

# Misura del momento di inerzia di un disco con il pendolo di Maxwell

Il momento di inerzia di un corpo rigido è un indice della resistenza che l'oggetto offre a cambiare la velocità di rotazione attorno ad un determinato asse. Si rappresenta con il simbolo  $I$  e, nel SI, si misura in  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ . Vale la:

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

analoga alla:

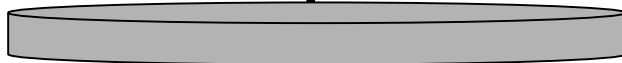
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

valida per i moti di traslazione.



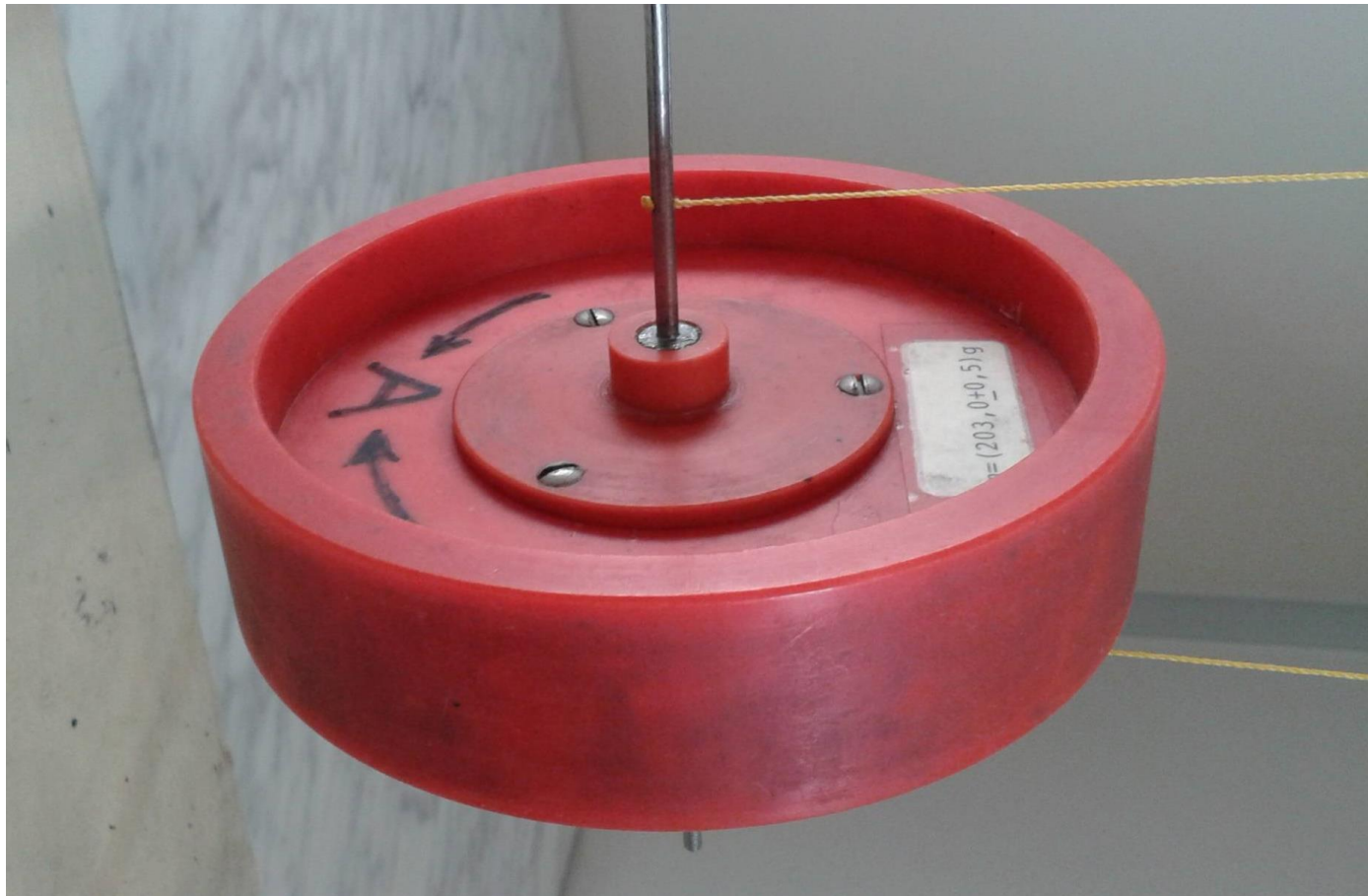
Punto materiale di massa  $m$ ,  
distante  $r$  dall'asse

$$I = mr^2$$

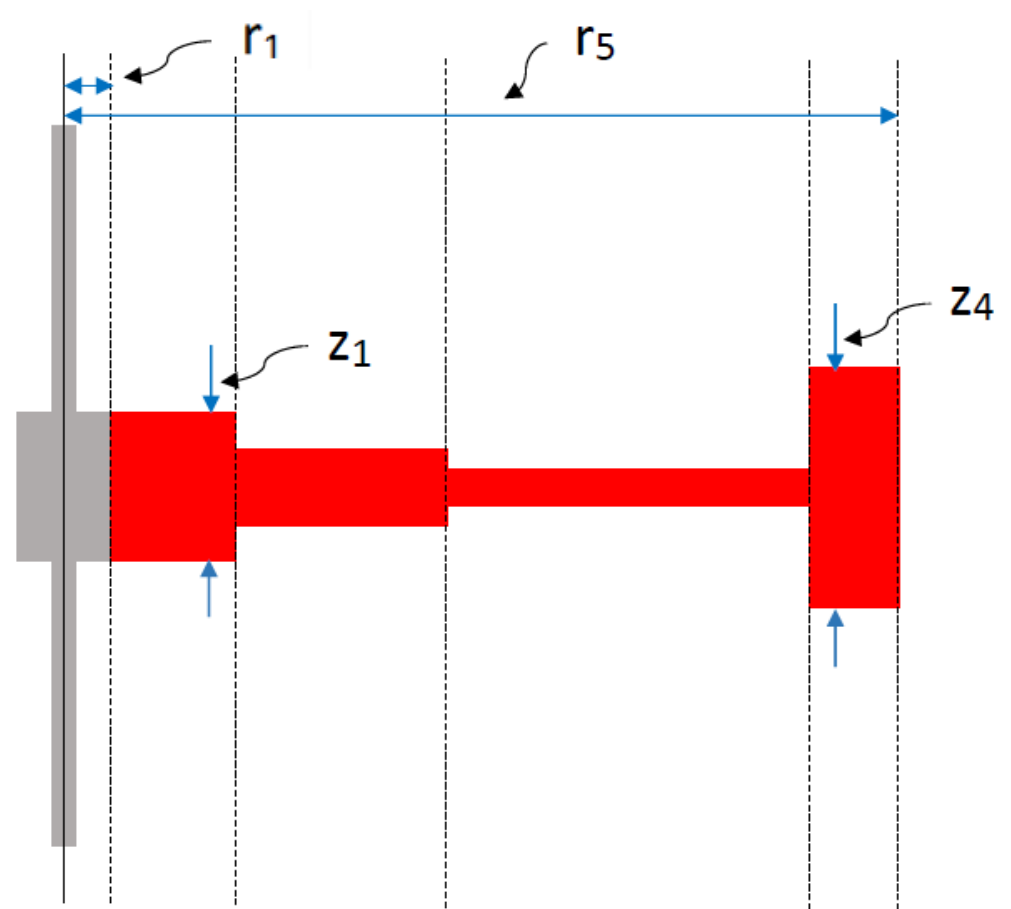
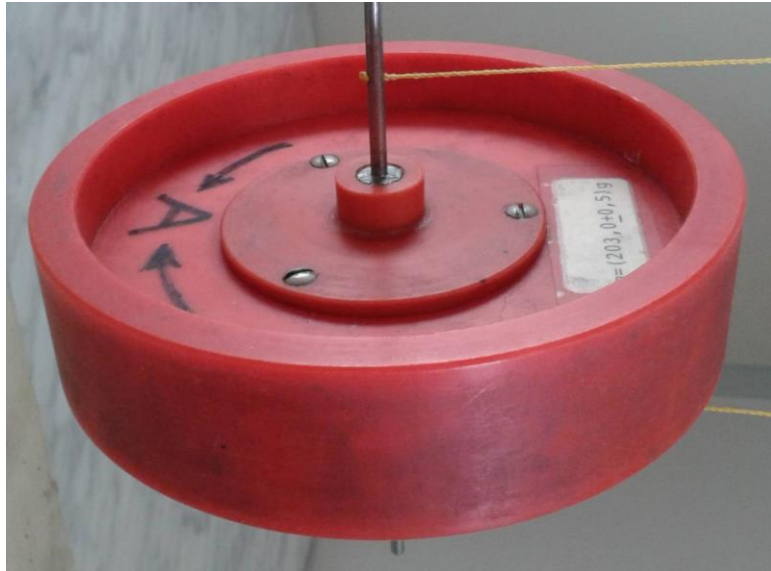


Disco (o cilindro di altezza  $z$ )  
omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$   
(rispetto all'asse passante per il  
centro e perpendicolare al piano  
del disco)

$$I = \frac{mr^2}{2}$$



Il nostro disco non è omogeneo, nel senso che lo spessore non è uniforme (varia con la distanza dall'asse)



Il **pendolo di Maxwell** per la misura “dinamica” del momento di inerzia del disco.

Si avvolgono i fili attorno al perno metallico, alzando il disco fino alla quota massima, poi si lascia cadere il disco.

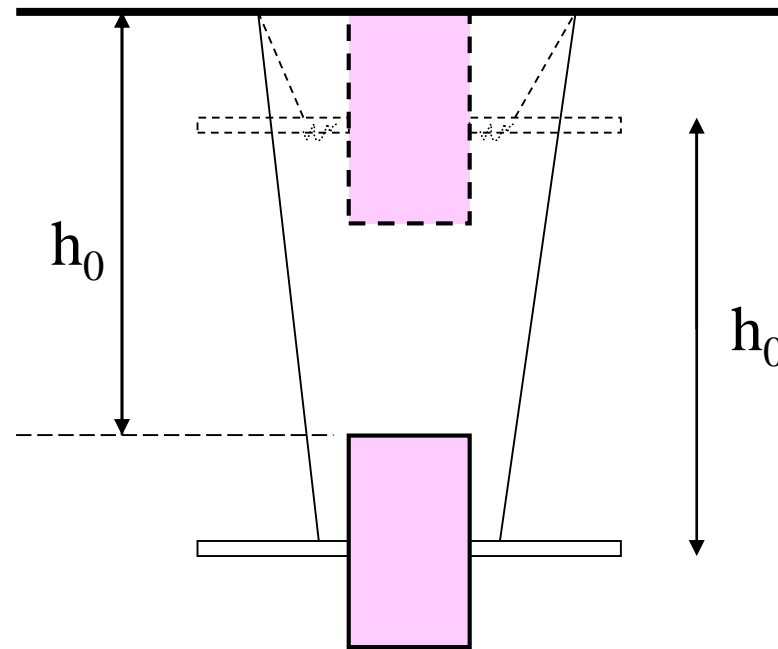
Il moto di caduta è roto-traslazionale e dipende dal valore di  $I$  del disco.

Video in

[https://www.youtube.com/channel/UCDPNx1wAOCkIK22\\_PBVpFDw/videos](https://www.youtube.com/channel/UCDPNx1wAOCkIK22_PBVpFDw/videos)



## Pendolo di Maxwell



Dalla conservazione dell'energia meccanica durante la caduta, si ottiene il momento di inerzia del disco:

$$I = \frac{m (d_p + d_f)^2}{8h_0} (g t_0^2 - 2h_0)$$

**m** = massa del disco (fornita)

**h<sub>0</sub>** = altezza di caduta

**t<sub>0</sub>** = tempo di caduta

**d<sub>p</sub>** = diametro del perno

**d<sub>f</sub>** = diametro del filo

**g** = (9.81 ± 0.01) m/s<sup>2</sup>

Notare che in 
$$I = \frac{m (d_p + d_f)^2}{8h_0} (g t_0^2 - 2h_0)$$

risulta che  $g t_0^2 \gg 2h_0$

Questo può essere sfruttato per semplificare la formula ai fini della propagazione delle incertezze per il calcolo di  $\Delta I$ .

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta d_p + \Delta d_f}{d_p + d_f} + \frac{\Delta h_0}{h_0} + 2 \frac{\Delta t_0}{t_0}$$

Nella relazione, riportate il contributo di ognuno dei quattro termini per evidenziare quali sono quelli dominanti.



I diametri del perno e del filo  $d_p$  e  $d_f$  sono misurati con il **micrometro**. Usato per misurare spessori fino a pochi cm, il micrometro è basato su ganasce mosse da una vite micrometrica con passo di  $\frac{1}{2}$  mm. Un giro del tamburo è suddiviso in 50 parti, ogni divisione essendo ampia  $\frac{1}{100}$  di mm.



La risoluzione del micrometro è il valore della più piccola divisione della scala, cioè 0.01 mm

**Verificate il corretto azzeramento dello strumento (se cioè è presente o meno un errore sistematico di “offset”)**

Per le misure del tempo di caduta del disco, utilizzate un cronometro (quello del vostro smartphone)

**Eseguite un test per valutare l'incertezza sistematica legata a eventuali ritardi o anticipi: fate marciare in parallelo due cronometri per circa 1000 s e guardate di quanto differiscono le due misure.**

Poi, con una proporzione, valutate la differenza di misura dei due cronometri su un intervallo di tempo pari a  $t_0 \sim 10$  s.

Questo errore sistematico è trascurabile rispetto all'errore casuale ?

