

## 第11章

# 制御系の過渡特性

制御系に第一に要求されるものは、第10章で述べた安定性である。安定性が確保されたら、次に考えることは制御系の性能 (performance) である。制御系の性能は、過渡特性 (transient characteristic) と定常特性 (steady-state characteristic) に分類できる。本章では、まず制御系の過渡特性について、時間領域、 $s$  領域、周波数領域から調べよう。続く第12章では、制御系の定常特性について述べる。

## 11.1 時間領域における過渡特性の評価

図11.1の直結フィードバック制御系において、目標値  $r$  から制御量  $y$  までの閉ループ伝達関数を  $W(s)$  とおくと、

$$W(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (11.1)$$

となる。ただし、 $L(s)$  は一巡伝達関数であり、閉ループシステムは安定であると仮定する。

このとき、時間領域においてフィードバック制御系の過渡特性を評価する最も一般的な方法は、目標値  $r(t)$  として単位ステップ信号  $u_s(t)$  を入力したときの制御量  $y(t)$  の波形、すなわちステップ応答波形を観察する方法であり、これはステップ応答試験と呼ばれる。

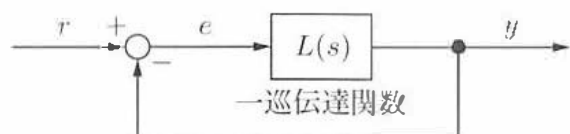


図11.1 直結フィードバック制御系

いま、 $W(s)$  を次式のような厳密にプロパーな  $n$  次系とする。

$$W(s) = \frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \quad (11.2)$$

ただし、 $B(s)$  は  $(n-1)$  次以下の多項式である。このとき、 $s_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) は相異なる特性根（閉ループ極）である。閉ループシステムは安定であると仮定したので、 $\text{Re}(s_i) < 0$  である。単位ステップ信号のラプラス変換が  $1/s$  であることを思い出すと、閉ループシステムのステップ応答（ $f(t)$  とおく）は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ W(s) \frac{1}{s} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \frac{1}{s} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{c}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s-s_i} \right] \\ &= c + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{s_i t}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

ただし、 $\alpha_i$  は留数計算によって得られる定数である。また、 $c$  は閉ループシステムの定常ゲインであり、

$$c = W(s)|_{s=0}$$

より計算できる。

式 (11.3) は第9章で述べたモード展開表現であり、これより次のことがわかる。

- (1)  $\text{Re}(s_i) < 0$  という安定性の仮定より、 $t \rightarrow \infty$  のとき、式 (11.3) の右辺第2項は0に向かう。これは、過渡応答 (transient response) と呼ばれる。
- (2) 一方、式 (11.3) の右辺第1項は、 $t \rightarrow \infty$  のときの  $f(t)$  の値（定常値あるいは最終値）であり、定常応答 (steady-state response) と呼ばれる。

本章では (1) の過渡応答について考える。(2) の定常応答に関しては次章で述べる。

#### ✧ Point 11.1 ✧ ステップ応答を用いた特性値

振動的な制御系に対するステップ応答波形の代表的な例を図11.2に示す。この図と表11.1により、過渡特性を定量化する代表的な項目を定義している。これら

の特性値のうち、立ち上がり時間 (rise time)、遅れ時間 (delay time)、そして行き過ぎ時間 (peak time) は、速応性 (speed of response) の指標となるものである。すなわち、これらの値が小さいほど速応性が良い制御系である。また、最大行き過ぎ量 (maximum overshoot) は制御系の減衰性 (あるいは安定性) の指標であり、これが大きい場合、減衰性の悪い制御系になる。最大行き過ぎ量は通常パーセンテージで表されるので、パーセントオーバーシュート (percent overshoot; P.O.) と呼ばれることもある。さらに、整定時間 (settling time) は、速応性と減衰性の両者に関係する特性値である (後述)。

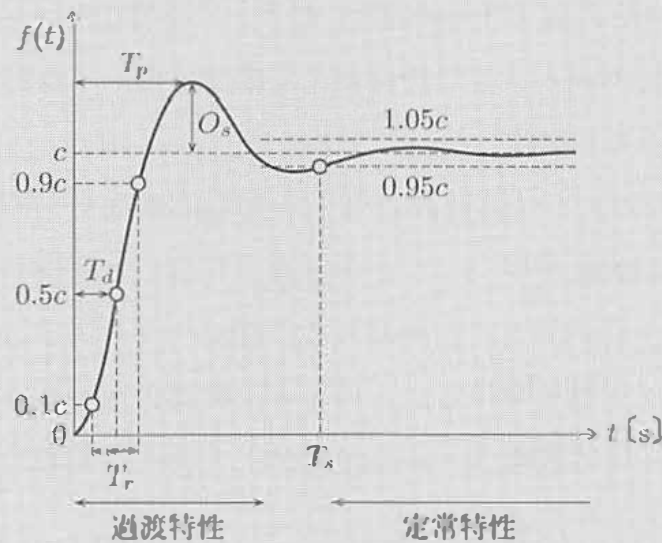


図 11.2 ステップ応答における過渡特性と定常特性

表 11.1 ステップ応答の特性値

| 特性値     | 記号    | 定 義  |
|---------|-------|--|
| 立ち上がり時間 | $T_r$ | ステップ応答が定常値 $c$ の 10 % から 90 % に達するまでに要する時間               |
| 遅れ時間    | $T_d$ | ステップ応答が定常値の 50 % に達するまでに要する時間                            |
| 行き過ぎ時間  | $T_p$ | 最大行き過ぎ量に達するまでに要する時間                                      |
| 最大行き過ぎ量 | $O_s$ | ステップ応答が定常値を超えた最大値 (通常、定常値に対する割合 (%) で表される)               |
| 整定時間    | $T_s$ | ステップ応答が定常値の $\pm 5\%$ (あるいは $\pm 2\%$ ) の範囲に落ち着くまでに要する時間 |

