

解答 一巡伝達関数は,

$$L(s) = \frac{K}{(0.2s + 1)(0.5s + 1)(s + 1)}$$

であるので, 特性方程式は

$$s^3 + 8s^2 + 17s + 10(1 + K) = 0$$

となる. これに対してラウス表を作成すると, 以下のようになる.

s^3	1	17
s^2	8	$10(1 + K)$
s^1	$\frac{17 \times 8 - 10(1 + K)}{8}$	
s^0	$10(1 + K)$	

第1列がすべて正になるというラウスの安定条件より,

$$-1 < K < 12.6$$

を得る. 次に, 定常位置偏差に対する条件

$$\varepsilon_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + K} \leq 0.1$$

より, $K \geq 9$ を得る. 以上より

$$9 \leq K < 12.6$$

が得られる. ■

例題12.1より, 定常位置偏差を小さくするためには, ゲイン K をある値以上大きくしなくてはならないが, 逆に, K を大きくしすぎると, 不安定になってしまうことがわかる. 図12.5にこの制御系の根軌跡を示す. 図より, K を増加させると, 右半平面に閉ループ極が飛び出していくことがわかる. たとえば, 定常位置偏差が0.01以下という設計仕様を与えると, $K \geq 99$ としなければならず, このような設計仕様を満足する制御系は, ゲイン調整による比例制御のみでは達成できない.

この例題では, 次の事実が成り立っている.

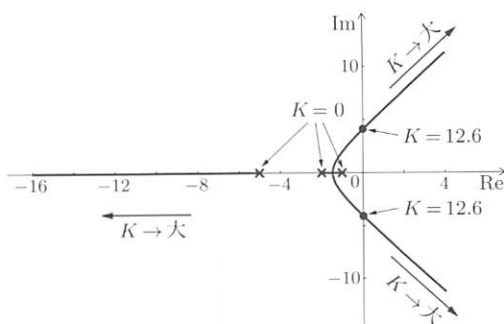


図12.5 根軌跡

❖ Point 12.2 ❖ ゲイン K の調整

- (1) $K \rightarrow$ 小: 安定性向上
- (2) $K \rightarrow$ 大: 定常位置偏差減少 (定常特性向上)
- (3) $K \rightarrow$ 大: 速応性向上 (過渡特性向上)

これは前述したトレードオフの典型的な例である。制御系設計では、相反する要求のトレードオフをいかに図るかがポイントになる。

12.3 外乱に対する定常特性の評価

本節では、図12.1のフィードバック制御系において $r=0$ とおくことにより、外乱 d に対する定常偏差を考える。式(12.3)において $r=0$ とおくと、

$$e(s) = -\frac{P(s)}{1+L(s)}d(s) \quad (12.16)$$

となるので、外乱による定常偏差 ε_d は、

$$\varepsilon_d = \lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = \lim_{s \rightarrow 0} |se(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| s \frac{-P(s)}{1+L(s)} d(s) \right| \quad (12.17)$$

となる³。したがって、目標値の場合と同様に、 ε_d は外乱の種類ならびに $P(s)$ と

³ 定常偏差は大きさを評価するので、式(12.17)では絶対値をとった。

$C(s)$ に依存し、前節と同様の手順で ε_d を計算することができる。しかし、目標値の場合と異なる点は、外乱の場合、外乱が加わる位置にも ε_d が依存することである。そこで、例題を通して ε_d の計算法を見ていこう。

例題 12.2

図 12.6 のフィードバック制御系について、次の問いに答えなさい。

- (1) $d_2(s) = 0$ のとき、 $d_1(s)$ から $e(s)$ までの伝達関数を求めなさい。
- (2) $d_1(s) = 0$ のとき、 $d_2(s)$ から $e(s)$ までの伝達関数を求めなさい。
- (3) $P(s)$, $C(s)$ をそれぞれ

$$P(s) = \frac{K_p}{T_p s + 1}, \quad C(s) = \frac{K_c}{T_c s + 1}$$

とする。A 点、B 点にそれぞれ単位ステップ外乱が加わったときの定常偏差を求めなさい。

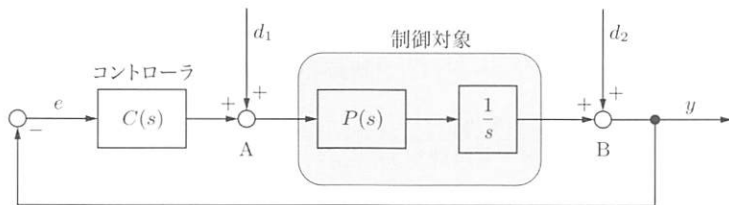


図 12.6

解答

$$(1) \frac{e(s)}{d_1(s)} = \frac{-P(s)}{s + P(s)C(s)} \quad (2) \frac{e(s)}{d_2(s)} = \frac{-s}{s + P(s)C(s)}$$

(3) まず、A 点について計算する。

$$\begin{aligned} e_a(s) &= \frac{-\frac{K_p}{T_p s + 1}}{s + \frac{K_p}{T_p s + 1} \frac{K_c}{T_c s + 1}} d_1(s) \\ &= \frac{-(T_c s + 1)K_p}{T_c T_p s^3 + (T_c + T_p)s^2 + s + K_c K_p} d_1(s) \end{aligned}$$

これより、単位ステップ外乱に対する定常偏差は、次のようになる。

$$|\varepsilon_d^{(a)}| = \lim_{s \rightarrow 0} |se_a(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{-(T_c s + 1)K_p}{T_c T_p s^3 + (T_c + T_p)s^2 + s + K_c K_p} \right| = \frac{1}{K_c}$$

したがって、A点では定常偏差が存在するので、外乱に対して0型の制御系になる。

次に、B点について計算する。

$$\begin{aligned} e_b(s) &= \frac{-s}{s + \frac{K_p}{T_p s + 1} \frac{K_c}{T_c s + 1}} d_2(s) \\ &= \frac{-s\{T_c T_p s^2 + (T_c + T_p)s + 1\}}{T_c T_p s^3 + (T_c + T_p)s^2 + s + K_c K_p} d_2(s) \end{aligned}$$

より、単位ステップ外乱に対する定常偏差は、次のようになる。

$$|\varepsilon_d^{(b)}| = \lim_{s \rightarrow 0} |se_b(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{-s\{T_c T_p s^2 + (T_c + T_p)s + 1\}}{T_c T_p s^3 + (T_c + T_p)s^2 + s + K_c K_p} \right| = 0$$

よって、B点では定常偏差が0になるので、外乱に対して1型の制御系になる。

いま、図12.6のフィードバック制御系の・巡伝達関数は

$$L(s) = \frac{K_c K_p}{s(T_c s + 1)(T_p s + 1)}$$

なので、目標値に対しては1型の制御系であるが、外乱に対しては加わる位置によって0型あるいは1型となる。一般に、外乱の加わる位置が出力側に近づく、すなわち後段になるにつれて、外乱への対応能力は向上する。 ■

12.4 内部モデル原理

これまで、目標値あるいは外乱としてステップ信号やランプ信号などを考えてきたが、それ以外の信号に対して定常偏差を0とするための条件は、内部モデル原理により与えられる。ここでは、厳密な議論を行わず、例題を通して内部モデル原理を与えよう。

例題 12.3

図 12.7 において,

$$P(s) = \frac{2}{s+1}$$

とし, 正弦波外乱 $d(t) = \sin t$ が加わるものとする. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) $C_1(s) = 1$ のときの定常偏差を調べなさい.
- (2) $C_2(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+1}$ のときの定常偏差を求め, その結果について考察しなさい.

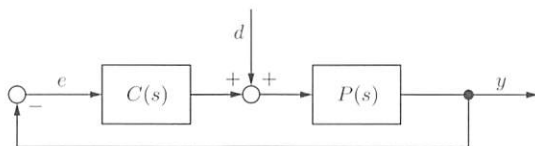


図 12.7

解答

- (1) 偏差のラプラス変換は

$$e(s) = -\frac{P(s)}{1+L(s)}d(s) = -\frac{2}{(s+3)(s^2+1)} = -\frac{0.2}{s+3} - \frac{0.6}{s^2+1} + \frac{0.2s}{s^2+1}$$

と書けるので,

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}[e(s)] = -0.2e^{-3t} - 0.6 \sin t + 0.2 \cos t, \quad t \geq 0$$

となる. $t \rightarrow \infty$ のときの定常応答は,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= -0.6 \sin t + 0.2 \cos t = \sqrt{0.4} \sin \left(t - \arctan \left(\frac{1}{3} \right) \right) \\ &= 0.6325 \sin(t - 0.3218) \end{aligned}$$

となる. このように, 定常偏差は周波数 1 の正弦波になり, 0 にはならない. 外乱が正弦波である場合には, 外乱から偏差までの伝達関数において, その正弦波の周波数におけるゲイン特性が 0 にならない限り, 周波数応答の原理から, 偏差は必ず外乱正弦波と同じ周波数成分を持つ.

(2) このときは,

$$e(s) = -\frac{2s(s+1)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = -\frac{2s}{(s+1)^2}$$

となる. ここで, 分母多項式 $(s+1)^2$ は安定多項式である. さらに, 最終値の定理を適用することにより,

$$\lim_{s \rightarrow 0} |se(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| -\frac{2s^2}{(s+1)^2} \right| = 0$$

となり, 定常偏差は 0 となる.

この場合には, 補償器 $C_2(s)$ に正弦波外乱のラプラス変換の分母多項式である $s^2 + 1$ が含まれていたため, 正弦波外乱の影響を完全に除去できた. ■

ラプラス変換が $1/s$ であるステップ目標値に対して定常偏差を 0 にするためには, 一巡伝達関数, すなわち制御対象か補償器に積分要素 ($1/s$) を一つ持つ必要があったことを思い出すと, 次の結果を得る.

❖ Point 12.3 ❖ 内部モデル原理

一巡伝達関数 $L(s) = P(s)C(s)$ に外乱信号のモデル (信号のラプラス変換の分母多項式) を含ませることによって, 定常偏差を 0 にすることができる. これを内部モデル原理 (internal model principle) という.

本章のポイント

- ▼ 目標値と外乱に対する定常偏差の計算法を習得すること.
- ▼ 制御系の型と定常偏差の関係について理解すること.
- ▼ 内部モデル原理の意味を理解すること.

Control Quiz

12.1 図 12.8 (a), (b) に示すフィードバック制御系を考える。目標値 r として単位ステップ信号、外乱 d として大きさが 0.2 のステップ信号を入力した場合の定常偏差 (ε_r と ε_d とする) を、それぞれのシステムに対して求めなさい。

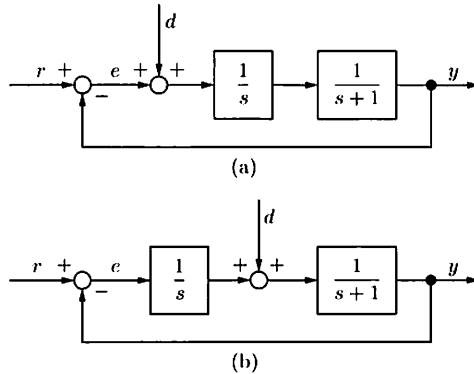


図 12.8

12.2 図 12.9 に示すフィードバック制御系について、次の問いに答えなさい。

- (1) 偏差 e を目標値 r と外乱 d の関数として表しなさい。
- (2) 目標値を 0 と仮定し、正弦波外乱 $d(t) = \sin t$ の影響のみについて考える。このとき、
 - (a) $K = 99$ のとき、定常状態において出力 $y(t)$ を表す式を導きなさい。
 - (b) $K = 0$ のとき、すなわちフィードバックが存在しないときと、 $K = 99$ のときの正弦波外乱抑制性を比較しなさい。

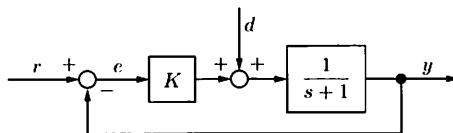


図 12.9

フィードバック制御系を設計するとき、その設計の目的、すなわち制御系設計仕様 (specifications for control systems) を明確に記述する必要がある。たとえば、「応答の速い制御系を設計したい」といった定性的な言い方では、どのような制御系を設計すべきかわからない。そこで、このような表現ではなく、たとえば「立ち上がり時間が 0.1 秒以内で、オーバーシュートが 5 % 以内のフィードバック制御系を設計したい」というような定量的な表現をする必要がある。本章では、このような制御系設計仕様の定量的な表現をまとめていこう。

13.1 開ループ特性に対する設計仕様

続く第 14 章で述べる古典制御では、開ループ特性である一巡伝達関数

$$L(s) = P(s)C(s) \quad (13.1)$$

のボード線図を用いて設計を行うことが多い。ここで、 $P(s)$ は制御対象なので既知である。このとき、 $L(s)$ の望ましいゲイン特性の形状を図 13.1 のように与える。し

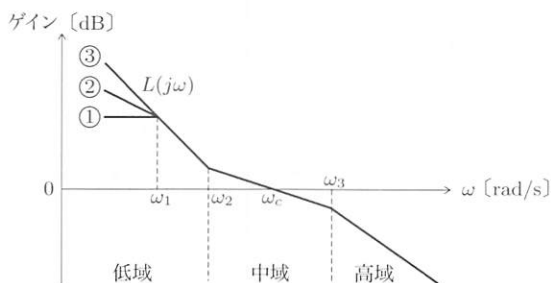


図 13.1 一巡伝達関数のゲイン特性

たがって、 $L(s)$ のゲイン特性と $P(s)$ が既知であるという仮定のもとで、コントローラ $C(s)$ を試行錯誤的に調整することによって、フィードバック制御系を設計していくことになる。この設計法は、 $|L(j\omega)|$ の形状を整形するので、ループ整形 (loop shaping) による制御系設計と呼ばれる。

式 (13.1) より、

$$C(s) = \frac{L(s)}{P(s)}$$

として、コントローラ $C(s)$ が計算できそうに思えるが、 $L(s)$ の位相特性を与えていないので、 $C(s)$ は一意には定まらず、試行錯誤に頼らざるを得ない。

さて、図 13.1 のように、古典的な制御系設計では一巡伝達関数のゲイン特性を低域、中域、高域の三つの周波数帯域に分割して考える。それぞれの帯域の役目は以下のとおりである。

- (1) 低域：定常特性を受け持つ帯域である。第 12 章で述べたように、低域におけるゲインを増加させることにより、定常特性を改善できる。また、低域におけるゲインの傾きにより、前述したように制御系は以下の三つに分類できる。

- ① 0 dB/dec：0 型の制御系
- ② -20 dB/dec：1 型の制御系
- ③ -40 dB/dec：2 型の制御系

目標値の種類に応じて、これらの制御系を使い分ける。

- (2) 中域：ゲイン特性が 0 dB と交差するゲインクロスオーバー周波数 ω_c 付近の帯域のことで、この帯域は安定性と過渡特性（すなわち速応性と減衰性）を受け持つ非常に重要な帯域である。ここで、次の点が重要である。

- 安定性：安定性を確保するために、 ω_c 付近ではゲインの傾きが -20 dB/dec となるようにする。なぜならば、ゲインの傾きが -40 dB/dec 以上あると、その周波数において位相が 180° 以上遅れてしまい、制御系が不安定になる可能性があるからである。
- 速応性： ω_c を増加させると速応性は向上する。
- 減衰性： ω_c における位相余裕を大きくすると、減衰性は向上する。

- (3) 高域：この帯域はロバスト安定性 (robust stability) を受け持つ。ロバスト安

定性とは、雑音や、モデリングされないダイナミクスなどが存在しても、閉ループシステムが不安定にならないような性質のことである。高域で雑音などの影響を受けにくくするロバスト安定性のために、ゲインの傾き（ゲインのロールオフ特性という）を $-40 \sim -60$ dB/dec にとり、ゲインの減衰量を大きくしなければならない。なお、ロバスト安定性に関しては本書のレベルを超えてしまうので、これ以上の説明は行わない。

13.2 閉ループ特性に対する設計仕様

ここでは、簡単のため、1対の複素共役根を代表特性根として、閉ループ伝達関数 $W(s)$ が2次系で近似できる場合を例にとりて考える。この場合、以下に示すさまざまな特性値（第11章参照）を用いて閉ループ制御系の過渡特性仕様を表現することが可能になる。

- (a) 極配置 (s 領域)：固有周波数 ω_n ，減衰比 ζ
- (b) ステップ応答（時間領域）：最大行き過ぎ量 O_s ，立ち上がり時間 T_r ，遅れ時間 T_d ，整定時間 T_s
- (c) 周波数応答（周波数領域）：バンド幅 ω_b ，ピークゲイン M_p

これらの特性値と設計仕様の関係を簡単にまとめておこう。

13.2.1 減衰性

閉ループシステムの減衰性を規定する特性値は、 s 領域においては減衰比 ζ ，時間領域においては最大行き過ぎ量 O_s ，周波数領域においてはピークゲイン M_p であった。これらを具体的な数値で与えることによって、設計仕様を定量的に表現することが可能になる。表13.1に、減衰性を記述する特性値の望ましい値をまとめる。

さて、第5章で述べたように、減衰比の大きさが0.707よりも大きければ、2次系は振動せず、減衰性を持っている。この減衰比を実現するためには、図13.2(a)の網掛け部分に閉ループ極を配置すればよい。なお、この領域は $\zeta = 0.707$ に対応する $\pm 45^\circ$ の直線に囲まれている。