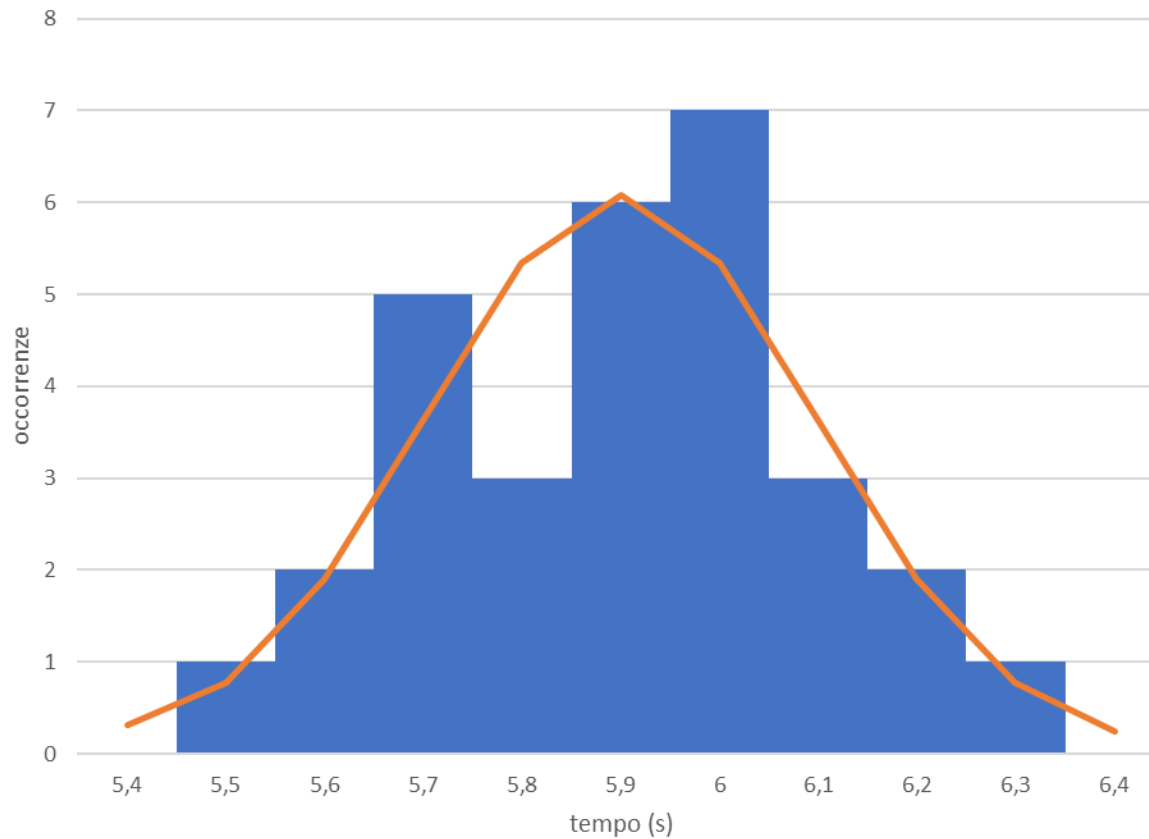
Prendete un campione di 40 misure del tempo di caduta, usando un solo cronometro, **distribuendo le misure in *bin* ampi 0.1 s.**

Fate l'analisi statistica del campione:  **$t_0$  è la media delle 40 misure.**  
**Come incertezza  $\Delta t_0$ , nel calcolo di  $\Delta I/I$ , prendete 3 volte la deviazione standard della media** (fattore di copertura  $k = 3$ ) per poterla propagare con le incertezze delle altre misure, che sono incertezze massime.

Fate l'analisi grafica del campione (inserire i due grafici nella relazione dell'esperimento):

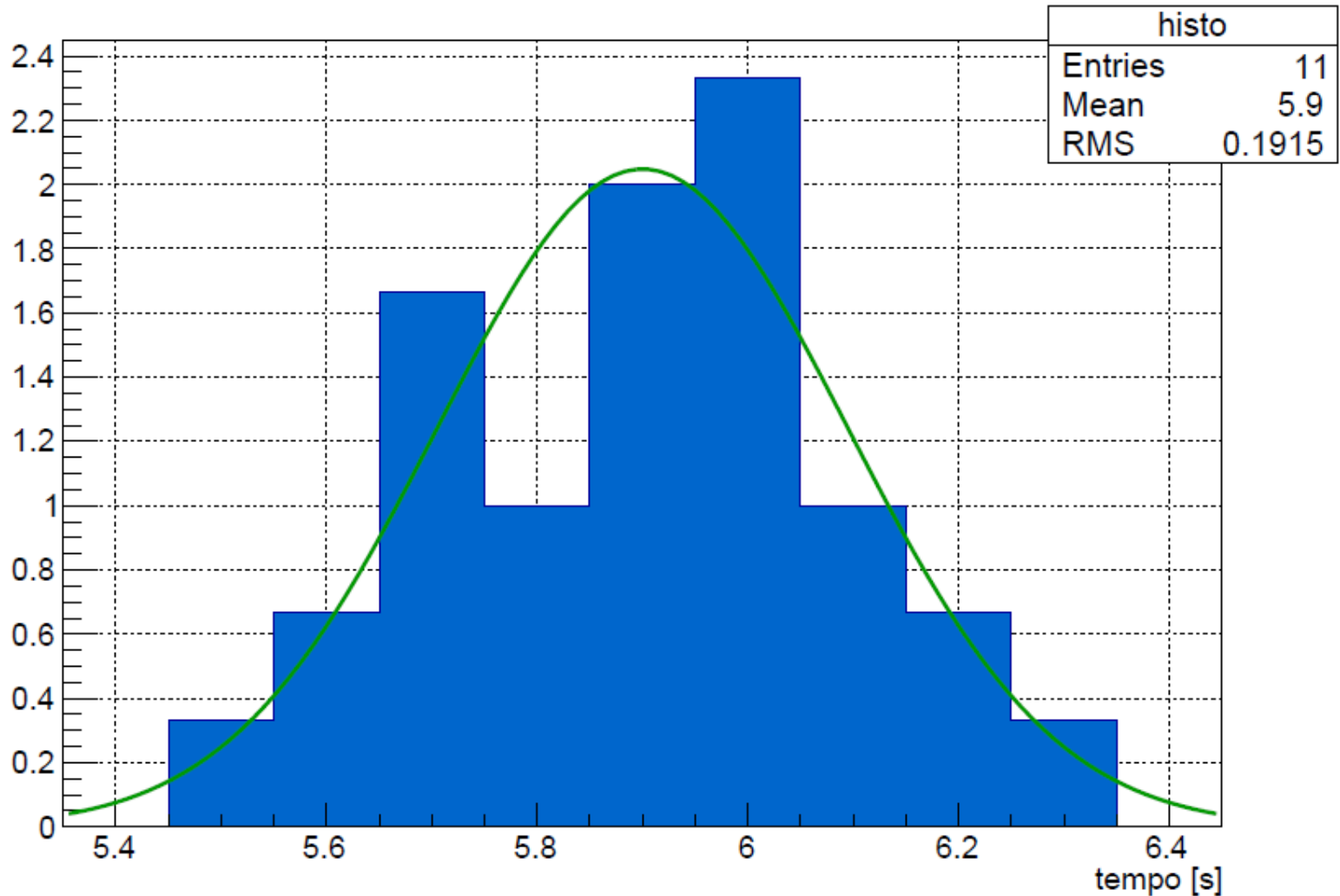
- con il foglio di calcolo confrontate l'istogramma delle occorrenze con l'istogramma degli eventi attesi bin per bin (ottenuti integrando la gaussiana)
- con la macro di root confrontate l'istogramma delle densità di frequenza con la PDF gaussiana.

Esempio di istogramma di **occorrenze** per un campione di 30 misure del tempo di caduta del pendolo di Maxwell



Lo stesso istogramma, ma in **densità di frequenza** (confrontabile con la PDF gaussiana)

$\Phi \text{ (s}^{-1}\text{)}$



# Come realizzare il grafico con root ?

editate con Notepad



il file [maxwell.c](#) ;

modificate il file, inserendo i vostri dati;

# Prima parte: istogramma in densità di frequenza

```
#include "TCanvas.h"
#include "TStyle.h"
#include "TAxis.h"
#include "TH1F.h"
#include "TF1.h"

void maxwell()
{
    //
    // Canvas dove il grafico verra' disegnato
    // (dimensione : 500 x 500) ed opzioni di stile (griglie, colore di sfondo, ...)
    //

    TCanvas *canvas = new TCanvas ("canvas", "tempi di caduta", 700, 500);
    gStyle->SetCanvasColor(0);
    gStyle->SetStatBorderSize(1);
    canvas->SetGrid(true);

    //
    // Istogramma nBins = numero di bins , xMin(Max) = minimo (massimo) per l'asse x
    // riempito col numero di occorrenze per bin normalizzate a numero_di_misure * larghezza_del_bin
    //
```

```
Int_t nBins = 11;
Int_t nMeas = 30;
```

Numero di bin e numero di misure  
del campione

```
Float_t binWidth = 0.1;
Float_t xMin = 5.35;
Float_t xMax = 6.45;
```

Limite inferiore del primo bin e  
limite superiore dell'ultimo bin

```
Float_t scale = nMeas * binWidth;
```

```
TH1F * histo = new TH1F("histo","Tempi di caduta",nBins,xMin,xMax);
```

```
histo->Fill(5.4, 0.0/scale);
histo->Fill(5.5, 1.0/scale);
histo->Fill(5.6, 2.0/scale);
histo->Fill(5.7, 5.0/scale);
histo->Fill(5.8, 3.0/scale);
histo->Fill(5.9, 6.0/scale);
histo->Fill(6.0, 7.0/scale);
histo->Fill(6.1, 3.0/scale);
histo->Fill(6.2, 2.0/scale);
histo->Fill(6.3, 1.0/scale);
histo->Fill(6.4, 0.0/scale);
```

Per ognuno degli nBins bin, valore centrale  
del bin (primo parametro) e numero di  
occorrenze (secondo parametro)

```
histo->GetXaxis()->SetTitle("tempo [s]");
histo->GetYaxis()->SetTitle("#Phi [s^{-1}]");
histo->SetFillColor(kAzure + 2);
```

```
histo->Draw("HIST");
```

## Seconda parte: PDF gaussiana

```
//  
// Funzione gaussiana nell'intervallo [xMin,xMax] :  
// [0]/(sqrt(2*pi_greco)*[2]) * exp(-0.5*((x-[1])/[2])^2) )  
//  
TF1 *func = new TF1("func", "gausn", xMin, xMax);  
  
//  
// Parametri [0] = area , [1] = media, [2] = sigma  
// calcolati con le informazioni dei tempi di caduta  
//  
func->SetParameter(0, 1.);  
func->SetParameter(1, 5.9);  
func->SetParameter(2, 0.1948);  
  
func->SetLineColor(kGreen + 2);  
func->Draw("same");  
}
```

Media e deviazione standard  
del campione

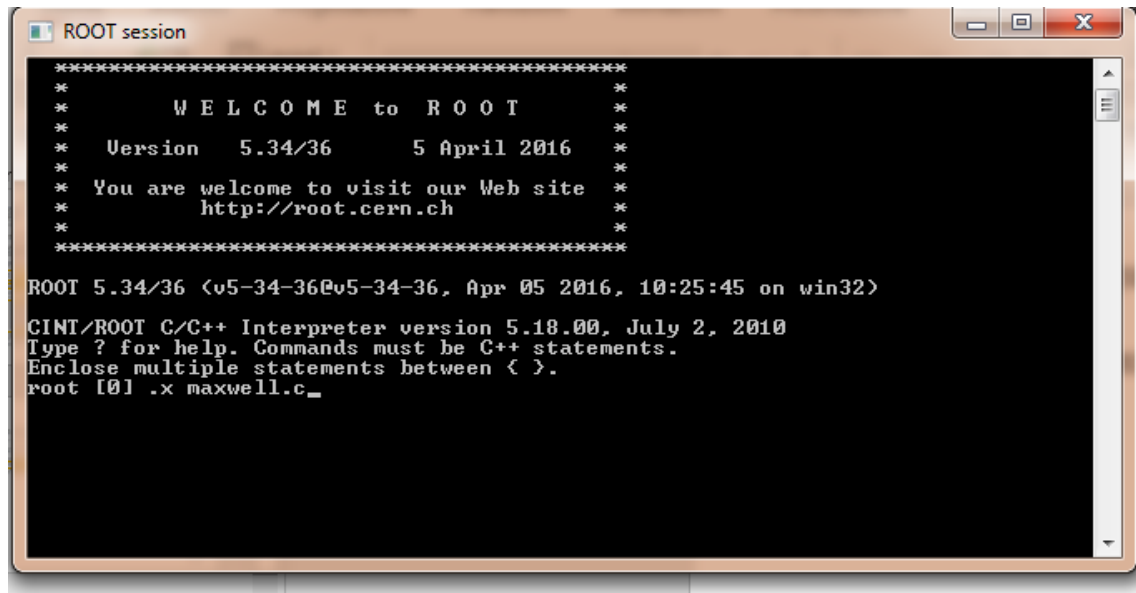
salvate il file modificato, con lo stesso nome (cioè sovrascrivete il file).

Nota: il file (come l'analogo per l'esperimento della termocoppia) si trova anche su Virtuale → Materiale di supporto → cartella "macro Root"



Infine aprite Root ed eseguite la macro maxwell.c con il comando:

`.x maxwell.c`



```
ROOT session
*****
*          W E L C O M E  to  R O O T          *
*          *          *          *          *
*   Version   5.34/36      5 April 2016         *
*          *          *          *          *
* You are welcome to visit our Web site        *
*   http://root.cern.ch                        *
*          *          *          *          *
*****
ROOT 5.34/36 <v5-34-36@v5-34-36, Apr 05 2016, 10:25:45 on win32>
CINT/ROOT C/C++ Interpreter version 5.18.00, July 2, 2010
Type ? for help. Commands must be C++ statements.
Enclose multiple statements between { }.
root [0] .x maxwell.c_
```

ottenendo

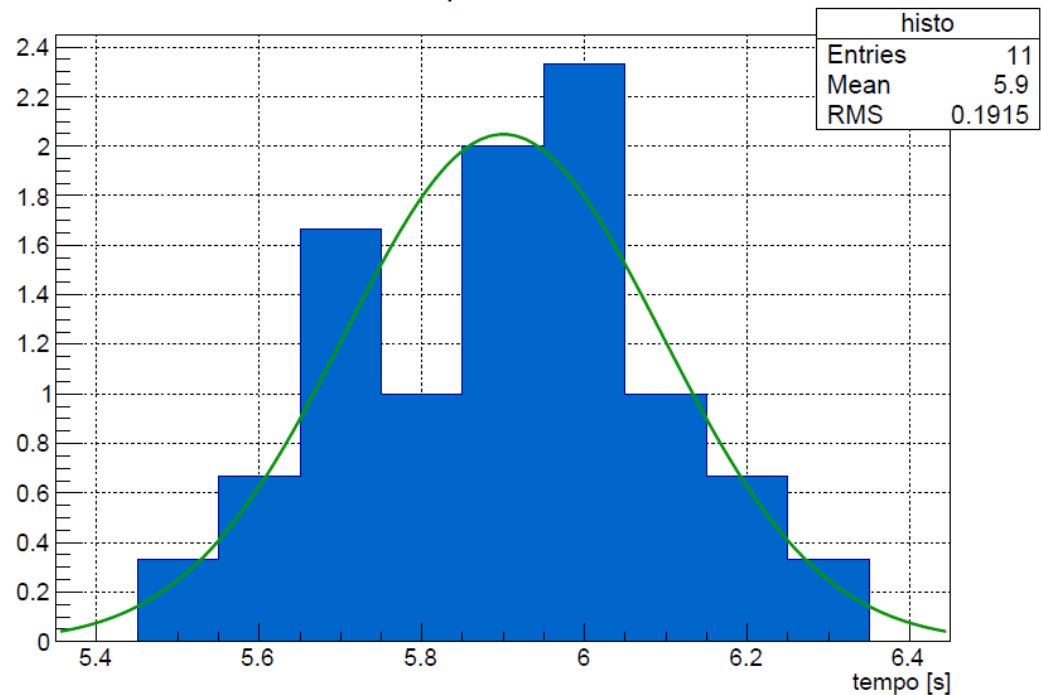
Infine aprite Root ed eseguite la macro maxwell.c con il comando:

`.x maxwell.c`

```
ROOT session
*****
*      W E L C O M E  t o  R O O T      *
*      Version   5.34/36      5 April 2016  *
*      You are welcome to visit our Web site *
*      http://root.cern.ch      *
*****
ROOT 5.34/36 (v5-34-36@v5-34-36, Apr 05 2016, 10:25:45)
CINT/ROOT C/C++ Interpreter version 5.18.00, July 2, 2015
Type ? for help. Commands must be C++ statements.
Enclose multiple statements between { }.
root [0] .x maxwell.c_
```

ottenendo

Tempi di caduta

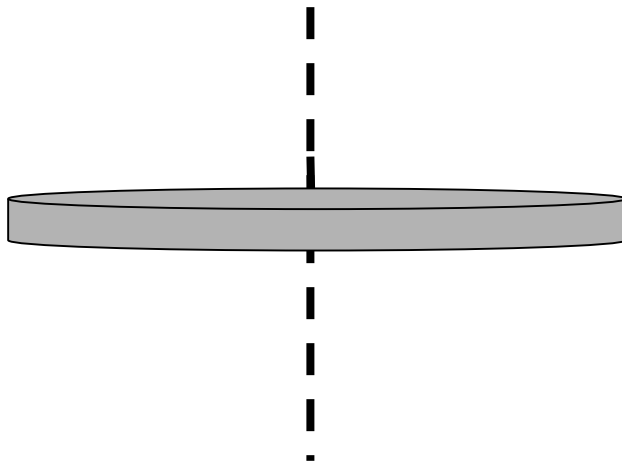


La seconda procedura per la misura del momento di inerzia del disco si può definire "geometrica", in quanto si basa sulle misure delle dimensioni (altezza, diametro interno e diametro esterno) dei toroidi coassiali che formano il disco.

Per ricavare la formula, ci si basa sulla additività del momento di inerzia (il momento di inerzia di un sistema è la somma dei momenti di inerzia degli oggetti che compongono il sistema)

La seconda procedura per la misura del momento di inerzia del disco si può definire "geometrica", in quanto si basa sulle misure delle dimensioni (altezza, diametro interno e diametro esterno) dei toroidi coassiali che formano il disco.

Per ricavare la formula, ci si basa sulla additività del momento di inerzia (il momento di inerzia di un sistema è la somma dei momenti di inerzia degli oggetti che compongono il sistema)



Disco (o cilindro di altezza  $z$ ) omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  (rispetto all'asse passante per il centro e perpendicolare al piano del disco)

$$I = \frac{mr^2}{2}$$

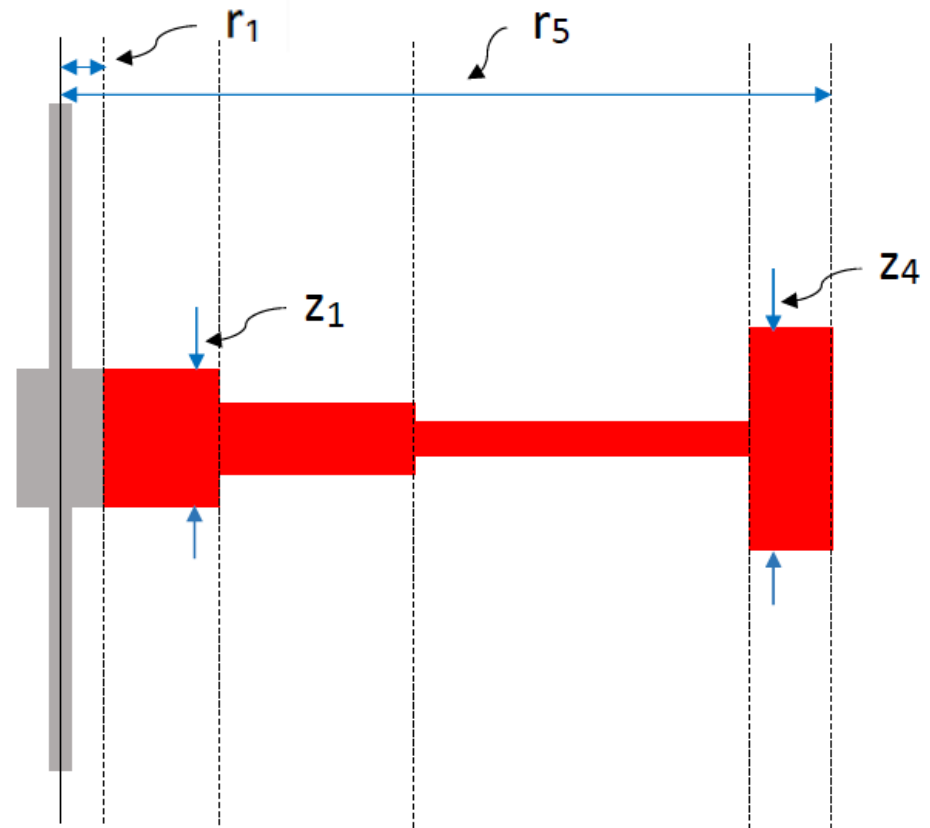
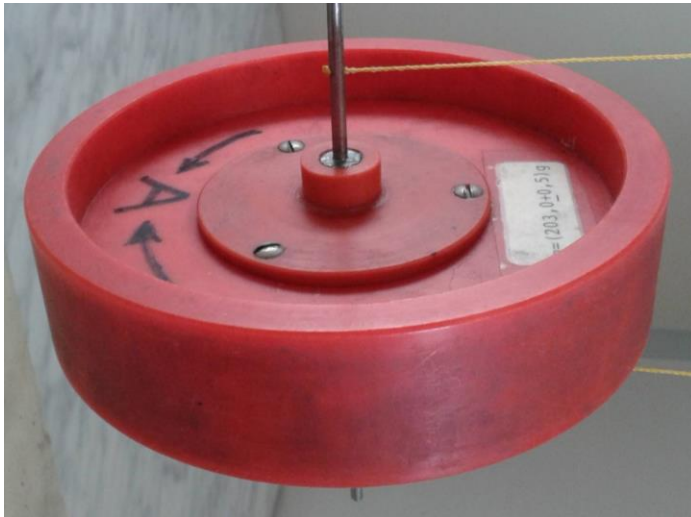
Un disco di massa  $(m + m_1)$  e raggio  $r_2$  può essere visto come composto da un disco di massa  $m_1$  e raggio  $r_1 < r_2$  più un toroide di massa  $m$ , raggio interno  $r_1$  e raggio esterno  $r_2$ .

Poiché il momento di inerzia è una grandezza additiva, risulta che:

$$\begin{aligned} I_{\text{toroide}} &= \frac{(m + m_1)r_2^2}{2} - \frac{m_1 r_1^2}{2} = \\ &= \frac{m r_2^2}{2} + \frac{m_1}{2} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2) = \\ &= \frac{\rho \pi}{2} z (r_2^4 - r_1^4) \end{aligned}$$

dove  $z$  indica lo “spessore” del toroide (cioè altezza del cilindro cavo) e  $\rho$  la densità del materiale.

Si può quindi misurare il momento di inerzia tramite i parametri geometrici e la densità, ipotizzata uniforme, del disco.



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

dove 
$$I_i = \frac{\rho \pi}{2} z_i (r_{i+1}^4 - r_i^4)$$

La densità della plastica è  $\rho = (1.36 \pm 0.02) \text{ g/cm}^3$

Il momento di inerzia con la procedura "geometrica" si ottiene quindi tramite la formula:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

dove

$$I_i = \frac{\rho \pi}{2} z_i (r_{i+1}^4 - r_i^4) = \frac{\rho \pi}{32} z_i (d_{i+1}^4 - d_i^4)$$

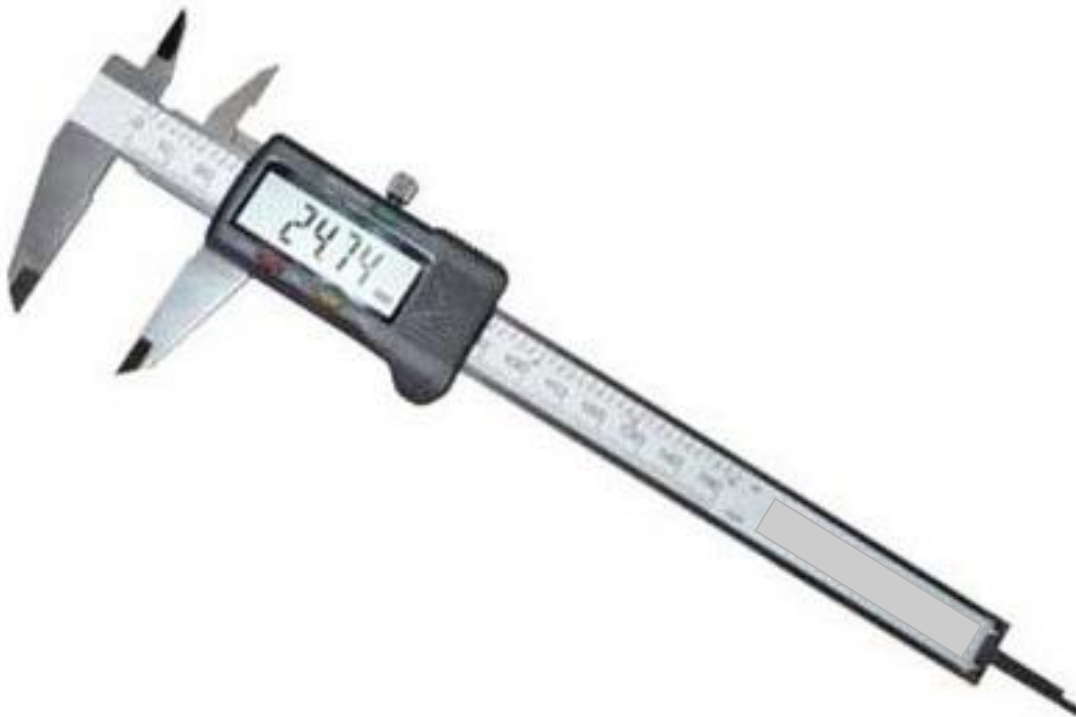
Confrontatelo con il valore di  $I$  che avevate ottenuto con la procedura "dinamica" utilizzando il pendolo di Maxwell.

L'errore sistematico sul momento di inerzia dovuto all'avere trascurato il contributo della parte metallica è trascurabile: perché ?

# Misura geometrica del momento di inerzia

Il **calibro** è usato per misure dimensionali fino ad alcuni dm.

E' munito di ganasce che servono per definire la lunghezza del segmento da misurare.





Notare che  $\Delta I \neq \Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3 + \Delta I_4$  poiché alcuni diametri  $d_i$  sono presenti in più di una  $I_i$  (vedi ad es. testo e soluzione del problema 1 dell'esame del 19 Gennaio 2021)

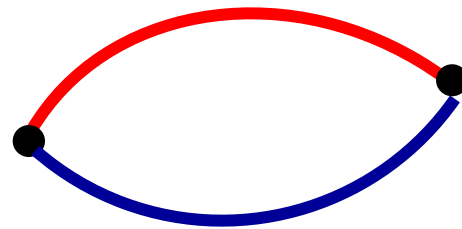
Misurate, con il calibro, i diametri  $d_1 \dots d_5$  e gli spessori  $z_1 \dots z_4$  (indici crescenti dall'asse del disco verso l'esterno).

Valutate l'ordine di grandezza  $I^*$  del momento di inerzia del disco, come  $I^* = \frac{1}{2}mr_5^2 = \frac{1}{8}md_5^2$ . Perché  $I^*$  è inferiore al valore di  $I$  che avete misurato con il pendolo di Maxwell ?

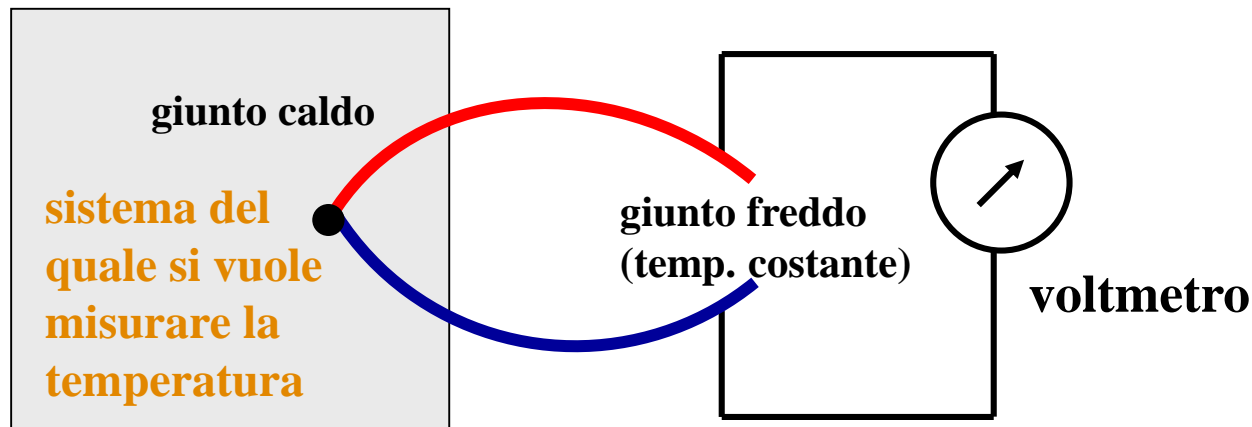
Le due misure ( $I_D$  e  $I_G$ ) sono compatibili tra loro ?  
Notare che  $\Delta I_D$  e  $\Delta I_G$  sono incertezze massime.

# Calibrazione di una termocoppia

La **termocoppia** è un sensore di temperatura basato sull'**effetto Seebeck**: quando due giunzioni bimetalliche sono mantenute a temperature diverse si viene a creare una piccola ( $\sim \text{mV}$ ) differenza di potenziale elettrico tra i due metalli.



Nessuna ddp se le due giunzioni sono alla stessa temperatura, anche se le due energie di estrazione sono diverse.