## 11.2 $s$ 領域における過渡特性の評価

式 (11.3) より、過渡応答の振る舞いは特性根  $s_i$  の複素平面上の配置に依存することがわかった。そこで、本節では、 $s$  平面上における閉ループ伝達関数の極（特性根）および零点の配置と過渡特性との関係について調べる。

### 11.2.1 極の配置と過渡特性の関係

虚軸に近い、負の実部の絶対値が小さい特性根に対応する項、すなわち減衰の遅いモードが、ステップ応答波形（過渡特性）に大きな影響を与える。逆に、虚軸から離れた、負の実部の絶対値が大きい特性根に対応する項、すなわち減衰の速いモードは、応答波形にほとんど影響しない。たとえば、 $s_1 = -1$ 、 $s_2 = -100$  の二つの特性根からなる2次系を考える（図 11.3）。これらに対応するモードは  $e^{-t}$  と  $e^{-100t}$  であるが、後者のほうが前者より、 $t \rightarrow \infty$  のときより速く 0 に向かう。ここで、簡単のため、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  とおいた。したがって、閉ループシステムの過渡応答は減衰の遅いモードに大きく影響を受ける。このとき、減衰の遅いモードに対応した特性根を代表特性根あるいは代表極（dominant pole）といい、それらによって、過渡応答を近似的に表現することができる。

図 11.4 に特性根の配置とインパルス応答波形の関係を示す。図では虚部が正の部分のみを表示した。この図より、次のようなことがわかる。

#### (1) 左半平面に極が存在する場合：安定

(a), (b), (c) は、安定なシステムの例である。(a) は  $s = -10$  に、(b) は  $s = -1$  に実極を持つ1次系である。(a) と (b) を比較すると、(a) のほうがより速く 0 に収束している。このように、原点から離れた実極のほうが時定数が小さく、

