第9章 LTI システムの安定性

本章と次章では，制御系が満たすべき第一の要件である安定性について述べる．まず，本章では LTI システムの安定性について述べ、引き続いて次章ではフィードバック制御系の安定性について解説する．

9.1 BIBO安定

図 9.1 を用いて LTI システムの安定性について考えよう．図において，$u(t)$ は入力信号、$y(t)$ は出力信号、そして LTI システムの伝達関数を $G(s)$ とする．

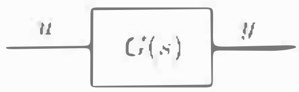


図9.1 LTI システム

いま、入力として有界な（bounded）信号を用意する．ここで，有界な信号とは、有界な値を持つ信号，すなわち無限大に発散しない信号のことであり，次式のように定義される．

$$|u(t)| \leq K < \infty, \quad \forall t \tag{9.1}$$

このとき、LTI システムの安定性を次のように定義する．

✤ Point 9.1 ✤　BIBO 安定

有界な入力をシステムに加えると対応する出力もまた有界になるとき，そのシステムは BIBO 安定（bounded input, bounded output stability; 有界入力・有界出力安定）あるいは入出力安定，または単に安定であるという．

それでは、与えられた LTI システムが BIBO 安定であるかどうかを調べるために

は，どうすればよいのだろうか？ 以下では，LTI システムがインパルス応答で記述されている場合と，伝達関数で記述されている場合，そして，状態空間で記述されている場合に対する安定性の判別法を与える．

9.2 インパルス応答表現の場合

第3章で述べたように，時間領域において出力信号 $y(t)$ は，システムのインパルス応答 $g(t)$ と入力 $u(t)$ のたたみ込み積分

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.2}$$

により計算できる．いま，$u(t)$ は有界であると仮定すると，式 (9.1) を利用することにより，

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |g(\tau)||u(t-\tau)|\mathrm{d}\tau \leq K \int_0^\infty |g(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

が得られる．これより Point 9.2 を得る．

✤ Point 9.2 ✤ インパルス応答を用いた安定判別

LTI システムのインパルス応答 $g(t)$ の絶対値の積分が有界，すなわち，

$$\int_0^\infty |g(t)|\mathrm{d}t < \infty \tag{9.3}$$

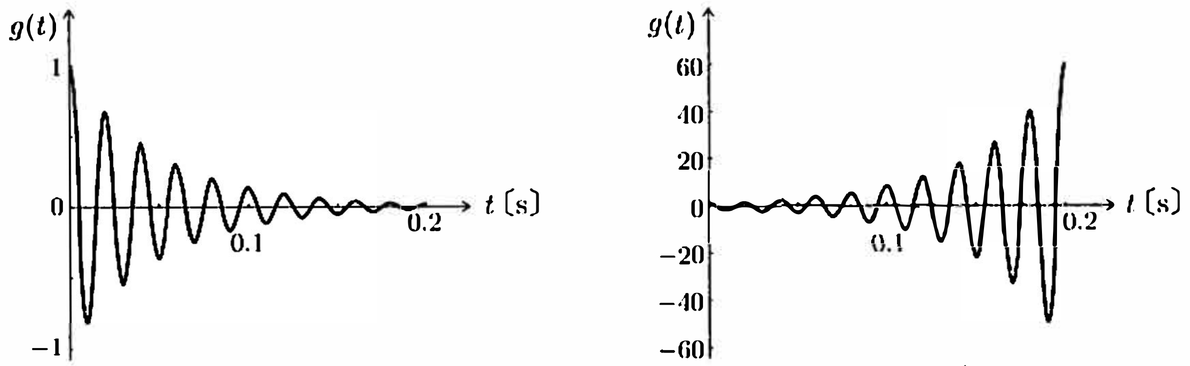
が成り立つとき，そのシステムは BIBO 安定である．このとき，式 (9.3) は絶対可積分の条件と呼ばれる．

本書が取り扱う範囲では，

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \tag{9.4}$$

が成り立っていれば，すなわち，時間が無限大に向かうときインパルス応答が 0 に収束すれば，式 (9.3) が成り立っていると考えてよい．

Point 9.2 より，システムのインパルス応答が既知であれば，その波形を見ることにより，安定性を判別することができる．たとえば，図 9.2 (a) のインパルス応答を



