

Ujian Tengah Semester

Senin, 24 Oktober 2016

Waktu: 150 menit

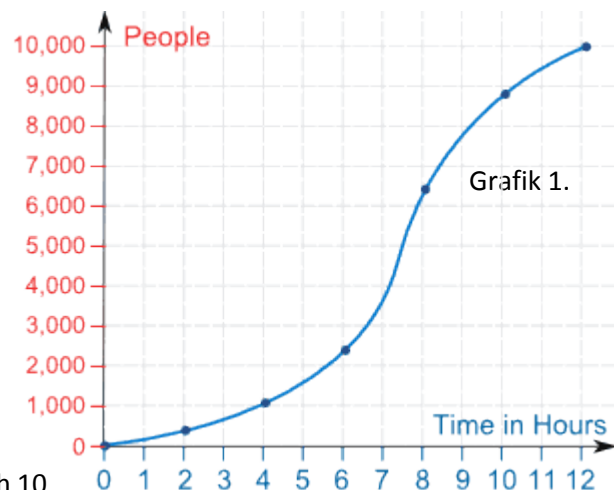
Contoh Solusi

SOAL PILIHAN GANDA (Bobot 30)

Pilihlah jawaban yang benar untuk pertanyaan yang diberikan. Untuk setiap nomor, jawaban yang benar **hanya satu jawaban**.

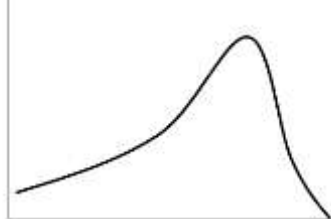
1. Pernyataan yang tepat antara statistik, parameter, populasi dan sampel adalah
 - a. Mean dan variansi populasi merupakan statistik
 - b. Mean dari populasi dinotasikan dengan μ , sedangkan mean dari sampel biasanya dinotasikan dengan \bar{X}
 - c. Nilai statistik biasanya diperoleh dengan cara melakukan survey ke seluruh anggota populasi
 - d. Parameter dapat diestimasi berdasarkan statistik dari populasi

Perhatikan Grafik 1 untuk menjawab pertanyaan nomor 2 dan 3. Grafik ini menyatakan jumlah kumulatif orang yang menghabiskan waktu di depan komputer



2. Pernyataan yang **salah** tentang percentile dan percentile rank terkait Grafik 1 adalah
 - a. Jika Ani menghabiskan waktu 10 jam di depan komputer, berarti dia berada pada percentile rank 88
 - b. Percentile rank 30 adalah 6.5 jam
 - c. Percentile 30 ada di nilai 6.5 jam
 - d. Percentile rank dari nilai 4 jam adalah 10
3. Dari Grafik 1, dapat disimpulkan bahwa pernyataan yang **salah** adalah:
 - a. Median data adalah 7.5
 - b. Modus data berada pada kisaran 7-8
 - c. Ada 1000 orang yang menghabiskan waktu ≤ 4 jam di depan komputer
 - d. Sebaran data normal

4. Pernyataan yang **salah** tentang gambar berikut adalah:



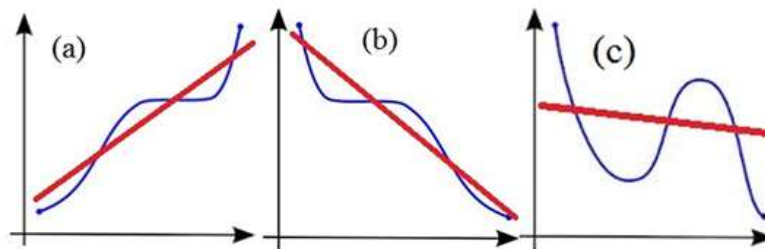
- a. Menggambarkan distribusi frekuensi yang *negatively skewed*
- b. Menggambarkan CDF dari suatu data
- c. Data mungkin mengandung outlier
- d. Mean data lebih kecil daripada median

