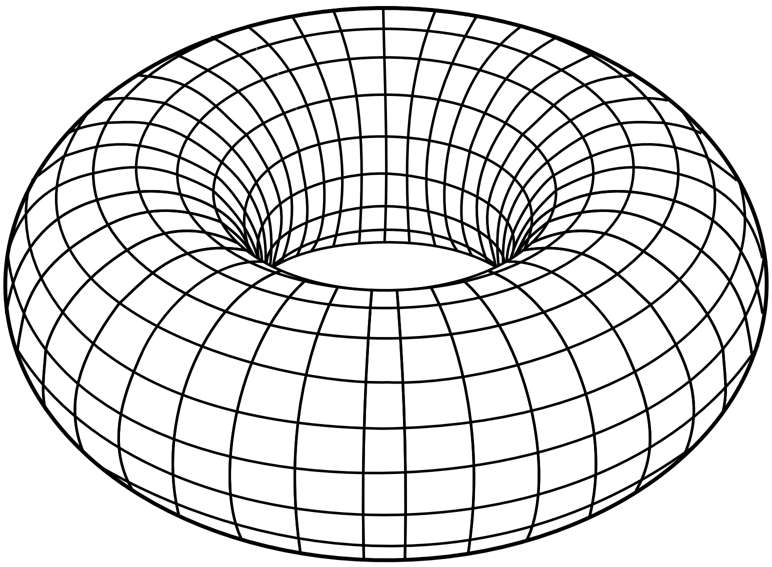
Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

22. Dezember 2011



Inhaltsverzeichnis

Einführung **2**

I Grundlagen der Allgemeinen Topologie **9**
- 1 Erste Beispiele topologischer Räume 9
- 2 Topologische Grundbegriffe 10
- 3 Stetige Abbildungen 17
- 4 Zusammenhang und Kompaktheit 20
- 5 Trennungseigenschaften 25
- 6 Abzählbarkeitsaxiome und lokale Kompaktheit 28

II Geometrische Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume **31**
- 1 Mannigfaltigkeiten 31
- 2 Quotientenräume 42
- 3 Quotientenabbildungen 47
- 4 Konstruktionen von Quotientenräumen 51

III Konzepte der Algebraischen Topologie **56**
- 1 Die Fundamentalgruppe 56
- 2 Überlagerungen 74
- 3 Liften von Abbildungen 84

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel

Einführung

Topologie ist qualitative Geometrie. Ihr grundlegendes Studienobjekt sind topologische Räume und Abbildungen zwischen diesen.

Definition .1 (Topologischer Raum)**.** Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ Indexmenge $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Beispiel:

$\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist topologischer Raum!

Beispiel:

X Menge, $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ + Axiome, die zu erfüllen sind $\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$ ist topologischer Raum. $\mathcal{O}$ ist "Basis" der Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$.

Definition .2 (Metrischer Raum)**.** Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$ gilt:

(1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ "Dreiecksungleichung"

Definition .3 (Stetigkeit)**.** Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

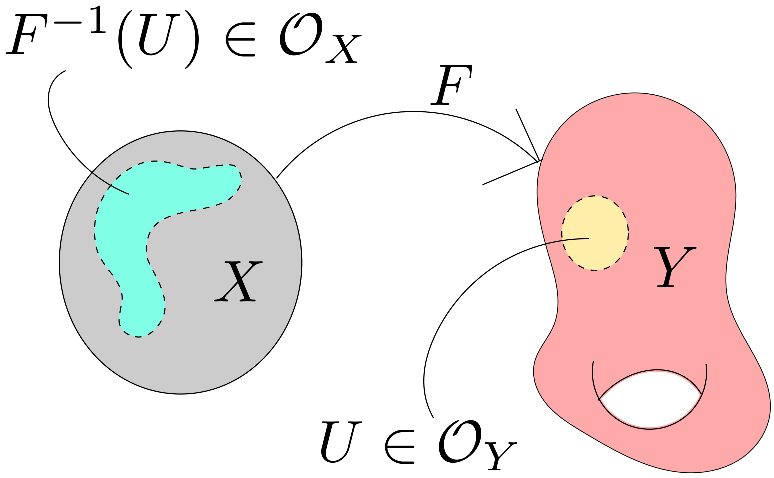


Abbildung 1: Stetige Abbildung

Bemerkung .1. Ist (X,d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie[1] Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}(\epsilon > 0)$, und $F\colon (X,d) \to (Y,d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ und alle $x \in X$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.

Definition .4 (Homotopie)**.** Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H\colon X \times I \to Y, (x,t) \mapsto H(x,t)$$

mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$.
(Hier ist $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$)
f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.

Achtung: "Stetig" meint hier im Sinne der Produkt-Topologie (siehe später) auf $X \times I$.

Bemerkung .2. H heißt auch Homotopie von f nach g. Eine solche ist auch interpretierbar als eine stetige parametrisierte Schar.

[1] siehe später

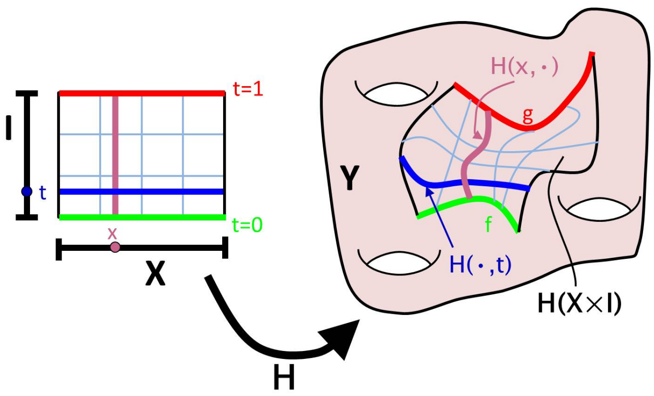


Abbildung 2: Homotopie

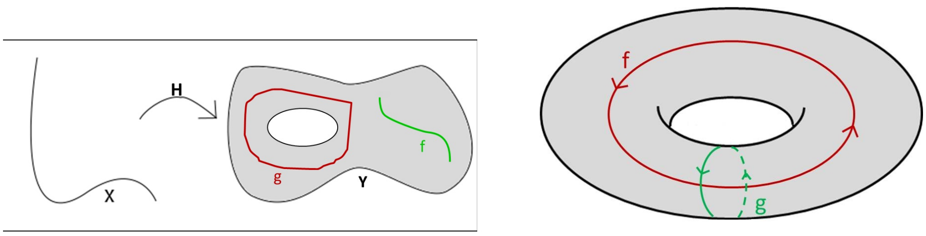


Abbildung 3: f und g sind jeweils homotop, vgl. Bemerkung .6!

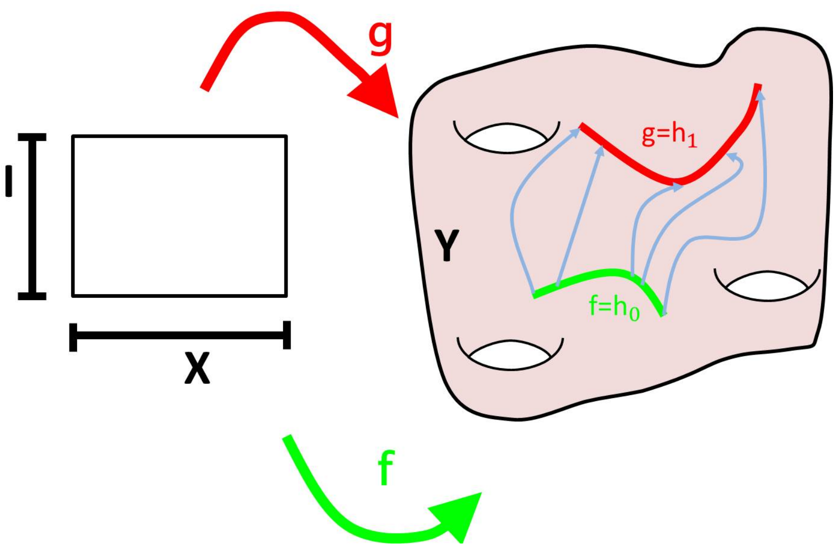


Abbildung 4: $H = (h_t), t \in [0,1]$, von stetigen Abbildungen $h_t \colon X \to Y$ mit Anfang $h_0 = f$ und Ende $h_1 = g$.

Definition .5 (Homotope Abbildungen $f, g\colon X \to Y$)**.** Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Bemerkung .3. "Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X,Y) := \{F\colon X \to Y \text{ stetig }\}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0,1]$, so liefert $(\tilde{h_t})$ mit $\tilde{h_t} := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f, d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.
Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t :\equiv f \forall t \in [0,1]$
Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t). Dann liefert $M\colon X \times [0,1] \to Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l, d.h. $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

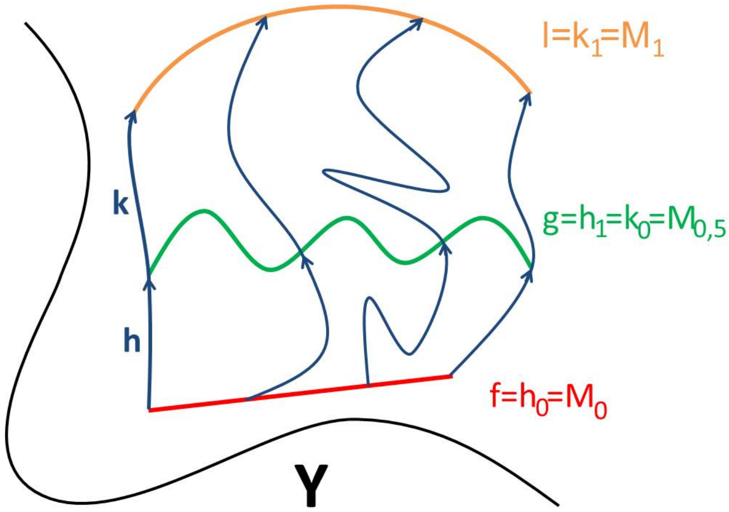


Abbildung 5: Transitivität der Relation "homotop sein"

Bemerkung .4. Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X,Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X,Y]$ bezeichnet.