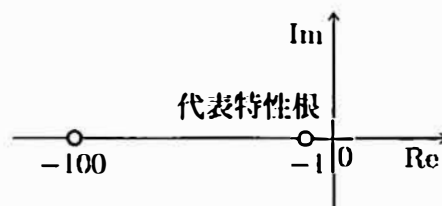


図 11.3 代表特性根（原点に近い極のほうが応答への影響力が大きい）

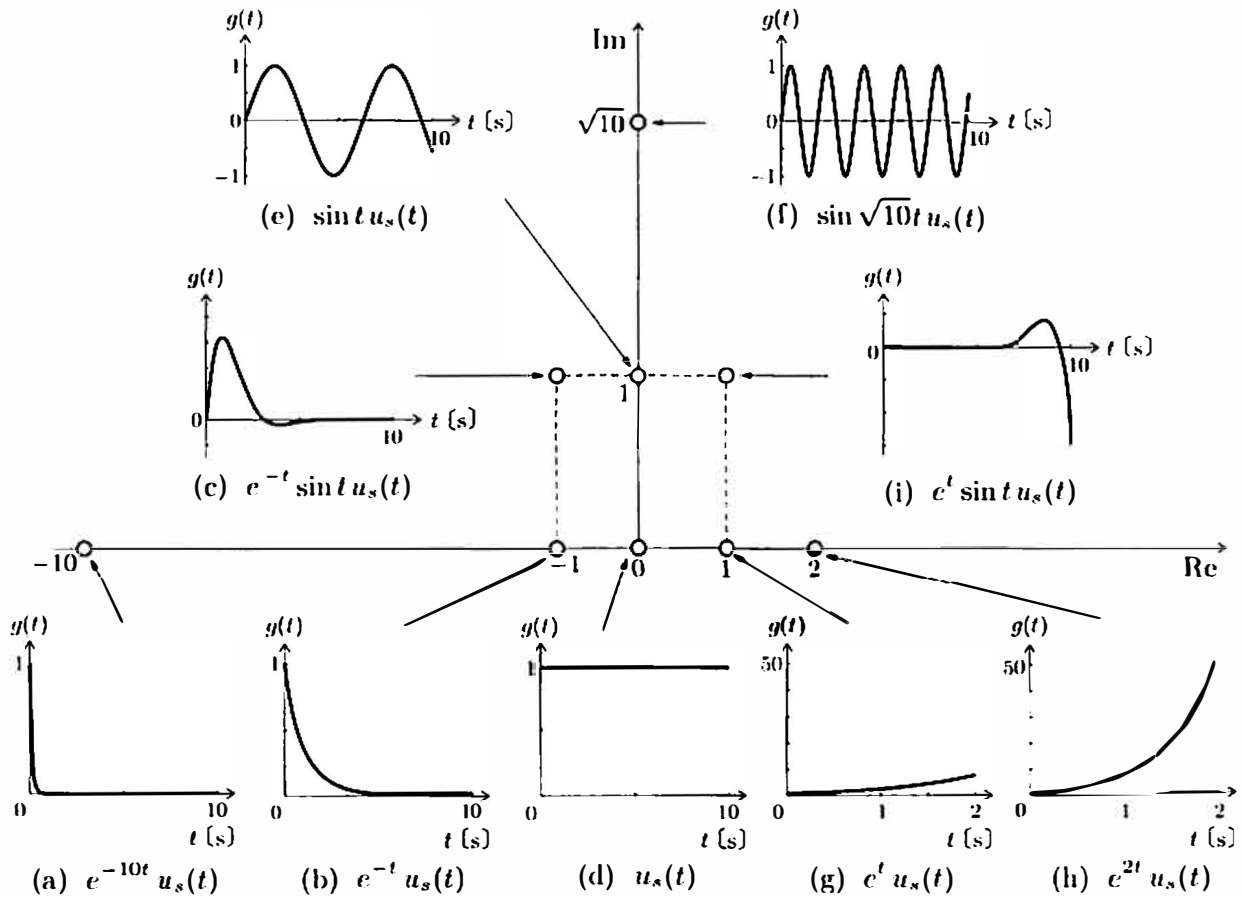


図 11.4 特性根の配置とインパルス応答波形の関係

減衰の速いモードである。(c) は  $s = -1 \pm j$  に複素共役極を持つ 2 次系であり、その伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

である。この場合は、インパルス応答は振動しながら 0 に収束する。

## (2) 虚軸上に極が存在する場合：安定限界

(d), (e), (f) は、虚軸上に極を持つ安定限界のシステムの例である。(d) は原点に一つの極を持つ積分系のシステムで、そのインパルス応答はステップ信号になる。(e) と (f) は虚軸上に純虚数の複素共役極を持つ 2 次系で、その伝達関数は

$$G(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

で与えられる。ただし、(e) は  $\omega = 1$  であり、(f) は  $\omega = \sqrt{10}$  である。これらの場合には、そのインパルス応答は、周波数  $\omega$  の正弦波になる。図より、原

点からの距離が正弦波の周波数に対応するので、原点から遠い極を持つ場合のほうが正弦波の周波数は高くなる。

(3) 右半平面に極が存在する場合：不安定

(g), (h), (i) は、右半平面に不安定極を持つ不安定システムの例である。(g) は  $s = 1$  に、(h) は  $s = 2$  に実極を持つ1次系である。 $t \rightarrow \infty$  のとき、それらのインパルス応答は発散している。(g) と (h) を比較すると、(h) のほうがより速く無限大に発散していることがわかる。このように、原点より遠い不安定極のほうが発散の速度は速く、制御しにくい。(i) は  $s = 1 \pm j$  に複素共役極を持つ2次系である。その伝達関数は、

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

である。この場合、インパルス応答は振動しながら発散する。

一般に、閉ループ伝達関数  $W(s)$  は高次であるが、特性代表根として1対の複素共役根を選んで2次系で近似することがある。あるいは、一つの実根と1対の複素共役根を選んで3次系で近似することもある。すると、近似的にはあるが、ステップ応答の特性値を計算できる。このように、高次系をたとえば低次の2次系で近似し、過渡特性などを解析することを代表根法という。

そこで、 $W(s)$  が次の2次遅れ系で近似できる場合を考えよう。

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (11.4)$$

これは、代表根として

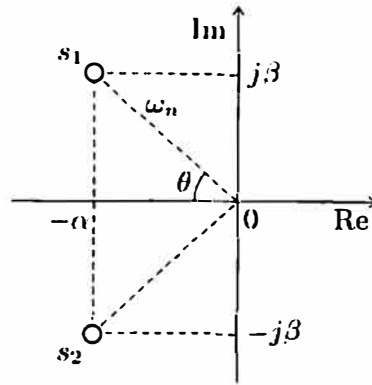
$$s_1, s_2 = -\alpha \pm j\beta, \quad \alpha, \beta > 0$$

を選んだ場合に相当する。特性根の実部  $\alpha$  と虚部  $\beta$  を用いて式(11.4)を書き直すと、

$$W(s) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)} \quad (11.5)$$

となる。式(11.4)と式(11.5)の係数比較を行うことにより、図11.5に示す記号を用いると、

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

図11.5 2次遅れ系の特性根  $s_1, s_2$  の配置

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha}{\omega_n} = \cos \theta$$

を得る。

このように、 $W(s)$  が2次遅れ系の場合には、図11.2に示したステップ応答の特性値として表11.2に示す値を用いることができる。表11.2において、 $T_r$  と  $T_d$  の計算式は近似式であるが、 $T_p$  と  $O_s$  は厳密に計算することができる。また、ステップ応答の振動成分の包絡線より、5% 整定時間  $T_s$  は

$$e^{-\zeta \omega_n T_s} = 0.05 \quad \longrightarrow \quad T_s = \frac{\ln 20}{\zeta \omega_n} \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (11.6)$$

となる。このように、整定時間は減衰性の指標である  $\zeta$  と、速応性の指標と考えられる  $\omega_n$  の両者に関係している。ここで、2次遅れ系の時定数 ( $T_r$  とおく) を、ス