(a) 安定　　(b) 不安定

図9.2　インパルス応答による安定判別

持つシステムは安定であるが，(b) は不安定である．しかし，インパルス応答を直接利用できない場合も多い．そこで，これに代わる安定性の条件を探していこう．

9.3　伝達関数表現の場合

インパルス応答のラプラス変換である伝達関数 $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ から，システムの安定性を調べる方法を与える．

まず，$G(s)$ は有理型の伝達関数であるとして，

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{9.5}$$

とおく．ただし，

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{9.6}$$

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \tag{9.7}$$

であり，多項式 $A(s)$ と $B(s)$ は既約[1]とする．このとき，分母多項式 $A(s)$ は**特性多項式**（characteristic polynomial）と呼ばれる．いま，簡単のため，**特性方程式**（characteristic equation）

$$A(s) = 0$$

の根（これを**特性根**（characteristic root）と呼ぶ）s_i はすべて相異なるものとし，

[1] 互いに素であること．すなわち，分子分母の共通因子があれば，それはすでに約分された状態であること．

$$A(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n), \qquad s_i \neq s_j \ (i \neq j) \tag{9.8}$$

とおく．ここで，一般性を失うことなく，式 (9.6) の $A(s)$ の s^n の係数を 1 とおいた．また，s_i は実数あるいは複素数である．

いま，インパルス応答はインパルス入力 $u(t) = \delta(t)$ に対する出力なので，$y(t) = g(t)$ となり，これをラプラス変換すると，

$$y(s) = G(s)$$

が得られる．そこで，この式を部分分数展開すると，

$$\begin{aligned} y(s) = G(s) &= \frac{B(s)}{(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n)} \\ &= \frac{\beta_1}{s - s_1} + \frac{\beta_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{s - s_n} \end{aligned} \tag{9.9}$$

となる．ここで，β_i $(i = 1, \ldots, n)$ は留数計算により得られる．次に，逆ラプラス変換すると，

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = (\beta_1 e^{s_1 t} + \beta_2 e^{s_2 t} + \cdots + \beta_n e^{s_n t})u_s(t) \tag{9.10}$$

となり，インパルス応答 $g(t)$ が計算できる．ここで，$e^{s_i t}$ をモード (mode) と呼び，式 (9.10) のようなインパルス応答の表現をモード展開と呼ぶ．

一般的に議論していくとわかりにくいので，次の具体的な例題を考えよう．

例題 9.1

伝達関数が

$$G(s) = \frac{s + 5}{(s + 3)(s + 4)} \tag{9.11}$$

である LTI システムのインパルス応答 $g(t)$ を計算し，安定性を調べなさい．

解答　まず，特性根は $s = -3, -4$ である．次に，この伝達関数を部分分数展開すると，

$$G(s) = \frac{2}{s + 3} - \frac{1}{s + 4}$$

となり，インパルス応答は次式となる．

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+4}\right] = (2e^{-3t} - e^{-4t})u_s(t)$$

これより

$$\int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty |2e^{-3t} - e^{-4t}|\,\mathrm{d}t = \frac{5}{12} < \infty$$

となり，このシステムは BIBO 安定である．■

この例題より，特性根はインパルス応答のモード展開表現における指数関数の指数部に対応していることがわかる．そこで，1次系，2次系についてもう少し詳しく見ていこう．

[1] 1次系の場合（特性根が一つの実根の場合）

このとき，インパルス応答は

$$g(t) = \beta_1 e^{s_1 t} \tag{9.12}$$

となり，s_1 の符号により，図9.3に示すように三つに分類できる．図より，$s_1 < 0$ のとき，$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ となるので，安定であることがわかる．一方，$s_1 \geq 0$ のときは

