

前章では、LTI システムの入出力関係を、インパルス応答を用いて時間領域で記述した。このようにシステムの入出力関係を記述することは重要であるが、たたみ込み積分という少し面倒な計算を行わなければならなかった。そこで、本章では、微分方程式やインパルス応答などの時間領域における記述をラプラス変換することにより、伝達関数を用いて  $s$  領域でシステムを表現する方法を与える。

## 4.1 伝達関数

前章で示した LTI システムの入出力関係を記述する微分方程式

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

を、初期値をすべて 0 としてラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)y(s) \\ = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)u(s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

が得られる。ただし、 $y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ ,  $u(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  とおいた。このとき、入力信号のラプラス変換  $u(s)$  と出力信号のラプラス変換  $y(s)$  の比、すなわち

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (4.3)$$

を LTI システムの伝達関数 (transfer function) といい、 $G(s)$  のように表記する。ここで、伝達関数はラプラス変換可能な任意の入力信号に対して成り立つことに注意する。すると、LTI システムの入出力関係は、 $s$  領域において

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (4.4)$$

のように乗算で表される<sup>1</sup>。前章の時間領域におけるたたみ込み積分による記述と比べると、扱いやすい形式になった。

式(4.3)の分母多項式の次数が  $n$  なので、この LTI システムは  $n$  次系 ( $n$ -th order system) と呼ばれる。また、式(4.3)の分母多項式の根、すなわち、方程式

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) = 0 \quad (4.5)$$

の根  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  を LTI システムの極という。ここで、式(4.5)を特性方程式 (characteristic equation) といい、 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  を特性根 (characteristic root) という。

一方、 $G(s) = 0$  となる点を LTI システムの零点という。すなわち、

$$\begin{aligned} b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0 \\ = b_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

の根  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  は零点であり、 $n > m$  の場合には  $s = \infty$  も零点になる (後者を無限零点という)。すると、式(4.3)は次のように書き直すことができる。

$$G(s) = b_m \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (4.7)$$

さらに、 $n$  と  $m$  の大小関係により、表4.1のような用語を定義する。表において  $n < m$  の場合、回路実現する際に微分器が必要になる。そのため、物理的に実現できないのでインプロパー (不適切) と呼ばれる。厳密にプロパーな場合、 $s = \infty$  も零点になることに注意する。

表4.1 LTI システムのプロパー性

条 件	用 語
(1) $n \geq m$	プロパー (proper)
(2) $n > m$	厳密にプロパー (strictly proper)
(3) $n = m$	バイプロパー (biproper)
(4) $n < m$	インプロパー (improper)

<sup>1</sup> 本書では、信号とシステムを区別するために、信号のラプラス変換は  $u(s)$  のように小文字で、システムの伝達関数は  $G(s)$  のように大文字で表記する。そのため、信号の場合、時間領域では  $u(t)$ 、 $s$  領域では  $u(s)$  のように、同じ記号  $u(\cdot)$  を用いることに注意する。

さて、すべての初期値を 0 として、時間領域におけるたたみ込み積分による入出力関係の表現式

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.8)$$

をラプラス変換すると、やや計算が煩雑になるが、次のようになる。

$$\begin{aligned} y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\} dt \\ &= \int_0^\infty u(\tau)e^{-s\tau} \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt d\tau \\ &= \int_0^\infty u(\tau)e^{-s\tau} \int_0^\infty g(\sigma)e^{-s\sigma} d\sigma d\tau \\ &= \int_0^\infty u(\tau)e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty g(\sigma)e^{-s\sigma} d\sigma = G(s)u(s) \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで、

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \quad (4.10)$$

である。このように、伝達関数は LTI システムのインパルス応答のラプラス変換でもある。

以上を Point 4.1 にまとめよう。

#### ❖ Point 4.1 ❖ LTI システムの伝達関数の定義

伝達関数  $G(s)$  は、次のように二つの方法で定義される。

(1) 伝達関数は入出力信号のラプラス変換の比である。すなわち、

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

(2) 伝達関数はインパルス応答  $g(t)$  のラプラス変換である。すなわち、

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

このように、インパルス応答  $g(t)$  と伝達関数  $G(s)$  はラプラス変換対である。

## 例題 4.1

伝達関数

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+10}$$

を持つ LTI システムの極と零点を求め、 $s$  平面上にプロットしなさい。また、このシステムのインパルス応答  $g(t)$  を計算しなさい。

**解答** まず、極は、

$$s^2 + 2s + 10 = 0$$

を解くことにより、 $s = -1 \pm j3$  である。次に、零点は、

$$s + 2 = 0$$

を解くことにより、 $s = -2$  である。このシステムは分母のほうが 1 だけ次数が高い厳密にプロパーなシステムなので、 $s \rightarrow \infty$  のとき、 $G(s) \rightarrow 0$  になる。よって、 $s = \infty$  も零点である。これらを図 4.1 に示す（無限零点は図示していない）。

このシステムのインパルス応答は、逆ラプラス変換を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+2}{s^2+2s+10} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+3^2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} \right] + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3}{(s+1)^2+3^2} \right] \end{aligned}$$

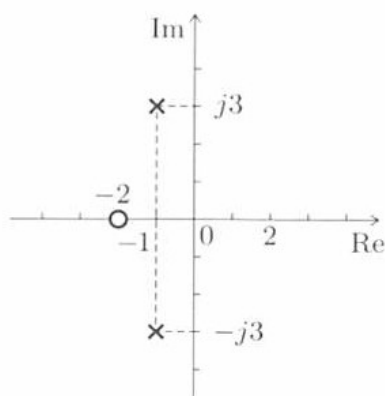


図 4.1 極・零点の配置（×が極，○が零点）

$$\begin{aligned}
&= \left( \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) e^{-t} u_s(t) \\
&= \frac{\sqrt{10}}{3} \cos \left( 3t - \arctan \frac{1}{3} \right) e^{-t} u_s(t)
\end{aligned}$$

ここで、最後の等式では、三角関数の合成定理

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left( \theta - \arctan \frac{b}{a} \right)$$

を用いた。 ■

## 4.2 基本要素の伝達関数

式(4.3)で与えた  $n$  次系の伝達関数は、次のように因数分解できる<sup>2</sup>。

$$G(s) = K \frac{\prod_{l=1}^n (T_l' s + 1) \prod_{k=1}^m (a_k' s^2 + b_k' s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \prod_{m=1}^m (a_m s^2 + b_m s + 1)} \quad (4.11)$$

ただし、 $\prod$  は  $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 A_2 \cdots$  のように乗算を表す。また、 $K$  は定常ゲインであり、

$$K = G(s)|_{s=0}$$

で与えられる。式(4.11)のように、伝達関数  $G(s)$  は、定常ゲイン  $K$  と、 $s$  に関する1次式  $(T_i s + 1)$ 、そして  $s$  に関する2次式  $(a_m s^2 + b_m s + 1)$  の積と商に分解できる。これらを基本要素と呼び、以下では基本要素の伝達関数について考えていく。

### 4.2.1 比例要素

比例関係を表す入出力関係

$$y(t) = K u(t) \quad (4.12)$$

をラプラス変換すると、伝達関数は次のようになる。

<sup>2</sup> ここでは、積分要素と微分要素は省略した。

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = K \quad (4.13)$$

ここで、 $K$  は定常ゲイン（あるいは直流（DC）ゲイン）である。このように、比例要素の伝達関数は  $K$  となり、 $s$  を含まない。すなわち、比例要素は静的な要素であり、ダイナミクスを持たない。

### 4.2.2 微分要素

伝達関数が

$$G(s) = Ts \quad (4.14)$$

であるシステムを微分要素（derivative element）あるいは微分器という。これは、ラプラス変換において  $s$  が微分を意味することから明らかであろう。しかしながら、物理的に微分要素を実現することは不可能である。すなわち、微分要素はインプロパーなので、実際にはプロパーな伝達関数である近似微分要素

$$G(s) = \frac{Ts}{Ts + 1} \quad (4.15)$$

を利用することになる。

近似微分要素を電気回路で実現したものを図4.2に示す。図において、 $v_i(t)$  を入力、 $v_o(t)$  を出力とすると、伝達関数は

$$G(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{CRs}{CRs + 1} \quad (4.16)$$

