

第2章

複素数とラプラス変換

本章では、制御工学を学ぶ上で重要な数学のツールである、複素数とラプラス変換について簡単にまとめる。対象のダイナミクスに起因する過渡現象を扱う制御工学では、電気回路の場合と同じように、ラプラス変換は必須ツールである。なお、すでに複素数とラプラス変換を学習した読者は、復習のために例題と Control Quiz を解けば十分であろう。

2.1 複素数

複素数 (complex number) は

$$z = x + jy \quad (2.1)$$

と表される。ただし、 $j = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。ここで、 x を z の実部、 y を z の虚部といい、

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

と表記する。このように、点 (x, y) によって複素数を表現することを直交座標表現という (図 2.1)。図において、横軸を実軸、縦軸を虚軸と呼ぶ。

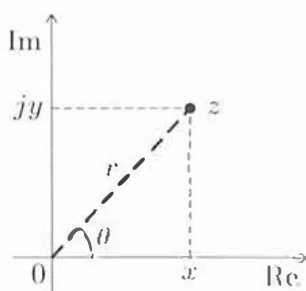


図 2.1 複素平面 (直交座標と極座標)

直交座標表現に対して、極座標表現

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を用いると、複素数 z は次式のように表される.

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta} \quad (2.2)$$

ここで、オイラーの関係式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (2.3)$$

を用いた. 式(2.2)中の r を z の絶対値 (原点からの距離) と呼び, $|z|$ で表す. また, θ は実軸となす角度 (反時計方向を正とする) であり, これを z の位相 (phase) と呼び, $\angle z$ あるいは $\arg z$ と書く. 図2.1より, 次の関係式が成り立つ.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \angle z = \arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (2.4)$$

複素数 $z = x + jy$ に対して複素平面の実軸に関して対称な位置にある複素数 $\bar{z} = x - jy$ を共役複素数と呼ぶ. このとき, 次式が成り立つ.

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = j2 \operatorname{Im}(z), \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (2.5)$$

例題 2.2

- (1) 複素数 $z_1 = 1 - j\sqrt{3}$ を極座標表現しなさい.
- (2) 複素数 $z_2 = 3\sqrt{2}e^{j\pi/4}$ を直交座標表現しなさい.

解答

- (1) $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$ より, $z_1 = 2e^{-j\pi/3}$.
- (2) $z_2 = 3\sqrt{2}e^{j\pi/4} = 3\sqrt{2}(\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = 3 + j3$. ■

例題 2.3

二つの複素数 $z_1 = 1 + j$, $z_2 = j$ を極座標表現し, それらの積 $z_1 z_2$ と商 z_1/z_2 を計算しなさい.

解答 $z_1 = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$, $z_2 = e^{j\pi/2}$ なので,

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{j\pi/4} e^{j\pi/2} = \sqrt{2}e^{j3\pi/4}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/2}} = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

となる. ■

この例題より、極座標表現は複素数の乗算や除算に適した表現であることがわかる。一方、直交座標表現は加減算に適した表現である。

2.2 ラプラス変換

2.2.1 ラプラス変換の定義と性質

まず、ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を与えよう。

✧ Point 2.1 ✧ ラプラス変換と逆ラプラス変換

負の時間で値 0 をとる因果信号 $x(t)$ のラプラス変換 (Laplace transform) を次式で定義する。

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (2.6)$$

ここで、 $\mathcal{L}[\cdot]$ はラプラス変換を表し、 $s (= \sigma + j\omega)$ は複素数である。このとき、 $x(t)$ と $X(s)$ をラプラス変換対という。

一方、 $X(s)$ の逆ラプラス変換の定義を以下に与える。

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

ただし、 c は実定数である。実際には逆ラプラス変換は式 (2.7) ではなく、後述する部分分数展開を用いて計算される。

次に、制御工学で重要となる基本的な信号とそれらのラプラス変換を、以下に示そう。

(a) 単位インパルス信号

次の性質を持つ信号 $\delta(t)$ を単位インパルス信号, あるいはディラックのデルタ関数 (δ 関数) と呼ぶ (図 2.2 (a)).

