第6章 状態空間表現

第3章から第5章で述べたインパルス応答，伝達関数，そして周波数伝達関数による LTI システムの表現は，システムの入出力関係に着目したものであり，システムの**外部記述**と呼ばれる．それに対して，1960 年代初頭にカルマンによって提案された状態空間表現は，システムの内部状態に着目したものであり，システムの**内部記述**と呼ばれる．制御対象を状態空間表現することにより，(本書の範囲を超えてしまうが) 現代制御理論やカルマンフィルタを適用することが可能になる．状態空間表現を理解するためには，ベクトルや行列など線形代数の知識が必要になるが，本章では 2×2 行列を取り扱うので，大学1年生程度の数学の知識で，ほとんどの部分は理解できるだろう[1]．

6.1 LTI システムの状態空間表現

第1章で述べたように，質量 m の質点に力 $u(t)$ を加えたとき，変位を $y(t)$ とすると，運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = u(t) \tag{6.1}$$

が導かれる．まず，この LTI システムを例にとって，このシステムの状態空間表現を導出しよう．

位置 $y(t)$ とその微分値である速度 $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$ を二つの**状態変数** (state variable) に選び，これらを $x_1(t), x_2(t)$ とおく．すなわち，

$$x_1(t) = y(t) \tag{6.2}$$

1. 本章では，現代制御のためのシステムの表現について述べるので，古典制御をまず習得したい読者は，本章をスキップしてもよいだろう．

$$x_2(t) = \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.3}$$

として，式 (6.2)，(6.3) をそれぞれさらに時間微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_2(t) \tag{6.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}u(t) \tag{6.5}$$

が得られる．ここで，式 (6.1) を用いた．

行列とベクトルを利用すると，式 (6.4)，(6.5) は，次のように簡潔に表現できる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \tag{6.6}$$

さらに，出力 $y(t)$ は次式のように表現できる．

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

式 (6.6)，(6.7) を LTI システムの状態空間表現という．

まず，状態変数の定義を次に与えよう．

✤ Point 6.1 ✤　状態変数

運動方程式の例では，状態変数として位置と速度を選んだ．一般に，状態変数とは，ある時刻の出力を求めるために必要な，その時刻以前のシステムの履歴に関する情報を含む量と定義される．したがって，状態変数はダイナミックシステムに特有なものであり，スタティックシステムには存在しない．

さて，式 (6.1) の LTI システムにおいて，入力 $u(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{ms^2}$$

であるので，このシステムは2次系である．この例より，2次系を状態空間表現するためには，最低二つの状態が必要である．

式 (6.6)，(6.7) の運動方程式の例を一般化すると，Point 6.2が得られる．

✤ Point 6.2 ✤　状態空間表現

入力が $u(t)$，出力が $y(t)$ である1入力1出力 LTI システム（n 次系とする）は，次式のように記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \tag{6.8}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t) \tag{6.9}$$

ここで，$\boldsymbol{x}(t)$ は n 次元状態ベクトルと呼ばれる．また，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 行列である．$\boldsymbol{b}$ は n 次元列ベクトルであり，システムに対して入力がどのように影響するかというアクチュエータの情報を表している．$\boldsymbol{c}$ も n 次元列ベクトルであり，測定値がどのように観測されるかというセンサの情報を表している．d はスカラであり，直達項を表す．さらに，^{T} は行列の転置を表す．

このとき，式 (6.6) を**状態方程式** (state equation)，式 (6.7) を**出力方程式** (output equation) といい，両者をあわせて**状態空間表現** (state-space description) という．

n 次系は本来 n 階微分方程式で記述されるが，n 次元状態ベクトルを導入することによって，1階の行列微分方程式（すなわち1次系）に変換される点が，状態空間表現の特徴である．

状態方程式を用いたシステムの表現を図6.1に示す（図では直達項は無視した）．第3～5章では，入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の直接的な関係，すなわち入出力関係を考えてきたが，状態空間表現では入力 $u(t)$ から状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$ へ，状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$ から出力 $y(t)$ へと，2段階に分けて考えているところが，それらの章と異なっている．カルマンによって，入出力に次ぐ第3の量である状態変数が導入されたことによって，制御工学は大きく進展した．

