

## TRABALHO 1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ALETA TRIANGULAR

## LUSO DE JESUS TORRES YASMIN DA COSTA FERREIRA

TRABALHO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

FACULDADE DE TECNOLOGIA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

## UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA FACULDADE DE TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

## TRABALHO 1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ALETA TRIANGULAR

## LUSO DE JESUS TORRES YASMIN DA COSTA FERREIRA

Orientador: PROF. DR. FABIO ALFAIA, ENM/UNB

TRABALHO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

BRASÍLIA-DF, 01 DE MAIO DE 2018.

#### FICHA CATALOGRÁFICA

LUSO DE JESUS TORRES (15/0051808)

YASMIN DA COSTA FERREIRA (15/0048777)

#### TRABALHO NUMÉRICO 1 DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

2018xviii, 40p., 201x297 mm

(FGA/UnB, Graduação, Engenharia Aeroespacial, 2018)

Trabalho de Graduação - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

#### REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LUSO DE JESUS TORRES, YASMIN DA COSTA FERREIRA (2018) TRABALHO NU-MÉRICO 1 DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR. Trabalho de Graduação em Engenharia Aeroespacial, Publicação Maio/2018, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 40p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTORES: LUSO DE JESUS TORRES, YASMIN DA COSTA FERREIRA TÍTULO: TRABALHO NUMÉRICO 1 DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.

GRAU: GRADUAÇÃO ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta trabalho de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte desta trabalho de Graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

\_\_\_\_\_

LUSO DE JESUS TORRES YASMIN DA COSTA FERREIRA

# **SUMÁRIO**

1	INTRODUÇÃO		2
2	REFEI	RENCIAL TEÓRICO	4
	2.1	O CASO: TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UMA ALETA TRIANGULAR	
		EXPOSTA A CONVEÇÃO	4
	2.2	MODELO TEÓRICO PARA A ALETA	4
	2.3	EQUAÇÃO DA DIFUSÃO	7
	2.4	APROXIMAÇÃO NUMÉRICA: MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS	8
3	MET(	ODOLOGIA	12
	3.1	MONTAGEM E REFINO DA MALHA	12
	3.2	Definição dos contornos	13
	3.2.1	CONTORNOS CONVECTIVO E DE SIMETRIA	13
	3.3	Uso da função MontaA	14
	3.4	Uso da função areacontorno	14
	3.5	DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	14
	3.6	SOLUÇÃO DO CASO PARA CADA MALHA	14
	3.7	Erros	15
4	RESUI	LTADOS	16
	4.1	GEOMETRIA E MALHAS	16
	4.2	Comparação solução analítica com solução numérica para	
		AS DIMENSÕES DO EXEMPLO 5-2 DE [1]	17
	4.3	COMPARAÇÃO SOLUÇÃO MANUAL COM SOLUÇÃO DA LITERATURA	18
	4.4	COMPARAÇÃO SOLUÇÃO NUMÉRICA COM SOLUÇÃO DA LITERATURA	19
	4.5	Campos de Temperatura para dimensões escolhidas pela	
		DUPLA	20
	4.6	VETORES DE TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	21
	4.7	Comparação Eficiência da Aleta Solução Analítica e Nu-	
		MÉRICA	22
5	Conc	LUSÃO	24
D:	erroên	CIAS RIBI IOCDÁFICAS	26

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Volume de controle do segmento $x$ a $x + \Delta x$	4
2.2	Elemento de uma superfície qualquer exposto a condução de calor	7
2.3	Unidade da malha de elementos finitos	9
4.1	Malha e volumes de controle da Malha Grossa	16
4.2	Malha e volumes de controle da Malha refinada 1	17
4.3	Malha e volumes de controle da Malha refinada 2	17
4.4	Comparação malha grossa com 9 elementos e o resultado da literatura	19
4.5	Temperaturas na base de malha grossa com 9 elementos	19
4.6	Campo de Temperatura malha grossa com 9 elementos	20
4.7	Vetores de Taxa de Transferência de Calor $\dot{Q}$ malha grossa com 9 elementos	20
4.8	Campo de Temperatura malha grossa com 9 elementos	20
4.9	Campo de Temperatura malha refinada com 19 elementos	21
4.10	Campo de Temperatura malha refinada com 39 elementos	21
4.11	Vetores de Taxa de Transferência de Calor $\dot{Q}$ malha grossa com 9 elementos	
	triangulares	21
4.12	Vetores de Taxa de Transferência de Calor $\dot{Q}$ malha refinada com 19 elemen-	
	tos triangulares	22
4.13	Vetores de Taxa de Transferência de Calor $\dot{Q}$ malha refinada com 39 elemen-	
	tos triangulares	22
4.14	Erro percentual da Transferência de Calor Total Numérica comparado ao	
	Resultado Analítico	23
4.15	Eficiência da Aleta para os diferentes refinos	23
	Erro percentual na Eficiência da Aleta para os diferentes refinos comparado	
	ao Resultado Analítico	23

# LISTA DE TABELAS

5.1 Classificação de Marias Mullicricas 1.	3.1	Classificação de Malhas Numéricas	12
--	-----	-----------------------------------	----

Resumo: A análise da transferência de calor é de grande importância para diversos ramos da engenharia. Este relatório tem o objetivo de estudar a transferência de calor por convecção e condução unidirecional e em regime permanente em uma aleta bidimensional. Utilizou-se para a solução do estudo métodos analíticos, método numérico manual e o método computacional de volumes de controle baseado em elementos finitos (CVFEM) usando o software MATLAB. Foi apresentado de forma sucinta e clara todo o fundamento teórico necessário para o entendimento do método CVFEM. Ressaltou-se uma base teórica alicerçada na bibliografia da disciplina sobre caracterização de malhas e erros associados ao método computacional. É encontrado também, uma comparação dos resultados obtidos pelos métodos citados acima com os resultados da literatura. Enfatizando as vantagens de se utilizar métodos computacionais em problemas cujas equações diferenciais governantes sejam complexas demais para o desenvolvimento do método analítico. O uso de condições de simetria também foi de grande importância, para entender a viabilidade de simplificações das soluções, a fim de poupar esforço computacional. Palavras-chave: Transferência de Calor, Métodos Computacionais, CVFEM, Aletas, Simetria.

## Capítulo 1

## Introdução

O primeiro passo para o estudo de qualquer ciência é o entendimento do conceitos mais fundamentais que a estrutura, e, apesar da natureza do calor andar sempre junto ao desenvolvimento humano, em sua origem, o fenômeno de transferência de calor era de difícil teorização. Com o desenvolvimento do estudo do fenômeno, podemos considerar que existem diferentes formas no qual a energia é expressada, mas a forma desejada para o caso do presente trabalho é o estudo do calor. O calor é definido como a forma de energia que pode ser transportada de um sistema para outro em consequência da diferença de temperatura entre ambos[1].

