第15章 期末試験

本書を学習した総まとめとして期末試験問題を解いてみよう．

1 長さ l，質量 m の振子にトルク $T(t)$ を印加すると，振子の角度 $\theta(t)$ は，$\theta \approx 0$ では，

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = u(t)$$

を満たす．ただし，g は重力加速度であり，$u(t) = T(t)/ml^2$ とおいた．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 入力を $u(t)$，出力を $y(t) = \theta(t)$ としたシステムの伝達関数 $G(s)$ を求めなさい．

(2) $x_1(t) = \theta(t)$，$x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ とするとき，それらに対応する状態空間表現の係数 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, d を求めなさい．

(3) このシステムの固有周波数 ω_n と減衰比 ζ を求めなさい．

(4) このシステムのインパルス応答 $g(t)$ を計算しなさい．

(5) (4) で求めたインパルス応答 $g(t)$ を用いて，このシステムの安定性を調べなさい．

2 次の問いに答えなさい．

(1) 1入力1出力 n 状態の線形システムの状態空間表現を正確に書きなさい．

(2) 状態空間表現の係数が，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

で与えられるとき，

(a) このシステムの伝達関数 $G(s)$ を求めなさい．

(b) このシステムの状態遷移行列 e^{At} を計算しなさい．

(c) このシステムのインパルス応答を計算して，それを図示しなさい．

3　伝達関数が

$$G(s) = \frac{100s + 1}{s(s + 0.1)(0.1s + 1)}$$

で与えられる制御対象について，次の問いに答えなさい．

(1) $G(s)$ を基本要素の積の形に分解しなさい．

(2) この伝達関数のボード線図を描きなさい．ただし，ゲイン線図は折線近似法を用いて描き，位相線図は概形を描きなさい．

4　制御対象 $P(s)$ とコントローラ $C(s)$ がそれぞれ

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad C(s) = \frac{K(Ts+1)}{0.01s+1}, \qquad K > 0, \quad T > 0$$

で与えられる直結フィードバック制御系について，次の問いに答えなさい．

(1) このフィードバックシステムが安定になるために，K と T が満たすべき不等式を導きなさい．

(2) ゲイン K をいくら大きくしても，このフィードバック制御系が不安定にならない T の範囲を求めなさい．

(3) $T = 0.1$，$K = 1$ としたとき，一巡伝達関数 $L(s)$ のボード線図（ゲインと位相）を描きなさい．

(4) (3) で描いたボード線図を用いて，(2) の状況を考察しなさい．

5　図15.1に示す，外乱を含むフィードバック制御系において，

$$P(s) = \frac{1}{s(s+0.1)(s+9.9)}, \qquad C(s) = K$$

とする．このとき，次の問いに答えなさい．ただし，数式は降べきの順で記述しなさい．

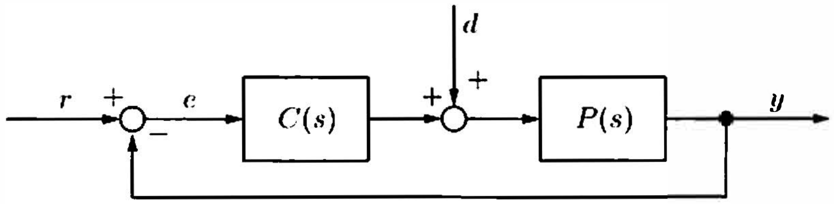

図 15.1

(1) 一巡伝達関数 $L(s)$ を求めなさい．

(2) r から y までの閉ループ伝達関数 $W(s)$ を求めなさい．

(3) (2) で求めた閉ループシステムが安定になる K の範囲を求めなさい．

(4) d から e までの伝達関数を計算しなさい．

(5) d が単位ステップ外乱のとき，定常位置偏差の大きさを 0.5 より小さくしたいとする．このとき，K の範囲を求めなさい．ただし，$r = 0$ とする．

6 一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K}{s(s+10)}$$

である直結フィードバック制御系を考える．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $K = 16$ としたとき，

(a) 閉ループ伝達関数 $W(s)$ を求めなさい．

(b) 閉ループシステムの固有周波数 ω_n と減衰比 ζ を求めなさい．

(c) $W(s)$ のボード線図を描きなさい．

(d) この閉ループシステムの特徴を定量的に述べなさい．

(2) K を 100, 1000 と増加させていくと，(1)-(c) で描いたゲイン線図がどのようになるかを図中に示し，その結果について考察しなさい．

7 直結フィードバック制御系において，

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}, \qquad C(s) = \frac{K}{s}$$

とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) このコントローラ $C(s)$ の名称を答えなさい．

(2) 閉ループ伝達関数 $W(s)$ を求めなさい．

(3) このシステムの型を答えなさい．

(4) フィードバックシステムが安定になるための K の範囲を求めなさい．

(5) 目標値 r がランプ信号のとき，定常偏差が0.2 以下になるように K の範囲を求めなさい．

8 直結フィードバック制御系において，

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \qquad C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