表 13.1 閉ループシステムの減衰性を与える特性値の望ましい値

パラメータ	サーボ系 (追値制御)	プロセス制御 (定値制御)
ζ	0.6~0.8	0.2~0.4
O_s	0~0.25	
M_p	1.1~1.5 (1.3 程度)	

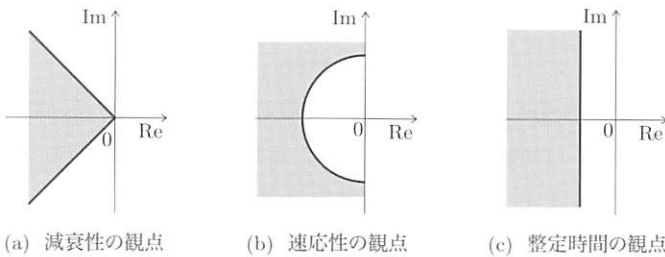


図 13.2 望ましい閉ループ極配置

13.2.2 速応性

閉ループシステムの速応性を規定する特性値は、 s 領域においては固有周波数 ω_n ，時間領域においては立ち上がり時間 T_r と遅れ時間 T_d ，周波数領域においてはバンド幅 ω_b であった。

立ち上がり時間は、 $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$ のとき、近似的に

$$T_r = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} \quad (13.2)$$

と表された。たとえば、立ち上がり時間のある値にしたいという設計仕様が与えられた場合、式 (13.2) より対応する ω_n と ζ の値を求め、それらより閉ループ極の配置を決定できる。さらに、解析を容易にするために、式 (13.2) を

$$T_r = \frac{a}{\omega_n} \quad (13.3)$$

と近似する。ただし、 a は定数である。よって、 T_r をある値より小さくするためには、図 13.2 (b) の網掛け部分に閉ループ極を配置しなければならない。

13.2.3 減衰性と速応性

整定時間は、11.2節の結果より、

$$T_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (13.4)$$

と記述できた。ここで、分母の ζ は減衰性に、 ω_n は速応性に関連する特性値であるので、整定時間は減衰性と速応性の双方に関与する。このとき、 T_s をある値より小さくするためには、図13.2 (c) の網掛け部分に閉ループ極を配置しなければならない。

以上では、設計仕様として時間領域の値を規定した場合における、時間領域の値と s 領域の極配置との関係を示した。図13.2では三つの極配置の例を与えたが、通常、そのうちの (a) と (c) を用いて、図13.3に示す場所に閉ループシステムの極配置をすることが多い。

コラム6 — 制御工学の簡単な歴史

第1章のコラム (p.18) で述べたように、近代的な制御工学は、ワットのガバナを解析したマクスウェルの論文に始まる。それ以降の制御工学の歴史を簡単にまとめておく。

- Phase 1：古典制御の時代 (19世紀～1960)

周波数領域における制御系設計法である古典制御に関する研究・開発が行われた。代表的なものは PID 制御である。

- Phase 2：現代制御の時代 (1960～1980)

カルマンによって創始された現代制御、すなわち、システムの状態空間表現に基づく制御系設計法に関する研究・開発が行われた。この方法は時間領域における設計法であり、最適レギュレータやカルマンフィルタなどが代表的な成果である。

- Phase 3：ポスト現代制御の時代 (1980～2000)

対象を記述するモデルの不確かさに着目したロバスト制御が、実用的な制御系設計法として提案され、理論と応用の両面から精力的に研究された。これは時間領域と周波数領域の双方を用いた設計法であり、代表的なものは H_∞ 最適制御である。

- Phase 4：非線形制御の時代 (2000～)

制御対象やコントローラの非線形性を考慮したさまざまな制御系設計法が研究・開発されている。代表的なものはモデル予測制御である。

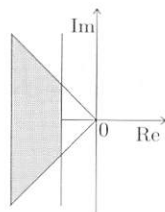


図 13.3 望ましい極配置

ここでは述べないが、時間領域の特性値を周波数領域の特性値へ変換することも可能である。大切なのは、設計仕様は時間領域、 s 領域、周波数領域で規定することができ、そしてそれらは互いに結び付いているということである。

最後に、設計仕様と特性値を表 13.2 にまとめる。

表 13.2 設計仕様と特性値

	閉ループ特性		開ループ特性
	時間特性	周波数特性	周波数特性
減衰性	O_s	M_p	G_M, P_M
速応性	T_r, T_d	ω_b, ω_n	ω_c
定常特性	$\varepsilon_p, \varepsilon_v, \varepsilon_a$		K

本章のポイント

- ▼ 制御系設計仕様を、時間領域、 s 領域、周波数領域で記述できるようになること。

Control Quiz

13.1 式 (13.3) より図 13.2 (b) を導きなさい。

13.2 式 (13.3) より図 13.2 (c) を導きなさい。

本章では、いわゆる古典制御理論によりフィードバック制御系を設計する方法を紹介する。まず、古典制御の基本である直列補償について説明する。次に、ボード線図を用いた周波数領域における設計法であるループ整形法を、具体的な例題を通して説明する。また、産業界において最もよく利用されているPID制御を紹介する。続いて、フィードバック補償の具体例としてI-PD制御を導入する。このフィードバック補償を系統的に構成するのが現代制御理論であり、古典制御から現代制御への展開について最後に述べる。

14.1 直列補償

直列補償のブロック線図を図14.1に示す。図において、 P は制御対象、 C は補償器（コントローラ）である。以下では、次の四つの直列補償法について説明する。

- (1) ゲイン補償 (gain compensation)
- (2) 位相遅れ補償 (phase lag compensation)
- (3) 位相進み補償 (phase lead compensation)
- (4) 位相進み遅れ補償 (phase lead-lag compensation)

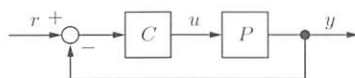


図 14.1 直列補償

14.1.1 ゲイン補償

直列補償器として、ゲイン要素

$$C(s) = K \quad (14.1)$$

を用いた場合をゲイン補償、比例制御、あるいはP制御という。ゲイン要素を用いると、図14.2に示すように、位相特性を変化させずにゲイン特性を $20\log_{10} K$ だけ上下方向に平行移動できる。このとき、

- $K > 1$ と選ぶと、ゲイン特性は上方方向に平行移動するので、ゲインクロスオーバー周波数 ω_c を高くすることができるが、それと同時に、一般には位相余裕 P_M が減少する。場合によっては、破線で示したように位相余裕 P_M が負になってしまい、不安定になる。
- $K < 1$ と選ぶと、ゲイン特性は下方方向に平行移動するので、 ω_c が低下し速応性は劣化するが、位相余裕は増加し安定性は強化される。

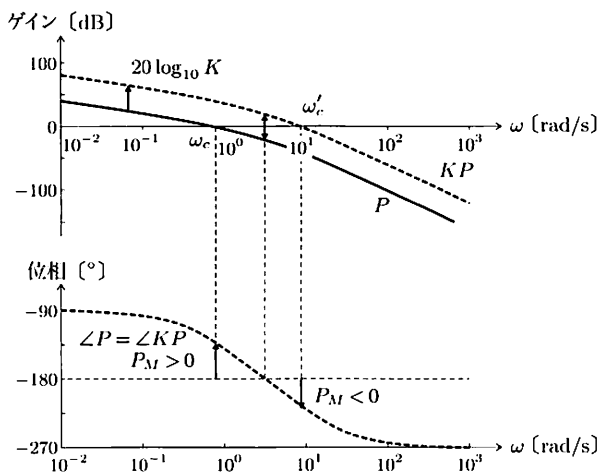


図 14.2 ゲイン補償

14.1.2 位相遅れ補償

直列補償器として、位相遅れ要素

$$C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, \quad a < 1 \quad (14.2)$$

を用いた場合を位相遅れ補償という。このボード線図を図14.3に示す。図では、 $T = 1$ 、 $a = 0.1$ とおいた。図より明らかなように、折点周波数が $1/T$ 、 $1/(aT)$ の順で並ぶ。このとき、次式で示すように、その中間の周波数 ω_m で位相遅れは最大値 ϕ_m をとる。すなわち、

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \text{ のとき, } \phi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \quad (14.3)$$

となる。また、ゲイン特性から明らかなように、位相遅れ要素は高域でゲインが $20 \log_{10} a$ [dB] 減衰する低域通過フィルタである。図の例では、 $\omega_m = 3.16$ rad/s, $\phi_m = -54.9^\circ$, $20 \log_{10} a = -20$ dB になる。

$a \ll 1$ とすると、式(14.2)は

$$C(s) \approx a + \frac{1}{Ts} \quad (14.4)$$

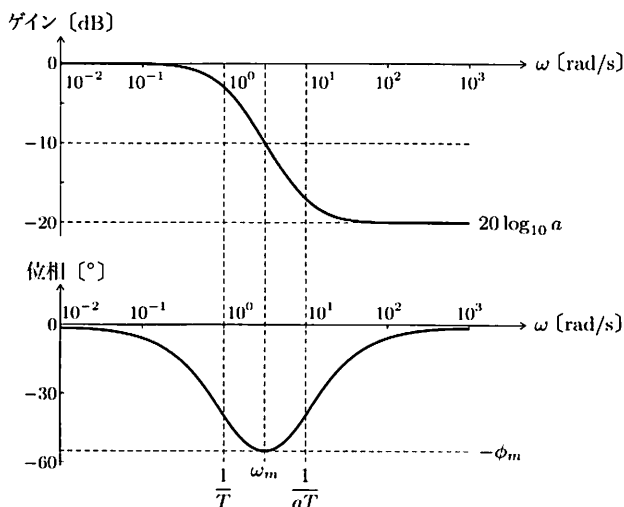


図14.3 位相遅れ補償

と近似でき、位相遅れ補償器は積分型の補償であることがわかる。これは後述するPI補償器である。

位相遅れ補償器の利用法をまとめておこう。

❖ Point 14.1 ❖ 位相遅れ補償器

位相遅れ補償器を用いると、高域と比べて低域のゲインを $-20 \log_{10} a$ [dB] 増加させることができるので、制御系の定常特性を改善できる。その代償として、低域において位相が遅れてしまうが、 -180° まで余裕があるので、制御系は不安定にならない。このように、位相遅れ補償は低域における補償である。

14.1.3 位相進み補償

直列補償器として、位相進み要素

$$C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, \quad a > 1 \quad (14.5)$$

を用いた場合を位相進み補償という。伝達関数の形は式(14.2)の位相遅れ要素と同じだが、 a の大きさが違うことに注意しよう。位相進み補償のボード線図を図14.4

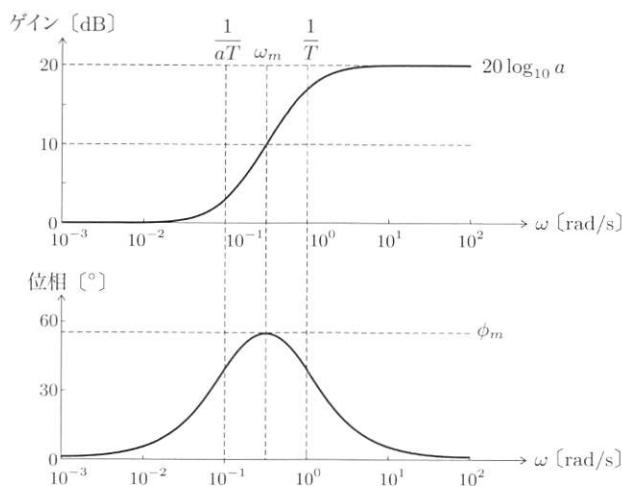


図 14.4 位相進み補償

に示す．図では， $T = 1$ ， $a = 10$ とおいた．図より明らかなように，位相遅れ要素とは逆に，折点周波数は $1/(aT)$ ， $1/T$ の順に並び，その中間の周波数 ω_m で位相進みは最大値 ϕ_m をとる．すなわち，

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \text{ のとき, } \phi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \quad (14.6)$$

となる．また，位相進み要素は，ゲイン特性から明らかなように，高域でゲインが $20 \log_{10} a$ [dB] 増加する高域通過フィルタである．図の例では， $\omega_m = 0.316 \text{ rad/s}$ ， $\phi_m = 54.9^\circ$ ， $20 \log_{10} a = 20 \text{ dB}$ になる．

さらに， $a \gg 1$ とすると，式 (14.5) は

$$C(s) \approx aTs \quad (14.7)$$

と近似でき，位相進み補償器は微分型の補償であることがわかる．これは後述する PD 補償器である．

位相進み補償器の利用法をまとめておこう．

❖ Point 14.2 ❖ 位相進み補償器

位相進み補償器によってゲインクロスオーバー周波数付近の位相を進めることにより，適当な位相余裕を確保でき，制御系の速応性を改善できる．このように，位相進み補償は中域における補償である．

14.1.4 位相進み遅れ補償

直列補償器として，位相進み遅れ要素

$$C(s) = \frac{a_1 T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{a_2 T_2 s + 1}{T_2 s + 1}, \quad a_1 < 1, a_2 > 1, T_1 > T_2 \quad (14.8)$$

を用いた場合を位相進み遅れ補償という．これは位相遅れと進み補償を組み合わせたもので，低域では位相遅れ補償，中域では位相進み補償を行う．これは後述する PID 補償に対応する．位相進み遅れ補償のボード線図を図 14.5 に示す．図では， $T_1 = 100$ ， $T_2 = 1$ ， $a_1 = 0.1$ ， $a_2 = 10$ とおいた．

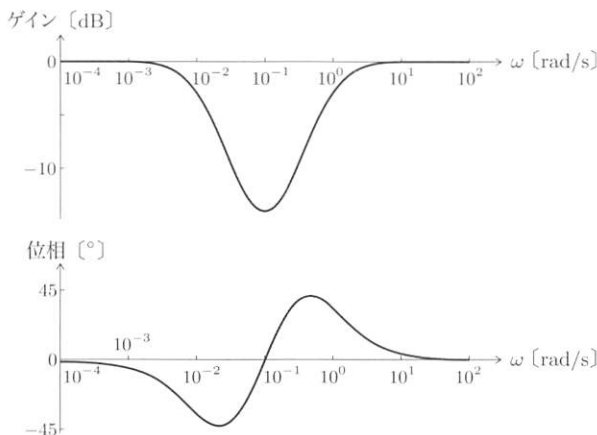


図 14.5 位相進み遅れ補償

14.2 ループ整形法による制御系設計

本節では、例題を通して、ボード線図を用いた周波数領域における制御系設計法であるループ整形法 (loop shaping method) について説明する。これは、開ループシステムの情報である一巡伝達関数 (すなわち、ループ伝達関数) の形状 (ゲイン特性と位相特性) を、補償器を適切に調整することによって整形していく方法であり、古典的なループ整形法とも呼ばれる。これに対して、 \mathcal{H}_∞ 制御などにおいて、閉ループ伝達関数の形状を直接整形する方法はアドバンスドループ整形法と呼ばれる。

例題 14.1 (ゲイン補償)

MATLAB 制御対象

$$P(s) = \frac{1}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)} \quad (14.9)$$

に対して、ゲイン補償器

$$C(s) = K \quad (14.10)$$

を直列接続し、図 14.6 の制御系を構成する。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) この制御系の一巡伝達関数 $L(s)$ を求めなさい。

- (2) $K = 1$ のときの $L(s)$ のボード線図を描き、ゲイン余裕と位相余裕を読み取りなさい。
- (3) 位相余裕が 40° になるように、ゲイン要素 K の値を調整しなさい。
- (4) 閉ループ系が安定になるための K の範囲を求めなさい。
- (5) $K = 1$ のとき、この制御系の定常位置偏差 ε_p を求めなさい。
- (6) この制御系の定常速度偏差 ε_v が 0.1 以下になるような K の範囲を求めなさい。

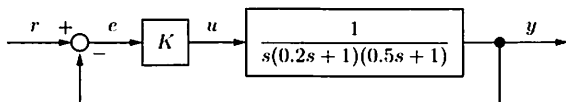


図 14.6

解答

$$(1) L(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)} = \frac{1}{0.1s^3 + 0.7s^2 + s}$$

(2) $L(s)$ を積分器と二つの1次遅れ系

$$\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{0.2s+1}, \quad \frac{1}{0.5s+1}$$

に分割し、折線近似法を用いてそれぞれのボード線図を描き、ボード線図上で足し合わせるにより作図できる。MATLAB を用いて作図したボード線図を図 14.7 に示す。図より、ゲイン余裕 $G_M = 16.9$ dB、位相余裕 $P_M = 55.6^\circ$ である。

- (3) ボード線図より、 $\omega = 1.4$ rad/s のとき位相は -140° であり、これは $P_M = 40^\circ$ に対応する。そのときのゲインは -4.85 dB なので、その分だけゲイン特性を上へ平行移動すればよい。そのときのゲイン K は

$$20 \log_{10} K = 4.85 \quad \rightarrow \quad K = 1.75$$

となる。 $K = 1.75$ とした場合の $L(s)$ のボード線図を図 14.8 に示す。図より、位相余裕は $P_M = 39.8^\circ$ である。