A Primeira Lei da Termodinâmica afirma que energia não pode ser criada ou destruída, somente alterada de uma forma para outra. Ela governa todas as transformações de energia quantitativamente, mas não considera restrições na orientação da transformação.

Com base em experiências, sabe-se que nenhum processo cujo único resultado seja a transferência líquida de calor de uma região de baixa temperatura para uma de alta temperatura é possível. Esta declaração da verdade experimental é conhecida como a Segunda Lei da Termodinâmica. Essa transferência gerada pela diferença de temperaturas pode ser expressa pelo gradiente de temperaturas, indicando tanto sua direção quanto magnitude.

As formas pelas quais o calor é transferido podem ser divididas em: condução, convecção e radiação. Na condução a energia é transferida das partículas mais energéticas para as vizinhas com menos energia armazenada[1]. A condução pode ocorrer em líquidos, gases e sólidos dependendo do tipo de material, da geometria, espessura e diferença de temperatura em que o sistema esteja submetido. Como citado em [1], a taxa de condução de calor através de uma parede plana é proporcional á diferença de temperatura através da camada e à área de transferência de calor, mas inversamente proporcional à espessura da camada. Deste forma, é escrito:

$$\dot{Q} = -kA\frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \tag{1.1}$$

Onde k é a condutividade térmica do material, que representa a facilidade que o material tem em conduzir calor e A representa a área no qual o calor irá fluir. Tomando as variações de temperatura e distância para o limite tendendo a zero, obtemos a denominada Lei de Fourier da condução térmica:

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dx} \tag{1.2}$$

A transferência de calor por convecção, segundo a referência [1], é a transferência de energia entre uma superfície sólida e um líquido ou gás que está em movimento, envolvendo tanto a interação entre as moléculas e o movimento do fluido.

A taxa de de transferência de calor por convecção também é descrita por uma equação, denominada Lei de resfriamento de Newton.

$$\dot{Q} = hA_s(T_s - T_\infty) \tag{1.3}$$

A radiação é a energia transmitida sob aspecto de ondas eletromagnéticas, ou seja, é o resultado da mudança das configurações eletrônicas de átomos ou moléculas [1].

A radiação não necessita de um meio no qual irá intermediar a transferência de calor. Segundo a mesma referência, a radiação é um efeito volumétrico, onde todos os líquido, sólidos e gases emitem, absorvem ou transmitem radiação em diferentes graus.

A taxa de transferência de calor por radiação pode ser descrita pela equação abaixo.

$$\dot{Q} = \sigma \varepsilon (T_s^4 - T_{cir}^4) \tag{1.4}$$

Onde  $\epsilon$  é denominado emissividade térmica da superfície,  $\sigma$  chamado de constante de Boltzmann, cujo valor é  $5,67\cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}$ .  $T_s$  é a temperatura da superfície,  $A_s$  é a área da superfície e  $T_{cir}$  é a temperatura da fonte de radiação.

Muitas vezes problemas de transferência de calor se tornam extremamente complexos nas aplicações de engenharia moderna, então para resolução desses sistemas é comumente utilizado a metodologia denominado CFD (Computational Fluid Dynamics).

O enfoque do trabalho é baseado nos dois primeiros meios: Condução e convecção. Os objetos do estudo serão as aletas e o objetivo final é validar a precisão numérica obtida para aletas baseada no método CVFEM (*Control Volume Based Element Finite Method*) para o cálculo da transferência de calor nessas aletas além da validez do método em comparação ao centenário escolhido pelo livro Çengel no exemplo 5.2.

# Capítulo 2

## Referencial Teórico

# 2.1 O caso: transferência de calor em uma aleta triangular exposta a convecção

Para dar início a resolução é necessário a compreensão do problema. É dada uma aleta triangular fixada a uma parede com temperatura  $T_b$  uniforme. A aleta está exposta a um meio circundante a  $T_\infty$  e coeficiente de convecção  $h_\infty$ . Devemos então calcular o campo de temperaturas, a transferência de calor unidimensional e a eficiência da aleta para tal situação. Ao observar a geometria, observa-se que há simetria em relação ao eixo horizontal e usaremos disso mais a frente para a resolução do problema de forma mais simples.

## 2.2 Modelo Teórico para a Aleta

A se analisar pelo sugerido, devemos determinar os campos de temperatura no centro da aleta de tal forma que as condições de transferência de calor bidimensional em regime permanente sem termos de fonte e com propriedades constantes. O primeiro passo é desenvolver qual seria uma equação para condução de calor em uma aleta.

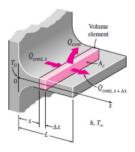


Figura 2.1: Volume de controle do segmento x a  $x + \Delta x$ 

Temos que pela Conservação da Energia[1]:

$$\Delta E_{ele} = \Delta U \tag{2.1}$$

O balanço de energia nesse elemento em um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser expresso como:

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{Q}_{conv} \tag{2.2}$$

Substituindo  $\dot{Q}_{conv}$  em 2.2:

$$\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + h_p(T - T_\infty = 0$$
(2.3)

Tomando o limite quando  $\Delta x$  tende a zero, temos:

$$\frac{d\dot{Q}}{dx} + h_p(T - T_\infty) = 0 \tag{2.4}$$

Da lei de Fourier 1.2 combinada com 2.4:

$$\frac{d}{dx}(KA_c\frac{dT}{dx}) - h_p(T - T_\infty) = 0$$
(2.5)

Em geral:

$$Ac = f(x) (2.6)$$

Mas podemos considerar:

$$Ac = cte$$
 (2.7)

$$K = cte (2.8)$$

Nesse caso a equação 2.5 fica:

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{h_p}{kA_c} (T - T_\infty = 0)$$
 (2.9)

Introduzimos então a variável  $\theta$ :

$$\theta = T - T_{\infty} \tag{2.10}$$

$$m^{2} = \frac{h_{p}}{kA_{c}}$$

$$dT = d\theta$$
(2.11)
$$(2.12)$$

$$dT = d\theta (2.12)$$

Assim, a equação tem a forma final:

$$\frac{d\theta^2}{dx^2} - m^2\theta t = 0 (2.13)$$

E respectivamente sua solução o formato:

$$\theta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \tag{2.14}$$

Aplicando as condições de contorno para convecção na ponta(como no caso):

$$-k\frac{dT(L)}{dx} = h(T - T_{\infty}) \tag{2.15}$$

Antes de disso, eliminamos a área transversal da ponta, de modo que, com auxílio das relações:

$$\Delta L = \frac{A_c}{p} \tag{2.16}$$

$$L' = L + \frac{A_c}{p} \tag{2.17}$$

Chegamos então ao resultado da transferência de calor para ponta com convecção:

$$\dot{Q} = \sqrt{h_p A_c k} (T_b - T_\infty) \tanh(mL') \tag{2.18}$$

Ou alternativamente, podemos calcular a transferência de calor a partir da eficiência da aleta:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_{real}}{\dot{Q}_{max}} \tag{2.19}$$

Onde:

$$\dot{Q}_{max} = hA_{aleta}(T_b - T_{\infty}) \tag{2.20}$$

Uma forma alternativa de calcular a eficiência da aleta é através tabela 3-3 de [1]. Para aletas triangulares retas temos:

$$\eta_{aleta} = \frac{I_1(2mL)}{mLI_0(2ml)} \tag{2.21}$$

Sendo  $I_0$  e  $I_1$  funções as de Bessel disponíveis na tabela 3-4 de [1].

