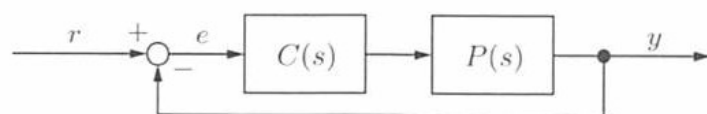


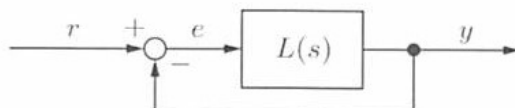
本章ではフィードバックシステムの安定性について考える。まず、ラウスの安定判別法を用いた代数的な方法を紹介し、次に、周波数領域における図的な方法であるナイキストの安定判別法を与える。さらに、内部安定性の定義を与え、不安定システムを安定化する方法を紹介する。最後に、安定性の度合いを測るゲイン余裕と位相余裕という安定余裕について説明する。

## 10.1 フィードバックシステムの安定判別

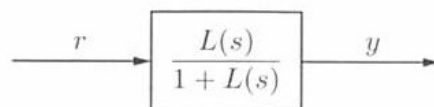
図10.1 (a) の直結フィードバック制御系を考える。ただし、 $P(s)$  は制御対象の伝達関数、 $C(s)$  はコントローラの伝達関数である。一巡伝達関数を  $L(s) = P(s)C(s)$  とおくと、図10.1 (a) は図10.1 (b) に等価変換できる。さらに、それは図10.1 (c) の閉ループ制御系に変換できる。ただし、本節と次節では、 $P(s)$  と  $C(s)$  のそれぞれ



(a) 直結フィードバック制御系



(b) ブロック線図の等価変換



(c) 閉ループ制御系

図10.1 フィードバックシステム (1)

の極と零点は共通因子を持たない，すなわち  $P(s)$  と  $C(s)$  は極零相殺がないと仮定する．

図10.1 (a) のフィードバックシステムの安定性は，伝達関数が

$$W(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (10.1)$$

である LTI システム（閉ループシステム）の BIBO 安定性を調べればよいことがわかる．そのためには，特性方程式

$$1 + L(s) = 0 \quad (10.2)$$

の根の配置を調べればよい．ここで， $1 + L(s)$  を還送差（return difference）という．

次に，図10.2で与えるフィードバックシステムの場合， $r(t)$  から  $y(t)$  までの閉ループ伝達関数は

$$W(s) = \frac{P(s)}{1 + L(s)} \quad (10.3)$$

となり，この場合の特性方程式も式(10.2)になる．以上より，次の結果を得る．

#### ❖ Point 10.1 ❖ フィードバックシステムの安定条件

図10.1あるいは図10.2のフィードバックシステムが安定であるための必要十分条件は，特性方程式

$$1 + L(s) = 0 \quad (10.4)$$

の根がすべて左半平面に存在することである．

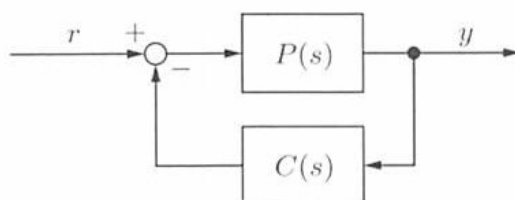


図10.2 フィードバックシステム (2)

例題を通してこの条件について見ていこう。

### 例題 10.1

図 10.1 (b) のブロック線図において、

$$L(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 2}$$

のとき、このフィードバックシステムの安定性を調べなさい。

**解答** 特性方程式は、

$$1 + L(s) = 1 + \frac{1}{s^2 + 4s + 2} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 4s + 2} = 0$$

となる。これが成り立つのは、分子多項式が 0 となるときなので、

$$s^2 + 4s + 3 = 0$$

の根が特性根である。これは 2 次方程式なので、ラウスの方法を使うまでもなく、特性根は  $s = -1, -3$  であり、このフィードバックシステムは安定である。 ■

### 例題 10.2

図 10.3 のフィードバックシステムを考える。ここで、制御対象は

$$P(s) = \frac{A}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

の 2 次系で与えられる。また、コントローラの伝達関数を

$$C(s) = \frac{K}{s}$$

とする。これは積分補償器とも呼ばれる。いま、 $A, T_1, T_2$  を正定数とし、可調整パラメータはコントローラのゲイン  $K (> 0)$  のみとする。このとき、フィードバックシステムが安定となる  $K$  の範囲を求めなさい。

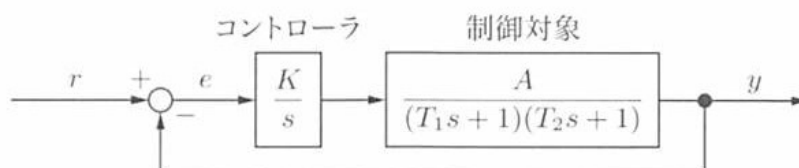


図 10.3

**解答** 一巡伝達関数は

$$L(s) = \frac{KA}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

なので、特性方程式は次のようになる.

$$1 + L(s) = 1 + \frac{KA}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + AK}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = 0$$

よって,

$$T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + AK = 0$$

となり, これを用いてラウス表を作成すると,

$s^3$	$T_1T_2$	1
$s^2$	$T_1 + T_2$	$AK$
$s^1$	$\frac{T_1 + T_2 - AKT_1T_2}{T_1 + T_2}$	
$s^0$	$AK$	

が得られる. よって, ラウス数列は,

$$\left\{ T_1T_2 (> 0), T_1 + T_2 (> 0), \frac{T_1 + T_2 - AKT_1T_2}{T_1 + T_2}, AK (> 0) \right\}$$

となる. これより, フィードバックシステムが安定であるためには,

$$\frac{T_1 + T_2 - AKT_1T_2}{T_1 + T_2} > 0$$

が成り立たなければならない. すなわち,

$$0 < K < \frac{1}{A} \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}$$

となる. ■

### 例題 10.3

図 10.4 のフィードバックシステムが安定となるための  $K$  の範囲を求めなさい.