- (4) $1 + L(s) = 0$ より、特性方程式は、

$$0.1s^3 + 0.7s^2 + s + K = 0$$

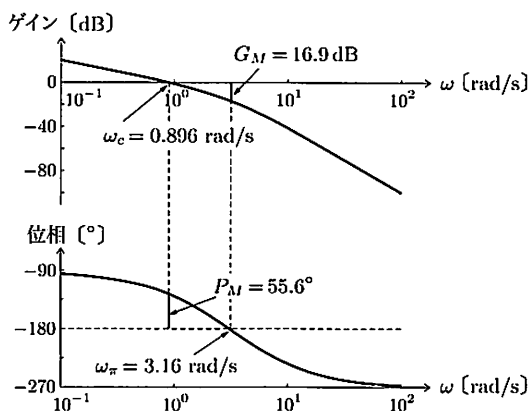


図 14.7

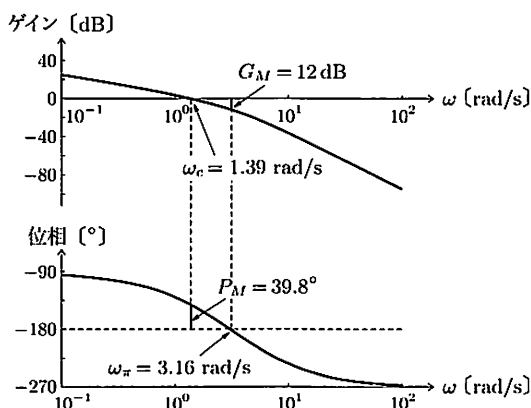


図 14.8

となり、ラウスの安定判別法を適用することにより $0 < K < 7$ を得る。

(5) この制御系は1型なので、 K の値にかかわらず $\varepsilon_p = 0$ である。

(6) 定常速度偏差 ε_v は、次のように計算できる。

$$\varepsilon_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)}} \frac{1}{s} = \frac{1}{K} \leq 0.1$$

よって、 $K \geq 10$ となる。

■

いま、次の設計仕様Iを与える。

【設計仕様 I】

- (1) 閉ループ系は安定で、位相余裕は $P_M = 40^\circ$
- (2) 定常速度偏差は $\varepsilon_v \leq 0.1$

例題 14.1 の結果 (4) と (6) より、式 (14.9) の制御対象に対して、この設計仕様Iを満足する制御系をゲイン補償だけでは達成できないことがわかる。

そこで、次の例題では、位相遅れ要素を用いてこの設計仕様Iを満たす制御系を構成しよう。

例題 14.2 (位相遅れ補償)

MATLAB 式 (14.9) の制御対象に対して、ゲイン要素 K と位相遅れ要素

$$C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, \quad a < 1 \quad (14.11)$$

からなる補償器を直列接続し、制御系を構成する。このとき、前述した設計仕様Iを満たすように K, T, a を調整しなさい。

解答 次の手順で設計を行う。

Step 1: 例題 14.1 (6) より、定常速度偏差が 0.1 以下となるための条件は $K \geq 10$ なので、 $K = 10$ とする。すなわち、

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)}$$

とおき、これを新たな制御対象とする。

Step 2: $G(s)$ のボード線図は図 14.9 のようになる。図より、位相余裕は $P_M = -8.89^\circ$ (ゲインクロスオーバー周波数は $\omega'_c = 3.76 \text{ rad/s}$) となり、閉ループ系は不安定になっている。

Step 3: 位相遅れ補償器を設計する。

- (1) 安全性を考慮して、設計仕様 $P_M = 40^\circ$ より 5° 大きい $P_M = 45^\circ$ とする。そこで、位相が $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$ となる周波数を図 14.9 の

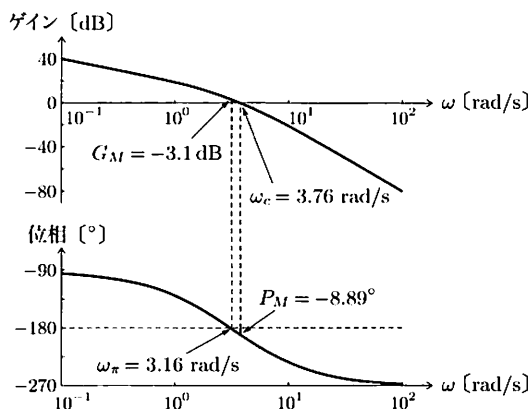


図 14.9

位相線図より見つけると, $\omega_c = 1.2 \text{ rad/s}$ となる. これが位相遅れ補償後のゲインクロスオーバー周波数になる.

- (2) $\omega_c = 1.2 \text{ rad/s}$ で一巡伝達関数 $L(s) = G(s)C(s)$ のゲインが 0 dB となるように, 位相遅れ補償器 $C(s) = (aTs + 1)/(Ts + 1)$ のパラメータ a を調整する. そのために, $\omega_c = 1.2 \text{ rad/s}$ における $G(j\omega)$ のゲインを計算すると,

$$|G(j1.2)| = 16.8 \text{ dB}$$

となる. これより, 位相遅れ要素の高域におけるゲインが -16.8 dB となるように, a を決定すればよい. すなわち,

$$20 \log_{10} a = -16.8 \quad \rightarrow \quad a = 0.145$$

- (3) 位相遅れ要素のカットオフ周波数 $1/(aT)$ は, 通常 ω_c の $1/10$ 程度に選ばれる. そこで, $1/10$ として, $1/(aT) = 0.12$ とする. すると, 次式により T が決定される.

$$aT = \frac{1}{0.12} \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{0.12 \cdot 0.145} = 57.5$$

以上より, 位相遅れ要素の伝達関数は

$$C(s) = \frac{8.33s + 1}{57.5s + 1} \quad (14.12)$$

となる. 図 14.10 に, 制御対象 $G(s)$ (実線) と設計された位相遅れ補

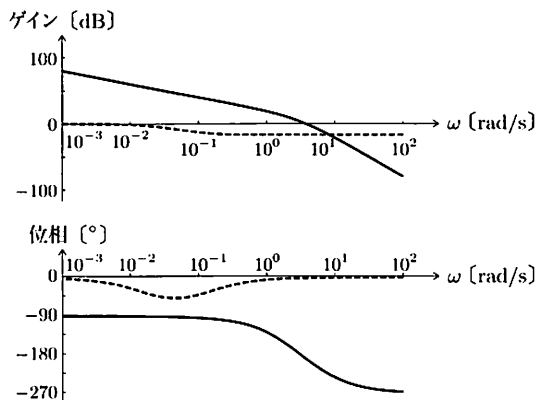


図 14.10

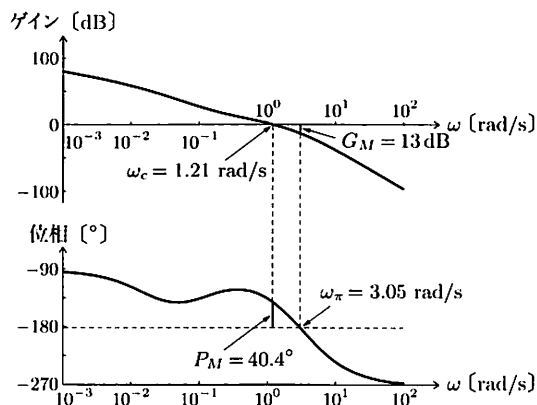


図 14.11

償器 $C(s)$ (破線) のボード線図を示す。

Step 4: 設計された制御系を確認する。一巡伝達関数 $L(s)$ は

$$L(s) = \frac{10(8.33s + 1)}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)(57.5s + 1)} \quad (14.13)$$

となる。このボード線図を図 14.11 に示す。図より、位相余裕は $P_M = 40.4^\circ$ であり、設計仕様を満たしていることがわかる。また、 $K = 10$ なので、 $\varepsilon_v = 0.1$ であり、定常特性の仕様も満足している。 ■

この例題から、位相遅れ補償器を用いることにより、低域のゲインを高域のゲインより大きくすることができるので、安定余裕を保ちつつ定常特性を改善できることが確認できた。

しかしながら、 $\omega_c = 1.2 \text{ rad/s}$ であった。制御系の速応性を向上させるためには、この ω_c を高くしなければならない。そこで、次の設計仕様 II を考えよう。

【設計仕様 II】

- (1) 閉ループ系は安定で、位相余裕は $P_M = 40^\circ$
- (2) ゲインクロスオーバー周波数は $\omega_c = 3.7 \text{ rad/s}$

次の例題では、位相進み要素を用いてこの設計仕様 II を満たす制御系を構成する。

例題 14.3 (位相進み補償)

MATLAB 式 (14.9) の制御対象に対して、ゲイン要素 K と位相進み要素

$$C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, \quad a > 1 \quad (14.14)$$

からなる補償器を直列接続し、制御系を構成する。このとき、前述した設計仕様 II を満たすように K, T, a を調整しなさい。

解答 次の手順で設計を行う。

Step 1: 例題 14.2 において、 $\omega_c = 3.7 \text{ rad/s}$ をゲイン補償だけで実現するためには、 $K = 10$ とすればよいが、そのとき $P_M = -8.89^\circ$ となり、不安定となってしまった。そこで、 $K = 10$ とした場合に対して、位相進み要素を用いて ω_c 付近の位相を進ませて位相余裕を確保する。そのために、 $\omega_c = 3.7 \text{ rad/s}$ 付近で、位相を $40^\circ + 8.89^\circ \approx 50^\circ$ 進ませよう。 $\phi_m = 50^\circ$ として、式 (14.6) を解くと、次式が得られる。

$$\sin \phi_m = \sin 50^\circ = 0.766 = \frac{a-1}{a+1} \quad \longrightarrow \quad a = 7.549$$

次に、 $\omega_m = 3.7$ とおくと、

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = 0.09837$$

となる。以上より、位相進み要素の伝達関数は次式となる。

$$C(s) = \frac{0.7426s + 1}{0.09837s + 1} \quad (14.15)$$

図14.12に、 $K = 10$ としたときの制御対象 $G(s)$ (実線) と位相進み補償器 $C(s)$ (破線) のボード線図を示す。

Step 2: 位相進み要素を用いた一巡伝達関数

$$L(s) = \frac{10(0.7426s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.2s + 1)(0.09837s + 1)}$$

のボード線図を図14.13に示す。図より、新たなゲインクロスオーバー周波数は 6.98 rad/s であり、 $\omega_c = 3.7 \text{ rad/s}$ ではゲインは約 9 dB なので、ゲイン補償により 9 dB ゲインを下げればよいことがわかる。

$$-9 = 20 \log_{10} \frac{K}{10} \quad \rightarrow \quad K = 3.55$$

よって、一巡伝達関数は次式となる。

$$L(s) = \frac{3.55(0.7426s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.2s + 1)(0.09837s + 1)} \quad (14.16)$$

ボード線図を図14.14に示す。図より、 $\omega_c = 3.72 \text{ rad/s}$ 、 $P_M = 41.6^\circ$ であり、設計仕様IIを達成していることがわかる。 ■

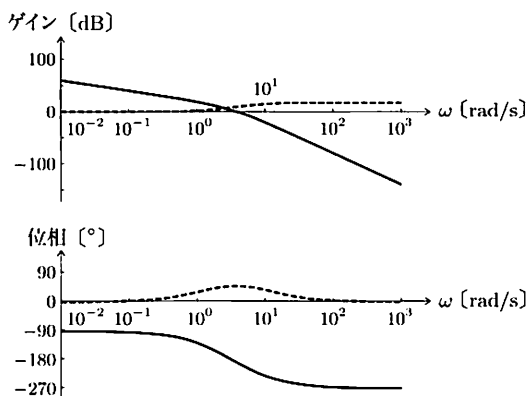


図 14.12

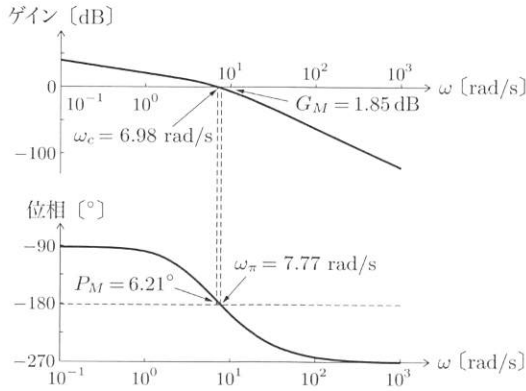


図 14.13

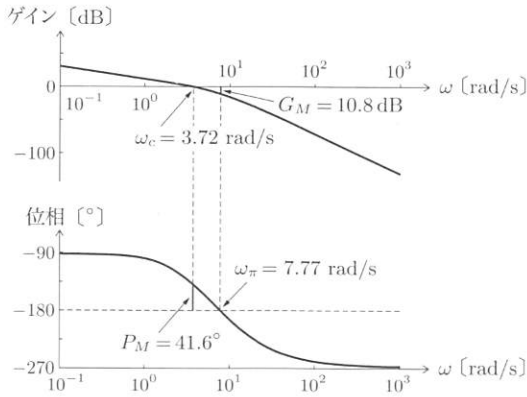


図 14.14

最後に、次の設計仕様 III を考えよう.

【設計仕様 III】

- (1) 閉ループ系は安定で、位相余裕は $P_M = 40^\circ$
- (2) ゲインクロスオーバー周波数は $\omega_c = 3.7$ rad/s
- (3) 定常速度偏差は $\varepsilon_v \leq 0.1$

この設計仕様 III を達成するために、位相進み遅れ補償を用いて、低域の定常特性と中域の速応性を同時に改善しよう。

例題 14.4 (位相進み遅れ補償)

MATLAB 式 (14.9) の制御対象に対して、次の問いに答えなさい。

- (1) 例題 14.2 で設計した式 (14.12) の位相遅れ要素と例題 14.3 で設計した式 (14.15) の位相進み要素を適用し、ゲイン K を適切に調整することにより、設計仕様 III を満たす制御系を設計しなさい。
- (2) 得られたフィードバック制御系のブロック線図を描きなさい。
- (3) 速応性、減衰性、定常特性などの観点から、位相進み遅れ補償の効果について考察しなさい。

解答

- (1) $\omega_c = 3.7 \text{ rad/s}$ となるように K を調整すると、 $K = 25$ となる。このとき、図 14.15 のボード線図が得られる。図より、設計仕様 III の (1), (2) が達成されていることは明らかである。また、定常速度偏差は $1/25 = 0.04$ となり、これも満たしている。
- (2) 得られたフィードバック制御系のブロック線図を図 14.16 に示す。

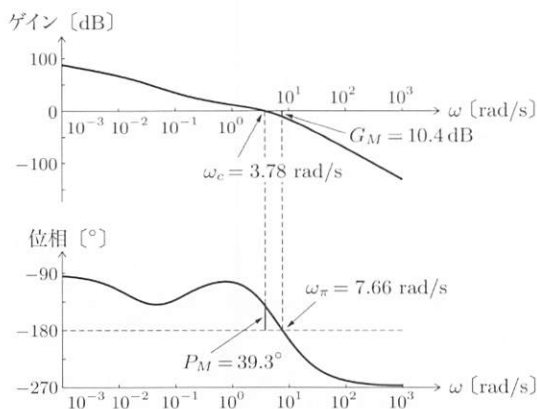


図 14.15

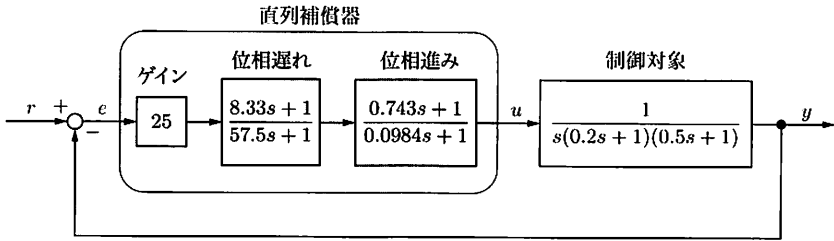


図 14.16

(3) 補償前と補償後の特性値を表 14.1 にまとめる。表より、減衰性を特徴付ける安定余裕の値は、補償前のほうが補償後よりやや大きいが、補償後の値でも安定余裕は十分確保されており、問題はない。次に、一巡伝達関数のゲインクロスオーバー周波数 (ω_c) で速応性を評価すると、補償後は補償前の約 4.2 倍になっている。最後に、定常特性について定常ゲイン (K) で比較すると、補償後は補償前の 25 倍まで改善されている。以上より、位相進み遅れ補償を施すことで、減衰性を劣化させることなく、速応性を約 4.2 倍、定常特性を 25 倍改善することができた。

表 14.1 位相進み遅れ補償による特性値の変化

特性値		補償前	補償後
減衰性	G_M [dB]	16.9	10.4
	P_M [°]	55.6	39.3
速応性	ω_c [rad/s]	0.898	3.78
定常特性	K	1	25

14.3 PID 制御

さまざまなフィードバック制御系設計法が提案されているが、その中で実用に供しているものの約 80 % 以上が、本節で述べる PID 制御であると言われている。特に、温度、圧力、流量などを一定に保つ定値制御、すなわちレギュレーション (regulation)

を目的とし、外乱抑制に重点が置かれる化学工学、製鉄などのプロセス制御の分野では、対象のモデリングが困難であるため、PID 制御を用いる場合が多い。

14.3.1 PID 補償器の構造

制御対象に PID 補償器を直列接続したブロック線図を図 14.17 に示す。図より、PID 補償器の伝達関数 $C(s)$ は、

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (14.17)$$

で与えられる。ここで、 K_P は比例ゲイン、 T_I は積分時間、 T_D は微分時間と呼ばれる。このように、PID 補償器では、偏差 e に比例 (proportional) 動作、積分 (integral) 動作、微分 (derivative) 動作を並列に施して、操作量 u を生成するので、それぞれの頭文字をとって PID と略記される。

