第3章 線形時不変システムの表現

制御対象を、入力を加えたときに出力を生成するシステム（system）と見なすと、そのシステムを記述するさまざまな数学モデル（mathematical model）が存在する．制御対象のモデルを構築することをモデリングという．モデリングは、制御対象である相手を知る重要なプロセスであり、Point 1.2 で述べた制御系設計の Step 2 に相当する．そこで，本章から第6章までで，時間領域，ラプラス領域（s 領域），周波数領域におけるさまざまな制御対象のモデルを紹介する（表3.1）．

まず本章では，制御対象を時間領域においてそのインパルス応答（あるいはステップ応答）によって記述する方法と，微分方程式によって記述する方法を与える．

表3.1 制御対象の数学モデル

章	数学モデル	領域
3	インパルス応答 微分方程式	時間領域
4	伝達関数	ラプラス領域
5	周波数伝達関数	周波数領域
6	状態方程式	時間領域

3.1 重ね合わせの理と線形性

まず，システムの線形性を規定する上で重要な重ね合わせの理（principle of superposition）を与えよう．

✤ Point 3.1 ✤ 重ね合わせの理

入力 $x_1(t)$ に対するシステムの出力を $y_1(t)$ とし，入力 $x_2(t)$ に対するシステムの出力を $y_2(t)$ とする．このとき，重ね合わせの理とは，次の二つの条件が成り立つことをいう．

(1) 入力 $\{x_1(t)+x_2(t)\}$ に対する出力は $\{y_1(t)+y_2(t)\}$ である．

(2) a を任意の定数とするとき，入力 $ax_1(t)$に対する出力は $ay_1(t)$ である．

この重ね合わせの理を満たすシステムを**線形システム**（linear system）といい，そうでないシステムを**非線形システム**（non-linear system）という．これらは相反する概念ではなく，非線形システムの特殊な場合が線形システムである．

次に，システムの特性が時間とともに変化しないとき，そのシステムは**時不変システム**（time-invariant system）と呼ばれる．逆に，システムの特性が時間とともに変化するとき，そのシステムは**時変システム**（time-varying system）と呼ばれる．

線形で時不変であるシステムを**線形時不変システム**（linear time-invariant system）といい，以下では英語の頭文字をとってLTIシステムと略記する．

通常，制御対象は非線形，時変システムであるが，**動作点**（operating point）のまわりではLTIシステムとして取り扱うことができる．そこで，本書では対象をLTIシステムに限定する．

線形システムを時間領域で特徴付けたものが**重ね合わせの理**であり，周波数領域で特徴付けるものは，第5章で述べる**周波数応答の原理**である．両者は非常に重要な原理である．

3.2 ステップ応答とインパルス応答

あるシステムに入力 $u(t)$ として単位ステップ信号 $u_s(t)$ を加えたとき，対応する出力（ここでは $f(t)$とする）を（単位）**ステップ応答**（step response）という．図3.1にその様子を示す．後述するように，制御系のステップ応答を調べることにより，その制御系の過渡特性（速応性）や定常特性といった制御性能を知ることができる．

さて，ステップ応答が $f(t)$ のLTIシステムに，任意の入力 $u(t)$ を加えたとき，

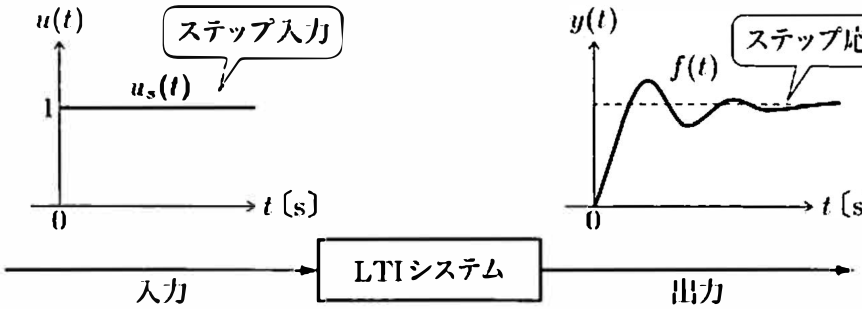

図3.1 ステップ応答

出力はどのように表せるだろうか？ このことを調べるために，図3.2 (a) に示す一般的な入力を LTI システムに加えたときの出力を，重ね合わせの理を用いて求めてみよう．

