# 现代数学引论

北京大学 杜珣

目录

[现代数学引论 1](#_Toc341996077)

[第一章 集合与映射 5](#_Toc341996078)

[1.1 逻辑命题及其相反命题的表述 5](#_Toc341996079)

[1.2 集合及其运算 5](#_Toc341996080)

[1. 集合的表示法 5](#_Toc341996081)

[2. 集合间的运算 5](#_Toc341996082)

[1.3 二元关系 5](#_Toc341996083)

[1.4 映射 5](#_Toc341996084)

[1.5 序结构 5](#_Toc341996085)

[1. 序关系 5](#_Toc341996086)

[1.6 实数集 6](#_Toc341996087)

[1.7 集合的势 6](#_Toc341996088)

[1. 势及其大小比较 6](#_Toc341996089)

[2. 可数集与不可数集 6](#_Toc341996090)

[5. 连续统假设 6](#_Toc341996091)

[1.8 数学系统和其同构 6](#_Toc341996092)

[第二章 代数系统 6](#_Toc341996093)

[2.1 代数运算及一些常见的运算律 6](#_Toc341996094)

[2.2 一些常见的代数系统 7](#_Toc341996095)

[1. 群 7](#_Toc341996096)

[2. 环和域 7](#_Toc341996097)

[3. 格和Boole代数 8](#_Toc341996098)

[4. 线性空间和代数 8](#_Toc341996099)

[5. 子代数系统和代数系统的同构 8](#_Toc341996100)

[3.3 线性空间 8](#_Toc341996101)

[1. 线性组合 8](#_Toc341996102)

[2. 线性空间的基(Hamel基) 8](#_Toc341996103)

[3. 线性空间的维数 8](#_Toc341996104)

[4. 其他有关线性空间的一些概念 8](#_Toc341996105)

[3.4 线性算子与线性泛函 8](#_Toc341996106)

[1. 线性算子 8](#_Toc341996107)

[2. 线性算子空间 9](#_Toc341996108)

[3. 线性泛函和对偶空间 9](#_Toc341996109)

[3.5 张量空间 9](#_Toc341996110)

[1. 多线性映射和多线性泛函 9](#_Toc341996111)

[2. 线性空间V上的张量空间和张量乘积 9](#_Toc341996112)

[3. 对称张量和反对称张量 9](#_Toc341996113)

[4. 对称化算子和反对称化算子 9](#_Toc341996114)

[3.6 外积和外代数 9](#_Toc341996115)

[1. 外积和外形式 9](#_Toc341996116)

[2. 反对称张量间的外积运算 10](#_Toc341996117)

[3. 的基 10](#_Toc341996118)

[4. 反对称张量形成的外代数 10](#_Toc341996119)

[第三章 拓扑空间和距离空间 10](#_Toc341996120)

[3.1 拓扑空间 10](#_Toc341996121)

[1. 拓扑空间的定义 10](#_Toc341996122)

[2. 拓扑的生成 10](#_Toc341996123)

[3. 邻域 10](#_Toc341996124)

[3.2 距离空间 10](#_Toc341996125)

[1. 距离空间定义 10](#_Toc341996126)

[3.3 拓扑空间中的各种点集 11](#_Toc341996127)

[1. 内点、外点、边界点 11](#_Toc341996128)

[2. 孤立点、聚点、接触点 11](#_Toc341996129)

[3. 稀疏集和稠密集 11](#_Toc341996130)

[4. Weierstrass定理 11](#_Toc341996131)

[5. 可分集 11](#_Toc341996132)

[6. 距离空间中的有界集和完全有界集 11](#_Toc341996133)

[4.4 拓扑空间中的收敛 11](#_Toc341996134)

[1. 点列的收敛 11](#_Toc341996135)

[2. 滤基 11](#_Toc341996136)

[3. 滤基收敛的应用 11](#_Toc341996137)

[4. 用收敛来定义拓扑 11](#_Toc341996138)

[4.5 连续映射和同胚映射 11](#_Toc341996139)

[1. 连续映射 11](#_Toc341996140)

[2. 同胚映射和等距映射 12](#_Toc341996141)