表11.2 ステップ応答の特性値 (2次遅れ系の場合)

| 特性値 |         | 計算式   |
|-----|---------|---|
| (1) | 立ち上がり時間 | $T_r \approx \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} \quad (0.3 \leq \zeta \leq 0.8)$                            |
| (2) | 遅れ時間    | $T_d \approx \frac{0.7\zeta + 1}{\omega_n}$   |
| (3) | 行き過ぎ時間  | $T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$   |
| (4) | 最大行き過ぎ量 | $O_s = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}$<br>$O_s \approx 1 - \frac{\zeta}{0.6} \quad (0 < \zeta < 0.6)$ |
| (5) | 5% 整定時間 | $T_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$  |

テップ応答の包絡線が最終値の 63.2 % に達する時間と定義すると,

$$T_c = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad (11.7)$$

となり, 近似的に次式が成り立つ.

$$T_s \approx 3T_c \quad (11.8)$$

これより, 整定時間は時定数の約3倍であることがわかる.

次に, 伝達関数

$$W(s) = \frac{p}{(s+p)(s^2+s+1)} \quad (11.9)$$

で記述される3次系のステップ応答について見ていこう. 実極の配置を  $p = 0.5, 1, 2, 10$  と変化させて, ステップ応答を計算したものを図11.6に示す. 図より, 実極( $p$ )の絶対値が大きくなると, すなわち, 虚軸から離れていくと, 速応性は向上するが, 減衰性は劣化する. さらに,  $p$  を大きくすると, ステップ応答は2次系

$$W(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

のそれに近づいていく.

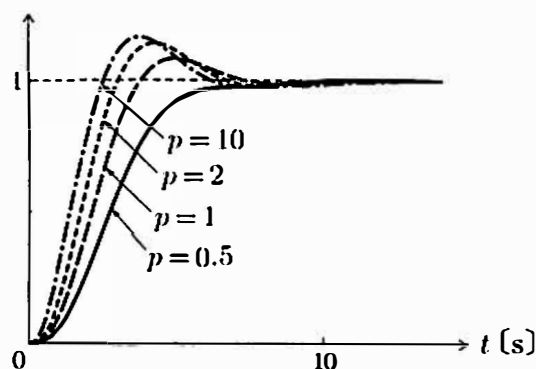


図11.6 3次系のステップ応答 (実極の影響)

### 11.2.2 零点の配置と過渡特性の関係

閉ループシステムの零点のステップ応答への影響を調べよう. 図11.7にゲイン特性が等しい二つの伝達関数

$$W_1(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}, \quad W_2(s) = \frac{-s+1}{s^2+s+1} \quad (11.10)$$



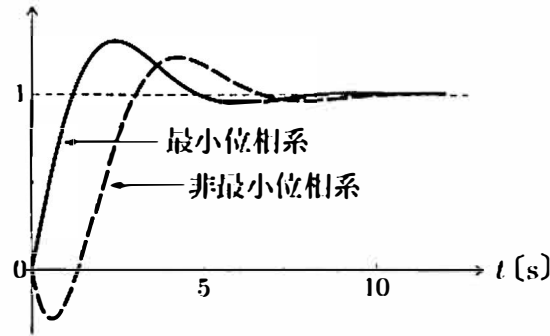


図 11.7 2次系のステップ応答に対する零点の影響

のステップ応答波形を示す。ここで、 $W_1(s)$  は左半平面に安定な零点を持つ最小位相系であり、 $W_2(s)$  は右半平面に不安定な零点を持つ非最小位相系である。図より、 $W_2(s)$  では、応答の開始直後に最終値とは逆の方向に向かっている。これは逆応答と呼ばれ、非最小位相系に特有な現象である。

次に、零点がある3次系

$$W(s) = \frac{s+z}{z(s+1)(s^2+s+1)} \quad (11.11)$$

のステップ応答について見ていこう。零点の配置  $z = 0.4, 0.6, 0.8, 1$  を変化させて、ステップ応答を計算したものを図11.8に示す。図より、実数の零点 ( $z$ ) が実数極 ( $p=1$ ) から離れていくと、最大行き過ぎ量が大きくなる。逆に、 $z$  が  $p=1$  に近づいていくと、零点の影響がステップ応答に現れなくなる。このように非常に接近した位置に存在する極と零点の組を、ダイポール (dipole) という。そして、 $z=1$  になると、ステップ応答は2次系

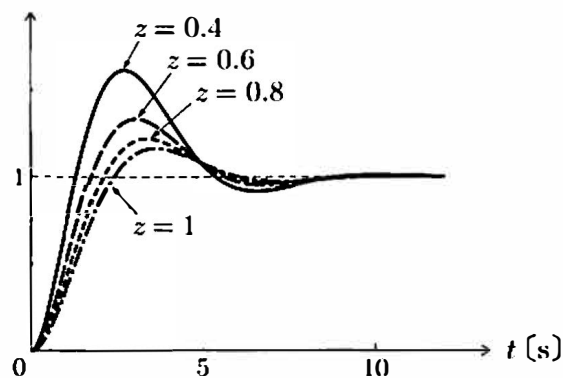


図 11.8 3次系のステップ応答に対する零点の影響

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

のそれに近づいていく。

### 11.3 周波数領域における過渡特性の評価

図11.1のフィードバック制御系の閉ループ伝達関数  $W(s)$  の典型的なゲイン特性  $|W(j\omega)|$  を図11.9に示す。簡単のため、定常ゲインを1とした。図より、閉ループシステムは一般に低域通過特性を持つ。これより Point 11.2 を得る。