まず，図3.2 (a) のように，連続時間信号 $u(t)$ を間隔が Δt の階段状信号の和として表現する．ここで，この階段状信号は，$\Delta t \to 0$ のとき $u(t)$ に一致する．いま，図3.2 (b) に示す n 番目の階段状信号は，$P_n(t)u(n\Delta t)$ と記述できる．ただし，

$$P_n(t) = u_s(t - n\Delta t) - u_s(t - (n+1)\Delta t)$$

である．したがって，入力 $u(t)$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} P_n(t)u(n\Delta t) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} [u_s(t - n\Delta t) - u_s(t - (n+1)\Delta t)]u(n\Delta t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

すると，式 (3.1) の入力に対応する LTI システムの出力は，重ね合わせの理を用いる

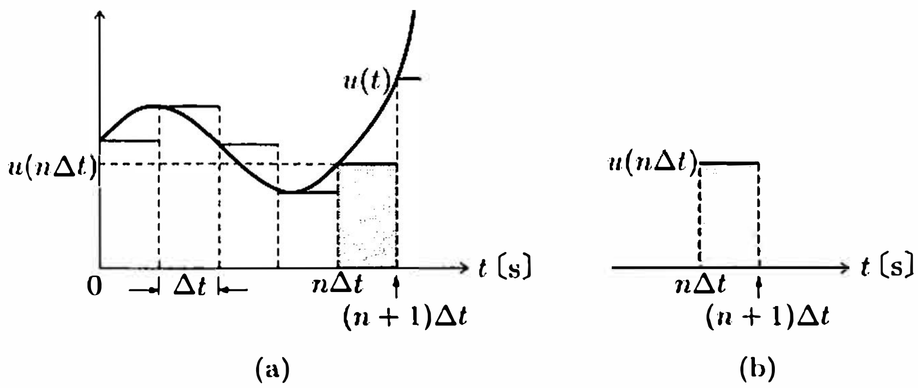

図3.2 階段状信号による連続時間信号の表現

ことにより，

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} [f(t - n\Delta t) - f(t - (n+1)\Delta t)]u(n\Delta t) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} \frac{f(t - n\Delta t) - f(t - (n+1)\Delta t)}{\Delta t} u(n\Delta t)\Delta t \\
&= -\int_0^t \frac{\mathrm{d}f(t-\tau)}{\mathrm{d}\tau} u(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$t-\tau$ を τ と変数変換すると，出力 $y(t)$ は

$$
y(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau} u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (3.3)
$$

と表せ，これが任意の入力 $u(t)$ に対する出力である．

いま，式 (3.3) において，

$$
g(\tau) = \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \qquad (3.4)
$$

とおき，これを LTI システムの**インパルス応答**（impulse response）と呼ぶ．インパルス応答とは，LTI システムに単位インパルス信号 $\delta(t)$ を入力したときの応答信号のことであり，その様子を図 3.3 に示す．

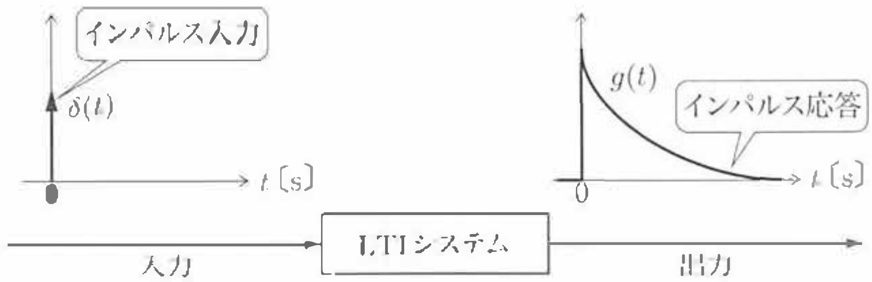

図3.3　インパルス応答

以上より，Point 3.2 が得られる．

✤ Point 3.2 ✤　インパルス応答による LTI システムの表現

LTI システムの入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ は，そのインパルス応答 $g(t)$ を用いて次式のように記述できる．

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.5}$$

この積分計算は，第2章で述べたたたみ込み積分である．式(3.5)より，インパルス応答 $g(t)$ が既知であれば，任意の入力 $u(t)$ に対する出力 $y(t)$ は，たたみ込み積分を用いて計算できる．