Bemerkung .5. $C(X,Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X,Y]$!

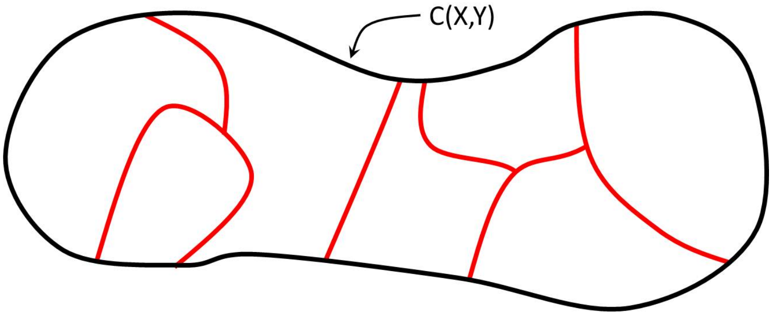


Abbildung 6: Äquivalenzklassen $[X, Y]$ von $C(X, Y)$

Beispiel:

Je zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + t \cdot g(x)$$

liefert eine Homotopie von f nach g:

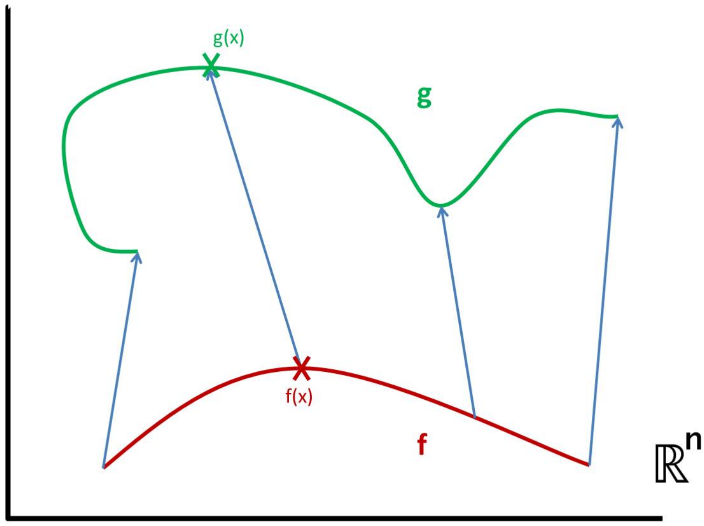


Abbildung 7: Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ sind immer homotop.

Definition .6 (Nullhomotopie)**.** Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt <u>nullhomotop</u>, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Korollar .1. *Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X, \mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!*

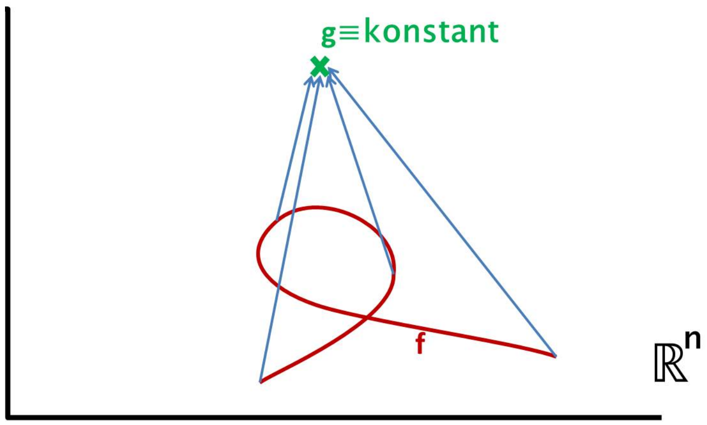


Abbildung 8: f ist nullhomotop.

Beispiel:

Jeder <u>geschlossene Weg im $\mathbb{R}^2$</u>, d.h. jede stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $\big[[0,1], \mathbb{R}^2\big]$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1,0)$.

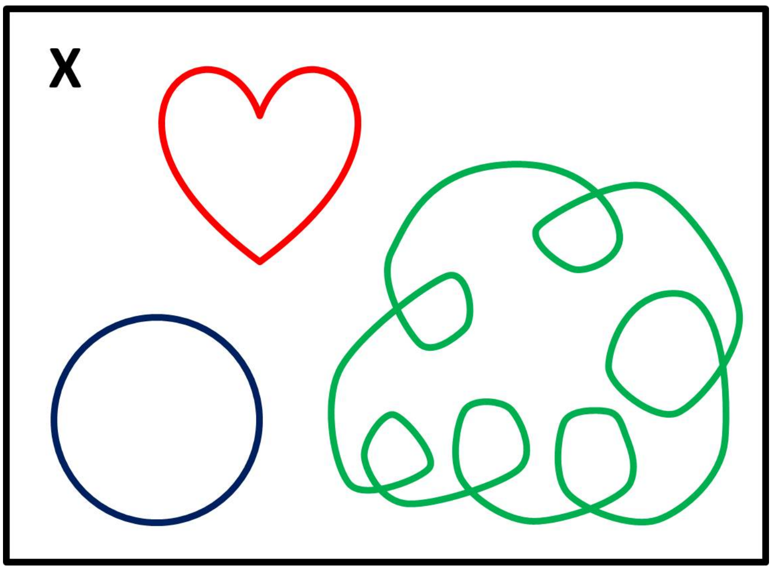


Abbildung 9: Geschlossene Wege in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung .6. Interpretiere einen geschlossenen Weg im $\mathbb{R}^2$ auch als stetige Abbildung von $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$, so gilt also $[S^1, \mathbb{R}^2]$ ist

einelementig.
<u>Aber</u> $[S^1, \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}]$ ist nichttrivial, wenn für $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ der Punkt $f(1), 1 = (1,0) \in S^1$, unter allen betrachteten Homotopien festgelassen werden soll. Dieses Phänomen wird uns zum Studium der Fundamentalgruppe führen …

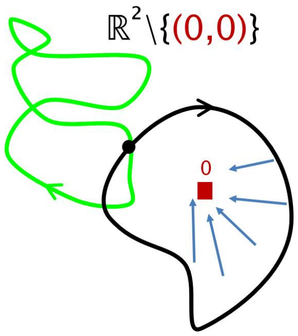


Abbildung 10: $[S^1, \mathbb{R}^2\backslash\{0\}]$ ist nichttrivial.

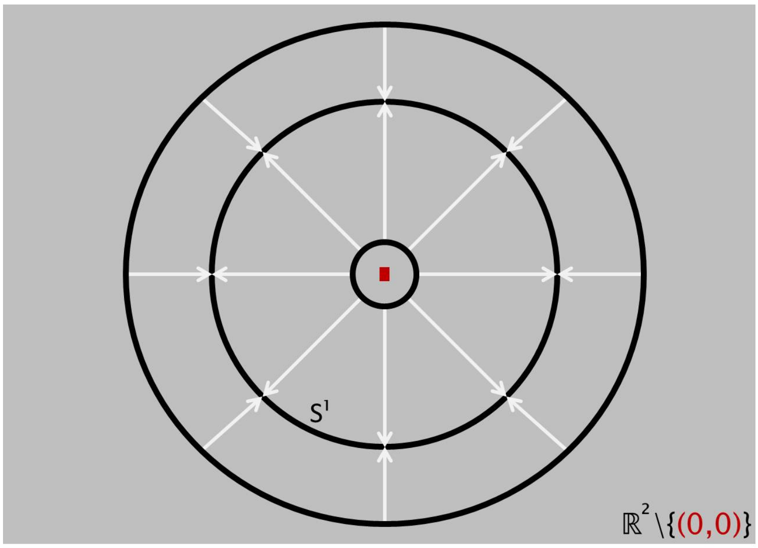


Abbildung 11: $[S^1, \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}]$ "=" $[S^1, S^1]$.

Kapitel I

Grundlagen der Allgemeinen Topologie

1 Erste Beispiele topologischer Räume

Beispiel:

(1) $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$ <u>'triviale Topologie'</u>

(2) $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ <u>'diskrete Topologie'</u>

(3) Metrische Räume, siehe unten

(4) $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ definiert eine Topologie auf X, aber $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ nicht!

(5) $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid$ O ist Vereinigung von Intervallen (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}\}$. $\Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist topologischer Raum, und $\mathcal{O}$ heißt <u>Standard-Topologie</u>.

(6) $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R}$ endlich$\} \cup \{\emptyset\}$ ist auch eine Topologie auf $\mathbb{R}$, die so genannte $\mathcal{T}_1$-Topologie.