## 2.3 Equação da difusão

Para a análise do fenômeno de transferência de calor, tomemos um elemento de um objeto qualquer.

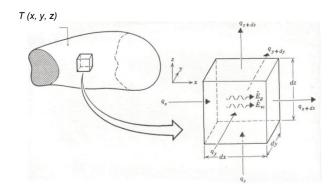


Figura 2.2: Elemento de uma superfície qualquer exposto a condução de calor

O balanço de energia com auxílio da Primeira Lei da Termodinâmica[1] fica:

$$\Delta \dot{E}_{ele} = \Delta U \tag{2.22}$$

Durante um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser expresso como:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+\Delta y} + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E} = \frac{\Delta E_{ele}}{\Delta t}$$
 (2.23)

A variação da quantidade de energia e a taxa de geração de calor no elemento podem ser expressas como:

$$\Delta E_{ele} = \dot{E}_{t+\Delta t} - \dot{E}_t \tag{2.24}$$

$$= mc_p(T_{t+\Delta t} - T_t) \tag{2.25}$$

$$= \rho c_p \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \tag{2.26}$$

$$\dot{E} = \dot{e}V \tag{2.27}$$

$$= \dot{e}\Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.28}$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $\Delta x \Delta y \Delta z$  e manipulando os termos do calor:

$$-(\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x}-\dot{Q}_{x}}{\Delta x\Delta y\Delta z}+\frac{\dot{Q}_{y+\Delta y}-\dot{Q}_{y}}{\Delta x\Delta y\Delta z}+\frac{\dot{Q}_{z+\Delta z}-\dot{Q}_{z}}{\Delta x\Delta y\Delta z})+\frac{\dot{e}}{\Delta t}=\rho c_{p}(T_{t+\Delta t}-T_{t})$$

Fazendo com que o volume do elemento tenda a zero e o respectivo intervalo também, obtemos a expressão:

$$-\left(\frac{1}{\partial y \partial z} \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} + \frac{1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} + \frac{1}{\partial x \partial y} \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z}\right) + \dot{E} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$
(2.29)

Combinando a Lei de Fourier (1.2) com a equação 2.29 chegamos na relação geral para a difusão:

$$-\left(\frac{1}{\partial y \partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(-k A_{yz} \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{1}{\partial x \partial z} \frac{\partial}{\partial y} \left(-k A_{xz} \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{1}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial z} \left(-k A_{xy} \frac{\partial T}{\partial z}\right)\right) + \dot{E} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aplicando as condições impostas de transferência de calor bidimensional permanente, sem termos de fonte e com propriedades constantes, temos a Equação de Condução de Calor do caso:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \nabla^2 T = 0 \tag{2.30}$$

## 2.4 Aproximação Numérica: Método dos volumes finitos

Toda a metodologia aplicada na resolução do problema de transferência de calor através de uma aleta de perfil triangular é baseada na utilização do CVFEM. O método objetiva transformar equações diferenciais integrais em um volume de controle em equações algébricas em volumes de controle finitos. A equação diferencial governante do fenômeno é a equação da Difusão Térmica, enunciada na 2.30. A partir dela podemos aplicar a lei da divergência de Gauss:

$$\int_{Vc} \nabla \cdot (K\nabla T)dV = \oint_{S} K\nabla T \cdot ndS \tag{2.31}$$

Tratando-se de um problema bidimensional, temos que  $K\nabla T=K\frac{\partial T}{\partial x}i+K\frac{\partial T}{\partial y}j$  e  $ndS=n_xdS_xi+n_ydS_yj$ . Então podemos reescrever 2.31

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (K \nabla T) = \oint_{S} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} i + K \frac{\partial T}{\partial y} j \right) \cdot (n_x dS_x i + n_y dS_y j)$$
 (2.32)

$$= \oint_{S} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} n_{x} dS_{x} + K \frac{\partial T}{\partial y} n_{y} dS_{y} \right) \tag{2.33}$$

$$= \oint_{S} K \frac{\partial T}{\partial x} n_{x} dS_{x} + \oint_{S} K \frac{\partial T}{\partial y} n_{y} dS_{y}$$
 (2.34)

Adotando  $\frac{\partial T}{\partial x} = A$  e  $\frac{\partial T}{\partial y} = B$  temos:

$$\int_{Vc} \nabla \cdot (K\nabla T) = \oint_{S} KAn_{x}dS_{x} + \oint_{S} KBn_{y}dS_{y}$$
 (2.35)

Admitindo  $K, A, B, n_x$  e  $n_y$  como constantes, temos:

$$\int_{Vc} \nabla \cdot (K\nabla T) = KAn_x \oint_S dS_x + KBn_y \oint_S dS_y$$
 (2.36)

Resolvendo as integrais  $\oint_S dS_i$  e considerando contribuições dos outros elementos, temos :

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (K\nabla T) = KAn_x S_x + KBn_y S_y + C \tag{2.37}$$

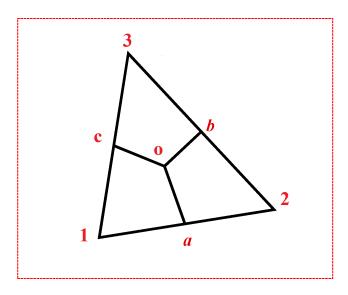


Figura 2.3: Unidade da malha de elementos finitos

Obtendo uma função de interpolação T = Ax + By + C. Tendo como referência a figura 2.3 estabeleceremos nomeclatura para cada figura que compõe o triangulo, as figuras formadas pela ligação dos pontos médios com o baricentro serão chamadas elementos e o aglomerado de elementos em torno de um ponto serão chamados volumes de controle. Baseados desses conceitos calcularemos as contribuições de cada nós através dos elementos que compõem o volume de controle. A matriz A representa o produto da temperatura no nó com a componente x dos vetor normal ao segmento do triângulo oposto ao nó, de forma similar a matriz B, porém em relação a componente y dos vetor normal e a matriz D representa a área do triangulo sendo calculada como o determinante dos 3 pontos do triângulo.

$$A = \frac{(y_2 - y_3)T_1 + (y_3 - y_1)T_2 + (y_1 - y_2)T_3}{D}$$
 (2.38)

$$A = \frac{(y_2 - y_3)T_1 + (y_3 - y_1)T_2 + (y_1 - y_2)T_3}{D}$$

$$B = \frac{(x_3 - x_2)T_1 + (x_1 - x_3)T_2 + (x_2 - x_1)T_3}{D}$$
(2.38)

$$D = det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$
 (2.40)

