第12章 制御系の定常特性

前章で述べた制御系の過渡特性に続いて，本章では制御系の定常特性について調べよう．まず，定常偏差を定義する．次に，目標値に対する定常特性と外乱に対する定常特性を調べる．さらに，定常偏差を0にするための内部モデル原理を与える．

12.1 定常偏差

図12.1に示すフィードバック制御系を考える．図において，出力 $y(s)$ は

$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}r(s) + \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}d(s) \tag{12.1}$$

で与えられる．すなわち，出力は目標値 $r(s)$ と外乱 $d(s)$ の二つの量から影響を受け，それぞれが出力に影響する伝達関数は異なっている．次に，偏差を

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{12.2}$$

と定義し，式(12.1)を利用すると，

$$e(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)}r(s) - \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}d(s) \tag{12.3}$$

が導かれる．このとき，定常偏差は，時間応答を計算することなく，ラプラス変換の

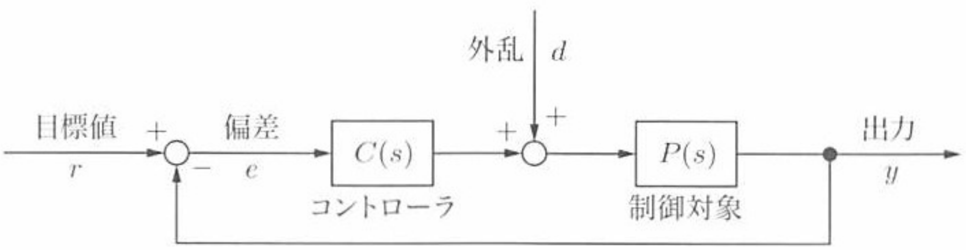


図12.1 フィードバック制御系

最終値の定理より

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} se(s) \tag{12.4}$$

のように計算できる．

本書は線形システムを対象としているため，重ね合わせの理が成り立ち，したがって，定常偏差に対する目標値と外乱の影響は独立に取り扱うことができる．以下ではそれぞれについて検討する．

12.2　目標値に対する定常特性の評価

まず，図12.1において，外乱 d は存在しないものとして，目標値 r に対する定常偏差について考える．すると，図12.2が得られる．図において一巡伝達関数を $L(s) = P(s)C(s)$ とおいた．このとき，式(12.3)は

$$e(s) = S(s)r(s) \tag{12.5}$$

となる．ただし，$S(s)$ は

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \tag{12.6}$$

で与えられ，**感度関数**（sensitivity function）と呼ばれる．

いま，図12.2において，r から y までの閉ループ伝達関数は，

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \tag{12.7}$$

であり，これは**相補感度関数**（complementary sensitivity function）とも呼ばれる[1]．

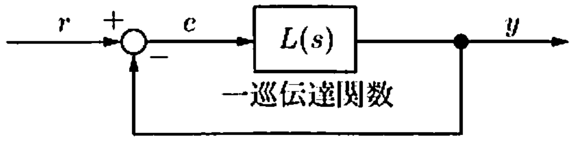


図12.2　フィードバック制御系（目標値のみ）

---

[1] これまで閉ループ伝達関数は $W(s)$ と書いてきたが，ここでは相補感度関数の記号として用いられることが多い $T(s)$ を使った．

なぜならば，すべての s に対して，

$$S(s) + T(s) \equiv 1 \tag{12.8}$$

が成り立つからである．ここで，相補とは集合の補集合（complementary set）と同じ意味である（すなわち，相手を補って全体（ここでは 1）になる）ことに注意しよう．さらに，制御対象 $P(s)$ が $\Delta P(s)$ だけ変動したとき，相補感度関数（閉ループ伝達関数）$T(s)$ もそれに伴って $\Delta T(s)$ だけ変動したとする．このとき，次式が成り立つ．

$$\lim_{\Delta P(s)\to 0} \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta P(s)/P(s)} = \frac{\mathrm{d}T(s)}{\mathrm{d}P(s)}\frac{P(s)}{T(s)} = S(s) \tag{12.9}$$

このように，$S(s)$ は制御対象 $P(s)$ の微小な変動に対する閉ループ伝達関数 $T(s)$ の感度となっているので，感度関数と呼ばれる．

式 (12.5) より，すべての周波数 ω に対して $|S(j\omega)| = 0$ であれば，どのような目標値 $r(t)$ に対しても偏差 $e(t)$ は 0 となる．しかしながら，すべての周波数 ω に対して閉ループ伝達関数 $|W(j\omega)|$，すなわち $|T(j\omega)|$ を 1 にできなかったことと同様に，これを達成することはできない．したがって，目標値が存在する周波数帯域において $|S(j\omega)|$ を小さく，あるいは 0 にすることを考えることになる．これは**低感度化**と呼ばれる．

