Worksheet 4a: Special Discrete RV

1. Bernoulli, X ~ $Ber(p)$

- Merupakan RV yang hanya memiliki dua nilai, yaitu 0 (gagal) dan 1 (sukses)
- Contoh: pada pelemparan koin, kita menginginkan dapat head, maka dapat X akan bernilai 1 jika keluaran memang head (sukses), 0 jika tail (gagal)
- PMF: $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1\text{-}p$
- $E[X] = p$, $Var(X) = p(1\text{-}p)$

2. Binomial, X ~ B(n,p)

- Misalkan kita melakukan ***n*** buah percobaan Bernoulli ($X_1, X_2, \ldots X_n$) yang bersifat **independent** dan memiliki probabilitas sukses ***p* yang sama**
- X menyatakan jumlah sukses yang muncul pada n percobaan, atau $X = X_1 + X_2 + X_3 \ldots + X_n$
- Dalam hal ini, X hanya dapat bernilai 0 sampai n
- Contoh: $X \sim B$ (3, 0.6) yaitu melemparkan 3 koin, dimana probabilitas muncul head (sukses) adalah 0.6 (buka fair coin). Keluaran percobaan dapat ditulis sebagai (X_1, X_2, X_3).
  X = 0 didapat ketika keluaran percobaan adalah (0,0,0)
  X = 1 didapat ketika keluaran percobaan adalah (1, 0, 0), (0,1,0) atau (0,0,1)
  X = 2 didapat ketika keluaran percobaan adalah (0,1,1), (1,0,1), atau (1,1,0)
  X = 3 didapat ketika keluaran percoban adalah (1,1,1)
- Dengan demikian, $P(X = a)$ artinya "**peluang terdapat *a* sukses pada *n* percobaan**"
- Sehingga rumus PMF menjadi:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}(0.6)^1(0.4)^2 = 3.(0.6).(0.16) = 0.192$$

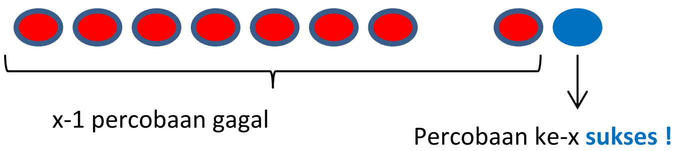
- $$E[X] = E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + \ldots + E[X_n] = np$$
  $$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) = np(1-p)$$

<u>Latihan 1:</u>
Diketahui bahwa 40% dari tikus yang disuntik dengan sejenis serum ternyata terlindung dari serangan penyakit. Bila 5 tikus disuntik, berapakah peluang bahwa:
X menyatakan jumlah tikus yang terserang penyakit, dimana peluangnya = 0.6, $X \sim B(5{,}0.6)$

a. Tidak ada yang terserang penyakit tersebut $P(X = 0) = C(5{,}0)0.6^0 0.4^5$
b. Kurang dari 2 yang terserang penyakit
   $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = C(5{,}0)0.6^0 0.4^5 + C(5{,}1)0.6^1 0.4^4$
c. Antara 2 sampai 4 tikus yang terserang penyakit
   $P(2 \le X \le 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = (hitung\ sendiri)$
d. Paling sedikit 3 yang terserang penyakit
   $P(3 \le X \le 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = (hitung\ sendiri)$

3. Geometric, X ~ Geo (p)

- X menyatakan **jumlah percobaan** yang dilakukan sampai diperoleh sukses pertama pada serangkaian percobaan Bernoulli yang memiliki probabilitas sukses yang sama yaitu *p*



- X = 1 didapat ketika percobaan pertama sukses
  X = 9 didapat ketika sukses baru diperoleh pada percobaan kesembilan.
  Dalam hal ini, X dapat memiliki nilai 1 sampai tak berhingga.
- $P(X = a)$ artinya "**peluang sukses pertama baru terjadi pada percobaan ke- a**"
- Contoh: peluang muncul head (sukses) pada pelemparan koin (*not fair*) adalah 0.6
  Berapa peluang sukses baru terjadi di pelemparan kesembilan?