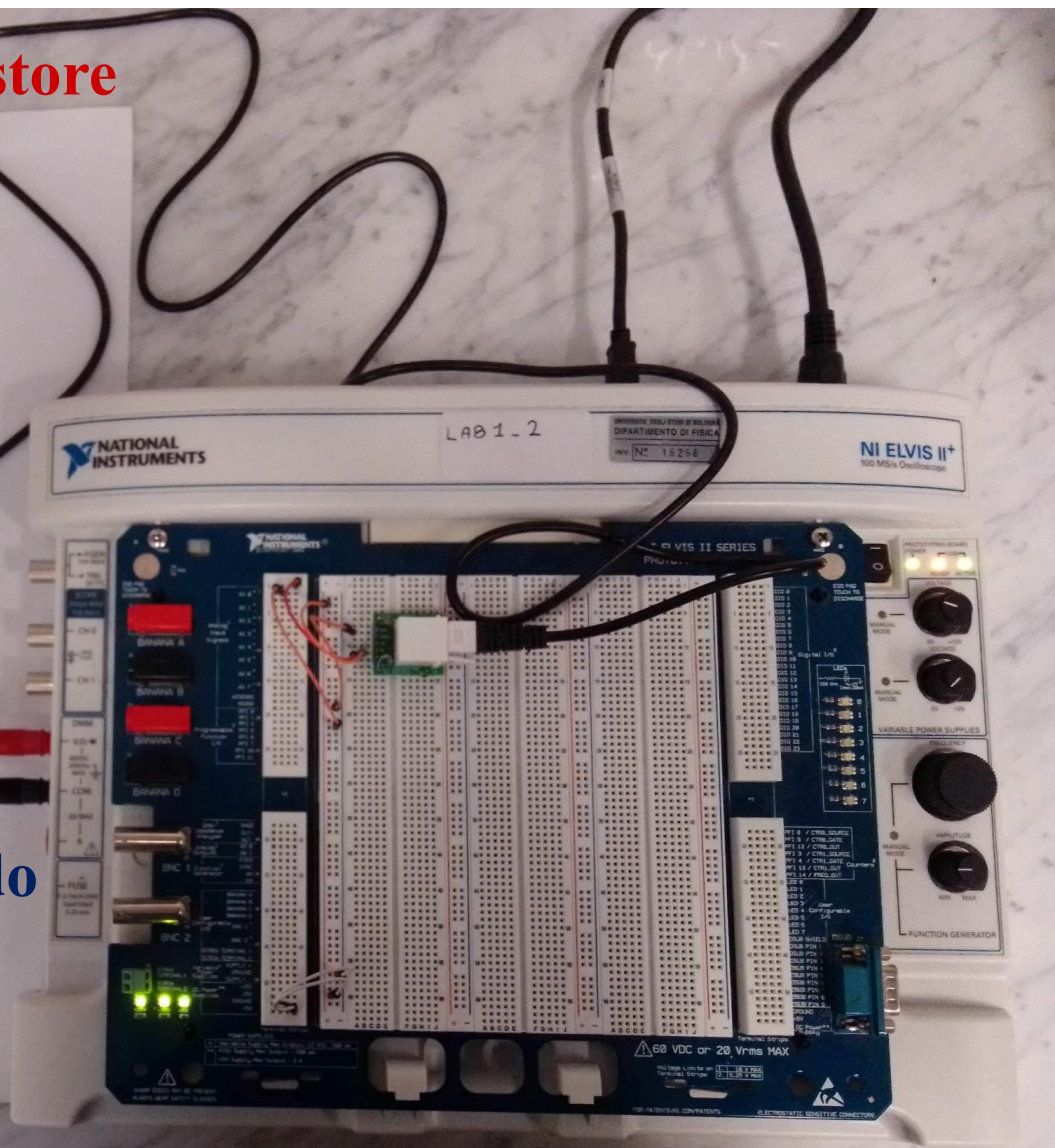


**giunto caldo e termistore**

(da inserire nel  
sistema in misura)

**giunto freddo**

(da collegare al  
voltmetro)



Vari **punti di forza**: la prontezza nella risposta a variazioni di temperatura, il basso costo, l'ampio range di temperature misurabili, l'utilizzo anche in ambienti “ostili”.

Due **svantaggi** importanti: la necessità di mantenere costante la temperatura del giunto freddo, l'alta risoluzione richiesta al voltmetro (a causa delle piccole ddp prodotte)

In laboratorio userete termocoppie di tipo K (chromel-alumel)

Il termometro di riferimento per la calibrazione è costituito da un sensore il cui funzionamento si basa sulla dipendenza della resistività elettrica dalla temperatura (termistore).



Durante le operazioni di calibrazione della termocoppia, è opportuno verificare la taratura del termometro a 0 °C e a 100 °C con acqua distillata (ghiaccio in fusione e acqua in ebollizione). La temperatura di ebollizione dovrebbe corrispondere a quella attesa alla pressione atmosferica attuale.



## *PRESSIONE DI VAPORE DELL'ACQUA INTORNO A 100°C*

I dati sono espressi in mm di Hg in funzione della temperatura per intervalli di 0.2°C (colonne) per ogni grado (righe)

<i>T in °C</i>	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
95	633.90	638.59	643.30	648.05	652.82
96	957.62	662.45	667.31	672.20	677.12
97	682.07	687.04	692.05	697.10	702.17
98	707.27	712.40	717.56	722.75	727.98
99	733.24	738.53	743.85	749.20	754.58
100	760.00	765.45	770.93	776.44	782.00
101	787.57	793.18	798.82	804.50	810.21

*Tabella di Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press, USA*

La pressione atmosferica è misurata dal barometro del laboratorio

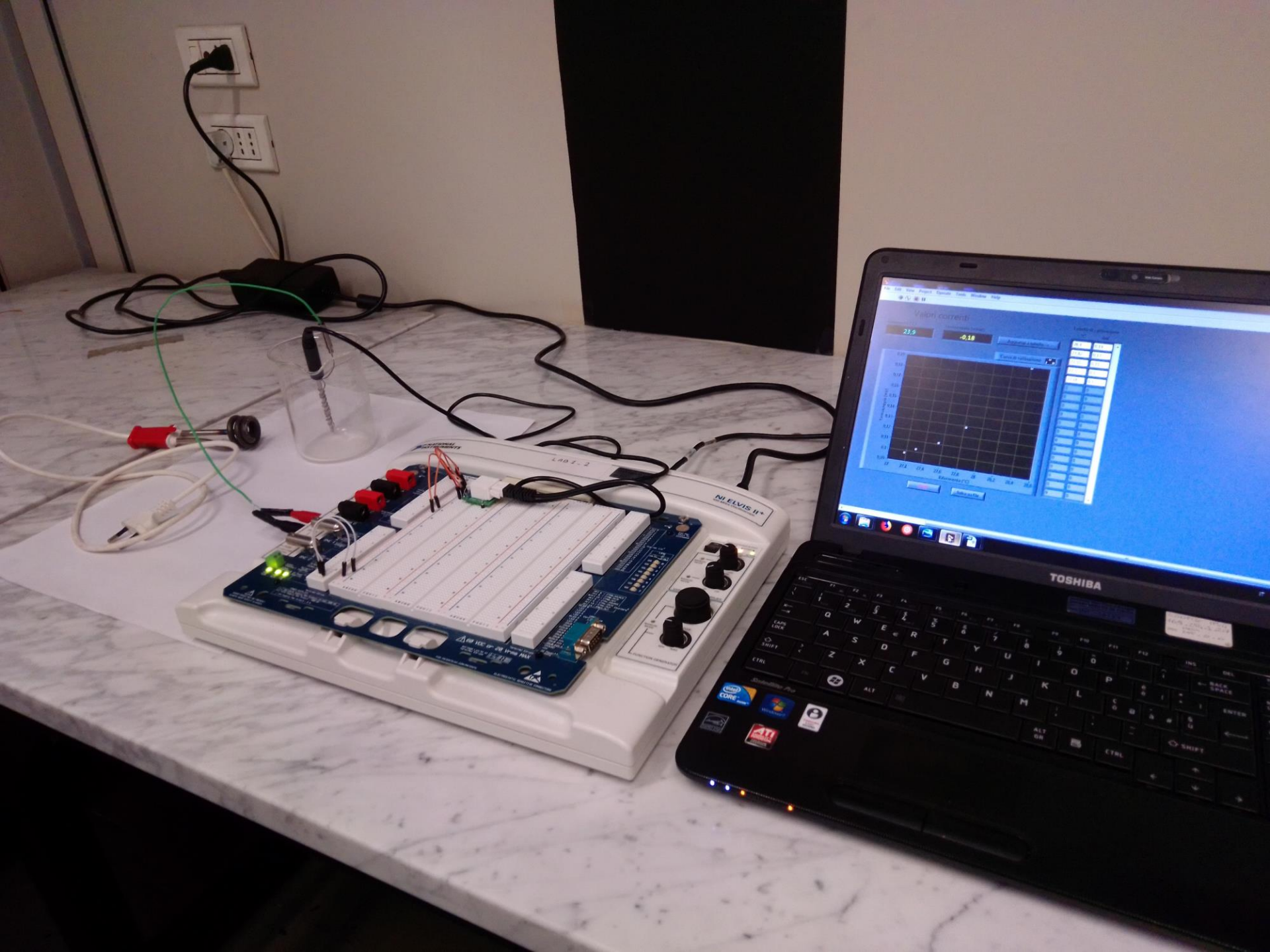
## Come ottenere la retta di calibrazione della termocoppia ?

Indicate con  $T_i$  la temperatura i-esima dell'acqua distillata, letta con il termistore, e con  $V_i$  la corrispondente d.d.p. della termocoppia letta sul voltmetro.

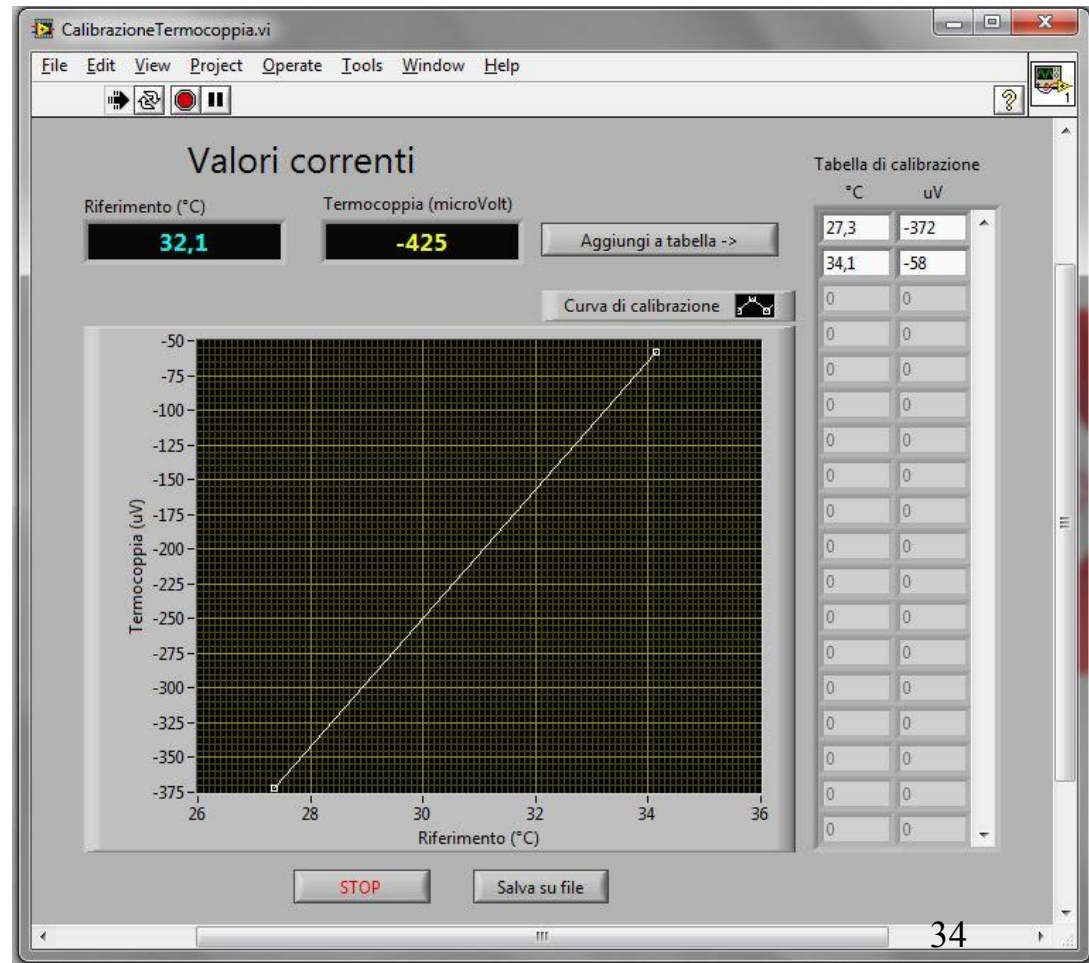
Avete a disposizione un becker, acqua distillata, ghiaccio di acqua distillata, un tritagliaccio ed un riscaldatore per liquidi, a resistenza.

In un becker mettete ghiaccio tritato (ghiaccio in fusione) e, mano a mano che il sistema si scalda, fate le misure nell'intervallo tra 0 °C (circa) e temperatura ambiente. A questo punto, aggiungete acqua a temperatura ambiente e, scaldandola, realizzate le misure nell'intervallo compreso tra la temperatura ambiente e 100 °C (circa). Ai fini del grafico di calibrazione sono sufficienti una decina di punti nell'intervallo 0 -100 °C, non necessariamente equidistanti tra loro in temperatura.





- Programma di acquisizione scritto in LabVIEW
- Termistore di riferimento collegato ad un canale analogico della scheda ELVIS
- Termocoppia connessa all'ingresso V/ $\Omega$  del multimetro di ELVIS
- Visualizzazione grafica dei dati e possibilità di esportazione in file di testo.



Terminata la fase di presa dati, prendete in considerazione le coppie (T,ddp) = (x,y) in riscaldamento da 0°C e 100°C, per ottenere i parametri della retta di calibrazione.

Con l'aiuto di un foglio di calcolo, calcolate i parametri A e B della retta, e le incertezze  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$ , utilizzando le formule della regressione lineare.

Considerate incertezze trascurabili sulle misure di temperatura e incertezze

$\sigma_{ddp} = \sigma_y = 30 \text{ mV} = 0.03 \text{ mV}$  per le differenze di potenziale.

