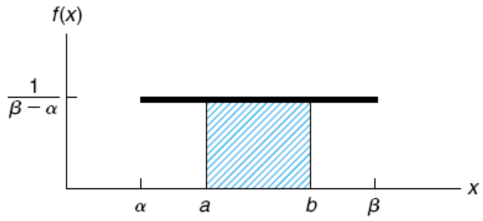
Statprob Semester Genap 2014/2015
Worksheet 4: *Special Countinuous RV*

Uniform RV

Unifom RV adalah RV yang fungsi pdf nya bernilai konstan/*uniform*. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta \\ 0 & otherwise\end{cases}$

$$E[X]=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x}{\beta-\alpha}dx=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<\alpha \\ \dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_{\alpha}^{x}dx=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta \\ 1 & \alpha>\beta\end{cases}$$



Contoh:
If X is uniformly distributed over the interval [0, 10], then

$$P(1<X<4)=F(4)-F(1)=\frac{4-1}{10}=0.3 \qquad P(X<5)=F(5)=\frac{5}{10}=0.5$$

$$P(X>6\,|\,X>5)=\frac{P(X>6,X>5)}{P(X>5)}=\frac{P(X>6)}{P(X>5)}=\frac{1-F(6)}{1-F(5)}=\frac{4}{5}$$

Latihan:

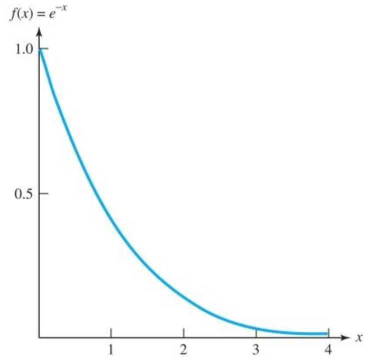
1. Anda tiba di bus stop pada pukul 10:00. Anda tahu bahwa waktu kedatangan bus terdistribusi secara uniform antara pukul 10:00 hingga 10:30.
   a. Berapa probabilitas bahwa Anda harus menunggu lebih dari 15 menit ?

   $$P(X>15)=1-F(15)=1-\frac{15}{30}=1-0.5=0.5$$

   b. Jika pada pukul 10:10 bus belum juga datang, berapa probabilitas bahwa Anda harus menunggu paling sedikit 15 menit lagi ?

   $$P(X>25\,|\,X>10)=\frac{1-F(25)}{1-F(10)}=\frac{1-\frac{25}{30}}{1-\frac{10}{30}}=\frac{5/30}{20/30}=0.25$$

Exponential RV
X~Exp(λ)



Exponential RV biasanya digunakan untuk mendeskripsikan **waktu tunggu** sampai terjadi suatu kejadian. Eksponential RV berkaitan erat dengan Poisson RV. Parameter yang dibutuhkan adalah **λ** yang menyatakan **rata-rata kejadian per unit waktu.**

Contoh:

- Jika λ = 3 menyatakan rata-rata kecelakan yang terjadi adalah 3 kecelakan per minggu,maka
  - Y = **jumlah kecelakan** dalam seminggu → diskret → Poisson RV
  - X = waktu tunggu sampai kecelakaan pertama terjadi → kontinu → Exponential RV

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases}\qquad E[X]=\frac{1}{\lambda}\qquad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Markov (memoryless) property: $P(X>s+t\mid X>t)=P(X>s)\qquad s,t\geq 0$

Contoh:

Jarak antar retakan pada sebuah pipa air mengikuti distribusi eksponensial dengan **rata-rata** terdapat **3 retakan per meter**. Misal, seorang petugas melakukan inspeksi dimulai dari ujung pipa. Berapakah peluang ia **tidak** menemukan retakan setelah memeriksa sejauh **2 meter** ?

Misal, **X** : R.V. yang menyatakan jarak hingga menemukan sebuah retakan (atau jarak antar retakan).

$$\lambda=3\,{}^{retakan}/_{meter}\qquad X\sim Exp(3)\qquad P(X>2)=1-P(X\leq 2)$$

$$P(X>5\mid X>3)=P(X>2)\qquad =1-F(2)=1-(1-e^{-3(2)})=e^{-6}$$

Latihan:

2. Diketahui bahwa dalam waktu 30 menit, rata-rata terjadi 5 kecelakaan pada jalan raya. Tentukan:
   a. Peluang bahwa dalam 1.5 jam tidak ada kecelakaan yang terjadi ?
      X = waktu antar kecelakaan
      λ = 5 kecelakaan per 30 menit = 10 kecelakaan per jam
      $$P(X>1.5)=1-P(X\leq 1.5)=1-F(1.5)=1-(1-e^{-10(1.5)})=e^{-15}$$
   b. Misalkan, sebuah kecelakaan telah terjadi. Berapa peluang kecelakaan berikutnya terjadi setelah 1 jam ?
      $$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-F(1)=1-(1-e^{-10(1)})=e^{-15}$$
   c. Diketahui bahwa 1 jam sejak awal pemantauan tidak terjadi kecelakaan, berapakah peluang bahwa dalam 2 jam berikutnya tetap tidak ada kecelakaan ?
      $$P(X>3\mid X>1)=P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-F(2)=1-(1-e^{-10(2)})=e^{-20}$$
   d. Tentukan E[X] dan jelaskan makna E[X] dalam soal ini!
      E[X] = 1/10 jam = 6 menit , maknanya: rata-rata waktu antar kecelakaan adalah 6 menit.

3. Lamanya radio berfungsi (dalam tahun) terdistribusi secara eksponensial dengan parameter **λ** = 1/8.

   a. Jika Cecep membeli sebuah radio **bekas**, berapa probabilitas bahwa radio tersebut akan masih bekerja hingga 10 tahun kedepan ?

   $$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-10/8)}) = e^{-5/4}$$

   b. Tentukan E[X] dan jelaskan makna E[X] dalam soal ini!

   X = lamanya radio berfungsi

   E[X] = 8, maknanya: rata-rata radio berfungsi adalah selama 8 tahun

4. Misalkan suatu sistem mengandung komponen yang umurnya (dalam tahun) terdistribusi secara eksponensial dengan rata-rata waktu hingga mati adalah 5 tahun.

   a. Pada soal ini, mana yang benar, E[X] = 5 atau **λ** = 5? Mengapa?
      Pada soal ini, yang benar adalah E[X] = 5.
      X = waktu komponen berfungsi
      λ = 1/5 kerusakan komponen per tahun

   b. Bila sebanyak 5 komponen tersebut dipasang dalam sistem yang berlainan, berapakah peluang bahwa paling sedikit 2 komponen masih akan berfungsi pada akhir tahun ke-8 ?

   Peluang suatu komponen berfungsi lebih dari 8 tahun = $P(X > 8) = e^{-8/5} = 0.2$

   Berarti peluang "sukses" adalah 0.2

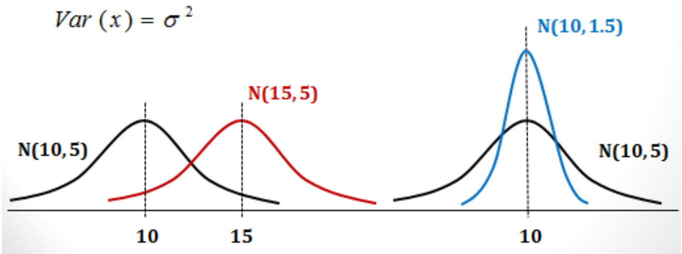
   Peluang bahwa paling sedikit 2 komponen masih akan berfungsi pada akhir tahun ke-8
   = peluang bahwa paling sedikit muncul 2 "sukses" (distribusi RV Binomial)
   = 1 – peluang tidak ada "sukses" – peluang muncul 1 "sukses"
   = $1 - \binom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^5 - \binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^4$
   = 1 – 0.33 – 0.41 = 1 – 0.74 = 0.26

Normal RV $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

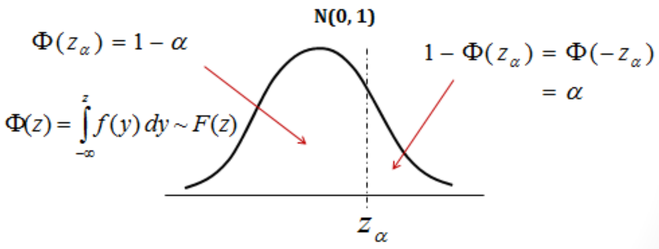
$$E[X] = \mu$$

$$Var(x) = \sigma^2$$



Standar Normal Distribution $Z \sim N(0,1)$

Rumus f(x) untuk distribusi normal sulit diintegralkan, perlu metode numerik untuk mengaproksimasinya. Agar memudahkan, dibuat Tabel-Z yang menyatakan probabilitas nilai z untuk distribusi normal standar $Z \sim N(0,1)$. Semua Normal RV dapat ditransformasikan ke Standar Normal RV agar probabilitasnya dapat dicari dengan mudah di tabel (tidak perlu mencari integralnya).



