前提, 是使得两者都达到解收敛的情况, 然后才进行 CPU 时间的比较。解的收敛, 也就是随着模型分段数的增加, 模型的精度增加, 解的质量更贴近实际情况, 并且当精度达到一定程度时, 解的质量不再发生明显的变化。初步设想: 当精度增加时, 模型目标函数的值会下降, 最后收敛至一个比较稳定的值。

然而, 将模型的分段数从 25 段逐渐增加至 2000 段时, 仿真结果如图 1 所示。

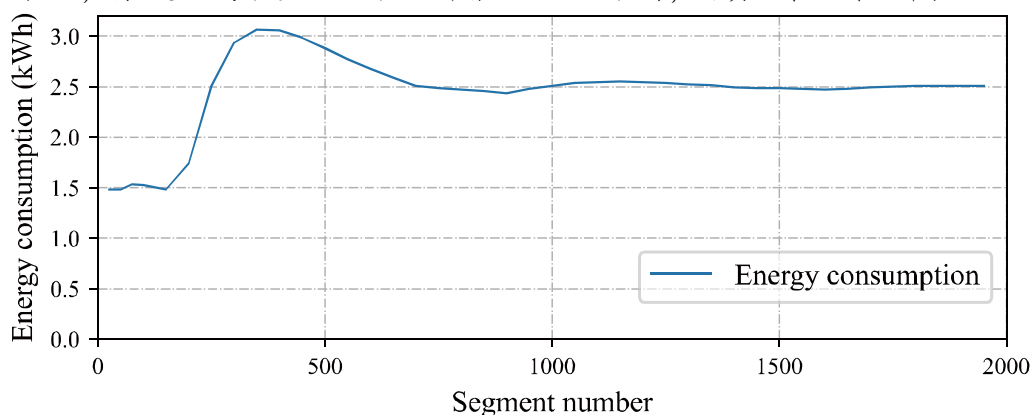


图 1 模型目标函数随分段数增加变化情况

当段数逐渐从小到大增加时, 能耗值并不是如我们所想从一个比较大的值逐渐下降并收敛于一个稳定的值。可以看到, 当分段为 25~400 段时, 能耗反而随着精度的上升而上升, 并且段数少 (25~200) 的模型能耗比段数大 (300~2000) 的模型能耗更低, 这显然不符合常理。于是, 笔者分别进行分段为 100 与 800 的仿真, 查看其速度轨迹的区别, 如图 2 所示。

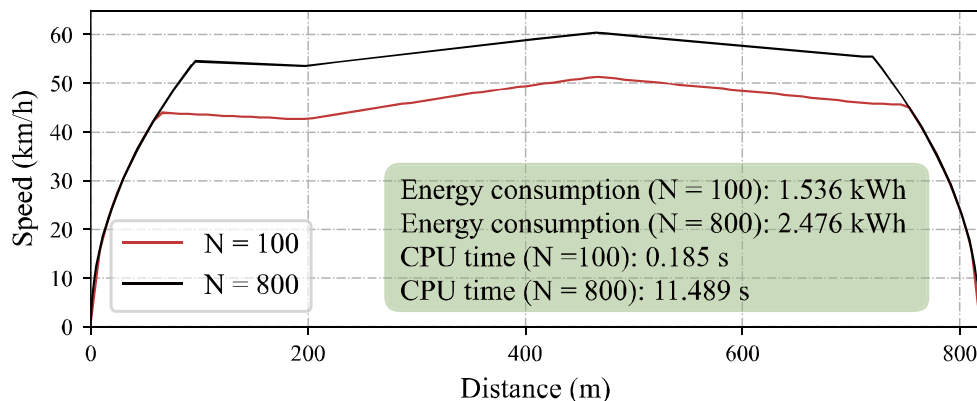


图 2 模型分段数分别为 100 与 800 的最优速度轨迹

很明显, 两条速度轨迹在 0~60 m 以及 750~819 m 区间基本重合; 在 60~750 m 区间,

N=800 的速度轨迹明显高于 N=100 的速度轨迹。这就意味着在两种模型分段数下，列车的总运行时间必然不一致。调用后台数据却发现，两个优化模型的列车运行总时间相等，这意味着至少有一个模型的时间计算是有问题的。

若不以优化模型中的变量值来计算列车的总运行时间，而是在优化完后，根据所得的列车速度轨迹来计算列车实际总运行时间，发现在不同的分段下，列车的实际运行时间与优化目标总时间有差别，如图 3 所示。