となる。ここで、時定数（time constant）を  $T = CR$  とおくと、式(4.16)は式(4.15)に一致する。

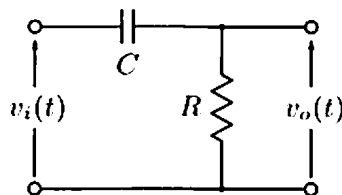


図4.2 近似微分回路

次に、式(4.15)が近似微分要素と呼ばれる理由について考えよう。式(4.15)を  $s = 0$  の近傍でテイラー展開すると、

$$G(s) = Ts(1 + Ts)^{-1} = Ts(1 - Ts + \dots) \quad (4.17)$$

が得られる。式(4.17)を1次近似すると、

$$G(s) \cong Ts \quad (4.18)$$

となり、近似的に微分要素に等しくなる。

### 4.2.3 積分要素

伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{Ts} \quad (4.19)$$

であるシステムを積分要素 (integral element) あるいは積分器という。これは、ラプラス変換において  $1/s$  が積分を意味することから明らかであろう。

#### ❖ Point 4.2 ❖ なぜ微分要素は実現できないのか？

ある関数の微分、すなわち傾きを計算するためには、未来の時刻における関数の値が必要になる。このように、微分は関数が今後どのように変化するかの未来情報を必要とし、現時刻までのデータからだけでは計算できない。このため、微分要素は物理的に回路実現できない、すなわち、インプロパーと言われる。

それに対して、積分要素は現時刻までのデータの蓄積を行うものであり、未来情報を必要としない。このため、積分器はプロパーであり、物理的に実現できる。

### 4.2.4 1次遅れ要素

#### [1] 1次遅れ要素の標準形

図4.3に示すRC回路を考える。この回路において、 $v_i(t)$  から  $v_o(t)$  までの伝達関数は、

$$G(s) = \frac{1}{CRs + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (4.20)$$

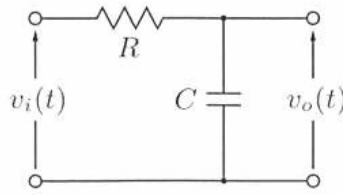


図4.3 RC回路（近似積分回路）

となり，1次遅れ要素（1st-order lag element）あるいは1次遅れ系と呼ばれる．ただし， $T = CR$  とおいた，「遅れ」とは位相が遅れることを意味しており，これについては5.3.4項で説明する．

いま， $s \gg 0$  として，式(4.20)をテイラー展開すると，

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts} \left( 1 + \frac{1}{Ts} \right)^{-1} = \frac{1}{Ts} \left( 1 - \frac{1}{Ts} + \cdots \right) \quad (4.21)$$

となる．このとき，式(4.21)は

$$G(s) \cong \frac{1}{Ts} \quad (4.22)$$

となり，近似的に積分要素に等しくなる．このため，1次遅れ要素は近似積分要素と言われることもある．

1次遅れ要素は，次のように与えられる．

#### ❖ Point 4.3 ❖ 1次遅れ要素

1次遅れ要素は，

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (4.23)$$

で与えられる．ここで， $T$  は時定数であり，応答の速さを表すパラメータである．

### [2] 1次遅れ要素のステップ応答

次に，図4.4を用いて，1次遅れ要素のステップ応答  $f(t)$  を計算しよう．

時間領域でステップ応答を計算するのではなく，ラプラス領域で計算した後に逆ラプラス変換で時間領域に変換することが，計算のポイントである．すなわち，ラ



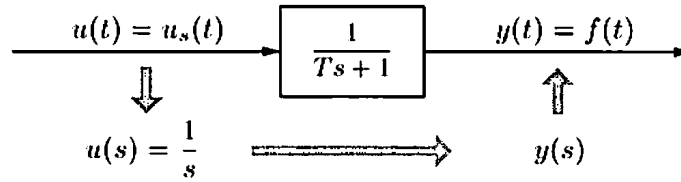


図4.4 1次遅れ要素のステップ応答の計算法

プラス領域では,

$$y(s) = G(s)u(s)$$

で入出力関係が記述できる. いま,

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad u(s) = \frac{1}{s}$$

なので, ステップ応答のラプラス変換を  $f(s)$  とすると, これは

$$f(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s}$$

となる. これを逆ラプラス変換すると,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \right] \\ &= (1 - e^{-t/T})u_s(t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

が得られる.

図4.5にステップ応答を図示する. 図より, 時定数  $T$  はステップ応答が定常値の 63.2 % に達する時間であり, これは, 原点における接線が定常値と交わる時刻でもある. 図において, 時定数の3倍の時間である時刻  $3T$  では, 定常値の 95 % に達する. この時刻を整定時間という.

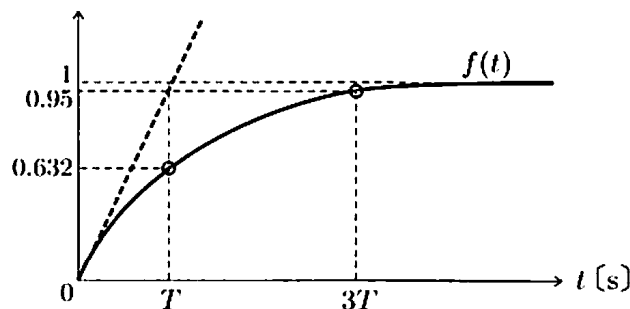


図4.5 1次遅れ要素のステップ応答と時定数

式(4.23)で記述される1次遅れ要素の極は  $s = -1/T$  である (図4.6). 時定数  $T$  は正なので, 極は常に  $s$  平面の負の実軸上に存在する. そして,  $T$  が小さくなるにつれて極は原点から遠ざかっていき, そのときステップ入力に対する応答は速くなる.

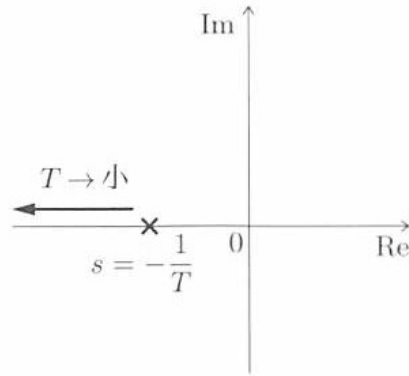


図4.6 1次遅れ要素の極の位置

例題を通して, 1次遅れ要素についての理解を深めていこう.

#### 例題4.2

インパルス応答が

$$g(t) = 2e^{-3t}u_s(t)$$

である LTI システムの伝達関数を計算し, 時定数  $T$  と定常ゲイン  $K$  を求めなさい. また, 極を  $s$  平面上にプロットしなさい.

**解答** 伝達関数は

$$G(s) = \mathcal{L}[2e^{-3t}u_s(t)] = \frac{2}{s+3} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}s+1} = \frac{K}{Ts+1}$$

となる. これより,  $T = 1/3$ ,  $K = 2/3$  である. また, 極は  $s = -3$  である. 図4.7にそれを示す. ■

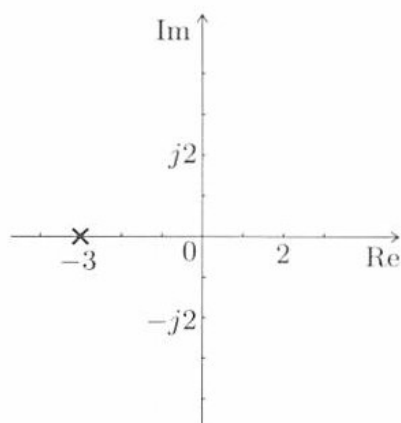


図 4.7

## 例題 4.3

伝達関数が

$$G(s) = \frac{10}{10s + 1}$$

である LTI システムのステップ応答を計算し，その波形を図示しなさい．図中には重要な数値を書き込みなさい．

**解答** 出力  $y(t)$  のラプラス変換を  $y(s)$  とすると，

$$y(s) = \frac{10}{10s + 1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s + 0.1} \frac{1}{s} = 10 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 0.1} \right)$$

なので，これを逆ラプラス変換すると，

$$y(t) = 10(1 - e^{-0.1t})u_s(t)$$

が得られる．この波形を図 4.8 に示す．このシステムは時定数が  $T = 10$ ，定常ゲインが  $K = 10$  なので，それらの数値を図中へ書き込んだ．

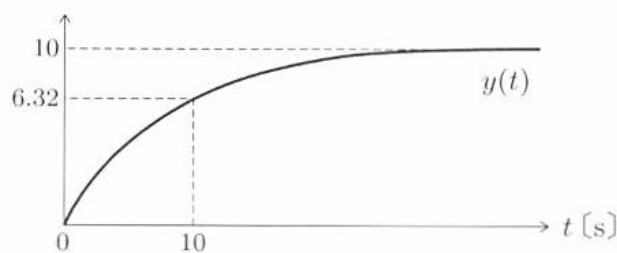


図 4.8

**例題 4.4** (RL 回路の過渡応答)

図 4.9 (a) に示す RL 回路を考える. この回路において, 入力を図 4.9 (b) に示す直流電源の電圧  $e(t)$  とし, 出力を回路を流れる電流  $i(t)$  とする.