Jawab: $P(X=9)=(0.4)^8(0.6)$, karena ada 8 kali pelemparan gagal, dan 1 kali sukses

- Dengan demikian, rumus PMF: $P(X=x)=(1-p)^{x-1}p$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1-(1-p)^{\lfloor x\rfloor} & x\geq 1\end{cases} \qquad E[X]=\frac{1}{p} \qquad Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

Latihan 2:

Peluang bahwa Budi berhasil memasukkan sebuah bola ke dalam ring bola basket adalah 0.7. misal, lemparan yang satu dengan yang lainnya bersifat independent.

$$X{\sim}Geo(0.7)$$

a. Berapa peluang bahwa Budi membutuhkan 5 lemparan hingga akhirnya memasukkan bola ?

   $P(X = 5) = (0.3)^4(0.7)$

b. Berapa peluang bahwa Budi membutuhkan paling sedikit 3 lemparan untuk memasukkan bola ?

   $P(X \geq 3) = 1 - P(1 \leq X \leq 2) = 1 - 0.7 - (0.3).(0.7)$

c. Perkirakan berapa banyak lemparan yang harus dilakukan Budi agar lemparannya berhasil masuk ring ?

   $E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} = 1.43$

Latihan 3:

In a sequence of bernoulli experiments to get number '6' in rolling a die: (assume fair dice)

a. What is the probability to get 6 successes in 10 experiments?

$$X{\sim}B\left(10,\frac{1}{6}\right), \qquad P(X=6) = C(10,6).\left(\frac{1}{6}\right)^6.\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

b. What is the probability to get the first success at the 10th experiment?

   $X{\sim}Geo\left(\frac{1}{6}\right),\ P(X=10) = \left(\frac{5}{6}\right)^9.\left(\frac{1}{6}\right)^1$

c. What is the average number of successes in 10 experiments?

$X \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$, $E[X]$ =10/6

d. What is the average number of experiments to get the first success?

$$X \sim Geo\left(\frac{1}{6}\right), \quad E[X] = 6$$

4. Hypergeometric, X ~ H(n,r,N)

- Misalkan kita memiliki N buah objek terbedakan, dimana r diantaranya merupakan objek spesial. Kemudian kita memilih n buah objek secara acak tanpa replacement.
- $\boldsymbol{X}$ menyatakan **jumlah objek spesial** yang terambil ketika kita mengambil n buah objek.
- $P(X = a)$ artinya "**peluang terambilnya $\boldsymbol{a}$ objek spesial saat kita mengambil $\boldsymbol{n}$ buah objek**"
- Contoh, kita memiliki 5 objek, dimana 3 diantaranya spesial, lalu kita ingin mengambil 4 objek (N =5, r =3, n = 4). Objek non spesial hanya ada 2, yaitu NS1 dan NS2, sementara objek spesial ada 3 yaitu S1, S2, S3

  Maka X = 2 menyatakan kasus dimana terambil 2 objek spesial dari 4 objek yang diambil, yaitu {S1,S2, NS1, NS2}, {S1,S3, NS1,NS2}, dan {S2,S3,NS1, NS2} (urutan tidak diperhatikan)

  Kardinalitas *Sample space* dari percobaan ini adalah sama dengan jumlah kombinasi 4 dari 5 = C(5,4) = 5.

  Maka peluang $P(X = 2) = \frac{3}{5}$ atau $P(X = 2) = \frac{C(3,2).C(2,2)}{C(5,4)}$

  C(3,2) yaitu cara memilih 2 objek spesial dari 3 objek spesial yang tersedia

  C(2,2) yaitu cara memilih 2 objek non spesial dari 2 objek non-spesial yang tersedia
- Dengan demikian rumus yang terkait:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \times \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad E[X] = n\frac{r}{N} \qquad Var(X) = \frac{nr(N-n)(N-r)}{N^2(N-1)}$$

Latihan 4:

From inside the box containing **15 ping pong balls**, **5 balls** are taken randomly. Among those 15 balls, there are **8 red** and **7 white** balls. Find the probability of the 4 balls have been taken, there are at least **4 red ball** !

$$X \sim H(5,8,15), \quad P(X = 4) = \frac{\binom{8}{4} \times \binom{7}{1}}{\binom{15}{5}}$$

5. Poisson, X ~ P(α) λ

- Kejadian yang dapat dimodelkan dengan distribusi Poisson adalah kejadian yang independen dan peluang terjadinya sama sepanjang waktu. Misal: jumlah kecelakaan pesawat dalam setahun.
- X merupakan jumlah "kejadian" yang terjadi pada suatu interval waktu t
- Dinotasikan dengan $X \sim P(\alpha)$ dimana $\alpha = \lambda t$
  t adalah interval waktu
  α adalah rerata kejadian yang terjadi pada sembarang interval waktu
  λ adalah rerata kejadian per satuan (unit) waktu
- PMF dari random variabel Poisson adalah $P(X = x) = e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$