❖ Point 2.2 ❖ 単位インパルス信号 $\delta(t)$ の性質

性質(1) $\delta(t)$ は時刻 0 で無限大の大きさを持ち, それ以外では値 0 をとる.

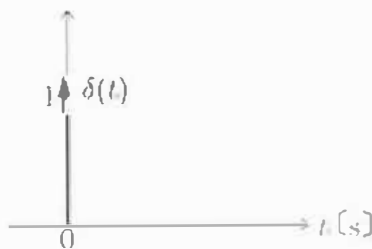
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

性質(2) $\delta(t)$ を全時刻にわたって積分すると 1 になる.

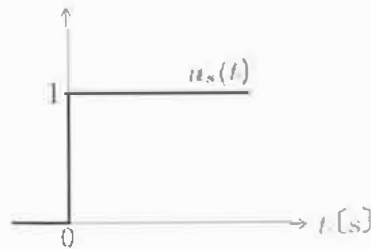
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

性質(3) 任意の信号 $f(t)$ に対して次式が成り立つ.

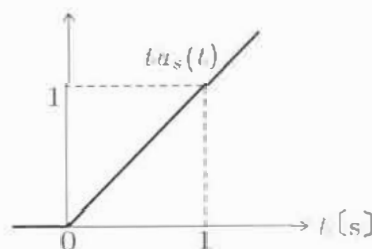
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a) \quad (2.8)$$



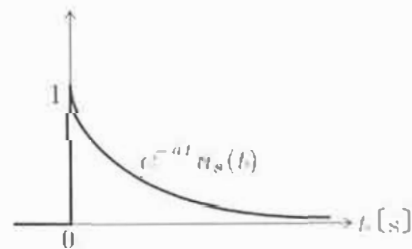
(a) 単位インパルス信号



(b) 単位ステップ信号



(c) 単位ランプ信号



(d) 片側指数信号

図 2.2 基本的な信号

$\delta(t)$ のラプラス変換は、式 (2.6), (2.8) より,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s \cdot 0} = 1 \quad (2.9)$$

となる。ただし、式 (2.8) で $f(t) = e^{-st}$, $a = 0$ とおいた。

(b) 単位ステップ信号

単位ステップ信号 $u_s(t)$ を次式で定義する (図 2.2 (b)).

$$u_s(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

このとき、 $u_s(t)$ のラプラス変換は次式のように計算できる。

$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \int_0^{\infty} u_s(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s} \quad (2.11)$$

(c) 単位ランプ信号

単位ランプ信号 $tu_s(t)$ を次式で定義する (図 2.2 (c)).

$$tu_s(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

この信号のラプラス変換は、部分積分を利用することにより、次式のように計算できる。

$$\mathcal{L}[tu_s(t)] = \int_0^{\infty} tu_s(t)e^{-st}dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s^2} \quad (2.13)$$

(d) 片側指数信号

図 2.2 (d) に示した片側指数信号 $e^{-at}u_s(t)$ のラプラス変換は、

$$\mathcal{L}[e^{-at}u_s(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \frac{1}{s+a} \quad (2.14)$$

となる。

(e) 片側正弦波信号

オイラーの関係式より、

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (2.15)$$

が得られる。これより、片側正弦波信号 $\sin \omega t u_s(t)$ のラプラス変換は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega t u_s(t)] &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

同様にして、

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (2.17)$$

を利用することにより、片側余弦波信号 $\cos \omega t u_s(t)$ のラプラス変換は次のようになる。

$$\mathcal{L}[\cos \omega t u_s(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (2.18)$$

以上の信号のラプラス変換を表2.1にまとめる。これらの基本的な信号のラプラス変換は、ぜひ暗記しておいてほしい。なぜならば、表2.1のラプラス変換対と表2.2にまとめるラプラス変換の性質を利用することにより、制御工学で登場するほとんどの信号のラプラス変換を計算できるからである。