Le x rappresentano le temperature e le y le d.d.p.

$$A = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{\Delta} \quad \sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}}$$

$$B = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\Delta} \quad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$\Delta = N \sum_i x_i^2 - \left( \sum_i x_i \right)^2$$

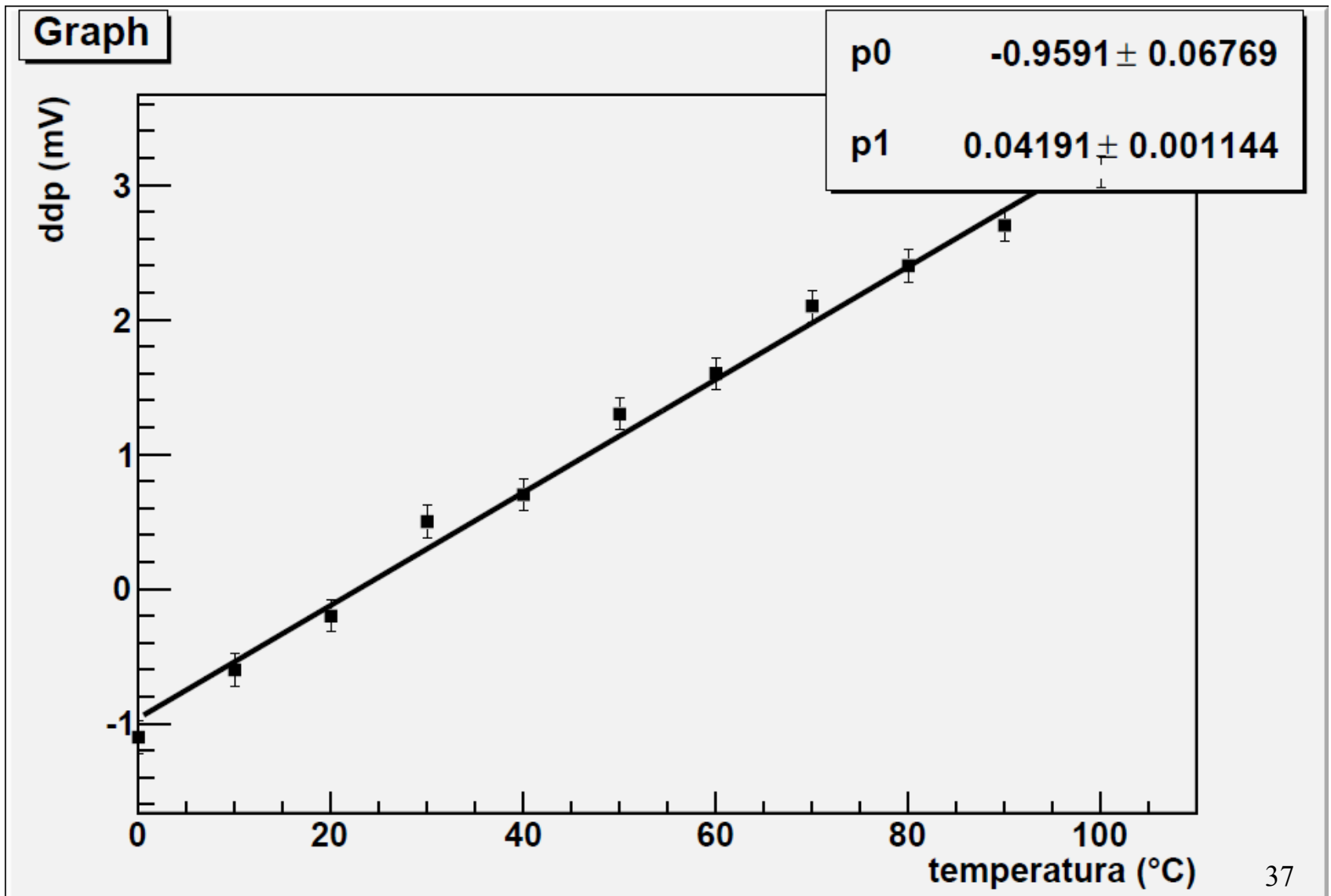
# Esempio di retta di regressione con Excel

$$y = 0,0419x - 0,9591$$

$$R^2 = 0,9925$$



## Esempio di retta di regressione con ROOT



## Come realizzare il grafico con root ?

editate con Notepad



il file [termocoppia.c](#) ;

modificate il file, inserendo i vostri dati;



```

#include "TGraphErrors.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TStyle.h"
#include "TAxis.h"
#include "TFl.h"

void termocoppia()
{
    //
    // Canvas dove il grafico verra' disegnato
    // (dimensione : 500 x 500) ed opzioni di stile (griglie, colore di sfondo, ...)
    //
    TCanvas *canvas = new TCanvas ("canvas", "Calibrazione termocoppia", 700, 500);
    gStyle->SetCanvasColor(0);
    gStyle->SetStatBorderSize(1);
    canvas->SetGrid(true);

    //
    // Grafico y(x), con barre di errore con punti ed errori
    // (indice del punto, coordinata x, coordinata y) aggiunti uno ad uno
    // NOTA: l'indice dei punti comincia da 0
    //
    TGraphErrors *graph = new TGraphErrors();

```

```

graph->SetPoint(0, 0., -1.1);
graph->SetPointError(0, 0., 0.03);

graph->SetPoint(1, 10., -0.6);
graph->SetPointError(1, 0., 0.03);

graph->SetPoint(2, 20., -0.2);
graph->SetPointError(2, 0., 0.03);

graph->SetPoint(3, 30., 0.5);
graph->SetPointError(3, 0., 0.03);

graph->SetPoint(4, 40., 0.7);
graph->SetPointError(4, 0., 0.03);

graph->SetPoint(5, 50., 1.3);
graph->SetPointError(5, 0., 0.03);

graph->SetPoint(6, 60., 1.6);
graph->SetPointError(6, 0., 0.03);

graph->SetPoint(7, 70., 2.1);
graph->SetPointError(7, 0., 0.03);

graph->SetPoint(8, 80., 2.4);
graph->SetPointError(8, 0., 0.03);

graph->SetPoint(9, 90., 2.7);
graph->SetPointError(9, 0., 0.03);

graph->SetPoint(10, 100., 3.1);
graph->SetPointError(10, 0., 0.03);

```

Per ognuno dei comandi graph→SetPoint  
inserire le coordinate dei punti T, ddp

```

//
// Disegno del grafico, definizione del marker per i punti e titoli degli assi
//
graph->SetMarkerStyle(1);
graph->GetXaxis()->SetTitle("temperatura [#circC]");
graph->GetYaxis()->SetTitle("ddp [mV]");

graph->Draw("AP");

//
// Funzione polinomiale di ordine 1 con parametri [0] = intercetta , [1] = pendenza
// e fit lineare della funzione usando i punti del grafico
//
TF1 *func = new TF1("func","pol1");
gStyle->SetOptFit(0111);
graph->SetLineColor(kGreen);
graph->SetFitColor(kGreen);
graph->SetLineWidth(5);
graph->Fit("func");
}

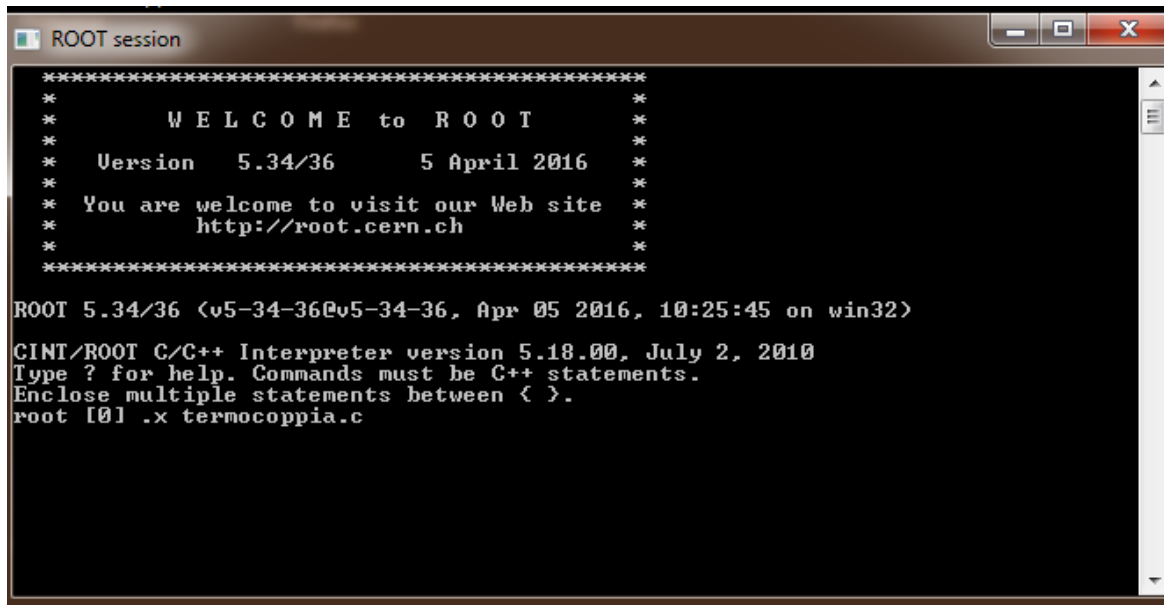
```

salvate il file modificato, con lo stesso nome (cioè sovrascrivete il file).



Infine aprite Root ed eseguite la macro termocoppia.c con il comando:

`.x termocoppia.c`

A screenshot of a ROOT session window titled "ROOT session". The window has a standard Windows-style title bar with minimize, maximize, and close buttons. The main content area is a black terminal with white text. It displays a welcome message from ROOT, including the version (5.34/36) and date (5 April 2016). Below this, it shows the command prompt "ROOT 5.34/36 <v5-34-36@v5-34-36, Apr 05 2016, 10:25:45 on win32>" followed by the command ".x termocoppia.c". The text is as follows:

```
*****  
*           W E L C O M E to R O O T           *  
*           Version  5.34/36      5 April 2016    *  
* You are welcome to visit our Web site          *  
*           http://root.cern.ch                  *  
*****  
ROOT 5.34/36 <v5-34-36@v5-34-36, Apr 05 2016, 10:25:45 on win32>  
CINT/ROOT C/C++ Interpreter version 5.18.00, July 2, 2010  
Type ? for help. Commands must be C++ statements.  
Enclose multiple statements between { }.  
root [0] .x termocoppia.c
```

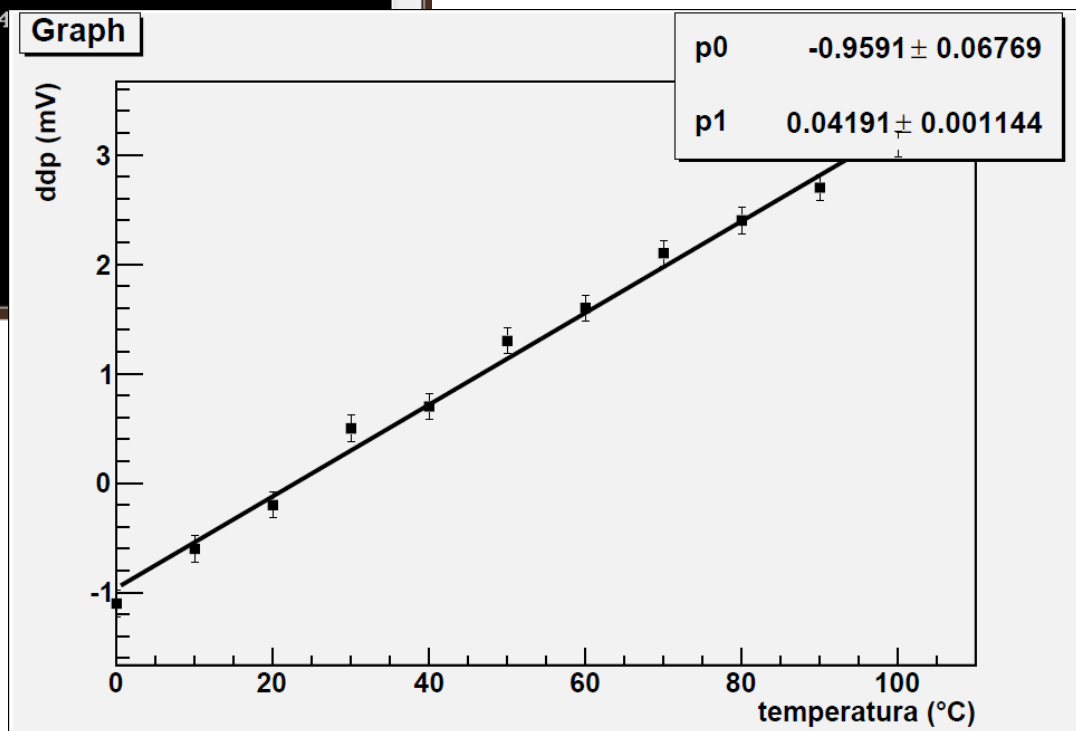
ottenendo

Infine aprite Root ed eseguite la macro termocoppia.c con il comando:

`.x termocoppia.c`

```
ROOT session
*****
*          W E L C O M E  t o  R O O T          *
*          *          *          *          *   *
*   Version   5.34/36      5 April 2016         *
*          *          *          *          *   *
* You are welcome to visit our Web site        *
*      http://root.cern.ch                     *
*          *          *          *          *   *
*****
ROOT 5.34/36 <v5-34-36v5-34-36, Apr 05 2016, 10:25:4
CINT/ROOT C/C++ Interpreter version 5.18.00, July 2,
Type ? for help. Commands must be C++ statements.
Enclose multiple statements between { }.
root [0] .x termocoppia.c
```

ottenendo



La temperatura del giunto freddo della termocoppia,  $T_f$ , corrisponde alla temperatura alla quale si trova il voltmetro di Elvis II.

Potete calcolare  $T_f$  e la sua incertezza tenendo conto che, poiché  $V(T_f) = A + BT_f = 0$

$$T_f = \frac{-A}{B} \quad ; \quad \frac{\Delta T_f}{T_f} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

Il valore di  $T_f$  coincide con quello della temperatura ambiente  $T_{\text{amb}}$  registrata dal termometro in laboratorio ? Se no, perché ?

## Misure durante il raffreddamento dell'acqua

Arrivati a 100 °C, togliete il riscaldatore e ripetete le misure (T,ddp) anche per temperature decrescenti, fino a circa 40 °C: c'è una differenza sistematica, rispetto ai dati in riscaldamento ? Inserite, nella relazione, anche il grafico ddp in funzione di T anche per le misure prese durante il raffreddamento.