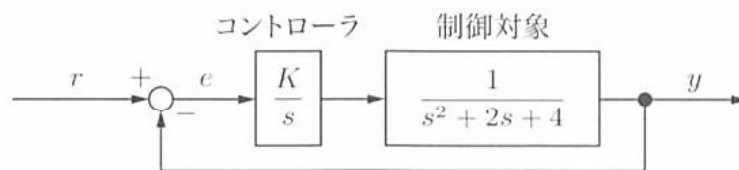


図 10.4

**解答** 一巡伝達関数は

$$L(s) = \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 4s}$$

なので、特性方程式は

$$s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0$$

となる。例題 10.2 と同様にラウス表を作成することにより、

$$0 < K < 8$$

のとき、フィードバックシステムは安定である。 ■

特性根を実際に計算することによって、この結果を確認してみよう。  $K$  を 0 から 1 刻みで 20 まで増加させていったときの三つの特性根の軌跡を図 10.5 に示す。図より、  $K$  を増加させていくと、1 対の複素共役根の実部が正になり、右半平面に存在することになってしまうことがわかる。このように比例ゲイン  $K$  の値を変化させて

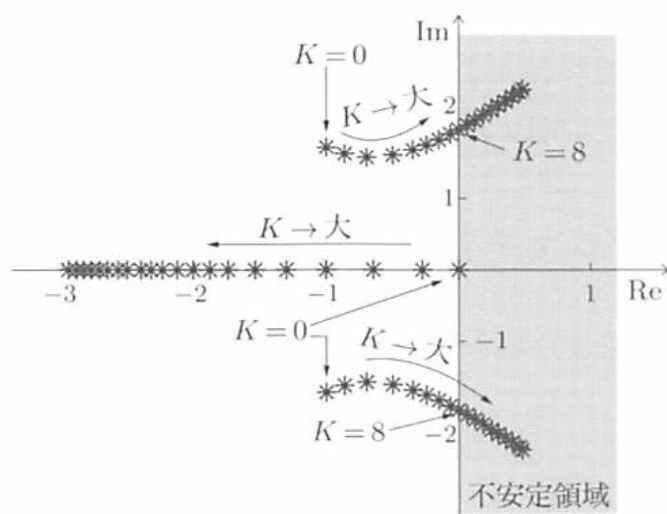


図 10.5 特性根のプロット

フィードバックシステムの安定性（さらには制御性能）を調べる方法を根軌跡法といい、これについては11.4節で述べる。

## 10.2 ナイキストの安定判別法

まず、ナイキストの安定判別法を与えよう。

### ✧ Point 10.2 ✧ ナイキストの安定判別法

ナイキストの安定判別法とは、一巡伝達関数（開ループシステム） $L(s)$  のナイキスト線図を描くことにより、図10.1あるいは図10.2のフィードバックシステム（閉ループシステム）の安定性を周波数領域において図的に判別する方法である。

ここで、「開ループ情報に基づいて閉ループシステムの安定性を判別する」ことが、本書で主に扱う古典制御の特徴である。また、前述の伝達関数や状態空間における安定判別では、システムは有限次元<sup>1</sup>である必要があった。そのため、むだ時間要素  $e^{-Ts}$  が含まれているシステムの安定性を判別することはできなかった。それに対して、ここで述べるナイキストの安定判別法は、周波数領域における判別法であるため、むだ時間要素を含むシステムに対しても適用可能である。さらに、相対的な安定度に関する情報も得られるため、（本書の範囲を超えてしまうが）ロバスト制御理論においても重要な役割を演ずる。

さて、ナイキストの安定判別法は、開ループシステム  $L(s)$  が安定か不安定かにかかわらず成立する統一的な方法であるが、両者を分けたほうが理解しやすいので、以下ではそれぞれについて説明する。

### 10.2.1 開ループシステムが安定な場合

開ループシステムが安定な場合のナイキストの安定判別法を、Point 10.3にまとめよう。

<sup>1</sup> 分子・分母多項式が有限次数を持つ分数によって伝達関数が記述されること。このような伝達関数を有理伝達関数という。

❖ Point 10.3 ❖ ナイキストの安定判別法（開ループシステムが安定な場合）

図 10.6 (a) のフィードバックシステムを考える．開ループシステム  $L(s)$  が安定であるとき，このフィードバックシステムの安定性は，次のように判別できる．

$\omega = 0 \sim \infty$  に対するベクトル軌跡を描く． $\omega$  を増加させていったとき，点  $-1+j0$  を左側に見れば安定であり，右側に見れば不安定である．また，点  $-1+j0$  上をベクトル軌跡が通過するときは安定限界である．この様子を図 10.6 (b) に示す．

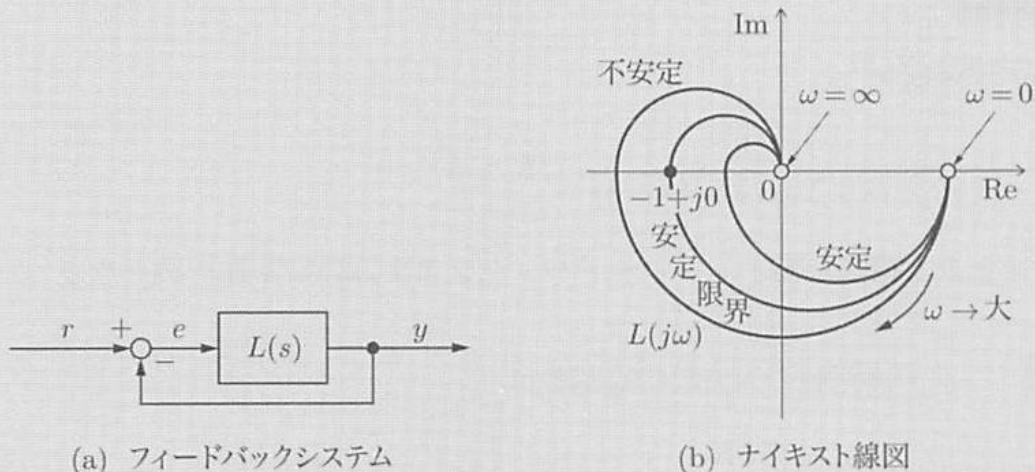


図 10.6 ナイキスト線図を用いたフィードバックシステムの安定判別

ナイキストの安定判別法を利用する上で最も重要なことは，ナイキスト線図が作図できるかどうかである．特に，高次系の場合，ボード線図のゲイン特性のようにナイキスト線図を簡便に描く方法は存在しない．ナイキスト線図を作図するときなどは，まさに MATLAB をはじめとする制御用ソフトウェアの出番であり，大いに活用すべきである．とはいえ，制御工学の基本として，以下では簡単なシステムのナイキスト線図の作図の例を与えよう．