式(3.5)のたたみ込み積分は，線形システムを時間領域において記述する，線形システム理論の出発点となる重要なものであるが，その計算は複雑である．そのため，制御工学では，たたみ込み積分を用いて出力信号を計算することはほとんどなく，その代わりに，次章以降で説明する伝達関数や周波数伝達関数を用いて計算する．

例題 3.1

日常生活の中でインパルス応答の例を探しなさい．

解答 スイカを買うときにコンと叩く行為はインパルス入力であり，そのときの音はインパルス応答である．また，部屋をノックしたとき，中からの応答（返事）もインパルス応答の例である（図3.4参照）．ただし，残念ながら，スイカも部屋も線形システムではないので，インパルス応答だけでは，それらを完全に特徴付けることはできないだろう． ■

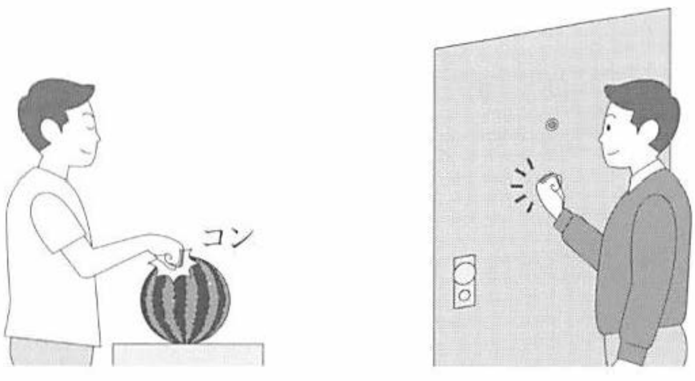

図3.4 日常生活の中のインパルス応答

3.3　微分方程式による LTI システムの表現

まず，図1.7に示した力学システムを再び考えよう．質点への力を入力 $u(t)$，質点の変位を出力 $y(t)$ とするとき，これらは次の微分方程式で関係付けられる．

$$m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ky(t)=u(t) \tag{3.6}$$

ただし，m は質点の質量，c はダンパの粘性摩擦係数，k はバネのバネ定数である．

次に，図1.9に示した電気回路を考えよう．加えた電圧 $e(t)$ を入力，コンデンサの両端の電荷 $q(t)$ を出力とすると，微分方程式

$$L\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q(t)=e(t) \tag{3.7}$$

が得られる．ただし，R は抵抗，L はコイルのインダクタ，C はコンデンサのキャパシタである．

式(3.6)と式(3.7)はまったく同じ形式の2階微分方程式である．ここで紹介した力学システム，電気回路はともに線形であり，これらは時間領域においては微分方程式によっても記述できることがわかった．このように，さまざまな物理（自然）現象を微分方程式で記述することは，近代科学の大きな成果である．

以上を拡張することにより，一般的な LTI システムは，n 階微分方程式

$$\begin{aligned}&y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)\\&\quad=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1u^{(1)}(t)+b_0u(t)\end{aligned} \tag{3.8}$$

によって実現できる．ここで，$y^{(n)}(t)$ の上添字 (n) は n 階の時間微分を表す．このように，時間領域において LTI システムは微分方程式によって表現することもできる．

本章のポイント

- ▼ 時間領域において線形性を規定する重ね合わせの理を理解すること．
- ▼ 線形システムの出力信号は，入力信号とシステムのインパルス応答のたたみ込み積分で計算でき，これは時間領域における線形システムの表現の基礎となるものであることを認識すること．
- ▼ 微分方程式による線形システムの表現は，時間領域において重要であることを理解すること．
- ▼ 線形システムのインパルス応答とステップ応答を使いこなせるようになること．

Control Quiz

3.1 インパルス応答が $g(t) = e^{-at}u_s(t)$ $(a > 0)$ である LTI システムに，単位ステップ入力 $u(t) = u_s(t)$ を印加したときのステップ応答 $y(t)$ を，たたみ込み積分を用いて計算しなさい．また，$g(t)$ と $y(t)$ を図示しなさい．

3.2 線形システムの例を挙げ，それを微分方程式によって記述しなさい．

3.3 非線形システムの例を挙げなさい．

3.4 時変システムの例を挙げなさい．