# Raffreddamento dell'acqua: legge di Newton

Nella fase di raffreddamento dell'acqua da 100° fino a temperature di circa 40°C si può studiare la dipendenza della temperatura dal tempo e verificare la legge di Newton:

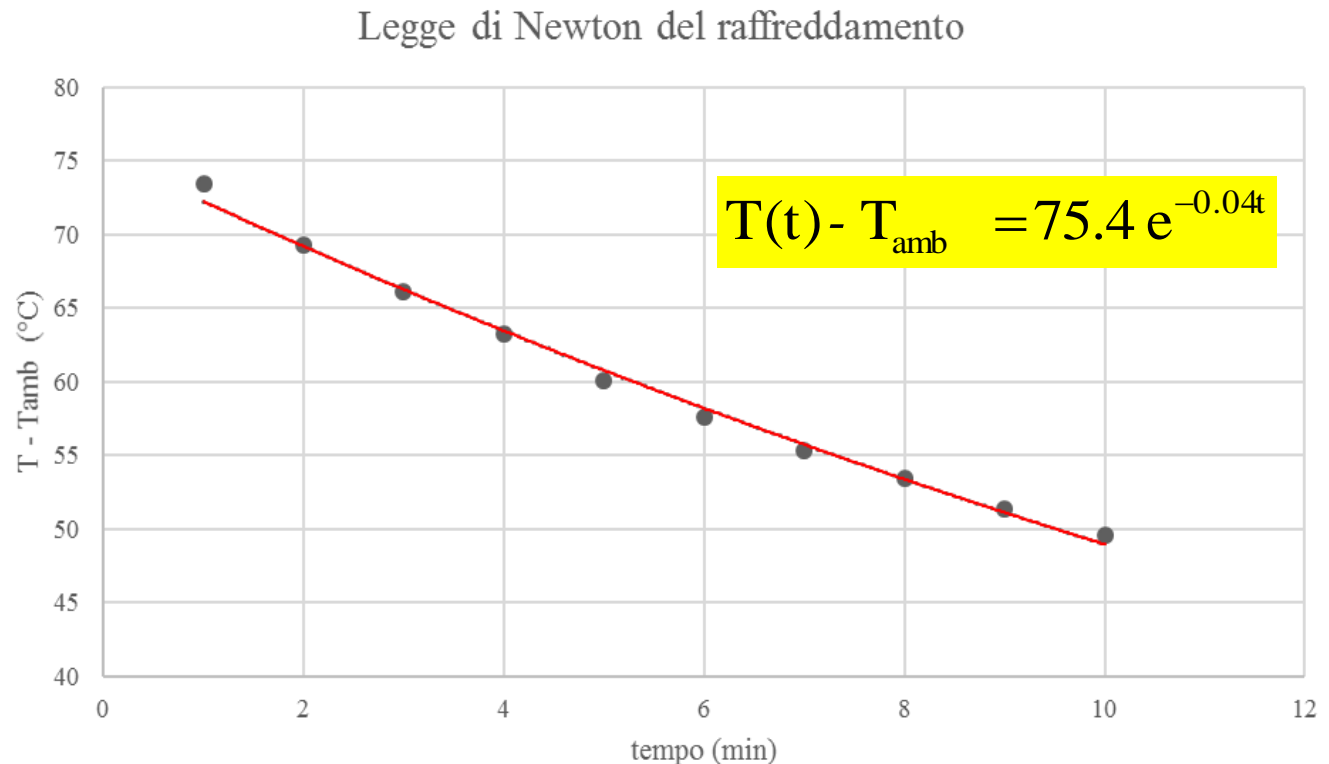
$$T(t) - T_{\text{amb}} = (T_{\text{iniz}} - T_{\text{amb}}) e^{-kt}$$

L'inverso del parametro  $k$  rappresenta il tempo necessario affinché il rapporto  $\frac{T(t) - T_{\text{amb}}}{T_{\text{iniz}} - T_{\text{amb}}}$  si riduca di un fattore  $e = 2.718$ .

Rappresenta quindi una misura della rapidità con la quale il liquido si raffredda. A partire dall'istante iniziale  $T_{\text{iniz}}$  = quando estraete il riscaldatore dall'acqua, misurate la temperatura a intervalli di un minuto.

# Raffreddamento dell'acqua: legge di Newton

Alcuni effetti, come lo scambio di calore per evaporazione dell'acqua e il raffreddamento attraverso la parete e il fondo del becker, non sono trascurabili e portano ad una diminuzione della temperatura nel tempo non esattamente esponenziale.



## In conclusione:

- misurare B e verificare che vale circa  $40 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  (valore tipico della sensibilità per termocoppie di tipo K);
- verificare che i valori calcolati dei parametri A e B, e delle loro incertezze, sono uguali a quelli che vengono forniti dal foglio di calcolo e da Root;
- misurare la temperatura del giunto freddo, a partire dai parametri A e B, e confrontarla con la temperatura ambiente;
- misurare il parametro k della legge di raffreddamento dell'acqua.

# Sensori e Acquisizione Dati

Un sensore è un dispositivo capace di generare una risposta **Y** (chiamata **segnale**, di solito una ddp) in presenza di una grandezza fisica **X**. **X** costituisce l'ingresso (input) del sensore e **Y** la sua uscita (output).

Nel caso della termocoppia la variazione di temperatura sulla punta (giunto caldo) induce una variazione di potenziale elettrico all'estremo opposto, mantenuto a temperatura costante (giunto freddo).

**$Y = F(X)$**  rappresenta la **curva caratteristica** (o di calibrazione) del sensore e descrive la relazione fra input e output.



La **sensibilità** è definita come la derivata della curva caratteristica:

$$\textit{sensibilità} = F'(X) = dY/dX$$

ad esempio, per TC di tipo K, la sensibilità è costante a circa 40  $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ , almeno nell'intervallo di temperature tra 0 e 100  $^\circ\text{C}$ .

Notare però che la caratteristica non sempre è lineare: la sensibilità quantifica la variazione di output in risposta alla variazione di input in un particolare punto di lavoro (cioè valore di X)

L' **accuratezza** di un sensore è la massima differenza fra il suo output e quello "corretto", misurato con uno standard, a parità di input, ovvero:

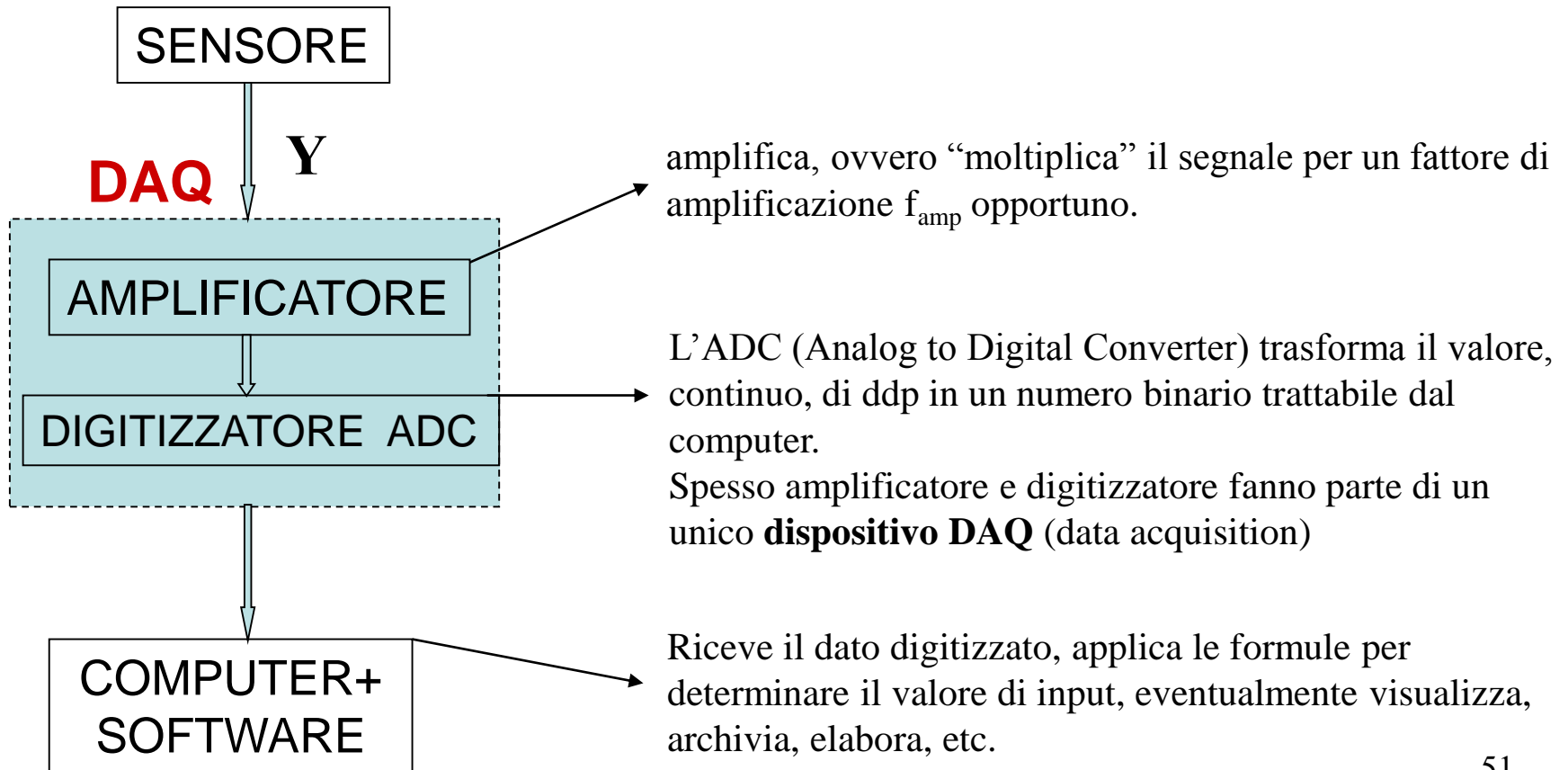
$$\textit{accuratezza} = \max[F(X) - F_{\text{std}}(X)]$$

L'accuratezza può essere espressa sia in termini assoluti, che in percentuale sulla lettura (spesso riportata come ppm = parti per milione =  $10^{-6}$ ).

Quantifica l'entità di errori sistematici, ad esempio un offset.

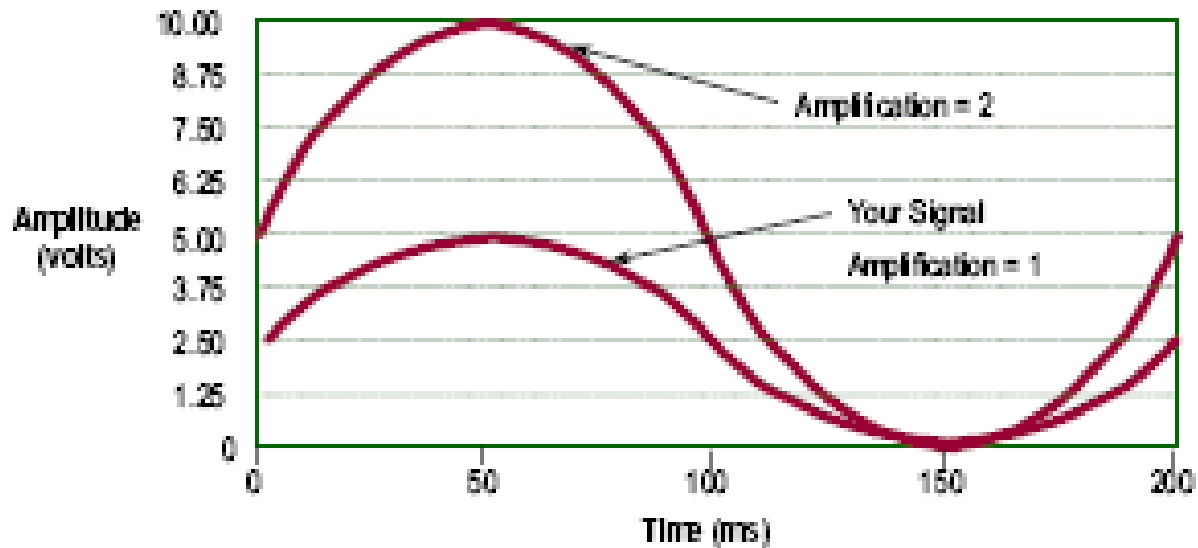
# La catena di misura

Un sistema di misura adatto all'acquisizione dati on-line può essere schematizzato nei seguenti componenti fondamentali:



## AMPLIFICAZIONE

Il dispositivo DAQ permette di scegliere il fattore  $f_{\text{amp}}$  per cui il segnale di ingresso viene moltiplicato **prima di essere digitizzato**. Ovviamente se  $f_{\text{amp}} < 1$  il segnale viene in realtà **attenuato**.



La figura mostra il risultato del processo di amplificazione di una sinusoide con  $f_{\text{amp}} = 2$

# DIGITIZZAZIONE

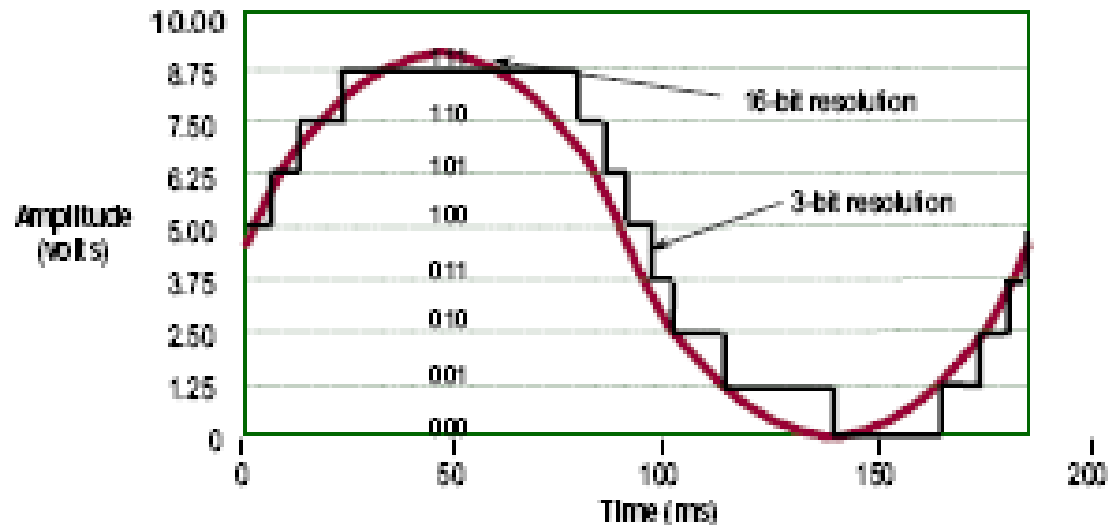
L'ADC (Analog to Digital Converter) trasforma il segnale analogico in uscita dall'amplificatore in un numero binario, cioè un segnale digitale.