Substituindo A e B em 2.37, teremos:

$$\int_{Vc} \nabla \cdot (K \nabla T) = \frac{K((y_2 - y_3)T_1 + (y_3 - y_1)T_2 + (y_1 - y_2)T_3)n_x S_x}{D}$$
(2.41)

$$+\frac{K((x_3-x_2)T_1+(x_1-x_3)T_2+(x_2-x_1)T_3)n_yS_y}{D}+C$$
 (2.42)

Agrupando os  $T_i$ :

$$\int_{Vc} \nabla \cdot (K\nabla T) = \frac{K((y_2 - y_3)(nS)_x + (x_3 - x_2)(nS)_y)T_1}{D}$$
 (2.43)

$$+\frac{K((y_3-y_1)(nS)_x+(x_1-x_3)(nS)_y)T_2}{D}$$
 (2.44)

$$+\frac{K((y_1-y_2)(nS)_x+(x_2-x_1)(nS)_y)T_3}{D}+C$$
 (2.45)

Entretanto a eq 2.43 é definida para cada segmento do ponto médio até o baricentro do elemento, ou seja, os segmentos  $\overline{ao}$ ,  $\overline{oa}$ ,  $\overline{bo}$ ,  $\overline{ob}$ ,  $\overline{co}$  e  $\overline{oc}$ . Como, nesse caso, cada nó possui seu próprio elemento, então a integral do volume de controle será a combinação das influências dos segmentos internos do triângulo com normal exterior ao volume de controle. Tomaremos o nó 1 como exemplo e a partir dele poderemos generalizar para os demais volumes de controle. No volume de controle 1, cujo pertence ao nó 1, temos os segmentos  $\overline{ao}$  e  $\overline{co}$  e para respeitar o requisito de ser normal exterior ao elemento precisamos usar  $\overline{oa}$  e  $\overline{co}$ . Objetivando tornar a eq. 2.43 mais clara e sucinta usaremos a seguinte notação de produto interno:  $(y_i - y_j)(nS)_x^{kl} + (x_j - x_i)(nS)_y^{kl} = < nSeg_{ij}, nS_{kl} >$ 

$$\int_{VC} \nabla \cdot (K \nabla T) = \frac{K(\langle nSeg_{23}, nS_{oa} \rangle + \langle nSeg_{23}, nS_{co} \rangle) T_1}{D}$$
 (2.46)

$$+\frac{K(\langle nSeg_{31}, nS_{oa} \rangle + \langle nSeg_{31}, nS_{co} \rangle)T_2}{D}$$
 (2.47)

$$+\frac{K(\langle nSeg_{12}, nS_{oa} \rangle + \langle nSeg_{12}, nS_{co} \rangle)T_3}{D} + C$$
 (2.48)

Neste momento, o objetivo de transformar uma equação diferencial e integral em uma equação algébrica foi alcançado. Agora é possível expandir o cálculo para elementos de qualquer malha triangular de interesse. Para deixar melhor organizada a equação algébrica, chamaremos de  $C_{ij}$  os coeficientes que acompanham as temperatura  $T_j$  dos volumes de controle  $Vc_i$ . Sendo assim, para o nosso exemplo 2.46, teremos:

$$\int_{Vc_1} \nabla \cdot (K\nabla T) = \frac{C_{11}T_1}{D} + \frac{C_{12}T_2}{D} + \frac{C_{13}T_3}{D} + C; \tag{2.49}$$

Agora sabendo calcular os coeficientes de cada elemento associados às temperaturas da malha, é necessário verificar a influência de cada elemento ligado ao volume de controle. Após fazer essa verificação é possível agora montar uma matriz global de coeficientes que descreve a influencia de cada elementos em cada volume de controle. Com a matriz global

gerada é possível solucionar o problema e encontrar o valor de todas as temperaturas da malha, após a adição de condições de contorno em uma matriz de termos independentes. O sistema matricial será do tipo: [B] = [A][T].

## Capítulo 3

## **METODOLOGIA**

### 3.1 Montagem e refino da malha

Os pontos em que as variáveis são calculadas, são definidos pelas malhas numéricas que são, essencialmente, uma representação discretizada do domínio geométrico no qual o problema irá ser resolvido. A malha divide o domínio da solução num número finito de subdomínios (elementos, volumes de controle, etc.)[8]. A classificação das malhas é apresentada a seguir.

Ortogonal	Não-Ortogonal
Estruturada	Estruturada
	Não-estruturada

Tabela 3.1: Classificação de Malhas Numéricas

A classificação das malhas é dada ortogonal quando os elementos das malhas permanecem alinhadas os eixos. A desvantagem da utilização de sistemas de coordenadas ortogonais é o desperdício de recursos de armazenamento pois a introdução de uma malha ortogonal fina numa região de interesse particular implica o desnecessário refinamento de outra região de interesse mínimo.

Do grupo de malhas não-ortogonais podemos falar de modelos estruturados e não-estruturados[8]. Nas malhas estruturadas ou regulares os elementos são dispostos em famílias de linhas, em que membros de uma determinada família não se cruzam uns com os outros e atravessam cada membro de outras famílias apenas uma vez. Isto permite que as linhas de um determinado conjunto sejam numeradas consecutivamente. o caso das malhas não-estruturadas apresenta comportamento bem mais complexo de ser descrever em algoritmos.

Foi escolhida a opção de montagem da malha grossa e malhas refinadas manualmente devido a vários bugs gerados durante o uso da ferramenta PDEtool. Com base na escolha

de malhas não-ortogonais por simetria do problema em conjunto com a divisão em malhas estruturadas, a lógica da montagem da malha de elementos finitos foi feita a partir da discretização do volume de controle inicial em vários volumes de controle triangulares. Basicamente, a malha é composta por 3 matrizes essenciais, uma matriz de pontos, uma de segmentos do contorno e outra de segmentos que formam os triângulos. Para a montagem da malha grossa adotamos 5 divisões na base sendo traçadas perpendiculares à base até o topo da aleta e traçamos diagonais da vértice inferior esquerdo para o vértice superior direito, dividindo os trapézios em 2 triângulos.

A análise da razão de refino e correção de erros de modo geral é feita por base do método de extrapolação de Richardson[5], porém, irá-se adotar a perspectiva do erro estimado verdadeiro, onde verificaremos as características da razão Refino vs Erro.

O primeiro refino foi feito de forma semelhante a montagem anterior com a única diferença sendo, agora, a base com 10 divisões. O segundo refino foi feito com divisões na base e na altura da aleta, 5 divisões em cada sendo traçadas perpendicularmente à base e à altura até atingirem a hipotenusa da aleta, e os triângulos foram constituídos da mesma forma que na malha grossa.