また，式 (12.8) より，ある周波数 ω において，$|S(j\omega)|$ と $|T(j\omega)|$ を同時に小さくすることはできないことに注意する．このような問題に対して，制御系設計では**トレードオフ**（tradeoff）を図っていくことになる．トレードオフにどのように対処するかは，制御系設計問題の非常に重要な課題である．以上はロバスト制御理論の基礎として重要な事実であるが，本書の範囲を超えてしまうので，これ以上の議論は行わない．

さて，式 (12.4) から，定常偏差は次式より計算できる．

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} se(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}r(s) \tag{12.10}$$

これより，定常偏差は目標値 $r(t)$ の種類と一巡伝達関数 $L(s)$ に依存することがわかる．

第4章で述べたように，伝達関数の標準形は，ゲイン要素，1次要素，そして2次要素より構成されるので，$L(s)$ を次式のように記述する[2].

$$L(s) = \frac{K\prod_k (1+T'_k s)\prod_l \left\{1+2\zeta'_l \frac{s}{\omega'_l}+\left(\frac{s}{\omega'_l}\right)^2\right\}}{s^p\prod_i (1+T_i s)\prod_j \left\{1+2\zeta_j \frac{s}{\omega_j}+\left(\frac{s}{\omega_j}\right)^2\right\}} \tag{12.11}$$

このとき，Point 12.1を得る.

✣ Point 12.1 ✣　制御系の型

一巡伝達関数 $L(s)$ に含まれる積分要素の数 p によって制御系を分類することができ，$p=0$ のとき**0型の制御系**（type 0 system），$p=1$ のとき**1型の制御系**(type 1 system)，そして $p=2$ のとき**2型の制御系**（type 2 system）という．言い換えると，1型の制御系では対応する感度関数 $S(s)$ は原点 $s=0$ に一つの零点を，また，2型の制御系では $S(s)$ は原点 $s=0$ に二つの零点を有している．0型のシステムを**定位系**といい，1型以上のシステムを**無定位系**と呼ぶこともある.

以下では，目標値として単位ステップ信号，ランプ信号，加速度信号の3種類について考え，それらに対する定常偏差を求める.

(a) 目標値が単位ステップ信号の場合

単位ステップ信号 $r(t)=u_s(t)$ に対する定常偏差を**定常位置偏差**（steady-state position error）という．このとき $r(s)=1/s$ なので，式(12.10)，(12.11)より，

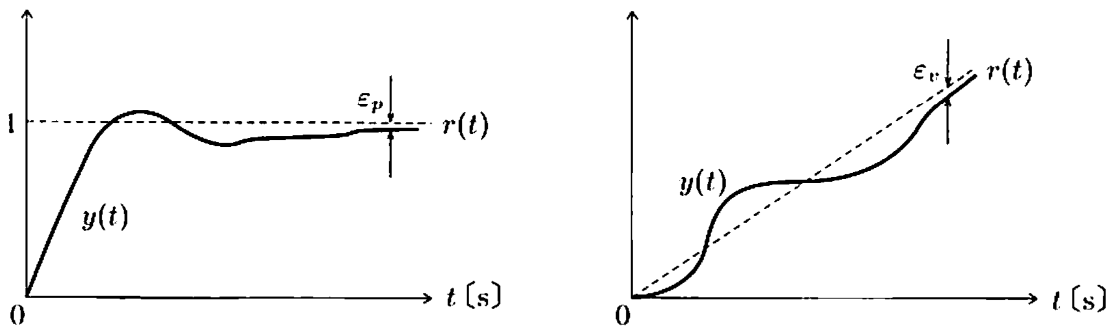
$$\varepsilon_p = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{K}{s^p}} \tag{12.12}$$

となる．これより，$p=0$ のとき，

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1+K} \tag{12.13}$$

[2] 1次，2次要素の s^0 の係数を1に正規化していることに注意しよう.

