TUGAS 5 PRAKTIKUM
PEMECAHAN MASALAH MENGGUNAKAN
PARADIGMA ALGORITMA DIVIDE & CONQUER

Muhammad Luthfiansyah
140810170023

PROGRAM STUDI S-1 TEKNIK INFORMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PADJADJARAN
2019

Nomor 1

Studi Kasus 5: Mencari Pasangan Tititk Terdekat (Closest Pair of Points)
Identifikasi Problem:
Diberikan array n poin dalam bidang kartesius, dan problemnya adalah mencari tahu pasangan poin terdekat dalam bidang tersebut dengan merepresentasikannya ke dalam array. Masalah ini muncul di sejumlah aplikasi. Misalnya, dalam kontrol lalu lintas udara, kita mungkin ingin memantau pesawat yang terlalu berdekatan karena ini mungkin menunjukkan kemungkinan tabrakan. Ingat rumus berikut untuk jarak antara dua titik p dan q.

$$\|pq\| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

Solusi
Solusi umum dari permasalahan tersebut adalah menggunakan algoritma **Brute force** dengan O (n ^ 2), hitung jarak antara setiap pasangan dan kembalikan yang terkecil. Namun, kita dapat menghitung jarak terkecil dalam waktu **O (nLogn) menggunakan strategi Divide and Conquer**.

Jawab:

- Source code

```
#include <bits/stdc++.h>
#include <chrono>

using namespace std;
using namespace std::chrono;

class Point {
    public:
    int x, y;
};

int compareX(const void* a, const void* b){
    Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
    return (p1->x - p2->x);
}

int compareY(const void* a, const void* b){
    Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
    return (p1->y - p2->y);
}

float dist(Point p1, Point p2){
    return sqrt( (p1.x - p2.x)*(p1.x - p2.x) + (p1.y - p2.y)
*(p1.y - p2.y));
}

float bruteForce(Point P[], int n){
```

```
    float min = FLT_MAX;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = i+1; j < n; ++j)
            if (dist(P[i], P[j]) < min)
                min = dist(P[i], P[j]);
    return min;
}

float min(float x, float y){
    return (x < y)? x : y;
}

float stripClosest(Point strip[], int size, float d){
    float min = d; //Inisiasi jarak minimum = d

    qsort(strip, size, sizeof(Point), compareY);

    for (int i = 0; i < size; ++i)
        for (int j = i+1; j < size && (strip[j].y - strip[i].y)
< min; ++j)
            if (dist(strip[i],strip[j]) < min)
                min = dist(strip[i], strip[j]);

    return min;
}

float closestUtil(Point P[], int n){
    //Jika ada 2 atau 3 points, gunakan brute force
    if (n <= 3)
        return bruteForce(P, n);

    int mid = n/2;
    Point midPoint = P[mid];

    float dl = closestUtil(P, mid);
    float dr = closestUtil(P + mid, n - mid);
    float d = min(dl, dr);

    Point strip[n];

    int j = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        if (abs(P[i].x - midPoint.x) < d)
            strip[j] = P[i], j++;

    return min(d, stripClosest(strip, j, d) );
}
```

```
float closest(Point P[], int n){
    qsort(P, n, sizeof(Point), compareX);

    return closestUtil(P, n);
}

int main(){
    high_resolution_clock::time_point t1 = high_resolution_clock
::now();
    Point P[] = {{2, 3}, {12, 30}, {40, 50}, {5, 1}, {12, 10},
{3, 4}};
    int n = sizeof(P) / sizeof(P[0]);

    cout<<"P[] = {{2, 3}, {12, 30}, {40, 50}, {5, 1}, {12, 10},
 {3, 4}};"<<endl<<endl;
    cout<<"Jarak terkecil = "<<closest(P, n);

    high_resolution_clock::time_point t2 = high_resolution_clock
::now();
    auto duration = duration_cast<microseconds>
( t2 - t1 ).count();
    cout<<endl<<endl<<duration<<" microseconds" <<endl;
}
```

- Output (input **P[] = {{2, 3}, {12, 30}, {40, 50}, {5, 1}, {12, 10}, {3, 4}}**):

```
P[] = {{2, 3}, {12, 30}, {40, 50}, {5, 1}, {12, 10}, {3, 4}};

Jarak terkecil = 1.41421

93 microseconds
```

- Kompleksitas waktu:

  Durasi waktu yang dibutuhkan untuk 6 titik input: 93 ms

  Pembuktian dari algoritma:

  Input: Array n poin P []

  Output: Jarak terkecil antara dua titik dalam array yang diberikan.