PID 補償の一部として、次に示す P 補償、PI 補償、PD 補償などがある。

- P 補償: K_P
- PI 補償: $K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$
- PD 補償: $K_P (1 + T_D s)$

ここで、P 補償はゲイン補償に、PI 補償は位相遅れ補償に、PD 補償は位相進み補償に、そして PID 補償は位相進み遅れ補償に対応する。

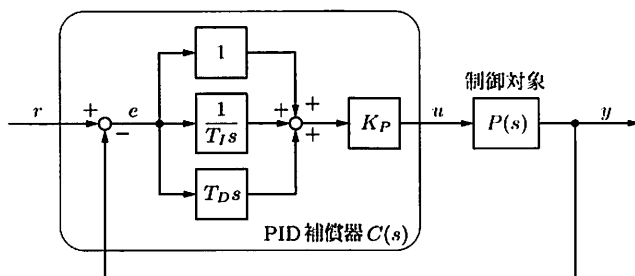


図 14.17 PID 補償器の構造

14.3.2 PID 補償器の設計法

PID 補償器は式 (14.17) で示したように、三つの制御パラメータから構成される比較的単純なコントローラである。PID 補償器を利用する場合、次に行うべきことは、この三つの制御パラメータ $\{K_P, T_I, T_D\}$ を決定することである。これまで、限界感度法や過渡応答法などさまざまな PID パラメータの決定法が提案されているが、それらは制御パラメータを直接チューニング（調節）する方法であった。制御対象のモデリングが困難な場合には、このようなチューニングに頼らざるを得ないが、本書では、制御対象の部分的なモデルに基づいた制御パラメータ決定法である参照モデル法を紹介する。

図 14.18 において、制御対象 $P(s)$ に対して与えられた設計仕様を達成するように、PID 補償器 $C(s)$ を設計することが制御系設計問題である。参照モデル法では、参照モデル（reference model） $R_M(s)$ を導入し、制御量 $y(t)$ ができるだけ参照モデルの出力 $y_M(t)$ に一致するように PID 補償器 $C(s)$ のパラメータを調整する。

参照モデルとは、制御対象の望ましい応答特性を規定するモデルのことであり、その伝達関数を

$$R_M(s) = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 \sigma s + \alpha_2 (\sigma s)^2 + \cdots} = \frac{1}{\alpha(s)} \quad (14.18)$$

とする。ここで、 σ は応答時間に関するパラメータである。また、参照モデルの係数 $\{\alpha_i\}$ としては、北森 [5] により提案された

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots\} = \{1, 1, 0.5, 0.15, 0.03, 0.003, \dots\} \quad (14.19)$$

が有名であり、本書ではこれを利用する。

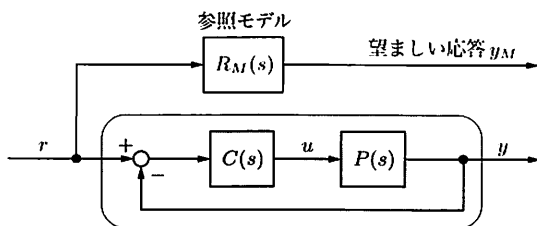


図 14.18 参照モデル法

この係数を利用し、 σ の値を 1, 5, 10 と変化させて参照モデルのステップ応答を描いたものを図 14.19 に示す。図より σ は時間スケールを制御するパラメータであることがわかる。なお、式 (14.18) のように、分母のみに係数を持つ表現を分母系列表現という。

次に、制御対象 $P(s)$ も

$$P(s) = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots} = \frac{1}{\beta(s)} \quad (14.20)$$

のように分母系列表現する。たとえば、制御対象が

$$P(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+3}$$

のように記述されている場合には、分子分母を $s+3$ で割れば、分母系列表現

$$P(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}s + \frac{2}{9}s^2 + \cdots}$$

が導かれる。さらに、PID 補償器の伝達関数 $C(s)$ を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} C(s) &= K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \frac{K_P/T_I + K_P s + K_P T_D s^2}{s} \\ &= \frac{\gamma_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 s^2}{s} = \frac{\gamma(s)}{s} \end{aligned} \quad (14.21)$$

以上の準備のもとで、図 14.18 において r から y までの閉ループ伝達関数は、

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{1}{1 + s \frac{\beta(s)}{\gamma(s)}} \quad (14.22)$$

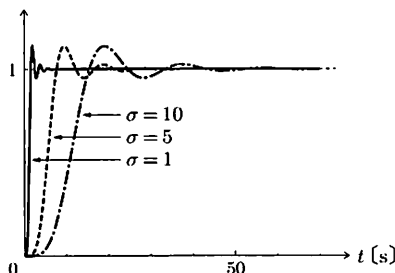


図 14.19 σ の値とステップ応答波形の関係

であり、これが参照モデル $R_M(s)$ と等しくなるように、多項式 $\gamma(s)$ の係数を決定することになる。すなわち、

$$\frac{1}{1 + s \frac{\beta(s)}{\gamma(s)}} = \frac{1}{\alpha(s)}$$

となる。簡単な式変形より、

$$\gamma(s) = \frac{s\beta(s)}{\alpha(s) - 1} \quad (14.23)$$

が得られる。式 (14.23) 右辺を割り算し、 s に関する昇べきの順で並べ、左辺と係数比較すると、次の式が得られる。

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0}{\sigma} \quad (14.24)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sigma}(\beta_1 - \sigma\alpha_2\beta_0) \quad (14.25)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sigma}\{\beta_2 - \sigma\alpha_2\beta_1 + \sigma^2(\alpha_2^2 - \alpha_3)\beta_0\} \quad (14.26)$$

$$0 = \frac{1}{\sigma}\{\beta_3 - \sigma\alpha_2\beta_2 + \sigma^2(\alpha_2^2 - \alpha_3)\beta_1 + \sigma^3(2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^3 - \alpha_4)\beta_0\} \quad (14.27)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

補償器の構造が複雑ならば、すなわち、制御パラメータを多数有していれば、これらの式が多数存在するが、今は PID 補償器を用いているので制御パラメータは3個だけであり、式 (14.24) ~ (14.26) が得られた。これらより、 γ_0 から γ_2 が計算できる。また、4番目の式 (式 (14.27)) より、時間に関するパラメータ σ を決定する。式 (14.27) は σ に関する3次方程式

$$(2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^3 - \alpha_4)\beta_0\sigma^3 + (\alpha_2^2 - \alpha_3)\beta_1\sigma^2 - \alpha_2\beta_2\sigma + \beta_3 = 0 \quad (14.28)$$

となるが、得られた三つの根のうち、正の実数のうちで最も小さい値を σ として採用する。

ここで紹介した参照モデル法では、すべての係数を適合しているのではなく、 s に関して低次の項だけを適合していることに注意する。このような方法を部分的モデルマッチング法という。

例題 14.5

MATLAB 例題 14.1 で利用した制御対象

$$P(s) = \frac{1}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)} \quad (14.29)$$

に対して、次の問いに答えなさい。

- (1) 参照モデル法を用いて PID 補償器を設計しなさい。
- (2) 参照モデル法を用いて PI 補償器を設計しなさい。
- (3) (1), (2) により得られた制御系のステップ応答をそれぞれ図示し、それらについて考察しなさい。
- (4) (1), (2) により得られた制御系の一巡伝達関数を図示し、それらより、制御系の速応性と減衰性を求めなさい。

解答

- (1) 制御対象は

$$P(s) = \frac{1}{s + 0.7s^2 + 0.1s^3}$$

であるので、最初から分母系列表現されている。これより、 $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.7$, $\beta_3 = 0.1$ である。まず、式 (14.28) より σ を計算する。この例では、式 (14.28) は 2 次方程式

$$(0.5^2 - 0.15)\sigma^2 - 0.5 \cdot 0.7\sigma + 0.1 = 0$$

となるので、これを解いて 2 実根 $\sigma = 0.314, 3.19$ を得る。このうちの小さいほうの正数 0.314 を σ として用いる。次に、式 (14.24) ~ (14.26) に $\sigma = 0.314$ を代入すると、 $\gamma_1 = 3.19$, $\gamma_2 = 1.73$ が得られる。したがって、設計された補償器は、

$$C(s) = \frac{3.19s + 1.73s^2}{s} = 3.19 + 1.73s$$

となり、結果的に PD 補償器が得られた。この例では制御対象に積分要素が含まれていたため、I 動作の設計は必要なかった。

(2) PI 補償器は

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{\frac{K_P}{T_I} + K_P s}{s} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 s}{s} \quad (14.30)$$

であるので, $\gamma_2 = 0$ となる. よって, 式 (14.24), (14.25) より γ_0, γ_1 を決定でき, さらに式 (14.26) を 0 とおくことにより σ を決定できる. すなわち,

$$\beta_0(\alpha_2^2 - \alpha_3)\sigma^2 - \alpha_2\beta_1\sigma + \beta_2 = 0$$

となり, これに数値を代入すると, $\sigma = 1.4$ が得られる. さらに, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0.714$ となるので, 設計された補償器は

$$C(s) = 0.714$$

となり, 結果的に P 補償器が得られた.

(3) 得られた制御系のステップ応答を図 14.20 に示す. 実線が PID 補償, 破線が PI 補償に対する閉ループシステムのステップ応答である.

(4) PI 補償, PID 補償を施した場合の一巡伝達関数はそれぞれ次のようになる.

$$L_{PI}(s) = \frac{0.714}{s(0.1s^2 + 0.7s + 1)} \quad (14.31)$$

$$L_{PID}(s) = \frac{1.73s + 3.19}{s(0.1s^2 + 0.7s + 1)} \quad (14.32)$$

これらの周波数特性を図 14.21 に示す. また, それぞれの制御系の減衰性, 速応性, 定常特性を表 14.2 にまとめる. ■

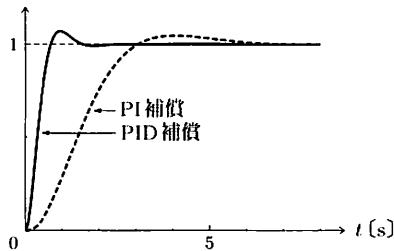


図 14.20

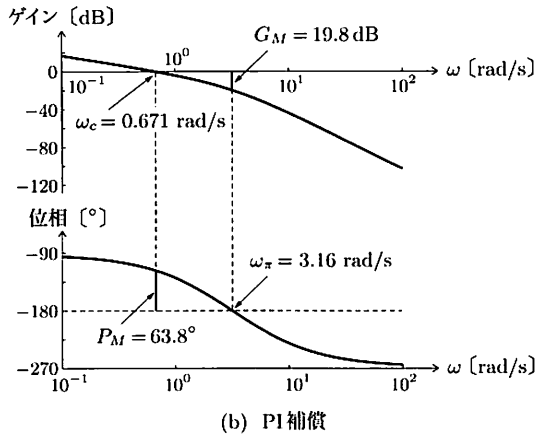
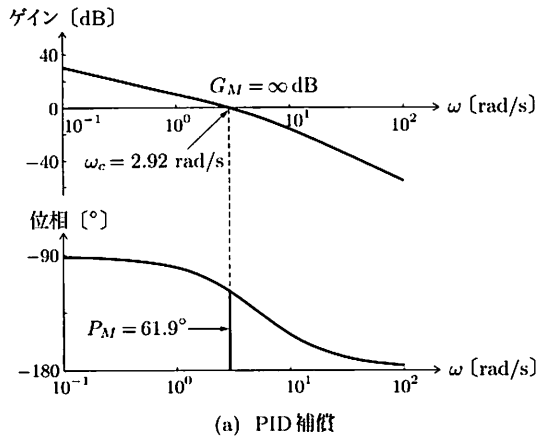


図 14.21

表 14.2 PI, PID 補償による特性値の変化

特性値		補償前	PI 補償後	PID 補償後
減衰性	G_M [dB]	16.9	19.8	∞
	P_M [°]	55.6	63.8	61.9
速応性	ω_{gc} [rad/s]	0.898	0.671	2.92
定常特性	K	1	0.714	3.19

補償前：制御対象に直結フィードバックを施した状態

この例では、PI 補償は単に P 補償で、さらにゲイン K が 1 より小さいので、単なる直結フィードバックより制御性能は劣化した。一方、PID 補償（実質的には PD 補償）では、直結フィードバックと比べて速応性、定常特性ともに約 3 倍向上した。さらに、一巡伝達関数の相対次数が 2 なので、高域において位相は -180° より小さくならず、ゲイン余裕は $G_M = \infty$ となる。

14.4 フィードバック補償

14.4.1 速度フィードバック

図 14.22 に示す DC サーボモータ（4.3 節参照）を用いて、速度フィードバックについて考えていこう。

この DC サーボモータの伝達関数は、次式で与えられる。

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (14.33)$$

まず、図に示したように角変位 θ をフィードバックし、ゲイン K の P 制御を施すと、一巡伝達関数は、

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (14.34)$$

となり、 r から y までの閉ループ伝達関数は、

$$W(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K} \quad (14.35)$$

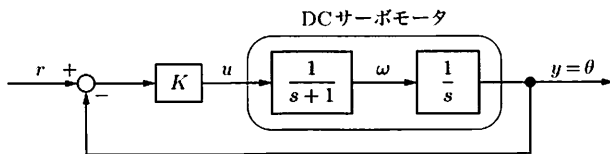


図 14.22 DC サーボモータ（位置フィードバック）

となる。図14.22は、位置情報に対応する角変位をフィードバックしているので、位置フィードバック (position feedback) と呼ばれる。

さて、2次遅れ系の標準形

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (14.36)$$

と式(14.33)の制御対象を比較すると、制御対象では ω_n^2 に対応する項が0である。これは制御対象が無定位系 (あるいは不安定) であることを意味している。次に、位置フィードバックを施すことにより得られた式(14.35)と2次遅れ系の標準形を比較すると、

$$2\zeta\omega_n = 1, \quad \omega_n^2 = K$$

が得られ、これより、

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{K}} \quad (14.37)$$

となる。よって、 $\omega_n > 0$, $\zeta > 0$ となり、安定化されていることがわかる。

次に、速度情報である角速度 $\omega = \dot{\theta}$ をさらにフィードバックすることは速度フィードバック (velocity feedback) と呼ばれ、その結果、図14.23が得られる。図において、速度フィードバックループはマイナーフィードバックループ (minor feedback loop) と呼ばれる。このブロック線図を変形すると、図14.24が得られる。図14.24(a)において、

$$T' = \frac{1}{1+f}, \quad K' = \frac{1}{1+f}$$

である。図14.24 (b) より、閉ループ伝達関数は次式となる。

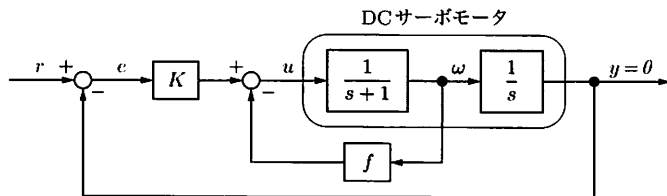


図14.23 DC サーボモータ (位置フィードバックと速度フィードバック)

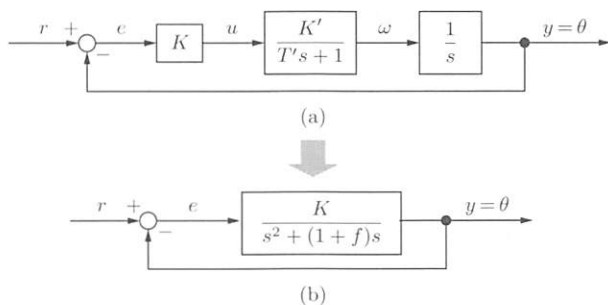


図 14.24 速度フィードバックの効果

$$W(s) = \frac{K}{s^2 + (1+f)s + K} \quad (14.38)$$

先ほどと同様に式 (14.36) の 2 次遅れ系の標準形と比較すると、

$$2\zeta\omega_n = 1 + f, \quad \omega_n^2 = K$$

が得られ、これより、

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad \zeta = \frac{1+f}{2\sqrt{K}} \quad (14.39)$$

となる。よって、速度フィードバックを施すことにより、減衰比が位置フィードバックのみのときの $1/2\sqrt{K}$ から $(1+f)/2\sqrt{K}$ に増加し、減衰性が向上していることがわかる。

例題 14.6

図 14.23 のフィードバック制御系において、次の設計仕様を達成するように K, f を定めなさい。

- (1) 定常速度偏差 $\varepsilon_v = 0.1$
- (2) 閉ループ系の減衰比 $\zeta = 0.5$

解答 まず、仕様 (1) について計算すると、

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \frac{1+f}{K} = 0.1$$

となる。次に、仕様(2)は式(14.39)を利用すると、

$$\zeta = \frac{1+f}{2\sqrt{K}} = 0.5$$

となり、これらの式より、 $K = 100$ 、 $f = 9$ を得る。 ■

14.4.2 I-PD制御

図14.25にフィードバック補償の一つであるI-PD制御系の構成を示す。図において、網掛け部分がI-PD補償器である。ここで、 K/s が積分器(I動作)であり、

$$F(s) = f_0 + f_1 s \quad (14.40)$$

である。また、

$$F(s) = f_0 \quad (14.41)$$

と選べば、I-P補償器になる。I-PD補償器の場合、出力を微分した量をフィードバックしており、これは前項で説明した速度フィードバックに対応する。

一般的に扱うため、

$$F(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \cdots \quad (14.42)$$

として、図14.25の r から y までの閉ループ伝達関数 $W(s)$ を計算すると、

$$W(s) = \frac{\frac{KP(s)}{s}}{1 + P(s) \left(\frac{K}{s} + f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \cdots \right)} \quad (14.43)$$