## 3.2 Definição dos contornos

As condições de contorno do problema são definidas no códigos através da matriz E. No caso estudado, possuímos 3 contornos de interesse: contorno à temperatura especificada, contorno de simetria e contorno convectivo. Os contornos são definidos, no código, a partir de suas coordenadas, os pontos do contorno que pertencem a base de temperatura especificada recebem a condição de x=0, o contorno do comprimento de simetria recebem a condição de y=0 e  $0 < x < x_{max}$ , e o contorno convectivo recebem a condição de  $0 < y < y_{max}$  e  $0 < x < x_{max}$ .

#### 3.2.1 Contornos Convectivo e de Simetria

Esses são os contornos que vão gerar mudanças na nossa solução numérica. O contorno convectivo recebe uma condição de contorno especial devido ao fato dessa área - diagonal da aleta - estar exposta a convecção com o meio circundante, e esse fenômeno é regido pela lei de resfriamento de Newton. O conceito de simetria é utilizado no nosso problema com o objetivo de reduzir a quantidade de operações e assim poupar esforço computacional. Esse conceito pode ser aplicado no caso em questão pois a geometria da aleta é simétrica e as condições de contorno são as mesmas tanto na parte superior quanto na parte inferior da aleta.

### 3.3 Uso da função MontaA

A função MontaA <sup>1</sup> é um código em MATLAB que gera a matriz de coeficientes associados a cada ponto dos triângulos da malha de volumes finitos. A matriz A é composta dos coeficientes que acompanham as temperaturas associadas a cada ponto da malha - elementos da diagonal da matriz - e os coeficientes relativos às temperaturas vizinhas aos pontos da diagonal de acordo com o métodos dos volumes finitos descrito no capítulo 2.

## 3.4 Uso da função areacontorno

A função areacontorno <sup>2</sup> é também um código em MATLAB que calcula as áreas relacionadas a cada nó do segmento do contorno e retorna um vetor de áreas relacionadas a cada nó do contorno.

### 3.5 Determinação das condições de contorno

As condições de contorno são definidas para cada contorno específico e são alterações feitas na matriz global, em termos práticos, são termos adicionadas às matriz A e B da função MontaA.

No contorno à temperatura especificada  $T_b = 200 \deg C$ , todos os termos  $A_{ij}$  são zerados, os termos  $A_{ii}$  são igualados a 1 e os termos  $B_i$  são igualados a  $T_b$ . Sendo assim a solução de A/B serão as próprias temperaturas especificadas.

No contorno convectivo é adicionado um novo termo convectivo nas posições  $A_{ii}$  se tornando  $A_{ii} = A_{ii} - Aglobal \cdot h_{\infty}$  e na matriz B será adicionado o termo convectivo se tornando  $B_i = -Aglobal \cdot h_{\infty} \cdot T_{\infty}$ . Os termos adicionados são devidos a Lei de resfriamento de Newton (1.3).

## 3.6 Solução do caso para cada malha

O algoritmo<sup>3</sup> usado para cada malha e refino foi o mesmo mudando apenas as matrizes P, E e T.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Cessão de direitos: Professor Doutor Fábio Alfaia.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Cessão de direitos: Professor Doutor Fábio Alfaia.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Todo o código usado para a resolução está disponível do Apêndice

#### 3.7 Erros

Os tipos de erros possíveis em uma solução numérica estão associados as aproximações das equações, modelagem incorreta do sistema ou problemas de processamento computacional[2]. Identificar a magnitude do erro de uma simulação pode ser fundamental para a validação por exemplo, de um modelo numérico[9]. Os erros possíveis são:

- 1. Erro de modelagem: Normalmente, durante a elaboração do modelo matemático que representa o fenômeno físico, algumas simplificações são feitas, como, por exemplo, supor que coeficientes são constantes e que termos podem ser desprezados. Dependendo da magnitude dessas diferenças, a solução obtida pode não ser representativa do fenômeno físico [4];
- 2. Erro geométrico: Quando o sistema de coordenadas não está alinhado com a fronteira do domínio discretizado, muitas vezes é necessário a realização de algum tipo de interpolação das condições de fronteira. Em geral, esse erro pode ser eliminado pelo refinamento da malha, ou por uma discretização com malha não estruturada[4];
- 3. Erro de discretização: É o erro causado pelo truncamento e por aproximações feitas na demonstração das equações para aplicação em CVFEM [4];
- 4. Erro de arredondamento: Devido à representação finita dos números do computador [4].

Do estudo em específico do caso, observa-se que erros do tipo geométrico e de modelagem não são considerados, pois o relatório já se baseia em um modelo adaptado (solução analítica a se considerar). Com relação aos erros geométricos, não se aplicam ao caso por conta do alinhamento dos eixos dos domínios e a malha ser estruturada, por se basear em um modelo alinhado de elementos[8]. Logo, o valor dos erros se resume ao cálculo de discretização e arredondamento.

Em vista da possibilidade de alocação de 16 casas decimais de precisão, necessariamente o erro associado a arredondamentos é desprezível a prováveis valores do erro de discretização[6].

Para efetuar o cálculo do erro de discretização, utilizou-se a abordagem do erro numérico verdadeiro, em vista da disponibilidade da solução analítica em questão. Por definição, o erro numérico verdadeiro é a diferença entra a solução analítica exata  $(\Phi)$  e sua solução numérica aproximada  $(\phi)$  [5], sua formulação matemática pode ser vista na equação abaixo:

$$E(\phi) = \Phi - \phi \tag{3.1}$$

Com base em tudo apresentado, iremos a solução do problema.

# Capítulo 4

## Resultados

#### 4.1 Geometria e malhas

Com todas as escolhas feitas, vemos a representação dos modelos de malhas: No caso da malha grossa, temos um modelo estruturado em triângulos com o total de 9 elementos e 27 volumes.

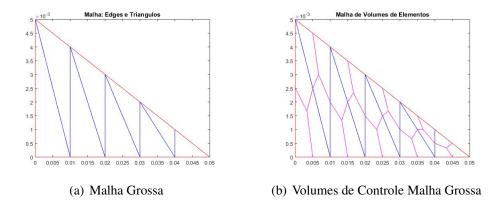


Figura 4.1: Malha e volumes de controle da Malha Grossa

No caso da malha com o primeiro refino, temos um modelo estruturado com 19 elementos e 57 volumes

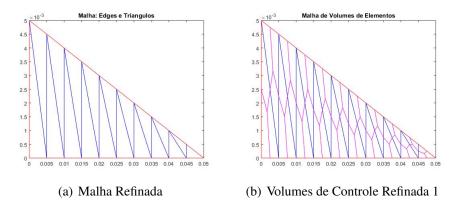


Figura 4.2: Malha e volumes de controle da Malha refinada 1

E no caso da malha fina, com o maior número de refinos: 39 elementos e 117 volumes.