とする．このコントローラ $C(s)$ の名称を答えなさい．次に，このフィードバック制御系が安定となる K_P, K_I の範囲を求めなさい．

9 直結フィードバック制御系を考え，その一巡伝達関数を

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

とする．目標値として $r(t) = \sin t$ を入力したとき，出力 $y(t)$ を求めなさい．

10 次の問いに答えなさい．

(1) 線形システムを特徴付ける二つの原理を挙げ，簡単に説明しなさい．

(2) スモールゲイン定理の条件 $|L(j\omega)| < 1, \forall\omega$ は十分条件であること，すなわち，この条件を満たさなくても，安定なフィードバックシステムが存在することを，具体的な例を用いて示しなさい．

11 図15.2に示すゲイン特性を持つ LTI システムについて，次の問いに答えなさい．ただし，図において $a = 20$ dB，$\omega_1 = 1$ rad/s，$\omega_2 = 10$ rad/s とする．

(1) 図15.2のゲイン特性を持つ伝達関数 $G(s)$ を求めなさい．ただし，図15.2は折線近似法を用いて作図されている．また，対象は最小位相系（s 平面の右半平面に零点を持たないシステムのこと）とする．

(2) (1) で得られた伝達関数 $G(s)$ からインパルス応答 $g(t)$ を計算しなさい．

(3) (1) で得られた伝達関数 $G(s)$ を状態空間表現に変換しなさい．

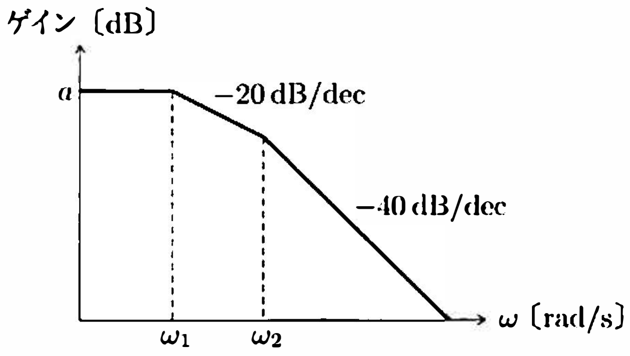

図 15.2

(4) (3) で求めた状態空間表現を伝達関数に変換し，(1) で求めたものと一致することを確かめなさい．

12 LTI システムが

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$$

のように状態空間表現されるとき，次の問いに答えなさい．ただし，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．

(1) このシステムの伝達関数を計算しなさい．

(2) このシステムの状態遷移行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ を計算しなさい．

(3) このシステムの単位ステップ応答を計算しなさい．

(4) (3) で計算した単位ステップ応答の概形が正しいかどうかをチェックする簡便な方法を示しなさい．

(5) このシステムの減衰比 ζ と固有周波数 ω_n を計算しなさい．

(6) この状態方程式の $\boldsymbol{A}$ 行列の固有値を計算し，それが何を意味するのかを述べなさい．

13 状態空間表現の係数が次のように与えられているとする．

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) システム行列 A を対角化し，対角行列 $\bar{A}$ を求めなさい．ただし，T を正則変換行列とし，$\bar{A}=T^{-1}AT$ とする．

(2) (1)で用いた正則変換行列 T を使って，b と c を変換し，$\bar{b}$ と $\bar{c}$ を求めなさい．

(3) もとのシステム (A, b, c) と正則変換された新しいシステム ($\bar{A}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) の伝達関数をそれぞれ計算し，両者が等しいことを確かめなさい．

14 図15.3に示すフィードバック制御系について，次の問いに答えなさい．

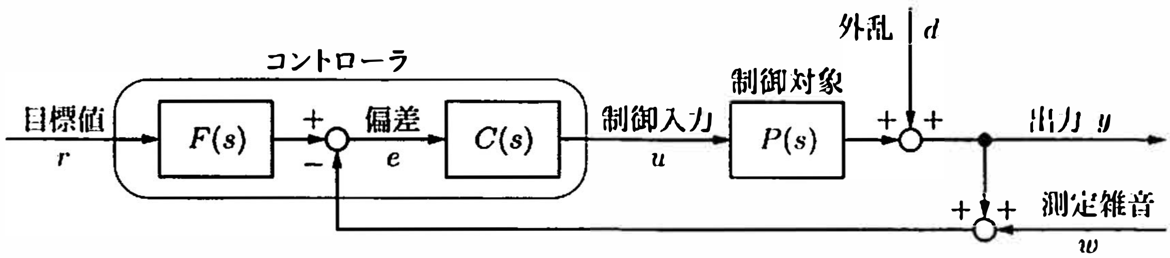

図15.3

(1) 図において，このフィードバック制御系の外部からの入力は，外乱 d，目標値 r，測定雑音 w の三つであり，外部への出力は y の一つである．いま，y を d, r, w の関数として記述すると，

$$y(s)=S(s)d(s)+T(s)F(s)r(s)-T(s)w(s)$$

が得られる．ここで，$S(s)$ は感度関数，$T(s)$ は相補感度関数である．このとき，$S(s)$ と $T(s)$ を，一巡伝達関数 $L(s)=P(s)C(s)$ を用いて表しなさい．

