



“华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

学 校 东南大学

参赛队号 18102860475

1.雷梦丹

队员姓名 2.黄雪颖

3.张琳

“华为杯”第十五届中国研究生

数学建模竞赛

题 目

光传送链路建模与网络规划

摘

要

随着社会的发展与人们生活水平的提高,追求大容量与高速率的通信已成为一个必然的发展趋势。光纤通信技术具有体积小、重量轻、损耗低等优点,使得高速率与大容量通信成为可能,已成为现代通信的主要支柱之一。以光纤通信技术为基础的光传送网构建起了全球通信的骨架,其运行质量的好坏直接关系到整个电信网络的运行。本文从底层物理出发为光传送链路建立模型,制定光传送网规划,分析探讨网络的价值,并提出一种改进的调制格式,具有重要的现实意义。

对于问题一,在子问题_1中,为了得到不同调制格式下信噪比和误码率之间的关系曲线,本文以相关背景知识为基础,先分别对 QPSK 和 QAM 的调制解调过程进行建模,然后根据模型推导出误码率和信噪比之间的关系式,最后运用 matlab 进行编程求解与模型仿真,得到不同调制格式下信噪比和误码率之间的关系曲线,从曲线可以得到 $BER=0.02$ 时 QPSK 的 SNR 容限点为 8,8QAM 的 SNR 容限点为 12.5, 16QAM 的 SNR 容限点为 15。在子问题_2中,要求根据给定的误码率以及相关公式,求出该误码率下信号能传输的最远距离。噪声会对信号的传输距离带来限制,在每个跨段模型基本相同的前提下,本文将问题简化为求解单个跨段的噪声,根据误码率的值求出总的噪声功率,得到信号能传输的最大跨段数,从而算出单跨传输距离为 80km 时,信号在 QPSK, 8QAM, 16QAM 三种调制模式下可传输的最远距离分别为 5200km, 1680km, 960km, 当单跨传输距离为 100km 时,信号可传输的最远距离分别为 5000km, 1800km, 1000km。

对于问题二,在子问题_1中,不考虑中间节点的情况下,需要对我国城市群制定连接数分别为 16 和 33 的两个光传送网规划,并给出其最大网络价值。本

文参考“最小生成树问题”的解决思路，构建以城市之间链路的网络价值为权值的邻接矩阵，利用 **Prim 算法** 进行模型的求解，首先得到最少连接数为 11 条的最佳网络规划，再分别得到连接数为 16 和 33 的最优网络规划图以及对应的最大网络价值。在子问题_2 中，需要考虑存在中间节点的情况，重新制定子问题_1 中的光传送网规划。为解决该问题，本文利用“**Floyd**”算法和“**最大流**”算法分别确定网络规划和各节点的容量分配情况，首先分析了存在中间节点情况下影响网络价值的几个主要因素，并结合这些因素确定 Floyd 算法和“最大流”算法中的各链路的权重和目标函数，最后编程求解得到最佳的网络拓扑结构和容量分配情况，使总的网络价值达到最优。在子问题_3 中，需要重新制定光传送网络规划的目标函数并考虑前面制定的规划有无变化。首先，选取影响网络价值的因素，然后对影响因素的量化标准进行分析，通过统计网络数据决定该因素的量化值，最终重新制定目标函数，量化影响因素，使网络价值的计算更为合理。目标函数更新后，对应的问题二也需要重新规划，得出最优网络规划图。

对于问题三，为了产生比 8-QAM（相邻各星座点之间距离相等）具有更低 SNR 容限点的调制方案，本文首先对比分析了 16-QAM 的方形星座图与星形星座图的性能，对比分析后，得出星形星座图具有更低的 SNR 容限点。根据该结论对可能的改进方案进行讨论，最后得出效果较佳的调制方案，并利用 matlab 对结果与性能进行仿真验证。

关键词：QPSK 与 QAM；“最小生成树”；Prim 算法；光传送网规划

目录

一、问题背景与重述.....	4
1.1 问题背景.....	4
1.2 问题重述.....	4
1.2.1 问题一.....	4
1.2.2 问题二.....	4
1.2.3 问题三.....	5
二、模型假设.....	6
三、符号说明.....	6
四、问题一求解.....	7
4.1 子问题_1 求解.....	7
4.1.1 问题分析.....	7
4.1.2 模型建立.....	7
4.1.3 关系曲线求解.....	14
4.2 子问题_2 求解.....	15
4.2.1 子问题_2 分析.....	15
4.2.2 子问题_2 建模.....	15
4.2.3 子问题_2 求解.....	16
五、问题二求解.....	19
5.1 子问题_1 求解.....	19
5.1.1 分析与模型建立.....	19
5.1.2 问题求解.....	20
5.2 子问题_2 求解.....	24
5.2.1 问题分析及模型建立.....	24
5.2.2 相关算法.....	24
5.2.3 问题求解.....	26
5.2.4 求解结果.....	27
5.3 子问题_3 求解.....	28
5.3.1 问题分析.....	28
5.3.2 模型建立.....	28
5.3.3 模型求解.....	29
六、问题三求解.....	30
6.1 问题分析.....	30
6.2 问题求解与讨论.....	30
七、模型的改进与评价.....	33
7.1 模型的优点.....	33
7.2 模型的缺点.....	33
7.3 模型存在的改进空间.....	33
参考文献.....	34
附录.....	35

一、问题背景与重述

1.1 问题背景

社会的发展与进步以及人们生活水平的提高,使得追求大容量与高速率的通信成为一个必然的发展趋势。光纤通信技术(optical fiber communications)由于具有体积小、重量轻、损耗低、保密性能好、容量大等优点,使得高速率与大容量通信成为可能^[1]。光纤通信技术是以光纤作为传输媒介,利用光纤来传输携带信息的光波,从而达到通信的目的,在现代电信网中起着举足轻重的作用。自光纤通信技术问世以来,虽然只有几十年的时间,发展却十分迅速,已成为现代通信的主要支柱之一。

以光纤通信技术为基础的光传送网(optical transport network)是由一系列由光纤连接的网络单元组成,为人类提供了大容量、高可靠性和低能耗的信息传输管道,构建起了全球通信的骨架^[2]。光传送网是基础电信网中最底层的传输媒介,其运行质量的好坏直接关系到整个电信网络的运行。光传送网的规划与建设是运营商、设备商以及政府必须考虑的课题。

因此,从底层物理出发,为光传送链路建模,制定光传送网规划,探索光传送网有关规律,在有限资源的条件下,综合考虑传输距离,传输容量、网络拓扑等各种因素以最大化网络的价值是十分有意义的。

1.2 问题重述

1.2.1 问题一

子问题_1:

调制格式指的是星座图的编码分布模式,误码率(Bit Error Ratio, BER)定义为错误的比特数占总传输比特数的比例,定义信号和噪声功率的比值为信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)。对于给定的调制格式,BER 和 SNR 呈一一对应的关系。调制方式不同,信噪比和误码率的关系也不同。对于子问题_1,需要分别分别探讨 QPSK, 8QAM (Quadrature Amplitude Modulation, QAM)以及 16QAM 三种调制方式下误码率和信噪比的关系,并给出 BER 与 SNR 的关系曲线,并在此基础上确定 BER=0.02 时 SNR 的容限点。

子问题_2:

在相关的研究基础上进行光链路性能定量计算,确定给定期望误码率的情况下信号能达到的最大传输跨数。

1.2.2 问题二

子问题_1:

网络价值是光传送网规划的重要依据。每条直接连接两个城市/区域的链路当做 1 个连接,每个连接的价值定义为传输的容量与连接区域人口数的乘积(取

两区域人口数乘积的 0.5 次方),那么网络的价值则是所有连接价值的加权和,即:

$$\text{网络价值} = \sum \text{权重} * \text{容量} * \text{人口} \quad (1)$$

然而由于资源等因素制约,网络往往并不能让每对节点都直接连接,但可通过中间节点连接起来。在不考虑中间节点的情况下,为题中的我国城市群制定光传送网规划,图中共有 12 个区域,连接数从 16 增加到 33 条,给出两个网络规划及其价值,并求网络最大价值。

子问题_2:

考虑存在中间节点,且两个节点之间可以有多个连接的情况下,重新解决子问题_1 并给出所有中间节点传输容量的分配,假定每条链路容量可任意分配,只要总容量不超过题中所给的规定。同时考虑如果由市扩大为省(区)的影响如何。

子问题_3:

光传送网络价值有多个侧面,例如从运营商的角度,连接经济发达的地区会带来更多的收入,从政府的角度保障发展相对滞后地区的通信是均衡发展的要求等。结合经济效益、社会均衡发展等各方面因素,重新制定衡量网络价值的标准,使得网络规划设计达到更优化,同时考虑前面制定的规划有无变化。

1.2.3 问题三

纠前 BER 不变时,降低 SNR 容限点可以提高系统容忍噪声的能力,从而延长链路的总长度。调制格式的信息熵保持为 3bit 的条件下,通过对任意改变 16QAM 方案中星座点的位置、数量或每个点的概率,探索产生比 8QAM (相邻各星座点之间距离相等) 具有更低 SNR 容限点的调制方案。

二、模型假设

问题一中，作以下假设：

- 假设 1** 假设光传输链路中多个跨段的光纤传输与放大器结构均相同。
假设 2 假设光传输链路中噪声只包含自发辐射噪声和非线性噪声，其余影响忽略不计，且两种噪声互不影响，可以叠加。

问题二中，作以下假设：

- 假设 3** 假设两城市间进行光纤传输的距离为两地的直线距离。
假设 4 假设城市的人口为该城市 2018 年的常住人口数。
假设 5 假设城市节点扩大为省区时，省区之间的距离仍保持不变，只改变人口变量。

三、符号说明

符号	意义
i, j	城市编号
P_i, P_j	城市 i, j 的常住人口数量
C_{ij}	城市 i, j 之间的网络容量
D_{ij}	城市 i, j 之间的距离
MIN	计算机里整形数 int 的最小值
V_{ij}	连接城市 i, j 得到的网络价值
Q_i, Q_j	省份 i, j 的常住人口数量
P_z	自发辐射噪声
P_f	非线性噪声
P	单跨段的总噪声
P_s	入纤功率

四、问题一求解

4.1 子问题_1 求解

4.1.1 问题分析

子问题_1 要求给出不同的调制格式下，BER 与 SNR 的关系曲线，并确定 BER=0.02 时的 SNR 值。其中，误码率(Bit Error Ratio, BER)定义为错误的比特数占总传输比特数的比例，信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)定义为信号和噪声功率的比值。对于给定的调制格式，BER 和 SNR 呈一一对应的关系，常见的调制格式包括 QPSK，8QAM (Quadrature Amplitude Modulation, QAM)，16QAM，64QAM 等。

因此若想得到不同的调制格式下信噪比和误码率之间的关系曲线，首先需要深入研究调制解调过程及其原理，再对误码率和信噪比之间的关系进行深刻探究。

4.1.2 模型建立

4.1.2.1 QPSK 调制

QPSK 指正交相移键控调制方式，它的每个码元包含 2 比特的信息，现用 a 和 b 来代表这两个比特。发送码元序列在编码时按照每两个码元组成一个双比特组 ab，显然 ab 有四种排列即 00、01、10、11，然后用四种相位($\pi/4$ 、 $3\pi/4$ 、 $5\pi/4$ 、 $7\pi/4$)之一去表示每种排列。各种排列相位之间的关系通常都按照格雷码安排，表 4-1 列出了 QPSK 信号的这种编码方案之一，矢量图如图 4-1 所示。