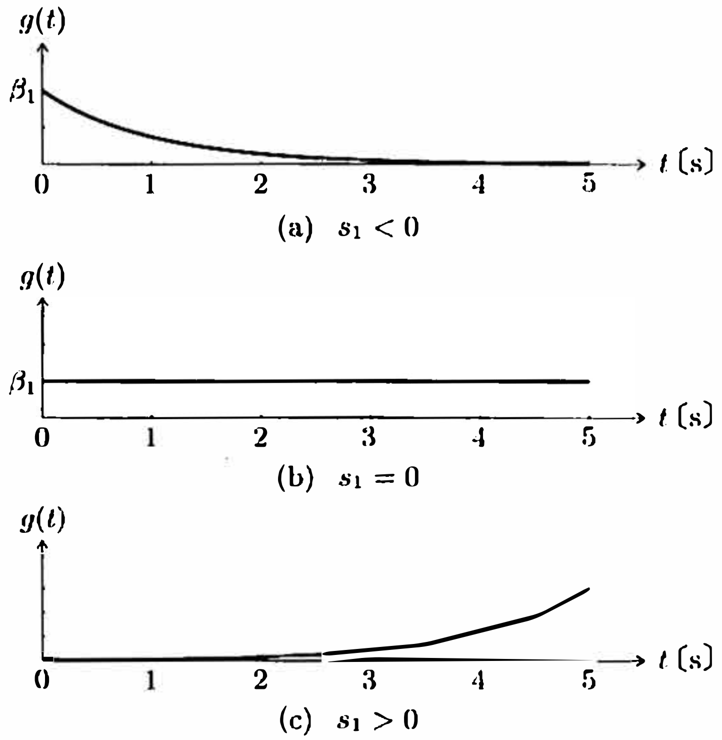


図9.3　1次系のインパルス応答

BIBO 安定ではなく，不安定と呼ばれる．特に，$s_1 = 0$ のときは安定限界と呼ばれることがある．

[2] 2次系の場合（特性根が1対の複素共役根の場合）

次に、特性方程式が1対の複素共役根を持つ場合について、例題を通して見ていこう．

例題 9.2

伝達関数が

$$G(s) = \frac{13}{s^2 + 6s + 13} \tag{9.13}$$

で与えられる2次遅れ系の安定性を調べなさい．

解答 与えられた伝達関数は

$$G(s) = \frac{6.5 \cdot 2}{(s+3)^2 + 2^2}$$

と変形できるので，インパルス応答は次式となる．

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 6.5e^{-3t} \sin 2t \, u_s(t) \tag{9.14}$$

ここで，

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2} \tag{9.15}$$

を用いた．$g(t)$ を図9.4に示す．図より，このシステムは安定である． ■

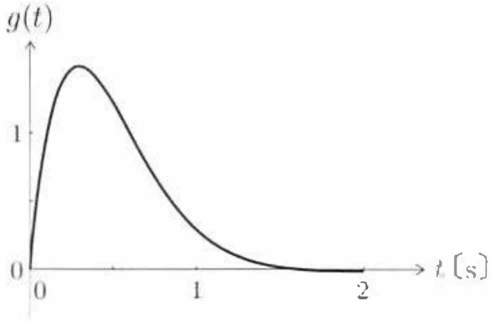


図 9.4

この例題より，式(9.14)の指数部が負であれば，正弦波の周波数（この場合は2）にかかわらず，$t \to \infty$ のとき $y(t) \to 0$ となり，安定になる．

さて，式(9.13)の特性方程式

$$s^2 + 6s + 13 = 0$$

を解くことにより，特性根は，

$$s = -3 \pm j2$$

となる．ここで，特性根の実部（-3）が式(9.14)の指数部に，特性根の虚部（± 2）が式(9.14)の正弦波の周波数に対応している．

したがって，安定性には特性根の虚部は関係せず，実部の符号のみが影響する．以上より，次の結果を得る．

✣ Point 9.3 ✣　伝達関数を用いた安定判別

LTIシステムがBIBO安定であるための必要十分条件は，すべての特性根の実部が負であること，すなわち，図9.5に示すように，すべての特性根が s 平面上の左半平面に存在することである．