#### ❖ Point 11.2 ❖ フィードバック制御系の設計

フィードバック制御系の設計とは、一種の低域通過フィルタの設計である。

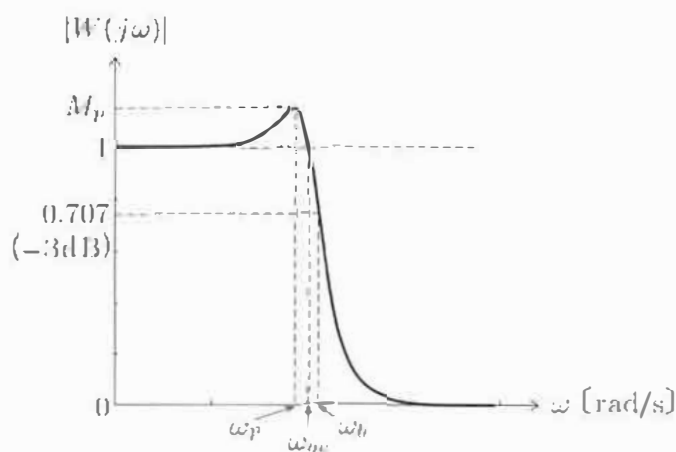


図11.9 閉ループ伝達関数のゲイン特性

閉ループシステムの過渡特性を周波数領域において定量化する代表的な項目を、表11.3に定義する。

表11.3の中で、バンド幅（あるいは帯域幅） $\omega_b$  とピークゲイン  $M_p$  が特に重要である。そこで、まず制御系のバンド幅の意味について図11.10を用いて考えよう。バンド幅  $\omega_b$  とは、 $W(s)$  を低域通過フィルタと見なしたとき、制御系の出力  $y(t)$  が周波数  $\omega_b$  までの入力、すなわち目標値に追従できることを意味している。したがって、 $\omega_b$  を大きくすると、制御系はより高い周波数の目標値に追従できる。言い換えると、目標値の速い変化に追従できるようになる。したがって、前述のステップ応

表 11.3 閉ループ伝達関数の周波数領域における特性値

| 特性値             | 記号            | 定 義  |
|-----------------|---------------|--|
| バンド幅 (帯域幅)      | $\omega_b$    | 閉ループゲイン $ W(j\omega) $ が定常ゲイン $ W(j0) $ の $1/\sqrt{2}$ 倍 (すなわち 3 dB 低下) になる周波数 |
| ゲインクロスオーバー周波数   | $\omega_{gc}$ | 閉ループゲイン $ W(j\omega) $ が定常ゲイン $ W(j0) $ と等しくなる周波数                              |
| 共振周波数 (ピーク周波数)  | $\omega_p$    | 閉ループゲイン $ W(j\omega) $ が最大値をとる周波数  |
| ピークゲイン (M ピーク値) | $M_p$         | 閉ループゲイン $ W(j\omega) $ の最大値  |

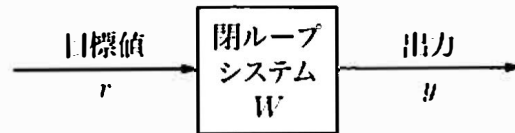


図 11.10 閉ループシステムの入出力関係

答の立ち上がり時間は小さくなり，制御系の速応性が向上する．周波数領域におけるバンド幅  $\omega_b$  と時間領域における立ち上がり時間  $T_r$  の間の厳密な関係式を導出することは困難であるが，近似的に

$$T_r \propto \frac{1}{\omega_b} \quad (11.12)$$

が成り立つので，バンド幅を速応性の評価に利用することができる．

さらに， $W(s)$  が理想的な低域通過フィルタ<sup>1</sup>であると仮定すると，関係式

$$T_r = \frac{\pi}{\omega_b}, \quad T_d = \frac{\phi_b}{\omega_b} \quad (11.13)$$

が成り立つ．ただし， $\phi_b = \angle W(j\omega_b)$  である．これらの式は，周波数領域と時間領域の過渡応答特性値の関係を与えている．以上の結果を次にまとめる．

1. 理想的な低域通過フィルタとは，

$$|W(j\omega)| = \begin{cases} 1, & \omega \leq \omega_b \\ 0, & \omega > \omega_b \end{cases}$$

が成り立つフィルタのことである．ただし，このフィルタを物理的に実現することはできない．

### ❖ Point 11.3 ❖ フィードバック制御系の速応性

フィードバック制御系のバンド幅と立ち上がり時間、遅れ時間の間には、次の関係が定性的に成り立つ。

$$\omega_b \rightarrow \text{大} \quad \Longleftrightarrow \quad T_r \rightarrow \text{小}, \quad T_d \rightarrow \text{小} \quad (11.14)$$

したがって、制御系のバンド幅は速応性の指標である。

また、バンド幅は次式で近似できる。

$$\omega_b = (-1.1961\zeta + 1.8508)\omega_n \quad (11.15)$$

第8章で述べたように、理想的には、 $\omega_b \rightarrow \infty$ 、すなわち

$$|W(j\omega)| = 1, \quad \forall \omega \quad (11.16)$$

のように  $W(s)$  が全域通過関数であれば、どのような  $r(t)$  に対しても  $y(t)$  は追従できる。式(11.16)が成り立つ最も単純な場合は、 $W(s) = 1$  である。しかしながら、式(11.16)を達成することは現実には不可能なので、制御系設計の立場では、 $\omega_b$  をどれだけ大きくできるか、すなわち制御系の広帯域化が重要なポイントになる。