表 4-1 QPSK 信号编码方案

a	b	θ_k	a	b	θ_k
0	0	90°	1	1	270°
0	1	0°	1	0	180°

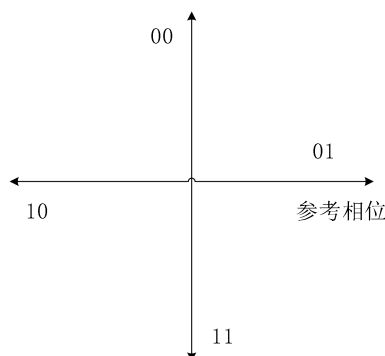


图 4-1 QPSK 信号的矢量图

由表 4-1 和图 4-1 可以看出，采用格雷码的好处在于相邻相位所代表的两个比特只有一位不同，由于在所有的错判原因中因相位误差而造成错判至相邻相位上的概率最大，所以这样编码可使误码率降低。

QPSK 信号的产生有两种方法，第一种是相乘电路，如图 4-2 所示。图中输入基带信号 $A(t)$ 是二进制不归零双极性码元，它被“串/并变换”电路变成两路码元 a 和 b ，之后每个码元的持续时间是输入码元的 2 倍，如图 4-3 所示。这两路并行码元序列分别用以和两路正交载波相乘，相乘结果如图 4-4 虚线矢量所示，其中矢量 $a(1)$ 代表 a 路的信号码元二进制“1”， $a(0)$ 代表 a 路的信号码元二进制“0”， $b(1)$ 代表 b 路的信号码元二进制“1”， $b(0)$ 代表 b 路的信号码元二进制“0”^[3]。这两路信号在相加电路中相加后得到输出矢量 $s(t)$ ，每个矢量代表 $2b$ ，如图中实线矢量所示。

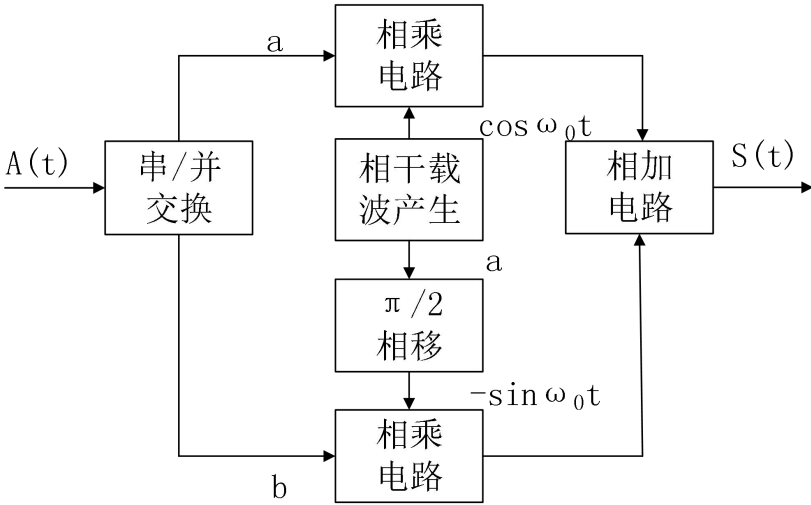


图 4-2 QPSK 信号产生方法（相乘电路）

QPSK 矢量的产生

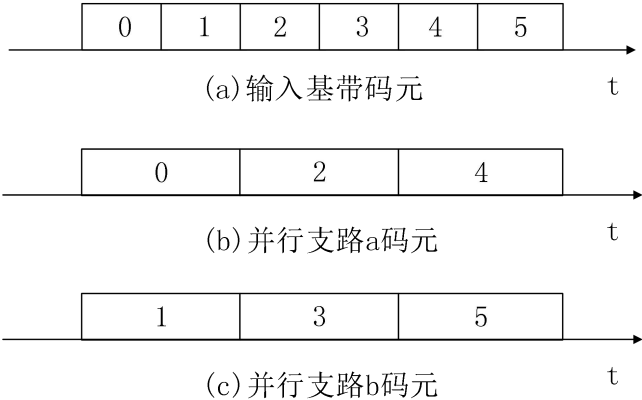


图 4-3 码元串/并变换

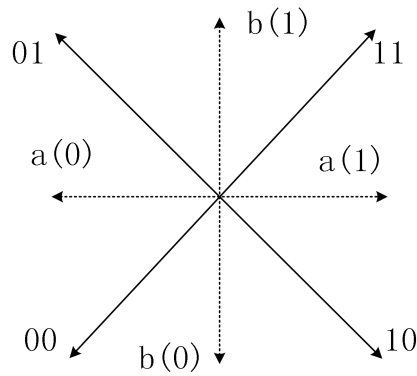


图 4-4 相乘结果

上述二进制信号码元“0”和“1”在相乘电路中与不归零双极性矩形脉冲振幅的关系如下：

二进制码元“1” → 双极性脉冲“+1”^[3]；

二进制码元“0” → 双极性脉冲“-1”^[3]；

第二种方法是选择法，原理框图于图 4-5 所示。

其中输入基带信号经过串/并变换后用于控制一个相位选择电路，按照当时的输入双比特 **ab**，决定选择哪个相位的载波输出。

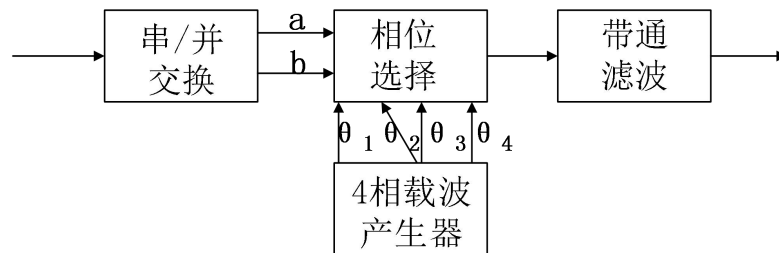


图 4-5 选择法产生 QPSK 信号

4.1.2.2 QPSK 解调

QPSK 信号的解调原理框图如图 4-6 所示。由于 QPSK 信号可以看作是两个正交 2PSK 信号的叠加，所以用两路正交的相干载波去解调很容易分离出这两路 2PSK 信号，相干解调后的两路并行码元 **a** 和 **b** 经过并/串变换后，成为串行数据输出。

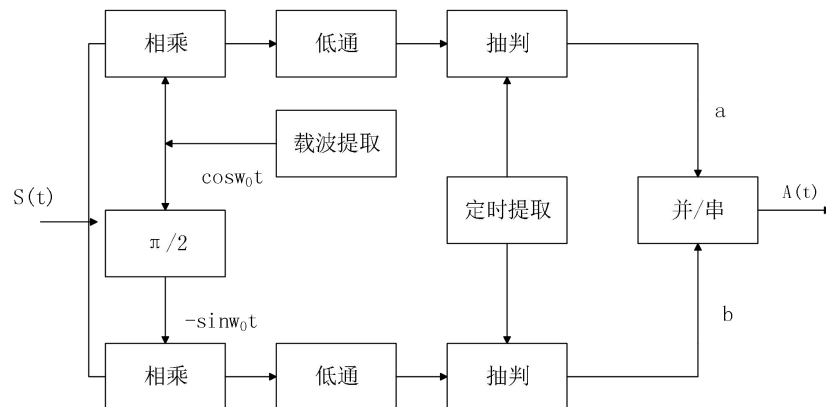


图 4-6 QPSK 信号的解调原理框图

4.1.2.3 QPSK 误码率分析

基于上述分析，在 QPSK 调制方式中，由其矢量图 4-7 可以看出，错误判决是由于信号矢量的相位因噪声而发生偏离造成的。例如若发送矢量的相位为 45 度，代表基带信号码元“11”，若因噪声的影响使接收矢量的相位变成 135 度，则将错判为“01”。

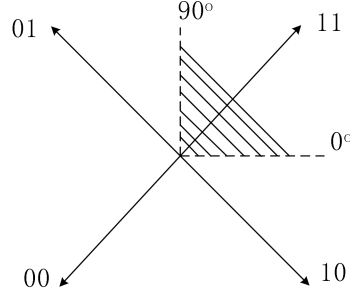


图 4-7 矢量图

当不同发送矢量以等概率出现时，合理的判决门限应该设定在和相邻矢量等距离的位置。在图中对于矢量“11”来说，判决门限应该设在 0 度和 90 度^[3]。当发送“11”时，接收信号矢量的相位若超出这一范围（图中阴影区）则将发生错判。设 $f(\theta)$ 为接收矢量（包括信号和噪声）相位的概率密度，则发生错误的概率为：

$$P_e = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta \quad (1)$$

为简便分析我们将其写成：

$$S_k(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_k) = a_k \cos \omega_0 t - b_k \sin \omega_0 t \quad (2)$$

可知，当 QPSK 码元的相位为 45 度时， $a_k = b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

故信号码元相当于是互相正交的两个 2PSK 码元，其幅度分别为接收信号幅度的 $\frac{\sqrt{1}}{2}$ 倍，功率为接收信号功率的 $\frac{1}{2}$ 倍。由通信原理知识可知，接收信号与噪声之和为：

$$r(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + n(t) \quad (3)$$

式中： $n(t) = n_0(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$ ， $n(t)$ 的方差为 σ_n^2 ，噪声的两个正交分量的方差为 $\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2$ 。

若把此 QPSK 信号当做两个 2PSK 信号分别在两个相干检测器解调时，只有和 2PSK 信号同相的噪声才有影响^[3]。由于误码率决定于各个相干检测器输入的信噪比，而此处的信号功率为接收信号功率的一半，噪声功率为 σ_n^2 。若输入信

号的信噪比为 r , 则每个解调器输入端的信噪比将为 $r/2$ 。由通信原理知识知, 2PSK 相干解调的误码率为:

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{r} \quad (4)$$

其中 r 为解调器输入端的信噪比, 故现在用 $r/2$ 代替 r , 即误码率为:

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{r/2} \quad (5)$$

所以正确概率为: $[1 - (1/2) \text{erfc} \sqrt{r/2}]$ 。

因为只有两路正交的相干检测都正确, 才能保证 QPSK 信号的解调输出正确^[3]。由于两路正交相干检测都正确的概率为 $[1 - (1/2) \text{erfc} \sqrt{r/2}]^2$ 。

所以 QPSK 信号的误码率为:

$$P_e = 1 - [1 - \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{r/2}]^2 \quad (6)$$

4.1.2.4 QAM 调制

QAM 是指正交幅度调制技术, 多进制的 QAM 具有很高的频带利用率, 因此成为通信业务日益增多情况下的比较好的一种选择。

QAM 信号采用了两个正交载波 $\cos 2\pi f_c t$ 、 $\sin 2\pi f_c t$, 每个载波都被一个独立的信息比特序列所调制。

$$u_m(t) = A_{mc} g_r(t) \cos 2\pi f_c t + A_{ms} g_r(t) \sin 2\pi f_c t \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