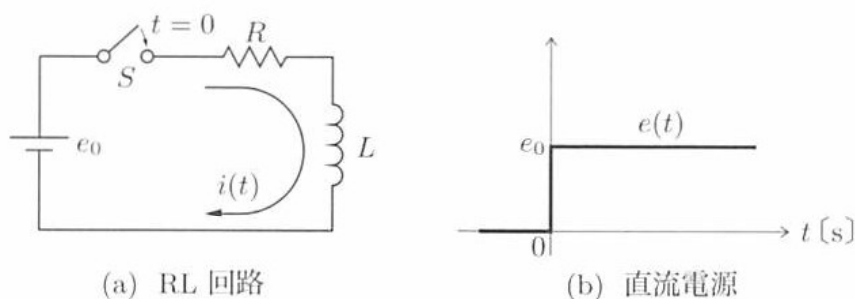


図 4.9

このとき, 次の問いに答えなさい. ただし,  $R = 0.1 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ H}$ ,  $e_0 = 1 \text{ V}$  とする.

- (1) このシステムの伝達関数  $G(s)$  を求めなさい.
- (2) 時刻  $t = 0$  のときスイッチを閉じる.  $t \geq 0$  のときの電流  $i(t)$  を求め, 図示しなさい.
- (3) このシステムのインパルス応答を計算し, 図示しなさい.

**解答**

- (1) この電気回路は微分方程式

$$0.1i(t) + 10 \frac{di(t)}{dt} = e(t)$$

で記述でき, この式を初期値を 0 とおいてラプラス変換することにより, 伝達関数は次式のようになる.

$$G(s) = \frac{10}{100s + 1}$$

- (2) 直流電源の電圧は次式で表せる.

$$e(t) = \begin{cases} e_0, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

したがって、システムのステップ応答を求めればよいことがわかり、その結果、次式が得られる。これを図4.10 (a)に示す。

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}[i(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[10\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.01}\right)\right] \\ &= 10(1 - e^{-0.01t})u_s(t) \end{aligned}$$

(3) インパルス応答は、定義より次のようになる。

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{100s+1}\right] = 0.1e^{-0.01t}u_s(t)$$

インパルス応答を図4.10 (b)に図示する。 ■

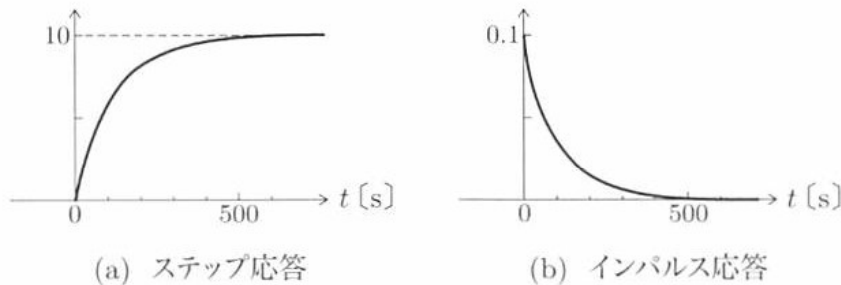


図4.10

#### 例題4.5

次の問いに答えなさい。

(1) 図4.11に示す信号  $u(t)$  をラプラス変換して  $u(s)$  を求めなさい。

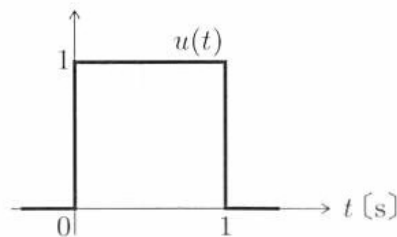


図4.11

(2) 伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

である LTI システムに、(1)の  $u(t)$  を印加したときの出力  $y(t)$  を、逆ラプラス変換を用いて求めなさい。

(3) (2)で求めた  $y(t)$  の波形を図示しなさい。

**解答**

(1) ラプラス変換を行うことにより、次式が得られる。

$$u(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

(2) 出力  $y(t)$  のラプラス変換を  $y(s)$  とすると、

$$\begin{aligned} y(s) &= G(s)u(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1 - e^{-s}}{s} \\ &= \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) (1 - e^{-s}) \end{aligned}$$

なので、これを逆ラプラス変換すると、次式のようにになる。

$$y(t) = (1 - e^{-t})u_s(t) - \left(1 - e^{-(t-1)}\right)u_s(t-1)$$

あるいは、次式のように書くこともできる。

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

(3)  $y(t)$  の波形を図4.12に示す。 ■

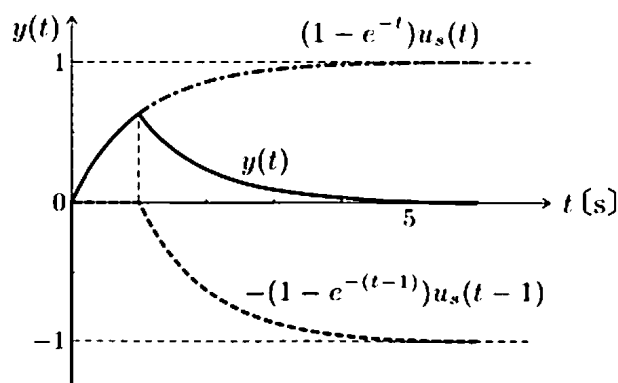


図4.12

### 4.2.5 1次進み要素

伝達関数が

$$G(s) = Ts + 1 \tag{4.25}$$

であるシステムを1次進み要素 (1st-order lead element) あるいは1次進み系という。この要素はインプロパーである。

### 4.2.6 2次遅れ要素

#### [1] 2次遅れ要素の標準形

第1章で用いたバネ・マス・ダンパシステムを再び考える。力である入力を  $u(t)$  とし、変位である出力を  $y(t)$  とすると、このシステムは微分方程式

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t) \quad (4.26)$$

を満たす。初期値を 0 としてこの微分方程式をラプラス変換すると、

$$(ms^2 + cs + k)y(s) = u(s) \quad (4.27)$$

が得られる。これより、入出力間の伝達関数  $G(s)$  は

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{k} \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (4.28)$$

であることがわかる。これは、比例要素  $1/k$  と 2次遅れ要素 (2nd-order lag element) (2次遅れ系とも呼ばれる)

$$\frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (4.29)$$

が直列接続したものである。2次遅れ要素の標準形は、次のように与えられる。

#### ❖ Point 4.4 ❖ 2次遅れ要素の標準形

2次遅れ要素 (2次遅れ系) の標準形は、次式で与えられる。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.30)$$

ここで、 $\omega_n$  は固有角周波数 (natural angular frequency)、 $\zeta$  は減衰比 (damping ratio) と呼ばれる。

式 (4.29) と式 (4.30) の係数を等しくおくことにより、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (4.31)$$

が得られる。

次に、図4.13に示すRLC直列回路を考える。この回路を記述する方程式

$$\begin{cases} v_i(s) = Ri(s) + Lsi(s) + \frac{1}{Cs}i(s) \\ v_o(s) = \frac{1}{Cs}i(s) \end{cases}$$