❖ Point 10.4 ❖ ナイキスト線図の描き方

ソフトウェアを利用せずにナイキスト線図を作図する場合，全周波数帯域にわたって正確に描くことはなく，次の周波数を特に注意して描くとよい．

- $\omega = 0$  のとき
- $\omega = \infty$  のとき（厳密にプロパーな場合は原点になる）

- $\omega = \omega_\pi$  (位相が  $180^\circ$  遅れる点) のとき: これは位相交差周波数と呼ばれ,  $\text{Im}L(j\omega) = 0$  となる周波数のことであり, 負の実軸上に位置する.
- システムが振動系の場合には, 共振周波数付近は特に細かい間隔で計算する.

例題を通してナイキスト線図の描き方を学ぼう.

#### 例題 10.4

一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad K > 0$$

のナイキスト線図を描き, フィードバックシステムの安定性を調べなさい.

**解答** 一巡伝達関数の周波数伝達関数は,

$$L(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{K}{(6-6\omega^2) + j\omega(11-\omega^2)} \quad (10.5)$$

となる.

重要な周波数について調べていこう.

- $\omega = 0$  のとき,  $L(s) = K/6$  になるので,

$$|L(j0)| = \left| \frac{K}{6} \right|, \quad \angle L(j0) = 0^\circ$$

- $\omega = \infty$  のとき,

$$|L(j\infty)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega)^3} = -270^\circ$$

- $\omega = \omega_\pi$  のとき, 位相が  $180^\circ$  遅れる点は負の実軸上であるので, 式 (10.5) において分母の虚部を 0 とおくと,  $\omega_\pi = \sqrt{11}$  を得る. これより, ゲインは次式となる.

$$|L(j\omega_\pi)| = \frac{K}{60} = \rho$$



これらを用いて描いたナイキスト線図を図10.7に示す。図より明らかなように、

$$\rho < 1 \quad \text{すなわち} \quad K < 60$$

のとき、フィードバックシステムは安定になる。 ■

比較のために、MATLAB を用いて描いたナイキスト線図を図10.8に示す。図では、 $K = 10, 60, 120$  とした三つの場合のナイキスト線図を示している。 $K = 60$  のときに、点  $-1 + j0$  上をベクトル軌跡が通過しており、これが安定限界である。 $K = 120$  にすると、点  $-1 + j0$  を右側に見てしまうので、不安定になる。

MATLAB では、 $\omega = +0 \sim \infty$  と  $\omega = -\infty \sim -0$  までの正と負の周波数すべてにわたる軌跡をプロットしていることに注意しよう。このとき、 $\omega = +0 \sim \infty$  の正の周波数のベクトル軌跡と  $\omega = -\infty \sim -0$  の負の周波数のベクトル軌跡とは、実軸に関して対称である。

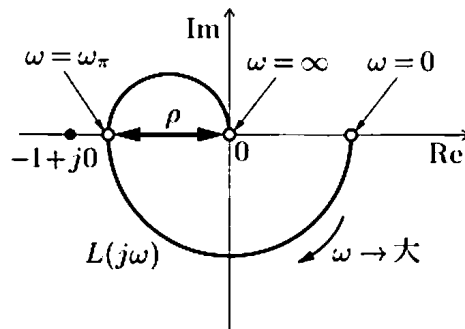


図 10.7

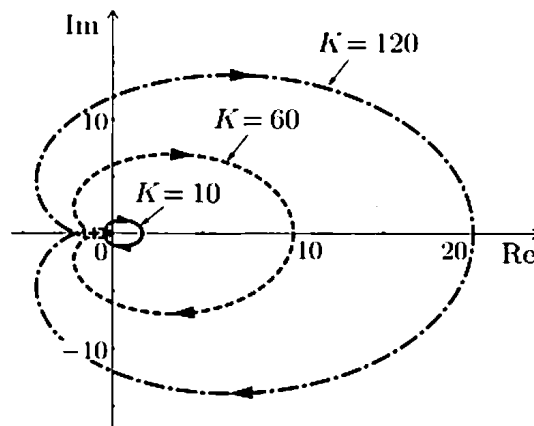


図 10.8 ナイキスト線図

## 例題 10.5

一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)}$$

で与えられる直結フィードバック制御系を考える。\$L(s)\$ のナイキスト線図を描き、このフィードバックシステムの安定性を調べなさい。

**解答** 一巡伝達関数の周波数伝達関数は、

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{5}{-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)} \\ &= -\frac{15}{9\omega^2 + (2-\omega^2)^2} - j\frac{5(2-\omega^2)}{\omega[9\omega^2 + (2-\omega^2)^2]} \end{aligned}$$

となる。重要な周波数について調べると、次のようになる。

- \$\omega = 0\$ のとき、

$$|L(j0)| = \infty, \quad \angle L(j0) = -90^\circ$$

- \$\omega = \infty\$ のとき、

$$|L(j\infty)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{5}{(j\omega)^3} = -270^\circ$$

- \$\omega = \omega\_\pi\$ のとき、\$\text{Im}[L(j\omega)] = 0\$ より、\$\omega\_\pi = \sqrt{2}\$ となり、このときのゲインは次式となる。

$$|L(j\omega_\pi)| = \left| -\frac{15}{9 \times 2} \right| = \frac{5}{6} = 0.833 < 1$$