式中 $\{A_{mc}\}$ 和 $\{A_{ms}\}$ 是电平集合, 这些电平是通过将 k 比特序列映射为信号振幅而获得的。例如一个 16 位正交幅度调制信号的星座图如下图 4-8 所示, 该星座是通过用 $M = 4\text{PAM}$ 信号对每个正交载波进行振幅调制得到的^[4]。利用 PAM 分别调制两个正交载波可得到矩形信号星座。

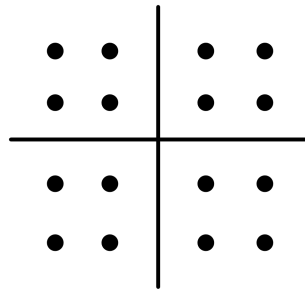


图 4-8 M=16QAM 信号星座图

QAM 可以看成是振幅调制和相位调制的结合。因此发送的 QAM 信号波形可以表示为

$$u_{mn}(t) = A_m g_r(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_n), \quad m = 1, 2, \dots, M_1, n = 1, 2, \dots, M_2, \quad (8)$$

如果 $M_1 = 2^{k_1}$, $M_2 = 2^{k_2}$, 那么 QAM 方法就可以达到以符号速率 $R_B / (k_1 + k_2)$

同时发送 $k_1 + k_2 = \log_2 M_2 M_1$ 个二进制数据。图 4-9 给出了 QAM 调制器的框图。

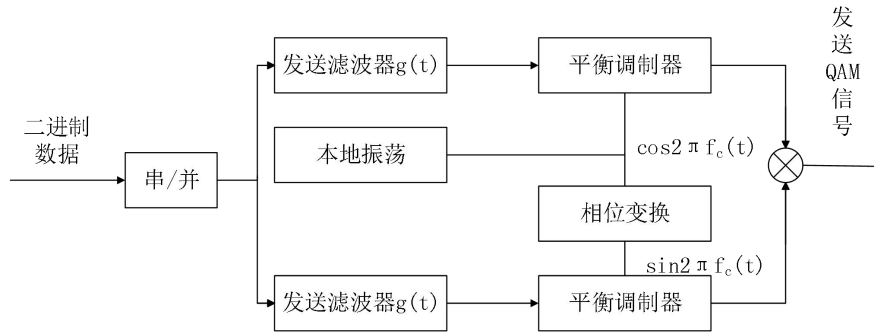


图 4-9 QAM 调制器框图

4.1.2.5 QAM 的解调

假设在信号传输中存在载波相位偏移和加性高斯噪声。因此 $r(t)$ 可以表示为：

$$r(t) = A_{mc} g_r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) + A_{ms} g_r(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) + n(t) \quad (9)$$

其中 ϕ 是载波相位便宜，且 $n(t) = n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t$ ，将接收信号与下述两个相位函数进行相关

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= g_r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ \psi_2(t) &= g_r(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) \end{aligned} \quad (10)$$

如图 4-10 所示，相关器的输出抽样后输入判决器。使用图 4-10 中所示的锁相环估算接受信号的载波相位偏移 ϕ ，相移 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 对该相位偏移进行补偿。

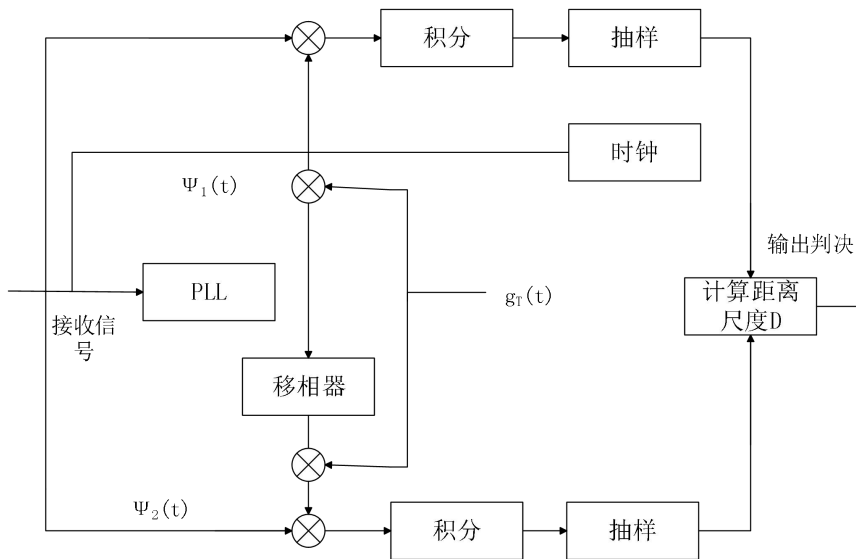


图 4-10 QAM 调制器框图

假设图中 4-10 所示的时钟与接收信号同步，以使相关器的输出在适当的时候及时抽样。在这些条件下两个相关器的输出分别为：

$$\begin{aligned} r_1 &= A_{mc} + n_c \cos \phi - n_s \sin \phi \\ r_2 &= A_{mc} + n_c \sin \phi + n_s \cos \phi \end{aligned} \quad (11)$$

其中：

$$\begin{aligned} n_c &= \frac{1}{2} \int_0^T n_c(t) g_T(t) dt \\ n_s &= \frac{1}{2} \int_0^T n_s(t) g_T(t) dt \end{aligned}$$

噪声分量是均值为 0，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的互不相关的高斯随机变量。

最佳判决器计算距离量度：

$$D(r, s_m) = |r - s_m|^2 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (12)$$

4.1.2.6 QAM 的误码率分析

矩形 QAM 信号星座图最突出的优点是容易产生 PAM 信号可直接加到两个正交载波相位上，此外它们还便于解调^[4]。

对于 $M = 2^k$ 下的矩形信号星座图（K 为偶数），QAM 信号星座图与正交载波上的两个 PAM 信号是等价的，这两个信号中的每一个上都有 $\sqrt{M} = 2^{k/2}$ 个信号点。因为相位正交分量上的信号能被相关判决极好的分离，所以易于通过 PAM 误码率确定 QAM 的误码率。

M 进制 QAM 系统正确判决的概率是：

$$P_c = (1 - P_{\sqrt{M}})^2 \quad (13)$$

式中 $P_{\sqrt{M}}$ 是 \sqrt{M} 进制 PAM 系统的误码率，该 PAM 系统具有等价 QAM 系统的每一个正交信号的一半平均功率。通过适当调整 M 进制 PAM 系统的误码率，可得：

$$P_{\sqrt{M}} = 2(1 - 1/\sqrt{M})Q\sqrt{(3/M - 1)(E_{av}/No)} \quad (14)$$

式中 E_{av}/No 是每个符号的平均信噪比。因此，M 进制 QAM 的误码率为：

$$P_M = 1 - (1 - P_{\sqrt{M}})^2 \quad (15)$$

当 K 为偶数时候，这个结果对 $M = 2^k$ 情形是精确的。当 K 为奇数时，就找不到等价的 \sqrt{M} 进制 PAM 系统。如果使用最佳距离量度进行判决的最佳判决器，

可以求出任意 $k \geq 1$ 误码率的严格上限^[4]。

$$P_{\sqrt{M}} \leq 1 - [1 - 2Q\sqrt{3E_{av}/(M-1)N_0}] \leq 4Q\sqrt{3kE_{av}/(M-1)N_0} \quad (16)$$

其中， E_{av}/N_0 是每比特的平均信噪比。

4.1.3 关系曲线求解

通过以上分析我们可以得到不同调制方式下，误码率与信噪比的关系式。我们利用 MATLAB 进行 BER 与 SNR 关系曲线的绘制，先随机产生一系列二进制数字作为传输信号，再按照上述方法进行信号调制。之后按照信噪比依次为 0、1、2，……，25 产生服从正态分布的白噪声，将产生的白噪声加入到信号中后进行解调，最后得到误码率并绘制误码率随信噪比变化的曲线。

实验得到的误码率随信噪比变化的曲线图如图 4-11 所示，星座图如图 4-12 所示。

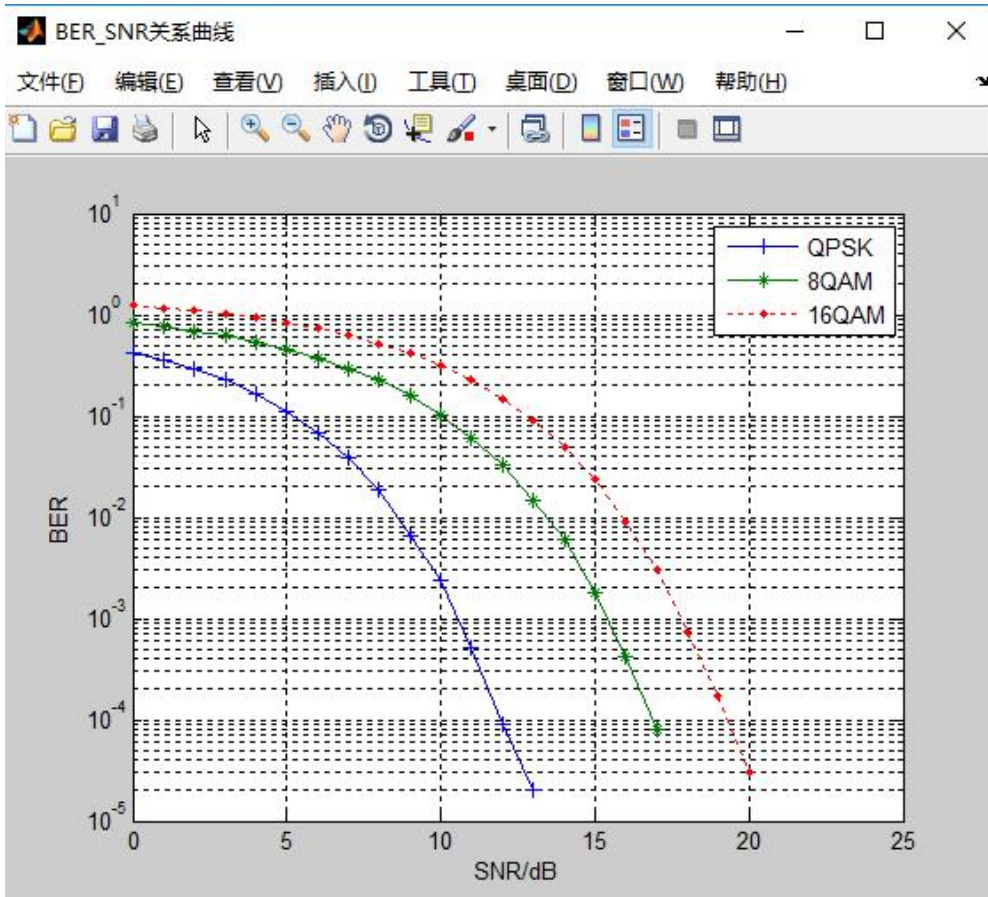


图 4-11 BER 与 SNR 关系曲线

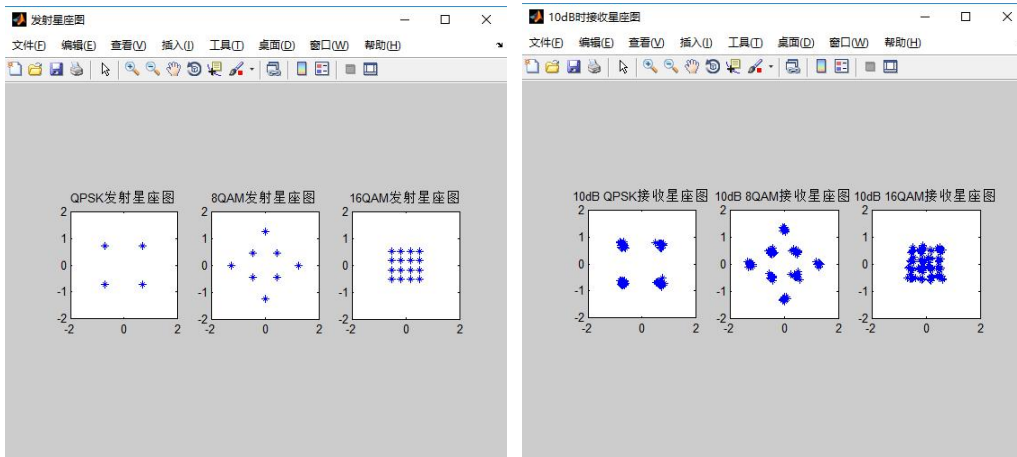


图 4-12 星座图

由图 4-11 可知，当 BER 相同时，QPSK 的 SNR 容限点最低，16QAM 的 SNR 容限点最高。BER=0.02 时 QPSK 的 SNR 容限点为 8, 8QAM 的 SNR 容限点为 12.5, 16QAM 的 SNR 容限点为 15。