5. Diketahui data berikut:

	Rerata	Standar Deviasi
Kuis 1	60	10
Kuis 2	50	15

Maka dapat disimpulkan

- Jika Budi mendapat nilai 70 di Kuis 1 maupun Kuis 2, maka nilai z-score nya di Kuis 1 lebih tinggi daripada nilai z-scorenya di Kuis 2
 - Jika nilai ingin distandarkan sehingga reratanya menjadi 55 dan deviasi 10, maka nilai 70 Budi di Kuis 1 berubah menjadi 65
 - Jika seseorang mendapat nilai 45 di Kuis 2, maka nilai z-scorenya adalah -1
 - Nilai z-score tidak dipengaruhi oleh variansi
6. Pimpinan Fasilkom UI ingin mengetahui hubungan antara nilai EPT dan nilai huruf MPK Bahasa Inggris mahasiswa. Pernyataan mana yang **benar**?
- Data nilai EPT dan nilai MPK keduanya merupakan data dengan skala interval
 - Korelasi keduanya dapat dihitung dengan Spearman-rho
 - Central tendency kedua nilai bisa diperoleh dengan mencari nilai mean
 - Kedua data dapat direpresentasikan dengan box plot
7. Scatter plot dari tiga buah dataset (a), (b), (c) yang masing-masing terdiri dari dua variabel (X dan Y) dapat digambarkan dalam kurva (bukan garis) berikut ini



Pernyataan yang **salah** tentang korelasi dataset tersebut adalah:

- Dataset (c) memiliki nilai korelasi linier yang lebih rendah dibandingkan dataset (a)
 - Nilai mutlak Pearson-r dataset (a) dan (b) sama
 - Nilai Pearson-r dataset (a) lebih tinggi daripada nilai Spearman-rho nya
 - Dataset (c) memiliki korelasi yang kuat namun korelasi tersebut tidak linier
8. Diketahui kejadian A dan B adalah kejadian yang *mutually exclusive* dan peluang masing-masing kejadian tidak nol, maka pernyataan yang **salah** adalah
- $P(A|B) = 0$
 - $P(A|B) = P(B|A)$
 - $P(A) = P(A \cup B) - P(B)$
 - $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
9. Peluang seorang mahasiswa lulus Statprob adalah $\frac{2}{3}$ dan peluangnya lulus Fisika adalah $\frac{4}{9}$. Peluangnya lulus kedua matakuliah adalah $\frac{1}{4}$. Maka dapat disimpulkan:
- Peluangnya lulus paling sedikit satu mata kuliah adalah $\frac{30}{36}$
 - Peluangnya lulus Statprob jika diketahui dia lulus Fisika adalah $\frac{9}{16}$
 - Peluangnya lulus Fisika jika diketahui dia lulus Statprob adalah $\frac{2}{8}$
 - Kelulusannya di Statprob dan kelulusannya di Fisika adalah kejadian yang independen
10. Mana yang merupakan *discrete random variable*?
- Lamanya waktu yang diperlukan seorang mahasiswa yang dipilih secara random dari kelas Statprob, untuk menyelesaikan soal ujian tengah semester.
 - Banyaknya aplikasi pada *handphone* yang dimiliki oleh seorang peserta kelas Statprob yang bernama Budiman Mahardhika.
 - Banyaknya jawaban yang benar dari soal pilihan ganda, jika seorang mahasiswa yang dipilih secara acak menebak semua jawaban ujian tersebut.