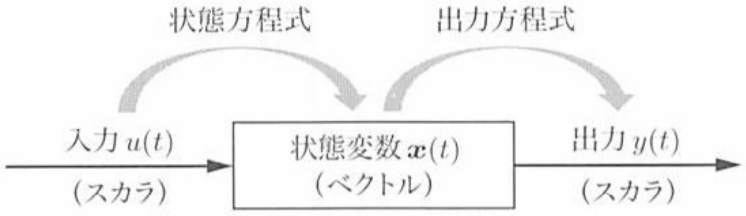

図6.1　状態変数を用いたシステムの表現

【注意 1】 本書では，行列は $\boldsymbol{A}$ のように大文字の太字で，断りがなければベクトルは列ベクトルとし，$\boldsymbol{b}$ のように小文字の太字で表記する．

【注意 2】 本書では，1入力1出力システムに限定して説明していくが，状態空間表現は多入力多出力システムへ容易に拡張できる．この拡張性は状態空間表現の特徴である．

【注意 3】 横軸を位置，縦軸を速度とする平面は，力学の世界（あるいは，常微分方程式の世界）では**位相平面**（あるいは，相平面）として，カルマンが状態空間表現を提案する前から知られていた（図6.2参照）．また，次元が 3 以上の場合には位相空間（あるいは，相空間）と呼ばれる．カルマンは，これらの考え方を巧みにシステム制御理論に取り入れた．

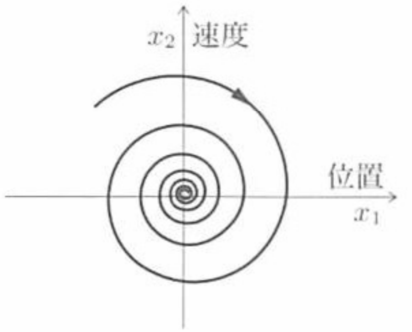

図6.2 横軸を位置，縦軸を速度とした位相平面（状態空間）

式(6.6)，(6.7) と式(6.8)，(6.9) をそれぞれ比較すると，次式が得られる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

この例では $d = 0$ となったが，伝達関数が**厳密にプロパー**な場合には，必ず $d = 0$ となる．一方，伝達関数がバイプロパーな場合には d は値を持つ．

例題を通して，状態空間表現の導出法を理解していこう．

例題 6.1

微分方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ky(t) = u(t)$$

で記述されるバネ・マス・ダンパシステムの状態空間表現を求めなさい．

コラム3 ── カルマン（Rudolf E. Kalman）（1930〜）

カルマンはハンガリーのブダペストで生まれた．第2次世界大戦の戦火を逃れるために，1944年に一家で米国に入国した．その後，1951年にMIT（マサチューセッツ工科大学）に入学し，1953年に電気工学の学士号，1954年に修士号を取得した．彼の修士論文のテーマは「2次差分方程式の解の挙動」であった．1957年にコロンビア大学でPh.D（博士号）を取得した．

1960年前後に，本章で説明したシステムの状態空間表現を提唱し，それに基づく制御系設計法である「現代制御理論」と，制御系設計と双対問題であるフィルタリングに対する「カルマンフィルタ」を相次いで提案した．

彼はIBM研究所を経て，1964年にスタンフォード大学教授となり，1971年にはフロリダ大学で数学的システム論センター教授と所長を兼任した．さらに，1973年からはスイス連邦工科大学（ETH）の数学的システム論講座の教授を兼任した．夏は涼しいスイスで，冬は暖かいフロリダで過ごしたそうである．

1985年に京都賞（先端技術部門賞）を受賞した．2008年には，慣性航法の父と呼ばれるドレイパーの名を冠したDraper Prizeを受賞した．この賞は「カルマンフィルタとして知られる最適ディジタル技術の開発と普及」に対して贈られた．

カルマンは近代的な制御理論の基礎を築いた「制御理論の父」である．

2009年に米国国家科学賞を受賞した際のカルマン教授

解答 $y(t)$ と $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$ を二つの状態変数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ に選ぶと,

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_2(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\left(-c\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - ky(t) + u(t)\right) = -\frac{c}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

が得られる．これをまとめると，状態空間表現

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

を得る． ■

例題 6.2

2 次遅れ系の標準形

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

の状態空間表現を求めなさい．

解答 例題6.1 と同じように計算すると，このシステムの状態空間表現は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u(t) \tag{6.10}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