4.2 子问题_2 求解

4.2.1 子问题_2 分析

由题目中给出的材料可知，光传输链路由多个相同跨段的级联组成。以其中某一个跨段进行分析，一方面，信号在传输的过程中会衰减，每传输 15km 会衰减一半，一个跨段结束后会用放大器对信号进行光功率补偿，使得光功率恢复原来值的大小；另一方面，信号的传输过程中会存在噪声，噪声主要包含两部分：放大器引入的自发辐射噪声和光纤本身非线性效应引起的噪声（这两者都是加性噪声），其中非线性效应噪声是每个放大器自发辐射噪声的 2/3。

本题要求在给定误码率和每跨长度的情况下，求信号能传输的最远传输距离。由于光传输由相同的多个跨段组成，且每跨的长度一定，因此该问题可简化为求解信号能传输的最多的跨段数。信号之所以能传输有限的跨段数是由于传输线路上存在噪声，当噪声累加到一定程度时，信号将不能正常传输。

噪声累加到什么程度，是衡量信号将不能继续传输的标准，本题可根据 4.1 的 BSR_SNR 关系曲线得到在给定误码率下对应的信噪比，根据信噪比和入纤功率计算跨段上总的噪声的功率，计算出的功率值就是噪声叠加的上限值。

4.2.2 子问题_2 建模

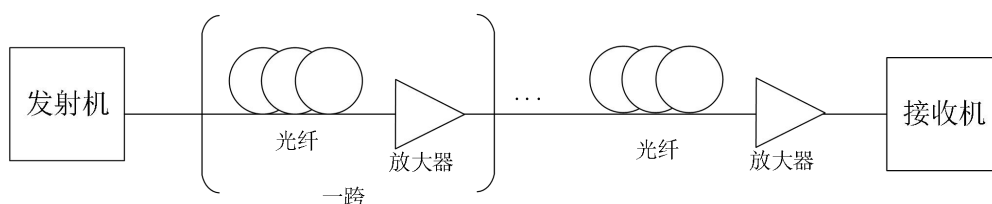


图 4-13 光传输链路图

图 4-13 是光传输链路模型，图中可看出每个跨段的传输链路基本相同，由于每一跨的输入功率在上一跨均被放大器补偿为相同的值，放大器结构一样，光纤材料相同，传输距离也相同，因此可建立简化的数学模型，将光传输链路的噪声分析简化为单跨噪声的分析。

单跨段的噪声分为两个部分。

第一部分是放大器的自发辐射噪声，该部分噪声在每跨段的末尾叠加，与功率增益 Gain 有直接的关系。

$$P_z = 2\pi h f B (NF - 1 / \text{Gain}) \quad (17)$$

Gain 为补偿光纤衰减所对应的功率增益，由于信号每经过 15km 会衰减为原来的一半，经过一段距离后信号会衰减为原来的 $1/n$ ，经过放大器放大后又恢复原来的值，故放大器的放大倍数为 n ，对应的功率增益计算式如式

$$\text{Gain} = 10 \lg n \quad (18)$$

上述计算 Gain 的过程是将光功率先放大，再叠加噪声，因此在计算实际每段的自发辐射噪声时，还需要在 P_z 的基础上乘以增益 Gain，故每段的自发辐射

噪声计算式为：

$$P_z' = P_z * \text{Gain} \quad (19)$$

第二部分是光纤非线性效应引起的噪声，该部分噪声是放大器自发辐射噪声的 $2/3$ ，在每跨开头叠加。题目给出，当光纤功率为 1mW 时的非线性噪声约等于单个放大器噪声的 $2/3$ ，单个放大器噪声为 P_z ，可以简化处理模型，在计算噪声时，默认输入光纤功率均为 1mW，则非线性噪声的计算式为：

$$P_f = \frac{2}{3} * P_z \quad (20)$$

由于自发辐射噪声与非线性噪声均属于加性噪声，可以叠加，且每跨叠加的噪声间相互独立，因此信号在每一跨传输的总噪声 P 为：

$$P = P_f + P_z' \quad (21)$$

4.2.3 子问题_2 求解

1、求解功率增益 Gain

根据式 (18)， n 表示放大器需要放大的功率倍数。由题目知，该放大倍数与单跨传输距离存在一定的关系。每传输 15km 功率会衰减一半，则传输距离与功率衰减倍数的关系如下表 4-2 所示：

表 4-2 传输距离与功率衰减倍数的关系

传输距离/km	0	15	30	45	60	...
功率衰减倍数	1	1/2	1/4	1/8	1/16	...

利用表中的数据在 Matlab 中进行曲线拟合，得到当距离为 80km 和 100km 时，功率的值以及对应求出的 Gain 值如下表 4-3 所示：

表 4-3 距离与 Gain 值关系表

距离 d/km	功率衰减倍数	放大器放大倍数 n	功率增益 Gain
80	0.026	38.46	15.85
100	0.01	100	20

2、求解关系式

根据问题 1.1 中得到的误码率 BSR 和信噪比 SNR 的对应关系，可以得到不同误码率下对应的信噪比 SNR。

根据模型假设，入纤功率 $P_s=1\text{mw}$

$$\text{由式: } SNR(\text{dB}) = 10 \log_{10}(P_s / P_n) \text{ 求得 } P_n = P_s / (10^{SNR/10}) \quad (22)$$

由 4.2.2 可知，单跨噪声 P 计算式为

$$P = P_f + P_z' = P_z * Gain + 2/3 * P_z$$

$$= 2\pi h f B (NF - 1 / Gain) * Gain + 2/3 * 2\pi h f B (NF - 1 / Gain) \quad (23)$$

因此信号可以传输的最大跨段数为 $N = P_n / P$ ，可以传输的最大距离为 $S = d * N$ 。

根据以上关系式，结合 4.1 的 BSR_SNR 关系曲线，得到当 BSR 值为 0.2 时，三种调制模式下，单跨距离 80km 和 100km 时，信号可传输的最大跨段数和最远距离如下表 4-4 所示：

表 4-4 信号可传输的最大跨段数和最远距离表

BSR	0.02					
调制格式	QPSK		8QAM		16QAM	
SNR/dB	8		12.5		15	
单跨传输距离/km	80	100	80	100	80	100
最大跨段数	65	50	21	18	12	10
最远传输距离/km	5200	5000	1680	1800	960	1000

根据上表可得，当单跨传输距离为 80km 时，信号在 QPSK, 8QAM, 16QAM 三种调制模式下可传输的最远距离分别为 5200km, 1680km, 960km，当单跨传输距离为 100km 时，信号可传输的最远距离分别为 5000km, 1800km, 1000km。

3、绘制关系曲线

为了更好的研究前误码率 BSR 与信号可传输的最大跨段数之间的关系，结合 4.1 的 BSR_SNR 关系曲线，以及 4.2.2 分析的关系式，在 matlab 中输入程序进行仿真，得到单跨不同传输距离时，三种调制模式下 BSR 与跨段数之间的关系曲线如图 4-14 和 4-15 所示：

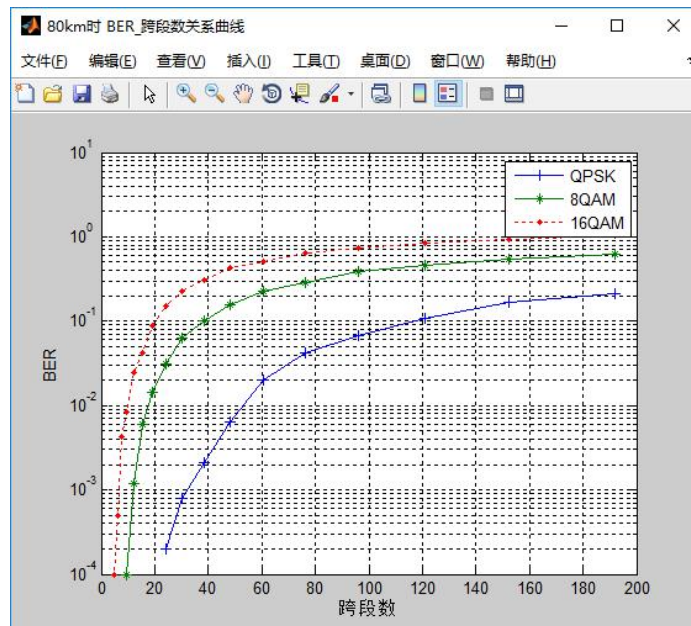


图 4-14 80kmBSR 与跨段数之间的关系曲线图

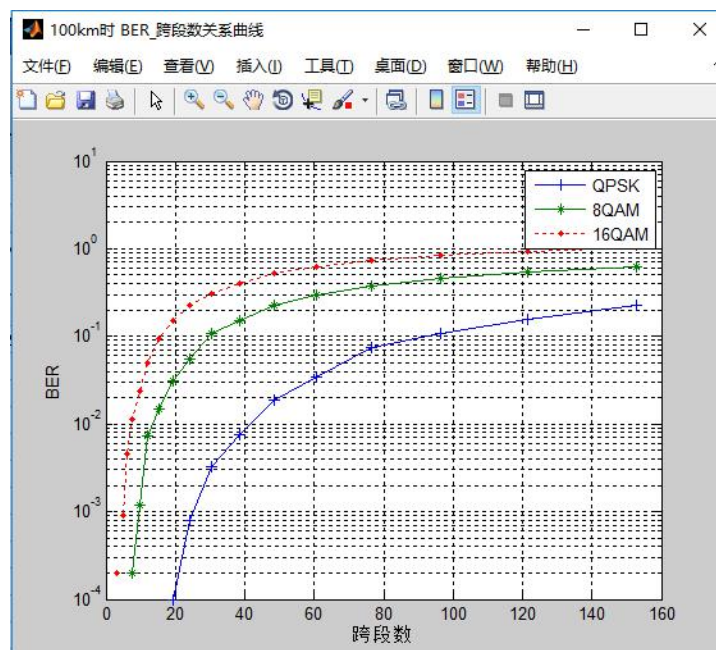


图 4-15 100kmBSR 与跨段数之间的关系曲线图

五、问题二求解

5.1 子问题_1 求解

5.1.1 分析与模型建立

问题二的子问题_1 要求当城市群之间的网络连接数从 16 增加到 33 时，不考虑中间节点，对城市群制定两个光传送网规划，使规划出的网络总价值最大。由于无中间节点，每个城市都必须与相应的连接城市之间直接进行信号传输，因此对网络规划的要求添加以下三点，保证在无中间节点的情况下每个城市都能正常通信。

