

Analisi di un filtro crossover in regime sinusoidale



1 Abstract

In questa esperienza si è analizzato il comportamento di un filtro crossover sottoposto a una tensione sinusoidale. In particolare, acquisendo i dati relativi alla tensione in entrata e nei rami, è stato possibile verificare l'andamento atteso della frequenza e dell'ampiezza della tensione e determinare una stima della frequenza di crossover. Il valore ottenuto $\nu_0 = \text{[redacted]} Hz$ è risultato compatibile con quello atteso $\nu_0 = \text{[redacted]} Hz$. È stato inoltre analizzato l'andamento dello sfasamento della tensione nei rami rispetto a quella generata, che ha portato a una misura indipendente della frequenza di crossover pari a $\nu_0 = \text{[redacted]} Hz$. Tale andamento è risultato in parziale disaccordo con la teoria ed ha portato infatti a una stima della frequenza di crossover non compatibile con il valore atteso.

2 Introduzione

Il filtro crossover è un particolare circuito RLC costituito da un filtro passa-basso e un filtro passa-alto posti in parallelo. Questo dispositivo permette di separare un segnale in entrata su due rami: uno contenente l'induttore per le componenti a frequenze inferiori a una particolare frequenza (*woofer*) e uno contenente il condensatore per le componenti a frequenze superiori (*tweeter*). Tale frequenza di separazione è specifica del circuito e viene detta *frequenza di crossover*. In particolare si dimostra (si veda appendice) che tale frequenza è determinata da

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_L\tau_C}} \quad (1)$$

dove $\tau_L = L/R$ e $\tau_C = RC$ indicano rispettivamente i tempi caratteristici dei rami induttivo e capacitivo (L indica il valore dell'induttanza, C la capacità e R la resistenza su ciascun ramo). Applicando al circuito una tensione d'ingresso sinusoidale con ampiezza costante ci si aspetta di osservare, all'aumentare della frequenza in entrata, un andamento sinusoidale della tensione ai capi delle resistenze di ciascun ramo con frequenza pari a quella in entrata e ampiezza rispettivamente crescente e decrescente sui rami del tweeter e del woofer. Parallelamente, osservando lo sfasamento della tensione di ciascun ramo rispetto alla tensione in entrata, ci si aspetta un andamento decrescente all'aumentare della frequenza con un valore iniziale pari a 90° sul tweeter e 0° sul woofer. Si può quindi estrapolare sperimentalmente la frequenza di crossover osservando per quale valore della frequenza in ingresso si ha la medesima ampiezza oppure uno sfasamento opposto sui due rami.

3 Apparato sperimentale

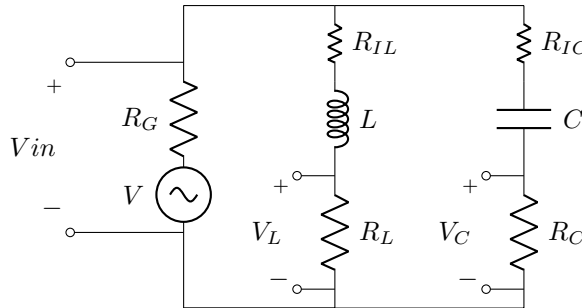


Figura 1: *Schema del circuito realizzato.*

Il filtro crossover è stato realizzato sulla breadboard della scheda di acquisizione dati NI ELVIS II ed è schematizzato in Fig. 1. Esso si compone di due rami connessi in parallelo tra loro e sottoposti a una tensione variabile generata dal *function generator* di ELVIS, il quale ha una resistenza interna dichiarata dal costruttore pari a

le ampiezze sui due rami risultano molto simili. Per quanto riguarda un segnale in entrata composto da più frequenze si osserva che il comportamento del filtro è analogo a quanto visto in precedenza considerando le singole componenti come se fossero segnali distinti.