周波数伝達関数がある周波数で最大値をとる現象を共振という。このとき、閉ループゲイン  $|W(j\omega)|$  の最大値をピークゲイン (M ピーク値) といい、 $M_p$  で表す。また、このときの周波数を共振周波数あるいはピーク周波数といい、 $\omega_p$  で表す。特に、 $W(s)$  が式(11.4)の2次遅れ系の場合、前述したように、次式が成り立つ。

$$M_p = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, & \zeta \leq 0.707 \\ 1, & \zeta > 0.707 \end{cases} \quad (11.17)$$

$$\omega_p = \begin{cases} \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}, & \zeta \leq 0.707 \\ 0, & \zeta > 0.707 \end{cases} \quad (11.18)$$

図11.11に、 $\zeta$  と  $M_p$ 、そして  $\zeta$  と  $\omega_p/\omega_n$  の関係を図示する。

以上より、 $M_p$  を減衰性の指標、 $\omega_p$  を速応性の指標として利用できる。最後に、ピークゲイン  $M_p$  は閉ループ伝達関数の  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムであることに注意しよう。

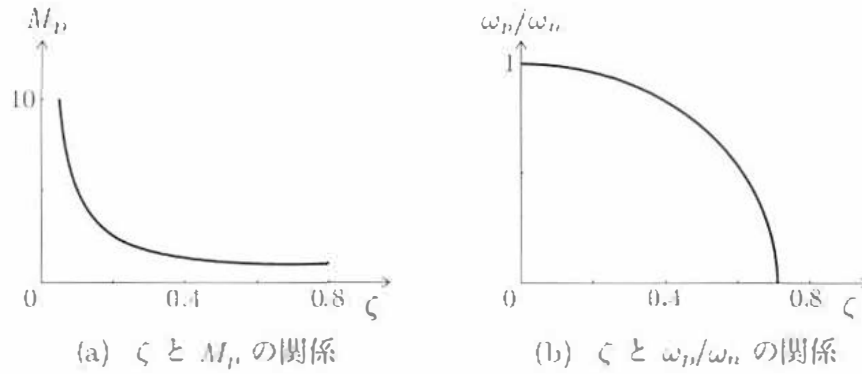


図 11.11 減衰比  $\zeta$  と  $M_p$ ,  $\omega_n/\omega_n$  の関係

### 例題 11.1

**MATLAB** 図 11.1 において,

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

のとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 閉ループ伝達関数  $W(s)$  を計算し,  $\omega_n$  と  $\zeta$  を求めなさい.
- (2) この閉ループシステムのステップ応答を図示しなさい. そして,  $T_r$ ,  $T_d$ ,  $T_s$ ,  $O_s$ ,  $T_p$  の計算値と, ステップ応答波形から読み取ったそれらの値とを比較しなさい.
- (3) 閉ループ伝達関数  $W(s)$  のゲイン線図を描きなさい. そして,  $\omega_b$ ,  $M_p$ ,  $\omega_p$  の計算値と, ゲイン線図から読み取ったそれらの値とを比較しなさい.
- (4) この制御系へ目標値として  $r_1(t) = \sin 0.1t$  を入力した場合と,  $r_2(t) = \sin 10t$  を入力した場合の制御量を図示し, その結果について考察しなさい.

### 解答

(1)  $W(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$  であるので,  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta = 0.5$  である.

(2) 図 11.12 にステップ応答波形を示す. 計算式より  $T_r = 1.68$ ,  $T_d = 1.35$ ,  $T_p = 3.627$ ,  $O_s = 0.163$ ,  $T_s = 6$  が得られる. 一方, 図面からは  $T_r = 1.64$ ,  $T_d = 1.29$ ,  $T_p = 3.63$ ,  $O_s = 0.163$ ,  $T_s = 5.28$  が得られ, 両者はほぼ一致している.