(1) 两个城市之间仅有一条连接，不能重复。

(2) 城市群中的每个城市都必须接入网络。

(3) 在仅有 16 条连接的基础上，得出最优配置，随后在此基础上，在增加 17 条新的连接，得到 33 条连接数的最优配置。

在城市群之间添加网络连接，每条连接线路的网络价值不同，要求连接数量一定，每个城市都必须加入连接，且总的网络价值最大，于是可将该问题转化为如下优化问题 1。

问题 1 找到最优决策变量 i, j ，使得目标方程的值最大化。

$$\max V = \max(\sum_{i,j=1,i < j}^n V_{ij}) = \max(\sum_{i,j=1,i < j}^n \sqrt{P_i P_j} * C_{ij}) \quad (1)$$

$$\text{相同的 } P_i P_j \text{ 只能出现一次} \quad (2)$$

$$i \text{ 和 } j \text{ 出现的值涵盖 } 1 \text{ 到 } n \quad (3)$$

目标函数 $\max V$ 表示最大的网络总价值， V_{ij} 表示每条线路连接的网络价值，

P_i 和 P_j 表示城市 i 和城市 j 的人口数量， C_{ij} 表示城市 i 和城市 j 连接后的网络容量， n 表示允许的总连接数，约束条件 (2) 保证了两个城市之间只能有一条连接，约束条件 (3) 保证了所有城市都必须加入连接。

城市群共计有 12 个城市，要想使每个城市均连接在网络中，最低需要 11 条线路，该 11 条线路确定后，剩余的线路只需考虑网络价值一个限制条件。因此该问题可化简为两步求解，一是寻找最优的能使城市全部连入网络的 11 条线路，二是再确定剩余的线路连接。

第一步要求城市之间建立 11 条连接，将每个城市连接起来，且连接的线路权值总和最大，该问题可以转化为求解使各边权的总和最大的“最小生成树”问题。最小生成树问题中，要求在将所有顶点连接的情况下，所有边的代价和最小。本题目要求最终算出的网络价值最大，即所有边的代价和最大，只需将“最小生成树”问题的条件适当修改，即可利用该问题的算法思想来解决本问题。

第二步当 11 条连接确定后，城市均能连入网络，剩余的线路连接只需考虑网络价值。因此只需要将剩余未连入网络的线路按照网络价值的高低进行降序排序，选出前 5(或 22)条线路进行连接，即可得到最优解。

5.1.2 问题求解

对于子问题_1，我们分三步求解：

- (1) 确定最少连接数为 11 条的光传送网规划；
- (2) 给出 16 条连接数的传送网规划；
- (3) 在 16 条的基础上决定 33 条的传送网规划。

5.1.2.1 确定最少连接数为 11 条的光传送网规划

1、确定每条线路的网络价值

由于该问题不考虑中间节点，不存在链路上容量可再分配的问题。因此连接任意两个城市后，该连接产生的网络价值只与两个城市各自的人口，两城市间的距离有关。为了方便计算各个线路的网络价值，作以下简化处理：

(1) 城市间的距离均以直线距离来计算；

(2) 城市人口按照 2018 年该城市常住人口数量计，北京/天津区域的总人口=北京人口+天津人口，广州/深圳区域的总人口=广州人口+深圳人口。

城市间的距离与两城市的传输容量（边界值处）满足以下关系：

表 5-1 距离与两城市的传输容量关系表

城市间距离 D /单位 km	传输容量 C /单位(Tb/s)
$0 < d \leq 600$	32
$600 < d \leq 1200$	16
$1200 < d \leq 3000$	8
$d > 3000$	MIN

结合以上处理，通过网上搜索，得到各个城市人口数量 P，以及两两城市之间的直线距离 D，依据表 5-1，计算传输容量 C，则城市之间的每条线路连接对应的网络价值计算公式为：

$$V_{ij} = \sqrt{P_i P_j} * C_{ij} \quad (4)$$

通过网上查询，得到 12 个城市的 2018 年常住人口数量，单位以百万计，具体数据见附录，网上查询获取 12 个城市的两两之间的直线距离，构建距离的邻接矩阵，并根据上表 5-1 得到城市之间的容量，数据同见附录。

2、构建加权连通图

本题构建的是无向的加权图，图的存储方法通常有两种，邻接矩阵和邻接表^[5]，原理分别如下：

构建邻接矩阵：

根据两两城市之间的线路的网络价值，构建邻接矩阵 M，邻接矩阵中第 i 行第 j 列的值为 M_{ij} ，表示城市 i 和城市 j 连接线路的网络价值，无向图中 $M_{ij} = M_{ji}$ ，

邻接矩阵为对称矩阵，当 $i = j$ 时， M_{ij} 的值设为 0。

构建邻接表：

邻接表由表头节点和表节点两部分组成，当两两城市之间的容量不为 MIN 时，表示两个城市之间可以连接，将某城市作为表头节点，可以与其连接的其他城市为表节点，网络价值为权重值。

本题选择根据人口数量和城市间的容量构建权值为网络价值的邻接矩阵，具体数据见附件 1 表格。

3、算法求最优解

对于“最小生成树”问题有很多求解方法，其中使用最多的是 Prim 算法和 Kruskal 算法^[6]，两者都属于贪心算法。下面我们分别采用 Prim 算法和 Kruskal 算法进行求解。

算法 1：Prim 算法

Step1: 输入一个加权连通图，该图的顶点集合分为 V 和 Vnew,图的边集合为 U。

Step2: 选择一个城市作为最小生成树的初始节点 V1，添加到 Vnew，作为 Vnew 的初始集合 {V1}，其余城市节点 Vi 全部添加到集合 V，令 U 的初始集合为空；

Step3: 寻找集合 Vnew 中各节点的所有关联边中权值最大的那条（该边的另一顶点不属于集合 V），然后将关联边的另一顶点 Vi 加入到 Vnew 中，并且从 V 中删除。将该边加入集合 U；

Step4: 重复 Step2，依次循环直到所有顶点都加入集合 Vnew，V 中的集合为空；

Step5: 集合 Vnew 中节点和 U 中所有的边构成了最小生成树。

算法 2：Kruskal 算法

Step1: 输入一个加权连通图，该图的顶点集合为 V，图的边集合为 U，U 初始化为 {}；

Step2: 将连通图的所有边按照权值大小降序排列；

Step3: 将排序好的边依次加入到生成树中，边的两个顶点加入集合 Vnew 中，边加入后产生回路，则跳过该条边，用集合 U 记录加入的边；

Step4: 重复 Step3，依次循环直到所有顶点都加入集合 Vnew，V 中的集合为空集合 Vnew 中节点和 U 中所有的边构成了最小生成树。

比较两种算法，从算法的复杂度来看，Prim 算法的复杂度为 $O(N^2)$ ，Kruskal 算法的复杂度为 $O(N \log N)$ ，Kruskal 算法的效率会较高。但从算法的基本原理看，Prim 算法主要针对点来展开，适合于点少边多的相对稠密的连通图^[7]，Kruskal 算法主要是针对边来展开，边数少点多时效率会非常高，所以对于稀疏图有很大的适应性。考虑到本题的实际情况，点数相对较少，因此本题目采用 Prim 算法来具体实现，程序语言采用 Java 语言，加权连通图用邻接矩阵的形式来表示。求解的城市之间连接方案如表 5-2 所示：

表 5-2 连接方案

连接序号	城市	城市	线路网络价值 单位 mTb/s
1	乌鲁木齐	北京	94.86

2	北京	郑州	615.53
3	北京	上海	476.79
4	郑州	武汉	335.62
5	北京	哈尔滨	307.77
6	郑州	西安	303.58
7	西安	重庆	525.81
8	重庆	成都	701.08
9	重庆	广州	487.93
10	重庆	昆明	463.72
11	北京	拉萨	34.41
网络价值合计			4347.10

5.1.2.2 给出 16 条连接数的传送网规划

根据问题 1 的结果，建立 11 条连接后，当前所有城市都已加入网络，且网络价值最大。剩余的 5 条连接的唯一约束条件就是不能有重复连接，但要保证价值最大。因此只需要程序查找剩余未连接的线路中网络价值最大的 5 条，加入网络即可。查找结果如表 5-3 所示：

表 5-3 16 条连接数的传送网规划

连接序号	城市	城市	线路网络价值 单位 mTb/s
12	西安	成都	384.0
13	广州	成都	356.34
14	昆明	成都	338.66
15	北京	武汉	322.79
16	广州	武汉	295.46
网络价值合计			1697.25

因此 16 条线路连接后，总的网络价值为 $4347.10+1697.25=6044.35$ mTb/s，此时总的网络价值最大。连接图如图 5-1 所示。

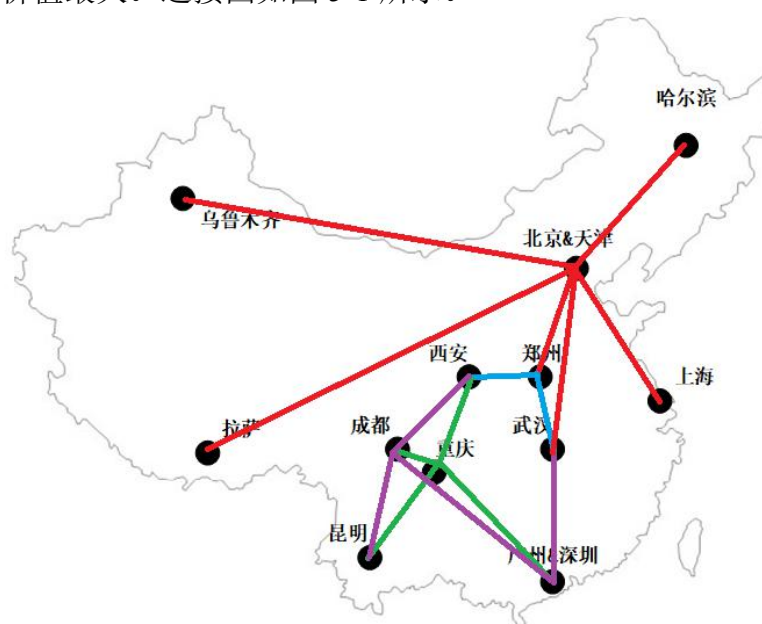


图 5-1 16 条连接数的传送网规划图

5.1.2.3 在 16 条的基础上决定 33 条的传送网规划

根据前两问的结果，建立 16 条连接后，所有城市都已加入网络，且网络价值最大。剩余的 17 条连接的确定方法与步骤（2）类似，只需要程序查找剩余未连接的线路中网络价值最大的 17 条，加入网络即可。查找结果如表 5-4 所示：