より、入力電圧  $v_i(s)$  から出力電圧  $v_o(s)$  までの伝達関数は、次のようになる。

$$G(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (4.32)$$

この電気回路システムも2次遅れ系であり、式(4.32)と式(4.30)を比較することにより、

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.33)$$

が得られる。これが図4.13のRLC直列回路の固有角周波数と減衰比である。

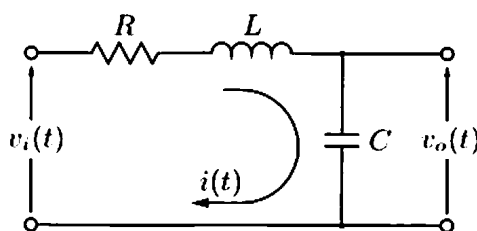


図4.13 RLC 直列回路

## [2] 2次遅れ要素のステップ応答

2次遅れ要素のステップ応答  $f(t)$  は、次式より計算できる。

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)u_s(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \right] \quad (4.34)$$

式(4.34)を部分分数展開すると、

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{\beta}{s - \alpha} - \frac{\alpha}{s - \beta} \right) \right] \quad (4.35)$$

となる。ただし、 $\alpha, \beta$  は2次遅れ要素の二つの極、すなわち2次方程式

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (4.36)$$



の二つの根

$$\alpha, \beta = -\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n \quad (4.37)$$

である。すると、式(4.35)より、2次遅れ要素のステップ応答は

$$f(t) = \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha - \beta} (\beta e^{\alpha t} - \alpha e^{\beta t}) \right\} u_s(t) \quad (4.38)$$

となる。

いま、2次方程式の解は、減衰比  $\zeta$  の大きさによって表4.2のように場合分けできる。それぞれの場合について、式(4.38)のステップ応答を計算しよう。

表4.2 減衰比の値による場合分け

用語	条件	根の値
(a) 過制動	$\zeta > 1$	相異なる2実根： $\alpha, \beta = -\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n$
(b) 臨界制動	$\zeta = 1$	2重根： $\alpha = \beta = -\omega_n$
(c) 不足制動	$0 < \zeta < 1$	共役複素根： $\alpha, \beta = -\left(\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \omega_n$
(d) 持続振動	$\zeta = 0$	純虚根： $\alpha = \beta = \pm j\omega_n$

#### (a) 過制動 ( $\zeta > 1$ のとき)

この場合、相異なる2実根であり、ステップ応答は次式で与えられる。

$$f(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cosh \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n t \right) \quad (4.39)$$

ここで、式(4.39)のかっこ内は常に正であり、 $e^{-\zeta \omega_n t}$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき 0 に向かうので、ステップ応答は決して 1 を超えない。そのため、過制動と呼ばれる。 $\zeta = 2$  の場合のステップ応答を図4.14に示す。ただし、 $\omega_n = 1$  とおいた。

過制動の場合、 $s$  平面の負の実軸上に二つの極が存在するので、式(4.30)は次のように変形できる。

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (4.40)$$

ただし、 $T_1 = -1/\alpha$ 、 $T_2 = -1/\beta$  とおいた。式(4.40)で表される伝達関数は、二つの1次遅れ要素

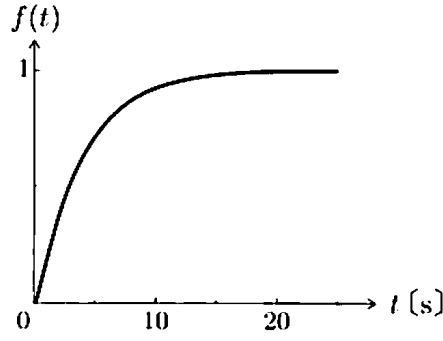


図4.14 2次遅れ要素のステップ応答 (過制動)

$$G_1(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{T_2 s + 1}$$

が直列接続していると思なすことができる。

### (b) 臨界制動 ( $\zeta = 1$ のとき)

この場合、2重根であり、ステップ応答は

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right] = 1 - (e^{-\omega_n t} + \omega_n t e^{-\omega_n t}) \\ &= 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

で与えられ、このとき臨界制動と呼ばれる。また、この場合の伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^2}$$

と書くことができる。ただし、 $T = 1/\omega_n$  とおいた。

### (c) 不足制動 ( $0 < \zeta < 1$ のとき)

この場合、共役複素根であり、ステップ応答は

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos \left( \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t - \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

で与えられ、不足制動と呼ばれる。

$\zeta = 0.2$  としたときのステップ応答を、図4.15に示す。固有角周波数  $\omega_n$  と減衰比  $\zeta$  の意味を図中に示している。図中の  $O_s$  は、行き過ぎ量（オーバーシュート量）と呼ばれる、制御系の過渡特性を表す重要な量の一つであり、次式より計算できる（第11章で詳しく述べる）。

$$O_s = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (4.43)$$

また、行き過ぎ量に達する時間は行き過ぎ時間（ $T_P$  とする）と呼ばれ、次式で計算できる。

$$T_P = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \quad (4.44)$$

式(4.43)より、 $O_s$  は  $\zeta$  の関数であり、 $\zeta$  が小さいほど  $O_s$  は大きくなることがわかる。代表的な  $\zeta$  と  $O_s$  の関係を表4.3に示す。また、この場合の極の位置を図4.16に示す。

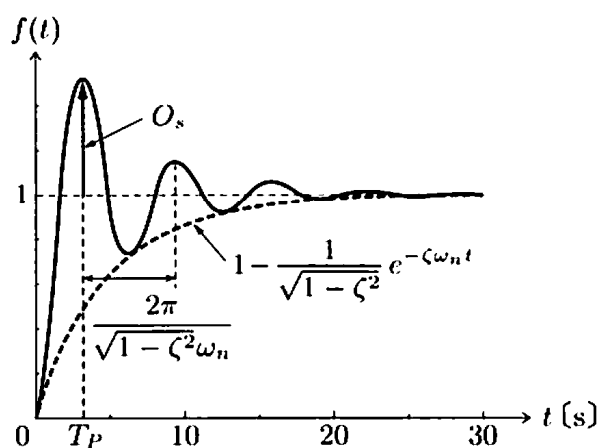


図4.15 2次遅れ要素のステップ応答（ $\zeta = 0.2$ ,  $\omega_n = 1$ ）

表4.3 減衰比 $\zeta$ と行き過ぎ量 $O_s$ の関係

$\zeta$	$O_s$
0.4	0.25
0.6	0.1
0.707	0.05
1.0	0.0

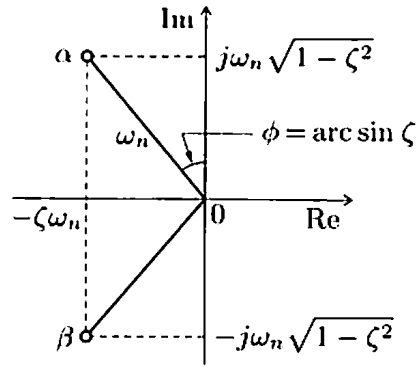


図4.16 2次遅れ要素の極の位置

(d) 持続振動 ( $\zeta = 0$  のとき)

この場合、純虚根であり、ステップ応答は次式で与えられる。

$$f(t) = 1 + \frac{1}{j\omega_n + j\omega_n} (-j\omega_n e^{j\omega_n t} - j\omega_n e^{-j\omega_n t}) = 1 - \cos \omega_n t \quad (4.45)$$

持続振動のときのステップ応答の例を図4.17に示す。図では、 $\omega_n = 1$  とおいた。

図4.18にさまざまな減衰比に対するステップ応答とインパルス応答を示す。 $\zeta$  が

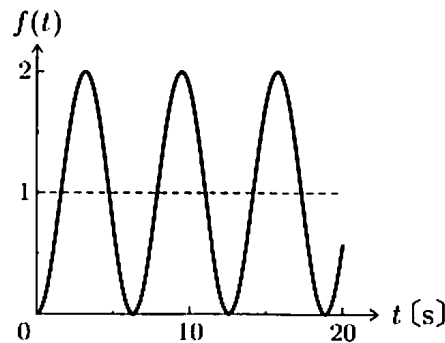


図4.17 2次遅れ要素のステップ応答 ( $\zeta = 0$ )