4.2 Analisi della frequenza

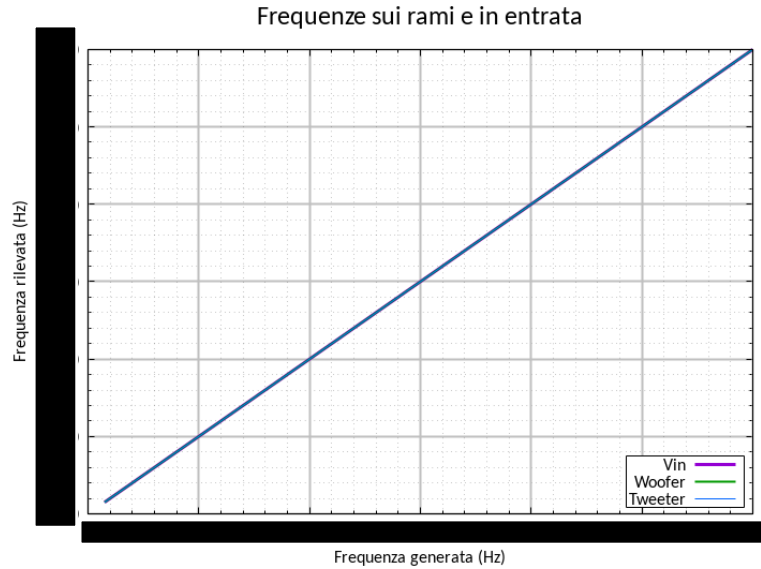


Figura 3: *Frequenza rilevata sui rami e in entrata in funzione della frequenza generata. Le tre serie di dati sono sovrapposte.*

Come atteso, il grafico in Fig. 3 mostra che le frequenze rilevate sono uguali a quelle generate in tutti i punti del circuito. Dall'analisi di questi dati è stato possibile stimare l'incertezza da associare alla frequenza: la distanza massima tra la frequenza generata e V_{in} risulta di 0.12Hz , valore confrontabile con la risoluzione del function generator dichiarata nelle specifiche, pari a 0.186Hz . Tale incertezza risulta quindi del tutto trascurabile rispetto all'ordine di grandezza delle frequenze in esame.

4.3 Analisi della tensione

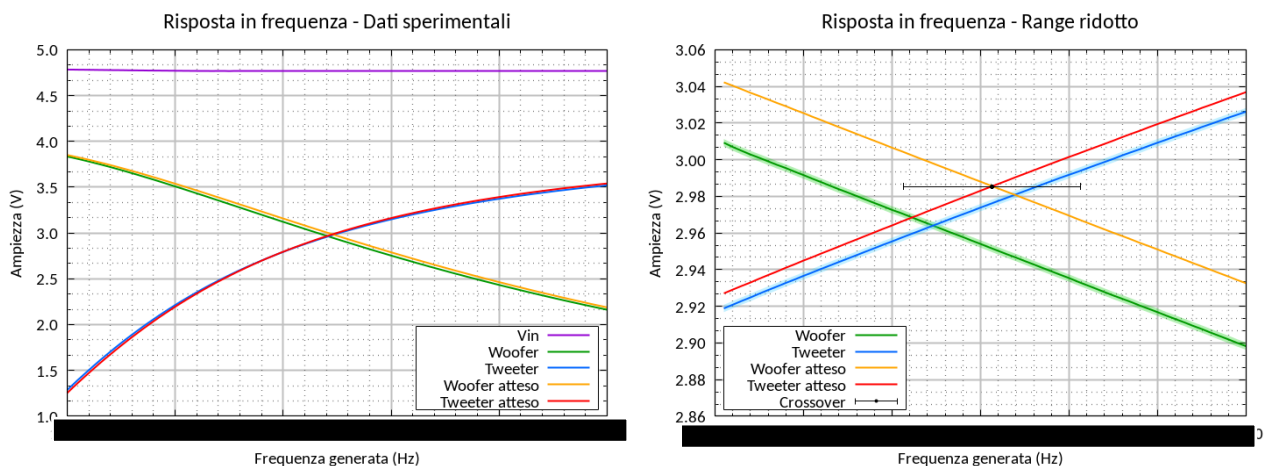


Figura 4: *Ampiezza rilevata e attesa in funzione della frequenza in ingresso: a sinistra sweep effettuato tra 10Hz e 1000Hz con step di 10Hz , a destra sweep tra 100Hz e 200Hz con step di 10Hz e valore atteso della frequenza di crossover con relativa incertezza. I dati e le incertezze sono stati rappresentati con linee e bande continue a causa della elevata densità di valori.*