さらに、ナイキスト線図の漸近線は、次式より計算できる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}[L(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ -\frac{15}{9\omega^2 + (2-\omega^2)^2} \right\} = -3.75$$

この場合のナイキスト線図を図 10.9 に示す。図 10.9 において、(a) は周波数範囲を \$0.05 \sim 10\$ rad/s としたものであり、(b) は \$1 \sim 10\$ rad/s としたものである。(a) より、漸近線が \$-3.75\$ であることがわかり、(b) より点 \$-1 + j0\$ を左側に見ているので、フィードバックシステムは安定であることがわかる。 ■

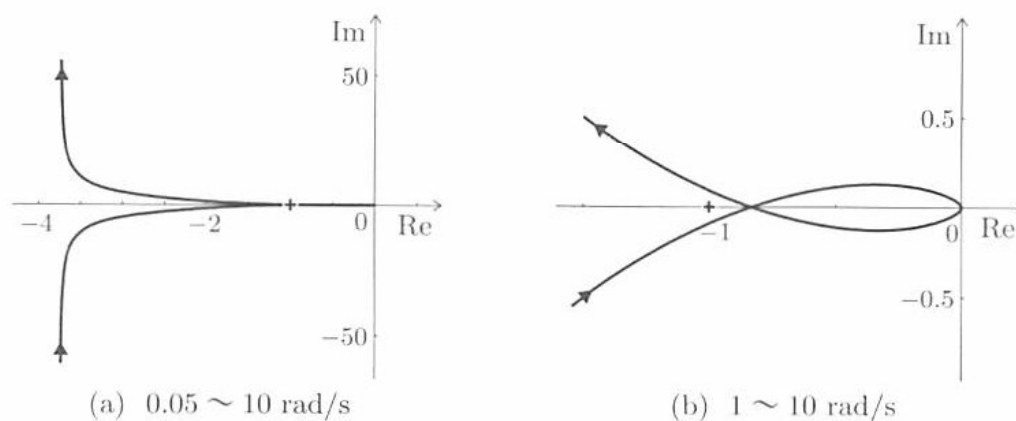


図 10.9

この例題から明らかなように、ナイキスト線図を描く際には、どの周波数範囲をプロットするかが重要になる。そのためにも、周波数  $\omega = \omega_\pi$  をあらかじめ計算しておくといよい。

### 例題 10.6

直結フィードバック制御系において、一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)^2(10s+1)}, \quad K > 0$$

で与えられるとき、このフィードバックシステムが安定限界になる  $K$  の値を求めなさい。また、そのときの持続振動周波数  $\omega_\pi$  を求めなさい。

### 解答 特性方程式

$$1 + L(s) = 0$$

より、

$$10s^3 + 21s^2 + 12s + (1 + K) = 0$$

が得られる。この係数でラウス表を作成し、ラウス数列を求めると、次のようになる。

$$\left\{ 10, 21, \frac{242 - 10K}{21}, 1 + K \right\}$$

よって、安定限界となるとき  $K$  の値は、

$$\frac{242 - 10K}{21} = 0$$

より,  $K = 24.2$  となる.

ナイキスト線図より, 持続振動周波数  $\omega_\pi$  は  $\text{Im}[L(j\omega)] = 0$  を満たす周波数なので,

$$L(j\omega) = \frac{24.2}{(1 + j\omega)^2(1 + j10\omega)} = \frac{24.2}{(1 - 19\omega^2) + j\omega(12 - 10\omega^2)}$$

において, 虚部を 0 とする周波数を  $\omega_\pi$  とすると,

$$\omega_\pi(12 - 10\omega_\pi^2) = 0$$

を解き, 正のものを選ぶと,  $\omega_\pi = \sqrt{6/5}$  が得られる. ■

次に, むだ時間要素を含むフィードバックシステムのナイキスト線図を描こう.

### 例題 10.7

**MATLAB**<sup>2</sup> 図 10.10 に示すむだ時間要素を含むフィードバックシステムにおいて, むだ時間  $\tau$  の値を 0, 0.218, 0.5 と変化させてナイキスト線図を描き, むだ時間と安定性の関係を調べなさい.

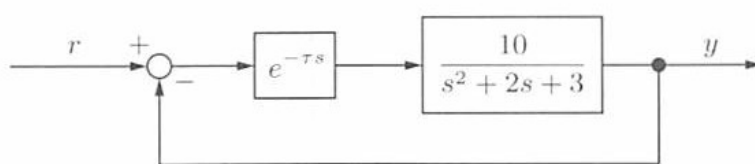


図 10.10

**解答** 一巡伝達関数は,

$$L(s) = \frac{10e^{-\tau s}}{s^2 + 2s + 3}$$

となる. むだ時間要素が入っている場合, 計算機を利用せずにナイキスト線図を描くことは困難である. そこで, MATLAB を利用して描いたナイキスト線図を図 10.11 に示す. 図は,  $\tau = 0, 0.218, 0.5$  の三つの場合を示している.

図より,  $\tau = 0$  のときは安定,  $\tau = 0.218$  のときは安定限界, そして  $\tau = 0.5$  のときは不安定である. このように, むだ時間が大きいシステムでは位相遅れが増大す

2. この例題のように MATLAB の利用を前提とした演習問題には **MATLAB** のマークを付けた. 以下の例題や Control Quiz でも同様である.