- d. Jarak yang ditempuh dari rumah sampai kampus, dari seorang mahasiswa UI yang dipilih secara acak.
11. Dari percobaan melempar dadu bermata 6, manakah kejadian yang merupakan ***Binomial Random Variable***?
- Banyaknya pelemparan hingga angka "4" muncul pertama kali.
 - Banyaknya kemunculan angka "4" jika dadu dilempar sebanyak 6 kali.
 - Jumlah angka yang muncul dari pelemparan dadu sebanyak 6 kali.
 - Tidak mungkin ada *Binomial Random Variable* dari kejadian pelemparan dadu bermata 6, karena *Binomial Random Variable* hanya memiliki dua kemungkinan yakni sukses dan gagal, bukan 6 kemungkinan angka yang muncul.
12. Umur (masa hidup) layar dari laptop buatan suatu pabrik diketahui merupakan variabel acak Eksponensial dengan rerata 7 tahun. Pernyataan mana yang benar?
- Peluang layar laptop berumur antara 2 hingga 3 tahun sama dengan peluang layar laptop berumur antara 6 hingga 7 tahun
 - Jika diketahui layar laptop masih berfungsi pada tahun ke 7, maka peluang ia masih berfungsi pada tahun ke 9 adalah nol.
 - Jika diketahui layar laptop masih berfungsi pada umur ke 7, maka peluang ia masih berfungsi pada tahun ke 9 adalah sama dengan peluang ia masih berfungsi pada tahun ke 2.
 - Jika diketahui layar laptop masih berfungsi pada umur ke 7, maka peluang ia masih berfungsi pada tahun ke 9 adalah sama dengan peluang ia masih berfungsi pada tahun ke 7.
13. Di Perpustakaan UI, jeda waktu antara seorang pengunjung dengan pengunjung berikutnya mengikuti distribusi Eksponensial dengan rerata 5 menit. Pernyataan mana yang benar?
- Banyaknya pengunjung yang datang per jam memiliki distribusi Poisson dengan $\lambda = 12$ orang per jam
 - Banyaknya pengunjung yang datang per jam memiliki distribusi Poisson dengan $\lambda = 5$ menit
 - Banyaknya pengunjung yang datang per jam memiliki distribusi Eksponensial dengan $\lambda = 12$ orang per jam
 - Banyaknya pengunjung yang datang setelah 5 menit memiliki *memory-less property*.
14. Pada suatu ujian, diberikan 10 soal essay. Lamanya waktu menyelesaikan tiap-tiap soal, diasumsikan mengikuti distribusi uniform dalam rentang 5 – 10 menit.
- Peluang seorang mahasiswa menyelesaikan 1 soal selama tepat 5 menit adalah 0
 - Peluang seorang mahasiswa menyelesaikan 1 soal selama tepat 5 menit adalah 0,2
 - Jika diketahui seorang mahasiswa belum menyelesaikan 1 soal pada menit ke 6, maka peluang bahwa dia belum juga selesai pada menit ke 8, adalah 0,4
 - Peluang mahasiswa menyelesaikan 8 soal dalam waktu 5 menit adalah 0,8
15. Pada suatu kawasan industri, kadang-kadang terjadi kecelakaan pegawai. Didapatkan data bahwa probabilitas terjadinya kecelakaan pada suatu hari adalah 0,5 persen, dan suatu kecelakaan bersifat independen terhadap kecelakaan lainnya. Probabilitas bahwa pada suatu periode berdurasi 400 hari terjadi satu kecelakaan dapat dihitung dengan
- Mencari nilai $X=1$ dari variabel acak binomial dengan $n=400$, $p=0,5$
 - Mencari nilai $X=1$ dari variabel acak Poisson dengan $\lambda = 0,005$
 - Mencari nilai $X=1$ dari variabel acak Poisson dengan $\lambda = 2$
 - Mencari nilai $X=1$ dari variabel acak Poisson dengan $\lambda = 0,8$

Essay. Hitunglah sampai memperoleh angka akhir dengan presisi 3 angka di belakang koma.

1. [10] Menurut data lima tahun terakhir, hujan terjadi pada 20 dari 30 hari di bulan November. Jika hujan, maka peluang BMKG memprakirakan hujan adalah 0.9. Sedangkan jika tidak hujan, maka peluang BMKG memprakirakan hujan adalah 0.2. BEM akan mengadakan acara outbond pada tanggal 19 November. BMKG memprakirakan bahwa pada tanggal tersebut akan turun hujan. Berapakah peluang bahwa tanggal 19 November benar-benar akan turun hujan?