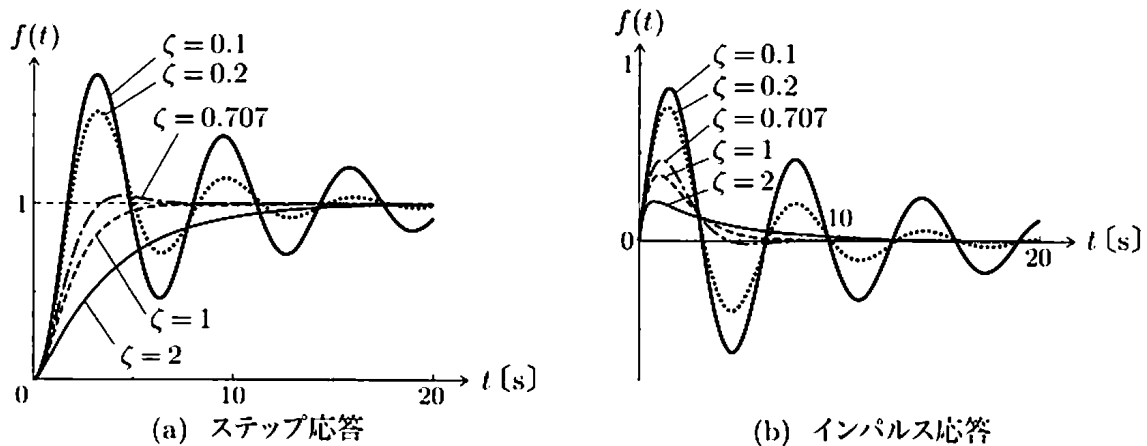


図4.18 2次遅れ要素のステップ応答とインパルス応答 ( $\zeta = 0.1, 0.2, 0.707, 1, 2$ )

小さくなるにつれて、振動の振幅が大きくなり、さらに減衰も悪くなっていくことがわかる。

以上のことについて、例題を通して理解を深めよう。

#### 例題 4.6

2次遅れ要素

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(100s+1)}$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) このシステムの固有角周波数  $\omega_n$  と減衰比  $\zeta$  を求めなさい。
- (2) このシステムのステップ応答を計算して、その概形を描きなさい。

#### 解答

- (1) 伝達関数を展開すると、

$$G(s) = \frac{1}{100s^2 + 101s + 1} = \frac{0.01}{s^2 + 1.01s + 0.01}$$

が得られる。これを2次遅れ要素の標準形と比較することにより、 $\omega_n = 0.1$ 、 $\zeta = 5.05$  が得られる。

- (2)  $s$  領域でステップ応答  $y$  を計算すると、

$$y(s) = \frac{0.01}{s(s+1)(s+0.01)} = \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{99}}{s+1} - \frac{\frac{100}{99}}{s+0.01}$$

となる。これより、

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \left\{ 1 + \frac{1}{99}(e^{-t} - 100e^{-0.01t}) \right\} u_s(t)$$

が得られる。計算機を利用せずにこの図を正確に描くことは難しいが、 $\zeta > 1$  で過制動なので、このステップ応答の値が1を超えることはない。ステップ応答の波形を図4.19に示す。 ■

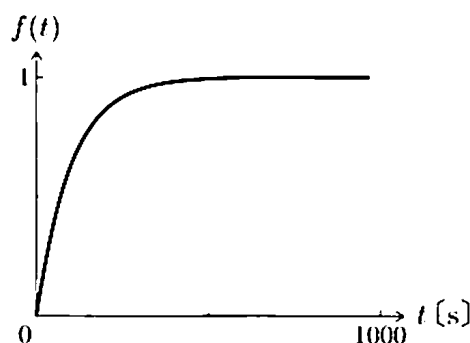


図 4.19

### 4.2.7 むだ時間要素

ある時刻  $t$  に入力  $u(t)$  を加えたとき、その出力が時間  $\tau$  だけ遅れて出力に影響を及ぼすとき、すなわち、

$$y(t) = u(t - \tau) \quad (4.46)$$

のとき、 $\tau$  をむだ時間と呼び、このような要素をむだ時間要素 (dead-time element) という。

式 (4.46) の両辺をラプラス変換すると、次式が得られる。

$$y(s) = e^{-\tau s} u(s) \quad (4.47)$$

よって、むだ時間要素の伝達関数は、

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (4.48)$$

となる。 $s = 0$  のまわりでの  $e^{-\tau s}$  のテイラー展開

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{1}{2!}(\tau s)^2 - \dots \quad (4.49)$$

から明らかなように、むだ時間要素は  $s$  の有理関数ではなく、無限次元になる。そのため、コントローラ設計を行う際などに取り扱いが困難になる。

そこで、むだ時間要素を有理関数で近似したものにパデ近似 (Padé approximation) がある。1次、2次パデ近似を以下に示す。

$$\text{1次パデ近似: } G_1(s) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} \quad (4.50)$$

$$\text{2次パデ近似: } G_2(s) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}s + \frac{\tau^2}{12}s^2}{1 + \frac{\tau}{2}s + \frac{\tau^2}{12}s^2} \quad (4.51)$$

パデ近似は、無理数である $\pi$ を、たとえば $22/7$ のような分数（有理数）で近似することに対応する。

## 4.3 ブロック線図

制御系はさまざまな要素から構成される。すでに第1章で述べたが、それらの要素の機能を図的に表現する方法に、ブロック線図 (block diagram) がある。本節では、さまざまなシステムの接続を、ブロック線図を用いて与えよう。

### 4.3.1 直列接続

システム  $\text{sys1}$  とシステム  $\text{sys2}$  を図4.20のように直列接続 (series connection) すると、全体のシステムは

$$\text{sys} = \text{sys1} \cdot \text{sys2} \quad (4.52)$$

となる。このように、システムを直列接続することは、乗算に対応する。このとき、乗算とブロック線図とでは  $\text{sys1}$  と  $\text{sys2}$  の順番が逆になっていることに注意する。これは次の計算式より明らかである。

$$y = \text{sys1} \cdot x = \text{sys1} \cdot (\text{sys2} \cdot u) = (\text{sys1} \cdot \text{sys2}) \cdot u$$

本書は線形システムのみを対象としており、線形システムの場合には乗算の順番を入れ替えることができる。すなわち、二つのシステムの伝達関数が  $G_1(s)$  と  $G_2(s)$  である場合、全体の伝達関数は

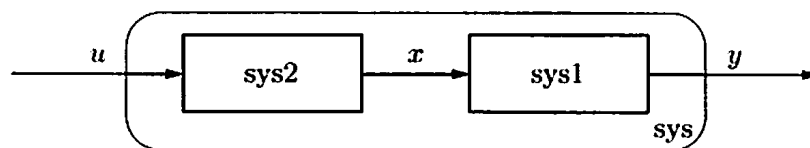


図4.20 システムの直列接続

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = G_2(s)G_1(s)$$

となる。しかし、非線形システムの場合には、伝達関数の順番を入れ替えることができないことに注意しよう。

### 4.3.2 並列接続

システム sys1 とシステム sys2 を図4.21のように並列接続 (parallel connection) すると、全体のシステムは

$$\text{sys} = \text{sys1} + \text{sys2} \quad (4.53)$$

となる。このように、システムを並列接続することは、和算に対応する。

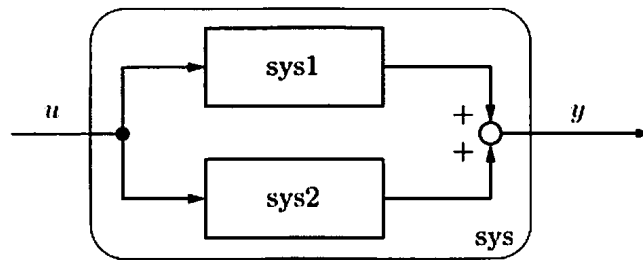


図4.21 システムの並列接続

### 4.3.3 フィードバック接続

二つのシステムはともに LTI システムとし、それぞれの伝達関数を  $P(s)$ ,  $C(s)$  とする。このとき、図4.22 (a) のような二つのシステムの接続をフィードバック接続 (feedback connection) という。図中の  $r$  から  $y$  までの伝達関数 ( $W(s)$  とする) は、方程式