[4.6 拓扑空间中的连通性 13](#_Toc341996142)

[1. 连通性和连通空间 13](#_Toc341996143)

[2. 连通性是拓扑不变性质 13](#_Toc341996144)

[3. 道路连通集 13](#_Toc341996145)

[3.7 完备距离空间 13](#_Toc341996146)

[1. 哥西序列和完备性 13](#_Toc341996147)

[2. 常见的一些距离空间的完备性 13](#_Toc341996148)

[3. 压缩映射的不动点定理 13](#_Toc341996149)

[4. 闭集套定理和Barie纲定理 13](#_Toc341996150)

[5. 闭集空间的完备化 13](#_Toc341996151)

[3.8 紧集和列紧集 13](#_Toc341996152)

[1. 紧集 13](#_Toc341996153)

[2. 紧集和有界闭集的关系 13](#_Toc341996154)

[3. 紧集和连续映射 13](#_Toc341996155)

[4. 列紧集 13](#_Toc341996156)

[5. 距离空间中的列紧集 13](#_Toc341996157)

[3.9 距离空间上的函数族 14](#_Toc341996158)

[第四章 测度与积分 14](#_Toc341996159)

[4.1 可测空间与测度空间 14](#_Toc341996160)

[1. 集代数、代数和可测空间 14](#_Toc341996161)

[4.2 外测度及由它导出的测试 15](#_Toc341996162)

[4.3 上的勒贝格测试 15](#_Toc341996163)

[4.4 可测函数 15](#_Toc341996164)

[4.5 可测函数的积分 15](#_Toc341996165)

[4.6 R上的黎曼积分和勒贝格积分 15](#_Toc341996166)

[4.7 L空间和空间 15](#_Toc341996167)

[第五章 拓扑线性空间 15](#_Toc341996168)

[5.1 基本数学结构的复合 15](#_Toc341996169)

[5.2 拓扑线性空间 15](#_Toc341996170)

[5.3 距离线性空间 15](#_Toc341996171)

[5.4 赋范空间 15](#_Toc341996172)

[5.5 内积空间 15](#_Toc341996173)

[5.6 赋范空间中的有界线性算子 15](#_Toc341996174)

[5.7 赋范空间的微分学 15](#_Toc341996175)

[5.8 广义函数 15](#_Toc341996176)

[5.9 欧式空间中的张量 16](#_Toc341996177)

[第六章 Banach空间及其上的算子 16](#_Toc341996178)

[6.1 有限维赋范空间 16](#_Toc341996179)

[6.2 开映照定理和闭图定理 16](#_Toc341996180)

[6.3 有界线性泛函的延拓定理 16](#_Toc341996181)

[6.4 有界线性算子序列 16](#_Toc341996182)

[6.5 赋范空间中的伴随算子 16](#_Toc341996183)

[6.6 有界线性算子的正则点和谱点 16](#_Toc341996184)

[6.7 全连续线性算子 16](#_Toc341996185)

[6.8 全连续线性算子方程 16](#_Toc341996186)

[第七章 Hilbert空间及其上的算子 16](#_Toc341996187)

[7.1 正交集和广义富氏级数 16](#_Toc341996188)

[7.2 Hilbert空间的正交分解和正交归一基 16](#_Toc341996189)

[7.3 Hilbert空间的对偶空间和伴随算子 16](#_Toc341996190)

[7.4 Hilbert空间的自伴线性算子 16](#_Toc341996191)

[7.5 全连续自伴线性算子方程 17](#_Toc341996192)

[7.6 对线性积分方程的应用 17](#_Toc341996193)

[第八章 流形上的微积分 17](#_Toc341996194)

[8.1 流形 17](#_Toc341996195)

[1. 流形的定义 17](#_Toc341996196)

[8.2 微分流形 18](#_Toc341996197)

[8.3 流形在欧式空间中的嵌入 18](#_Toc341996198)

[8.4 流形上的切空间、余切空间 18](#_Toc341996199)

[8.5 流形上的微分形式 18](#_Toc341996200)

[8.6 微分形式的外微分 18](#_Toc341996201)