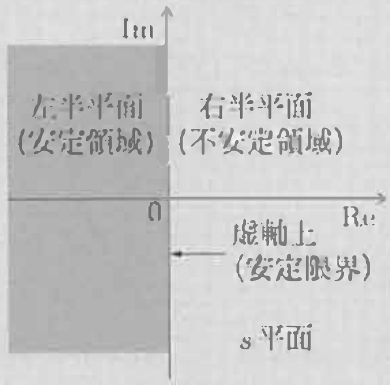


図9.5　s 平面上における安定領域

例題9.2

伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \tag{9.16}$$

で与えられるシステムの安定性を調べなさい．

解答 $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \sin t$ より，

$$\int_0^{\infty} |\sin t| dt = \infty$$

となる．よって，インパルス応答は絶対可積分でないので，安定ではない．このときの特性根は，

$$s^2 + 1 = 0$$

を解くことにより $s = \pm j$ となり，虚軸上に存在する．よって，インパルス応答は周波数 1 rad/s で持続振動する． ■

[3] 3次系以上の場合

以上より，特性根を求めることによって LTI システムの安定性を判別できることがわかった．しかし，特性方程式が高次の場合，特性根の計算は容易ではなかった．そこで，特性根を求めることなく安定性を判別する方法が，19 世紀後半にラウス（英）とフルビッツ（独）により独立に提案された．二人の方法は数学的に等価であるので，本書ではラウスの安定判別法のみを紹介する．

✤ Point 9.4 ✤ ラウスの安定判別法

LTI システムの特性方程式

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{9.17}$$

が与えられたとき，このシステムが安定であるかどうかは，以下の条件を調べればわかる．

❒ 条件 1

すべての係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ が存在して，かつ同符号であること．この条件は安定性のための必要条件であり，この条件を満たしていなければ，その時点でシステムは安定ではない．

❒ 条件 2

条件 1 を満たしていれば，次のラウス表を作成する．

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
s^{n-2}	$b_1 := \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 := \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	b_3	$\cdots$
s^{n-3}	$c_1 := \dfrac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$	$c_2 := \dfrac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^0				

ただし，値の入っていないところは0を入れる．

システムが安定であるための必要十分条件は，ラウス表の第1列 $\{a_n, a_{n-1}, b_1, c_1, \ldots\}$（これをラウス数列という）の要素がすべて同符号であることである．なお，正の実部を持つ特性根，すなわち不安定根の数は，ラウス数列における正負の符号変化の数に等しい．

このようにシステムの安定性を判別する方法を，ラウスの安定判別法あるいはラウス＝フルビッツの安定判別法という．

例題9.3

特性方程式

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0 \tag{9.18}$$

を持つシステムの安定性を調べなさい．

解答　ラウス表を作成すると，次のようになる．

s^4	1	3	5
s^3	2	4	
s^2	$\dfrac{2\cdot 3 - 1\cdot 4}{2} = 1$	$\dfrac{2\cdot 5 - 1\cdot 0}{2} = 5$	
s^1	$\dfrac{1\cdot 4 - 2\cdot 5}{1} = -6$		
s^0	5		

これより，ラウス数列は

$$\{1,\ 2,\ 1,\ -6,\ 5\}$$

となり，2回の符号変化があるため，このシステムは不安定であり，2個の不安定根を持つ． ■

さて，ラウスたちの時代には高次代数方程式を解くことは困難であったが，今日では容易に数値計算できる．したがって，特性方程式の数値が与えられており，MATLAB などが手軽に利用できる環境であれば，ラウスの安定判別法を利用する必要はない．

しかしながら，次の例題のように，一部の係数の数値が与えられておらず，安定であるためにそれらの係数がどのような範囲であるべきかを計算するときには，ラウスの安定判別法が有用である．

例題 9.5

特性方程式

$$s^4 + 2s^3 + as^2 + 4s + 5 = 0 \tag{9.19}$$

を持つシステムが安定になるような a の範囲を求めなさい．

解答 ラウス表を作成すると，次のようになる．

s^4	1	a	5
s^3	2	4	
s^2	$\dfrac{2\cdot a - 1\cdot 4}{2} = a-2$	$\dfrac{2\cdot 5 - 1\cdot 0}{2} = 5$	
s^1	$\dfrac{4(a-2) - 2\cdot 5}{a-2} = \dfrac{4a-18}{a-2}$		
s^0	5		

これより，ラウス数列は

$$\left\{1,\ 2,\ a-2,\ \frac{4a-18}{a-2},\ 5\right\}$$

となる．よって，安定であるためには，

$$a - 2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{4a - 18}{a - 2} > 0$$