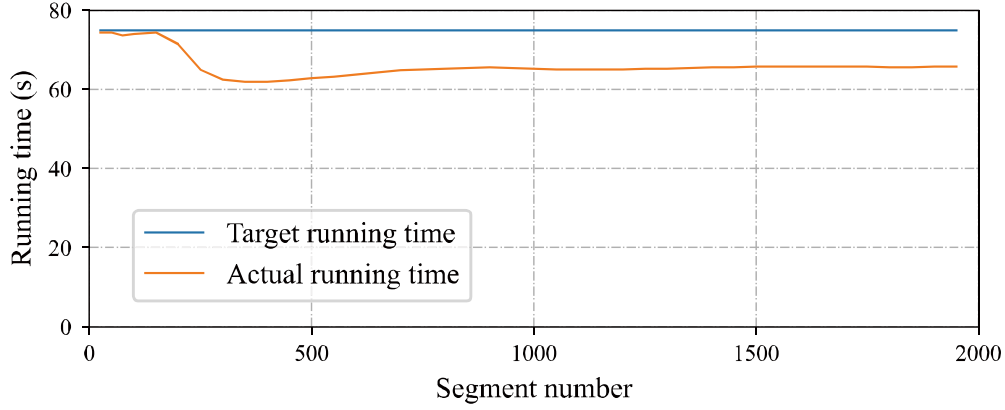


图 3 不同模型分段数下的列车实际运行总时间

这就可以解释，为何表面上运行总时间相同的两条速度轨迹，在形状上差异如此之大，原因就是实际的运行总时间不一致。在模型分段数上升时，针对模型时间的计算误差反而上升，这就使得在模型分段比较大时，实际的总的列车运行时间更小，因此优化所得的目标函数比分段少时更大。在这里，时间的计算误差是由分段线性化 (PWL) 引入的，如公式 (1) 所示。

$$\Delta t_i = \Delta d * \frac{1}{v_{ave,i}} \approx \Delta d * \frac{1}{\tilde{v}_{ave,i}} \quad (1)$$

知道了问题是由 PWL 引起的，再回来关注 N=100 与 N=800 的分段线性化误差分析，如图 4 所示。可以发现，PWL 误差更高的地方集中在列车低速区 (0~20 km/h)，在精度升高时，分段数目更多更细，因此更多的段数进入到了 PWL 高误差区，如图 4 (b) 所示。