となり，偏差 ε_p を持つ（図12.3 (a) に $p=0$ の場合を示す）．このとき，ゲイン K を大きくすれば ε_p をいくらでも小さくすることができるが，一般にその代償として安定性が損なわれる．一方，$p \geq 1$ のときには $\varepsilon_p = 0$ となり，定常位置偏差は生じない．すなわち，制御系が1型，2型の場合には，定常位置偏差は 0 となる．このようなシステムを**サーボ系**（servo system）という．



(a)　定常位置偏差（$p=0$ のとき）　(b)　定常速度偏差（$p=1$ のとき）

図12.3　定常偏差

(b) 目標値が単位ランプ信号の場合

単位ランプ信号 $r(t) = tu_s(t)$ に対する定常偏差を**定常速度偏差**（steady-state velocity error）という．このとき，$r(s) = 1/s^2$ なので，

$$\varepsilon_v = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+\dfrac{K}{s^{p-1}}} \tag{12.14}$$

となる．これより，$p=0$ のとき $\varepsilon_v = \infty$，$p=1$ のとき $\varepsilon_v = 1/K$ となり（図12.3 (b) に $p=1$ の場合を示す），いずれの場合も定常速度偏差を生じる．一方，$p \geq 2$ のときには $\varepsilon_v = 0$ となり，定常速度偏差を生じない．

(c) 目標値が加速度信号の場合

加速度信号 $0.5t^2u_s(t)$ に対する定常偏差を**定常加速度偏差**（steady-state acceleration error）という．このとき，$r(s) = 1/s^3$ なので，

$$\varepsilon_a = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+\dfrac{K}{s^{p-2}}} \tag{12.15}$$

となる．これより，$p=0,1$ のとき $\varepsilon_a=\infty$，$p=2$ のとき $\varepsilon_a=1/K$ となり，いずれの場合も定常加速度偏差を生じる．一方，$p\geq 3$ のときには $\varepsilon_a=0$ となり，定常加速度偏差は生じないが，安定性の観点から，積分器が3個存在する場合それだけで位相が 270° 遅れてしまうため，望ましくない．

以上に述べたことを，表12.1にまとめる．

表12.1　制御系の型と定常偏差

型	定常位置偏差（ε_p）	定常速度偏差（ε_v）	定常加速度偏差（ε_a）
0	$\dfrac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$\dfrac{1}{K}$	∞
2	0	0	$\dfrac{1}{K}$

ここまでは，ステップ信号，ランプ信号，加速度信号の三つの目標値を考えた．それらはすべて $s=0$，すなわち $\omega=0$ に極（それぞれ単根，重根，3重根）を持っていた．これらの目標値に定常偏差なしで追従するためには，$\omega=0$ で一巡伝達関数が無限大のゲインを持つこと，言い換えると，$\omega=0$ で感度関数の値が 0 であることが必要である．また，すべての周波数帯域においてゲインが無限大である必要はなく，目標値が含む周波数帯域において無限大であればよいという点が重要である．

例題 12.1

図12.4に示すフィードバック制御系が，安定で，かつ定常位置偏差が 0.1 以下になるようなゲイン K を求めなさい．

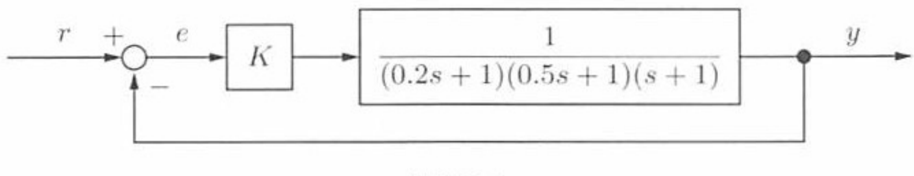


図12.4

解答 一巡伝達関数は,

$$L(s) = \frac{K}{(0.2s+1)(0.5s+1)(s+1)}$$

であるので, 特性方程式は

$$s^3 + 8s^2 + 17s + 10(1+K) = 0$$

となる. これに対してラウス表を作成すると, 以下のようになる.

s^3	1	17
s^2	8	$10(1+K)$
s^1	$\dfrac{17 \times 8 - 10(1+K)}{8}$	
s^0	$10(1+K)$	

第1列がすべて正になるというラウスの安定条件より,

$$-1 < K < 12.6$$

を得る. 次に, 定常位置偏差に対する条件

$$\varepsilon_p = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+K} \leq 0.1$$

より, $K \geq 9$ を得る. 以上より

$$9 \leq K < 12.6$$

が得られる. ■

例題12.1より, 定常位置偏差を小さくするためには, ゲイン K をある値以上大きくしなくてはならないが, 逆に, K を大きくしすぎると, 不安定になってしまうことがわかる. 図12.5にこの制御系の根軌跡を示す. 図より, K を増加させると, 右半平面に閉ループ極が飛び出していくことがわかる. たとえば, 定常位置偏差が 0.01 以下という設計仕様を与えると, $K \geq 99$ としなければならず, このような設計仕様を満足する制御系は, ゲイン調整による比例制御のみでは達成できない.