In Fig. 4 sono mostrati i dati sperimentali e teorici relativi all'ampiezza dell'onda di tensione in entrata e sui rami. Ai dati sperimentali è stata associata un'incertezza $\delta V = 2\text{mV}$ calcolata secondo le specifiche di ELVIS

relative ai canali di analog input. Gli andamenti attesi sono dati da

$$V_L(\nu) = \frac{\rho}{\sqrt{1 + (2\pi\nu\tau_L)^2}} V \quad V_C(\nu) = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi\nu\tau_C)^2}}} V \quad (2)$$

dove V_L e V_C rappresentano le ampiezze ai capi di R_L e R_C , V l'ampiezza della tensione in ingresso, ν la frequenza generata e τ_L e τ_C i tempi caratteristici dei rami. ρ rappresenta invece il rapporto tra la resistenza su cui viene misurata la tensione e la resistenza totale del ramo e in questo caso può essere considerata uguale per entrambi i rami e pari a $R_L/(R_L + R_{IL}) \approx R_C/(R_C + R_{IC}) = 0.83 \pm 0.01$. La frequenza di crossover attesa $\nu_0 = \text{[redacted]} \text{ Hz}$, visibile nel grafico a destra in Fig. 4, è stata determinata secondo l'Eq. (1). Si nota infine che, pur avendo impostato il function generator per la generazione di un'onda di ampiezza pari a $5V$, l'ampiezza di V_{in} misurata risulta leggermente inferiore; ciò è da attribuirsi alla presenza di una resistenza interna del generatore che causa una caduta di potenziale di circa $0.25V$. Questa caduta di potenziale non è in effetti costante ma dipendente dalla tensione generata, tuttavia la variazione massima misurata nel range in considerazione è dell'ordine dei mV , quindi relativamente piccola.

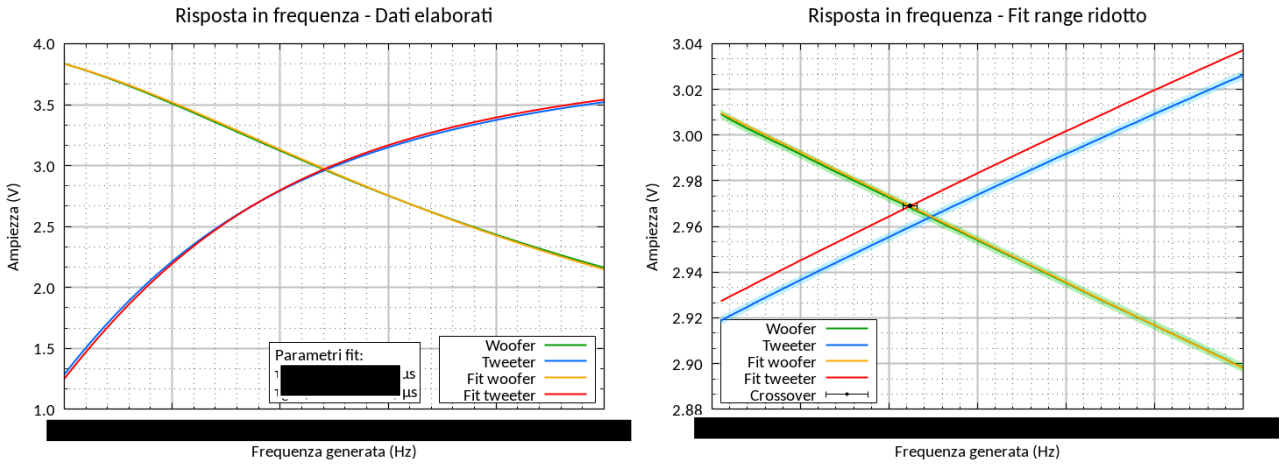
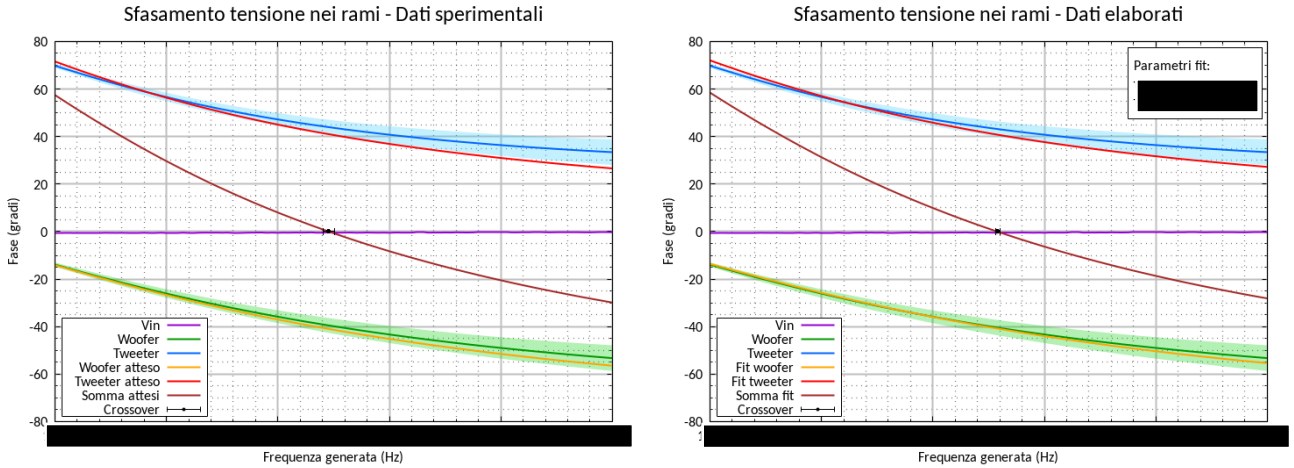