H = Hari hujan

B = BMKG memprakirakan hari hujan

$$P(H) = 20/30 = 0.67$$

$$P(B|H) = 0.9$$

$$P(B|H^c) = 0.2$$

$$P(H|B) = \frac{P(B|H)P(H)}{P(B|H)P(H) + P(B|H^c)P(H^c)} = \frac{(0.9)(0.67)}{(0.9)(0.67) + (0.2)(0.33)} = 0.90$$

2. [10] Suatu toko online mencatat bahwa rata-rata setiap pelanggan melakukan 3 transaksi per minggu. Banyaknya transaksi ini mengikuti distribusi Poisson. Manajer toko ingin meningkatkan penjualan menjadi 4 transaksi per minggu. Ia melakukan upaya promosi lewat berbagai media. Didapatkan data bahwa promosinya menjangkau 75% dari populasi pelanggan. Jika kemudian seorang pelanggan melakukan **sebuah transaksi pembelian** pada toko dalam seminggu, berapa kemungkinan bahwa promosi inilah yang berhasil mengajak orang tersebut melakukan transaksi pembelian?

Jumlah transaksi pembelian yang dilakukan seorang pelanggan merupakan variabel acak yang memiliki distribusi Poisson $X \sim Poi(\lambda)$

Peluang seorang pelanggan melakukan 1 transaksi jika diketahui dia **tidak** melihat promosi
 $= P(X = 1 | \text{promosi}^c) = e^{-3} \cdot 3 = 0.149$

Peluang seorang pelanggan melakukan 1 transaksi jika diketahui dia melihat promosi
 $= P(X = 1 | \text{promosi}) = e^{-4} \cdot 4 = 0.073$

Peluang promosi sampai ke pelanggan $= P(\text{promosi}) = 0.75$

Peluang seorang pelanggan melihat promosi jika diketahui dia melakukan 1 transaksi
 $= P(\text{promosi} | X = 1)$

$$= \frac{P(X=1|\text{promosi})P(\text{promosi})}{P(X=1|\text{promosi})P(\text{promosi}) + P(X=1|\text{promosi}^c)P(\text{promosi}^c)} = \frac{(0.073)(0.75)}{(0.073)(0.75) + (0.149)(0.25)} = 0.595$$

3. [10] Seorang mahasiswa mengakses email lewat handphone yang dimilikinya. Diasumsikan bahwa banyaknya email yang masuk mengikuti distribusi Poisson dengan rerata 5 email per jam. Jawablah pertanyaan pada kedua kasus berikut ini, dengan kondisi satu kasus tidak memiliki hubungan dengan kasus lainnya.

- a. Kasus 1: Mahasiswa ini memantau email pada jam 07.00. Jika pada jam 07.05 belum ada email yang masuk, berapa peluang bahwa 15 menit kemudian juga belum ada email yang masuk?

Jika Y adalah variabel acak Eksponensial yang menyatakan **waktu tunggu** antar kedatangan email dengan rerata $\lambda = 5$ email per jam atau $Y \sim \text{Exp}(5)$, maka jawaban yang diminta adalah $P(Y > 20 | Y > 5)$

$$\alpha = \lambda t = 5 \left(\frac{1}{4} \right) = 1.25 \quad (15 \text{ menit} = \frac{1}{4} \text{ jam})$$

$$P(Y > 20 | Y > 5) = P(Y > 15) = 1 - P(Y < 15) = 1 - (1 - e^{-1.25}) = e^{-1.25} = 0.2865$$

- b. Kasus 2: Mahasiswa ini memantau email yang masuk antara jam 07.00 – 08.30. Apakah ada peluang bahwa dalam durasi waktu ini, email yang masuk sebanyak 10 email? Jika ada, hitung peluangnya.

Jika X adalah variabel acak Poisson yang menyatakan **jumlah email** yang masuk dengan rerata $\lambda = 5$ email per jam atau $X \sim \text{Poi}(5)$, maka jawaban yang diminta adalah $P(X = 10)$:

$$\alpha = \lambda t = 5(1.5) = 7.5$$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-7.5} 7.5^{10}}{10!} = 0.085$$

4. [20] Untuk mengecek kemungkinan kerusakan, suatu pabrik menguji computer circuit boards dan komponen-komponen yang ada pada circuit boards tersebut. Probabilitas kerusakan suatu komponen adalah 0.03, sedangkan satu board mengandung 200 komponen.