[8.7 微分流形的定向 18](#_Toc341996202)

[8.8 流形上微分形式的积分 18](#_Toc341996203)

[8.9 广义Stokes公式 18](#_Toc341996204)

# 集合与映射

## 1.1 逻辑命题及其相反命题的表述

## 1.2 集合及其运算

### 1. 集合的表示法

每个集合S都应满足以下三个要求：

1. S中包含哪些元素是有明确规定的，即任给元素x，要能够明确判定是x∈S还是
2. S中的任何两个元素都不相同
3. 集合S本身不能又是S的元素.

**定义1** A和B是两个集合，如，有，则称A是B的子集，记为，或. 亦称A包含于B，或B包含A.如果和同时成立，则称两集合A和B相等，记为A=B

**定义3** X为全集，，记，称为A的余集。

记，称P(X)为X的幂集。

### 2. 集合间的运算

**定义4** 集合间有运算并，交，差和对称差，分别定义如下：



## 1.3 二元关系

### 1. 集合的乘积与二元关系

**定义1** x和y为两个元素，称为有序对，即当时，有

**定义2** X和Y是两个集合，称以下元素对的集合为X与Y的乘积，也称为笛卡尔乘积。

**定义3** 的每一个子集R，称为上的一个二元关系。任给，如有，就记为xRy。

### 2. 等价关系和等价类

**定义4** R是X上的二元关系，并满足下面三条件：

1. 自返性(Reflexivity) 
2. 对称性(Symmetry) 如果aRb，则bRa
3. 传递性(Transitivity) 如aRb, bRc则aRc

就称R是X上的**等价关系**(Equivalence Relation)。

**定义5** R是X上的等价关系，，记

，

称[a]是a关于R的**等价类**(Equivalence)。记全体关于R的等价类集合为

，

称X/R为X关于R的**商集**(Quotient set)。

**定义6** 每个是X的非空子集，，并且，就称{Bi}是X的一个**分划**(partition)。

## 1.4 映射

### 1. 映射的有关概念

**定义1** X和Y是两个集合，如任给一个，存在唯一的，记此为，就称f是X到Y的一个映射；并记为。称X为f的定义域，称为x的像，称集为映射的图形。

由定义立知，映射是一种特殊的二元关系，即f是X\*Y的如下子集：

且每个x只对应唯一的y。

**定义2** X为集合，，映射的定义如下：



称此x->{0,1}的映射为集A的特征映射。

## 1.5 序结构

### 1. 序关系

把实数集中不等号的主要性质抽象出来，可对一般集合定义序关系，建立序结构。

**定义1** X为集合，为X上的二元关系，并满足以下序公理：

1. 自返性(reflexivity)
2. 反对称性(anti symmetry)
3. 传递性(transitivity)

就称为X上的序关系，称为序空间，称赋予了序关系的X为有序集或偏序集。

定义2 为序空间，如,a和b都能比较顺序，就称为全序空间，称X为全序集。

### 2. 用映射来定义序结构

### 3. 上界、极大元、最小上界等概念

**定义3** X为有序集，.

1. 如，都有，就称b是B的最大元(最小元)。
2. 中能与b比较顺序的x，都有，就称b是B的极大元（极小元）。

## 1.6 实数集

## 1.7 集合的势

### 1. 势及其大小比较

集合A的势又称为基数（Cardinal Number）,记为cardA。在本节中简记A的势为|A|，它标志着A中元素的多少。

空集的势的定义为0，即=0;

含有n个元素的有限集A，定义基势|A|=n.

定义1 X和Y为两个集合，如存在双射，就称X和Y的势相等，记为|X|=|Y|。如存在单射

### 2. 可数集与不可数集

**定义3** A为任一集合，记为正整数集N的势。

### 5. 连续统假设

康托尔于1878年提出，他认为不存在一个集合A，它的势满足.

## 1.8 数学系统和其同构

# 代数系统

## 2.1 代数运算及一些常见的运算律

定义1 设A和K是两个集合，定义

1. 映射 称为A上的内运算
2. 映射称为A上的外运算

内运算和外运算都称为代数运算.