Figura 5: Ampiezza rilevata sui rami e fit della funzione attesa tramite i parametri τ_L e τ_C . Nel grafico di sinistra sono visibili i parametri del fit e nel grafico di destra è riportata la miglior stima della frequenza di crossover ricavata dai dati, con relativa incertezza. Range di frequenze e rappresentazione di dati e errori analoghi ai grafici in Fig. 4.

Per determinare i valori di τ_L e τ_C che meglio approssimano il comportamento del circuito in esame è stato effettuato un fit delle funzioni nell'Eq. (2) sui dati, il cui risultato è visibile in Fig. 5. I valori trovati sono $\tau_L = \text{[redacted]} \mu s$ e $\tau_C = \text{[redacted]} \mu s$, molto vicini a quelli attesi $\tau_L = \text{[redacted]}$ e $\tau_C = \text{[redacted]}$. I fit sono stati effettuati considerando l'ampiezza di V_{in} costante e pari al suo valor medio nel range in esame, in virtù di questo fatto durante il fit è stata considerata un'incertezza sull'ampiezza pari alla massima distanza tra i dati relativi a V_{in} e il suddetto valor medio, ovvero $20mV$. A questi fit sono associati i valori di chi quadrato ridotto $\widehat{\chi}_L^2 = 0.166$ e $\widehat{\chi}_C^2 = 0.997$. Il valore di $\widehat{\chi}_L^2$ risulta inferiore al valore ottimale di 1 perché in questo caso la funzione di fit è molto vicina ai dati sperimentali rispetto all'incertezza associata. Nonostante ciò risulta evidente dal grafico di sinistra in Fig. 5 che il modello usato descrive molto bene i dati ottenuti. Utilizzando l'Eq. (1) con i valori di τ_L e τ_C ricavati dal fit è stata determinata la miglior stima della frequenza di crossover basata sui dati acquisiti $\nu_0 = \text{[redacted]}$, visibile nel grafico di destra in Fig. 5. Questa stima è compatibile con il valore atteso calcolato precedentemente. Si nota che il metodo usato per ottenere questa stima tiene conto sia delle informazioni derivanti dall'andamento atteso sia delle numerose misure sperimentali: questo permette di ottenere una stima molto precisa della frequenza di crossover con un'incertezza del 0.12%, inferiore a quella associata al valore atteso.