(3) 図 11.13 にゲイン線図を示す (縦軸は線形スケールとした). 計算式より  $\omega_b =$

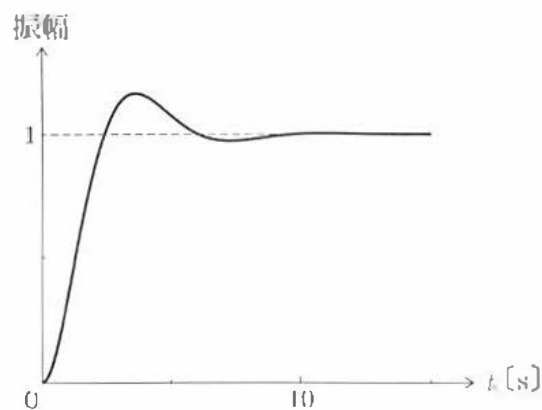


図 11.12

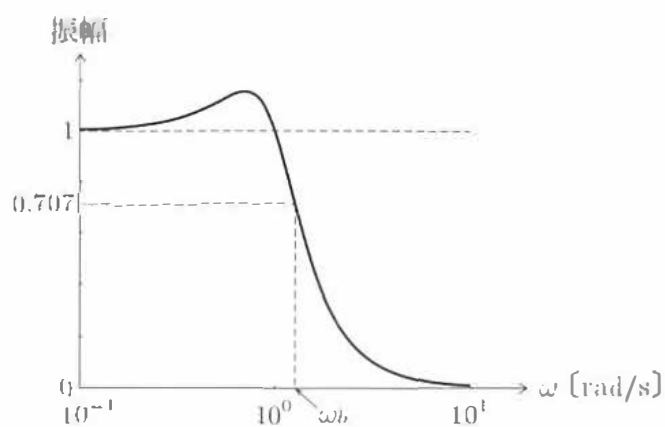


図 11.13

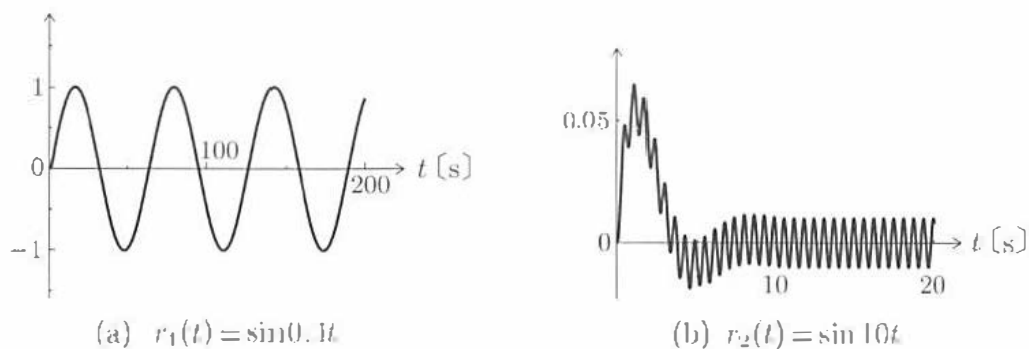


図 11.14

1.253,  $M_p = 1.155$ ,  $\omega_p = 0.707$  が得られる。一方, 図 11.13 からは  $\omega_b = 1.277$ ,  $M_p = 1.155$ ,  $\omega_p = 0.707$  が得られ, 両者はほぼ一致している。

- (4) 図 11.14 にそれぞれの正弦波入力に対する時間応答を示す。図より,  $\omega = 0.1$  rad/s の目標値に対しては, 出力波形も同じ振幅の波形になるが,  $\omega = 10$  rad/s の目標値に対しては, 出力波形の振幅は非常に小さくなり, 追従できていな

い、これらの図より、バンド幅  $\omega_b = 1.25 \text{ rad/s}$  より高い周波数の目標値には追従できないことが確認できる。 ■

## 11.4 根軌跡

これまで述べてきたように、フィードバック制御系の安定性や過渡特性は、閉ループ伝達関数の極、すなわち特性根の配置に依存する。一巡伝達関数に含まれる一つのパラメータを変化させたときの特性根の軌跡を根軌跡 (root locus) という。

直結フィードバック制御系において、特性方程式は、

$$1 + L(s) = 0 \quad (11.19)$$

となる。式 (11.19) を解くことにより特性根を求めることができるが、これは一般に高次代数方程式であるため、容易には解けない。

根軌跡とは、一巡伝達関数  $L(s)$  に含まれるパラメータの一つ (通常はゲイン  $K$ ) を 0 から  $\infty$  まで変化させたとき、 $s$  平面上に描かれる特性根の軌跡のことをいう。根軌跡を用いることによって、あるパラメータを変化させたとき、制御系の安定性や過渡特性がどのような影響を受けるかを調べることができる。ラウスの安定判別法が式 (11.19) を解かずに安定性を調べる方法であったように、式 (11.19) を解かずに根軌跡を描く方法が根軌跡法である。

まず、例題を通して根軌跡について理解しよう。

### 例題 11.2

一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}, \quad K > 0 \quad (11.20)$$

で与えられるとし、ゲイン  $K$  を 0 から  $\infty$  まで変化させたときの根軌跡を描きなさい。

**解答** 特性方程式は、

$$s^2 + s + K = 0$$

となる。これは2次方程式なので、特性根を容易に計算することができ、

$$s_1, s_2 = -0.5 \pm 0.5\sqrt{1-4K} \quad (11.21)$$

が得られる。この場合の根軌跡とは、ゲイン  $K$  を 0 から  $\infty$  まで変化させたとき、式(11.21)で与えられる特性根の軌跡のことである。

$K = 0$  のとき、特性根は  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1$  に存在し、 $0 < K < 0.25$  のときには、負の実軸上に2実根が位置し、 $K = 0.25$  になると  $-0.5$  に2重根として存在する。さらに、 $K > 0.25$  になると、式(11.21)は、

$$s_1, s_2 = -0.5 \pm j0.5\sqrt{4K-1}$$

となり、実部は常に  $-0.5$  であるが、 $K$  が増加するにつれて虚部の大きさが増大していく。以上より、根軌跡は図11.15のようになる。 ■

図11.15より、さまざまなゲイン  $K$  の値に対する特性根の配置が明らかになる。たとえば  $K \rightarrow \infty$  としても、閉ループ系は安定である。また、 $K$  の大きさと過渡特性の関係も理解できる。この例題は2次系であったため、あらかじめ特性根を計算した後に根軌跡を描くことができたが、一般にはこの作業は手計算では困難である。