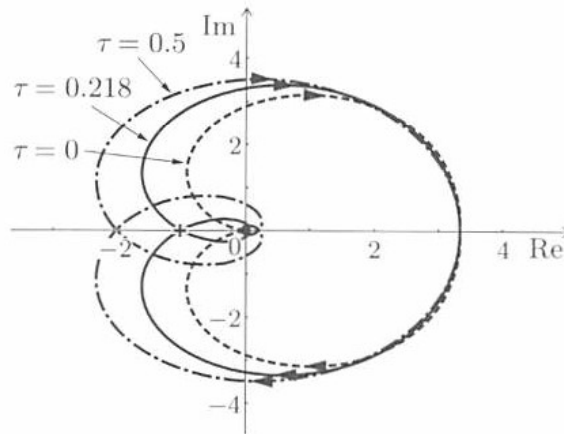


図 10.11

るために、フィードバックシステムは不安定になりやすい。つまり、むだ時間要素はフィードバックシステムの安定性に悪影響を及ぼす要素である。 ■

ナイキストの安定判別法のゲイン特性だけに着目したものが、次に与えるスモールゲイン定理である。

#### ❖ Point 10.5 ❖ スモールゲイン定理 (small gain theorem)

一巡伝達関数  $L(s)$  が安定な場合、フィードバックシステムが安定になるための十分条件は、

$$|L(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad (10.6)$$

が成り立つことである。ノルムの記号を用いると、式 (10.6) は次のように書き直することができる。

$$\|L\|_{\infty} < 1 \quad (10.7)$$

この定理は、図 10.12 に示すように、単位円内にベクトル軌跡が存在していれば、閉ループシステムは必ず安定であることを意味している。すなわち、一巡伝達関数のゲインがすべての周波数において 0 dB、すなわち 1 より小さければ、位相特性にかかわらず、閉ループシステムは安定になる。

図 10.13 を用いてスモールゲイン定理の意味を調べてみよう。図において  $r$  から  $y$  までの信号の流れに注目する。まず、 $r$  を出発した信号は  $L$  を通り  $Lr$  という信号

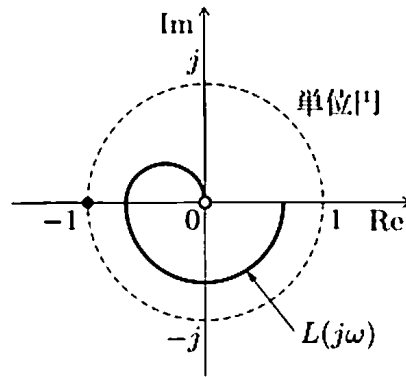


図10.12 スモールゲイン定理

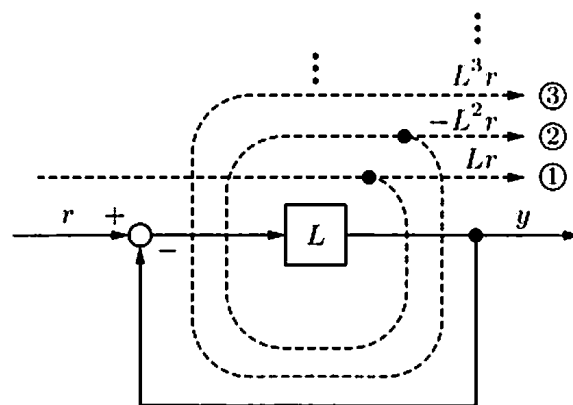


図10.13 ブロック線図を用いたスモールゲイン定理の説明

となって  $y$  に到達する (図では ① とした信号)。フィードバックがなければ話はこれで終わるが、この信号は負のフィードバックが施され、その後  $L$  を通って  $-L^2r$  という信号となって再び  $y$  に到達する (② の信号)。さらに、その信号はフィードバックされて  $L^3r$  という信号となって  $y$  に到達する (③ の信号) … というように、フィードバックシステム内で信号は無限回ループしており、これは

$$y = Lr - L^2r + L^3r - \cdots = (L - L^2 + L^3 - \cdots)r \quad (10.8)$$

という無限級数の和により表現できる。かつこ内は初項  $L$ 、公比  $-L$  の無限等比級数であるので、無限等比級数の和の公式より次式を得る。

$$y = \frac{L}{1+L}r \quad (10.9)$$

当然のことであるが、これはブロック線図の簡単化より得られた閉ループ伝達関数を与える式に一致する。

もし  $L$  が実数であれば、式 (10.8) の無限級数が収束するための必要十分条件は、

$$|L| < 1 \quad (10.10)$$

である。しかしながら、いま  $L(j\omega)$  は周波数  $\omega$  の複素関数なので、

$$|L(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad (10.11)$$

は十分条件となる。なぜならば位相情報を考慮していないからである。したがって、スモールゲイン定理を満たしていれば閉ループシステムは必ず安定であるが、スモールゲイン定理を満たしていないからといって不安定になるとは限らない。

さて、スモールゲイン定理は、全周波帯域においてゲインの大きさが 0 dB より小さければ、位相がどのような値をとっても必ず安定であることを保証する定理であった。これに対して、全周波帯域において位相が  $-180^\circ$  より遅れなければ、ゲインがどのような値をとってもフィードバックシステムは安定である<sup>3</sup>。

### 10.2.2 開ループシステムが不安定な場合

たとえば、制御対象が自転車のように不安定で、それをフィードバックコントローラによって安定化したい場合には、開ループシステムが不安定である。このような場合の安定判別法を以下に与える。

#### ❖ Point 10.6 ❖ ナイキストの安定判別法（開ループシステムが不安定な場合）

開ループシステム  $L(s)$  が不安定な場合、 $P$  を  $L(s)$  の不安定な極の総数とし、 $N$  を  $L(s)$  のナイキスト線図が点  $-1 + j0$  を反時計方向にまわる回数とすると、 $N = P$  であれば、フィードバックシステムは安定である。

例題を通して見ていこう。

<sup>3</sup> 制御系を実装すると、必ずハードウェアなどによる位相遅れが生じるため、この条件が現実には満たされることはない。しかし、周波数帯域を限定すれば、その帯域において位相遅れを  $180^\circ$  以内にすることは可能である。制御の現場では、このことを「位相安定化」と呼ぶこともある。