Definition I.1 (Teilraumtopologie)**.** Es sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

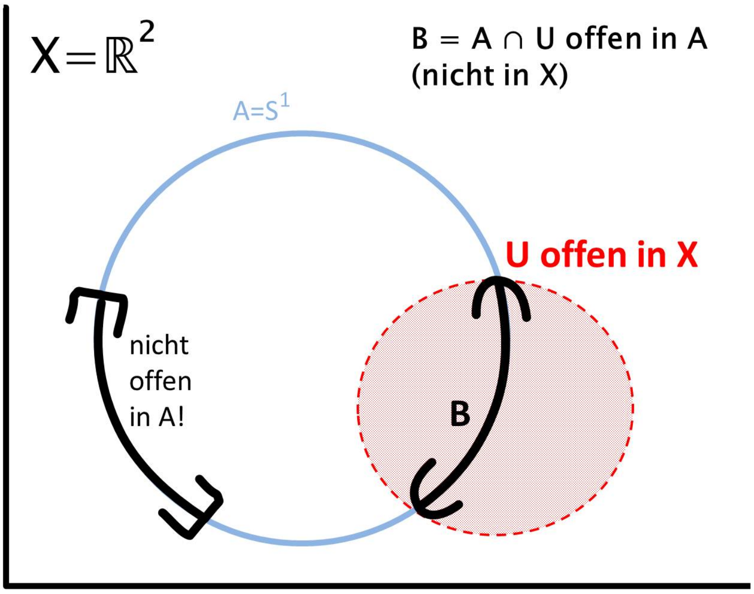
$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt <u>Teilraumtopologie</u> und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}\Big|_A)$ heißt <u>Teilraum</u> von $(X, \mathcal{O})$.

Bemerkung I.1. $B \subset A$ ist also genau dann <u>offen <u>in A</u></u>, wenn B der Schnitt einer <u>in X</u> offenen Menge mit A ist.

Beispiel:

$X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$



Achtung: B ist nicht offen in $\mathbb{R}^2$!

2 Topologische Grundbegriffe

Definition I.2 (Abgeschlossenheit)**.** $A \subset X, X$ topologischer Raum, heißt abgeschlossen

$$:\Leftrightarrow X \backslash A \text{ ist offen.}$$

Die De Morgan'schen Regeln der Mengenlehre zeigen:

Bemerkung I.2. Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso X und $\emptyset$.

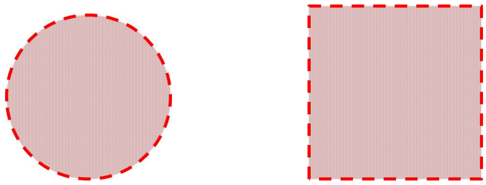
Beispiel:

In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$[1] alle endlichen Teilmengen und $X, \emptyset$.

Definition I.3 (Umgebung)**.** Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x.

Bemerkung I.3. Umgebungen sind per definitionem offen!

[1] $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{T}_1$-Topologie



Bemerkung I.4. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{Standard}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!

Beispiel: Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0,2\} \right\}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, enthält überabzählbar viele Elemente und hat 'Hausdorff-Dimension' $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6\ldots$

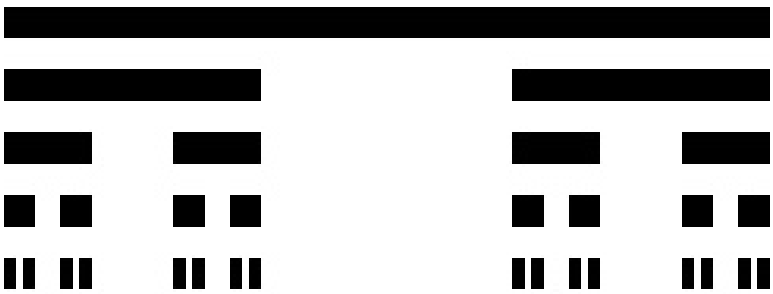
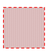


Abbildung I.1: Die Cantor-Menge.

Definition I.4 (Basis)**.** Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Beispiel:

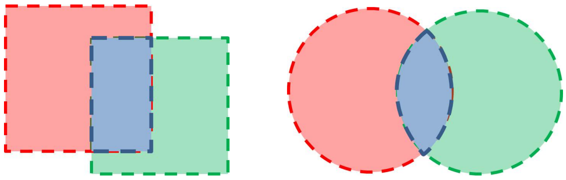
(1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von $\mathbb{R}$.

(2) Sämtliche offenen[2] Kreisscheiben  und auch sämtliche offenen Quadrate  bilden Basen ein und derselben Topologie auf $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung I.5. • $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ist Basis der Topologie von $X \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B} \colon x \in B \subset O$.

[2] bezüglich der euklidischen Metrik

• $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Bais einer Topologie auf $X \Leftrightarrow X$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ und der Schnitt je zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ ist eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

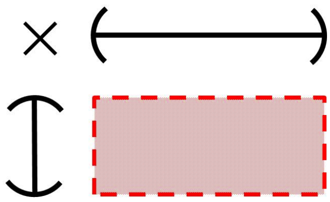


Definition I.5 (Produkt-Topologie)**.** Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, so bildet

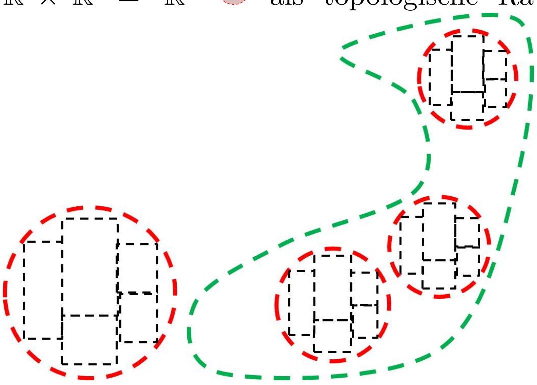
$$\mathcal{B}_{X\times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge $X \times Y$, und diese heißt Produkt-Topologie auf $X \times Y$.
Versehen mit der Produkt-Topologie ist $X \times Y$ sebst ein topologischer Raum und für gegebene X, Y denkt man sich $X \times Y$ stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.

Beispiel:



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  als topologische Räume!



Ebenso: $(\mathbb{R}^1)^n = \mathbb{R}^n$!

Definition I.6 (Feiner und gröber)**.** Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$,
so heißt $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$.

Beispiel:

- Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X, die diskrete Topologie die feinste.
- Die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist feiner als die $\mathcal{T}_1$-Topologie.

Mehr zu metrischen Räumen

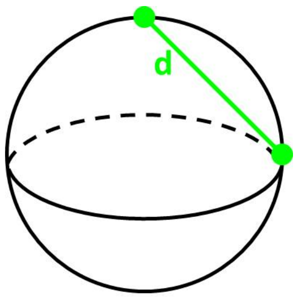
Definition I.7 (ϵ-Ball, Sphäre)**.** Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) < \epsilon\}$ der offene ϵ-Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ-Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) = \epsilon\}$ die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ um p)

Definition I.8 (Metrischer Unterraum)**.** Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d\big|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.

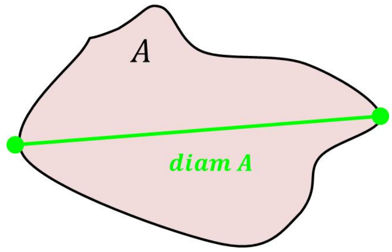
Beispiel:

Für $X = \mathbb{R}^n_{Eukl.}$ sind $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ und $S^{n-1} := S_1(0)$ metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw. $(n-1)$-Sphäre.



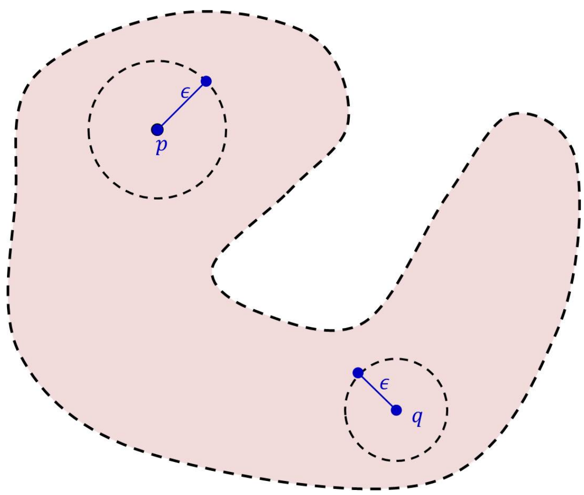
$S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Definition I.9 (Beschränktheit, Durchmesser)**.** $A \subset (X, d)$ heißt beschränkt
:$\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R} \colon d(x,y) < \rho \ \forall x, y \in A$
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.



Bemerkung I.6. In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ von X, diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.

Bemerkung I.7. $A \subset (X, d)$ ist offen
$\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ ein offener Ball $B_\epsilon(p)$ um p mit $B_\epsilon(p) \subset A$



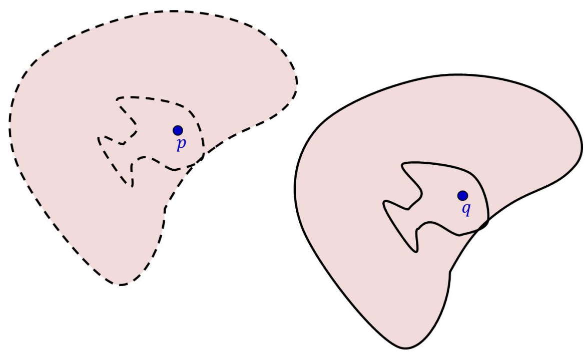
Definition I.10 (Abstand)**.** (X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

Erinnerung Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$, so definiert $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf A, die Teilraumtopologie der in A offenen Mengen.