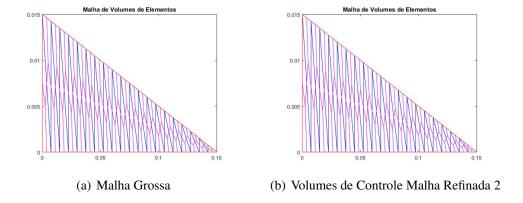


Figura 4.3: Malha e volumes de controle da Malha refinada 2

# 4.2 Comparação solução analítica com solução numérica para as dimensões do exemplo 5-2 de [1]

Para comparação das soluções analítica e numérica foi calculada de forma analítica a eficiência da aleta e o fluxo de calor de acordo com as fórmulas 2.20 e 2.21, obtendo os seguintes valores:

$$\eta_{analtica} = 0,9545 \tag{4.1}$$

$$\dot{Q}_{analtica} = 250,87W \tag{4.2}$$

Lembrando que no caso numérico foi usada a condição de simetria logo o  $\dot{Q}_{numrico} = \frac{\dot{Q}}{2}$ , então para o caso numérico a eficiência da aleta foi calculado usando as eq. 2.20 e 2.19,

obtendo os seguintes valores:

$$\eta_{numrico} = 0,979641899907245$$
(4.3)

$$\dot{Q}_{numrico} = 129,2192901208962W \tag{4.4}$$

Calculando, então o erro percentual associado a solução numérica:

$$Erro_{\eta} = 2,56645\%$$
 (4.5)

$$Erro_{\dot{Q}} = 2,92859\%$$
 (4.6)

## 4.3 Comparação solução manual com solução da literatura

A solução feita manualmente foi obtida utilizando o CVFEM e foram obtidos os seguintes valores:

 $T_1 = 198,57^{\circ}C$ 

 $T_2 = 197, 14^{\circ}C$ 

 $T_3 = 195,72^{\circ}C$ 

 $T_4 = 194,31^{\circ}C$ 

 $T_1 = 192,90^{\circ}C$ 

 $\dot{Q}_{real} = 129, 216395W$ 

 $\eta_{aleta} = 98,328\%$ 

Todos os resultados convergiram com os resultados do exemplo 5-2 de [1]. Todos os cálculos manuais usando o CVFEM constam no Apêndice.

# 4.4 Comparação solução numérica com solução da literatura

Os gráficos a seguir são comparativos referentes a solução numérica obtida através do CVFEM e os resultados contidos em [1], exemplo 5-2. Os resultados obtidos convergiram para os resultados da literatura conforme o esperado devido ao fato de ter a mesma razão de discretização.

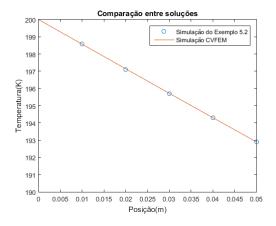


Figura 4.4: Comparação malha grossa com 9 elementos e o resultado da literatura

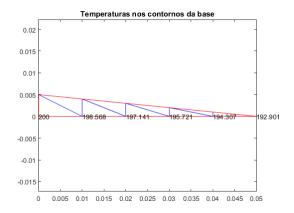


Figura 4.5: Temperaturas na base de malha grossa com 9 elementos

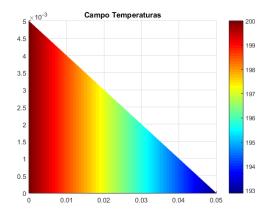


Figura 4.6: Campo de Temperatura malha grossa com 9 elementos

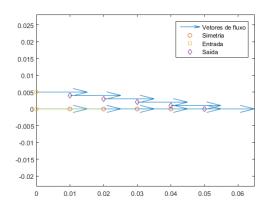


Figura 4.7: Vetores de Taxa de Transferência de Calor  $\dot{Q}$  malha grossa com 9 elementos

# 4.5 Campos de Temperatura para dimensões escolhidas pela dupla

Os gráficos a seguir constam os campos de temperaturas obtidos para cada relação de refino de malha. As temperaturas variam linearmente conforme o esperado devido a aproximação linear da solução.

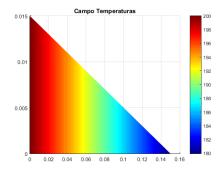


Figura 4.8: Campo de Temperatura malha grossa com 9 elementos

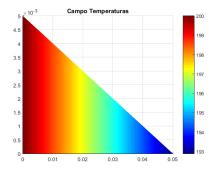


Figura 4.9: Campo de Temperatura malha refinada com 19 elementos

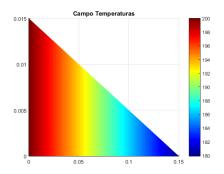


Figura 4.10: Campo de Temperatura malha refinada com 39 elementos

## 4.6 Vetores de Taxa de Transferência de Calor

Os gráficos a seguir constam os vetores de taxa de transferência de calor  $\dot{Q}$  obtidos para cada relação de refino de malha.

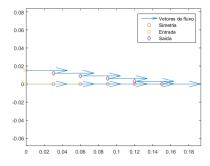


Figura 4.11: Vetores de Taxa de Transferência de Calor  $\dot{Q}$  malha grossa com 9 elementos triangulares

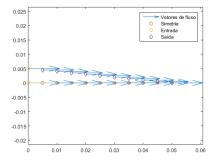


Figura 4.12: Vetores de Taxa de Transferência de Calor  $\dot{Q}$  malha refinada com 19 elementos triangulares

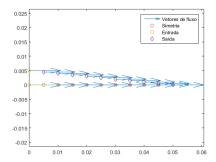


Figura 4.13: Vetores de Taxa de Transferência de Calor  $\dot{Q}$  malha refinada com 39 elementos triangulares

# 4.7 Comparação Eficiência da Aleta Solução Analítica e Numérica

Os gráficos a seguir são constituídos de pontos discretos que representam a eficiência da aleta em função do número de triângulos da malha triangular e os erros percentuais em relação ao valor obtido analiticamente.

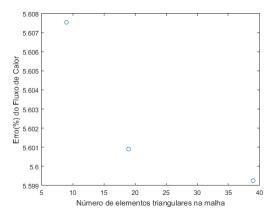


Figura 4.14: Erro percentual da Transferência de Calor Total Numérica comparado ao Resultado Analítico

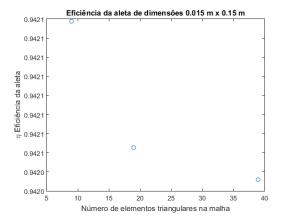


Figura 4.15: Eficiência da Aleta para os diferentes refinos

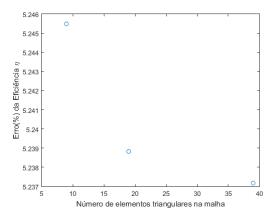


Figura 4.16: Erro percentual na Eficiência da Aleta para os diferentes refinos comparado ao Resultado Analítico

## Capítulo 5

## Conclusão

Desde a elaboração do projeto de simulação, de vista grossa se esperava um comportamento de transferência de calor bidimensional, com gradientes de temperatura saindo do ponto de simetria (onde teoricamente o fluxo é nulo) para as pontas da aleta onde ocorria a convecção.