  1. Array input diurutkan sesuai dengan koordinat x.
  2. Temukan titik tengah dalam array yang diurutkan, kita dapat mengambil P [n / 2] sebagai titik tengah.

3. Bagi array yang diberikan dalam dua bagian. Subarray pertama berisi poin dari P [0] ke P [n / 2]. Subarray kedua berisi poin dari P [n / 2 + 1] ke P [n-1].
4. Secara rekursif temukan jarak terkecil di kedua sub-layar. Tentukan jarak menjadi dl dan dr lalu temukan minimum dl dan dr. Tentukan minimum menjadi d.
5. Sekarang kita perlu mempertimbangkan pasangan sedemikian sehingga satu titik berpasangan berasal dari setengah kiri dan lainnya adalah dari setengah kanan. Pertimbangkan garis vertikal yang melewati P [n / 2] dan temukan semua titik yang koordinat xnya lebih dekat daripada d ke garis vertikal tengah. Buat strip array [] dari semua titik tersebut.
6. Urutkan strip array [] sesuai dengan koordinat y. Langkah ini adalah O (n * log n). Itu dapat dioptimalkan untuk O (n) dengan menyortir dan menggabungkan secara rekursif.
7. Temukan jarak terkecil di jalur []. Dari tampilan pertama, sepertinya ini adalah langkah O (n ^ 2), tetapi sebenarnya adalah O (n). Dapat dibuktikan secara geometris bahwa untuk setiap titik dalam strip, kita hanya perlu memeriksa paling banyak 7 poin setelahnya (perhatikan bahwa strip diurutkan berdasarkan koordinat Y).
8. Terakhir kembalikan minimum d dan jarak yang dihitung pada langkah di atas (langkah 7).

$T(n) = 2T(n/2) + O(n) + O(n * \log n) + O(n)$

$T(n) = 2T(n/2) + O(n * \log n)$

$T(n) = T(n * \log n * \log n)$

Nomor 2

Studi Kasus 6: Algoritma Karatsuba untuk Perkalian Cepat
Identifikasi Problem:
Diberikan dua string biner yang mewakili nilai dua bilangan bulat, cari produk (hasil kali) dari dua string. Misalnya, jika string bit pertama adalah "1100" dan string bit kedua adalah "1010", output harus 120. Supaya lebih sederhana, panjang dua string sama dan menjadi n.

Solusi:
Salah satu solusinya adalah dengan naïve approach yang pernah kita pelajari di sekolah. Satu per satu ambil semua bit nomor kedua dan kalikan dengan semua bit nomor pertama. Akhirnya tambahkan semua perkalian. Algoritma ini membutuhkan waktu O (n ^ 2).

Algoritma Karatsuba
Solusi lain adalah dengan menggunakan Algoritma Karatsuba yang berparadigma Divide dan Conquer, kita dapat melipatgandakan dua bilangan bulat dalam kompleksitas waktu yang lebih sedikit. Kami membagi angka yang diberikan dalam dua bagian. Biarkan angka yang diberikan menjadi X dan Y.

Jawab:

- Source code

```
#include<iostream>
#include<chrono>
#include<stdio.h>

using namespace std;
using namespace std::chrono;

int makeEqualLength(string &str1, string &str2){
    int len1 = str1.size();
    int len2 = str2.size();
    if (len1 < len2){
        for (int i = 0 ; i < len2 - len1 ; i++)
            str1 = '0' + str1;
        return len2;
    }
    else if (len1 > len2){
        for (int i = 0 ; i < len1 - len2 ; i++)
            str2 = '0' + str2;
    }
    return len1; // If len1 >= len2
}

string addBitStrings( string first, string second ){
    string result;

    int length = makeEqualLength(first, second);
```

```
    int carry = 0;

    for (int i = length-1 ; i >= 0 ; i--){
        int firstBit = first.at(i) - '0';
        int secondBit = second.at(i) - '0';

        int sum = (firstBit ^ secondBit ^ carry)+'0';

        result = (char)sum + result;

        carry = (firstBit&secondBit) | (secondBit&carry) |
 (firstBit&carry);
    }

    if (carry) result = '1' + result;

    return result;
}

int multiplyiSingleBit(string a, string b){
    return (a[0] - '0')*(b[0] - '0');
}

long int multiply(string X, string Y){
    int n = makeEqualLength(X, Y);

    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return multiplyiSingleBit(X, Y);

    int fh = n/2;
    int sh = (n-fh);

    string Xl = X.substr(0, fh);
    string Xr = X.substr(fh, sh);

    string Yl = Y.substr(0, fh);
    string Yr = Y.substr(fh, sh);

    long int P1 = multiply(Xl, Yl);
    long int P2 = multiply(Xr, Yr);
    long int P3 = multiply(addBitStrings(Xl, Xr),
 addBitStrings(Yl, Yr));

    return P1*(1<<(2*sh)) + (P3 - P1 - P2)*(1<<sh) + P2;
}

int main(){
```

```
    high_resolution_clock::time_point t1 = high_resolution_clock
::now();

    cout<<"String 1: 1100, String 2: 1010"<<endl;
    cout<<"Hasil kali: "<<multiply("1100", "1010");

    high_resolution_clock::time_point t2 = high_resolution_ clock::now();
    auto duration = duration_cast<microseconds>
( t2 - t1 ).count();
    cout<<endl<<endl<<duration<<" microseconds" <<endl;
}
```