となる。

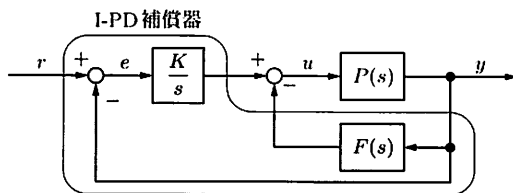


図14.25 I-PD 制御系

以下では、参照モデル法を用いて I-PD パラメータを決定する方法¹を与えよう。
制御対象 $P(s)$ を

$$P(s) = \frac{1}{\beta(s)} = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \dots}$$

のように分母系列表現すると、式 (14.43) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{1 + \frac{s}{K} \{\beta(s) + F(s)\}} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta_0 + f_0}{K}\right)s + \left(\frac{\beta_1 + f_1}{K}\right)s^2 + \left(\frac{\beta_2 + f_2}{K}\right)s^3 + \dots} \end{aligned} \quad (14.44)$$

PID 補償の場合と比べると、上式は見通しの良い形になっている。

式 (14.44) が、参照モデル $R_M(s) = 1/\alpha(s)$ と一致するように補償器の係数 f_0, f_1, \dots を決定すればよい。すなわち、

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{\beta_0 + f_0}{K}\right)s + \left(\frac{\beta_1 + f_1}{K}\right)s^2 + \left(\frac{\beta_2 + f_2}{K}\right)s^3 + \dots \\ = 1 + \alpha_1 \sigma s + \alpha_2 (\sigma s)^2 + \alpha_3 (\sigma s)^3 + \dots \end{aligned} \quad (14.45)$$

となり、これより、I-PD 補償の場合 (f_0, f_1 のみが存在する場合) のパラメータは、式 (14.45) の係数比較を行うことにより、以下のように得られる。

$$\sigma = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_2} \quad (14.46)$$

$$K = \frac{\beta_2}{\alpha_3 \sigma^3} \quad (14.47)$$

$$f_0 = K \alpha_1 \sigma - \beta_0 \quad (14.48)$$

$$f_1 = K \alpha_2 \sigma^2 - \beta_1 \quad (14.49)$$

参照モデル法を用いると、このような簡単な代数計算により I-PD 補償の制御パラメータを計算できる。

さて、I-PD 補償器は図 14.26 のように変形することができる。図より、I-PD 補償器は、

¹ この設計法は北森 [5] によって提案されたので北森法とも呼ばれる。

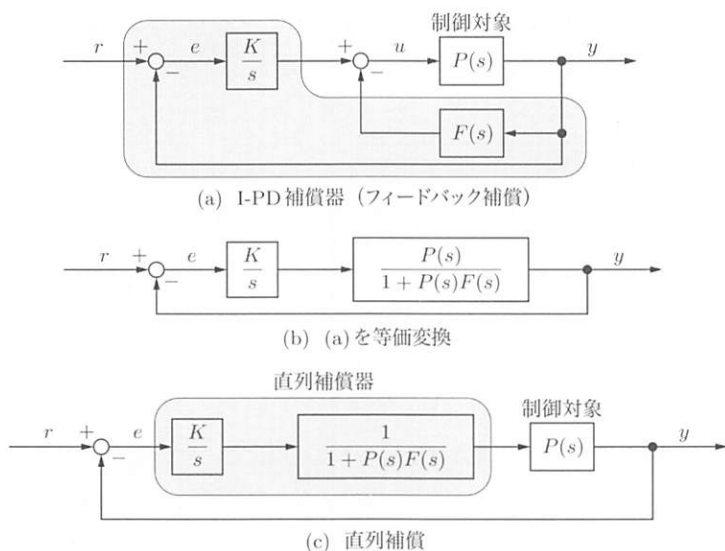


図 14.26 I-PD 補償器の直列補償としての解釈

$$C(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{1 + P(s)F(s)}$$

とおいた直列補償に相当する。

例題 14.7

MATLAB 例題 14.5 の制御対象に対して、次の問いに答えなさい。

- (1) 参照モデル法を用いて I-PD 補償器を設計しなさい。
- (2) 参照モデル法を用いて I-P 補償器を設計しなさい。
- (3) (1), (2) により得られた制御系のステップ応答をそれぞれ図示しなさい。

解答

- (1) 制御対象の分母系列表現は $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.7$, $\beta_3 = 0.1$ であり、参照モデルは $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha_3 = 0.15$, $\alpha_4 = 0.03$ なので、これらを式 (14.46) ~ (14.49) に代入することにより $\sigma = 0.714$, $K = 12.8$, $f_0 = 9.14$, $f_1 = 2.27$ を得る。

- (2) I-P 補償の場合には、 K, f_0, σ を決定すればよいので、次の3式を利用すればよい。

$$\frac{\beta_0 + f_0}{K} = \alpha_1 \sigma, \quad \frac{\beta_1}{K} = \alpha_2 \sigma^2, \quad \frac{\beta_2}{K} = \alpha_3 \sigma^3$$

これらより、次の式を得る。

$$\sigma = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} = 2.33, \quad K = \frac{\beta_1}{\alpha_2 \sigma^2} = 0.367, \quad f_0 = K \alpha_1 \sigma - \beta_0 = 0.857$$

- (3) 得られた制御系のステップ応答を図14.27に示す。実線がI-PD補償、一点鎖線がI-P補償、そして破線が制御対象のステップ応答である。I-PD制御を用いることにより、過渡特性と定常特性の両面において優れた制御系が得られた。

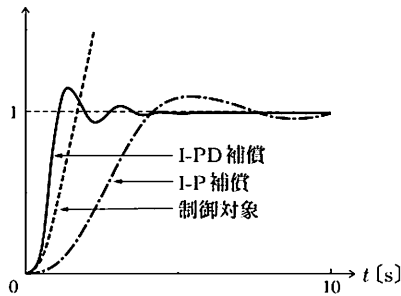


図 14.27

14.5 古典制御から現代制御へ

再び、伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (14.50)$$

である DC サーボモータについて考えよう。まず、図14.28 (a) に示すように PD 補償を施す。この制御系は、出力 $y(t)$ をフィードバックしているので、出力フィードバック (output feedback) と呼ばれる。

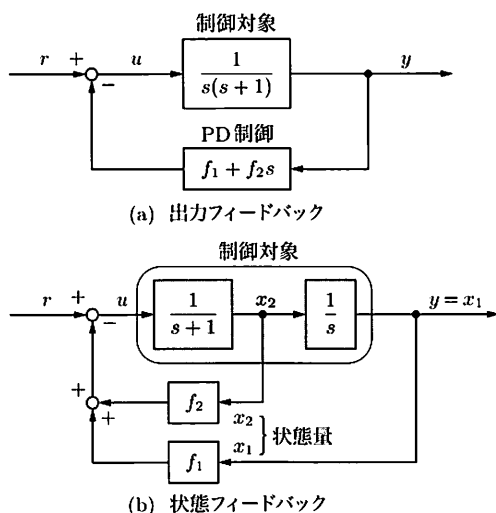


図14.28 出力フィードバック（古典制御）と状態フィードバック（現代制御）

さて、式(14.50)は次式のように状態空間表現できる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (14.51)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (14.52)$$

ここでは、 $x_1(t)$ の微分が $x_2(t)$ になるように状態変数を選んだ。すると、図14.28 (a) の PD 制御則は、

$$u(t) = -f_1 x_1(t) - f_2 x_2(t) + r(t) = - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + r(t) \quad (14.53)$$

と記述でき、図14.28 (b) が得られる。この図では制御対象の状態量 $x_1(t)$, $x_2(t)$ をフィードバックする構造をとっているため、状態フィードバック (state feedback) と呼ばれる。

これまで説明してきた古典制御では、式(14.50)のような伝達関数によって制御対象を表現し、PD補償器のような出力フィードバックによって制御則を与えた。一方、現代制御 (modern control) では、式(14.51)、(14.52)のような状態方程式に

よって制御対象を表現し、式(14.53)のような状態フィードバックによって制御則を与える。

たとえば、図14.28 (a)の古典制御では $f_2 s$ という微分器が必要だったが、図14.28 (b)の現代制御では微分器を用いていない。また、古典制御は伝達関数表現に基づいているため、基本的に1入出力系に対する設計法であるが、現代制御は状態方程式に基づいているため、多入出力系にも容易に拡張できる。このように、現代制御は古典制御にないさまざまな利点を持っている。

さて、制御対象が

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (14.54)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (14.55)$$

により状態空間表現される一般的なものである場合、状態フィードバック制御では、操作量 $u(t)$ は次式で与えられる。

$$u(t) = -\mathbf{f}^T \mathbf{x}(t) + r(t) \quad (14.56)$$

ここで、式(14.56)の右辺第1項が状態フィードバックによる項であり、 \mathbf{f} はフィードバックゲインと呼ばれる。また、右辺第2項の $r(t)$ は目標値である。閉ループ系を図14.29に示す。

式(14.56)を式(14.54)に代入すると、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{f}^T) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} r(t) \quad (14.57)$$

となる。したがって、式(14.54)、(14.55)で記述される制御対象 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ に式(14.56)の制御則を施すと、 $r(t)$ から $y(t)$ までの閉ループシステムの状態方程式の係数は、 $(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{f}^T, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ に変化する。

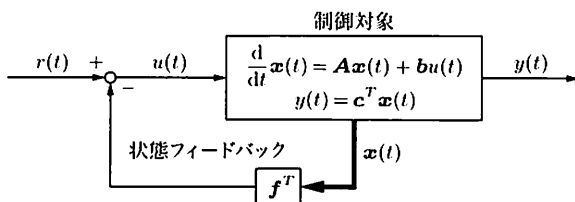


図14.29 状態フィードバック制御系

例題 14.8

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

によって状態空間表現される制御対象に対して,

$$u(t) = - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + r(t)$$

のフィードバック制御を施す. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 制御対象の伝達関数 $P(s)$ を計算しなさい.
- (2) $r(t)$ から $y(t)$ までの閉ループシステムを状態空間表現しなさい.
- (3) 閉ループシステムの伝達関数 $W(s)$ を計算しなさい.
- (4) 閉ループシステムにおいて $\omega_n = 2$, $\zeta = 0.6$ となるように, フィードバックゲイン f_1, f_2 の値を決定しなさい.

解答

$$(1) P(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+3}$$

(2) 式 (14.57) より, 次式が得られる.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3-f_1 & -2-f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$(3) W(s) = \frac{2s+1}{s^2+(2+f_2)s+(3+f_1)}$$

(4) (3) で得られた分母多項式と 2 次標準形のそれとを係数比較することにより, 次式を得る.

$$\omega_n^2 = 3 + f_1 = 4$$

$$2\zeta\omega_n = 2 + f_2$$

よって, $f_1 = 1$, $f_2 = 0.4$ を得る. ■

フィードバック補償では, 制御対象の伝達関数の分子多項式の根である零点を移動することはできないが, 安定性や過渡特性などに大きく影響する分母多項式の根である極を移動できることが, この例題からわかった.

以上の説明は, 現代制御理論の入口を紹介するだけに留まったが, 現代制御理論は古典制御理論にないさまざまな利点を (もちろん問題点も) 持っている. 興味ある読者は, 現代制御についてさらに勉強してほしい.

本章のポイント

- ▼ 補償器 (コントローラ) の接続法は, 直列補償とフィードバック補償に分けられることを理解すること.
- ▼ 古典制御の基本は直列補償であり, 現代制御の基本はフィードバック補償であることを認識すること.
- ▼ 周波数領域におけるループ整形法による制御系設計法を習得すること.
- ▼ PID 制御の考え方を理解すること.
- ▼ 参照モデル法を用いた I-PD 制御系の設計法を理解すること.

Control Quiz

- 14.1 式 (14.3) を導出しなさい.
- 14.2 式 (14.24) ~ (14.27) を導出しなさい.
- 14.3 式 (14.46) ~ (14.49) を導出しなさい.
- 14.4 図 14.26 のブロック線図の等価変換を確認しなさい.
- 14.5 伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{1 + 4s + 2.4s^2 + 0.448s^3 + 0.0256s^4}$$

で記述される制御対象に対して，参照モデル法を用いて I-PD 補償器を設計しなさい。そして，設計された制御系のステップ応答を描き，制御性能について考察しなさい。

本書を学習した総まとめとして期末試験問題を解いてみよう。

1

長さ l 、質量 m の振子にトルク $T(t)$ を印加すると、振子の角度 $\theta(t)$ は、 $\theta \approx 0$ では、

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = u(t)$$

を満たす。ただし、 g は重力加速度であり、 $u(t) = T(t)/ml^2$ とおいた。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 入力を $u(t)$ 、出力を $y(t) = \theta(t)$ としたシステムの伝達関数 $G(s)$ を求めなさい。
- (2) $x_1(t) = \theta(t)$ 、 $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ とするとき、それらに対応する状態空間表現の係数 A, b, c, d を求めなさい。
- (3) このシステムの固有周波数 ω_n と減衰比 ζ を求めなさい。
- (4) このシステムのインパルス応答 $g(t)$ を計算しなさい。
- (5) (4) で求めたインパルス応答 $g(t)$ を用いて、このシステムの安定性を調べなさい。

2

次の問いに答えなさい。

- (1) 1 入力 1 出力 n 状態の線形システムの状態空間表現を正確に書きなさい。
- (2) 状態空間表現の係数が、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

で与えられるとき、

- (a) このシステムの伝達関数 $G(s)$ を求めなさい。
 (b) このシステムの状態遷移行列 e^{At} を計算しなさい。
 (c) このシステムのインパルス応答を計算して、それを図示しなさい。

3

伝達関数が

$$G(s) = \frac{100s + 1}{s(s + 0.1)(0.1s + 1)}$$

で与えられる制御対象について、次の問いに答えなさい。

- (1) $G(s)$ を基本要素の積の形に分解しなさい。
 (2) この伝達関数のボード線図を描きなさい。ただし、ゲイン線図は折線近似法を用いて描き、位相線図は概形を描きなさい。

4制御対象 $P(s)$ とコントローラ $C(s)$ がそれぞれ

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad C(s) = \frac{K(Ts+1)}{0.01s+1}, \quad K > 0, \quad T > 0$$

で与えられる直結フィードバック制御系について、次の問いに答えなさい。

- (1) このフィードバックシステムが安定になるために、 K と T が満たすべき不等式を導きなさい。
 (2) ゲイン K をいくら大きくしても、このフィードバック制御系が不安定にならない T の範囲を求めなさい。
 (3) $T = 0.1$, $K = 1$ としたとき、一巡伝達関数 $L(s)$ のボード線図（ゲインと位相）を描きなさい。
 (4) (3) で描いたボード線図を用いて、(2) の状況を考察しなさい。

5

図 15.1 に示す、外乱を含むフィードバック制御系において、

$$P(s) = \frac{1}{s(s+0.1)(s+9.9)}, \quad C(s) = K$$

とする。このとき、次の問いに答えなさい。ただし、数式は降べきの順で記述しなさい。

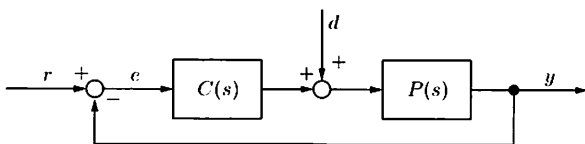


図 15.1

- (1) 一巡伝達関数 $L(s)$ を求めなさい。
- (2) r から y までの閉ループ伝達関数 $W(s)$ を求めなさい。
- (3) (2) で求めた閉ループシステムが安定になる K の範囲を求めなさい。
- (4) d から e までの伝達関数を計算しなさい。
- (5) d が単位ステップ外乱のとき、定常位置偏差の大きさを 0.5 より小さくしたいとする。このとき、 K の範囲を求めなさい。ただし、 $r = 0$ とする。

6

一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K}{s(s+10)}$$

である直結フィードバック制御系を考える。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $K = 16$ としたとき、
 - (a) 閉ループ伝達関数 $W(s)$ を求めなさい。
 - (b) 閉ループシステムの固有周波数 ω_n と減衰比 ζ を求めなさい。
 - (c) $W(s)$ のボード線図を描きなさい。
 - (d) この閉ループシステムの特徴を定量的に述べなさい。
- (2) K を 100, 1000 と増加させていくと、(1)-(c) で描いたゲイン線図がどのようなになるかを図中に示し、その結果について考察しなさい。

7

直結フィードバック制御系において、

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}, \quad C(s) = \frac{K}{s}$$

とすると、次の問いに答えなさい。

- (1) このコントローラ $C(s)$ の名称を答えなさい。

- (2) 閉ループ伝達関数 $W(s)$ を求めなさい。
- (3) このシステムの型を答えなさい。
- (4) フィードバックシステムが安定になるための K の範囲を求めなさい。
- (5) 目標値 r がランプ信号のとき、定常偏差が0.2 以下になるように K の範囲を求めなさい。

8

直結フィードバック制御系において、

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \quad C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

とする。このコントローラ $C(s)$ の名称を答えなさい。次に、このフィードバック制御系が安定となる K_P, K_I の範囲を求めなさい。

9

直結フィードバック制御系を考え、その一巡伝達関数を

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

とする。目標値として $r(t) = \sin t$ を入力したとき、出力 $y(t)$ を求めなさい。

10

次の問いに答えなさい。

- (1) 線形システムを特徴付ける二つの原理を挙げ、簡単に説明しなさい。
- (2) スモールゲイン定理の条件 $|L(j\omega)| < 1, \forall \omega$ は十分条件であること、すなわち、この条件を満たさなくても、安定なフィードバックシステムが存在することを、具体的な例を用いて示しなさい。

11

図 15.2 に示すゲイン特性を持つ LTI システムについて、次の問いに答えなさい。ただし、図において $a = 20$ dB, $\omega_1 = 1$ rad/s, $\omega_2 = 10$ rad/s とする。

- (1) 図 15.2 のゲイン特性を持つ伝達関数 $G(s)$ を求めなさい。ただし、図 15.2 は折線近似法を用いて作図されている。また、対象は最小位相系 (s 平面の右半平面に零点を持たないシステムのこと) とする。
- (2) (1) で得られた伝達関数 $G(s)$ からインパルス応答 $g(t)$ を計算しなさい。
- (3) (1) で得られた伝達関数 $G(s)$ を状態空間表現に変換しなさい。

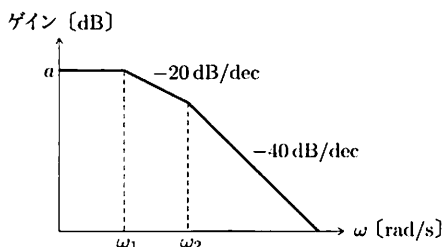


図 15.2

- (4) (3) で求めた状態空間表現を伝達関数に変換し, (1) で求めたものと一致することを確かめなさい.