Bemerkung I.8. Ist $A \subset X$ offen in X, so ist auch jede in A offene Menge offen in X, und abgeschlossene[3] Teilmengen einer in X abgeschlossenen Menge A sind auch abgeschlossen in X.



[3] in A

Aber abgeschlossene Mengen B in $A \subset X$ sind für beliebiges A im Allgemeinen nicht abgeschlossen in X.

Beispiel: Beispiel zu Bemerkung I.8

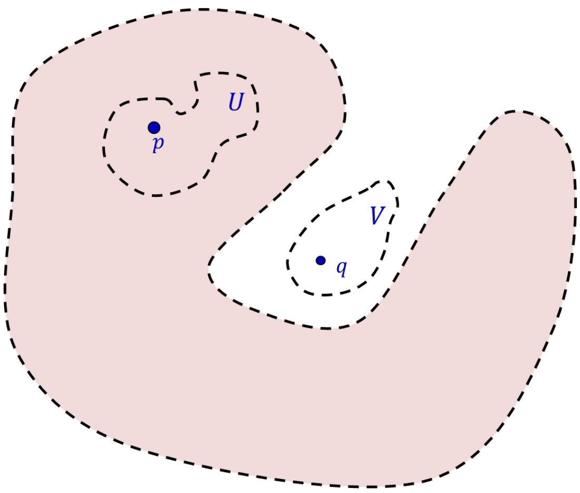
$B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$

Definition I.11 (Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt)**.** Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.

(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.

(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \setminus A$ hat.



Definition I.12 (Inneres)**.** Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.

Bemerkung I.9. $\mathring{A}$ ist die Menge aller inneren Punkte von A und die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von A, und A ist offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

Beispiel:

$\mathbb{R} \overset{\circ}{\setminus} \mathbb{Q} = \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

Definition I.13 (Abschluss)**.** Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X \setminus \Big((X \overset{\circ}{\setminus} A) \Big)$.

Definition I.14 (Rand)**.** Der Rand ∂A von A ist

$$\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A},$$

d.h. Rand $A = \{$ Randpunkte von A $\}$.

TODO:Exkurs zu "Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander"

3 Stetige Abbildungen

Definition I.15 (Stetigkeit)**.** $f\colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.

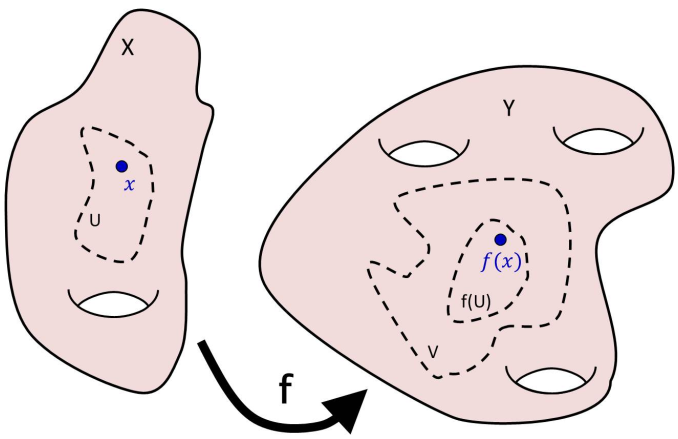
Beispiel:

- $f\colon X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X, so ist die Identität $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ stetig $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.
- Für $A \subset X$ ist die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}\big|_A$ die gröbste Topologie, bezüglich der die Inklusion $i\colon A \hookrightarrow X, a \mapsto a$ stetig ist.

Definition I.16 (Stetigkeit)**.** $f\colon X \to Y$ ist stetig in $x \in X$

$$:\Leftrightarrow \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(x) \quad \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit}$$

$$f(U) \subset V.$$



Bemerkung I.10. $f\colon X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow f$ ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.

Beispiel:

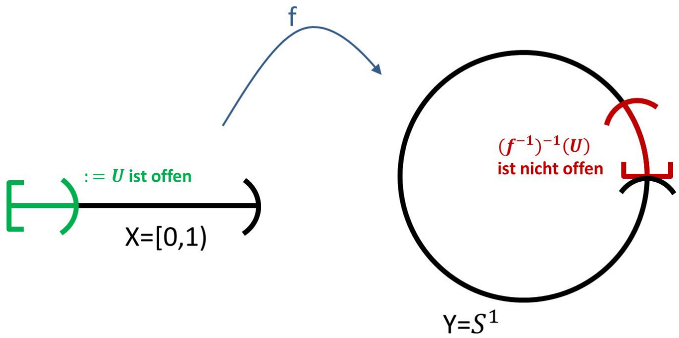
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für jeden offenen Ball B um $f(x)$ ein offener Ball um x existiert, der unter f in B abgebildet wird. (Und ferner stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ auch $d_Y\left(f(x), f(x')\right) < \epsilon$ folgt.)

Definition I.17 (Isometrische Einbettung, Isometrie)**.** Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ isometrische Einbettung
$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y\left(f(x), f(x')\right) = d_X(x, x')$.
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.
Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

Definition I.18 (Homöomorphismus)**.** Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

Beispiel:

- $f\colon [0,1) \to S^1 \subset \mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!



- $id_X\colon X \to X$ ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.

Bemerkung I.11. 'Homöomorph sein' ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.

Definition I.19 (homöomorph)**.** Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

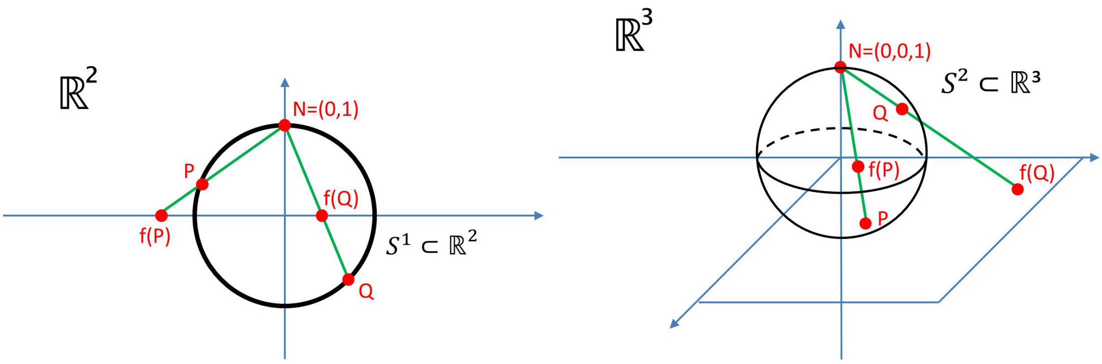
Bemerkung I.12. Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:

- Ist $f\colon X \to Y$ Homöomorphismus, so ist $U \subset X$ offen $\Leftrightarrow f(U)$ offen in Y.
- $A \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow f(A)$ ist abgeschlossen in Y.
- $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}, f(\mathring{A}) = (f(\overset{\circ}{A}))$.
- U ist Umgebung von $x \in X \Leftrightarrow f(U)$ ist Umgebung von $f(x)$.

Beispiel:

- Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- $[0,1] \cong [a,b] \forall a < b \in \mathbb{R}$
- $(0,1) \cong (a,b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$

Beispiel: Stereographische Projektion



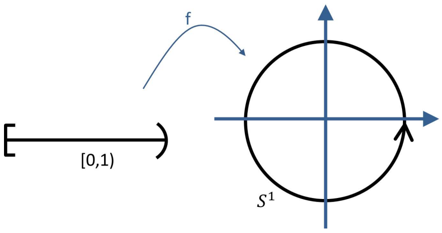
Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von $S^n \backslash \{N\}, N := (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, gegeben wie folgt:
Der Schnitt der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ durch N und $x \in S^n \backslash \{N\}$ mit der Hyperebene $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, $f(x)$, ist gegeben durch $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$ mit Umkehrabbildung $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1})$.

Definition I.20 (Einbettung)**.** $f\colon X \to Y$ stetig heißt <u>Einbettung</u>

$$:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y \text{ Homöomorphismus.}$$

Beispiel:

- Für $A \subset X$ ist die Inklusion $\iota\colon A \hookrightarrow X, x \mapsto x$, stets eine Einbettung.
- $[0,1) \to S^1$ ist <u>keine</u> Einbettung!



- Der Satz über die Umkehrabbildung/ Impliziter Funktionensatz aus der Analysis zeigt:
  Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und in $p \in \mathbb{R}^n$ die Jacobi-Matrix $Df(p)$ invertierbar, so existiert eine Umgebung von p, auf der $f\big|_U$ eine Einbettung ist.

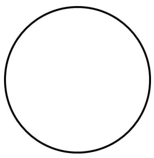
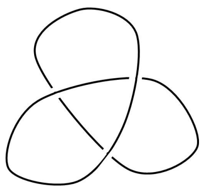
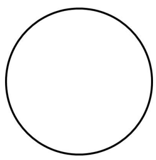
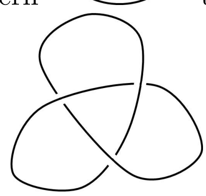
Definition I.21 (Äquivalenz von Einbettungen)**.** Zwei Einbettungen $f, g\colon X \to Y$ heißen äquivalent :⇔ ∃ Homöomorphismen $h_X\colon X \to X, h_Y\colon Y \to Y$ mit $g \circ h_X = h_Y \circ f$, d.h. dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "h_y"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition I.22 (Knoten)**.** Eine Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißt Knoten.