が成り立たなければならない．したがって，$a > 4.5$ のときシステムは安定である．■

9.4 状態空間表現の場合

LTI システムが，次式のように状態空間表現されている場合を考える．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \tag{9.20}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \tag{9.21}$$

これを伝達関数に変換すると，

$$G(s) = \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{c}^T \mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{b}}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} \tag{9.22}$$

となる．ここで，det は行列式を，adj は余因子行列を表す．これより，特性方程式は

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \tag{9.23}$$

となるので，行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は特性根に等しい．したがって，安定条件は次のようになる．

✤ Point 9.5 ✤　状態空間での安定判別法

LTI システムが状態空間表現されている場合，行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部が負であれば，そのシステムは安定である．このとき，すべての固有値の実部が負であるような行列を安定行列（stable matrix）という．

本章のポイント

- ▼ LTI システムの BIBO 安定性の定義を理解すること．
- ▼ 線形システムが，インパルス応答，伝達関数，状態空間で表現されたとき，そのシステムの安定性を判別する方法を理解すること．
- ▼ ラウスの安定判別法の計算法を習得すること．

Control Quiz

9.1 次の特性方程式を持つ LTI システムの安定性を調べなさい．そして，不安定な場合には不安定極の個数を求めなさい．

(1) $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$

(2) $3s^4 + 6s^3 + 29s^2 + 10s + 8 = 0$

(3) $s^3 + s^2 + 2s + 2 = 0$

9.2 読者の生年月日から特性方程式を構成し（ただし 0 は除く），その安定性を調べなさい．たとえば，2112年9月3日生まれのドラえもんであれば，211293 より，特性方程式は

$$2s^5 + s^4 + s^3 + 2s^2 + 9s + 3 = 0$$

となり，これにラウスの安定判別法を適用すると，残念ながら不安定になる．

9.3 特性方程式

$$s^4 + 2s^3 + (a + 4)s^2 + 4s + b = 0$$

を持つ LTI システムが安定になるような a, b の範囲を求め，a-b 座標上に図示しなさい．

コラム5 ── ラウスとマクスウェル：ケンブリッジ大学の同級生

第1章のコラム（p.18）で述べたガバナは，蒸気機関だけでなく原動機の回転制御装置としてまたたく間に広く普及したが，ハンチングと呼ばれる不安定現象（回転数の脈動）が問題になり始めた．

ガバナのダイナミクスと安定性との関係に興味を持った研究者に，マクスウェル（James C. Maxwell）（1831〜1879）がいた．彼は1868年に "On Governors"（ガバナについて）という論文を提出した．彼はこの論文で，ガバナのダイナミクスは3階微分方程式

$$MB\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3}+(MY+FB)\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+FY\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+FGx(t)=0$$

で記述できることを明らかにした．この微分方程式は，ガバナの数学モデルである．そして，ガバナが安定に動作するための条件が

$$\left(\frac{F}{M}+\frac{Y}{B}\right)\frac{Y}{B}-\frac{G}{B}>0$$

であることを示した．しかし，この条件は必要条件であり，マクスウェルは必要十分条件を導くことはできなかった．この論文は，制御理論の最初の論文とされ，マクスウェルが制御に関して書いた唯一の論文でもあった．

その7年後，1875年のアダムス賞（英国の権威ある懸賞論文）の課題は，「ダイナミカルシステムの安定条件について」であり，その審査員の一人はマクスウェルであった．この課題に対して，"Treatise on the Stability of a Given State of Motion"（与えられた運動の状態の安定性に関する論文）を提出し，1877年にアダムス賞を受賞したのがラウス（Edward J. Routh）（1831〜1907）だった．ラウスは，この論文の中で「ラウスの安定判別法」として有名になった方法を提案した．

ちなみに，ラウスとマクスウェルはケンブリッジ大学の同級生であり，大学の数学の卒業試験は，ラウスが1番で，マクスウェルは2番だったそうである．なお，同時期には，ストークスの定理で有名なストークスもケンブリッジ大学に在籍していた．

マクスウェル（左）とケンブリッジ大学のピーターハウスのダイニングルームに飾られているラウスの肖像画（右）