表2.2に示すラプラス変換の性質について、簡単に見ていこう。

表2.1 ラプラス変換対

名 称	$x(t)$	$X(s)$
(a) 単位インパルス信号	$\delta(t)$	1
(b) 単位ステップ信号	$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
(c) 単位ランプ信号	$tu_s(t)$	$\frac{1}{s^2}$
(d) (片側) 指数信号	$e^{-at} u_s(t)$	$\frac{1}{s + a}$
(e) (片側) 正弦波信号	$\sin \omega t u_s(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(片側) 余弦波信号	$\cos \omega t u_s(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

表2.2 ラプラス変換の性質

性 質	数 式
(1) 線形性	$\mathcal{L}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha X(s) + \beta Y(s)$
(2) 時間軸推移	$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = e^{-\tau s} X(s) \quad (\tau > 0)$
(3) s 領域推移	$\mathcal{L}[e^{-at} x(t)] = X(s + a)$
(4) 時間軸スケーリング	$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$
(5) 時間微分	$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] = sX(s) - x(0)$
(6) 時間積分	$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{X(s)}{s}$
(7) s 領域での微分	$\mathcal{L}[-tx(t)] = \frac{d}{ds} X(s)$
(8) たたみ込み積分	$\mathcal{L}[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s)$
(9) 最終値の定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$
(10) 初期値の定理	$x(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

(1)の線形性はラプラス変換の定義より明らかである。(2)の時間軸推移と(3)の s 領域推移,そして(4)の時間軸スケーリングは,ラプラス変換を計算する際に置換積分を利用することにより得られる.信号 $x(t)$ を時間軸推移した信号 $x(t-\tau)$ (τ 時刻遅れた信号)を図2.3に示す.制御工学では,このような τ をむだ時間(dead time)といい,(2)の時間軸推移の性質より,これは s 領域では $e^{-\tau s}$ を乗じることに対応する.

さて,ラプラス変換の定義式である式(2.6)に部分積分を適用すると,

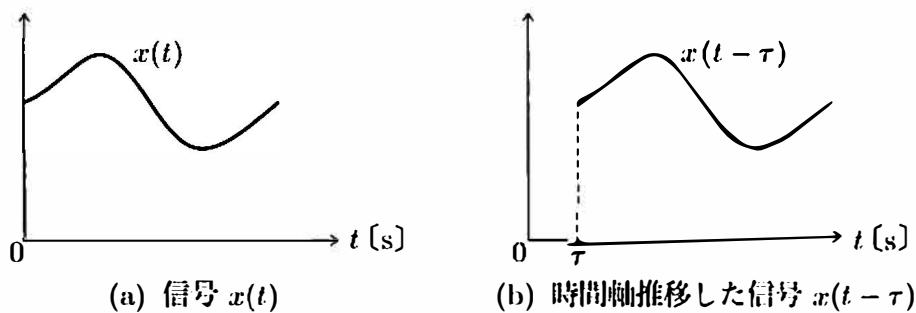


図2.3 信号の時間軸推移

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \left[x(t) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
 &= \frac{x(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} x(t) \right]
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる。これより、(5)の時間微分の性質

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] = sX(s) - x(0) \tag{2.20}$$

が導かれた。同様にして、 n 階微分のラプラス変換は、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} x(t) \right] &= s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x^{(1)}(0) - \cdots \\
 &\quad - s x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

となる。ここで、 $x^{(i)}$ は i 階微分を表す。特に、式(2.21)においてすべての初期値を 0 とおくと、

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} x(t) \right] = s^n X(s) \tag{2.22}$$

となる。以上より、次を得る。

❖ Point 2.3 ❖ 時間微分のラプラス変換

時間領域における微分演算は s 領域においては s を乗ずることに対応する。したがって、微分方程式は s 領域においては s の代数方程式に変換される。

一方、(5)の時間微分の性質より、時間領域における積分演算は、 s 領域においては s で割ることに対応する。また、初期値をすべて 0 とおいた場合、多重積分のラプラス変換は

$$\mathcal{L} \left[\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n} x(t) (dt)^n \right] = \frac{1}{s^n} X(s) \tag{2.23}$$