となる． ■

例題 6.3 （振子の状態空間表現）

図6.3 に示す長さ l，質量 m の振子は，摩擦がないと仮定すると，運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_n^2 \sin\theta(t) = \frac{1}{ml^2}T(t)$$

を満たす．ただし，$\omega_n = \sqrt{g/l}$ であり，g は重力加速度である．トルク $T(t)$ を入力，角度 $\theta(t)$ を出力とするとき，この運動方程式を $\theta = 0$ のまわりで線形化して，

状態方程式を導きなさい．ただし，状態変数を $x_1(t) = \omega_n\theta(t)$，$x_2(t) = \mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t$ とおく．

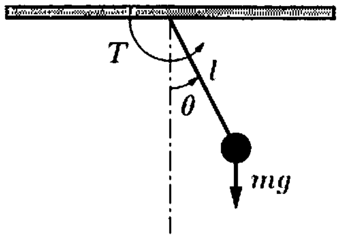

図6.3

解答　二つの状態変数の微分は，それぞれ次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_n x_2(t) \tag{6.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega_n^2 \sin\left(\frac{x_1(t)}{\omega_n}\right) + \frac{1}{ml^2}T(t) \tag{6.13}$$

$\theta = 0$，すなわち $x_1 = 0$ のまわりで $\sin x_1$ を線形化すると，$\sin x_1 \approx x_1$ となる．これを用いると，式 (6.13) は，

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega_n x_1(t) + \frac{1}{ml^2}T(t) \tag{6.14}$$

と近似できる．式 (6.12) と式 (6.14) をまとめると，次の状態空間表現が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix} T(t) \tag{6.15}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\omega_n} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

これは，外生入力（強制項）を持つ振子の単振動の状態空間表現である．■

6.2　状態空間表現と伝達関数の関係

式 (6.8)，(6.9) の状態空間表現を，初期値を 0 としてラプラス変換すると，

$$s\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{b}u(s) \tag{6.17}$$

$$y(s) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(s) + du(s) \tag{6.18}$$

が得られる．ただし，$\boldsymbol{x}(s) = \mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)]$，$u(s) = \mathcal{L}[u(t)]$，$y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ とおいた．式 (6.17) より，

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{b}u(s)$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．よって，$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ が正則行列であれば，

$$\boldsymbol{x}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}u(s)$$

となる．これを式 (6.18) に代入すると，

$$y(s) = \left[d + \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\right]u(s)$$

となる．以上より，Point 6.3 を得る．

✤ Point 6.3 ✤ 状態空間表現から伝達関数への変換

入力 $u(s)$ から出力 $y(s)$ までの伝達関数は，状態空間表現の $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$ より次のように計算できる．

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = d + \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = d + \frac{\boldsymbol{c}^T \mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{b}}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} \tag{6.19}$$

ただし，$\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ は余因子行列を，$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ は行列式を表す．

式 (6.19) から明らかなように，伝達関数の分母多項式は状態方程式の行列 $\boldsymbol{A}$ のみに依存する．また，システムの極は，$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ の根，すなわち，行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値に一致する．一方，システムの零点は，主に $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$，すなわち，アクチュエータとセンサの情報に依存する．

例題 6.4

例題 6.1 で導出した状態空間表現から伝達関数を計算しなさい．

解答 まず，$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ を計算する．

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{k}{m} & s + \dfrac{c}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}\begin{bmatrix} ms + c & m \\ -k & ms \end{bmatrix}$$

よって，伝達関数は次式となる．

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} \\
&= \frac{1}{ms^2 + cs + k}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ms + c & m \\ -k & ms \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}
\end{aligned}
$$

このように，もとのバネ・マス・ダンパシステムの伝達関数が得られた．■

例題 6.5

状態空間表現

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)
\end{aligned}
$$

で記述される LTI システムの伝達関数を計算しなさい．

解答　伝達関数は

$$
G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + s}
$$

となる．■

例題 6.6

例題6.3 で導出した振子の状態空間表現から伝達関数を計算しなさい．そして，極を計算しなさい．

解答　伝達関数は，

$$
G(s) = \frac{\dfrac{1}{ml^2}}{s^2 + \omega_n^2}
$$

となる．これより，極は $s = \pm j\omega_n$ となる．この例題では減衰のない単振動なので，極は s 平面の虚軸上に二つ存在する．■

6.3　代数的に等価なシステム

正則行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて状態ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t) \tag{6.20}$$