12

LTI システムが

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

のように状態空間表現されるとき, 次の問いに答えなさい. ただし,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする.

- (1) このシステムの伝達関数を計算しなさい.
- (2) このシステムの状態遷移行列 $e^{\mathbf{A}t}$ を計算しなさい.
- (3) このシステムの単位ステップ応答を計算しなさい.
- (4) (3) で計算した単位ステップ応答の概形が正しいかどうかをチェックする簡便な方法を示しなさい.
- (5) このシステムの減衰比 ζ と固有周波数 ω_n を計算しなさい.
- (6) この状態方程式の \mathbf{A} 行列の固有値を計算し, それが何を意味するのかを述べなさい.

13 状態空間表現の係数が次のように与えられているとする。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) システム行列 A を対角化し、対角行列 \bar{A} を求めなさい。ただし、 T を正則変換行列とし、 $\bar{A} = T^{-1}AT$ とする。
- (2) (1) で用いた正則変換行列 T を使って、 b と c を変換し、 \bar{b} と \bar{c} を求めなさい。
- (3) もとのシステム (A, b, c) と正則変換された新しいシステム $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$ の伝達関数をそれぞれ計算し、両者が等しいことを確かめなさい。

14 図15.3に示すフィードバック制御系について、次の問いに答えなさい。

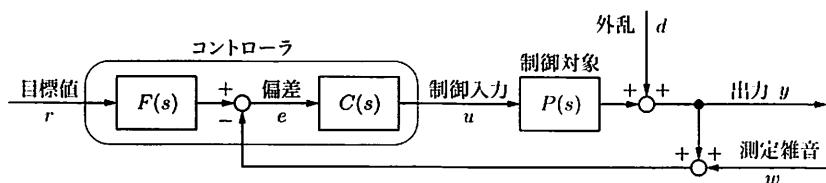


図15.3

- (1) 図において、このフィードバック制御系の外部からの入力、外乱 d 、目標値 r 、測定雑音 w の三つであり、外部への出力は y の一つである。いま、 y を d, r, w の関数として記述すると、

$$y(s) = S(s)d(s) + T(s)F(s)r(s) - T(s)w(s)$$

が得られる。ここで、 $S(s)$ は感度関数、 $T(s)$ は相補感度関数である。このとき、 $S(s)$ と $T(s)$ を、一巡伝達関数 $L(s) = P(s)C(s)$ を用いて表しなさい。

- (2) 偏差 e を d, r, w の関数として記述しなさい。
- (3) 制御入力 u を d, r, w の関数として記述しなさい。
- (4) $S(s)$ と $T(s)$ の間に成り立つ恒等式を導きなさい。そして、典型的な $|S(j\omega)|$ と $|T(j\omega)|$ の概形を図示し、その図について考察しなさい。

15

図 15.4 に示す直結フィードバック制御系について、次の問いに答えなさい。ただし、

$$P(s) = \frac{5}{2s+1}, \quad C(s) = K, \quad K > 0$$

とする。

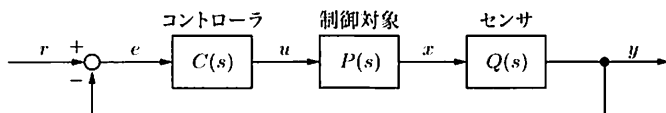


図 15.4

- (1) センサの伝達関数を

$$Q(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

とする。このとき、センサの時定数 T がどのような値をとる場合に、良いセンサであると言えるのだろうか？ 周波数領域で考察しなさい。

- (2) 次の伝達関数を計算しなさい。

(a) 一巡伝達関数 $L(s)$

(b) 閉ループ伝達関数 $W(s)$ (r から y までの伝達関数)

(c) r から e までの伝達関数

- (3) 目標値 r として単位ステップ信号を印加する。このとき、単位ステップ応答の定常偏差が 5 % 以下になるようなコントローラのゲイン K の範囲を求めなさい。
- (4) 閉ループシステムの周波数伝達関数 $W(j\omega)$ を計算しなさい。そして、そのゲイン特性 $|W(j\omega)|$ と位相特性 $\angle W(j\omega)$ を計算しなさい。
- (5) 閉ループ伝達関数のゲイン特性がすべての周波数帯域において 1 以下、すなわち、

$$|W(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad \|W\|_{\infty} < 1$$

が成り立つような比例ゲイン K の範囲を、センサの時定数 T を用いて表したい。次の方法で求めなさい。

- (a) 閉ループシステムは2次遅れ系なので、その定常ゲインが1以下で、減衰比 ζ が $1/\sqrt{2}$ より大きければ、常に $|W(j\omega)| < 1$ が成り立つ。この条件より、範囲を導きなさい。ただし、これは十分条件である。
- (b) $|W(j\omega)| < 1, \forall \omega$ を厳密に解くことによって、範囲を導きなさい。
- (6) (3)の条件と(5)-(a)の条件を同時に満たすような比例ゲイン K が存在するための、センサの時定数 T の範囲を求めなさい。ただし、(1)で考察したことを利用しなさい。

16

図15.5に示す直結フィードバック制御系を考える。ここで、 τ はむだ時間であり、 $\tau = 1$ とする。また、

$$P(s) = \frac{10}{s+1}, \quad C(s) = K, \quad K > 0$$

とする。

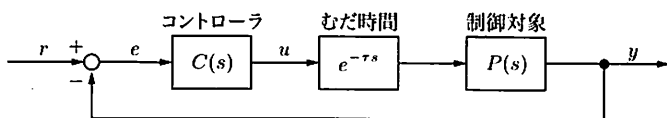


図15.5

このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) このフィードバックシステムの一巡伝達関数 $L(s)$ を求めなさい。
- (2) 一巡伝達関数の周波数伝達関数 $L(j\omega)$ を計算し、そのゲイン特性と位相特性を求めなさい。
- (3) $L(j\omega)$ の位相が $-\pi$ となる最小の周波数を ω_π とする。このとき、このフィードバック系が安定であるための比例ゲイン K の範囲を、ナイキストの安定判別法により、 ω_π を用いて表しなさい。
- (4) むだ時間 τ の大きさとフィードバック系の安定性の関係について述べなさい。

第1章

[1.1] たとえば、モータの回転角度を制御するフィードバックシステムのブロック線図を図A.1に示す。



図A.1

[1.2] $L(s) = \frac{8}{s(s+6)}, W(s) = \frac{8}{s^2+6s+8}$

第2章

[2.1] $z_1 = 2e^{j\pi/3}, z_2 = 3\sqrt{2}e^{j\pi/4}, z_1 z_2 = 6\sqrt{2}e^{j7\pi/12}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{j\pi/12}$

[2.2] (1) $\frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}$ (2) $\frac{a}{s+b}$ (3) $\frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$ (4) $\frac{a}{s^2 - a^2}$

(5) $\frac{s}{s^2 - a^2}$ (6) $\frac{1}{s^2(s-3)}$ (7) $\frac{1}{s^2(s^2+25)}$ (8) $\frac{1}{s(s^2+25)}$

(9) $\frac{\omega/T}{s^2 + (\omega/T)^2}$

[2.3] (1) $(0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t})u_s(t)$ (2) $(0.5 - 0.5e^{-2t} - te^{-t})u_s(t)$

(3) $e^{-t} \cos 2t u_s(t)$ (4) $\delta(t) - 4e^{-5t} u_s(t)$ (5) $(\cos \omega t * \sin \omega t) u_s(t)$

(6) $\left\{ \frac{e^{-at}}{(a+b)^2} - \frac{e^{bt}}{(a+b)^2} + \frac{te^{bt}}{a+b} \right\} u_s(t)$

[2.4] $x(t) = (e^{-t} - 2e^{-2t})u_s(t)$

[2.5] まず,

$$X(s) = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{s} - \frac{1}{\Delta} \frac{1}{s} e^{-\Delta s} = \frac{1 - e^{-\Delta s}}{s\Delta}$$

が得られる。次に、 $\Delta \rightarrow 0$ の極限をとると、次式が得られる。

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\Delta s}}{s\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{se^{-\Delta s}}{s} = 1$$

$$\boxed{2.6} \quad G(s) = (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots)F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}F(s)$$

第3章

$\boxed{3.1}$ $y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u_s(t)$. インパルス応答 $g(t)$ とステップ応答 $y(t)$ を図 A.2 に示す。

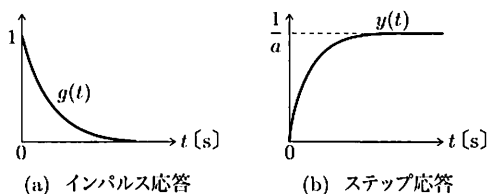


図 A.2

$\boxed{3.2}$ たとえば、図 A.3 に示す RC 回路を考える。ここで、入力 $u(t)$ を 1 次側の端子電圧、出力 $y(t)$ を 2 次側の端子電圧とする。

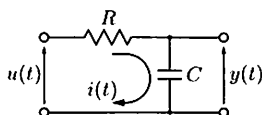


図 A.3

キルヒホッフの電圧則を利用することにより、次の微分方程式が得られる。

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

$\boxed{3.3}$ 略

$\boxed{3.4}$ たとえば、 $\boxed{3.2}$ で扱った RC 回路の抵抗は、温度によって変化する。すなわち、朝と昼では抵抗値が異なる。そのため、厳密に考えると、 $\boxed{3.2}$ の RC 回路は時変システムである。ただし、通常、その変化の割合は小さいので、時変ではなく、時不変システムとして扱う。一方、人工衛星では、太陽に当たっているとき、そ

うでないときとで、その温度差は 100°C 以上になるので、人工衛星に搭載された RC 回路は時変システムとして取り扱う必要があるだろう。

第4章

4.1 (1) ステップ応答は次式となる。概形を図 A.4 (a) に示す。

$$f(t) = 10(1 - e^{-10t})u_s(t)$$

(2) ステップ応答は

$$f(t) = (1.5 - 2e^{-t} + 0.5e^{-2t})u_s(t)$$

となる。少し計算することにより、このステップ応答は 0 から 1 に単調増加することがわかる。概形を図 A.4 (b) に示す。

(3) ステップ応答は、

$$f(t) = 10(1 - e^{-(t-2)})u_s(t-2)$$

となり、むだ時間が 2 のステップ応答になる (図 A.4 (c))。

(4) ステップ応答は、

$$f(t) = \left\{ 1 - e^{-0.5t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right\} u_s(t)$$

となり、振動的なステップ応答になる (図 A.4 (d))。

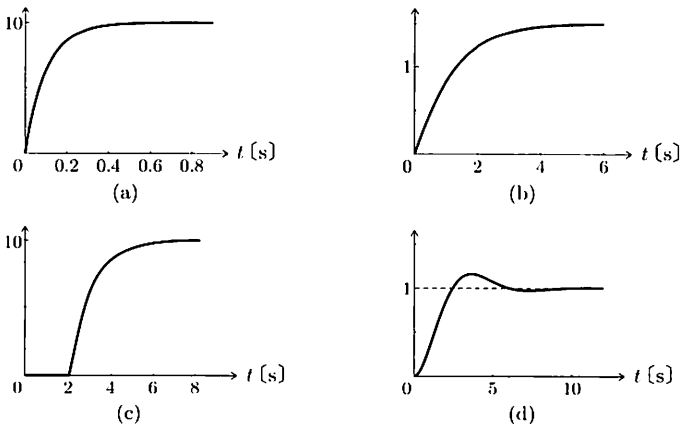


図 A.4

[4.2] r から y までの伝達関数は次のようになる。

$$\frac{G(s)\{C_F(s) + C_B(s)\}}{1 + G(s)\{H(s) + C_B(s)\}}$$

[4.3] (1) $W(s) = \frac{K_1 G(s)}{s\{1 + K_2 G(s)\} + K_1 G(s)} = \frac{K_1}{s^2 + \frac{1 + 10K_2}{10}s + K_1}$

(2) $K_1 = 100$, $K_2 = 11.9$

[4.4] (1) 略。ヒント： $\cosh \theta = 0.5(e^\theta + e^{-\theta})$, $\sinh \theta = 0.5(e^\theta - e^{-\theta})$ を利用する。

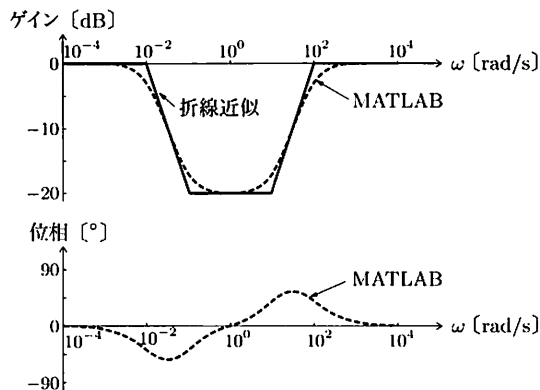
(2) 略。ヒント： $\cosh j\theta = \cos \theta$, $\sinh j\theta = j \sin \theta$ を利用する。

(3), (4) 略

[4.5] ステップ応答の方程式 $f(t) = 1 - e^{-t/T}$ の原点における接線の方程式は、 $y = t/T$ となるので、これが $y = 1$ と交わる時刻は $t = T$ となる。

第5章

[5.1] (1) 与えられた伝達関数は位相遅れ要素と位相進み要素の積である。折線近似法を用いて描いたボード線図を図A.5に実線で示す。なお、図中の破線はMATLABを用いて描いたものである。



図A.5

(2) 基本伝達関数の積に分解すると、

$$G_2(s) = \frac{1}{10} \frac{1}{s} \frac{1}{s+1} (0.1s+1) \frac{1}{0.01s+1}$$

となるので、それぞれのゲイン特性を描き、足し合わせると、図 A.6 のゲイン線図が得られる。また、位相線図については、ゲインの傾きにに応じて位相遅れを直線で描き、それを滑らかな曲線で結んで概形を描いた。

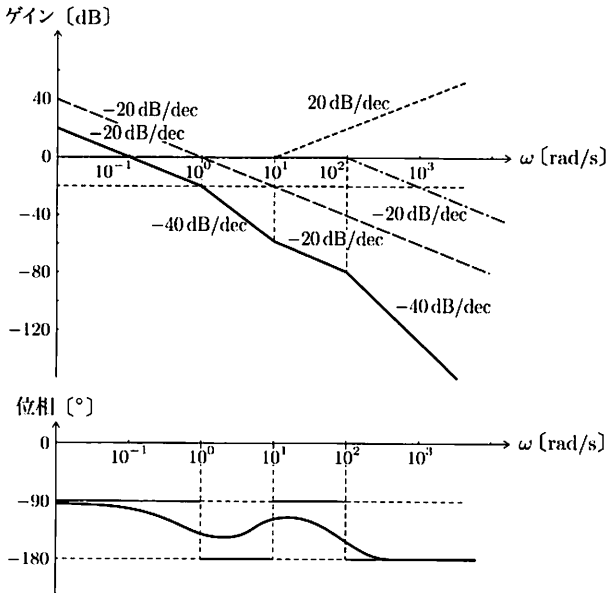


図 A.6

5.2 (1) $\|G_1\|_\infty = 1$ (2) $\|G_2\|_\infty = 5.025$ (3) $\|G_3\|_\infty = \infty$

5.3 ナイキスト線図を図 A.7 に示す。

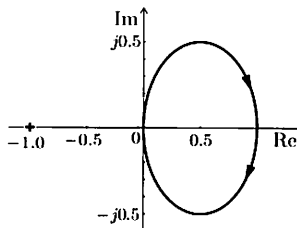


図 A.7

5.4 $y_1(t) = \sin 0.001t$, $y_2(t) = 0.02 \sin(10t - 90^\circ)$

第6章

$$\boxed{6.1} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{6.2} \quad (1) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

$$(2) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos 2t - 2 \sin 2t) & 2e^{-t} \sin 2t \\ -0.4e^{-t} \sin 2t & e^{-t}(\cos 2t + 2 \sin 2t) \end{bmatrix} u_s(t)$$

$$\boxed{6.3} \quad (1) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} 1.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} & 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} \\ -1.5e^{-t} + 1.5e^{-3t} & -0.5e^{-t} + 1.5e^{-3t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

$$(2) \quad y(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{6}e^{-3t} \right) u_s(t) \quad (3) \quad \frac{2s+1}{s^2+4s+3}$$

$$\boxed{6.4} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

これより、次式が得られる。

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & -5 \end{bmatrix}$$

第8章

 $\boxed{8.1}$ 略

第9章

 $\boxed{9.1}$ (1) 不安定極を二つ持つ不安定系 (2) 安定

(3) 虚軸上に二つの複素共役極を持つ不安定系

$\boxed{9.2}$ この問題には読者の数に近い解答が存在する。ほとんどの生年月日は不安定になるだろう。

$\boxed{9.3}$ $a > -2$, $0 < b < 2a + 4$. a, b の範囲を図A.8に示す。

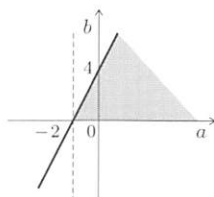


図 A.8

第10章

10.1 (1) $0 < K < 15$ (2) $K > 7.5$

10.2 (1) $0 < K < 7.5$

(2) $K = 7.5$. 安定限界のとき $\omega = \sqrt{12.5}$ の正弦波で持続振動する.