となる。(5)、(6)より、時間領域における微分・積分演算は、 s 領域においては乗算・除算演算に置き換わる。

(7) の s 領域での微分は、式 (2.6) の両辺を s で微分することにより得られる。

二つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ のたたみ込み積分 (convolution) を次式で定義する。

$$x(t) * y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (2.24)$$

この定義より、たたみ込み積分は交換則 $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ を満たす。時間領域におけるたたみ込み積分をラプラス変換すると、(8) で示したように s 領域においては単に乗算となる点が、第4章で述べる伝達関数の定義において重要となる。

(9) の最終値の定理は第12章で述べる定常偏差の計算のときに利用される。(10) の初期値の定理は、(9) と対をなすものである。

例題2.3

次の信号をラプラス変換しなさい。

$$\begin{aligned} (1) & e^{-at} \sin \omega t u_s(t) & (2) & e^{-at} \cos \omega t u_s(t) & (3) & t^n u_s(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \\ (4) & t e^{-at} u_s(t) & (5) & \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) u_s(t) \quad (a \neq b) \end{aligned}$$

解答

$$\begin{aligned} (1) & \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} & (2) & \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} & (3) & \frac{n!}{s^{n+1}} & (4) & \frac{1}{(s+a)^2} \\ (5) & \frac{1}{(s+a)(s+b)} \end{aligned}$$

例題2.4

$X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ のとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ を求めなさい。

解答

最終値の定理より、次のように計算できる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

このことを確認してみよう。 $X(s)$ は次式のように書き直される。

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (2.25)$$

これをラプラス逆変換すると、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t}) u_s(t) = 1$$

となり、同じ結果が得られた。 ■

ここで、式(2.25)のように $X(s)$ を展開することは部分分数展開と呼ばれ、これについて次に説明する。

2.2.2 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算法

s の複素関数 $X(s)$ を次式のようにおく。

$$X(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, \quad n > m \quad (2.26)$$

ここで、 $\{p_i\}$, $\{z_i\}$ は実数または複素数である。このとき、有理関数 $X(s)$ の極と零点を次のように定義する。

❖ Point 2.4 ❖ 極と零点

有理関数 $X(s)$ に対して、(分母多項式) = 0 の根を極 (pole) といい、(分子多項式) = 0 の根を零点 (zero) という。

まず、 $\{p_i\}$ がすべて相異なる値をとるとき、式(2.26)は次式のように展開できる。

$$X(s) = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (2.27)$$

これを部分分数展開 (partial fraction expansion) という。ここで、 a_i は $-p_i$ における留数 (residue) と呼ばれ、次式より計算できる。

$$a_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i) X(s) \quad (2.28)$$

$X(s)$ が式(2.27)のように部分分数展開されれば、その逆ラプラス変換は、表 2.1 (d) より次式のようになる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= (a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}) u_s(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

例題 2.3

$x(t)$ のラプラス変換が

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

のとき, $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ を求めなさい.

解答 $X(s)$ の部分分数展開は,

$$X(s) = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

となる. ここで,

$$a_1 = (s+1)X(s)|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = (s+2)X(s)|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1$$

である. したがって,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s+1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] = (2e^{-t} - e^{-2t})u_s(t)$$

が得られる. ■

これまではすべて相異なる極の場合を取り扱ったが, たとえば

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2} \tag{2.30}$$

のように $s = -2$ に2重極を持つ場合, 次式のように部分分数展開できる.

$$X(s) = \frac{b_1}{(s+2)^2} + \frac{b_2}{s+2} \tag{2.31}$$

このとき, 係数 b_1 と b_2 の決定法について考えよう.