のように1次変換すると，新しい状態ベクトル $\boldsymbol{z}(t)$ が得られる．これより，

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) \tag{6.21}$$

が得られ，この関係式をもとの状態方程式 (6.8) に代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$$

となる．両辺に左から $\boldsymbol{T}^{-1}$ を乗じると，新しい状態変数 $\boldsymbol{z}(t)$ に関する状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}u(t) \tag{6.22}$$

が得られる．また，式 (6.21) を式 (6.9) に代入すると，新しい出力方程式

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) + du(t) \tag{6.23}$$

が得られる．

以上より，新しい状態ベクトル $\boldsymbol{z}(t)$ に対する状態空間表現を

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z}(t) = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}(t) + \bar{\boldsymbol{b}}u(t) \tag{6.24}$$

$$y(t) = \bar{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{z}(t) + \bar{d}u(t) \tag{6.25}$$

と記述し，もとの状態空間表現と係数比較を行うことにより，次の関係式が得られる．

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \bar{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}, \quad \bar{d} = d \tag{6.26}$$

たとえば，式 (6.1) の運動方程式の例において，状態変数の順番を入れ替えて，新しい状態変数として，$z_1(t)$ を速度，$z_2(t)$ を変位と選んでみよう．すなわち，

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}$$

とする．すると，式 (6.6)，(6.7) は，それぞれ次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{6.27}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

これは，正則変換行列 $\boldsymbol{T}$ を

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

と選んだ場合に対応する．このとき，式 (6.26) が成り立っていることは，次のようにして確かめられる．

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

次に，式 (6.24)，(6.25) の新しい状態空間表現より，伝達関数（$\bar{G}(s)$ とする）を計算すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} \bar{G}(s) &= \bar{d} + \bar{\boldsymbol{c}}^T(s\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{b}} \\ &= d + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= d + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= d + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}\left[\boldsymbol{T}^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{T}\right]^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= d + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= d + \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = G(s) \end{aligned} \tag{6.30}$$

以上の計算より，もとの状態方程式の伝達関数と一致することがわかる．ここで，次の関係式を用いた．

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

✤ Point 6.4 ✤　代数的に等価なシステム

正則変換行列 $\boldsymbol{T}$ によって状態ベクトルを1次変換しても，システムの伝達関数は変化しない．このような関係を代数的に等価であるという．言い換えると，伝

達関数のような外部記述は LTI システムに対して一意に決まるが，状態空間表現のような内部記述は正則変換の数だけ自由度がある．

6.4　状態方程式の解

式 (6.8) の行列形式の 1 階微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{6.31}$$

の解を求める問題を考えよう．この微分方程式は線形なので，初期値に対する応答と入力に対する応答を別々に計算し，最後にそれらを重ね合わせることにする．

まず，$u(t) = 0$ $(\forall t)$ とし，初期値に対する応答を計算しよう．すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{6.32}$$

を考える．いま，システムが1次系の場合には，式 (6.32) はスカラ微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{6.33}$$

となり，この解は，

$$x(t) = e^{at}x_0 \tag{6.34}$$

となる．これより，システムが2次以上の場合には，式 (6.32) の解は次のようになることが予想できる．

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 \tag{6.35}$$

このとき，$e^{\boldsymbol{A}t}$ を**状態遷移行列**（state transition matrix）と呼び，指数関数のテイラー展開に基づいて次式のように定義する．

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k \tag{6.36}$$

このように，$e^{\boldsymbol{A}t}$ は $(n \times n)$ 行列であることに注意する．状態遷移行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ は次のような性質を持つ．

1. 微分：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}$

2. 逆行列：$(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$

3. 乗算：$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t+\tau)}$

式 (6.35) を式 (6.32) に代入し，微分の性質を利用すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0\right) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

が得られ，式 (6.35) が式 (6.32) の解であることを確認できた．

次に，逆ラプラス変換を用いた状態遷移行列 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ の計算法を与えよう．まず，