$$y(s) = P(s)\{r(s) - C(s)y(s)\}$$

を変形することにより、次式のようにになる。

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (4.54)$$



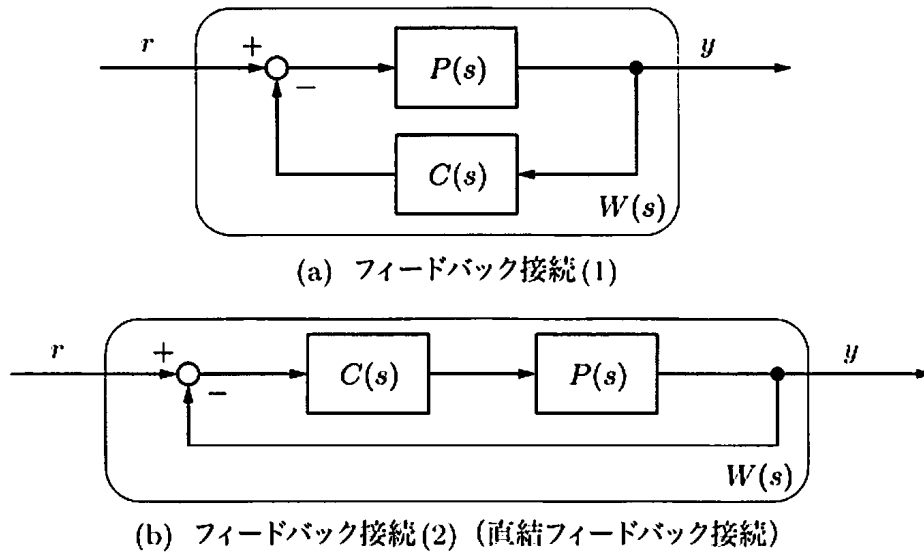


図4.22 システムのフィードバック接続

たとえば,  $P(s)$  と  $C(s)$  がそれぞれ

$$P(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 2s + 3}, \quad C(s) = \frac{5(s + 2)}{s + 10} \quad (4.55)$$

で与えられるとき,

$$W(s) = \frac{2s^3 + 2s^2 + 51s + 10}{11s^3 + 57s^2 + 78s + 40} \quad (4.56)$$

が得られる.

次に, システム  $\text{sys1}$  ( $P(s)$ ) とシステム  $\text{sys2}$  ( $C(s)$ ) が図4.22 (b)のように直列接続され, さらにフィードバック接続されている場合を考える. この場合, フィードバック経路にシステムが存在しないので, 直結フィードバック接続あるいは単一フィードバック接続と呼ばれる. このとき, 図中の  $r$  から  $y$  までの伝達関数 ( $W(s)$  とする) は, 次のようになる.

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (4.57)$$

図4.23に, ブロック線図の加え合わせ点と引き出し点の移動をまとめる.

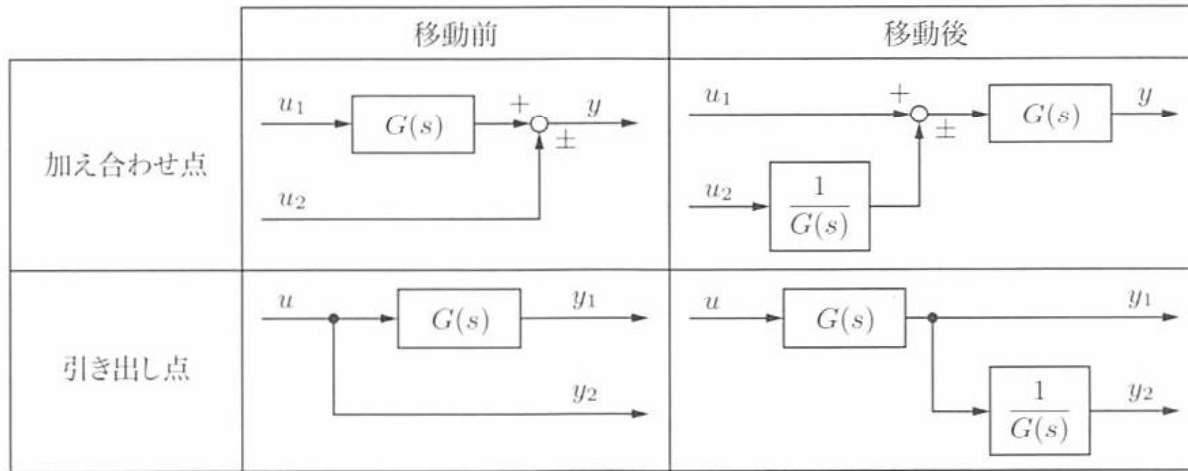


図4.23 ブロック線図の加え合わせ点と引き出し点

例題を通してブロック線図の簡単化を学ぼう.

#### 例題 4.7

図4.24のブロック線図を簡単化して,  $r$  から  $y$  までの伝達関数  $W(s)$  を求めなさい.

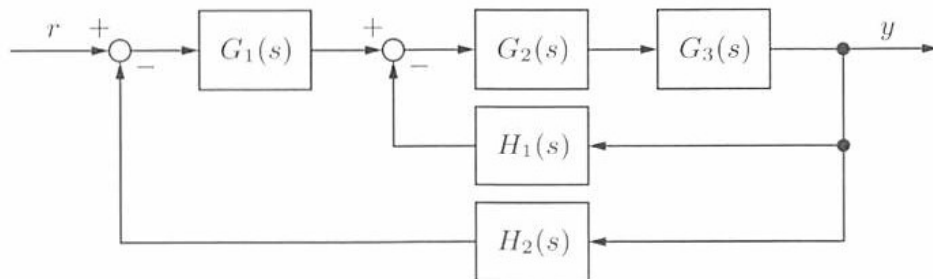


図4.24

次に, それぞれのブロックの伝達関数が以下のように与えられるとき,  $r$  から  $y$  までの伝達関数  $W(s)$  を計算しなさい.

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+10}, \quad G_3(s) = \frac{s+5}{s^2+s+1}$$

$$H_1(s) = \frac{s+2}{s+3}, \quad H_2(s) = \frac{1}{s+4}$$

**解答** ブロック線図の簡単化の過程を図4.25に示す. これより, 求める伝達関数は,

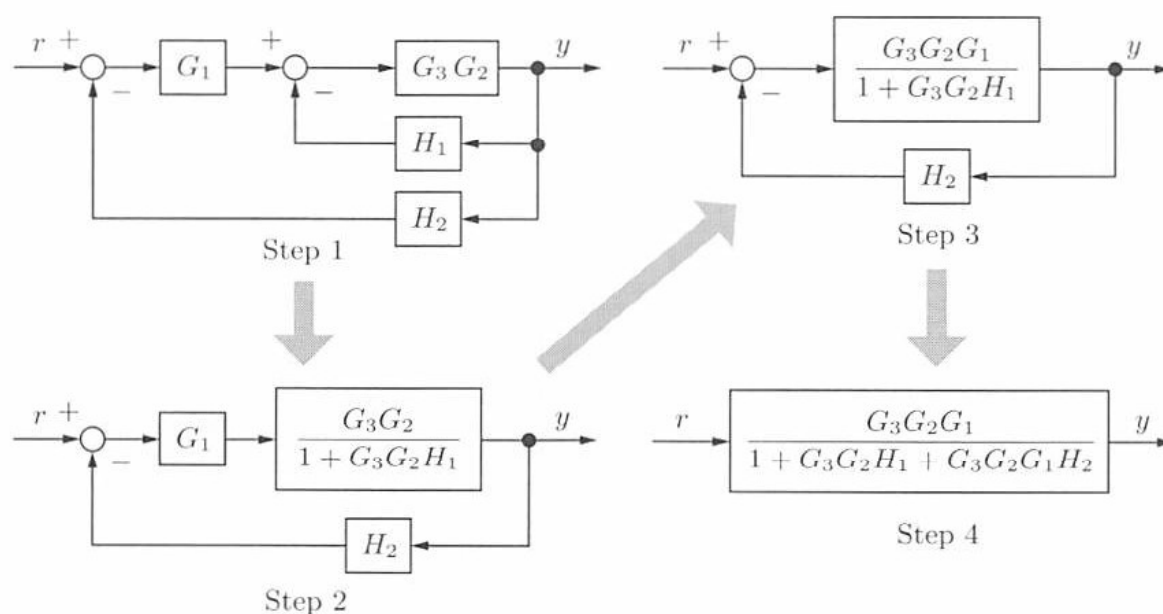


図 4.25

$$W(s) = \frac{G_3 G_2 G_1}{1 + G_3 G_2 H_1 + G_3 G_2 G_1 H_2}$$

となる. 与えられた伝達関数を代入すると,

$$W(s) = \frac{s^3 + 12s^2 + 47s + 60}{s^6 + 19s^5 + 119s^4 + 331s^3 + 471s^2 + 408s + 175}$$

が得られる. ■

次の例題で扱う DC サーボモータは, 力学系と電気回路の両方を含んでおり, 制御工学を勉強する上で基礎となる重要なシステムである. このようなシステムを扱う分野は, メカトロニクス (mechatronics)<sup>3</sup>と呼ばれている.