- a. Berapa rerata jumlah kerusakan komponen pada sebuah board?
b. Berapa variance dari jumlah kerusakan komponen pada sebuah board?

Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan **jumlah kerusakan komponen pada circuit boards**. Maka X merupakan variabel acak Binomial dengan peluang rusak $p = 0.03$. atau $X \sim B(200, 0.03)$

$$\text{Rerata jumlah kerusakan pada board} = E[X] = np = (200)(0.03) = 6$$

$$\text{Variance jumlah kerusakan pada board} = \text{Var}[X] = np(1 - p) = 6(0.97) = 5.81$$

- c. Board ini akan berfungsi dengan baik jika hanya ada maksimal satu komponen yang rusak. Berapa peluang sebuah board berfungsi dengan baik?

$$\text{Peluang tidak ada komponen yang rusak} = P(X = 0) = \binom{200}{0} (0.03)^0 (0.97)^{200} = 0.002$$

$$\text{Atau jika diaproksimasi dengan } X \sim \text{Poi}(6) \text{ maka } P(X = 0) = \frac{e^{-6} 6^0}{0!} = 0.002$$

$$\text{Peluang terdapat 1 komponen yang rusak} = P(X = 1) = \binom{200}{1} (0.03)^1 (0.97)^{199} = 0.014$$

$$\text{Atau jika diaproksimasi dengan } X \sim \text{Poi}(6) \text{ maka } P(X = 1) = \frac{e^{-6} 6^1}{1!} = 0.015$$

Peluang **board berfungsi dengan baik** = $0.002 + 0.014 = \mathbf{0.016}$ (atau 0.017 bila menggunakan aproksimasi Poisson)

- d. Jika pabrik ini memproduksi 100 boards per bulan, berapa peluang bahwa tepat ada 2 yang tidak berfungsi dengan baik pada bulan Oktober 2016? (*khusus bagian d ini tidak perlu menghitung sampai angka akhir*)

Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan **jumlah board yang tidak berfungsi dengan baik**. Maka X merupakan variabel acak Binomial dengan peluang berfungsi $p = 1 - 0.016 = 0.984$ atau $X \sim B(100, 0.984)$

Peluang ada tepat 2 board yang tidak berfungsi = $P(X = 2) = \binom{100}{2} (0.984)^2 (0.016)^{98}$

5. [20] X adalah variabel acak yang menyatakan perubahan suhu, sedangkan Y adalah variabel acak yang menyatakan proporsi dari perubahan spektrum dari suatu partikel atomik. *Joint probability density function* (pdf) dari X dan Y sebagai berikut:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- a. Tentukan *marginal probability distribution* untuk Y atau $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^y 10xy^2 dx = 5x^2y^2 \Big|_0^y = 5y^4$$

- b. Jika diketahui $f_X(x) = \frac{10}{3}x(1 - x^3)$, apakah X dan Y independen?

Jika X dan Y independen, maka $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{XY}(x, y)$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{10}{3}x(1 - x^3) 5y^4 \neq 10xy^2 \rightarrow \text{maka } X \text{ dan } Y \text{ tidak independen}$$

- c. Carilah conditional density $f(y|x)$

$$f(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1 - x^3)} = \frac{3y^2}{(1 - x^3)}$$

- d. Carilah peluang bahwa perubahan spektrum partikel atomik tersebut lebih dari setengah, jika diketahui suhu naik sebesar 0.25.

$$P(Y > 0.5 | X = 0.25) = \int_{0.5}^{\infty} f(y|x = 0.25) dy = \int_{0.5}^1 \frac{3y^2}{(1 - (0.25)^3)} dy = \frac{y^3}{(1 - (0.25)^3)} \Big|_{0.5}^1 = \frac{(1^3 - 0.5^3)}{(1 - 0.25^3)} = \frac{8}{9}$$