表 5-4 33 条连接数的传送网规划

连接序号	城市	城市	线路网络价值 单位 mTb/s
17	北京	西安	291.97
18	重庆	武汉	290.65
19	重庆	郑州	277.13
20	广州	北京	270.94
21	北京	重庆	266.53
22	武汉	上海	259.97
23	郑州	上海	247.87
24	昆明	广州	235.69
25	上海	西安	235.15
26	上海	广州	218.21
27	重庆	上海	214.66
28	成都	武汉	212.26
29	成都	郑州	202.39
30	成都	北京	194.65
31	武汉	西安	159.2
32	成都	上海	156.77
33	广州	郑州	140.86
网络价值合计			3874.9

33 条线路连接后，总的网络价值为 $6044.35 + 3874.9 = 9919.25 \text{mTb/s}$ ，此时总的网络价值最大。连接图如图 5-2 所示。

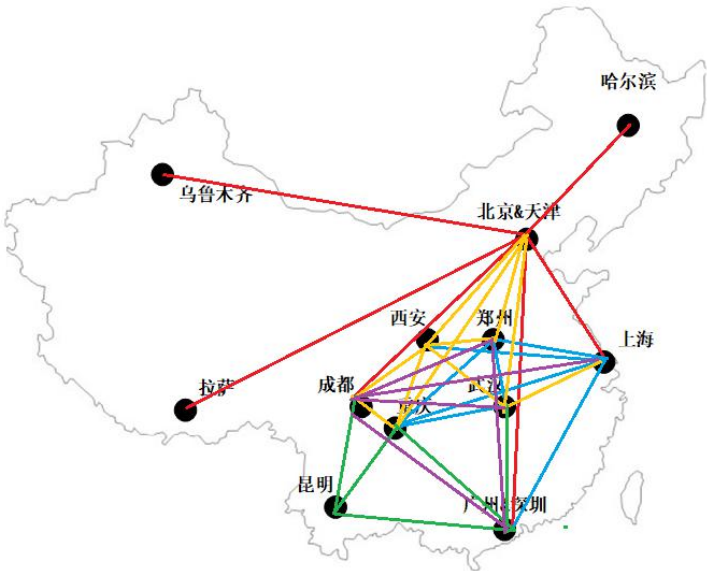


图 5-2 33 条连接数的传送网规划图

5.2 子问题_2 求解

5.2.1 问题分析及模型建立

子问题_2 要求在存在中间节点、两个节点之间也可以有多个连接并且每条链路容量可以任意分配的情况下，制定出网络连接数分别为 16 条和 33 条的网络规划和中间节点的传输容量分配情况，使得规划后的网络价值达到最大，并进一步探讨由市扩大为省（区）网络规划是否应该发生变化。该问题允许存在中间节点，因此某条链路上的网络容量可能有部分不是发送给该链路直接相连的终点，而是通过该地点进行转发到下一跳链路进行传输。该问题有以下几点要求：

- （1）城市群中的每个城市都必须接入网络。
- （2）两个城市之间允许存在中间节点，因此需要给出中间节点传输容量的分配情况。
- （3）每条链路上的总容量不能超过题目中给出容量的限制。
- （4）在仅有 16 条连接的基础上，得出最优网络规划，随后在此基础上，再增加 17 条新的连接，得到 33 条连接数的最优网络规划。

5.2.1.1 网络结构优化分析

同子问题_1，利用“最小生成树”算法，用 11 条链路将 12 个城市连接起来，在所有城市均连入网络后，考虑添加剩余数量的网络线路，并且需要考虑如何添加网络线路能使得存在中间节点允许容量分流情况下的网络价值最大。现考虑以下几点：

（1）由于网络价值和人口数量密切相关，所以人口数目较多的城市在网络规划中的价值举足轻重，因此要尽可能使人口数目较多的两个城市之间有网络容量的传输。

（2）当两个城市之间通过中间节点进行分流时，会占用中间节点的容量比例，使得整体的网络价值降低。因此要尽量让人口数目较多的城市之间以较短的路径连接。

基于以上两点考虑，我们选取人口明显较多的几个城市：北京、重庆、上海、广州、成都。通过路径寻优 Floyd 算法，在向基本的 11 条网络链路中添加线路时，使得这几个城市之间尽可能以最短的路径连接得到较为优化的网络规划，并记录所得出的最短路径以备后续使用。

5.2.1.2 容量分配分析

由上述分析可知，要尽可能地使人口数目较多的几座城市（北京、重庆、上海、广州、成都）间相互传输。所以容量分配时要尽可能地将容量分给这几座城市。因此此处我们采用“最大流”算法，分别对上述找到的最优路径进行分析，得到使网络总价值最大的容量分配。

5.2.2 相关算法

5.2.2.1 Floyd 算法

Floyd 算法是解决任意两点间的最短路径的一种算法，用来处理图的最短路

径问题，有时候也被用于有向图的传递闭包^[8]。

该算法的主要内容概括如下：

Floyd 算法的目标是寻找从 i 点到 j 点的最短路径。从动态规划的角度我们来进行分析。从任意节点 i 到任意节点 j 的最短路径有两种情况： i 点直接能到达 j 点；点经过若干个点到 j 点。我们记判断 $\text{Dis}(a,b)$ 为节点 a 到节点 b 的最短路径，故要想求出节点 i 到节点 j 的最短路径，则对于每一个结点 k ，我们需要判断 $\text{Dis}(i,k) + \text{Dis}(k,j) < \text{Dis}(i,j)$ 是否成立，若成立则令： $\text{Dis}(i,j) = \text{Dis}(i,k) + \text{Dis}(k,j)$ 。当遍历完所有的点 k ，则可以得到 i 到 j 的最短距离^[8]。

利用 Floyd 算法寻求图 (V,E) 中各顶点的最短路径时，首先要引入两个矩阵，分别用来表示各定点间距离的邻接矩阵 D 以及记录所经过的定点矩阵 P 。假设图中定点个数为 N ，则需要对矩阵进行 N 次更新。矩阵 D 的初始值为图 G 中各点到其他顶点的距离，不可达的记为无穷大。接下来对矩阵 D 进行 N 次更新。对于第 k 次更新，若 $\text{Dis}(i,k) + \text{Dis}(k,j) < \text{Dis}(i,j)$ ，则更新 $\text{Dis}(i,j)$ 的值为 $\text{Dis}(i,k) + \text{Dis}(k,j)$ 。 N 次更新结束后即可得到所求两点间的最短距离^[8]。

对于该问题，利用 Floyd 算法来求给定网络线路数目下的网络拓扑结构。首先根据各城市人口和距离求得每两个城市间的连接价值，并以此生成对应的邻接矩阵，利用 Floyd 寻找路径算法根据我们制定的判定标准遍历找出能使网络价值达到最大的网络拓扑结构^[9]。

5.2.2.2 最大流算法

最大流问题，是网络流理论研究的一个基本问题，求网络中一个可行流 f^* ，使其流量 $v(f)$ 达到最大，这种流 f 称为最大流，这个问题称为(网络)最大流问题。最大流问题是一个特殊的线性规划问题，就是在容量网络中，寻找流量最大的可行流^[10]。

最大流算法的基本原理如下：

对一个流网络 $G=(V,E)$ ，其容量函数为 c ，源点和汇点分别为 s 和 t 。 G 的流 f 满足下列三个性质：

容量限制：对所有的 $u, v \in V$ ，要求 $f(u,v) \leq c(u,v)$ 。

反对称性：对所有的 $u, v \in V$ ，要求 $f(u,v) = -f(v,u)$ 。

流守恒性：对所有 $u \in V - \{s,t\}$ ，要求 $\sum f(u,v) = 0$ ($v \in V$)。

容量限制是指从一个顶点到另一个顶点的网络流不能超过预先设置的容量；反对称性是指从顶点 u 到顶点 v 的流时其反向流求负所得，当参考方向确定之后，速度会有一正一负之分；流守恒性是指从非源点或非汇点的顶点触发的点网络流之和为 0。一般的最大流问题是在不违背上述原则的基础上求出从源点 s 到汇点 t 的最大流量值^[10]。

以基本的网络流最大流模型为例，其中有 n 个点，有 m 条有向边，有一个源点和一个汇点，源点通常规定为 1 号点，汇点通常规定为 n 号点。每条有向边上有两个量，容量和流量，从 i 到 j 的容量通常用 $c[i,j]$ 表示，流量则通常是 $f[i,j]$ 。显然，流量 \leq 容量。而对于每个不是源点和汇点的点来说，所有“进入”他们的流量和等于所有从他本身“出去”的流量。

如果所有边上的流量都没有超过容量(不大于容量)，那么就把这一组流量称为一个可行流。零流是一个最简单的例子，即所有的流量都是 0 的流。比如从零流开始考虑，假如有一条路，这条路从源点开始一直一段一段的连到了汇点，并且，这条路上的每一段都满足流量 $<$ 容量，注意，是严格的 $<$ ，而不是 \leq 。那么，我们

一定能找到这条路上的每一段的(容量-流量)的值当中的最小值 δ 。我们把这条路上每一段的流量都加上这个 δ ，一定可以保证这个流依然是可行流。这样我们就得到了一个更大的流，他的流量是之前的流量+ δ ，而这条路就叫做增广路。

不断地从起点开始寻找增广路，每次都对其进行增广，直到源点和汇点不连通，也就是找不到增广路为止。当找不到增广路的时候，当前的流量就是最大流。寻找增广路的时候我们可以简单的从源点开始，并不断修改这条路上的 δ 量，直到找到源点或者找不到增广路^[11]。

5.2.3 问题求解

5.2.3.1 网络拓扑结构图的生成

以 11 条添加为 16 条为例进行分析。

由于需要向最基本的 11 条链路中添加新的网络线路使得人口较多的几大城市（北京、重庆、上海、广州、成都）之间路径最短，并且按照题目的要求两个城市之间可以有多条连接，因此不能用传统的 Floyd 算法进行路径寻优，需要对该算法进行改进使得结果满足我们的要求。

对 Floyd 算法做以下几点改进：

(1)因为每条线路上有容量最大值限制，因此若想尽量使得人口数量多的城市之间容量传输较多，所经过的线路容量最小值越大越好。又由前面的分析可知这些城市之间途经的线路数越小越好，故五座城市之间的邻接矩阵的内容不再是城市之间的距离，应当换成路径所经过的线路容量最小值和线路数目的比值的最大值。

(2)用 Floyd 算法进行路径寻优不只是在原有的 11 条线路上进行分析，还要不断向这些城市之间的节点之间添加线路作为新的路径（要按照要求保证添加线路的两个节点之间的距离在题目给出的范围内）直到线路数目达到所要求的数目。