#### 例題 4.8 (DC サーボモータの回転角制御)

図 4.26 に示すように, 電機子の端子電圧  $v_a(t)$  により DC (直流) サーボモータの回転角度  $\theta(t)$  を制御する問題を考える.

3. メカトロニクスは, 1969 年に安川電機の技術者によって作られた用語で, 機械工学 (mechanics) と電子工学 (electronics) を合わせた和製英語である. 1972 年に安川電機の商標として登録されたが, その後, 安川電機が商標権を放棄し, 現在は一般名称として使われており, 海外でも普及している.

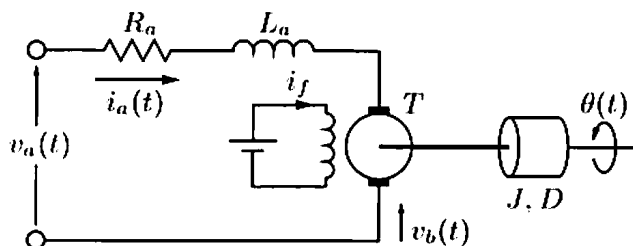


図 4.26

図において、 $R_a$  と  $L_a$  はそれぞれ電機子回路の抵抗およびインダクタであり、 $J$  と  $D$  はそれぞれ負荷の慣性モーメントおよび粘性抵抗を表す。また、界磁電流  $i_f$  は一定とする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 外乱トルク  $T_d(t)$  を考慮してこのシステムを物理モデリングし、そのブロック線図を描きなさい。
- (2) 外乱トルクが存在しない場合（すなわち、 $T_d(t) = 0$  の場合）、電機子の端子電圧  $v_a(t)$  からモータの回転角変位  $\theta(t)$  までの伝達関数を求めなさい。
- (3)  $v_a(t) = 0$  のとき、 $T_d(t)$  から  $\theta(t)$  までの伝達関数を求めなさい。
- (4)  $\theta(t)$  を  $v_a(t)$  と  $T_d(t)$  を用いて表しなさい。

### 解答

- (1) 物理モデリングは、対象を支配する物理法則（微分方程式や代数方程式）をすべて書くことから始まる。

発生トルク  $T(t)$  は、界磁磁束と電機子電流  $i_a(t)$  の関数であるが、飽和がないとすれば、

$$T(t) = K_T i_a(t) + T_d(t) \quad (4.58)$$

が成立する。ただし、 $T_d(t)$  は外乱トルクである。また、 $K_T$  をトルク定数（単位は  $\text{Nm/A}$ ）という。このトルクにより回転運動の力学系が駆動され、

$$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + D\omega(t) \quad (4.59)$$

が成立する。ここで、

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

は角速度である。

一方、電機子電流  $i_a(t)$  は電機子回路において、キルヒホッフの電圧則

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) = v_a(t) \quad (4.60)$$

を満たす。ここで、 $v_b(t)$  は逆起電力であり、

$$v_b(t) = K_e \omega(t) \quad (4.61)$$

のように角速度  $\omega(t)$  に比例する。ここで、 $K_e$  は起電力定数と呼ばれ、その単位は  $V/(\text{rad/s})$  である。

ここまでの物理の世界であり、これを情報の世界に変換するために、式 (4.58) ～ (4.61) を、初期値を 0 としてラプラス変換する。すると、次式が得られる。

$$T(s) = Js\omega(s) + D\omega(s) \quad (4.62)$$

$$T(s) = K_T i_a(s) + T_d(s) \quad (4.63)$$

$$v_a(s) = R_a i_a(s) + L_a s i_a(s) + v_b(s) \quad (4.64)$$

$$v_b(s) = K_e \omega(s) \quad (4.65)$$

以下では、電機子と負荷の二つの部分に分けてブロック線図を描こう。

- (a) 電機子回路（電気系）：式 (4.63) と式 (4.64) より、 $v_e(s)$  を次のように定義し、変形する。

$$v_e(s) = v_a(s) - v_b(s) = (L_a s + R_a) i_a(s) = \frac{L_a s + R_a}{K_T} (T(s) - T_d(s)) \quad (4.66)$$

ここで、電機子電圧を入力、トルクを出力と考えると、その伝達関数  $G_1(s)$  は次のようになる。

$$G_1(s) = \frac{T(s)}{v_e(s)} = \frac{K_T}{L_a s + R_a} \quad (4.67)$$

- (b) 負荷側（力学系）：トルクを入力、角速度を出力とすると、伝達関数  $G_2(s)$  は次のようになる。

$$G_2(s) = \frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + D} \quad (4.68)$$

- (c) 角速度フィードバック：式 (4.65) より、

$$v_b(s) = K_e \omega(s) \quad (4.69)$$

である。以上より、図4.27のブロック線図が得られる。図より明らかなように、逆起電力によって、第1章で述べた速度フィードバックが自然に導入されている点が興味深い。

(2) 図4.27のブロック線図を単純化すると、 $v_a(s)$  から  $\theta(s)$  までの伝達関数は、

$$W(s) = \frac{\theta(s)}{v_a(s)} = \frac{K_T}{s[(L_a s + R_a)(Js + D) + K_T K_e]} \quad (4.70)$$

となる。これより、DC サーボモータの伝達関数は3次系であることがわかった。

さて、電機子時定数  $L_a/R_a$  が小さい場合には、 $L_a = 0$  とおくことができ、そのときの伝達関数は、次のような2次系になる。

$$W(s) = \frac{\theta(s)}{v_a(s)} = \frac{K_T}{s\{R_a Js + (R_a D + K_T K_e)\}} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (4.71)$$

ただし、

$$T = \frac{R_a J}{R_a D + K_T K_e}, \quad K = \frac{K_T}{R_a D + K_T K_e}$$

とおいた。

(3) (2)と同様な手順で計算すると、次式が得られる。

$$\frac{\theta(s)}{T_d(s)} = \frac{L_a s + R_a}{s\{(Js + D)(L_a s + R_a) + K_T K_e\}} \quad (4.72)$$

(4) (2), (3)の結果と重ね合わせの理より、 $L_a = 0$  とおけば、

$$\theta(s) = \frac{K_T}{s\{R_a Js + (R_a D + K_T K_e)\}} v_a(s)$$

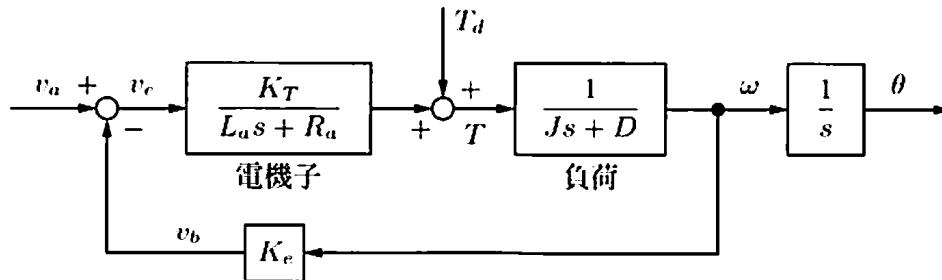


図4.27

$$+\frac{R_a}{s\{R_aJs+(R_aD+K_TK_e)\}}T_d(s) \quad (4.73)$$

が得られる. ■

#### 例題 4.9

図 4.28 に示すブロック線図で記述されるシステムを考える.