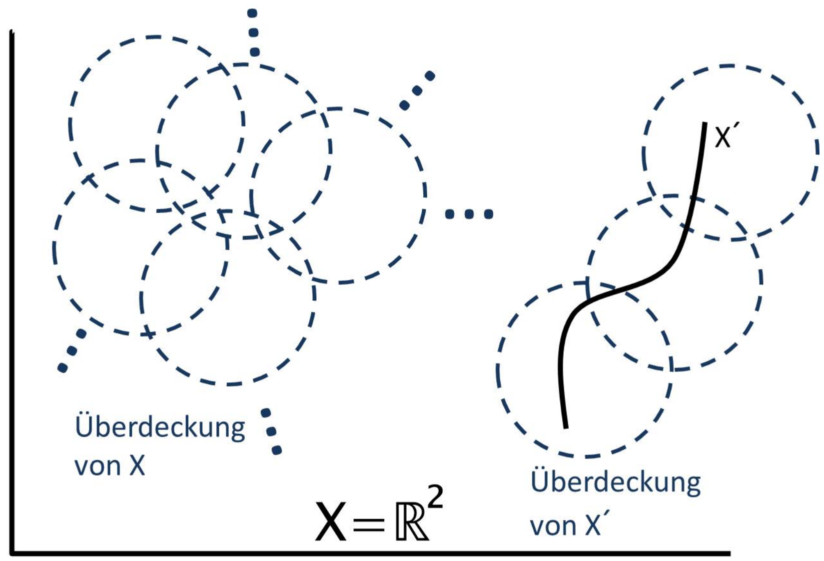
Beispiel:

Die Knoten mit Bildern  und  sind äquivalent, die mit  und  nicht!

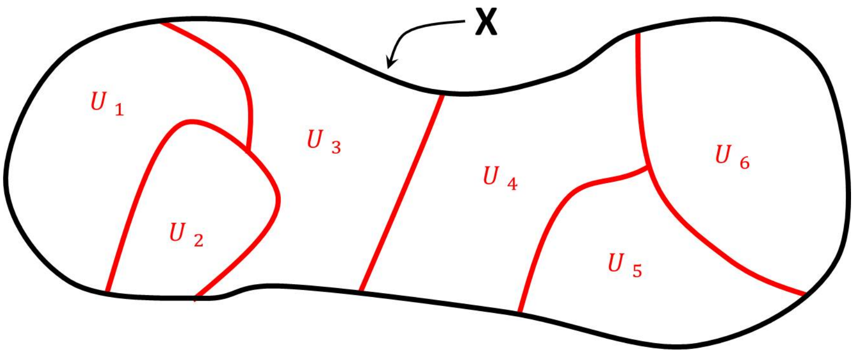
4 Zusammenhang und Kompaktheit

Definition I.23 (zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend :⇔ Die einzigen in X gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind $\emptyset$ und X.
Ansonsten heißt X un- oder nicht zusammenhängend.

Definition I.24 (Überdeckung)**.** Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$[4] von Teilmengen von X heißt <u>Überdeckung von X</u> $:\Leftrightarrow X = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$.
$\mathcal{U}$ heißt <u>offene</u> beziehungsweise <u>abgeschlossene</u> Überdeckung $\Leftrightarrow$ alle U_α sind offen beziehungsweise abgeschlossen.
Für $X' \subset X$ heißt eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ wie oben Überdeckung von X' $:\Leftrightarrow X' \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$.



Definition I.25 (Partition)**.** Eine <u>Partition</u> oder <u>Zerlegung</u> einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen.



[4] A Indexmenge

Bemerkung I.13. Ein topologischer Raum X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Es existiert keine Partition von X in zwei nichtleere offene Teilmengen $\Leftrightarrow$ es existiert keine Partition von X in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen
Denn: $A \subset X$ ist offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A und $X \backslash A$ sind offen $\Leftrightarrow$ A und $X \backslash A$ sind abgeschlossen

Beispiel:

- $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \pi)) \cup (\mathbb{Q} \cap (\pi, +\infty))$.
- Die einzigen zusammenhängenden und mit der diskreten Topologie versehenen Räume sind $\emptyset$ und der nur aus einem Punkt bestehende Raum.

Bemerkung I.14. Allgemein sagt man von einer Menge, sie sei zusammenhängend, wenn diese, aufgefasst als Teilraum eines topologischen Raumes, zusammenhängend ist.

Beispiel:

$[0, 1] (\subset \mathbb{R})$ ist zusammenhängend, aber $[0, 1] \cup (2, 3)$ nicht!

Beispiel:

Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ A ist leer, einpunktig, oder unendlich!

Bemerkung I.15. Eigenschaften zusammenhängender Mengen

- A zusammenhängend $\Rightarrow$ $\bar{A}$ zusammenhängend
- $A, B \subset X$ zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend
- $A \cup B$ zusammenhängend, $A \cap B$ zusammenhängend $\not\Rightarrow A, B$ zusammenhängend ($A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$)

Definition I.26 (Zusammenhangskomponente)**.** Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine im Sinne der Inklusion von Mengen maximale zusammenhängende Teilmenge von X.

Bemerkung I.16.

- Jeder Punkt von X liegt genau in einer Zusammenhangskomponente, und diese ist die Vereinigung aller diesen Punkt enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen.
- Zwei Zusammenhangskomponenten sind damit entweder gleich oder disjunkt.

- Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

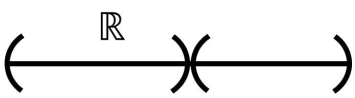
Satz I.1. *Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.*
(D.h.: Ist $f\colon X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so auch $f(X) \subset Y$.)

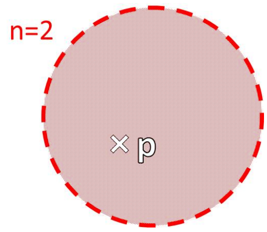
Beweis. Es sei ohne Einschränkung $Y = f(X)$ und sei $Y = U \cup V$ Partition von Y in zwei offene Mengen $\Rightarrow$ $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ sind offen in X (f stetig) und bilden eine Partition von X. X ist zusammenhängend. $\Rightarrow f^{-1}(U)$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$.
Sei o.E. $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow V = f(X)$ (f surjektiv auf $f(X)$)
$\Rightarrow$ Es existiert <u>keine</u> Partition von Y in nichtleere offene Mengen $\Leftrightarrow$ Y zusammenhängend. □

Korollar I.1. *Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, und ebenso die Zahl der Zusammenhangskomponenten.*

Beispiel:

Für $n > 1$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph!
<u>Denn:</u> $\mathbb{R}^n \cong \mathring{D}^n$ (Einheitskugel) und nimmt man aus $\mathring{D}^n$ einen Punkt p heraus, so bleibt für $n > 1$ $\mathring{D}^n \backslash \{p\}$ zusammenhängend, $\mathring{D}^1 = (-1, 1) \cong \mathbb{R}$ aber nicht!



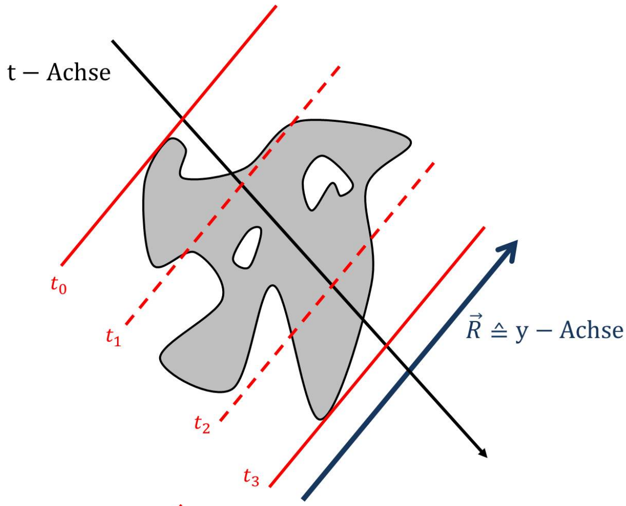


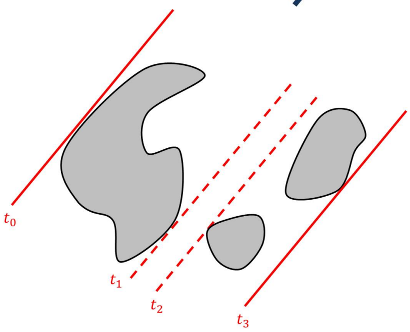
<u>Allgemeiner (Brouwder)</u> $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow m = n$

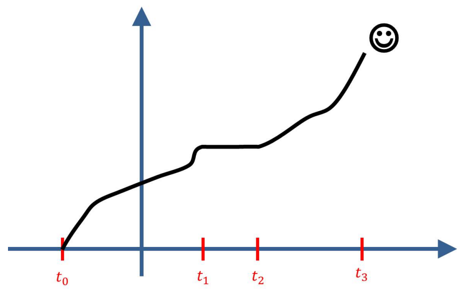
Korollar I.2. *Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beispiel: Waffelteilen

Eine Waffel, wie unregelmäßig auch immer, lässt sich immer in zwei gleich große Teile schneiden.