- Output (input **1100 dan 1010**):

```
String 1: 1100, String 2: 1010
Hasil kali: 120

187 microseconds
```

- Kompleksitas waktu:

  Durasi waktu yang dibutuhkan untuk 6 titik input: 187 ms

  Pembuktian dari algoritma:

  Menggunakan algoritma Divide dan Conquer, kita dapat melipatgandakan dua bilangan bulat dalam kompleksitas waktu yang lebih sedikit. Bagi angka yang diberikan dalam dua bagian. Biarkan angka yang diberikan menjadi X dan Y.

  Untuk kesederhanaan, mari kita asumsikan bahwa n adalah genap:

  $X = Xl*2^{n/2} + Xr$ [Xl dan Xr mengandung n/2 bit paling kiri dan paling kanan X]

  $Y = Yl*2^{n/2} + Yr$ [Yl dan Yr mengandung n/2 bit paling kiri dan paling kanan Y]

  Hasilnya seperti ini:

  $XY = (Xl*2^{n/2} + Xr)(Yl*2^{n/2} + Yr)$

  $= 2^{n} XlYl + 2^{n/2}(XlYr + XrYl) + XrYr$

  Jika kita melihat rumus di atas, ada empat perkalian ukuran n / 2, jadi pada dasarnya kita membagi masalah ukuran n menjadi empat sub-masalah ukuran n / 2. Tetapi itu tidak membantu karena solusi pengulangan T (n) = 4T (n / 2) + O (n) adalah O (n ^ 2). Bagian rumit dari algoritma ini adalah mengubah dua bagian

tengah ke bentuk lain sehingga hanya satu perkalian tambahan yang cukup. Berikut ini adalah ekspresi sulit untuk dua bagian tengah:

XlYr + XrYl = (Xl + Xr) (Yl + Yr) - XlYl- XrYr

Jadi nilai akhir XY menjadi:

XY = 2n XlYl + 2n / 2 * [(Xl + Xr) (Yl + Yr) - XlYl - XrYr] + XrYr

Dengan trik di atas, perulangan menjadi T (n) = 3T (n / 2) + O (n) dan solusi dari perulangan ini adalah O ($n^{1.59}$).

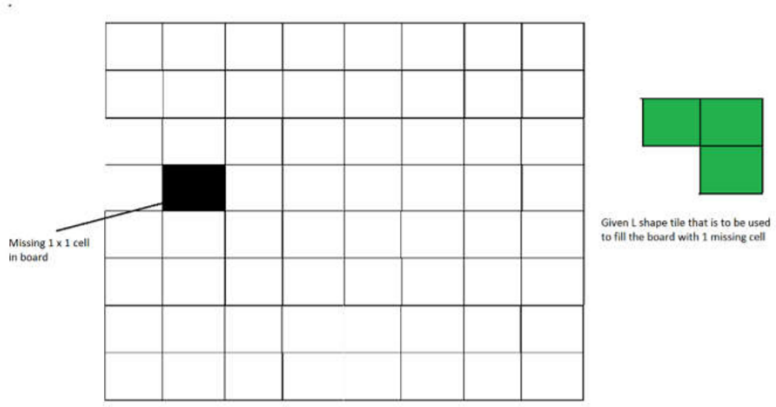
Untuk menangani kasus panjang yang berbeda, tambahkan 0 di awal. Untuk menangani panjang ganjil, tempatkan bit bawah (n / 2) di setengah kiri dan atas (n / 2) bit di setengah kanan. Jadi ekspresi untuk XY berubah menjadi berikut:

XY = $2^{2bawah(n/2)}$ XlYl + $2^{bawah(n/2)}$ * [(Xl + Xr)(Yl + Yr) - XlYl - XrYr] + XrYr

T(n) = O ($n^{1.59}$)

Nomor 3

Studi Kasus 7: Permasalahan Tata Letak Keramik Lantai (Tilling Problem)
Identifikasi Problem:
Diberikan papan berukutan n x n dimana n adalah dari bentuk 2k dimana k ≥ 1 (Pada dasarnya n adalah pangkat dari 2 dengan nilai minimumnya 2). Papan memiliki satu sel yang hilang (ukuran 1 x 1). Isi papan menggunakan ubin berbentuk L. Ubin berbentuk L berukuran 2 x 2 persegi dengan satu sel berukuran 1 × 1 hilang.



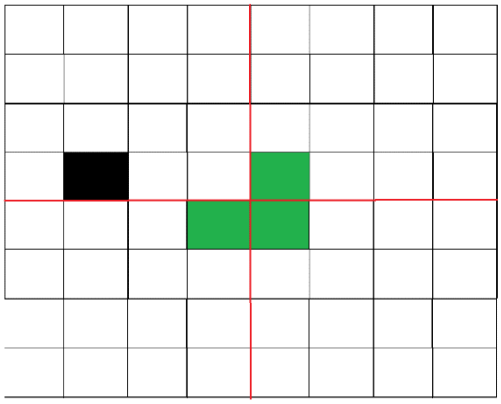
Gambar 2. Ilustrasi tilling problem

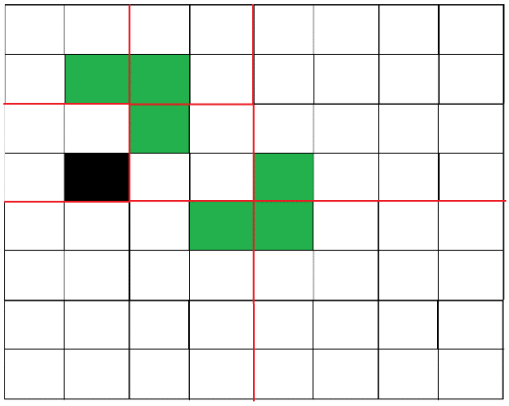
Solusi:
Masalah ini dapat diselesaikan menggunakan Divide and Conquer. Di bawah ini adalah algoritma rekursifnya

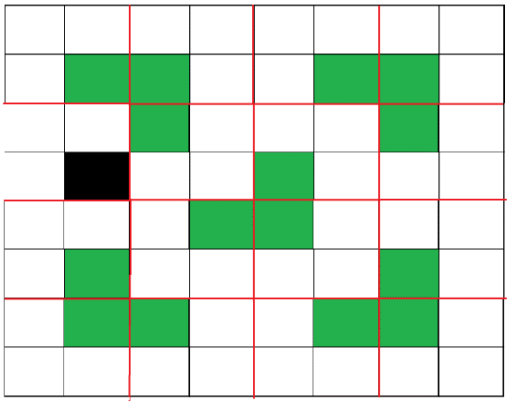
```
// n is size of given square, p is location of missing cell
Tile(int n, Point p)

1) Base case: n = 2, A 2 x 2 square with one cell missing is nothing
   but a tile and can be filled with a single tile.

2) Place a L shaped tile at the center such that it does not cover
   the n/2 * n/2 subsquare that has a missing square. Now all four
   subsquares of size n/2 x n/2 have a missing cell (a cell that doesn't
    need to be filled).  See figure 3 below.

3) Solve the problem recursively for following four. Let p1, p2, p3 and
   p4 be positions of the 4 missing cells in 4 squares.
   a) Tile(n/2, p1)
   b) Tile(n/2, p2)
   c) Tile(n/2, p3)
   d) Tile(n/2, p3)
```

Jawab:

- Tahapan algoritma:







Pembuktian dari algoritma:

Relasi perulangan untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta.

$T(n) = 4T(n / 2) + C$

Pengulangan tersebut dapat diselesaikan dengan kompleksitas waktu $O(n^2)$.