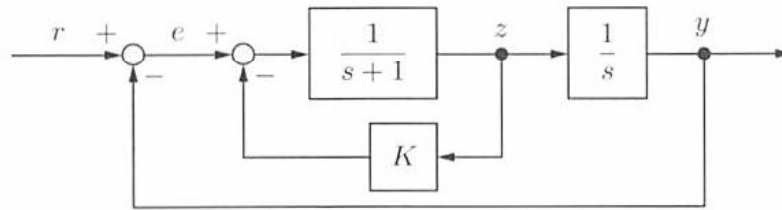


図 4.28

このとき、次の問いに答えなさい。なお、伝達関数はすべて  $s$  の降べきの順で書きなさい。

- (1)  $r$  から  $y$  までの閉ループ伝達関数 ( $W(s)$  とする) を求めなさい。
- (2)  $r$  から  $e$  までの伝達関数を求めなさい。
- (3)  $W(s)$  の減衰比が 0.6 になるように、定数  $K$  を定めなさい。

#### 解答

- (1) 図 4.28 を図 4.29 のように描き直すと、

$$L(s) = \frac{1}{s^2 + (1+K)s}$$

となる。これより、次式が得られる。

$$W(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1}{s^2 + (1+K)s + 1}$$

- (2) ブロック線図より、

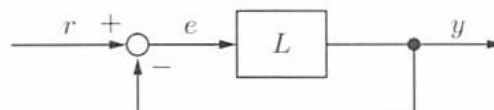


図 4.29

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

が得られるので、 $r$  から  $e$  までの伝達関数は次式のようなになる。

$$\frac{s^2 + (1 + K)s}{s^2 + (1 + K)s + 1}$$

- (3)  $W(s)$  の分母と 2 次遅れ要素の標準形のそれを係数比較すると、 $\omega_n^2 = 1$  および  $2\zeta\omega_n = 1 + K$  が得られる。これに  $\zeta = 0.6$  を代入すると、次式が得られる。

$$K = 0.2$$

#### 4.3.4 基本演算素子を用いたブロック線図

図 4.30 に回路を実現するための三つの基本演算素子を示す。すなわち、加え合わせを行う加算器、係数倍を行う係数倍器、そして積分演算を行う積分器である<sup>4</sup>。ただし、積分器では初期値を 0 とおいた。

基本演算素子を用いて、ゲイン  $K$  の比例要素と時定数  $T$  の 1 次遅れ要素からなる伝達関数

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (4.74)$$

のブロック線図を記述してみよう。そのために分母の  $s$  の係数を 1 に規格化すると、

$$G(s) = \frac{K/T}{s + 1/T} = \frac{b}{s + a} \quad (4.75)$$

となる。ただし、 $a = 1/T$ 、 $b = K/T$  とおいた。

図 4.31 (a) に示す対象の入出力関係

$$y(s) = \frac{b}{s + a} u(s)$$

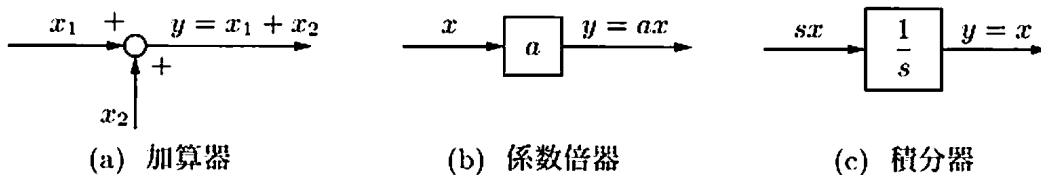


図 4.30 基本演算素子

<sup>4</sup> 微分器は物理的に実現できないので、基本演算素子ではない。



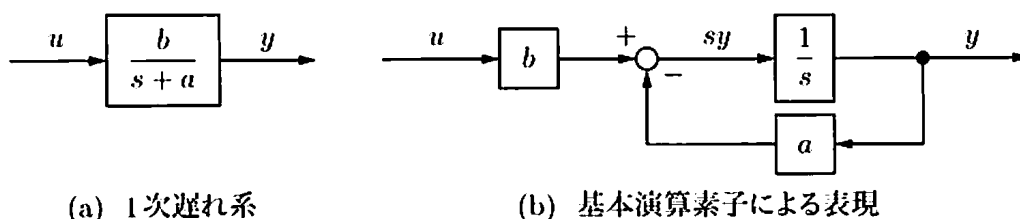


図4.31 基本演算素子による1次遅れ系のブロック線図

は、次のように変形できる。

$$sy(s) = -ay(s) + bu(s) \quad (4.76)$$

これより、図4.31 (b)に示すブロック線図が得られる。初めて見ると、理解するのが難しいが、式(4.76)は図の加算器の部分の関係式を表している。図より、出力  $y$  が係数倍器  $a$  を介して負の値でフィードバックされていることがわかる。これは負帰還 (negative feedback) と呼ばれ、このとき  $u$  から  $y$  のシステムは安定になる。もし  $a$  の符号が負であれば、正帰還 (positive feedback) になり、システムは不安定になる。なお、フィードバックシステムの安定性については、第10章で詳しく述べる。

## 本章のポイント

- ▼  $s$  領域における線形システムの表現である伝達関数は、古典制御において中心的な役割を果たすことを理解すること。
- ▼ 基本要素、特に1次遅れ要素と2次遅れ要素の標準形を暗記し、その意味を理解すること。
- ▼ ブロック線図を用いたシステムの図的表現を使いこなせるようになること。

## Control Quiz

**4.1** 次の伝達関数を持つシステムのステップ応答を計算し、その概形を図示しなさい。

(1)  $\frac{100}{s+10}$       (2)  $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$       (3)  $\frac{10e^{-2s}}{s+1}$       (4)  $\frac{1}{s^2+s+1}$

**4.2** 図4.32に示すブロック線図を簡単化して、 $r$ から $y$ までの伝達関数を求めなさい。

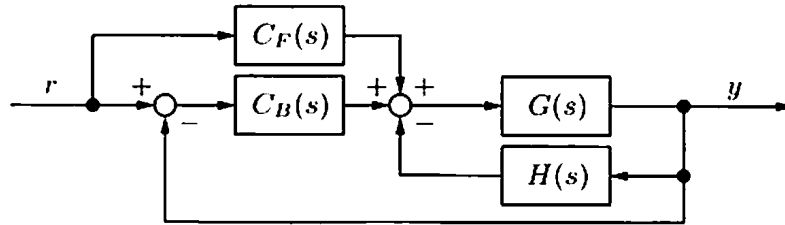


図4.32

**4.3** 図4.33に示すブロック線図において

$$G(s) = \frac{10}{10s + 1}$$

とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1)  $r$  から  $y$  までの閉ループ伝達関数  $W(s)$  を求めなさい。
- (2)  $W(s)$  の固有角周波数と減衰比がそれぞれ  $\omega_n = 10$ ,  $\zeta = 0.6$  になるように、 $K_1$  と  $K_2$  を定めなさい。

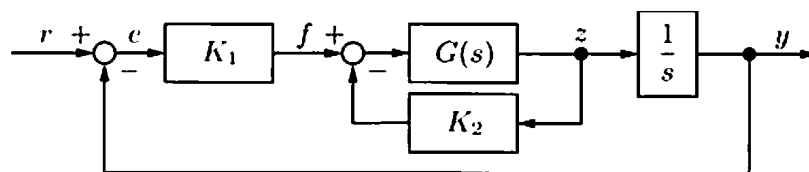


図4.33

**4.4** 以下の式を導出しなさい。

- (1) 式(4.39)      (2) 式(4.42)      (3) 式(4.43)      (4) 式(4.44)

**4.5** 1次遅れ系のステップ応答の波形において、原点における接線がステップ応答の定常値と交わる時刻が時定数  $T$  であることを示しなさい。