定义2 设为A上的内运算，，满足

1. ，则称内运算满足交换律；

## 2.2 一些常见的代数系统

由集合与满足一定运算规律的一些代数运算合在一起组成的系统称为代数系统，也称此系统具有代数结构

最常见的代数系统有以下三种类型：

1. 类型，为内运算；半群和群属于此类型
2. 类型，+和为两个内运算；环，域，格，Boole代数都属于此类型。
3. 类型，为X上的外运算，而X和K又各有自己的内运算。线性空间、代数属于此类型。

由简单的代数系统可以发展成复杂的代数系统，线性空间是群和域的发展，而由线性空间又可发展出张量空间和外代数这样的更复杂的代数系统。

### 1. 群

定义1

1. 满足结合律的代数系统称为半群
2. 有单位元且每个元素都有逆元的半群就称为群
3. 满足交换律的群称为交换群或者Abel群

### 环和域

定义4 集合X上有两个内运算+和，如满足：

1. 为交换群
2. 为半群
3. 运算对+满足分配律，

则称此为环

定义5

1. 是环，0为环的零元，且是群，则称此系统为体
2. 对乘法也满足交换律的体则称为域。

另，也有人定义体为域，则域定义为交换域。

### 3. 格和Boole代数

### 4. 线性空间和代数

### 5. 子代数系统和代数系统的同构

## 3.3 线性空间

### 1. 线性组合

### 2. 线性空间的基(Hamel基)

### 3. 线性空间的维数

### 4. 其他有关线性空间的一些概念

## 3.4 线性算子与线性泛函

### 线性算子

定义1 X和Y都是域K上的线性空间。映射满足：

1. 
2. 

则称T为X上的线性映射，线性映射通常又称线性算子。

### 2. 线性算子空间

### 3. 线性泛函和对偶空间

## 3.5 张量空间

### 1. 多线性映射和多线性泛函

### 2. 线性空间V上的张量空间和张量乘积

### 3. 对称张量和反对称张量

### 4. 对称化算子和反对称化算子

### 3.6 外积和外代数

### 1. 外积和外形式

V是域K上的n维线性空间，r为正整数，为r阶置换群

定义1 ^是上的r重多线性映射，且具有如下的反对称性，即

则称此是r重多线性交错映射，记

，亦称为外积

### 反对称张量间的外积运算

### 的基

### 4. 反对称张量形成的外代数

# 第三章 拓扑空间和距离空间

## 3.1 拓扑空间

拓扑空间就是对集合赋予一种能够确切定义相邻概念的结构，从而能研究其连续性态的数学系统。

### 拓扑空间的定义

集合A和一切与A相接触的边界点之并称为A的闭包。

定义1 X为集合，在其幂集P(X)上定义一个闭包映射。

### 2. 拓扑的生成

### 3. 邻域

## 3.2 距离空间

### 1. 距离空间定义

最重要的拓扑空间的距离空间。

定义1 X为集合，映射

## 3.3 拓扑空间中的各种点集

### 内点、外点、边界点

### 2. 孤立点、聚点、接触点

### 3. 稀疏集和稠密集

### 4. Weierstrass定理

### 5. 可分集

### 6. 距离空间中的有界集和完全有界集

## 4.4 拓扑空间中的收敛

### 点列的收敛

### 2. 滤基

### 3. 滤基收敛的应用

### 4. 用收敛来定义拓扑

## 4.5 连续映射和同胚映射

### 1. 连续映射

**定义1** X和Y是两个拓扑空间，映射，如满足：Y中的T(x)的邻域F;X中的x的邻域E;

则称映射T在x点连续。如T在X中每点都连续，则称T是X上的连续映射。

### 2. 同胚映射和等距映射

**定义2** X和Y是拓扑空间，如是双射的连续映射，且其逆映射也是连续映射，则称T是的**同胚映射**。也称T和是X与Y间的同胚映射。

由定义2立知，同胚映射把开集映射成开集。

例3 ，此函数是的同胚映射

定义3 X和Y原来两拓扑空间，如有同胚映射存在，则称此两拓扑空间X和Y是同构的，而此同胚映射f就是X与Y间的同构映射。

拓扑空间在同胚映射下保持不变的那些量和性质就都称为拓扑不变量和拓扑不变性质。例如，开集、闭集、边界等都是拓扑不变量，而距离、有界性就不是拓扑不变的。拓扑学的任务就是研究一般拓扑空间和有重要意义的特殊拓扑空间中的那些拓扑不变的量和性质。