## 例題10.8

一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K}{s-1}, \quad K > 0$$

で与えられる直結フィードバックシステムを考える。このとき、 $K$  の値とフィードバックシステムの安定性の関係を調べなさい。

**解答** この一巡伝達関数は  $s = 1$  に極を1個持つので、不安定であり、 $P = 1$  である。このとき、閉ループ伝達関数は

$$W(s) = \frac{K}{s + (K-1)}$$

となるので、 $K > 1$  であれば、特性根（閉ループ極）は  $s = -K + 1 < 0$  となり、フィードバックシステムは安定になる。 ■

この条件をナイキストの安定判別法より導こう。 $K = 0.5, 1, 1.5$  とした場合のナイキスト線図を図10.14に示す。まず、 $K = 0.5$  のとき、ナイキスト線図は点  $-1 + j0$  を反時計方向に1回もまわらないので、 $N = 0$  である。よって、 $P \neq N$  であり、フィードバックシステムは不安定である。次に、 $K = 1.5$  のとき、ナイキスト線図は点  $-1 + j0$  を反時計方向に1回まわるので、 $N = 1$  である。よって、 $P = N$  となり、フィードバックシステムは安定である。また、 $K = 1$  のときは安定限界である。この例では、ゲイン  $K$  が小さいときは不安定であり、逆に大きくすると安定になっていく点が興味深い。

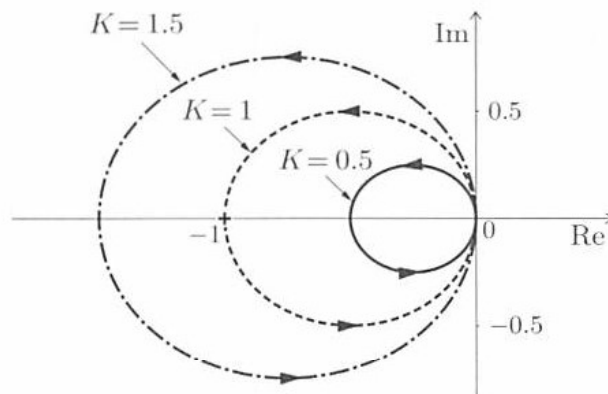


図10.14 開ループシステムが不安定な場合のナイキストの安定判別法



## 10.3 内部安定性

これまでの議論では、 $P(s)$  と  $C(s)$  の間に極零相殺がないと仮定していた。本節では、極零相殺がある状況も考慮した、より一般的なフィードバックシステムの安定性（これを内部安定性という）を与えよう。

図10.15に示すフィードバックシステムを考える。ここで、 $r$  は目標値、 $d$  は外乱、 $y$  は制御出力である。また、内部信号  $x_1, x_2$  を図のように定義する。

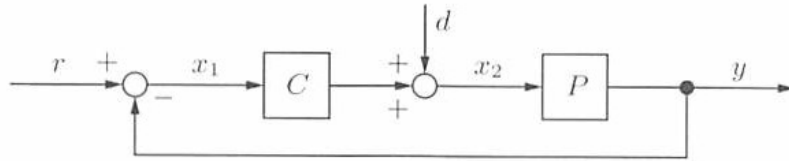


図10.15 フィードバックシステム

このとき、外部からの信号  $r, d$  と内部信号  $x_1, x_2$  は、次式を満たす。

$$x_1 = r - Px_2$$

$$x_2 = d + Cx_1$$

行列を用いてこれを表現すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & P \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

となる。このとき、次の用語を定義する。

### ❖ Point 10.7 ❖ 適切性

式(10.12)左辺の  $2 \times 2$  行列が正則の場合、すなわちその行列式である  $1 + P(s)C(s)$  が恒等的に0ではないとき、フィードバックシステムは適切 (well-posed) であると言われる。

たとえば、 $P(s) = 1$ ,  $C(s) = -1$  のとき、フィードバックシステムは適切ではない。フィードバックシステムが適切な場合、式(10.12)より次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + PC} \begin{bmatrix} 1 & -P \\ C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

本書では、 $P$  は厳密にプロパーで、 $C$  はプロパーであると仮定する。この仮定のもとで、式(10.13)の四つの伝達関数はプロパーになる。以上の準備のもとで、内部安定性の定義を与えよう。

#### ♣ Point 10.8 ♣ 内部安定性

式(10.13)の四つの伝達関数 ( $r \rightarrow x_1$ ,  $r \rightarrow x_2$ ,  $d \rightarrow x_1$ ,  $d \rightarrow x_2$ ) がすべて BIBO 安定のとき、フィードバックシステムは内部安定 (internally stable) であるという。

内部安定性は、すべての有界な外部信号に対して、内部信号が有界になることを保証する。

例題を通して内部安定性について見ていこう。

#### 例題 10.9

図 10.15 において

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - 1}, \quad C(s) = \frac{s - 1}{s + 1}$$

とする。このとき、 $r$  から  $y$  への伝達関数と、 $d$  から  $y$  への伝達関数を計算し、このフィードバックシステムの内部安定性を調べなさい。

**解答** まず、

$$y = \frac{P}{1 + PC}(Cr + d)$$

なので、 $r$  から  $y$  への伝達関数は

$$\frac{PC}{1 + PC} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

となり、これは安定である。一方、 $d$  から  $y$  への伝達関数は、

$$\frac{P}{1 + PC} = \frac{s + 1}{(s - 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

となり、これは不安定である。したがって、このフィードバックシステムは内部安定ではない。 ■

$P$  と  $C$  の積を計算する際,

$$P(s)C(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

のように,  $s = 1$  でプラントの極とコントローラの零点が相殺されていることにより, 内部安定性を得られなかった. これは右半平面における極零相殺なので, 不安定な極零相殺と呼ばれる.

## 10.4 不安定システムの安定化

---

たとえば, 制御対象が

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

のように不安定な場合を考えよう. このシステムの逆システム

$$C(s) = s-1$$

をフィードフォワードコントローラとして直列接続すると, 目標値  $r$  から出力  $y$  までの入出力関係は 1 となるが, この場合, 不安定な極零相殺を起こしてしまうため, 内部安定ではなくなる. すなわち, 不安定な制御対象をフィードフォワード制御によって安定化することはできない.

一方,

$$C(s) = K$$

として, 直結フィードバック制御系を構成すると, 閉ループ伝達関数は

$$W(s) = \frac{K}{s+K-1}$$

となる. これより, 閉ループ極は  $s = 1-K$  である. このとき,  $K$  を  $K > 1$  となるように選べば, フィードバック制御を行うことによって, 不安定な極を左半平面に移動することができ, 安定化できる. このように, 不安定システムを安定化するためには, フィードバック制御が必要になる.