A partir do momento do uso do PDEtool para a geração da malha e a primeira visualização com erro da solução, a ideia de uma transferência de calor bidimensional permanecia em mente. Após a elaboração da malha grossa manual, ocorreu-se a primeira quebra de paradigma, pois assim como assumido ao longo do curso teórico, a transferência de calor a partir da aleta tinha características unidimensionais.

Com relação ao valor esperado da taxa transferência de calor na simulação, o que se notou foi que o para o resultado manual a convergência valores assim como presente no tópico 4.4 foi uma equivalência excelente nos valores tanto de temperatura esperados quanto de taxa de transferência total, e cabe apenas um pequeno desvio do valor da eficiência, conforme calculado nos apêndices e no código.

Pelo observado nos resultados de campos de temperatura, vemos que o modelo teórico que prevê tanto taxa de transferência de calor constante, o que representa uma variação linear de temperatura ao longo da aleta, conforme a Lei de Fourier.

Para todos os resultados apresentados para a aleta da dupla, percebeu-se a perseverança do perfil de temperaturas com apenas modificação do valor da taxa, resultando em apenas um coeficiente angular diferente, resultando da mesma forma em variações de temperatura em escala linear.

Aqui vai o destaque para a medida de maior interesse em aletas: sua eficiência. Dado todo o estudo observou-se a tendência de convergência do valor numérico para o valor analítico calculado. Foi observado também, comparando a eficiência da aleta do exemplo 5-2 de [1] com a eficiência da aleta com dimensões escolhidas para a área transversal, que a eficiência da aleta cai com o aumento das medidas.

Com relação aos erros obtidos, percebeu-se um comportamento convergente para um valor de magnitude fixa, onde por consequência observa-se a baixa influência do grau de refino no resultado obtido para a malha numérica. Devido à alta simetria do problema e simplicidade geométrica, podemos considerar válido o uso do ferramental do cálculo do erro, ou seja, o uso do método do erro estimado verdadeiro.

Relativo ao uso da ferramenta computacional, percebe-se a maior facilidade em alteração de condições de contorno, visualização gráfica, fora também o fato considerável de geometrias mais complexas, o uso da mesma é inquestionável.

Levando em consideração a disposição de tempo para elaboração da solução e relatório, percebeu-se o ponto crítico do trabalho: os erros relativos a ferramentas nativas do MATLAB, ou seja, o PDEtool.

Uma estimativa do tempo desperdiçado com a correção de erros varia de 50 a 60 porcento do tempo total do projeto.

A experiência com aletas nos levou a conclusão de que são fundamentais para o aumento da transferência de calor, e portanto, para alguns projetos, podem ser condições essenciais de funcionamento, como por exemplo em processadores.

## Referências Bibliográficas

- [1] Y. A. Çengel and A. J. Ghajar. *Transferência de Calor e Massa Uma abordagem prática*. Mc Graw Hill, 4ª ed., 2012.
- [2] Arthur P. Wernke e Klyssmann E. de Oliveira. *Determinação do fluxo e campo de temperatura em regime permanente com análise de malha não-estruturada em túnel bidimensional de paredes compostas*. Trabalho de Graduação, Universidade de Brasília, 2017.
- [3] A. de Oliveira Fortuna. *Tecnicas Computacionais pard Dinâmica dos Fluidos Conceitos Básicos e Aplicações*. Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- [4] F. A. Schneider and C. H. Marchi. *Efeito do tipo de refino de malhas não-uniformes de volumes finitos sobre a ordem efetiva do erro de discretização*. Proceedings of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2006.
- [5] C. H. Marchi and A. F. C. da Silva. Procedimento para diminuir e estimar erros de discretização baseado em soluções núméricas coerentes. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1999.
- [6] C. H. Marchi. *Verificação de Soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos.* PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- [7] A. F. C. da Silva and C. H. Marchi *Estimativa de erros de discretização multidimensional em dinâmica dos fluídos*. IV Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, 2000.
- [8] N. D. F. Gonçalves. *Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas*. Master thesis, Universidade do Porto, 2007.
- [9] Maliska, Clovis R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, 2ª ed., 2010.

```
%malha_grossa
P = [0 \ 0]
    1 0
    2 0
    3 0
    4 0
    5 0
    0.5
    1 0.4
    2 0.3
    3 0.2
   4 0.1].'*3*10^-2;
E= [ 1 2
    2 3
    3 4
    4 5
    5 6
    6 11
    11 10
    10 9
    9 8
    8 7
   7 1].';
T = [1 2 7]
    2 8 7
    2 3 8
    3 9 8
    3 4 9
    4 10 9
    4 5 10
    5 11 10
```

5 6 11].';]

#### %malha refinada 1

- P = [ 0 0 ]
  - .005 0
  - .01 0
  - .015 0
  - .02 0
  - .025 0
  - .03 0
  - .035 0
  - .04 0
  - .045 0
  - .05 0
  - .045 .0005
  - .04 .001
  - .035 .0015
  - .03 .002
  - .025 .0025
  - .02 .003
  - .015 .0035
  - .01 .004
  - .005 .0045
  - 0 .005].';

#### $T = [1 \ 2 \ 21]$

- 2 20 21
- 2 3 20
- 3 19 20
- 3 4 19
- 4 18 19
- 4 5 18
- 5 17 18
- 5 6 17
- 6 16 17
- 6 7 16
- 7 15 16
- 7 8 15
- 8 14 15
- 8 9 14
- 9 13 14
- 9 10 13
- 10 12 13

```
10 11 12].';
```

 $E = [1 \ 2]$ 

- 2 3
- 3 4
- 4 5
- 5 6
- 6 7
- 7 8
- 8 9
- 9 10
- 10 11
- 11 12
- 12 13
- 13 14
- 14 15
- 15 16
- 16 17
- 17 18
- 18 19
- 19 20
- 20 21
- 21 1].';

```
%malha refinada 2
base=[0:(15/20):15]*10^-2;
n= zeros(1,length(base));
divx = 20;
dx = (15/divx):(15/divx):15;
divy = 20;
dy = (1.5/divy): (1.5/divy): 1.5;
hipx = (15 - dx) *10^-2;
hipy = dy*10^-2;
P = [base hipx; n hipy];
m = 1:length(P);
E(1,m) = m;
E(2,m) = m+1;
E(2,41)=1;
T = [1 \ 2 \ 41]
   2 40 41
   2 3 40
   3 39 40
   3 4 39
   4 38 39
   4 5 38
   5 37 38
   5 6 37
   6 36 37
   6 7 36
   7 35 36
   7 8 35
   8 34 35
   8 9 34
   9 33 34
   9 10 33
   10 32 33
   10 11 32
   11 31 32
   11 12 31
   12 30 31
   12 13 30
   13 29 30
   13 14 29
   14 28 29
   14 15 28
```