Probability that a standard normal R.V. is greater than z_α is equal to α.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Contoh:

Analogue signals received by a detector is modeled as Gaussian RV ***N*(200, 256)** using microvolt unit (μV).

What is the probability the signal received **exceeds** 240 μV ?

Let **X** : analogue signals received by a detector, **X ~ N(200, 256)**

$$P(X > 240) = 1 - P(X \le 240)$$ See the Z-table !

$$= 1 - \Phi\left(\frac{240 - 200}{16}\right) = 1 - \Phi(2.5) = 0.0062$$

What is the probability the signal received exceeds 240 μV **if** the signal is known larger than 210 μV ?

$$P(X > 240 \mid X > 210) = \frac{P(X > 240)}{P(X > 210)}$$

$$= \frac{1 - P(X \le 240)}{1 - P(X \le 210)} = \frac{1 - \Phi(2.5)}{1 - \Phi\left(\frac{210 - 200}{16}\right)} = \frac{1 - \Phi(2.5)}{1 - \Phi(0.625)}$$

$$= 0.02335$$

Latihan

5. Suatu jenis baterai mobil rata-rata berumur 3 tahun dengan simpangan baku 0,5 tahun. Bila umur baterai dianggap berdistribusi normal, carilah
   a) Peluang baterai berumur kurang dari 4 tahun ?

   $$P(X \le 4) = \Phi\left(\frac{4-3}{0.5}\right) = \Phi(2) = 0.9772$$

   b) Peluang baterai berumur kurang dari 2,3 tahun ?

   $$P(X \le 2.3) = \Phi\left(\frac{2.3-3}{0.5}\right) = \Phi\left(\frac{-0.7}{0.5}\right) = \Phi(-1.4) = 1 - 0.9192 = 0.0818$$

   c) Peluang baterai berumur lebih dari 3,5 tahun ?

   $$P(X > 3.5) = 1 - \Phi\left(\frac{3.5-3}{0.5}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

   d) Peluang baterai berumur antara 2,5 hingga 3,5 tahun ?

   $$P(2.5 < X < 3.5) = \Phi\left(\frac{3.5-3}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{2.5-3}{0.5}\right) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

6. Suatu jenis radio mempunyai rata-rata umur 800 jam dan variansi 1600. Umur radio mengikuti distribusi Normal. Jika Cecep membeli radio bekas yang diketahui sudah berumur 400 jam, berapa peluang radio tersebut masih berfungsi hingga 300 jam setelah pembelian ?

$$P(X > 700 \mid X > 400) = \frac{1 - \Phi\left(\frac{700-800}{40}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{400-800}{405}\right)} = \frac{1 - \Phi(-2.5)}{1 - \Phi(-10)} = \frac{\Phi(2.5)}{\Phi(10)} = \frac{0.9938}{1} = 0.9938$$

7. Suatu pengukur dipakai untuk menolak semua suku cadang yang ukurannya tidak memenuhi ketentuan **1,5 ± d**. Diketahui bahwa pengukuran tersebut berdistribusi Normal dengan rataan 1,5 dan simpangan baku 0,2. Tentukanlah **d** sehingga ketentuan tersebut "mencakup" 95% dari seluruh pengukuran !

$$P(1.5 - d < X < 1.5 + d) = \Phi\left(\frac{1.5 + d - 1.5}{0.2}\right) - \Phi\left(\frac{1.5 - (d - 1.5)}{0.2}\right) = \Phi\left(\frac{d}{0.2}\right) - \Phi\left(\frac{-d}{0.2}\right) = 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{d}{0.2}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{d}{0.2}\right)) = 0.95$$

$$2\Phi\left(\frac{d}{0.2}\right) - 1 = 0.95$$

$$2\Phi\left(\frac{d}{0.2}\right) = 1.95$$

$$\Phi\left(\frac{d}{0.2}\right) = 0.975$$

$$\Phi\left(\frac{d}{0.2}\right) = \Phi(1.96)$$

$$\frac{d}{0.2} = 1.96 \rightarrow d = (0.2)(1.96) = 0.392$$

Standard Normal Probabilities

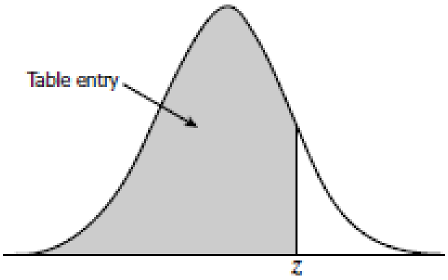


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998