Universidade Federal de São João del-Rei

Lista 1 - P1

Matemática 1 - Prof.ª Rafaela Bonfim

27 de agosto de 2025

---

1. Determinar todos os intervalos de números que satisfaçam as desigualdades abaixo:

   (a) $2x - 5 < \dfrac{1}{3} + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1-x}{3}$

   (b) $x^2 - 3x + 2 > 0$

   (c) $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{3+x}$

   (d) $x^4 \geq x^2$

   (e) $\dfrac{2}{x-2} \leq \dfrac{x+2}{x-2} \leq 1$

   (f) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

   (g) $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 < 0$

   (h) $\dfrac{4}{x} - 3 > \dfrac{2}{x} - 7$

   (i) $1 - x - 2x^2 \geq 0$

   (j) $x^3 + 1 > x^2 + x$

2. Resolver as equações em $\mathbb{R}$:

   (a) $|5x - 3| = 12$

   (b) $|2x - 3| = |7x - 5|$

   (c) $\left|\dfrac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

   (d) $|9x| - 11 = x$

   (e) $|x - 2| = |3 - 2x|$

   (f) $|7x| = 4 - x$

   (g) $\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| = 5$

3. Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

   (a) $|5 - 6x| \geq 9$

   (b) $|x + 4| \leq |2x - 6|$

   (c) $\left|\dfrac{7-2x}{5+3x}\right| \leq 2$

   (d) $|x - 1| + |x + 2| \geq 4$

   (e) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|} \geq \dfrac{1}{5}$

   (f) $|x| + 1 < x$

   (g) $\left|\dfrac{x-1/2}{x+1/2}\right| < 1$

   (h) $1 < |x + 2| < 4$

4. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Determine:

   (a) $f(f(x))$

   (b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (c) $f(cx)$, $c \in \mathbb{R}$

   (d) $f(x+y)$

   (e) $f(x) + f(y)$

5. Dada a função $f(x) = |x| - 2x$, calcular $f(-1)$, $f(1/2)$ e $f(-2/3)$. Mostrar que

$$f(|a|) = -|a|.$$

6. Se $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ e $d = -a$, mostre que $f(f(x)) = x$.

7. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostrar que, para $a \neq 0$, $f(1/a) = f(a)/a^2$.

8. Seja $f(x) = (x-2)(8-x)$ para $2 \leq x \leq 8$.

   (a) Determinar $f(5)$, $f(-1/2)$ e $f(1/2)$.

   (b) Qual o domínio da função $f(x)$?

   (c) Determinar $f(1-2t)$ e indicar o domínio.

   (d) Determinar $f([f(3)])$ e $f([f(5)])$.

   (e) Traçar o gráfico de $f(x)$.

9. Determinar o domínio das seguintes funções:

   (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

   (b) $y = \dfrac{1}{x-4}$

   (c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

   (d) $y = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$

   (e) $y = \sqrt[3]{x+7} - \sqrt[5]{x+8}$

   (f) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

   (g) $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

   (h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - |x|}}$

   (i) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

   (j) $y = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - x - 2}}$

10. Determine o domínio, os zeros e faça o estudo de sinal das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

   (b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 8x}$

(c) $h(x) = |x-2| - |2x^2-4|$

(d) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$

(e) $h(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x-4}}$

(f) $g(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-x-1}$

(g) $f(x) = \dfrac{x-\frac{1}{x}}{x^2-3x+2}$

(h) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x(x-2)}}$

(i) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x(x-2)}}$

11. Considere a função $y = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$.

    (a) x pode ser negativo?

    (b) x pode ser igual a zero?

    (c) x pode ser maior que 1?

    (d) Qual é o domínio da função?

12. Considere a função $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$.

    (a) x pode ser negativo?

    (b) $\sqrt{x}$ pode ser maior que 2?

    (c) Qual é o domínio da função?

13. A função *teto* é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, denotada por $\lceil x \rceil$, que associa cada $x \in \mathbb{R}$ o menor inteiro que é maior ou igual a x. A função *piso* é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, denotada por $\lfloor x \rfloor$, que associa cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro que é menor ou igual a x. Nessas condições, para quais valores de x temos:

    (a) $\lfloor x \rfloor = 0$?   (b) $\lceil x \rceil = 0$?

14. Quais números reais x satisfazem a equação $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

15. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ para todos os x reais? Justifique sua resposta.

16. Faça o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, \; x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, \; x < 0 \end{cases}$$

    Porque $f(x)$ é chamada *parte inteira de* x ?

17. Esboce os gráficos das funções abaixo:

(a) $f(x) = |\lfloor x \rfloor|$

(b) $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$

18. Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - x - 6}$

(b) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x^2+3x-10)}{x^2+6x+5}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

(d) $f(x) = 4 - |x|$

(e) $f(x) = |x| \cdot |x - 1|$

(f) $f(x) = |x| + |x - 1|$

19. Construir o gráfico, determinar o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } -2 \leq x \leq 0 \\ x, \text{ se } 0 < x < 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ se } x \leq 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x < 2 \\ x^2, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$

20. Para cada item, calcule $f \circ g$ e $g \circ f$.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ e $g(x) = 1/x$

(b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x - 2$

(c) $f(x) = x^3$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

21. Dada a função f abaixo defina as funções $h(x) = f(x^2)$, $g(x) = [f(x)]^2$ e $w(x) = (f \circ f)(x)$. Em seguida determine o domínio de h, g e w.

(a) $f(x) = 2x - 3$

(b) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

22. Sabendo que $f = g \circ h$, nos itens (a), (c) e (d) encontre a função h e no item (b) a função g.

(a) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 1$

(b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $h(x) = x + 2$

(c) $f(x) = a + bx$ e $g(x) = x + a$

(d) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$ e $g(x) = |x|$

23. Sejam $f(x) = \begin{cases} 5x, \text{ se } x \leq 0 \\ -x, \text{ se } 0 < x \leq 8 \\ \sqrt{x}, \text{ se } x > 8 \end{cases}$ e $g(x) = x^3$. Calcular $f \circ g$.

24. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a condição $f(3x) = 3f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $f(9) = 45$. Calcule $f(1)$.

25. Sabe-se que uma função f satisfaz

$$\frac{f(x)-3}{f(x)+3} = x.$$

Determine f e o domínio de f.

26. Se $f(x) = \sqrt[3]{10 - x^3}$, encontre $f \circ f$ e identifique seu domínio.

27. Dada $f(t) = \dfrac{|3+t| - |t| - 3}{t}$, expresse $f(t)$ sem as barras de valor absoluto. Desenhe o gráfico de f.

28. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 1, \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$

Determine:

(a) $f(-1)$

(b) $f(1)$

(c) $f(4)$

(d) $f(-4)$

(e) $f(-x)$

(f) $f(x+1)$

(g) $f(x^2)$

(h) $f(-x^2)$