この例題では, 次の事実が成り立っている.

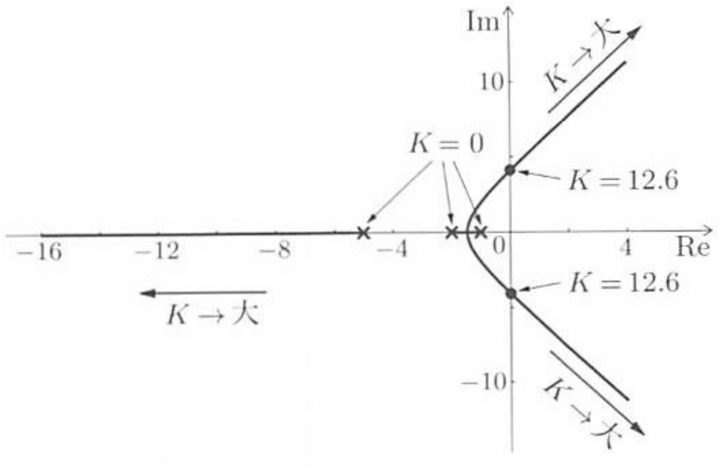


図12.5　根軌跡

✤ Point 12.2 ✤　ゲイン K の調整

(1) $K \to$ 小：安定性向上

(2) $K \to$ 大：定常位置偏差減少（定常特性向上）

(3) $K \to$ 大：速応性向上（過渡特性向上）

これは前述したトレードオフの典型的な例である．制御系設計では，相反する要求のトレードオフをいかに図るかがポイントになる．

12.3　外乱に対する定常特性の評価

本節では，図12.1のフィードバック制御系において $r = 0$ とおくことにより，外乱 d に対する定常偏差を考える．式(12.3)において $r = 0$ とおくと，

$$e(s) = -\frac{P(s)}{1 + L(s)} d(s) \tag{12.16}$$

となるので，外乱による定常偏差 ε_d は，

$$\varepsilon_d = \lim_{t \to \infty} |e(t)| = \lim_{s \to 0} |se(s)| = \lim_{s \to 0} \left| s \frac{-P(s)}{1 + L(s)} d(s) \right| \tag{12.17}$$

となる[3]．したがって，目標値の場合と同様に，ε_d は外乱の種類ならびに $P(s)$ と

[3] 定常偏差は大きさで評価するので，式(12.17)では絶対値をとった．

$C(s)$ に依存し，前節と同様の手順で ε_d を計算することができる．しかし，目標値の場合と異なる点は，外乱の場合，外乱が加わる位置にも ε_d が依存することである．そこで，例題を通して ε_d の計算法を見ていこう．

例題 12.2

図 12.6 のフィードバック制御系について，次の問いに答えなさい．

(1) $d_2(s) = 0$ のとき，$d_1(s)$ から $e(s)$ までの伝達関数を求めなさい．

(2) $d_1(s) = 0$ のとき，$d_2(s)$ から $e(s)$ までの伝達関数を求めなさい．

(3) $P(s), C(s)$ をそれぞれ

$$P(s) = \frac{K_p}{T_p s + 1}, \qquad C(s) = \frac{K_c}{T_c s + 1}$$

とする．A 点，B 点にそれぞれ単位ステップ外乱が加わったときの定常偏差を求めなさい．

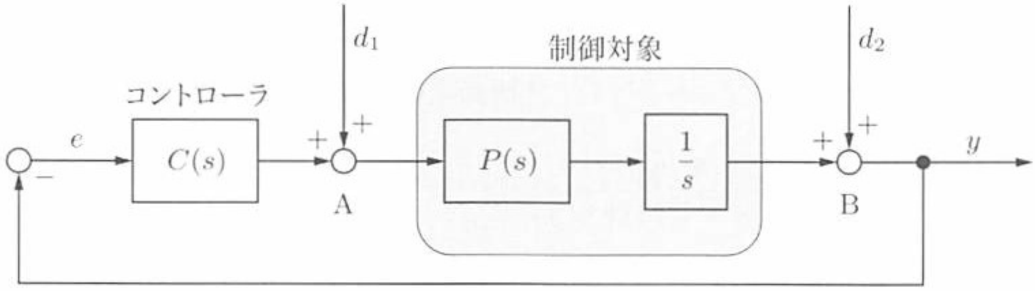


図 12.6

解答

(1) $\dfrac{e(s)}{d_1(s)} = \dfrac{-P(s)}{s + P(s)C(s)}$ (2) $\dfrac{e(s)}{d_2(s)} = \dfrac{-s}{s + P(s)C(s)}$