式(2.31)の両辺に $(s+2)^2$ を乗じて分母を払うと,

$$(s+2)^2 X(s) = b_1 + (s+2)b_2 \tag{2.32}$$

となり, この式で $s = -2$ とおくことにより, b_1 は次のように決定できる.

$$b_1 = (s+2)^2 X(s) \Big|_{s=-2} = (s+3) \Big|_{s=-2} = 1$$

次に、式 (2.32) を s で微分すると、

$$\frac{d}{ds}(s+2)^2 X(s) = b_2$$

となる。すなわち、

$$b_2 = \frac{d}{ds}(s+2)^2 X(s) = \frac{d}{ds}(s+3) = 1$$

である。したがって、部分分数展開は

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

となり、これを逆ラプラス変換すると、次式が得られる。

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = (e^{-2t} + te^{-2t})u_s(t) \quad (2.33)$$

n 重極を持つ場合に対しても、同様な手順で部分分数展開が行える。

本章のポイント

▼ 複素数の基本を理解すること。

▼ ラプラス変換と逆ラプラス変換を使いこなせるようになること。

Control Quiz

2.1 複素数 $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$, $z_2 = 3 + j3$ をそれぞれ極座標表現し、それらの積 $z_1 z_2$ と商 z_1/z_2 を計算しなさい。

2.2 次の時間関数のラプラス変換を計算しなさい。

$$(1) (e^{-at} + e^{-bt})u_s(t) \quad (2) ae^{-bt}u_s(t) \quad (3) \sin(\omega t + \theta)u_s(t)$$

$$(4) \sinh at u_s(t) \quad (5) \cosh at u_s(t)$$

$$(6) \left(\frac{1}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \right) u_s(t) \quad (7) \left(\frac{t}{25} - \frac{\sin 5t}{125} \right) u_s(t)$$

$$(8) \left(\frac{1 - \cos 5t}{25} \right) u_s(t) \quad (9) \sin\left(\frac{\omega}{T}t\right) u_s(t)$$

2.3 次の複素関数の逆ラプラス変換を計算しなさい.

- (1) $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ (2) $\frac{1}{s(s+1)^2(s+2)}$ (3) $\frac{s+1}{s^2+2s+5}$
 (4) $\frac{s+1}{s+5}$ (5) $\frac{\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ (6) $\frac{1}{(s+a)(s-b)^2}$

2.4 微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0$$

をラプラス変換を用いて解きなさい. ただし, $x(0) = -1$ とする.

2.5 図2.4に示す信号 $x(t)$ をラプラス変換し, $X(s)$ を求めなさい. また, $\Delta \rightarrow 0$ のときの $X(s)$ の極限を求めなさい.

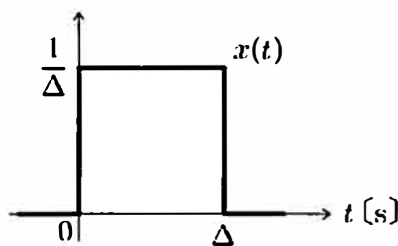


図2.4

2.6 図2.5 (a)の信号 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. このとき, 図2.5 (b)の信号 $g(t)$ (これは $f(t)$ が周期的に無限個続いている) のラプラス変換 $G(s)$ を, $F(s)$ を用いて表しなさい.

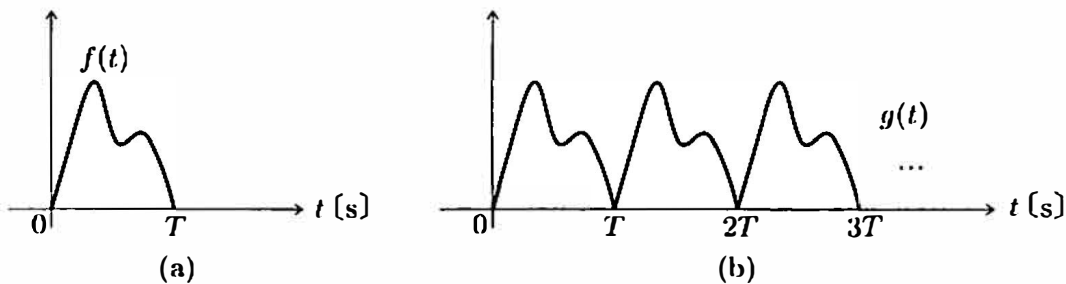


図2.5