Ogni ADC è caratterizzato dal numero di bit impiegati per la rappresentazione.

Un ADC a 3 bit avrà a disposizione  $2^3 = 8$  livelli, mentre un ADC a 16 bit userà  $2^{16} = 65536$  livelli.

Quest'ultimo potrà dare quindi una rappresentazione molto più fedele del segnale del sensore.

La figura mostra il risultato del processo di digitalizzazione di un segnale sinusoidale in funzione del tempo ad opera di un ADC a 3 bit (nero) o 16 bit (rosso)



## PORTATA

L'ADC è caratterizzato anche da una **portata**, ovvero un valore massimo ( $ADC_{\max}$ ) e minimo ( $ADC_{\min}$ ) accettati in ingresso.

Deve risultare che:

$$f_{\text{amp}} Y_{\min} \geq ADC_{\min} \quad \text{e} \quad f_{\text{amp}} Y_{\max} \leq ADC_{\max}$$

Ovvero l'intervallo definito dall'*output range* del sensore, amplificato di  $f_{\text{amp}}$ , deve essere contenuto nella portata dell'ADC

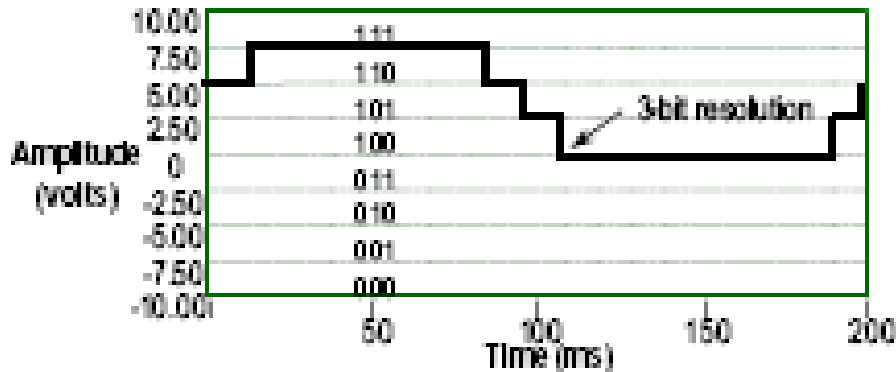
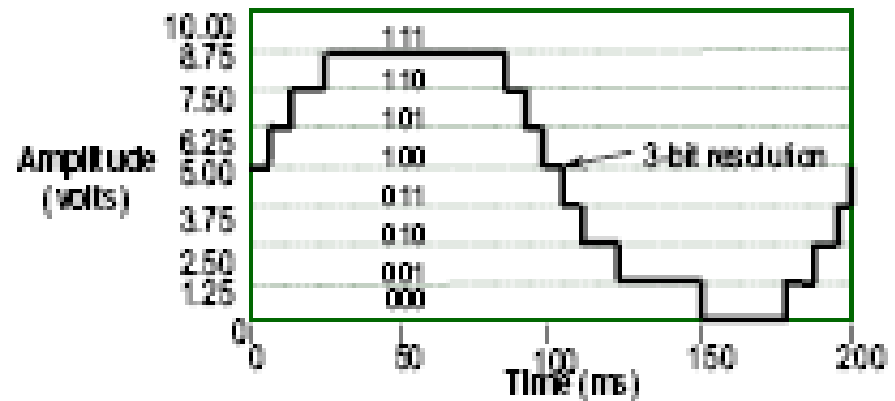
Due possibili valori della portata sono:

- bipolare (da  $-10$  a  $+10$  V)
- unipolare (da  $0$  a  $10$  V).

# PORTATA

La figura mostra l'importanza di scegliere al meglio la portata di un ADC a 3 bit per un segnale (amplificato) che varia fra 0 e 10 V

Unipolare (scelta ottimale) uso tutti i livelli disponibili



Bipolare (scelta impropria): 4 livelli rimangono inutilizzati

# CODE WIDTH E RISOLUZIONE DELLA MISURA

I tre parametri fondamentali: amplificazione  $f_{\text{amp}}$ , numero di bit (Nbit) e portata dell'ADC, definiscono la più piccola variazione che può essere rivelata nel segnale del sensore. Tale quantità è nota come **code width** ed è definita da:

$$\text{code width} = \frac{\text{portata}}{f_{\text{amp}} \cdot 2^{\text{Nbit}}}$$

Unitamente alla sensibilità del sensore, la code width ci permette di calcolare la **risoluzione** nella misura della grandezza fisica:

$$\text{risoluzione} = \frac{\text{code width}}{\text{sensibilità}} = \frac{\text{portata}}{f_{\text{amp}} \cdot 2^{\text{Nbit}} \cdot F'(X)}$$



# Stainless Steel Temperature Probe

(Order Code TMP-BTA)

The Stainless Steel Temperature Probe can be used as a thermometer for experiments in chemistry, physics, biology, Earth science, environmental science, and more.



data sheet del  
termistore Vernier

## Specifications

Temperature range	−40 to 135°C (−40 to 275°F)
Maximum temperature that the sensor can tolerate without damage	150°C
13-bit resolution	0.09°C (−40 to 0°C) 0.02°C (0 to 40°C) 0.05°C (40 to 100°C) 0.13°C (100 to 135°C)
12-bit resolution	0.17°C (−40 to 0°C) 0.03°C (0 to 40°C) 0.1°C (40 to 100°C) 0.25°C (100 to 135°C)
10-bit resolution	0.68°C (−40 to 0°C) 0.12°C (0 to 40°C) 0.4°C (40 to 100°C) 1.0°C (100 to 135°C)
Temperature sensor	20 kΩ NTC Thermistor
Accuracy	±0.2°C at 0°C, ±0.5°C at 100°C
Response time (time for 90% change in reading)	10 seconds (in water, with stirring) 400 seconds (in still air) 90 seconds (in moving air)
Probe dimensions	Probe length (handle plus body): 15.5 cm  Stainless steel body: length 10.5 cm, diameter 4.0 mm  Probe handle: length 5.0 cm, diameter 1.25 cm

# Stainless Steel Temperature Probe

(Order Code TMP-BTA)

The Stainless Steel Temperature Probe can be used as a thermometer for experiments in chemistry, physics, biology, Earth science, environmental science, and more.



quindi:

16-bit resolution

0.002 °C (0 to 40 °C)

0.006 °C (40 to 100 °C)

## Specifications

Temperature range	−40 to 135°C (−40 to 275°F)
Maximum temperature that the sensor can tolerate without damage	150°C
13-bit resolution	0.09°C (−40 to 0°C) 0.02°C (0 to 40°C) 0.05°C (40 to 100°C) 0.13°C (100 to 135°C)
12-bit resolution	0.17°C (−40 to 0°C) 0.03°C (0 to 40°C) 0.1°C (40 to 100°C) 0.25°C (100 to 135°C)
10-bit resolution	0.68°C (−40 to 0°C) 0.12°C (0 to 40°C) 0.4°C (40 to 100°C) 1.0°C (100 to 135°C)
Temperature sensor	20 kΩ NTC Thermistor
Accuracy	±0.2°C at 0°C, ±0.5°C at 100°C
Response time (time for 90% change in reading)	10 seconds (in water, with stirring) 400 seconds (in still air) 90 seconds (in moving air)
Probe dimensions	Probe length (handle plus body): 15.5 cm  Stainless steel body: length 10.5 cm, diameter 4.0 mm  Probe handle: length 5.0 cm, diameter 1.25 cm

# Stainless Steel Temperature Probe

(Order Code TMP-BTA)



The Stainless Steel Temperature Probe can be used as a thermometer for experiments in chemistry, physics, biology, Earth science, environmental science, and more.

quindi:

16-bit resolution  
0.002 °C (0 to 40 °C)  
0.006 °C (40 to 100 °C)

## Specifications

Temperature range	−40 to 135°C (−40 to 275°F)
Maximum temperature that the sensor can tolerate without damage	150°C
13-bit resolution	0.09°C (−40 to 0°C) 0.02°C (0 to 40°C) 0.05°C (40 to 100°C) 0.13°C (100 to 135°C)
12-bit resolution	0.17°C (−40 to 0°C) 0.03°C (0 to 40°C) 0.1°C (40 to 100°C) 0.25°C (100 to 135°C)
10-bit resolution	0.68°C (−40 to 0°C) 0.12°C (0 to 40°C) 0.4°C (40 to 100°C) 1.0°C (100 to 135°C)
Temperature sensor	20 kΩ NTC Thermistor
Accuracy	±0.2°C at 0°C, ±0.5°C at 100°C
Response time (time for 90% change in reading)	10 seconds (in water, with stirring) 400 seconds (in still air) 90 seconds (in moving air)
Probe dimensions	Probe length (handle plus body): 15.5 cm  Stainless steel body: length 10.5 cm, diameter 4.0 mm  Probe handle: length 5.0 cm, diameter 1.25 cm

### How the Sensor Works

This probe uses the 20 k $\Omega$  NTC Thermistor, which is a variable resistor. When the temperature increases, the resistance decreases non-linearly. The best-fit approximation to this nonlinear characteristic is the Steinhart-Hart equation. At 25°C, the resistance is approximately 4.3% per °C. The interface measures the resistance value,  $R$ , at a particular temperature, and converts the resistance using the Steinhart-Hart equation:

$$T = [K_0 + K_1(\ln 1000R) + K_2(\ln 1000R)^3]^{-1} - 273.15$$

where  $T$  is temperature (°C),  $R$  is the measured resistance in k $\Omega$ ,  $K_0 = 1.02119 \times 10^{-3}$ ,  $K_1 = 2.22468 \times 10^{-4}$ , and  $K_2 = 1.33342 \times 10^{-7}$ . Our programs perform this conversion and provide readings in °C (or other units, if you load a different calibration).

## TERMOCOPPIA + ELVIS II

Per la misura della tensione ai capi della termocoppia si utilizza il multimetro digitale inserito in ELVIS II, con le seguenti specifiche:

Amplificazione:  $f_{\text{amp}} = 100$

Nbit = 18

Portata: da  $-10 \text{ V}$  a  $+10 \text{ V}$

$$\text{code width} = 20 / (100 \cdot 2^{18}) = 0.8 \mu\text{V}$$

Sapendo che la sensibilità è  $\approx 40 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ , questo corrisponde a

$$\text{risoluzione} = 0.8 / 40 = 0.02 ^\circ\text{C}$$

## L'ACCURATEZZA DELLA MISURA – ELVIS II

Il concetto di accuratezza si estende a tutti i componenti della catena. Nel nostro caso dobbiamo consultare le specifiche di accuratezza del multimetro digitale di ELVIS che stiamo usando.

Dal manuale di specifiche di ELVIS leggiamo che, nelle condizioni riportate in precedenza, ovvero con amplificazione 100:

$$\text{accuratezza} = 225 \text{ ppm (lettura)} + 280 \text{ ppm (portata/amplificazione)}$$

(ppm= parti per milione)

## L'ACCURATEZZA DELLA MISURA – ELVIS II

Il concetto di accuratezza si estende a tutti i componenti della catena. Nel nostro caso dobbiamo consultare le specifiche di accuratezza del multimetro digitale di ELVIS che stiamo usando.

Dal manuale di specifiche di ELVIS leggiamo che, nelle condizioni riportate in precedenza, ovvero con amplificazione 100:

$\text{accuratezza} = 225 \text{ ppm (lettura)} + 280 \text{ ppm (portata/amplificazione)}$

(ppm= parti per milione)

$$\text{accuratezza} = 225 \cdot 10^{-6} \text{ (lettura)} + 280 \cdot 10^{-6} \text{ (portata/amplificazione)}$$

Avendo letture di alcuni mV, il primo termine è trascurabile.

$$\text{Poiché portata/amplificazione} = \pm \frac{10 \text{ V}}{100} = \pm 100 \text{ mV}$$

$$\text{accuratezza} = 280 \cdot 10^{-6} \cdot (\pm 100 \text{ mV}) = \pm 28 \text{ } \mu\text{V},$$

circa 35 volte maggiore del code width.

Adotteremo quindi un **errore di  $\pm 30 \text{ } \mu\text{V}$**  sulle misure di tensione ai capi della termocoppia.



# **Istruzioni per redigere la relazione di un esperimento**

# TITOLO

## Autori

Nomi dei componenti del gruppo (e data della sessione)

## Riassunto

Riassumere in alcune righe cosa si è misurato e il/i risultato/i principale/i

## Introduzione

Esporre, brevemente, la teoria alla base del fenomeno indagato ed eventuali risultati sperimentali precedenti, che possono essere utilizzati per riferimento. Si possono citare, se utile, delle referenze (ad es. “Come descritto in [1] ...”)

## **1 Metodo sperimentale (due sottoparagrafi: 1.1 Apparato sperimentale e 1.2 Svolgimento)**

**1.1** Descrivere l'apparato sperimentale e le sue caratteristiche, in particolare la risoluzione dei vari strumenti di misura (eventualmente la casa costruttrice). Può essere utile inserire una immagine dell'apparato (sarà la Fig. 1).

**1.2** Descrivere il metodo di misura, riportando le formule principali (misura indiretta della grandezza in esame) e definendo i simboli delle grandezze.

## 2 Risultati (due sottoparagrafi: 2.1 Acquisizione dati e 2.2 Elaborazione dati e risultati quantitativi)

**2.1** Riportare l'esito delle misure dirette (utilizzando eventualmente anche delle tabelle).

**2.2** Riportare le analisi statistiche di misure ripetute, le misure indirette, i risultati dei *fit*, le correzioni per effetti sistematici. Mettere in evidenza i risultati principali dell'esperimento.

Tabelle e figure devono essere numerate progressivamente ed avere una didascalia; devono inoltre essere citate almeno una volta nel testo ( “... in Tab. 1 sono mostrate le misure di ....; la Fig. 1 rappresenta ....”).

## Conclusioni

Riassumere i risultati ottenuti ed eventualmente confrontarli con le previsioni della teoria e/o con misure sperimentali precedenti (se esistono).

Discutere i possibili effetti sistematici non corretti che potrebbero essere causa di differenze tra valore misurato e valore atteso (evitando però ipotesi non giustificate).

## Bibliografia

Elenco delle referenze citate nel testo; ad esempio:

[1] F. Neri et al.. “La viscosità di un fluido”; Rivista dei Fluidi vol. 24 (1985) 15.

[2] P. Fornasini “The Uncertainty in Physical Measurements”; Springer (2008) pag. 184.

Le etichette [1], [2] ecc. devono essere citate, almeno una volta, nel testo (vedi Introduzione).

## Appendici (eventuali)

Riportare le formule (ad esempio quelle relative ai parametri di una regressione lineare) non necessarie nel corpo principale del testo, alleggerendolo e favorendone così la lettura.