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{6.37}$$

とおく．この $\boldsymbol{\Phi}(t)$ は自由応答の解なので，次式が成り立つ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t), \quad \boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{I} \tag{6.38}$$

この行列微分方程式をラプラス変換すると，

$$s\boldsymbol{\Phi}(s) - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(s)$$

となる．ただし，$\boldsymbol{\Phi}(s) = \mathcal{L}[\boldsymbol{\Phi}(t)]$ とおいた．これより，

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$$

となり，次の Point 6.5 が得られる．

✣ Point 6.5 ✣　状態遷移行列の計算法

状態遷移行列 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ は，逆ラプラス変換を用いることにより，次式のように計算できる．

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}] \tag{6.39}$$

例題 6.7

A 行列が次式で与えられるとき，e^{At} を計算しなさい．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

解答

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \\ -\dfrac{2}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

となり，したがって，

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

となる． ■

以上では，自由応答に対する解について考えてきたが，入力による影響も考慮した状態方程式の一般解は，次式のようになる．

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.40}$$

ここで，式 (6.40) 右辺第 2 項が入力による影響であり，状態遷移行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ と入力の影響 $\boldsymbol{b}u(\tau)$ とのたたみ込み積分になっている．さらに，式 (6.40) を式 (6.9) に代入すると，出力は次式のようになる．

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{c}^T e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau + du(t) \tag{6.41}$$

ここで，式 (6.41) 右辺第 1 項を**自由応答**（free response）（あるいは初期値応答），右辺第 2 項を**ゼロ状態応答**（zero-state response）と呼ぶ．

例題 6.8

状態空間表現

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

で記述される LTI システムに単位ステップ信号を入力したときの出力信号，すなわちステップ応答を計算しなさい．

解答　まず，逆ラプラス変換を用いて状態遷移行列を計算すると，

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

を得る．これを式 (6.40) に代入すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\qquad + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2e^{-t} \\ 0.5 - 2e^{-t} + 2.5e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

となる．ここで，入力は単位ステップ信号，すなわち，$u(t) = 1$（$t \geq 0$）であることを利用した．したがって，

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) = 0.5 - 2e^{-t} + 2.5e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

が得られる．　■

6.5　基本演算素子を用いた状態空間表現の回路実現

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_1 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 u(t)$$

によって記述される2次系を例にとって，基本演算素子を用いた状態空間表現の回路実現について説明する．

初期値を 0 とおいてラプラス変換することにより，このシステムの伝達関数は

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{6.42}$$

となる．この伝達関数を，

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

とおく．ただし，

$$A(s) = s^2 + a_1 s + a_0, \quad B(s) = b_1 s + b_0$$

とおいた．

いま，$u(s)$ から $z(s)$ を介して $y(s)$ に到達するとする．すなわち，

$$z(s) = \frac{1}{A(s)} u(s) \tag{6.43}$$

$$y(s) = B(s) z(s) \tag{6.44}$$

とおく．式 (6.43) の分母を払って，微分方程式に変換すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 z(t) = u(t)$$

が得られる．これより次式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -a_1 \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 z(t) + u(t)$$

次に，式 (6.44) を微分方程式に変換すると，

$$y(t) = b_1 \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 z(t)$$

が得られる．状態変数として，$x_1(t) = z(t)$，$x_2(t) = \mathrm{d}z(t)/\mathrm{d}t$ とおくと，次式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_2(t) \tag{6.45}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x_1(t)}{\mathrm{d}t^2} = -a_1\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - a_0 z(t) + u(t) \tag{6.46}$$

これより，次の状態空間表現が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{6.47}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

式(6.47)，(6.48)より，システムの基本演算素子による回路実現は，図6.4のようになる．

この例から明らかなように，システムの伝達関数表現からシステムの回路実現，すなわち状態空間表現を導くことができる．このように，システムの伝達関数表現を状態空間表現に変換することは，システムを回路実現することに対応するので，システムの**実現**（realization）と呼ばれる．図6.4の実現形式は，可制御正準系と呼ばれる，制御系設計にとって重要な形式である．これ以外にも回路実現する方法はある．また，図6.4より，システムの次数は（この場合は2であるが），回路実現するために最低限必要な積分器の個数と定義することもできる．