定义4 {X,d}和是两个距离空间，映射；如，有，就称T为等距映射。

## 4.6 拓扑空间中的连通性

### 1. 连通性和连通空间

### 2. 连通性是拓扑不变性质

### 3. 道路连通集

## 3.7 完备距离空间

### 1. 哥西序列和完备性

### 2. 常见的一些距离空间的完备性

### 3. 压缩映射的不动点定理

### 4. 闭集套定理和Barie纲定理

### 5. 闭集空间的完备化

## 3.8 紧集和列紧集

### 1. 紧集

### 2. 紧集和有界闭集的关系

### 3. 紧集和连续映射

### 4. 列紧集

### 5. 距离空间中的列紧集

## 3.9 距离空间上的函数族

1. 一致连续映射
2. 函数族的一致有界和同等连续
3. Arzela定理的一个应用

# 第四章 测度与积分

## 4.1 可测空间与测度空间

### 1. 集代数、代数和可测空间

定义1 X为集合，P(X)为其幂集，ω∈P(X)，满足

1. X∈ω
2. 如A∈ω，则Ac∈ω
3. 如A∈ω，B∈ω，则A∪B∈ω.

则称ω为X上的集代数。

定义2 ω是X上的集代数，如ω还满足

如Ai∈ω，i=1,2,3,…,则

就称ω是X上的σ代数。

## 4.2 外测度及由它导出的测试

## 4.3 上的勒贝格测试

## 4.4 可测函数

## 4.5 可测函数的积分

## 4.6 R上的黎曼积分和勒贝格积分

## 4.7 L空间和空间

# 拓扑线性空间

## 5.1 基本数学结构的复合

## 5.2 拓扑线性空间

## 5.3 距离线性空间

## 5.4 赋范空间

## 5.5 内积空间

## 5.6 赋范空间中的有界线性算子

## 5.7 赋范空间的微分学

## 5.8 广义函数

## 5.9 欧式空间中的张量

# 第六章 Banach空间及其上的算子

## 6.1 有限维赋范空间

## 6.2 开映照定理和闭图定理

## 6.3 有界线性泛函的延拓定理

## 6.4 有界线性算子序列

## 6.5 赋范空间中的伴随算子

## 6.6 有界线性算子的正则点和谱点

## 6.7 全连续线性算子

## 6.8 全连续线性算子方程

# Hilbert空间及其上的算子

## 7.1 正交集和广义富氏级数

## 7.2 Hilbert空间的正交分解和正交归一基

## 7.3 Hilbert空间的对偶空间和伴随算子

## 7.4 Hilbert空间的自伴线性算子

## 7.5 全连续自伴线性算子方程

## 7.6 对线性积分方程的应用

# 流形上的微积分

流形的概念是欧式空间的推广，也是三维空间中曲线和曲面的抽象和推广。粗略地说，流形的每个局部都可看成欧式空间；即流形在其每一点的邻域，都和欧式空间的一个区域同胚，欧式空间能引进空标系，从而流形上可以引进局部坐标系，以便用代数和分析的方法研究流形。

## 8.1 流形

### 流形的定义

记是n维欧氏空间；用，表示半个欧式空间；表示的边界。

定义1 设M是具有可数基的Hausdorff空间。如，有P的邻域u，使u与或中的某个开域同胚，则称M为维拓扑流形，简称n维流形。

## 8.2 微分流形

## 8.3 流形在欧式空间中的嵌入

## 8.4 流形上的切空间、余切空间

## 8.5 流形上的微分形式

## 8.6 微分形式的外微分

## 8.7 微分流形的定向

## 8.8 流形上微分形式的积分

## 8.9 广义Stokes公式