(3)需要引入一个集合用来保存已被直接连接的城市对，在添加新的线路时不断查询该城市对是否已被直连以避免两座城市之间多次直接连接。

算法的具体内容如下：

(1)定义集合 S 用来保存已经被直连的城市对，该集合初始化为 11 条线路时直连的城市对；创建北京、重庆、上海、广州、成都这五座城市之间的邻接矩阵，矩阵的内容按照上述要求输入。

(2)遍历邻接矩阵，依次向相关节点之间按要求添加线路，更新邻接矩阵，并保存所添加的线路到网络拓扑结构中。

(3)判断网络线路数目是否达到数目要求，是的话结束算法，否则跳到(2)继续执行。

5.2.3.2 容量分配情况确定

按照上述过程确定网络规划后，需要对北京、上海、广州、重庆、成都这五座城市，选出其中两个座作为最大流的源点和汇点分别进行最大流算法分析，求解出最佳容量配置情况。

由于最大流算法相对于本题来说有一定的局限性，因此对最大流算法做出如下改进：

(1) 由于题目中每段线路均有最大容量限制，因此五座城市中选出的城市对之间的最大流算法不能同时进行（例如不能同时进行北京为源点重庆为汇点、武汉为源点广州为汇点的最大流算法，因为这两条寻优路径可能重合导致某些线路上容量超出限制），基于启发式的考虑，为使网络价值达到最大，先选取人口数最多的两个城市之间进行最大流算法。

(2) 每条路径上的限制条件为题目中对相应线路网络容量的限制。

(3) 某对城市之间进行完最大流算法后所经过的路径的网络容量限制要减去所用掉的容量值。

(4) 目标函数取网络总体价值。

5.2.4 求解结果

按照前面所述算法进行编程分析，得到最佳的网络拓扑结构和容量分配情况如图 5-3 和 5-4 所示：

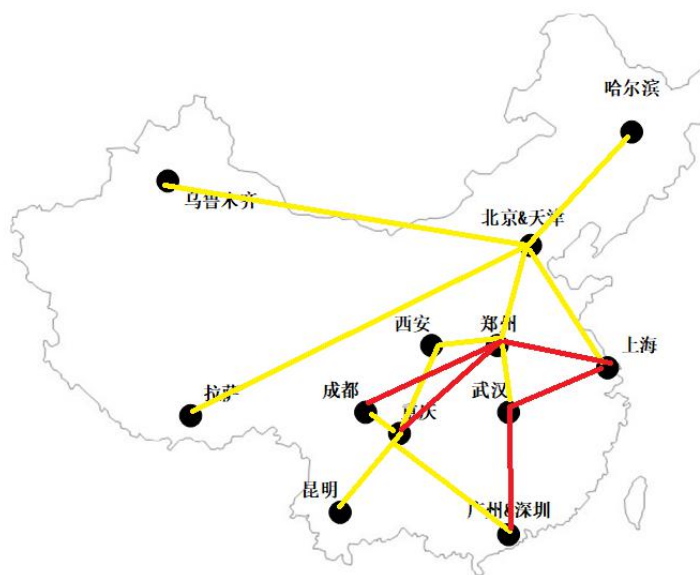


图 5-3 16 条连接数的传送网规划图

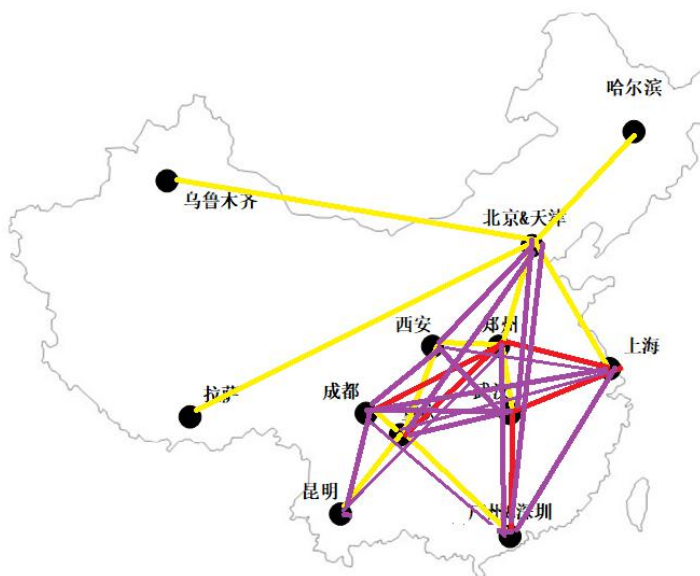


图 5-4 33 条连接数的传送网规划图

如果由市扩大为省时，默认省与省份之间的距离仍为原来市区与市区的距离，但是人口数量需要更新，更新后重新使用式（5）计算每条线路的权值。

$$V_{ij} = \sqrt{Q_i Q_j} * C_{ij} \quad (5)$$

其中 Q_i, Q_j 为省份的人口总数。

权值重新计算后，更新求解子问题_1 和子问题_2 中使用的邻接矩阵或邻接表，重新带入模型，进行计算求解获得最优网络规划。

5.3 子问题_3 求解

5.3.1 问题分析

由题意可知，可以从多个角度对光传送网络的价值进行衡量，从运营商的角度来看，光传送网络连接地区的经济越发达，带来的收入就会越高，从而光传送网络的价值越高。从政府的角度来看，为了均衡发展，必须保障发展相对滞后地区的通信。不同的衡量标准使得网络的价值也不尽相同。所以子问题三可以简化成为光传送网络重新制定一个衡量其价值的标准，并将其量化，得到新的目标函数，使得网络规划的价值判定更为合理。

重新制定衡量标准，得到新的目标函数之后，每个城市之间的连接的网络价值均会发生改变，因此子问题_1 和子问题_2 中的规划也需要进行相应的变化。

5.3.2 模型建立

网络价值是网络规划的重要衡量标准，为了更好地进行网络规划，我们需要对网络价值的因素进行分析。一般来讲，网络连接地区的人口以及经济水平是影响网络价值的最重要因素。影响网络价值的因素有很多，根据国内外相关研究，我们选取了除连接地区人口和距离以外的对网络价值有影响的四个因素。现针对这四个因素分别进行研究分析其对网络价值的影响。

1、城市的经济发展水平

一个地区的经济发展水平是指一个地区经济发展的规模、速度和所达到的水准^[12]。反映一个地区经济发展水平的常用指标有国民生产总值、国民收入、人均国民收入、经济发展速度、经济增长速度等^[12]。连接地区的经济发展水平的高低会影响到该地区对网络的需求程度。相关研究表明，在经济发展水平高的地区，互联网的需求水平也越高，因此对网络价值有很大的影响。经济发展水平越高，网络需求越高，则连接价值越大，所以，连接地区的经济发展水平和网络价值呈高度正相关的关系。

2、城市的科技发展水平

“科学技术是第一生产力”，科技发展水平的高低对网络价值的影响体现在，科技发展水平不仅会对该地区的经济发展起到促进作用，同时，科技发展水平直接决定了该地区网络的发展水平，科技的发展是促进网络发展的第一动力。所以，连接地区的科技发展水平是影响网络价值的一个重要影响因素。

3、城市的重要程度

由于地域位置、经济基础、历史背景等多种因素的影响，各地区经济存在着不均衡发展的问题。地区经济均衡发展是政府的责任，保障地区经济均衡发展是缩小贫富差距的重要手段。所以从政府的角度来看，必须保障对于一些相对滞后地区的通信。因此，地区的重要程度也是制定网络规划时必须考虑到的一个衡量网络价值的重要因素。发展相对滞后的地区重要程度相对较高，发展水平较高的地区重要程度相对较低。

4、城市之间的网络连接成本

连接地区的网络连接成本将直观地影响到网络价值。连接成本越高的地区，为运营商带来的收益会相对较低，相应的网络价值就会降低，所以连接地区的网络连接成本是影响网络价值的重要因素之一。

5.3.3 模型求解

该模型的求解主要是考察新的对网络价值判定的标准，重新制定目标函数。现对问题 5.3.2 提出的影响因素分别进行分析。

1、经济发展水平。一个国家或地区经济发展的水平，可以从其规模(存量)和速度(增量)两个方面来进行测量。对经济规模的测量中最常用的指标是“国内生产总值”(GDP)，在经济发展速度方面，最常用的指标是“GDP 年增长率”。通过国家统计局网站查询到城市的最新年度 GDP 数值，利用 GDP 值来确定城市的经济水平量化值，用 J 表示。

2、科技发展水平。衡量城市的科技发展水平使用较多的标准为科技活动产出，通过查询国家统计局网站，根据城市最新年度科技活动产出情况来量化确定城市的科技水平，用 K 表示。

3、城市的重要程度。城市的重要程度主要表现为政府对该城市在网络发展上的重视程度，通过查询国家官方网站和最新政策，属于政府重点扶持城市的区域，城市的重要程度量化值较高，普通城市则较低，该量化值用 Z 表示。

4、城市之间的连接成本。考虑到人口密集的区域网络的利用率较高，运营商收到的费用也较高，因此连接成本用人口密度来作为评判标准。人口密度=城市常住人口数/城市面积，城市的连接成本用 B_{ij} 表示， $B_{ij} = \sqrt{R_i * R_j}$ ， R_j 表示某城市的人口密度

综合上述分析，最终得到的网络价值的目标函数如下式：

$$V' = \sqrt{P_i P_j} * C_{ij} * \sqrt{J_i J_j} * \sqrt{K_i K_j} * \sqrt{Z_i Z_j} * B_{ij} \quad (6)$$

目标函数改变后，子问题_1 和子问题_2 中的规划求解方程同样发生了变化，如下式，重新根据新的网络价值生成的加权连通图，思路不变，分别求解即可。

$$\begin{aligned} \max V' &= \max \left(\sum_{i,j=1, i < j}^n V'_{ij} \right) \\ &= \max \left(\sum_{i,j=1, i < j}^n \sqrt{P_i P_j} * C_{ij} * \sqrt{J_i J_j} * \sqrt{K_i K_j} * \sqrt{Z_i Z_j} * B_{ij} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

六、问题三求解

6.1 问题分析

问题三要求对星座图进行改善，可以简单描述为：通过任意改变 16-QAM 方案中星座点的位置、数量或每个点的概率，尝试产生比 8-QAM（相邻各星座点之间距离相等）具有更低 SNR 容限点的调制方案，同时调制格式的信息熵需保持为 3bit。

QAM 有多种不同类型的星座图，最常用的两种分别是方形星座图和星形星座图，分别如图 6-1 (a) 和 (b) 所示。方形和星形星座图最大的差别在于星座点是否均匀分布。16-QAM 的方形星座图上的点并不都是均匀分布的，内外两圈上的星点之间是均匀分布的，而中间圈上的点很不均匀，而星形星座图两圈上的星点相位是均匀分布的^[13]。