(3) まず，A 点について計算する．

$$\begin{aligned} e_a(s) &= \frac{-\dfrac{K_p}{T_p s + 1}}{s + \dfrac{K_p}{T_p s + 1}\dfrac{K_c}{T_c s + 1}} d_1(s) \\ &= \frac{-(T_c s + 1)K_p}{T_c T_p s^3 + (T_c + T_p)s^2 + s + K_c K_p} d_1(s) \end{aligned}$$

これより，単位ステップ外乱に対する定常偏差は，次のようになる．

$$|\varepsilon_d^{(a)}| = \lim_{s\to 0}|se_a(s)| = \lim_{s\to 0}\left|\frac{-(T_cs+1)K_p}{T_cT_ps^3+(T_c+T_p)s^2+s+K_cK_p}\right| = \frac{1}{K_c}$$

したがって，A点では定常偏差が存在するので，外乱に対して0型の制御系になる．

次に，B点について計算する．

$$\begin{aligned} e_b(s) &= \frac{-s}{s+\dfrac{K_p}{T_ps+1}\dfrac{K_c}{T_cs+1}}d_2(s) \\ &= \frac{-s\{T_cT_ps^2+(T_c+T_p)s+1\}}{T_cT_ps^3+(T_c+T_p)s^2+s+K_cK_p}d_2(s) \end{aligned}$$

より，単位ステップ外乱に対する定常偏差は，次のようになる．

$$|\varepsilon_d^{(b)}| = \lim_{s\to 0}|se_b(s)| = \lim_{s\to 0}\left|\frac{-s\{T_cT_ps^2+(T_c+T_p)s+1\}}{T_cT_ps^3+(T_c+T_p)s^2+s+K_cK_p}\right| = 0$$

よって，B点では定常偏差が0になるので，外乱に対して1型の制御系になる．

いま，図12.6のフィードバック制御系の一巡伝達関数は

$$L(s) = \frac{K_cK_p}{s(T_cs+1)(T_ps+1)}$$

なので，目標値に対しては1型の制御系であるが，外乱に対しては加わる位置によって0型あるいは1型となる．一般に，外乱の加わる位置が出力側に近づく，すなわち後段になるにつれて，外乱への対応能力は向上する．　■

12.4　内部モデル原理

これまで，目標値あるいは外乱としてステップ信号やランプ信号などを考えてきたが，それ以外の信号に対して定常偏差を0とするための条件は，内部モデル原理により与えられる．ここでは，厳密な議論を行わず，例題を通して内部モデル原理を与えよう．

例題 12.3

図 12.7 において，

$$P(s) = \frac{2}{s+1}$$

とし，正弦波外乱 $d(t) = \sin t$ が加わるものとする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $C_1(s) = 1$ のときの定常偏差を調べなさい．

(2) $C_2(s) = \dfrac{s(s+1)}{s^2+1}$ のときの定常偏差を求め，その結果について考察しなさい．

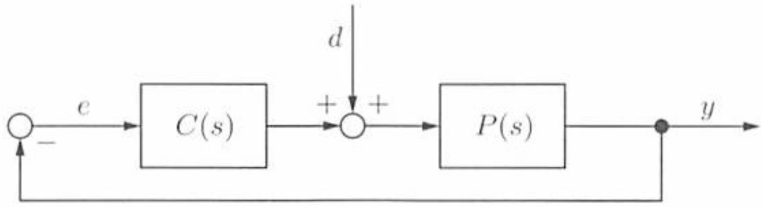


図 12.7

解答

(1) 偏差のラプラス変換は

$$e(s) = -\frac{P(s)}{1+L(s)}d(s) = -\frac{2}{(s+3)(s^2+1)} = -\frac{0.2}{s+3} - \frac{0.6}{s^2+1} + \frac{0.2s}{s^2+1}$$

と書けるので，

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}[e(s)] = -0.2e^{-3t} - 0.6\sin t + 0.2\cos t, \quad t \geq 0$$

