Universidade Federal de São João del-Rei

Lista 3 - P3

Matemática 1 - Prof.ª Rafaela Bonfim

4 de novembro de 2025

---

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \text{ se } x \neq 2 \\ 3, \text{ se } x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$.

   (c) $f(x) = x - |x|$ em $x = 0$.

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen } 1/x, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$.

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } 1/x}$ em $x = 2$.

   (f) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ se } x < 1 \\ 1 - |x|, \text{ se } x > 1 \\ 1, \text{ se } x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$.

   (g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ se } x \neq 2 \\ 0, \text{ se } x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$.

   (h) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } x < -1 \end{cases}$ em $x = -1$.

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}$ em $x = 2$.

   (j) $f(x) = \dfrac{2}{3x^2 + x^3 - x - 3}$ em $x = -3$.

2. Determine, se existirem, os valores de $x \in \text{D}(f)$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1}, \text{ se } x^2 \neq 1 \\ 0, \text{ se } x = -1 \end{cases}$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 6}, \text{ se } x < -3 \text{ e } x > -2 \\ -1, \text{ se } -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{3 + \text{sen } x}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$.

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x > 3 \end{cases}$.

(f) $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$.

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$.

(h) $f(x) = \cos \dfrac{x}{x + \pi}$.

3. Construa o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{se } x \neq -2 \\ 1, & \text{se } x = -2 \end{cases}$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ -1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \ln\,(x + 1), & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

4. Calcule p de modo que as funções abaixo sejam contínuas:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + px + 2, & \text{se } x \neq -3 \\ 3, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x + 2p, & \text{se } x \leq -1 \\ p^2, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{se } x \neq 0 \\ p^3 - 7, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 4}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}, & \text{se } x \neq 2 \\ p, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{16 + x} - \sqrt{16 - x}}{2x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2p - 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{px - 4p}{(x - 2) - \sqrt{x}}, & \text{se } x > 4 \\ p^2 x \sec\,(x - 4), & \text{se } x \leq 4 \end{cases}$

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo $f(3) = g(3)$. A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \leq 3 \\ g(x), & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$?

6. Se f é uma função contínua em um determinado ponto x_0 e além disso ela é par, prove que ela é também contínua no ponto $-x_0$. E se em vez de par ela for ímpar, ainda vale a mesma conclusão?

7. Mostre que a função $f(x) = x^3 + x - 5$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[1, 2]$.

8. Uma função contínua $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) = f(2)$. Mostre que existe $x_0 \in [1, 2]$ tal que $f(x_0) = f(x_0 - 1)$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x^2 \cos^2(x) \leq f(x) \leq x \text{ sen }(x)$, para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Mostre que f é contínua em $x = 0$.

10. Se $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ existe, o que pode ser dito sobre $\lim_{x \to 0} f(x)$?