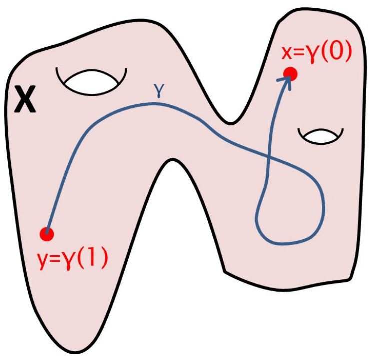






Bei unzusammenhängenden Waffeln ist die Schnittgerade selbst bei vorgegebener Schnittrichtung nicht eindeutig.

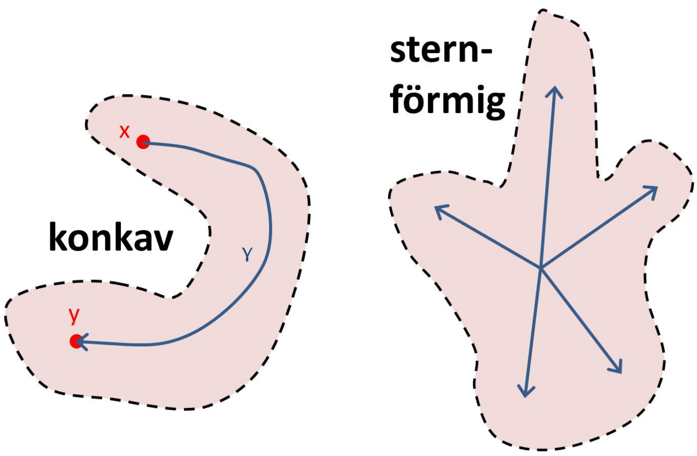
Definition I.27 (Weg, Anfangspunkt, Endpunkt)**.** ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.



Definition I.28 (Wegzusammenhang)**.** X heißt wegzusammenhängend

$$:\Leftrightarrow \text{ Zu je zwei Punkten } x, x' \in X \quad \exists \text{ Weg } \gamma\colon [0,1] \to X$$

mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$.



Beispiel:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$B = A \cup \{(0, 0)\}$$

$\Rightarrow$ B ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

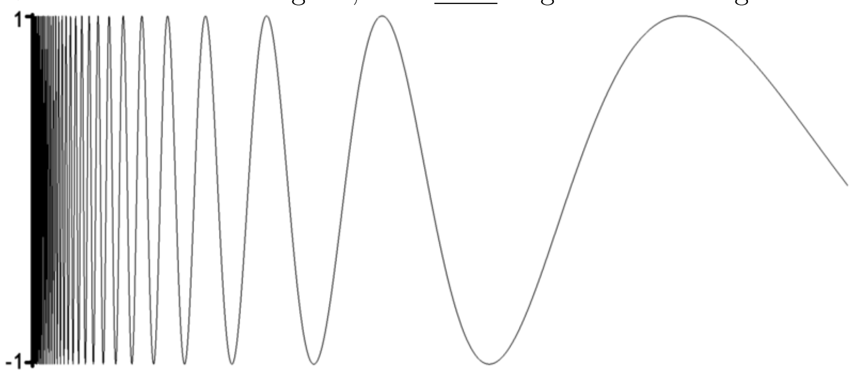
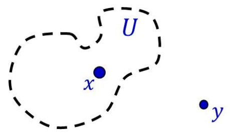


Bild: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sinuseinsdurchx.png&filetimestamp=20080624085708

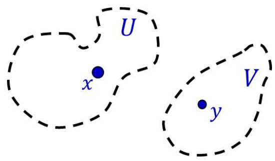
Definition I.29 (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

5 Trennungseigenschaften

Definition I.30 (T_1-Raum)**.** Ein topologischer Raum X heißt T_1-Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom :$\Leftrightarrow$ Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X, die den anderen nicht enthält.
$\forall x \neq y \in X \exists U = U_X : y \notin U_X$



Definition I.31 (T_2-Raum)**.** X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom :$\Leftrightarrow$ Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.
$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

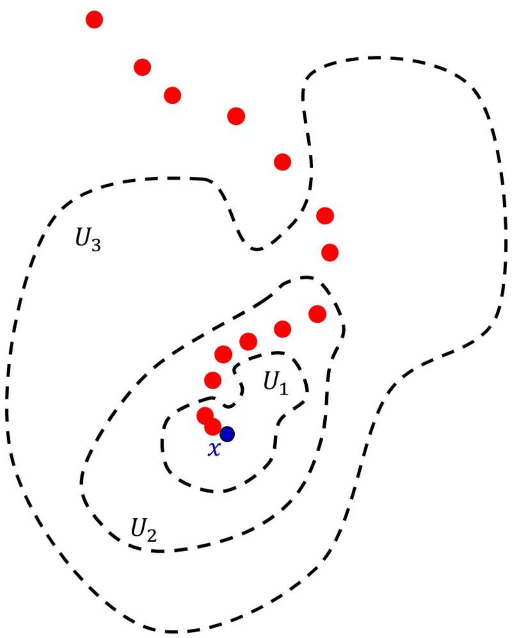


Beispiel:

Jeder metrische Raum ist Hausdorff-Raum.

Bemerkung I.17. Hausdorff-Räume sind z.B. deshalb wichtig, weil Grenzwerte dort eindeutig sind!

Definition I.32 (Grenzwert)**.** Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X, so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \quad \forall n \geq N$.



Beispiel:

In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.

Bemerkung I.18. Hausdorff-Räume sind auch T_1-Räume, aber:

Beispiel:

In $X = \mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ ist jeder Punkt abgeschlossen ($\Rightarrow T_1$), doch je zwei nichtleere offene Mengen schneiden sich - X ist damit nicht T_2! "Schlimmer": In $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ ist jeder Punkt Grenzwert der Folge $x_n = n$! Denn eine Umgebung eines Punktes in $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ hat die Form $U = \mathbb{R}\backslash\{x_1, \ldots, x_M\}$ mit $x_1 < \ldots < x_M$. Dann gilt aber $x_n = n \in U \forall n > x_M$.

6 Abzählbarkeitsaxiome und lokale Kompaktheit

Definition I.33 (Umgebungsbasis)**.** Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

Beispiel:

Ist B Basis der Topologie eines Raumes X, so ist für jedes $x \in X$ $\{U \in B \mid x \in U\}$ eine Basis von X in x.

Beispiel:

In einem metrischen Raum X sind folgende Mengen von Bällen Basen von X in $x \in X$:

- alle offenen Bälle mit Zentrum x
- alle offenen Bälle mit Zentrum x und rationalen Radii

Beispiel:

Ist X mit der diskreten bzw. trivialen Topologie versehen, so ist die 'kleinste' Basis in $x \in X$ gegeben durch $\{\{x\}\}$ bzw. $\{X\}$.

Definition I.34 (Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität)**.** X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom :⇔ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.
X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom :⇔ X selbst besitzt eine abzählbare Basis.
X heißt separabel :⇔ X enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A.

Bemerkung I.19. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste, aber:

Beispiel:

Überabzählbare diskrete Räume (wie $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{diskret})$) erfüllen nach Beispiel 6 das erste Abzählbarkeitsaxiom, nicht aber das zweite!

Bemerkung I.20. Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und jeder separable metrische Raum auch das zweite.

Beispiel:

$\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist aber separabel - $\mathbb{N}$ ist dicht!

Beispiel:

Euklidische Räume und alle ihre Teilmengen erfüllen das 2. Abzählbarkeitsaxiom und sind separabel.

Wozu das Ganze?

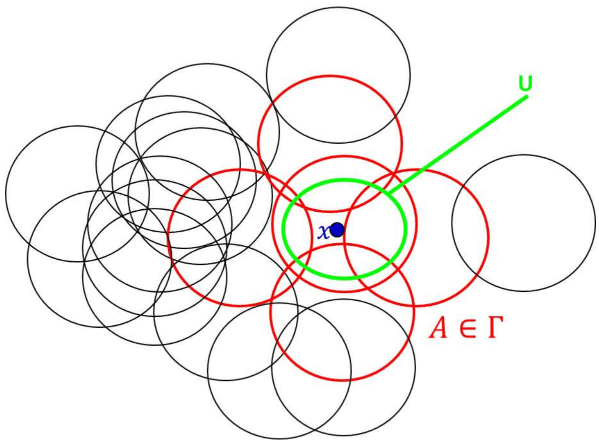
$\rightsquigarrow$ Funktionenräume

$\rightsquigarrow$ Mannigfaltigkeiten

$\rightsquigarrow$ Satz von Lindelöf: Jede offene Überdeckung eines Raumes, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, enthält auch eine abzählbare Teilüberdeckung.

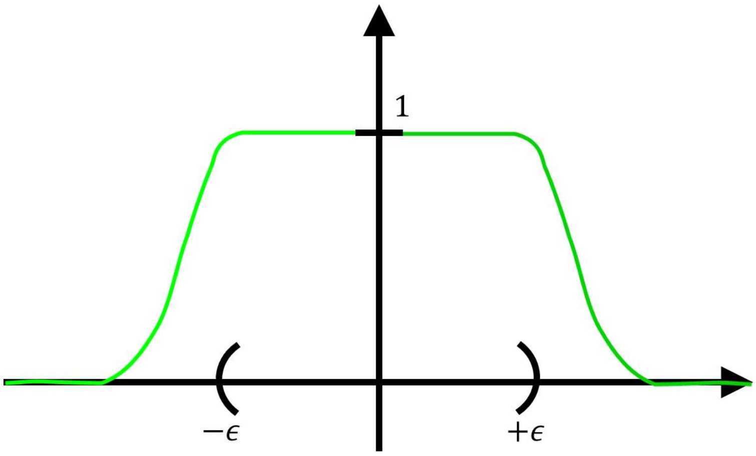
Definition I.35 (Lokale Kompaktheit)**.** X heißt lokal kompakt
:$\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\overline{U}$ kompakt ist.