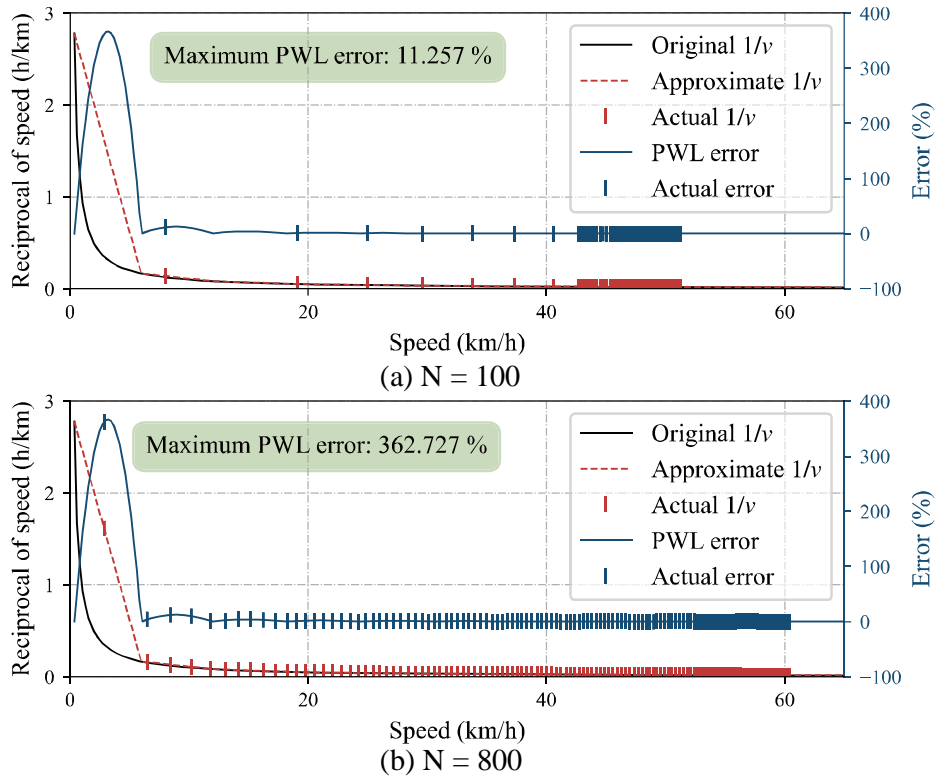


图 4 模型分段数分别为 100 与 800 的分段线性化误差分析

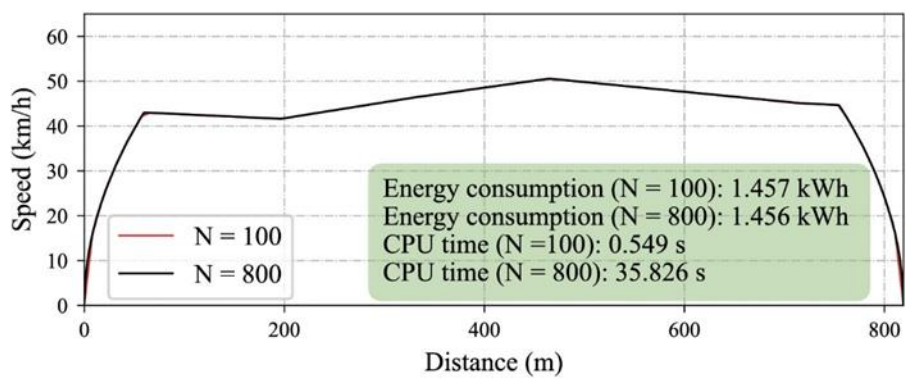
总结：在混合整数线性规划建模过程中，采用了分段线性化（PWL）的方式来近似计算平均速度的倒数，因此使得列车的总运行时间计算存在误差。并且 PWL 的高误差区出现在列车低速区，当模型的分段数变高时，更多的段数进入到了 PWL 高误差区，引起总运行时间计算的误差增大，即总运行时间偏小，故目标函数值变大。