4.4 Analisi della fase



(a) Sfasamento rilevato della tensione nei rami rispetto a quella in entrata e andamento atteso. Sono inoltre visibili la funzione data dalla somma degli andamenti attesi e la frequenza di crossover attesa con relativa incertezza.

(b) Sfasamento rilevato della tensione nei rami rispetto a quella in entrata e fit delle funzioni attese tramite i parametri τ_L e τ_C di cui sono riportati i valori ottenuti. Sono inoltre visibili la funzione data dalla somma dei fit e la migliore stima della frequenza di crossover basata sui dati acquisiti con relativa incertezza.

Figura 6: Sfasamento in funzione della frequenza. I dati e le incertezze sono stati rappresentati con linee e bande continue a causa della elevata densità di valori.

Gli sfasamenti attesi della tensione nei due rami rispetto alla tensione in entrata sono pari a

$$\phi_L(\nu) = -\arctan(2\pi\tau_L\nu) \quad \phi_C(\nu) = \arctan\left(\frac{1}{2\pi\tau_C\nu}\right) \quad (3)$$

e sono riportati in Fig. 6a. Queste relazioni suggeriscono un altro metodo per determinare la frequenza di crossover: usando infatti l'Eq. (1) ci si aspetta che alla frequenza di crossover i due sfasamenti risultino opposti. Questa condizione è equivalente al fatto che la somma degli sfasamenti sia nulla, quindi la frequenza di crossover è rappresentata dallo zero della funzione somma degli sfasamenti. Nella Fig. 6a è rappresentata la frequenza di crossover attesa $\nu_0 = \text{[redacted]} \text{ Hz}$ analogamente a quanto calcolato in precedenza. L'incertezza associata ai dati sperimentali è pari a $\delta\phi = 180 \times \nu / F_s$ (ν frequenza generata, F_s frequenza di campionamento). Tale formula, discussa in appendice, costituisce solo una stima in quanto non si conosce il preciso funzionamento del subVI utilizzato per l'estrapolazione della fase dai dati acquisiti. Dal momento che il metodo considerato è semplificato rispetto a quello utilizzato dal subVI, l'incertezza risultante costituisce probabilmente una sovrastima di quella effettiva. Per determinare la migliore stima della frequenza di crossover in relazione ai dati sullo sfasamento si procede analogamente a quanto fatto con la tensione: effettuando i fit delle funzioni nell'Eq. (3) tramite i parametri τ_L e τ_C si ottiene quanto visibile in Fig. 6b. In particolare risultano $\tau_L = \text{[redacted]} \mu\text{s}$ e $\tau_C = \text{[redacted]} \mu\text{s}$. A questi fit sono associati i valori di chi quadrato ridotto $\widetilde{\chi}_L^2 = 0.060$ e $\widetilde{\chi}_C^2 = 0.906$. Il valore di $\widetilde{\chi}_L^2$ è molto minore di 1, come atteso in virtù dell'utilizzo di un'incertezza sovrastimata. $\widetilde{\chi}_C^2$, invece, pur essendo molto vicino a 1, non è da considerarsi indice di un fit migliore in quanto anch'esso è stato calcolato tenendo conto della medesima incertezza sovrastimata. In effetti, confrontando i valori ottenuti sperimentalmente con quelli attesi, si osserva un andamento sistematicamente diverso sul ramo del tweeter. Questa discrepanza si ripercuote sulla miglior stima della frequenza di crossover, ovvero $\nu_0 = \text{[redacted]} \text{ Hz}$, che risulta infatti non compatibile con quella teorica o quella calcolata a partire dai dati di tensione. Risultati analoghi sono stati osservati anche sostituendo ciascuna componente del circuito e variando i parametri di acquisizione, il che suggerisce che possano essere esclusi difetti nelle componenti.