Riportare lo sviluppo di formule complesse (ad es. quelle per la propagazione degli errori)

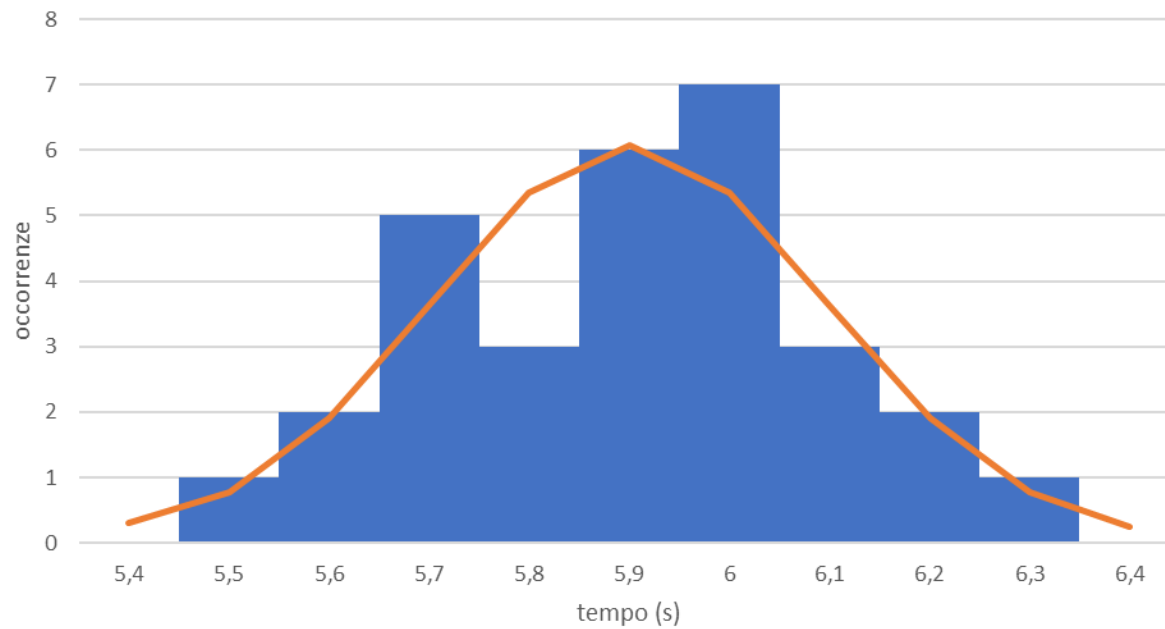
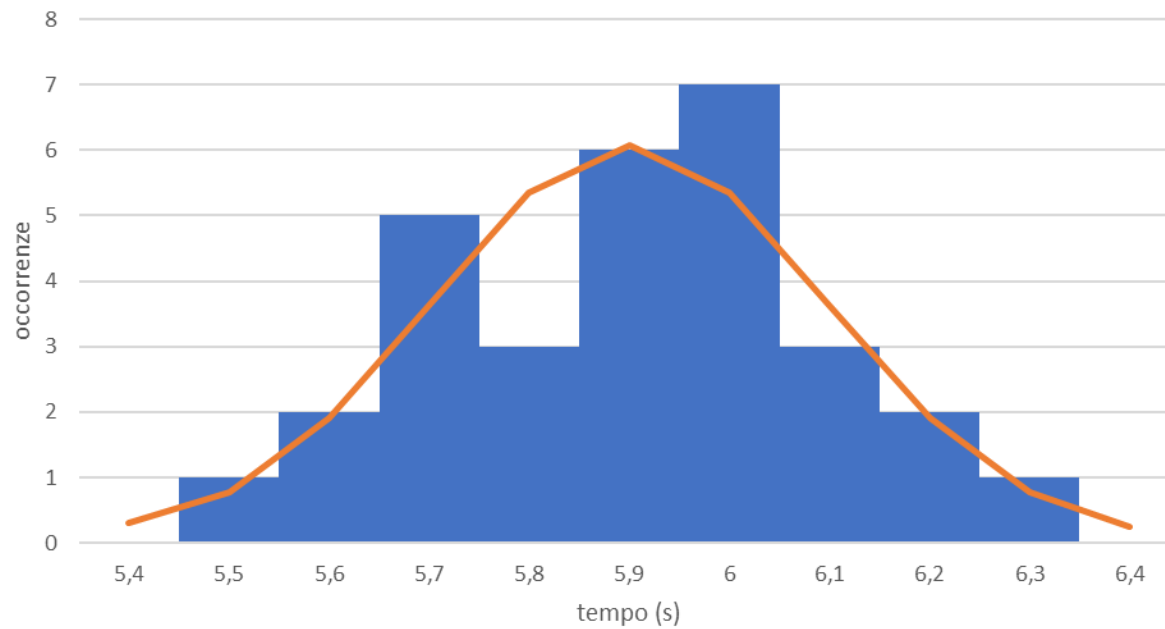
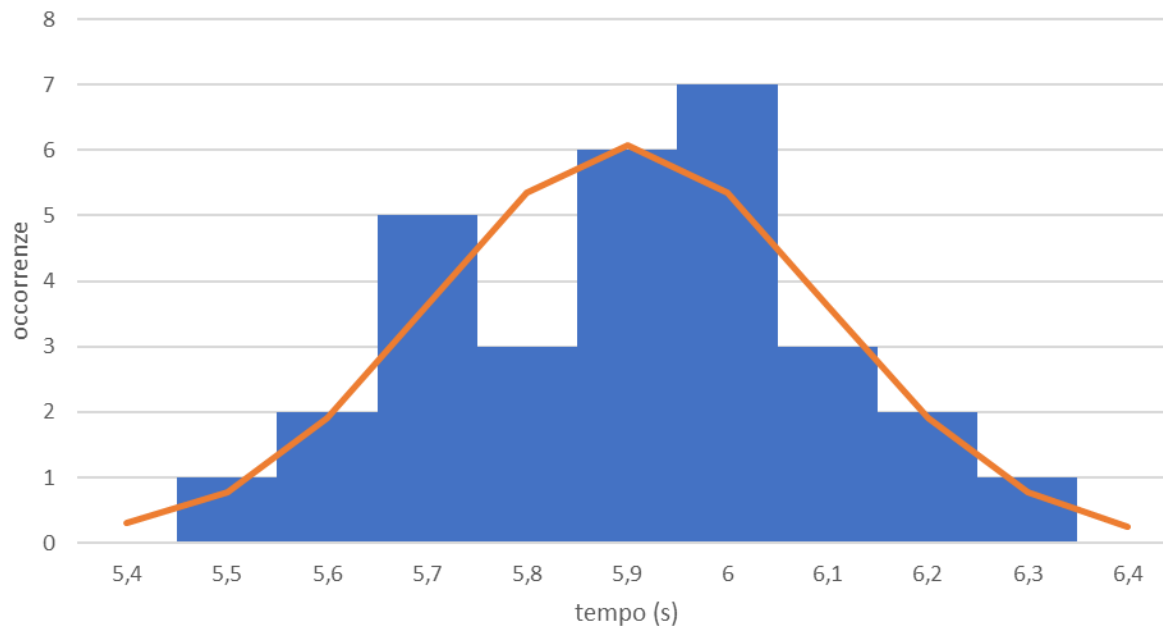


Fig. 2 *Grafico fatto con Excel*



**Fig. 2** *Istogramma delle occorrenze dei tempi di caduta*



**Fig. 2** *Occorrenze misurate dei tempi di caduta (istogramma blu). La linea spezzata rossa indica il numero di eventi attesi in ogni intervallo, in base alla gaussiana ottenuta dal campione di dati tramite il principio di massima verosimiglianza.*

**(1)** Nel Riassunto (Abstract) non sono riportati i principali risultati numerici ottenuti nell'esperimento.

Il Riassunto è un "oggetto" a sé stante; di solito è posto dopo Titolo e Autori, ma potrebbe anche essere posto alla fine dell'articolo. In ogni caso, l'articolo comincia con la Introduzione, non con il Riassunto.

Il Riassunto riassume (appunto) i risultati principali dell'esperimento; non deve quindi essere solo un elenco degli obiettivi, ma anche e soprattutto dei risultati raggiunti.

Ad esempio "Abbiamo misurato il momento di inerzia di un disco non omogeneo ... Abbiamo ottenuto  $I_D = \dots \pm \dots$  con la procedura dinamica e  $I_G = \dots \pm \dots$  con la procedura geometrica".

Oppure "Abbiamo calibrato una termocoppia di tipo K ... La sensibilità misurata, coefficiente angolare della retta di calibrazione, è  $B = \dots \pm \dots$ ".

NON "Gli scopi dell'esperimento sono....".

Essendo il Riassunto a sé stante, il suo contenuto non può essere citato nel corpo dell'articolo.



## (2) Nell'esperimento sul Pendolo di Maxwell: confusione tra "pendolo" e "disco"

Il disco (non omogeneo) è l'oggetto del quale si misura la grandezza, in questo caso il momento di inerzia.

Il Pendolo di Maxwell è invece l'apparato sperimentale tramite il quale si effettua la misura del momento di inerzia, con la procedura dinamica.

Il messaggio, in generale, è il seguente: indicare ogni cosa (oggetto, procedura, ecc.) con il nome appropriato.

(3) Nell'esperimento sul Pendolo di Maxwell: si parla di "caduta" del disco (tempo di caduta, distanza di caduta) prima di, oppure senza, avere descritto il funzionamento del P. di M. (esempio particolare del commento (7), più generale, descritto in seguito).

Le due procedure di misura (dinamica e geometrica) devono essere descritte; l'apparato sperimentale nel paragrafo 1.1 e il metodo, cioè come il disco viene fatto prima salire e poi lasciato cadere con un moto rototraslatorio nel quale il c.m. scende con accelerazione costante, nel paragrafo 1.2. E' impossibile che il lettore riesca a capire il funzionamento del P. di M. solo guardando la (eventuale) immagine del pendolo.

**(4)** Alcuni valori numerici delle misure sono anticipati nel Paragrafo 1 rispetto al Paragrafo 2.

In particolare, nell'esperimento del P. di M., sono anticipati, rispetto al Paragrafo 2, valori numerici della densità della plastica oppure della massa del pendolo oppure della incertezza sulla misura del tempo di caduta. Anche se si tratta di misure fornite (come  $\rho$  e  $m$ ) devono essere inserite nel Par. 2 insieme alle altre misure. Al lettore si devono presentare le formule, con definiti i simboli delle grandezze, nel Par. 1.2 e le grandezze misurate, associate agli stessi simboli, nel Par. 2. Il Par. 2.2 contiene, alla fine, i risultati principali (ad es.  $I_D$  e  $I_G$ ).

Il lettore può volere controllare questi risultati inserendo nelle formule i valori misurati delle grandezze rappresentate dai simboli: deve quindi trovare questi valori tutti insieme, nello stesso Paragrafo, senza dover andare a cercarli sparsi nell'articolo.

(5) Incertezze di misura espresse con più di due cifre significative.

Si commenta da sé...

## (6) Didascalie, di figure e/o tabelle, assenti o incomplete

Tutte le figure e tutte le tabelle devono essere numerate (da Fig. 1 in poi e da Tab. 1 in poi) e devono avere una didascalia che ne descriva completamente il contenuto. La descrizione completa del contenuto deve essere fatta nella didascalia, NON nel corpo del testo. Nel testo ogni figura e ogni tabella deve essere citata almeno una volta (e in ordine, cioè non cominciando da Fig. 3 oppure da Tab. 7...), potendo così trarre vantaggio dalla descrizione fatta nella didascalia, senza cioè doverla ripetere completamente.

Alcuni hanno utilizzato, in modo improprio, tabelle come se queste facessero parte del corpo del testo e non fossero, invece, oggetti a sé stanti.

## (7) Stile di scrittura tipico di una relazione letta solo dal docente

L'obiettivo di questi documenti è "simulare" articoli scientifici. Questo comporta che il lettore non sia il docente (cioè qualcuno che conosce i dettagli dell'esperimento) ma un "esperto in materia" che però non necessariamente è al corrente delle procedure seguite e di tutti i particolari sperimentali.

Nella Introduzione si deve quindi descrivere chiaramente quali sono le grandezze misurate, ad es. il momento di inerzia di un corpo rigido oppure la sensibilità di una termocoppia, facendo anche riferimento a eventuali referenze (potrebbe anche essere il testo del corso di Meccanica):

Nel Par. 1 si deve descrivere in modo completo l'apparato sperimentale e la procedura di misura, presentando le formule usate per ottenere i risultati principali (momento di inerzia del disco, sensibilità della TC, parametro  $k$  della legge di Newton) e definendo tutti i simboli delle grandezze presenti in quelle formule.

## (7) ...continua...

La frase "I parametri A e B della retta di calibrazione...", senza essere accompagnata dalla equazione della retta, può non essere compresa. La identificazione di A come ordinata all'origine e B come coefficiente angolare non è universale (spesso si usano i simboli q e m).

"Il pendolo utilizzato nel nostro esperimento è il D2" . (D2 ????)

Fraasi come "La misura del tempo di caduta è ripetuta 40 volte" oppure "L'errore sul tempo di caduta é 3 volte la deviazione standard della media" descrivono quello che avete effettivamente fatto, ma, senza una opportuna giustificazione, possono rimanere incomprensibili a chi legge.

Alcune cose possono essere considerate scontate e quindi non devono essere scritte (conversione di unità di misura, ad es. da g a kg oppure da mm a m; definizione di media aritmetica di un campione di misure).

Altre formule, come quella della deviazione standard campionaria oppure le formule che forniscono i parametri della retta di regressione, sono formule "base", che tuttavia può essere utile ricordare al lettore; meglio però inserirle in una Appendice, non nel testo principale.

**(8)** Bibliografia assente, oppure presentata in modo non corretto.

Ogni referenza citata nella Bibliografia deve essere numerata e citata almeno una volta (in ordine crescente) nel testo dell'articolo.

Non è abitudine, negli articoli scientifici, elencare bibliografia senza numerazione, senza cioè un *link* specifico nel testo.



(9) Nell'esperimento sul Pendolo di Maxwell: manca la valutazione della incertezza sulla misura del momento di inerzia con la procedura geometrica.

Spesso, anche nei casi in cui l'incertezza è stata valutata, lo si è fatto in modo sbagliato:

$$\Delta I_G \neq \Delta I_{G1} + \Delta I_{G2} + \Delta I_{G3} + \Delta I_{G4}$$

Deve invece essere utilizzata la formula generale di propagazione, con le derivate parziali, visto che alcune grandezze (i diametri  $d_i$  dei vari toroidi) sono presenti nelle formule di più  $I_{Gi}$ .

(10) Utilizzo della virgola decimale invece del punto.