因此，若想研究模型的解随着模型分段数上升而稳定收敛的问题，需要首先考虑 PWL 的精度问题，使得针对模型时间的计算精度收敛，再来评估模型的分段问题。

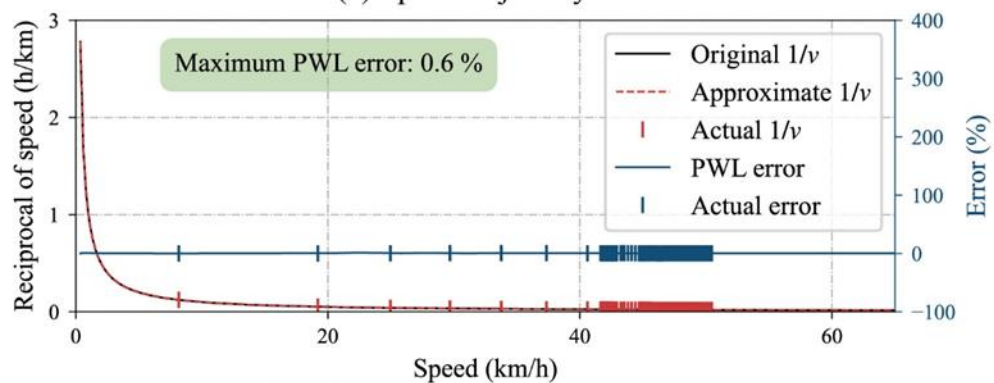
编写人：Miliar（冯敏玲）

后记

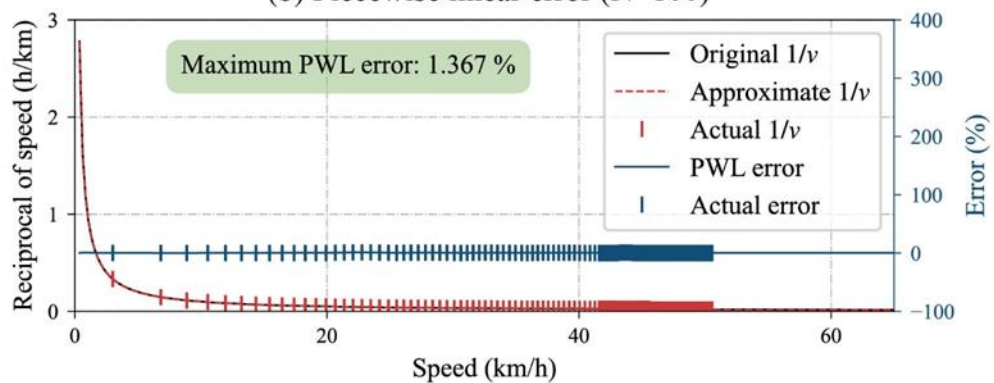
在分段线性（PWL）点的选择上重新调整，在低速情况下，引入更多的分段线性点得到以下的观察。可以发现，随着段数的增加，两条优化运行轨迹基本趋于一致，验证了我们前述的结论，针对速度倒数的 PWL 建模的精度直接影响了优化结果的质量，而通过改善 PWL 的选择，可以有效提高建模精度，进而提升模型的优化结果质量。图 5 展示了在改善了 PWL 点的选择之后，两种优化模型得到的结果大体趋于一致，建模的精度被有效改善，并且不受线路分段数量的影响。图 6 展示了两种 PWL 点的选择对建模精度（以建模误差表示）的影响。



(a) Speed trajectory

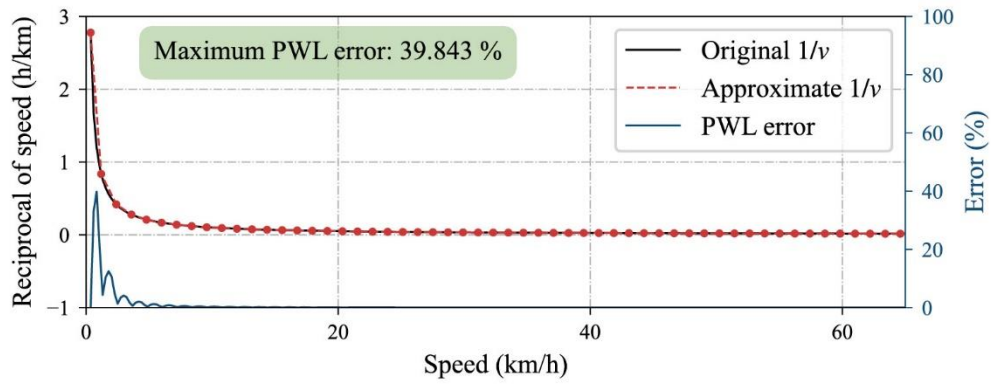


(b) Piecewise linear error ($N=100$)

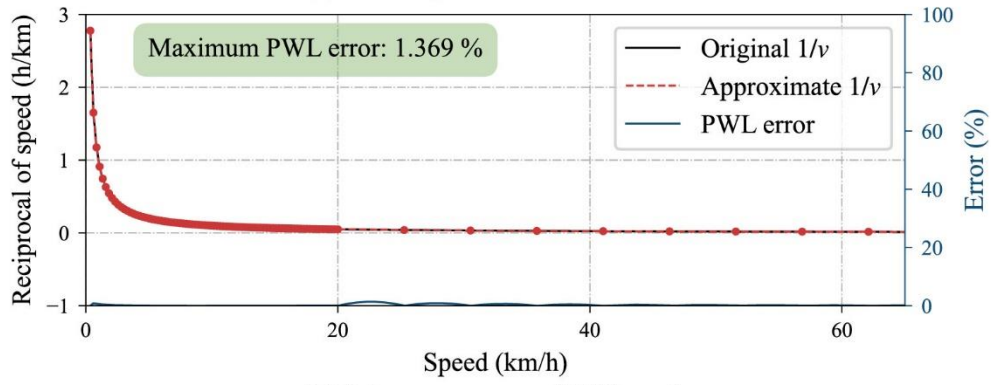


(c) Piecewise linear error ($N=800$)

图 5 改善 PWL 点的选择之后，分别为 100 与 800 的分段线性化的优化结果比较和误差分析



(a) Homogeneous PWL nodes



(b) Inhomogeneous PWL nodes

图 6：两种 PWL 点的选择对模型带来的误差分析。可以看出在高速条件下，PWL 点的选择趋于稀疏，而且对建模的精度影响很小。这为 PWL 点的选择优化提供一种可行的思路。