第11章

11.1 $T_s = \frac{\log_{10} 50}{\zeta \omega_n} \approx \frac{3.91}{\zeta \omega_n}$

11.2 それぞれの根軌跡を図A.9に示す. 図より, (1)の3次系はゲイン K を大きくしていくと不安定になるが, (2)の3次系はゲイン K を大きくしていても不安定にならないことがわかる.

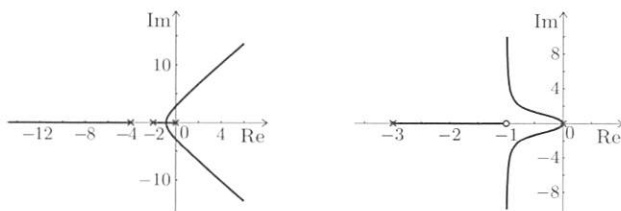


図 A.9

11.3 それぞれの根軌跡を図A.10に示す. (1)は2次系であるため, 周波数を増加させていっても位相が -180° より遅れない. よって, 安定である. 一方, (2)は3次系であるため, 周波数を増加させていくと位相が -270° になってしまう. したがって, このシステムでは K を増加させていくと不安定になる.

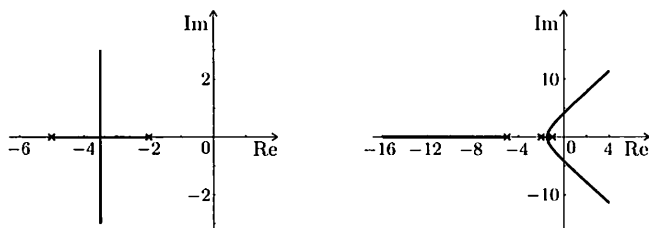


図 A.10

第12章

$$\boxed{12.1} \quad (a) \varepsilon_r = 0, \varepsilon_d = 0.2 \quad (b) \varepsilon_r = \varepsilon_d = 0$$

$$\boxed{12.2} \quad (1) e(s) = \frac{s+1}{s+K+1} r(s) - \frac{1}{s+K+1} d(s)$$

$$(2) (a) y(t) = 0.01 \sin t$$

(b) $K = 0$ の場合は, $y(s) = \frac{1}{s+1} d(s)$ となり, $\omega = 1$ におけるゲイン特性と位相特性はそれぞれ 0.707, -45° となる. よって, $K = 99$ と $K = 0$ の場合の偏差信号の振幅の比は, $0.01/0.707 = 0.014$ となり, フィードバック制御を施すことにより, 外乱の影響を 0.014 倍に低減できる.

第13章

$\boxed{13.1}$ 2次遅れ系の標準形の ω_n は原点からの距離を表すので, その逆数がある値より小さくするためには, 原点を中心とした半径 ω_n の円の外側に極が存在しなければならない.

$\boxed{13.2}$ 2次遅れ系の標準形において, $\zeta\omega_n$ は極の負の実部を表すので, その逆数がある値より小さくするためには, 直線 $z = -\zeta\omega_n$ より左側に極が存在しなければならない.

第14章

$$\boxed{14.1} \quad \log_{10} \omega_m = \frac{\log_{10} \frac{1}{T} + \log_{10} \frac{1}{aT}}{2} \quad \text{より, } \omega_m^2 = \frac{1}{aT^2} \quad \text{を得る.}$$

これより, $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ となる.

$\boxed{14.2}$ 略

$\boxed{14.3}$ 略

14.4 略

14.5 参照モデル法を用いて設計すると, $\sigma = 0.933$, $k = 19.68$, $f_0 = 17.37$, $f_1 = 4.57$ が得られる. 制御対象のステップ応答と I-PD 制御系のステップ応答を比較した結果を図 A.11 に示す. I-PD 制御を施すことにより, 速応性が改善されていることがわかる.

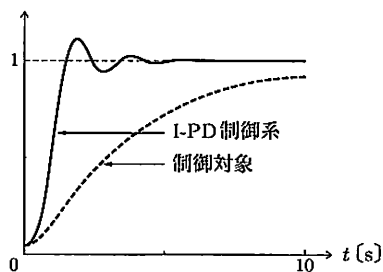


図 A.11

1 (1) $1.5(e^{-t} - e^{-3t})u_s(t)$ (2) $e^{-2t}(\cos 3t + \sin 3t)u_s(t)$

(3) $(2e^{-t} - te^{-2t} - 2e^{-2t})u_s(t)$

2 (1) $G(s) = \frac{2s + 11}{s^2 + 11s + 10}$ (2) 極は $s = -1, -10$, 零点は $s = -\frac{11}{2}$

(3) $G(s) = 1.1 \frac{1}{s+1} \frac{1}{0.1s+1} \left(\frac{2}{11}s + 1 \right)$. これより, この伝達関数は, 比例要素 1.1, 時定数 1 の 1 次遅れ要素, 時定数 0.1 の 1 次遅れ要素, そして, 時定数 2/11 の 1 次進み要素からなる.

3 $G(s) = \frac{13}{s^2 + 6s + 13}$. 極は $s = -3 \pm j2$ であり, それを s 平面上にプロットしたものを図 B.1 に示す. 図において, 固有周波数 ω_n は原点から極までの距離である.

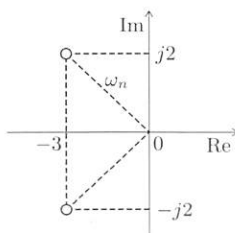


図 B.1

4 (a) $u(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$, $y(t) = (1 - e^{-t})u_s(t) - (1 - e^{-(t-1)})u_s(t-1)$

このときの応答波形 $y(t)$ を図 B.2 に示す.

(b) $u(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s}$
 $y(t) = (1 - e^{-t})u_s(t) - 2(1 - e^{-(t-1)})u_s(t-1) + (1 - e^{-(t-2)})u_s(t-2)$

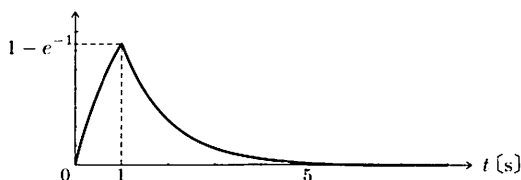


図 B.2

$$(c) \quad u(s) = \frac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2}, \quad y(t) = (e^{-t} + t - 1)u_s(t) - (t-1)u_s(t-1)$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \frac{P(s)}{1 + fP(s)} = \frac{1}{10s + (1+f)} \quad (2) \quad L(s) = \frac{K}{10s^2 + (1+f)s}$$

$$(3) \quad \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{10s^2 + (1+f)s}{10s^2 + (1+f)s + K} \quad (4) \quad W(s) = \frac{\frac{K}{10}}{s^2 + \frac{1+f}{10}s + \frac{K}{10}}$$

$$(5) \quad f = 19, \quad K = 10$$

(6) f は速度フィードバック制御の係数であり，閉ループシステムの安定性と減衰性を向上させる役割をする． K は位置フィードバック制御の係数であり， K を増加させると固有周波数 ω_n が増加することから，応答特性（応答の速さ）を増加させる役割をする．

$$\boxed{6} \quad (1) \quad G(s) = \frac{1}{s + 0.1} = \frac{10}{10s + 1}, \quad T = 10, \quad K = 10, \quad \text{極は } s = -0.1$$

$$(2) \quad G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega 10} = \frac{10}{1 + 100\omega^2} (1 - j10\omega) \text{ より,}$$

$$g(\omega) = 20 \log_{10} \frac{10}{\sqrt{1 + 100\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\arctan 10\omega$$

(3) 折線近似法により描いたボード線図を図 B.3 に示す．

$$\boxed{7} \quad (1) \quad G(s) = 10 \frac{1}{s} \frac{1}{10s + 1} \frac{1}{0.1s + 1} (s + 1)$$

(2) 折線近似法により描いたボード線図を図 B.4 に示す．

$$(3) \quad y(t) = 10^4 \sin(10^{-3}t - 90^\circ) + 10^{-5} \sin(10^3t - 180^\circ)$$

$$\boxed{8} \quad (1) \quad e^{At} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10e^{-t} - e^{-10t} & e^{-t} - e^{-10t} \\ -10e^{-t} + 10e^{-10t} & -e^{-t} + 10e^{-10t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 11s + 10}$$

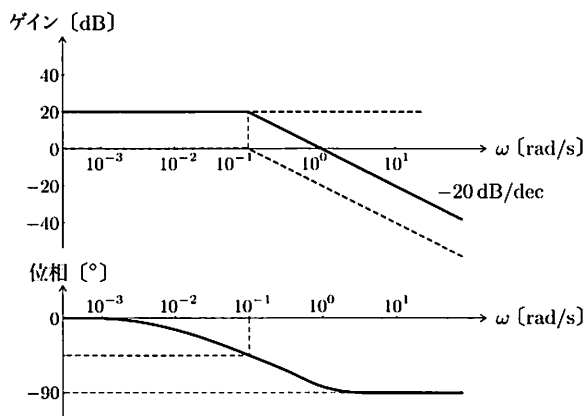


図 B.3

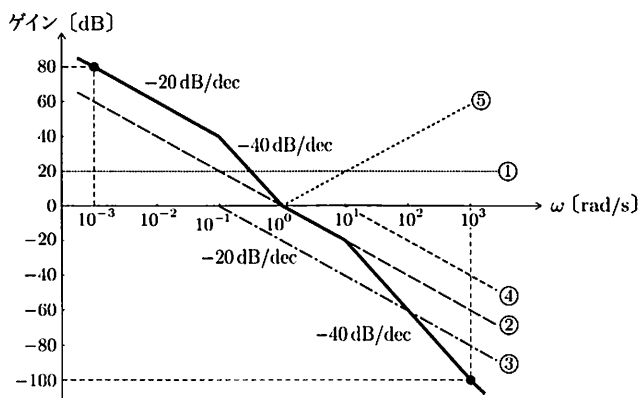


図 B.4

(3) このシステムは2次遅れ系であり、その固有周波数は $\omega_n = \sqrt{10}$ 、減衰比は $\zeta = 11/(2\sqrt{10})$ である。減衰比が $\zeta > 1$ なので過制動であり、このシステムは二つの1次遅れ系 $1/(s+1)$ と $1/(s+10)$ の直列接続で構成される。

9 (1)
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

(2)
$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$(3) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 2e^{-t} \\ 0.5 - 2e^{-t} + 2.5e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = (1.5 - 4e^{-t} + 2.5e^{-2t})u_s(t)$$

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1.5$$

10 まず、システムの極が s 平面の左半平面にあると、そのシステムは安定である（これについては第8章以降で詳細に説明する）。次に、2次遅れ系の例から明らかなように、システムの極の位置から、固有周波数 ω_n に対応するシステムの応答の速さや、減衰比 ζ に対応するシステムの減衰性を知ることができる。たとえば、 s 平面の左半平面において原点から遠い極のほうが固有周波数が高いので、応答特性が速くなる。また、 s 平面の左半平面において虚軸に近い極ほど減衰性が悪く、虚軸から離れるにつれて減衰性は向上する。

$$1 \quad (1) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

$$(3) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \zeta = 0 \quad (4) \quad g(t) = \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t u_s(t)$$

(5) (4) で求めたインパルス応答に対して, $\int_0^\infty |g(t)| dt$ を計算すると, 無限大に発散する. よって, 絶対可積分ではないので, このシステムは不安定である.

2 (1) 1入力1出力システムの状態空間表現の標準形は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t) \end{aligned}$$

ここで, $u(t)$ は入力 (スカラー), $y(t)$ は出力 (スカラー), $\mathbf{x}(t)$ は n 次元状態ベクトルである. また, \mathbf{A} は $n \times n$ 行列であり, \mathbf{b}, \mathbf{c} は n 次元列ベクトル, d はスカラーである.

$$(2) \quad (a) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$$

$$(b) \quad e^{\mathbf{A}t} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t + 2 \sin t & \sin t \\ -5 \sin t & \cos t - 2 \sin t \end{bmatrix} u_s(t)$$

(c) $g(t) = e^{-2t} \sin t u_s(t)$ となる. その波形を図 C.1 に示す.

$$3 \quad (1) \quad G(s) = 10 \frac{1}{s} \frac{1}{10s + 1} \frac{1}{0.1s + 1} (100s + 1) = g_1(s) g_2(s) g_3(s) g_4(s) g_5(s)$$

(2) 折線近似法によるゲイン線図と MATLAB を用いて作図したボード線図を図 C.2 に示す.

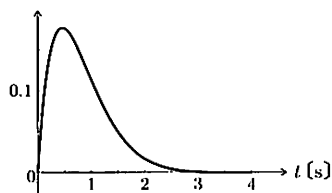


図 C.1

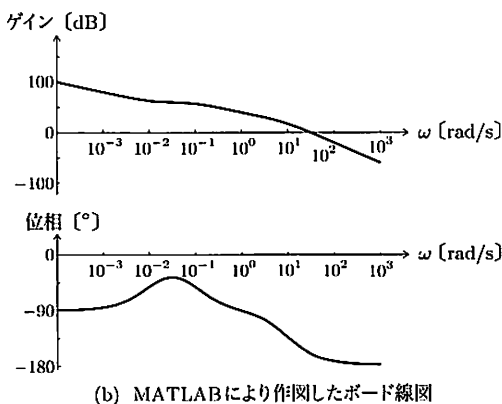
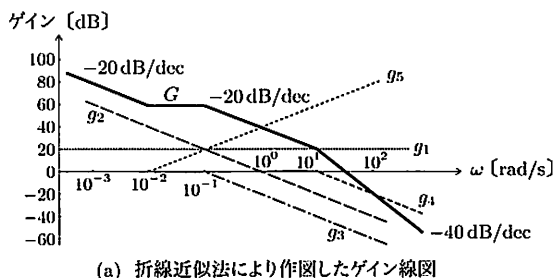
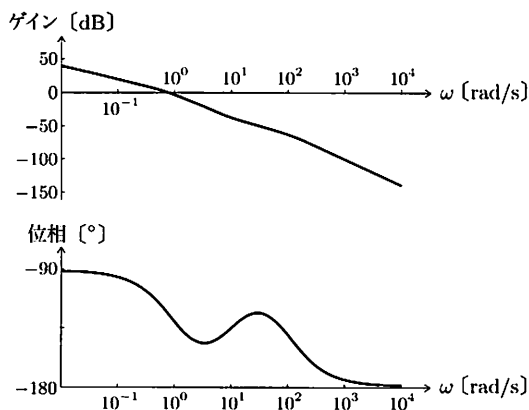


図 C.2

- 4 (1) 解1: $\frac{K(1-101T)}{101} < 1$, 解2: $T \geq \frac{1}{101}$ のとき $K > 0$, $T < \frac{1}{101}$ のとき $K < \frac{101}{1-101T}$ (2) $T > \frac{1}{101} = 0.00990099 \dots$

(3) $L(s) = \frac{10(s+10)}{s(s+1)(s+100)}$. このボード線図を図 C.3 に示す.