  $E[X] = Var[X] = \alpha = \lambda t$

<u>Latihan 5</u>:

Misalkan, banyaknya tikus ladang di suatu area mengikuti distribusi Poisson. Rata-rata banyaknya tikus ladang per meter-persegi di suatu kampung ditaksir 12 ekor. Carilah:

a. Peluang bahwa antara 2 hingga 4 tikus ditemukan pada daerah seluas 1 meter-persegi ?

$X \sim Poi(12)$

$$P(2 \le X \le 4) = \frac{e^{-12}.12^2}{2!} + \frac{e^{-12}.12^3}{3!} + \frac{e^{-12}.12^4}{4!}$$

b. Misal, daerah 3 meter-persegi dibagi menjadi 3 buah **area** A, B, dan C yang **tidak** beririsan (masing-masing 1 meter-persegi). Berapa peluang bahwa tidak ada tikus yang ditemukan pada 2 dari 3 area yang diperiksa !

X = banyaknya tikus yang ditemukan pada lahan 1 meter persegi, $X \sim Poi(12)$
Peluang tidak ada tikus yang ditemukan = $P(X = 0) = \frac{e^{-12}.12^0}{0!} = e^{-12}$

Y = jumlah daerah (per 1 meter persegi) yang tidak ada tikusnya, $Y \sim B(3, e^{-12})$

Peluang tidak ada tikus yang ditemukan pada 2 dari 3 daerah yang diperiksa = $P(Y = 2)$.

$$P(Y = 2) = C(3,2)(e^{-12})^2(1 - e^{-12})^1$$

Latihan 6:

Untuk mengecek kemungkinan kerusakan, suatu pabrik menguji computer circuit boards dan komponen-komponen yang ada pada circuit boards tersebut. Probabilitas kerusakan suatu komponen adalah 0.01, sedangkan satu board mengandung 50 komponen.

Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan **jumlah kerusakan komponen pada circuit** boards. Maka X merupakan variabel acak Binomial dengan peluang rusak p = 0.01 atau $X \sim B(50,0.01)$

a. Berapa rerata jumlah kerusakan komponen pada sebuah board?

Rerata jumlah kerusakan pada board = $E[X] = np = (50)(0.01) = 0.5$

b. Berapa variance dari jumlah kerusakan komponen pada sebuah board?

Variance jumlah kerusakan pada board = $Var[X] = np(1-p) = 0.5(0.99) = 0.495$

c. Board ini akan berfungsi dengan baik jika hanya ada maksimal satu komponen yang rusak. Berapa peluang sebuah board berfungsi dengan baik?

Peluang tidak ada komponen yang rusak = $P(X=0) = \binom{50}{0}(0.01)^0(0.99)^{50}$=0.6

Atau jika diaproksimasi dengan $X \sim Poi(np = 0.5)$ maka $P(X=0) = \frac{e^{-0.5}0.5^0}{0!}$ = 0.6

Peluang terdapat 1 komponen yang rusak = $P(X=1) = \binom{50}{1}(0.01)^1(0.99)^{49} = 0.3$

Atau jika diaproksimasi dengan $X \sim Poi(0.5)$ maka $P(X=1) = \frac{e^{-0.5}0.5^1}{1!}$ = 0.3

Peluang **board berfungsi dengan baik** = 0.6 + 0.3 = **0.9**

d. Jika pabrik ini memproduksi 100 boards per bulan, berapa peluang bahwa tepat ada 2 yang tidak berfungsi dengan baik pada bulan Oktober 2016?

Y = jumlah boards yang **tidak** berfungsi dengan baik, $Y \sim B(100, 0.1)$

$$P(Y=2) = C(100,2)0.1^2 0.9^{98} = 0.00162$$

(Catatan: Jika diaproksimasi dengan $Y \sim Poi(10)$ maka $P(Y=2) = \frac{e^{-10}10^2}{2!}$ = 0.00227, mengapa bedanya jauh? Karena aproksimasi dengan Poisson baik kalau **n ≥ 30** and **np ≤ 3**.
Dalam kasus ini np = 10 lebih besar dari 3, oleh karena itu hasil aproksimasinya tidak baik)