## 10.5 安定余裕

これまでは、フィードバックシステムが安定か不安定かという2値的な判別を行ってきた。しかしながら、安定性の度合いを定量的に評価することは大きな意味を持つ。そこで、本節では、安定度の指標であるゲイン余裕と位相余裕を与えよう。

図10.16のフィードバックシステムを考える。この制御系では、1次遅れ系の制御対象を積分型のコントローラでフィードバック制御している。積分器のゲイン  $K$  のみを可変とし、この値を変化させたときのナイキスト線図を図10.17に示す。図では、 $K=1, 2$  の二つの場合を示している。図より、 $K=2$  の場合のほうがベクトル軌跡は点  $-1+j0$  に近く、さらに  $K$  を大きくすると、ベクトル軌跡は点  $-1+j0$  にどんどん近づいていき、安定性が損なわれていくことがわかる。このように、ベクトル軌跡と点  $-1+j0$  の位置関係（距離）により、フィードバックシステムの安定度を規定することができる。そこで、安定度を規定する重要な量であるゲイン余裕と位相余裕を定義しよう。

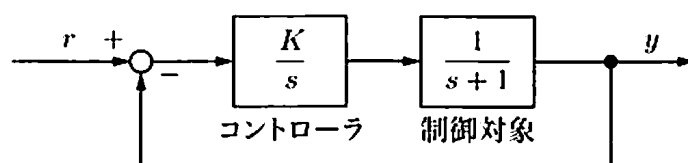


図10.16 フィードバックシステム

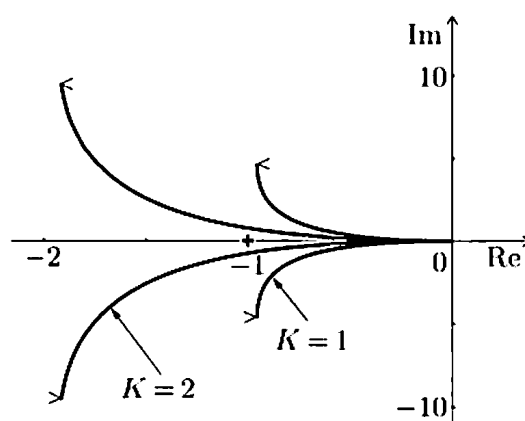


図10.17 フィードバックシステムの安定度

❖ Point 10.9 ❖ ゲイン余裕と位相余裕

図10.18のナイキスト線図において、 $L(j\omega)$  と負の実軸（これは位相が  $180^\circ$  遅れるところに対応）との交点と原点の間の距離を  $\rho$  とすると、ゲイン余裕 (gain margin)  $G_M$  は、

$$G_M = 20 \log_{10} \frac{1}{\rho} = -20 \log_{10} \rho = -20 \log_{10} |L(j\omega_\pi)| \quad (10.14)$$

で定義される。ここで、 $\omega_\pi$  は位相が  $-180^\circ$  となる周波数である。

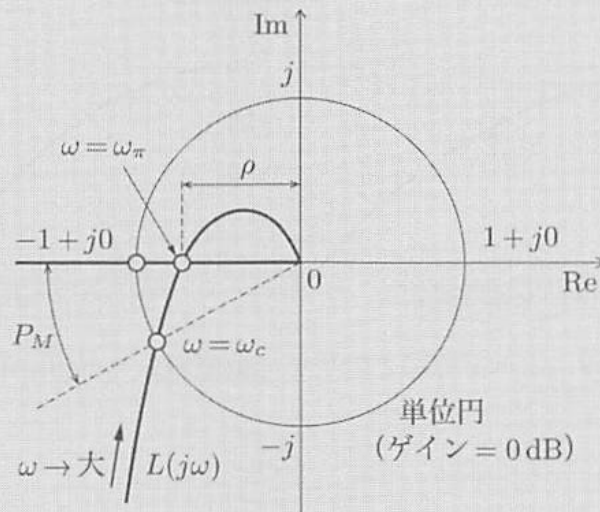


図10.18 ゲイン余裕と位相余裕

一方、位相余裕 (phase margin) は

$$P_M = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) \quad (10.15)$$

で定義される。ここで、 $\omega_c$  はゲインが 0 dB となる周波数である。図中に示した原点を中心とする半径 1 の円 (単位円) は 0 dB の等高線を表しているので、位相余裕は  $L(j\omega)$  と単位円の交点から求めることができる。

ゲイン余裕  $G_M$  と位相余裕  $P_M$  は、図10.19のようにボード線図上で定義することもできる。まず、ゲイン余裕は、位相が  $180^\circ$  遅れる周波数で 0 dB よりどれだけ下にあるかを表す量である。したがって、図において下向きが正である。また、位相余裕は、ゲインが 0 dB となる周波数で位相が  $-180^\circ$  よりどれだけ上にあるかを表す量である。したがって、図において上向きが正である。

図10.19において、(a)はゲイン余裕、位相余裕とも正であるので、安定システムである。一方、(b)はゲイン余裕、位相余裕とも負であるので、不安定システムである。