Definition I.36 (Lokale Endlichkeit)**.** Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich :$\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \exists U = U(x)\colon A \cap U = \emptyset \quad \forall A \in \Gamma$ bis auf endlich viele A.



Definition I.37 (Verfeinerung)**.** Γ, Δ Überdeckungen von X. Δ heißt Verfeinerung von Γ
:$\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma\colon A \subset B$.

Definition I.38 (Parakompaktheit)**.** X heißt parakompakt :$\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.



Cut-off

Beispiel:

- Kompakte Räume sind parakompakt.
- $\mathbb{R}^n$ ist parakompakt.
- Mannigfaltigkeiten sind parakompakt!

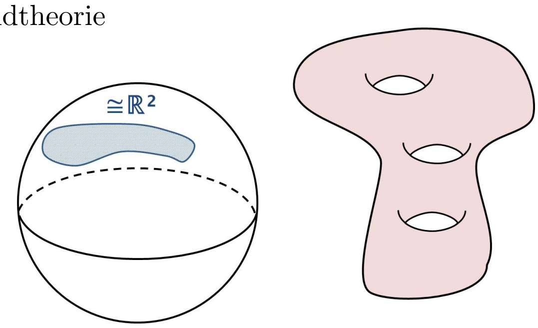
Bemerkung I.21. Parakompaktheit ist wichtig, da dann bestimmte Einbettungen und sogenannte Zerlegungen der Eins existieren.

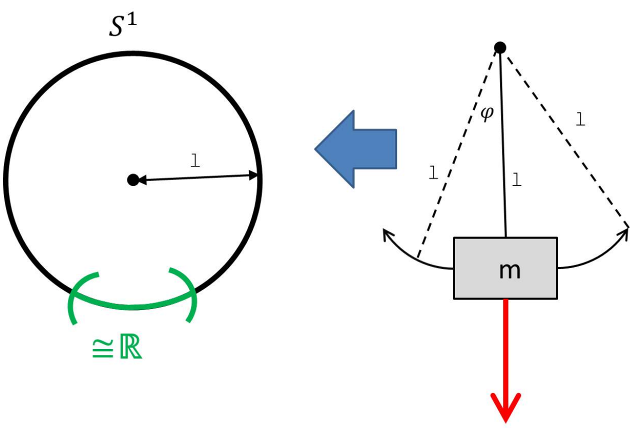
Kapitel II

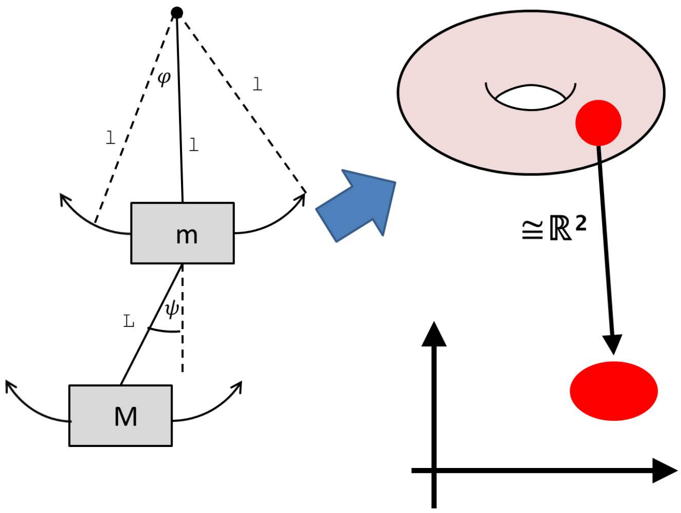
Geometrische Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume

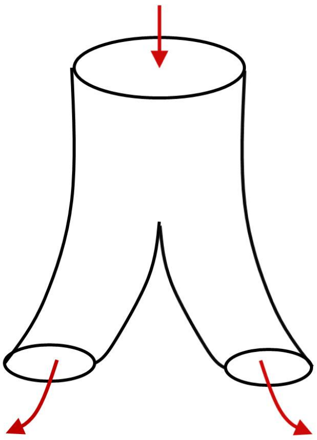
1 Mannigfaltigkeiten

Beispiele zu Mannigfaltigkeiten (Exkurs) Doppelpendel, Quantenfeldtheorie





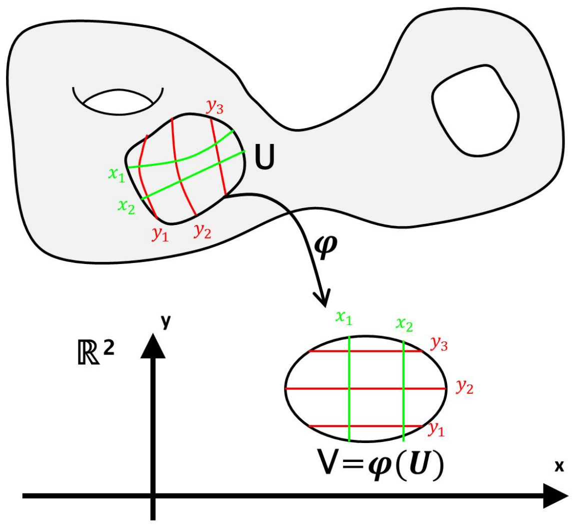




Definition II.1 (Mannigfaltigkeit, Karte)**.** Ein topologischer Raum M heißt n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1. M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie

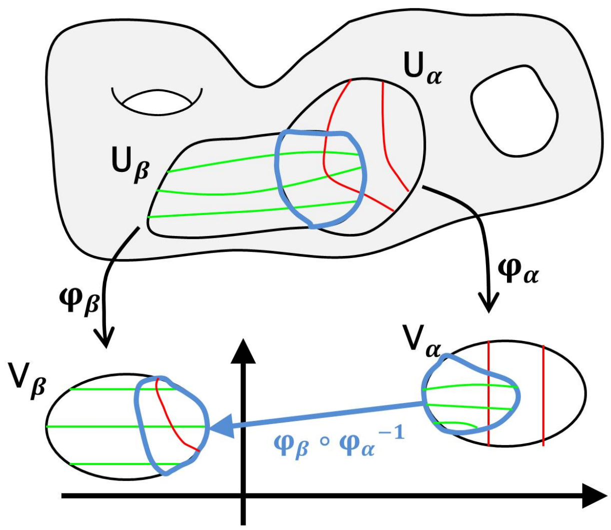
2. M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{offen} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V, V \subset_{offen} \mathbb{R}^n$.
   Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p.



Bemerkung II.1. Die Zahl n, die Dimension von M, ist eindeutig bestimmt! (folgt aus Brouwers Satz von der Invarianz des Gebietes)

Definition II.2 (Atlas)**.** Ein Atlas für eine topologische n-Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$[1] von Karten $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup\limits_{a \in \Lambda} U_\alpha$

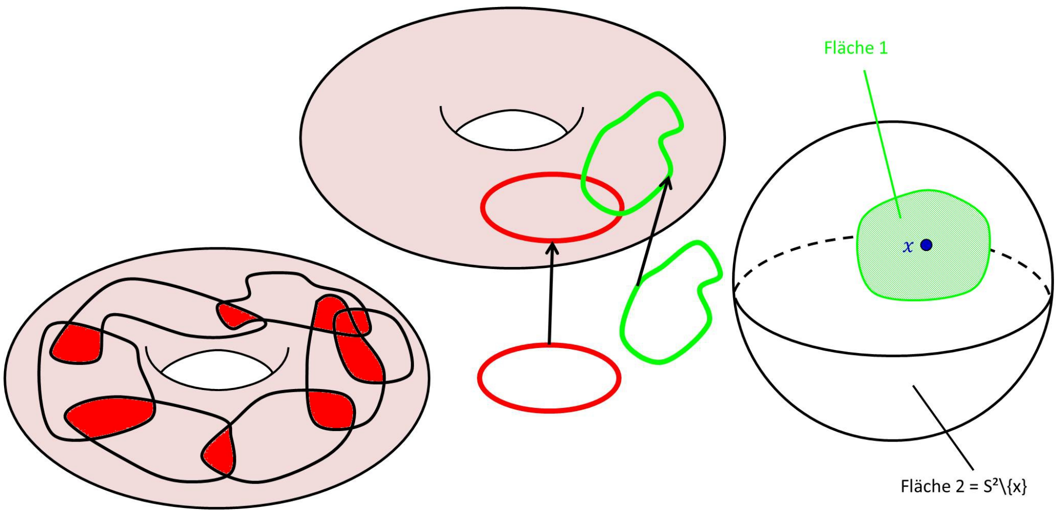
Definition II.3 (C^k-Atlas, Kartenwechsel)**.** Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k-Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k-Abbildung, also k-mal stetig differenzierbar ist. ($k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega$)

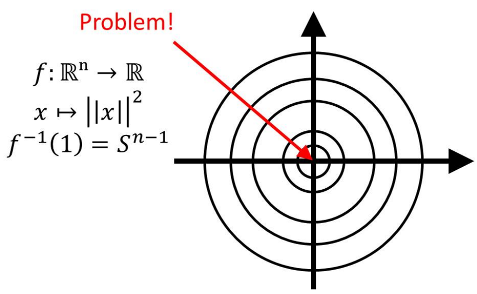


[1] Λ Indexmenge

Definition II.4 (Verträglichkeit, differenzierbare Struktur)**.** Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k-Atlas von M, so heißt eine Karte (φ, U) von M mit $\mathcal{A}$ verträglich, falls $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k-Atlas ist. Ein C^k-Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls $\mathcal{A}$ alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält.