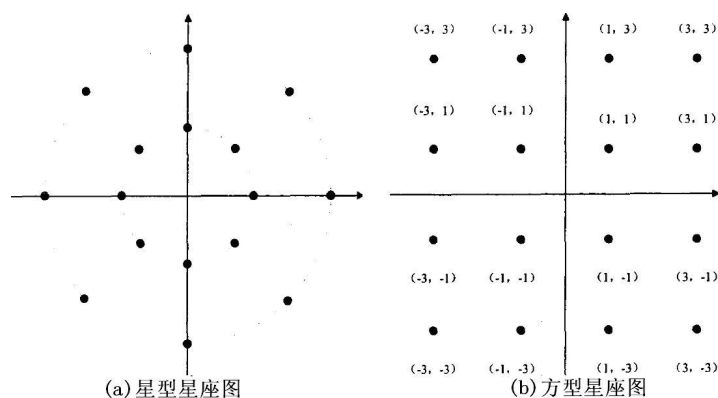


图 6-1 QAM 星座图

在星形星座图中，各点的振幅分别等于 ± 1 、 ± 3 和 ± 5 。将其和方形星座图对比，可以看出，星形星座图中各信号点的最小相位差比方形星座图中各信号点的最小相位差大，因此容许更大的相位抖动，所以相同的信噪比之下，误码率会相对较低^[13]。

6.2 问题求解与讨论

由于星座图调整可包括对点的位置，数量以及每个星座点的概率进行调整，依据这些变量，分别进行如下的讨论：

讨论 1、不改变星座点的概率，只改变点的位置和数量

信息熵的表达式如式 (1)，由题目要求可知，信息熵需要保持为 3bit

$$\Omega = -\sum_{k=1}^8 p_k \log_2(p_k) \quad (1)$$

当每个点的概率相同时，则得到式 (2)：

$$\Omega = -\sum_{k=1}^8 p_k \log_2(p_k) = -\log 2(p_k) = 3 \quad (2)$$

解方程，得 $p_k=1/8$,因此状态数 N 的值等于 8，共计有 8 个星座点。

由 6.1 分析可知，当星座图中的点的边界越接近圆形时，噪声容限值越大，误码率会相对越低，因此可以尝试使调整后的星座图排列如图 6-2 所示，图中每个星座点的概率相等。

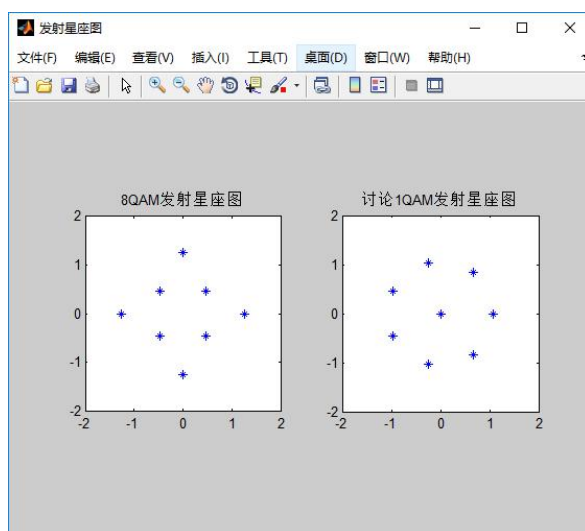


图 6-2 调整后的星座图

利用该发射图中星座点的位置，在 matlab 里进行仿真，得到仿真结果如图 6-3 所示，从该图中可看出，经过调整后的 16-QAM 比 8-QAM（相邻各星座点之间距离相等）具有更低 SNR 容限值，满足题意要求。

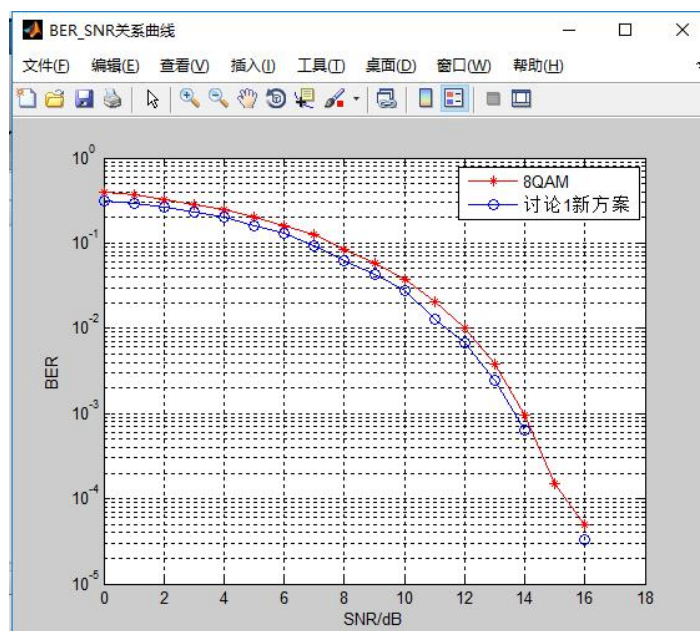


图 6-3 BER-SNR 关系曲线

讨论 2、在讨论 1 的基础上，改变星座点的概率

在讨论 1 的基础上，即保证星座点个数不变的情况下，改变星座点的概率，

寻找是否有满足要求的解。题目要求信息熵为 3bit 且保持不变。故该问题转化为求解满足式 (3)，式 (4)，且比 8QAM 具有更低容限点的调制方案。

$$\Omega = -\sum_{k=1}^8 p_k \log_2(p_k) \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^8 p_k = 1 \quad 0 < p_k < 1 \quad (4)$$

利用程序计算得，满足上述条件的解只有一个，即 $p_k=1/8$ ($k=1,2,\dots$)，此时八个星座点的概率均相等，与讨论 2 的前提要求不符，因此讨论 2 不存在满足条件的解。

讨论 3、改变星座点的个数，同时改变星座点的概率

由讨论 1,2 可知，信息熵为固定值的情况下，本讨论中星座点数只能选择 9~16，星座点的概率值不能互相相等。不论星座点是星形图分布，还是方形图分布，都不难看出，星座图中最外圈的星座点是原始点时，信号传输后的误码率最低，而最内圈的星座点表示的信号在传输时误码率最高，因此可以考虑将外圈的星座点概率值设的较大，内圈星座点概率值设的较小。此外，在概率值不变的情况下，星座点的个数应该越少越好，得到的调制方案具有更低的容限点。

七、模型的改进与评价

7.1 模型的优点

1、本文中的模型均是在大量阅读相关专业资料的基础上建立的，有很强的理论依据，故求出的结果科学准确。

2、模型提出后，通过 MATLAB 编程进行了大量仿真实验，因此得到的结果客观真实。

3、模型的建立是在已有算法的基础上结合实际情况进行了相应的改进，富有创新性。

7.2 模型的缺点

1、在对光纤线路上的噪声进行分析时，仅考虑了放大器引入的自发辐射噪声和光纤介质非线性效应引起的噪声，未考虑实际中存在的其他干扰，故得到的结果会存在误差。

2、光纤通信中分析信号衰减时，为分析简便认为信号按比例衰减，未曾考虑实际的衰减情况。

3、网络规划部分提出的解决方案是相对有效的算法，并非问题的最优解。

7.3 模型存在的改进空间

1、通过深入学习光纤通信的专业知识可以对光纤链路的噪声以及信号的衰减部分进行更好的建模，使得计算结果增加贴近实际情况。

2、通过深入社会调研可以更加明确网络价值的真正内容，更加合理地设置网络规划的目标函数，从而使规划处的网络结构更加贴合社会情况。

参考文献

- [1] 林红,甘文胜,曾腾.简易反射式无线光通讯的设计[J].安阳师范学院学报,2015(05):37-39.
- [2] 孔凡斌.简易光通讯系统设计.青岛理工大学
- [3] 林杰,牛昱晴,罗丹.基于 Matlab 的通信系统仿真[J].大众汽车,2014(2):60-60.
- [4] 樊昌信,曹丽娜.通信原理(第六版)[M],国防工业出版社,2009
- [5] https://blog.csdn.net/cupid_qx/article/details/60468600
- [6] 江波,张黎.基于 Prim 算法的最小生成树优化研究[J].计算机工程与设计,2009,30(13):3244-3247.
- [7] <https://www.2cto.com/kf/201609/545375.html>
- [8] <https://www.cnblogs.com/ECJTUACM-873284962/p/6995648.html>
- [9] https://blog.csdn.net/qq_35644234/article/details/60875818
- [10] <https://blog.csdn.net/vonmax007/article/details/64921089>
- [11] <https://baike.baidu.com/item/%E6%9C%80%E5%A4%A7%E6%B5%81%E9%97%AE%E9%A2%98/19144252?fr=aladdin>
- [12] <https://baike.baidu.com/item/%E7%BB%8F%E6%B5%8E%E5%8F%91%E5%B1%95%E6%B0%B4%E5%B9%B3>
- [13] 刘继红,李佳泯,梁猛.16-QAM 相干光纤通信系统星座图的优化与选择[J].半导体光电,2012,33(01):110-112+140.

附录

城市人口表

城市序号	城市名称	城市人口/百万
1	乌鲁木齐	3.8
2	拉萨	0.5
3	昆明	7
4	广州+深圳	31
5	重庆	30
6	成都	16
7	西安	9
8	武汉	11
9	郑州	10
10	上海	24
11	北京+天津	37
12	哈尔滨	10

城市距离表

	乌鲁木齐	拉萨	昆明	广州	重庆	成都	西安	武汉	郑州	上海	北京	哈尔滨
乌鲁木齐	0	1900	3700	3800	2300	2000	2300	2800	3000	3000	2400	3000
拉萨		0	2300	3500	1900	1250	1300	2200	3300	2900	2500	4800
昆明			0	1100	600	600	1200	1300	1500	1900	2000	3100
广州				0	1100	1200	1300	800	1600	1500	1900	2800
重庆					0	250	600	800	1000	1400	1400	2700
成都						0	600	1000	1000	1700	1500	2800
西安							0	650	500	1200	900	2100
武汉								0	500	900	1000	2600
郑州									0	800	600	1900
上海										0	1100	2300
北京											0	1100
哈尔滨												0

网络价值邻接矩阵

	乌鲁木齐	拉萨	昆明	广州	重庆	成都	西安	武汉	郑州	上海	北京	哈尔滨
乌鲁木齐	0	11.03	MIN	MIN	85.42	62.38	46.78	51.72	49.31	76.4	94.86	49.32
拉萨	11.03	0	14.97	MIN	30.98	22.63	16.97	18.76	MIN	27.71	34.41	MIN
昆明	MIN	14.97	0	235.69	463.72	338.66	127	70.2	66.93	103.69	128.75	MIN
广州	MIN	MIN	235.69	0	487.93	356.34	133.63	295.46	140.86	218.21	270.94	140.85
重庆	85.42	30.98	463.72	487.93	0	701.08	525.81	290.65	277.13	214.66	266.53	138.56
成都	62.38	22.63	338.66	356.34	701.08	0	384	212.26	202.39	156.77	194.65	101.19
西安	46.78	16.97	127	133.63	525.81	384	0	159.2	303.58	235.15	291.97	75.89
武汉	51.72	18.76	70.2	295.46	290.65	212.26	159.2	0	335.62	259.97	322.79	83.9
郑州	49.31	MIN	66.93	140.86	277.13	202.39	303.58	335.62	0	247.87	615.53	80
上海	76.4	27.71	103.69	218.21	214.66	156.77	235.15	259.97	247.87	0	476.79	123.94
北京	94.86	34.41	128.75	270.94	266.53	194.65	291.97	322.79	615.53	476.79	0	307.77
哈尔滨	49.32	MIN	MIN	140.85	138.56	101.19	75.89	83.9	80	123.94	307.77	0