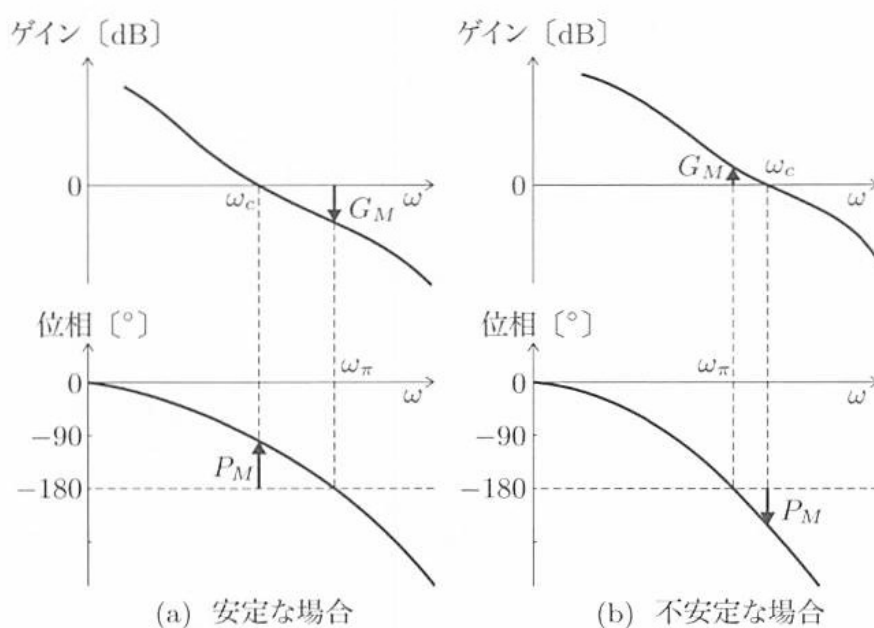


図10.19 ボード線図上のゲイン余裕  $G_M$  と位相余裕  $P_M$

### 例題10.10

**MATLAB** 一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

であるとき、このフィードバックシステムの安定性を調べなさい。また、ゲイン余裕、位相余裕を求めなさい。

**解答** 図10.20に示すナイキスト線図を描いて安定性を調べる。 $L(s)$ は安定であるため、図より、ベクトル軌跡は $s = -1$ を左に見るので、フィードバックシステムは安定である。描いたナイキスト線図からゲイン余裕と位相余裕を読み取ることもできるが、MATLABでボード線図を図示し、ゲイン余裕と位相余裕を調べることができる。図10.21より、 $\omega_\pi = 3.32 \text{ rad/s}$ のとき  $G_M = 12.0 \text{ dB}$ 、 $\omega_c = 1.49 \text{ rad/s}$ のとき  $P_M = 60.7^\circ$  である。

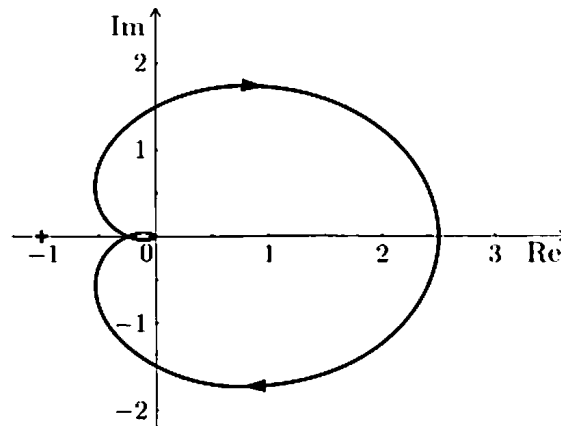


図10.20

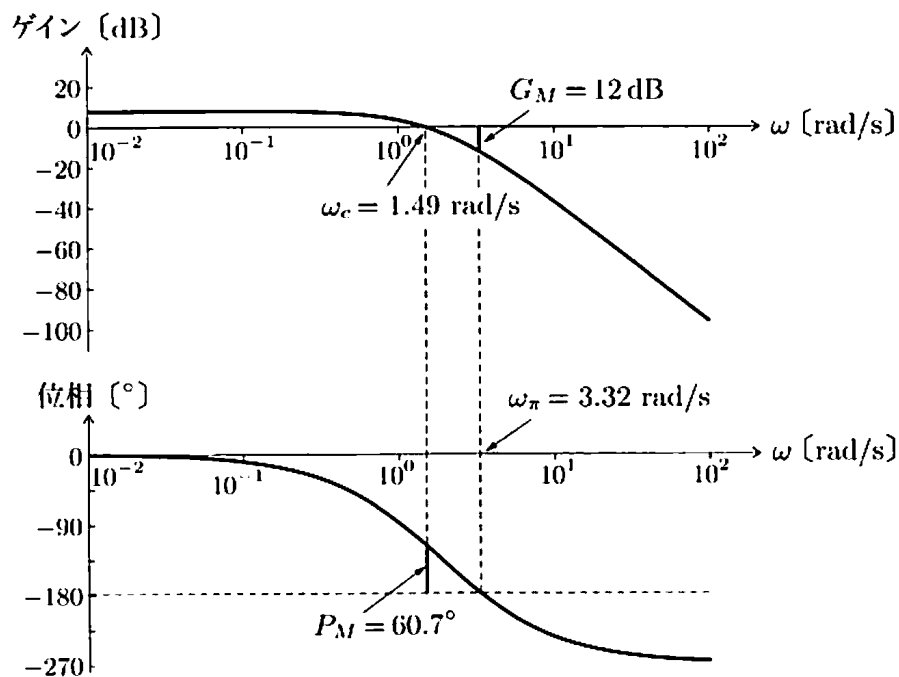


図10.21

## 本章のポイント

- ▼ フィードバックシステム（閉ループシステム）の安定性を調べる際、一巡伝達関数（開ループシステム）を用いることに注意すること。
- ▼ 周波数領域におけるナイキストの安定判別法を習得すること。
- ▼ 周波数領域における安定余裕であるゲイン余裕と位相余裕をボード線図上で読み取ることができるようになること。
- ▼ 本書より進んだ内容であるロバスト制御を学習するための基礎となる、スモールゲイン定理や内部安定性の意味を知ること。

## Control Quiz

---

**10.1** 一巡伝達関数  $L(s)$  が次のように与えられる直結フィードバック制御系が安定となるような  $K$  の範囲を求めなさい.

$$(1) L(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

$$(2) L(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s - 1)(s + 6)}$$

**10.2** 一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 1)(s + 5)}$$

で与えられるとき、次の問いに答えなさい.

- (1) このフィードバック制御系が安定となるような  $K$  の範囲を求めなさい.
- (2) 安定限界を与える  $K$  の値を求め、そのときフィードバック制御系がどのような振る舞いを示すかを述べなさい.