(4) (3) では $K = 1$ のときの一巡伝達関数のボード線図を示した. 図より明らかにように, 位相は -180° より遅れないので, 常に位相余裕は正であり, フィードバック



図C.3

システムは安定である。なお、 $T = 0.1$ は (2) で導出した T の条件を満足している。

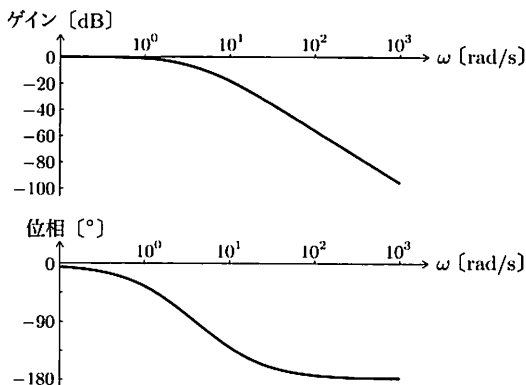
5 (1) $L(s) = \frac{K}{s^3 + 10s^2 + 0.99s}$ (2) $W(s) = \frac{K}{s^3 + 10s^2 + 0.99s + K}$

(3) $0 < K < 9.9$ (4) $\frac{e}{d} = -\frac{1}{s^3 + 10s^2 + 0.99s + K}$ (5) $2 < K < 9.9$

6 (1) (a) $W(s) = \frac{16}{s^2 + 10s + 16} = \frac{1}{(0.5s + 1)(0.125s + 1)}$

(b) $\omega_n = 4$, $\zeta = 1.25$

(c) ボード線図を図C.4に示す。



図C.4

(d) たとえば、次のことが言える。(i) 図より、この閉ループシステムのバンド幅は約 2 rad/s である。(ii) この閉ループシステムは 2 次系で過制動なので、M ピーク値は $1 (= 0 \text{ dB})$ である。

(2) $K = 100, 1000$ と比例ゲイン K を増加させたときの閉ループ伝達関数のボード線図を図 C.5 に示す。図より、 K を増加させると、バンド幅 ω_b が増加し、フィードバックシステムの速応性が向上する。その一方で、M ピーク値が増加し、システムが振動的になっていく。

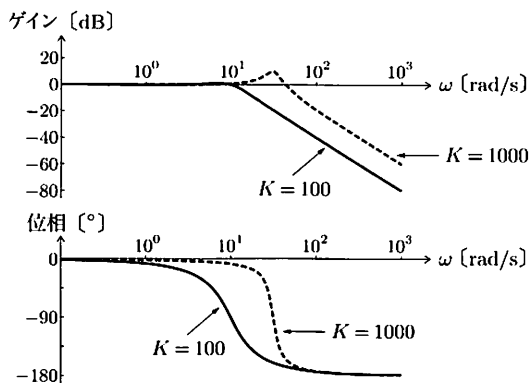


図 C.5

7 (1) I 補償器 (2) $W(s) = \frac{10K}{s^3 + 11s^2 + 10s + 10K}$

(3) 1 型 (4) $0 < K < 11$ (5) $5 \leq K < 11$

8 PI 補償器, あるいは位相遅れ補償器. $0 < K_I < 2K_P$.

9 $y(t) = \sin(t - 90^\circ)$

10 (1) 二つの原理は、時間領域における「重ね合わせの理」と、周波数領域における「周波数応答の原理」である。それぞれについての説明は、本文を参考に作文せよ。

(2) たとえば、[4] (3) で描いた一巡伝達関数のボード線図は、低域においてゲイン特性が 0 dB よりも大きいのが、フィードバックシステムは安定である。

11 (1) $G(s) = \frac{10}{(s+1)(0.1s+1)} = \frac{100}{s^2 + 11s + 10}$

$$(2) \quad g(t) = \frac{100}{9}(e^{-t} - e^{-10t})u_s(t)$$

(3) 状態空間表現の一例を次に示す.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

(4) 略

$$\boxed{12} \quad (1) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

$$(2) \quad e^{At} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4e^{-t} - e^{-4t} & e^{-t} - e^{-4t} \\ -4e^{-t} + 4e^{-4t} & -e^{-t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix} u_s(k)$$

$$(3) \quad y(t) = (0.25 + e^{-t} - 0.25e^{-4t})u_s(t)$$

(4) たとえば, (1)で求めた伝達関数から, 定常ゲインは

$$G(s)|_{s=0} = 0.25$$

である. 一方, (3)で求めたステップ応答において, $t \rightarrow \infty$ とすると $y(\infty) = 0.25$ になるので, 定常特性は正しく求められていることがわかる.

$$(5) \quad \zeta = 1.25, \quad \omega_n = 2$$

(6) $\det(sI - A) = s^2 + 5s + 4 = 0$ を解くと, 固有値は $s = -1, -4$ となる. これは伝達関数の極と一致する.

$$\boxed{13} \quad (1) \quad \text{たとえば,}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}$$

とすると, 次式が得られる.

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \bar{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} j0.5 \\ -j0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^T = c^T T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 略

$$\boxed{14} \quad (1) \quad S(s) = \frac{1}{1+L(s)}, \quad T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$(2) \quad e(s) = F(s)S(s)r(s) - S(s)w(s) - S(s)d(s)$$

$$(3) \quad u(s) = F(s)C(s)S(s)r(s) - C(s)S(s)w(s) - C(s)S(s)d(s)$$

(4) (1)の結果より、次の恒等式が得られる。

$$S(s) + T(s) \equiv 1, \quad \forall s$$

たとえば、 $L(s) = 1/s(s+1)$ とした場合、

$$S(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + s + 1}, \quad T(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

となる。この場合の $|T(j\omega)|$ と $|S(j\omega)|$ を図 C.6 に示す。この図より、 $S + T \equiv 1$ が成り立っており、ある周波数で S と T を同時に小さく（あるいは大きく）することはできないことがわかる。

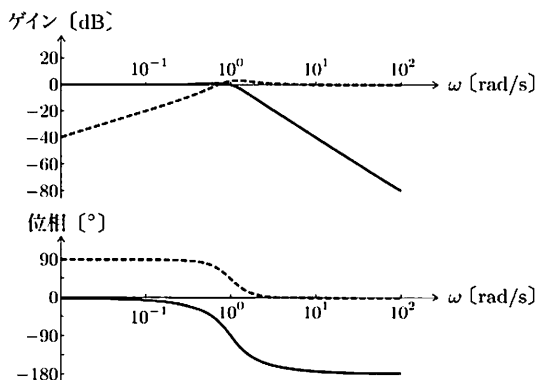


図 C.6

$\boxed{15}$ (1) 時定数 T が小さいほど、高周波数までゲインの大きさが 0 dB の値をとり続ける。すなわち、センサのバンド幅が高くなるので、速い動きまで測定できる。よって、 T は小さいほうがよい。

$$(2) \quad (a) \quad L(s) = \frac{5K}{2Ts^2 + (T+2)s + 1} \quad (b) \quad W(s) = \frac{\frac{5K}{2T}}{s^2 + \frac{T+2}{2T}s + \frac{5K+1}{2T}}$$

$$(c) \frac{1}{1+L(s)} = \frac{2Ts^2 + (T+2)s + 1}{2Ts^2 + (T+2)s + (5K+1)}$$

$$(3) K \geq 3.8$$

(4) 閉ループシステムの周波数伝達関数は,

$$W(j\omega) = \frac{5K\{(5K+1-2T\omega^2) - j\omega(T+2)\}}{(5K+1-2T\omega^2)^2 + (T+2)^2\omega^2}$$

となる。これより、ゲインと位相は次のようになる。

$$|W(j\omega)| = \frac{5K}{\sqrt{4T^2\omega^4 + (T^2 - 20KT + 4)\omega^2 + (5K+1)^2}}$$

$$\angle W(j\omega) = -\arctan \frac{(T+2)\omega}{5K+1-2T\omega^2}$$

$$(5) (a) K < \frac{T^2+4}{20T} \quad (b) K < \frac{T^2+4}{20T} + \left(0.2 + \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{T}}(T+2)\right)$$

$$(6) T < 0.053 \quad (T < 38 - 12\sqrt{10})$$

$$\boxed{16} \quad (1) L(s) = \frac{10K}{s+1}e^{-s}$$

$$(2) L(j\omega) = \frac{10K}{1+j\omega}e^{-j\omega} \text{ より, } |L(j\omega)| = \frac{10K}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle L(j\omega) = -\arctan \omega - \omega$$

$$(3) K < \frac{\sqrt{1+\omega_\pi^2}}{10}$$

(4) むだ時間 τ が大きくなると位相遅れが増大するので、フィードバック制御系の位相余裕が減少し、不安定になりやすい。

本書では、制御に関するさまざまな著書、論文を参考にしたが、その中で代表的なものだけを以下に列挙する。

- [1] 樋口龍雄：「自動制御理論」，森北出版，1989.
- [2] 小林申明：「基礎制御工学」，共立出版，1988.
- [3] 杉江・藤田：「フィードバック制御入門」，コロナ社，1999.
- [4] 片山 徹：「新版 フィードバック制御の基礎」，朝倉書店，2002.
- [5] 北森俊行：「制御系の設計」，オーム社，1991.
- [6] 須田信英ほか：「PID 制御」，朝倉書店，1992.
- [7] 大須賀・足立：「システム制御へのアプローチ」，コロナ社，1999.
- [8] 野波・水野 編：「制御の事典」，朝倉書店，2015.
- [9] 足立修一：「信号・システム理論の基礎——フーリエ解析，ラプラス変換， z 変換を系統的に学ぶ」，コロナ社，2014.
- [10] 足立修一：「システム同定の基礎」，東京電機大学出版局，2009.
- [11] G. F. Franklin, J. D. Powell and A. Emami-Naeini : *Feedback Control of Dynamic Systems* (6th edition), Addison-Wesley Publishing Co., 2011.
- [12] K. J. Åström and R. M. Murray : *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008.
- [13] F. Golnaraghi and B. C. Kuo : *Automatic Control Systems* (9th edition), Wiley, 2009.
- [14] K. Ogata : *Modern Control Engineering* (5th edition), Prentice-Hall, 2009.
- [15] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum : *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co., 1992.

索引

■ 数字

- 0 型の制御系 200
- 1 型の制御系 200
- 1 次遅れ系 47
- 1 次遅れ要素 47, 91
- 1 次進み系 53
- 1 次進み要素 53, 92
- 1 自由度制御系 139
- 1 デカード 83
- 2 型の制御系 200
- 2 次遅れ系 54
- 2 次遅れ要素 54, 95
- 2 自由度制御系 140

■ B

- BIBO 安定 142

■ D

- δ 関数 23

■ L

- LTI システム 34

■ M

- M ピーク値 97

■ N

- n 次系 41

■ P

- PD 補償器 220
- PID 補償 220
- PI 補償器 219
- P 制御 217

■ S

- s 平面 8

■ あ

- アドバンストループ整形法 221
- アナロジー 7
- 安定 142
 - 行列 152
 - 限界 11, 147

■ い

- 行き過ぎ時間 58, 181
- 行き過ぎ量 58
- 位相 21
 - 遅れ補償 218
 - 遅れ要素 91, 94
 - 進み遅れ補償 220
 - 進み補償 219
 - 進み要素 88, 94
 - 線図 83
 - 特性 77
 - 平面 109
 - 余裕 175
- 一巡伝達関数 134
- 位置フィードバック 240
- 因果信号 22
- インパルス応答 36
- インプロバー 41

■ お

- オイラーの関係式 21
- 遅れ時間 181
- 折線近似法 88
- 折点周波数 88

■ か

- 外部記述 106
- 外乱 131
 - 抑制 131

開ループ伝達関数 134
 角周波数 5
 重ね合わせの理 33, 34
 加算器 71
 過制動 56
 片側指数信号 24
 片側正弦波信号 24
 過渡応答 180
 過渡特性 179
 還送差 156
 感度関数 198

■ き

北森法 243
 既約 144
 逆応答 187
 逆システム 90, 131
 共振 190
 — 周波数 96, 190
 極 8, 29, 41
 極座標表現 21
 極零相殺 133, 156
 近似微分要素 45, 88

■ け

係数倍器 71
 ゲイン線図 83
 ゲイン特性 77
 ゲイン補償 217
 ゲイン余裕 175
 減衰性 181
 減衰比 54
 現代制御 246
 厳密にプロパー 41, 109

■ こ

高域通過フィルタ 89
 広帯域化 190
 固有角周波数 10, 54
 根軌跡 193
 — 法 160
 コントローラ 130
 コントロール 1

■ さ

サーボ 130
 — 系 201

最小位相系 98, 187
 最大行き過ぎ量 181
 参照信号 130
 参照モデル 233
 — 法 233

■ し

時間領域 37
 システム 4, 33
 — 同定 17, 102
 持続振動 56, 59
 実現 122
 時定数 45, 47
 時不変システム 34
 時変システム 34
 遮断周波数 91
 自由応答 119
 周波数応答 77
 — の原理 34, 77
 周波数伝達関数 77
 周波数特性 77
 周波数領域 74
 出力フィードバック 245
 出力方程式 108
 状態空間表現 108
 状態遷移行列 117
 状態フィードバック 246
 状態変数 106
 状態方程式 108
 情報の世界 14
 信号 4

■ す

数学モデル 17, 33
 ステップ応答 8, 34
 — 試験 179
 ステップ入力 8

■ せ

正帰還 72
 制御 1
 — 系 129
 — 系設計 15
 — 系設計仕様 210
 — 則の設計 15, 16
 — 対象 130
 — 入力 130

— 量 130

正弦波掃引法 102

整定時間 48, 181

性能 179

積分 232

— 器 46, 71

— 要素 46, 90

絶対可積分 143

絶対値 21

ゼロ状態応答 119

全域通過関数 97

全域通過フィルタ 137

線形システム 34

線形時不変システム 34

■ そ

操作量 130

相補感度関数 198

速応性 181

速度フィードバック 240

■ た

帯域幅 92, 137

第一原理モデリング 17

代数的に等価 116

ダイナミクス 4

代表極 182

代表根法 184

代表特性根 182

ダイポール 187

たたみ込み積分 28, 37

立ち上がり時間 181

単位インパルス信号 23

単位ステップ応答 34

単位ステップ信号 24

単一フィードバック接続 64

単位ランプ信号 24

ダンパ 6

■ ち

直流 (DC) ゲイン 45

直列接続 62

直列補償 133

直結フィードバック制御系 133

直結フィードバック接続 64

直交座標表現 20

■ て

低域通過フィルタ 91, 137

定位系 200

低感度化 138, 199

定常位置偏差 200

定常応答 180

定常加速度偏差 201

定常ゲイン 45, 180

定常速度偏差 201

定常特性 179

適切 171

デシベル表示 82

デルタ関数 23

伝達関数 5, 40

■ と

等加速度運動 8

動作点 34

動特性 4

動力学 4

特性根 41, 144

特性多項式 144

特性方程式 8, 41, 144

トレードオフ 199

■ な

ナイキスト線図 86

内部安定 172

— 性 171

内部記述 106

内部モデル原理 208

■ に

入出力安定 142

ニュートンの運動方程式 4

■ は

パーセントオーバーシュート 181

バイプロバー 41

パデ近似 61, 101

バネ 6

— ・マス・ダンパシステム 6

バンド幅 92, 188

■ ひ

ピークゲイン 97, 188, 190

ピーク周波数 96, 190

非最小位相系 100, 187

非線形システム 34

左半平面 8

微分 232

—器 45

—要素 45, 86

比例 232

—コントローラ 12, 137

—制御 217

—要素 86

■ ふ

不安定 8

—系 129

—な極零相殺 173

フィードバック 135

—制御 11

—接続 63

—補償 134

負帰還 72

不足制動 56, 57

物理の世界 14

部分的モデルマッチング法 235

部分分数展開 29

プラント 130

プロセス制御 232

ブロック線図 4, 62

プロパー 41

■ へ

閉ループ伝達関数 12, 134

並列接続 63

ベクトル軌跡 84

偏差 11

—信号 134

■ ほ

ボード線図 82, 85

補償器 130

■ ま

マイナーフィードバックループ 240

マス 6

■ む

むだ時間 26

—要素 61, 97

無定位置系 200

■ め

メカトロニクス 17, 66

■ も

モード 145

—展開 145

—展開表現 180

目標値 130

—追従 130

モデリング 6, 33

モデルの不確かさ 132

■ ゆ

有界な 142

■ ら

ラウス＝フルビッツの安定判別法 150

ラウス数列 150

ラウスの安定判別法 150

ラウス表 149

ラプラス変換 22

■ り

留数 29

臨界制動 56, 57

■ る

ループ整形 211

—法 221

■ れ

零点 29, 41

レギュレータ 130

■ ろ

ロールオフ特性 212

ロバスト安定性 211

ロバスト性 132

【著者紹介】

足立修一（あだち・しゅういち）

学 歴 慶應義塾大学大学院工学研究科博士課程修了，工学博士（1986 年）
職 歴 （株）東芝総合研究所（1986～1990 年）
宇都宮大学工学部電気電子工学科 助教授（1990 年），教授（2002 年）
航空宇宙技術研究所 客員研究官（1993～1996 年）
ケンブリッジ大学工学部 客員研究員（2003～2004 年）
現 在 慶應義塾大学理工学部物理情報工学科 教授（2006 年～）

制御工学の基礎

2016 年 4 月 20 日 第 1 版 1 刷発行
2020 年 2 月 20 日 第 1 版 3 刷発行

ISBN 978-4-501-11750-4 C3054

著 者 足立修一

©Adachi Shuichi 2016

発行所 学校法人 東京電機大学 〒120-8551 東京都足立区千住旭町 5 番
東京電機大学出版局 Tel. 03-5284-5386(営業) 03-5284-5385(編集)
Fax. 03-5284-5387 振替口座 00160-5-71715
<https://www.tdupress.jp/>

JCOPY <(社)出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の全部または一部を無断で複写複製(コピーおよび電子化を含む)することは、著作権法上での例外を除いて禁じられています。本書からの複製を希望される場合は、そのつど事前に、(社)出版者著作権管理機構の許諾を得てください。また、本書を代行業者等の第三者に依頼してスキャンやデジタル化をすることはたとえ個人や家庭内での利用であっても、いっさい認められておりません。

[連絡先] Tel. 03-5244-5088, Fax. 03-5244-5089, E-mail: info@jcopy.or.jp

制作：(株)グラベルロード 印刷：三美印刷(株) 製本：誠製本(株)

装丁：齋藤山美子

落丁・乱丁本はお取り替えいたします。

Printed in Japan