(2) 偏差 e を d, r, w の関数として記述しなさい．

(3) 制御入力 u を d, r, w の関数として記述しなさい．

(4) $S(s)$ と $T(s)$ の間に成り立つ恒等式を導きなさい．そして，典型的な $|S(j\omega)|$ と $|T(j\omega)|$ の概形を図示し，その図について考察しなさい．

15　図 15.4 に示す直結フィードバック制御系について，次の問いに答えなさい．ただし，

$$P(s) = \frac{5}{2s+1}, \qquad C(s) = K, \quad K > 0$$

とする．

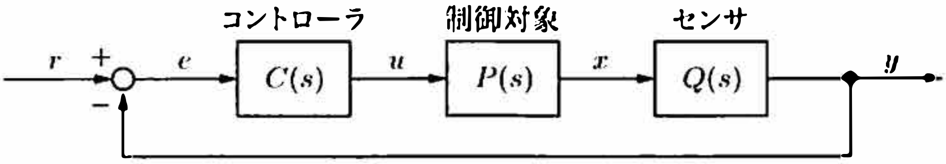

図 15.4

(1) センサの伝達関数を

$$Q(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

とする．このとき，センサの時定数 T がどのような値をとる場合に，良いセンサであると言えるのだろうか？ 周波数領域で考察しなさい．

(2) 次の伝達関数を計算しなさい．

(a) 一巡伝達関数 $L(s)$

(b) 閉ループ伝達関数 $W(s)$（r から y までの伝達関数）

(c) r から e までの伝達関数

(3) 目標値 r として単位ステップ信号を印加する．このとき，単位ステップ応答の定常偏差が 5 % 以下になるようなコントローラのゲイン K の範囲を求めなさい．

(4) 閉ループシステムの周波数伝達関数 $W(j\omega)$ を計算しなさい．そして，そのゲイン特性 $|W(j\omega)|$ と位相特性 $\angle W(j\omega)$ を計算しなさい．

(5) 閉ループ伝達関数のゲイン特性がすべての周波数帯域において 1 以下，すなわち，

$$|W(j\omega)| < 1, \ \forall\omega \quad \Leftrightarrow \quad \|W\|_\infty < 1$$

が成り立つような比例ゲイン K の範囲を，センサの時定数 T を用いて表したい．次の方法で求めなさい．

(a) 閉ループシステムは2次遅れ系なので，その定常ゲインが1以下で，減衰比 ζ が $1/\sqrt{2}$ より大きければ，常に $|W(j\omega)| < 1$ が成り立つ．この条件より，範囲を導きなさい．ただし，これは十分条件である．

(b) $|W(j\omega)| < 1, \forall\omega$ を厳密に解くことによって，範囲を導きなさい．

(6) (3)の条件と(5)-(a)の条件を同時に満たすような比例ゲイン K が存在するための，センサの時定数 T の範囲を求めなさい．ただし，(1)で考察したことを利用しなさい．

16 図15.5に示す直結フィードバック制御系を考える．ここで，τ はむだ時間であり，$\tau = 1$ とする．また，

$$P(s) = \frac{10}{s+1}, \qquad C(s) = K, \quad K > 0$$

とする．

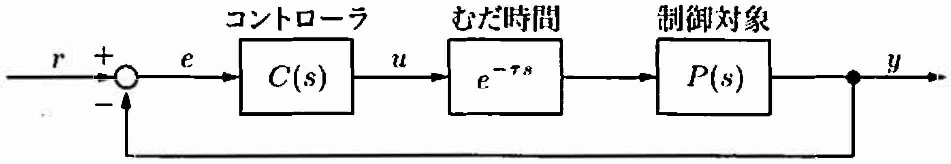

図15.5

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) このフィードバックシステムの一巡伝達関数 $L(s)$ を求めなさい．

(2) 一巡伝達関数の周波数伝達関数 $L(j\omega)$ を計算し，そのゲイン特性と位相特性を求めなさい．

(3) $L(j\omega)$ の位相が $-\pi$ となる最小の周波数を ω_π とする．このとき，このフィードバック系が安定であるための比例ゲイン K の範囲を，ナイキストの安定判別法により，ω_π を用いて表しなさい．

(4) むだ時間 τ の大きさとフィードバック系の安定性の関係について述べなさい．