以上では，2階微分方程式によってLTIシステムが記述できる場合の回路実現を示したが，一般的な微分方程式も同様に回路実現することができる．また，式(6.8)，(6.9)で与えた状態空間表現は，1階行列微分方程式であるので，行列・ベ

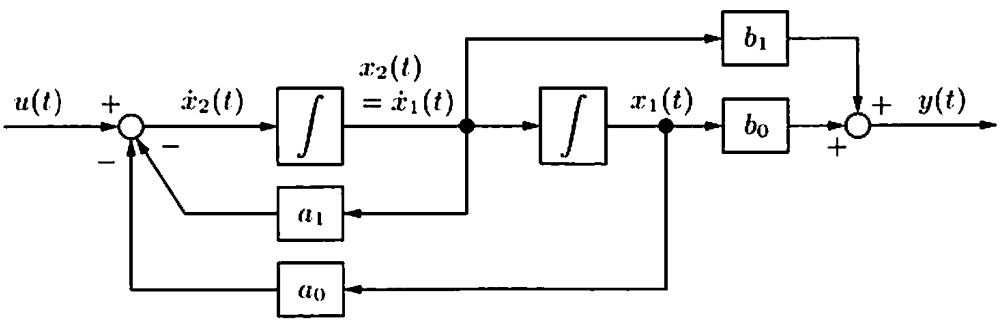

図6.4　2次系の回路実現

クトルを係数とする1次系と見なすことができる．したがって，図6.5のような回路で表現することができる．なお，図においてベクトル値信号を太線で表した．

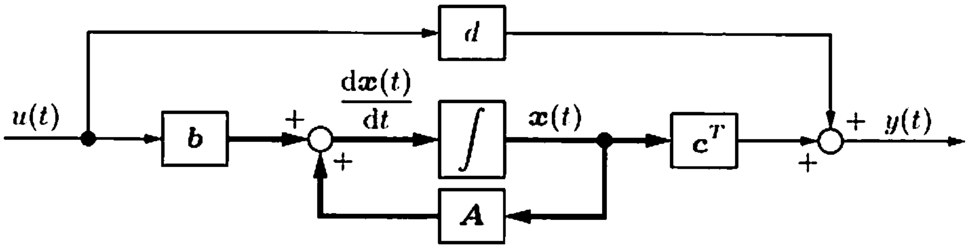

図6.5　状態方程式の回路実現

本章のポイント

- ▼ 線形システムを状態空間表現する方法を理解すること．
- ▼ 状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解すること．
- ▼ 状態空間表現のさまざまな特徴を理解すること．
- ▼ 状態遷移行列を計算できるようになること．

Control Quiz

6.1　図6.6のRLC回路において，回路に印加した電圧 $u(t)$ を入力，回路を流れる電流 $i(t)$ を出力とする．また，$i(t)$ とキャパシタの両端の電圧 $v(t)$ を状態変数とする．このとき，この電気回路の状態空間表現を導きなさい．

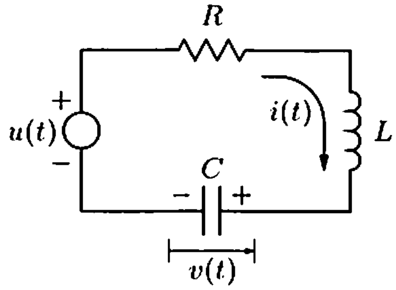

図6.6

$\boxed{6.2}$ $\boldsymbol{A}$ 行列が次のように与えられたとき，状態遷移行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ を計算しなさい．

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{6.3}$ 状態空間表現

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

で記述される LTI システムについて，次の問いに答えなさい．

(1) 状態遷移行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ を計算しなさい．

(2) 単位ステップ信号を入力したときの出力信号を計算しなさい．

(3) このシステムの伝達関数を計算しなさい．

$\boxed{6.4}$ $\boxed{6.3}$ で与えた状態空間表現の $\boldsymbol{A}$ 行列を対角化して $\bar{\boldsymbol{A}}$ となるような正則変換行列 $\boldsymbol{T}$ を求めなさい．また，求めた $\boldsymbol{T}$ を用いて，$\boxed{6.3}$ の状態空間表現を新しい状態変数 $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ に対するそれに変換しなさい．