- 15 27 28
- 15 16 27
- 16 26 27
- 16 17 26
- 17 25 26
- 17 18 25
- 18 24 25
- 18 19 24
- 19 23 24
- 19 20 23
- 20 22 23
- 20 21 22].';

```
%principal
clear all;
close all;
clc;
format long;
% Para cada situação, escolha a malha a se utilizar
%malha_refinada_manual_2;
%malha_refinada_manual_1;
malha_grossa;
X=P(1,:); Y=P(2,:);
X1 = (X(T(1,:)); X2 = X(T(2,:); X3 = X(T(3,:);
Y1=Y(T(1,:); Y2=Y(T(2,:); Y3=Y(T(1,:);
Xc = (X(T(1,:)) + X(T(2,:)) + X(T(3,:)))/3;
Yc = (Y(T(1,:)) + Y(T(2,:)) + Y(T(3,:))) / 3;
dX = X(E(2,:)) - X(E(1,:));
                                          응
                                                         Esquemático
dY = Y(E(2,:)) - Y(E(1,:));
                                          응
                                                        С
                                                                     (+)
                                                 dY | |\
E(5, dX<0)=1;
                                          응
                                                       | \
E(5, dX>0) = 2;
                                          응
                                                    V
                                                                      |dY
E(5, dY<0)=3;
                                          응
                                                    (-) | \
                                                               с1
E(5,1)=3;
                                                с3
                                                       | \
                                                                  (-) < -dX
               % ponto inicial
                                          응
                                          응
                                                        | _ _\
                                          응
                                                        a c2 b
                                                        dX \rightarrow (+)
%Contador de pontos na base
base=Y==0;
no_base=sum(base);
n_nos=length(P) %número de nós
n_ele=length(T) %número de elementos
% fim- Malha de elementos finitos.
% início - propriedades do material
k=180*ones(size(T(1,:)));
% fim - propriedades do material
% Montagem da matriz global (Aij) a partir das matrizes locais Cij
[A] = Monta\_A(k,P,T);
% fim - montagem da matriz global (Aij) a partir das matrizes locais Cij
```

```
%%Cálculos associados a condição de contorno 4
[Aglobal] = area_contorno(P,E,T,1);
% fim - montagem do vetor de áreas global
%apresentação dos valores de áreas associadas aso contornos
% nós nos contornos, conforme exemplo 5.2 do livro
no\_cc1=E(1,E(5,:)==1); %nó contorno convectivo;
no_{cc2}=E(1, E(5, :) == 2); %nó simetria;
no_{cc3}=E(1,E(5,:)==3); %nó temperatura especificada;
% início-modificação da matriz global para incluir as condições de c.
B=zeros(length(P),1); % termo independente
% for jj=1:length(no_cc2)
% A(no_cc2(jj),:)=0;
                               %zera a equação jj
% A(no_cc2(jj), no_cc2(jj))=1; %faz o Ajj=1
% B(no_cc2(jj))=T_esp;
% end
T_{inf}=25;%(K)
h0=15; %W/(m^2*K)
T_{esp}=200;%(K)
for jj=1:length(no_cc3)
A(no_{cc3}(jj),:)=0;
                           %zera a equação jj
A(no\_cc3(jj), no\_cc3(jj))=1; %faz o Ajj=1
B(no\_cc3(jj)) = T\_esp;
end
for jj=1:length(no_cc1)
    %adição de condição na diagonal
A(no_cc1(jj), no_cc1(jj)) = A(no_cc1(jj), no_cc1(jj)) - h0*Aglobal(no_cc1(jj));
B(no\_cc1(jj)) = -h0*Aglobal(no\_cc1(jj))*T_inf;
end
% fim- modificação da matriz global para incluir as condições de contorno
```

```
% início - solução sistema de equações
Temp=A$\backslash$B;
% fim - solução sistema de equações
% apresentação gráfica do resultado
figure (1),
trisurf(T', X, Y, Temp), view(0, 90), shading interp,
colorbar, colormap jet, title('Campo Temperaturas')
figure (2);
[k_dT_dx_i, k_dT_dy_i, k_i] = gradiente(k, Temp, P, E, T);
quiver(X,Y,k_dT_dxi,k_dT_dyi,1),axis equal,hold on
plot(X(no_cc2), Y(no_cc2), 'o', X(no_cc3), Y(no_cc3), 's',
X(no_cc1), Y(no_cc1), 'd')
%argumento 1 do plot:
legend('Vetores de fluxo', 'Simetria','Entrada','Saída')
%argumento 2 do legend:;
 plot([X(1) \ X(2) \ X(3)], [Y(1) \ Y(2) \ Y(3)]);
 figure(3); pdemesh(P,E,T),axis equal,
 for i=1:no_base
 text(X(E(1,i)),Y(E(1,i)), \{Temp(E(1,i))\}), title('Temperaturas nos
 contornos da base')
 end
 figure(4), plot([ 0.01 0.02 0.03 .04 .05],
 [198.6 197.1 195.7 194.3 192.9],'o'...
      , X (Y==0), Temp ((Y==0)), '-')
  axis([0 .05 190 200]), title('Comparação entre soluções')
  xlabel('Posição(m)'), ylabel('Temperatura(K)')
  legend ('Simulação do Exemplo 5.2', 'Simulação CVFEM', 4)
X1=X(T(1,:)); X2=X(T(2,:)); X3=X(T(3,:));
Y1=Y(T(1,:)); Y2=Y(T(2,:)); Y3=Y(T(3,:));
 figure (5), pdemesh (P, E, T), axis equal,
 X12 = (X1+X2)/2; X32 = (X3+X2)/2; X13 = (X1+X3)/2;
 Y12 = (Y1+Y2)/2; Y32 = (Y3+Y2)/2; Y13 = (Y1+Y3)/2;
figure (5), pdemesh (P,E,T), axis equal,
pdemesh(P,E,T), hold on, title('Malha de Volumes de Elementos')
for i=1:length(X1)
plot([X12(i) Xc(i)],[Y12(i) Yc(i)],'-m',[X32(i) Xc(i)],
```

```
[Y32(i) Yc(i)],'-m',[X13(i) Xc(i)],[Y13(i) Yc(i)],'-m'), hold on;
end
figure (6)
plot ([9 19 39], [0.942118851329360 0.942052572033896
0.942035975860416], 'o')
title ('Eficiência da aleta de dimensões 0.015 m x 0.15 m')
xlabel('Número de elementos triangulares na malha'), ylabel
('\eta Eficiência da aleta')
figure (7)
Qtx = [(1-(3.51904/3.72809480)) (1-(3.51904/3.72783253))
(1-(3.51904/3.72776685))]*100;
plot ([9 19 39], [Qtx], 'o')
xlabel ('Número de elementos triangulares na malha')
ylabel ('Erro(%) do Fluxo de Calor')
Q=h0.*Aglobal.*(Temp-T_inf)
QT=sum(Q)
Area = sum(Aglobal);
Efic = QT/(h0*Area*(T_esp - T_inf))
QTcaso1 = 125.435; %W
eficcaso1 = 0,9545;
QTnossocaso = 351.94;%W
eficnossocaso = 0.8927;
```