根軌跡が提案されたのは、計算機が発達していない1948年であった。現在ではMATLABのようなソフトウェアを用いて正確な根軌跡を作図できる。根軌跡の考

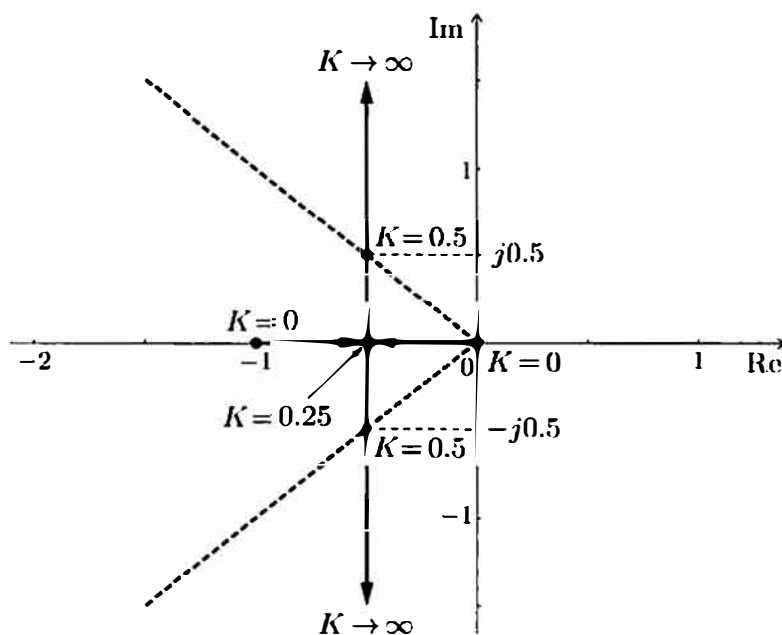


図11.15



え方や基本的な性質を理解することは大切だが、高次系の場合の根軌跡の作図には計算機を用いるのがよいだろう。

### 例題 11.3

**MATLAB** 一巡伝達関数が

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

であるフィードバック制御系の根軌跡を描き、その結果について考察しなさい。

### 解答

MATLAB を用いて描いた根軌跡を図 11.16 に示す。この場合の特性方程式は

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

なので、これに対してラウス表を作ると、

|       |                 |     |
|-------|-----------------|-----|
| $s^3$ | 1               | 2   |
| $s^2$ | 3               | $K$ |
| $s^1$ | $\frac{6-K}{3}$ |     |
| $s^0$ | $K$             |     |

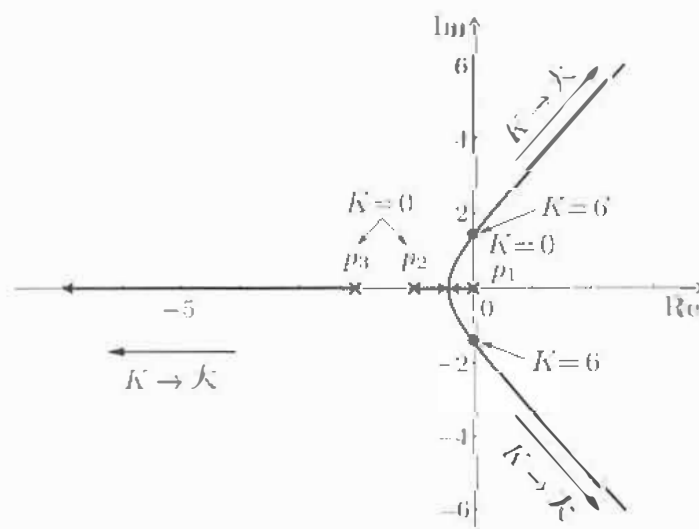


図 11.16

となる。これより、 $0 < K \leq 6$  のとき、フィードバックシステムは安定になる。そして、 $K = 6$  のとき、このシステムは安定限界となり、根軌跡は虚軸と交わる。 ■

最後に、時間領域、 $s$  領域、そして周波数領域におけるフィードバック制御系の過渡特性の特性値を表 11.4 にまとめる。

表 11.4 過渡特性の特性値

|     | 時間領域       | $s$ 領域     | 周波数領域                |
|-----|------------|------------|----------------------|
| 速応性 | $T_r, T_d$ | $\omega_n$ | $\omega_b, \omega_p$ |
| 減衰性 | P.O.       | $\zeta$    | $M_p$                |

## 本章のポイント

- ▼ 時間領域、 $s$  領域、周波数領域におけるフィードバック制御系の過渡特性を表す特性値について理解すること。
- ▼ 根軌跡の考え方を理解すること。

## Control Quiz

**11.1** 式(11.6)で2次系の5% 整定時間の計算式を与えた。それをもとにして、2次系の2% 整定時間の計算式を求めなさい。

**11.2** **MATLAB** 一巡伝達関数が次のように与えられる制御系の根軌跡を描きなさい。

$$(1) \frac{K}{s(s+2)(s+4)} \quad (2) \frac{K(s+1)}{s^2(s+3)}$$

**11.3** **MATLAB** 一巡伝達関数が次のように与えられる制御系の根軌跡を描き、安定性の観点から両者を比較しなさい。

$$(1) L_1(s) = \frac{K}{(s+2)(s+5)} \quad (2) L_2(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$