となる．$t \to \infty$ のときの定常応答は，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e(t) &= -0.6\sin t + 0.2\cos t = \sqrt{0.4}\sin\left(t - \mathrm{arc\ tan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\\ &= 0.6325\sin(t - 0.3218)\end{aligned}$$

となる．このように，定常偏差は周波数 1 の正弦波になり，0 にはならない．外乱が正弦波である場合には，外乱から偏差までの伝達関数において，その正弦波の周波数におけるゲイン特性が 0 にならない限り，周波数応答の原理から，偏差は必ず外乱正弦波と同じ周波数成分を持つ．

(2) このときは，

$$e(s) = -\frac{2s(s+1)}{s^3+3s^2+3s+1} = -\frac{2s}{(s+1)^2}$$

となる．ここで，分母多項式 $(s+1)^2$ は安定多項式である．さらに，最終値の定理を適用することにより，

$$\lim_{s\to 0} |se(s)| = \lim_{s\to 0} \left| -\frac{2s^2}{(s+1)^2} \right| = 0$$

となり，定常偏差は 0 となる．

この場合には，補償器 $C_2(s)$ に正弦波外乱のラプラス変換の分母多項式である s^2+1 が含まれていたので，正弦波外乱の影響を完全に除去できた． ■

ラプラス変換が $1/s$ であるステップ目標値に対して定常偏差を 0 にするためには，一巡伝達関数，すなわち制御対象か補償器に積分要素（$1/s$）を一つ持つ必要があったことを思い出すと，次の結果を得る．

✤ Point 12.3 ✤　内部モデル原理

一巡伝達関数 $L(s) = P(s)C(s)$ に外乱信号のモデル（信号のラプラス変換の分母多項式）を含ませることによって，定常偏差を 0 にすることができる．これを**内部モデル原理**（internal model principle）という．

本章のポイント

- ▼ 目標値と外乱に対する定常偏差の計算法を習得すること．
- ▼ 制御系の型と定常偏差の関係について理解すること．
- ▼ 内部モデル原理の意味を理解すること．

Control Quiz

12.1 図12.8 (a), (b) に示すフィードバック制御系を考える．目標値 r として単位ステップ信号，外乱 d として大きさが 0.2 のステップ信号を入力した場合の定常偏差（ε_r と ε_d とする）を，それぞれのシステムに対して求めなさい．

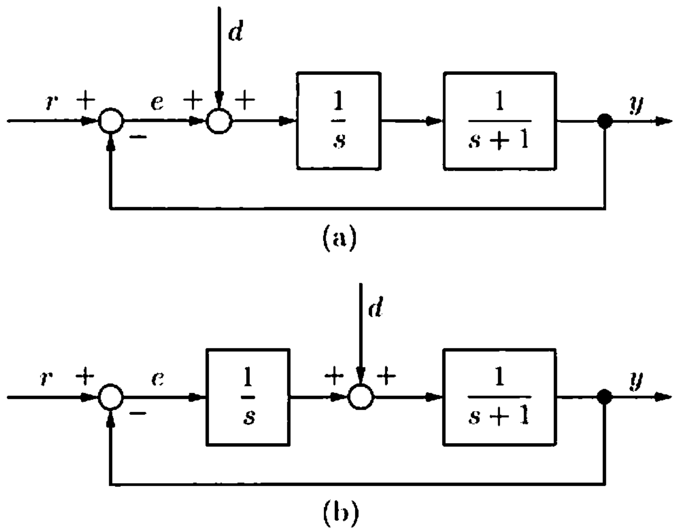


図12.8

12.2 図12.9に示すフィードバック制御系について，次の問いに答えなさい．

(1) 偏差 e を目標値 r と外乱 d の関数として表しなさい．

(2) 目標値を 0 と仮定し，正弦波外乱 $d(t) = \sin t$ の影響のみについて考える．このとき，

(a) $K = 99$ のとき，定常状態において出力 $y(t)$ を表す式を導きなさい．

(b) $K = 0$ のとき，すなわちフィードバックが存在しないときと，$K = 99$ のときの正弦波外乱抑制性を比較しなさい．

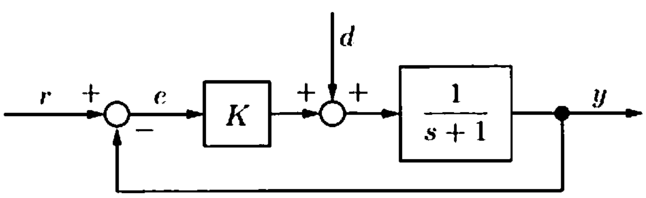


図12.9