5 Conclusione

L'esperienza ha confermato parzialmente il comportamento atteso del filtro crossover in considerazione. Per prima cosa è stato osservato che la frequenza del segnale di tensione in entrata è costante in tutto il circuito. Inoltre, l'analisi dei dati relativi alla tensione nei vari punti del circuito ha evidenziato un andamento molto simile

a quello previsto dalle Eq. (2) e ha condotto a una stima del valore della frequenza di crossover $\nu_0 = (\text{██████████})Hz$ compatibile con quella attesa $\nu_0 = (\text{██████████})Hz$. Infine l'analisi dello sfasamento della tensione ha mostrato un andamento leggermente diverso da quello atteso (soprattutto per quanto riguarda il ramo del tweeter) e ha portato a una stima del valore della frequenza di crossover $\nu_0 = (\text{██████████})Hz$, non compatibile con quello teorico. Non è stato possibile determinare la causa di questa discrepanza tuttavia sono stati esclusi effetti riconducibili a difetti nelle componenti utilizzate e errori di acquisizione.

Appendice

- Per l'analisi del comportamento teorico del circuito è stato utilizzato il formalismo dei fasori con il quale, utilizzando i simboli dello schema in Fig. 1, si può scrivere la legge di Kirchhoff per la maglia dell'induttore come

$$\vec{V} = (R_{IL} + j\omega L)\vec{I}_L + \vec{V}_L = \frac{R_{IL} + j\omega L}{R_{IL} + R_L + j\omega L}\vec{V} + \vec{V}_L$$

in cui j rappresenta l'unità immaginaria e $\omega = 2\pi\nu$ la pulsazione dell'onda di tensione. Esplicitando \vec{V}_L si ottiene

$$\vec{V}_L = \frac{R_L}{R_{IL} + R_L + j\omega L}\vec{V} = \frac{\rho}{1 + j\omega\tau_L}\vec{V}$$

con $\rho = \frac{R_L}{R_{IL} + R_L}$ e $\tau_L = \frac{L}{R_{IL} + R_L}$. Procedendo analogamente per la maglia del condensatore (approssimando le resistenze agli stessi valori usati in precedenza e usando $1/j\omega C$ come impedenza) si trova

$$\vec{V}_C = \frac{R_C}{R_{IC} + R_C + \frac{1}{j\omega C}}\vec{V} = \frac{\rho}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_C}}\vec{V}$$

con $\tau_C = (R_{IC} + R_C)C$. Queste espressioni legano i fasori che rappresentano la tensione acquisita sul ramo del woofer e del tweeter con il fasore della tensione generata attraverso un numero complesso dipendente da ω e quindi da ν . Calcolando il modulo e la fase di questi numeri complessi si ottengono le Eq. (2) e le Eq. (3).

- L'Eq. (1) si ricava facilmente cercando l'intersezione tra le funzioni descritte nell'Eq. (2), ovvero la frequenza per cui la tensione ai capi di R_L è uguale a quella ai capi di R_C :

$$\frac{\rho}{\sqrt{1 + (2\pi\nu_0\tau_L)^2}}V = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi\nu_0\tau_C)^2}}}V$$

- L'incertezza sulla misura della fase è stata stimata usando una possibile espressione per lo sfasamento in gradi tra due onde sinusoidali con la stessa frequenza: $\phi = 360 \times \Delta t/T$, in cui Δt rappresenta la distanza temporale fra i picchi delle due onde e $T = 1/\nu$ il periodo delle onde. Come incertezza sul tempo di rilevamento del picco di un'onda si è assunto $\delta t = 1/(2F_s)$, con F_s frequenza di campionamento. In questo caso l'onda da cui si vuole trovare lo sfasamento ha una fase praticamente nulla grazie all'uso del trigger: il picco di questa onda si può quindi considerare ad un determinato istante temporale con incertezza trascurabile. Per questa ragione a Δt è stata attribuita un'incertezza pari a $\delta(\Delta t) = \delta t = 1/(2F_s)$, ovvero quella relativa ai soli istanti di tempo in cui sono stati rilevati i picchi delle tensioni sui rami. Considerando quindi anche l'incertezza di ν trascurabile e propagando l'incertezza di Δt , si ottiene l'espressione utilizzata $\delta\phi = 180 \times \nu/F_s$.