Definition II.5 (C^k-Mannigfaltigkeit, glatt)**.** Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k-Mannigfaltigkeit) ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k-Struktur auf M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.





Richtig toller Exkurs zu Mannigfaltigkeiten ... Killing-Fields, Lie-Groups (festgenommener Matheprof kurz nach 9/11), Perverse Garben, wir leben in einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit, ...

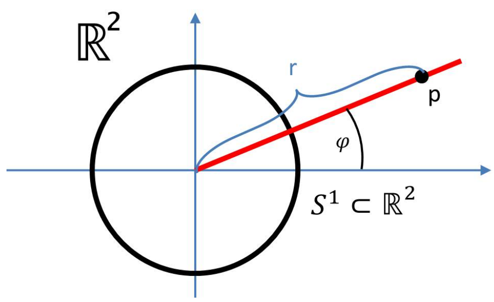
Bemerkung II.2. Bemerkung zur Produkt-Topologie

- Produkte von Hausdorff-Räumen sind Hausdorff-Räume.
- Produkte von zusammenhängenden Räumen sind zusammenhängend.
- Produkte von wegzusammenhängenden Räumen sind wegzusammenhängend.
- Produkte von kompakten/separablen Räumen sind kompakt/separabel.
- Produkte von Räumen, die das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, erfüllen diese auch.

Folgerung Produkte topologischer oder differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind topologische oder differenzierbare[2] Mannigfaltigkeiten.

Beispiel:

- $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$ (Polarkoordinaten)



- $O(n) \cong SO(n) \times O(1)$
- $(S^1)^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{\text{n mal}}$ heißt <u>n-dimensionaler Torus</u> (TODO: Bild 3: Exkurs höherdimensionale Sphären)

[2] (C^∞)

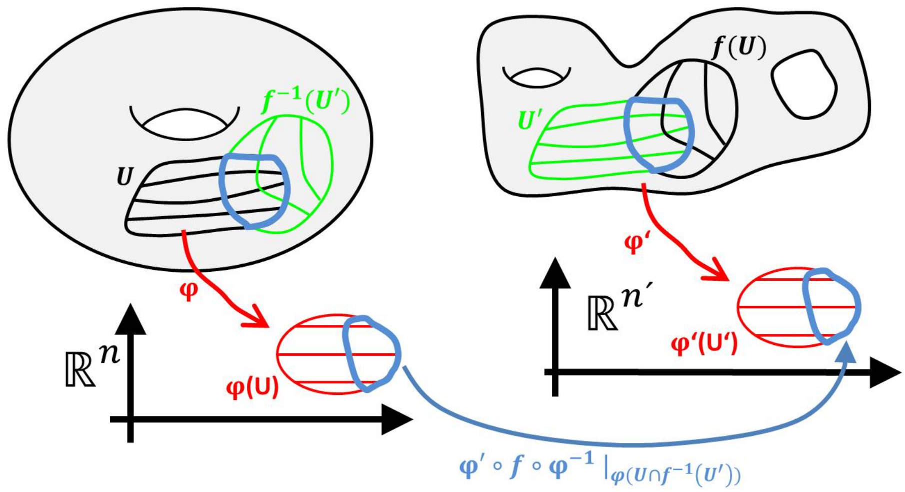
1.1 Differenzierbare Abbildungen

Definition II.6 (C^l-Abbildung)**.** Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $(M', \mathcal{A}')$ eine n'-dimensionale $C^{k'}$-Mannigfaltigkeit und $l \leq \min(k, k')$. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to M'$ heißt differenzierbar (von der Klasse C^l) oder kurz: C^l-Abbildung, falls gilt:

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(f(U) \cap U')}$$

eine C^l-Abbildung im üblichen Sinn.



TODO: Exkurs über Tangentialvektoren, Vektorfelder, Satz vom Igel, Physik des starren Körpers, Differentialtopologie

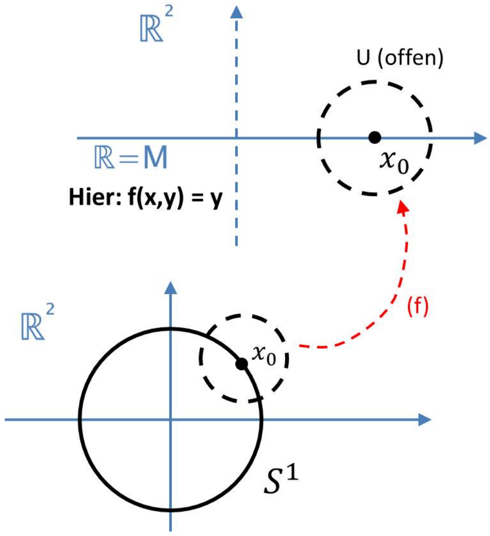
Spezielle Mannigfaltigkeiten: Untermannigfaltigkeiten topologischer Räume:

Satz II.1 (Äquivalente Beschreibungen einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$). *Für Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$ sind äquivalent:*

(a) $\forall x_0 \in M \exists$ *Umgebung* $U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und*

$$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l) := \{g\colon U \to \mathbb{R}^l \mid g \text{ ist } C^\infty\} \text{ mit Rang } Df(x) = l \quad \forall x \in U$$

[3] *dergestalt, dass* $U \cap M = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$



(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:* $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen,*
φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$ *und*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \ldots, y_{n+l}) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$$

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}, W \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$

(Jedes solche ψ *heißt lokale Parametrisierung von* M*).*

[3] Df ist die Jacobi-Matrix von f

Interpretation

(a) besagt: $U \cap M$ ist (im Sinne der Rangbedingung) durch l unabhängige Gleichungen $f_1(x) = \ldots = f_l(x) = 0$ definiert.

(b) besagt: nach Anwendung eines Diffeomorphismus sieht $U \cap M$ wie eine offene Teilmenge eines linearen Unterraumes von $\mathbb{R}^{n+l}$ aus.

(c) besagt: M lässt sich lokal parametrisieren.

Definition II.7 (Untermannigfaltigkeit)**.** Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$, die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n-dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$.

Satz II.2. *Äquivalente Beschreibung einer glatten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$ Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$. Es sind äquivalent:*

(a) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{\textit{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l)$ *mit Rang* $Df(x) = l$ *für alle* $x \in U$ *dergestalt, dass* $U \cap M = f^{-1}(0)$.

(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subseteq_{\textit{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen*
- φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$
- $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{\textit{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$.

Beispiel:

zu (a)
Die n-Sphäre vom Radius r

$$S^n_r = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = r\}$$

ist eine n-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.
Denn: Definiere $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||^2 - r^2$. Dann gilt:

- $S^n_r = f^{-1}(0)$ und
- $Df(x) = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1}) = 2x$ erfüllt Rang $Df(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \supseteq S^n_r$ (wegen $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$).

Allgemeiner:

- Niveaumengen: Es seien $V \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}, f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l), c \in \mathbb{R}^l$. Gilt Rang $Df(x) = l$ in jedem Punkt x der Niveaumenge

$$f^{-1}(c) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

  so ist $f^{-1}(c)$ eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$.

Beweis. (a)⇒(b): Es seien U und f wie in (a) gewählt und $f_1, \dots, f_l$ die Komponenten von f. Sei $x_0 \in M$. Durch Umnummerierung seien die Indizes so gewählt, dass ohne Einschränkung die Reihenfolge so, dass die $(l \times l)$-Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j \in \{1,\dots,l\}}$$

in x_0 invertierbar ist. Definiere die Abbildung $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^{n+l}, x \mapsto (x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_l(x))$. Dann gilt:

$$D\varphi(x_0) = (TODO : Matrix2)$$

und damit

$$\det D\varphi(x_0) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j} \neq 0.$$

Mit dem Satz über inverse Funktionen (oder "Satz über die Umkehrabbildung") folgt: Es existieren Umgebungen $U' = U'(x_0) \subseteq U$ und $V'(\varphi(x_0)) \subseteq V = \varphi(U)$, so dass $\varphi\big|_{U'} \colon U' \to V'$ ist C^∞-Diffeomorphismus.
Es gilt: $\varphi(U' \cap M) = \{(y_1, \dots, y_{n+l}) \in \varphi(U') \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$, denn:
" $\subseteq$ " : ist klar nach Definition von f und φ.
" $\supseteq$ " : Ist y Element der rechten Seite, so existiert $x \in U'$ mit $\varphi(x) = y$ und $f(x) = 0$. Da $x \in U' \subseteq U$ und $f(x) = 0$, gilt: $x \in U' \cap M$, und damit $y = \varphi(x) \in \varphi(U' \cap M)$.
(b)⇒(c): Es seien U und φ wie in (b) gewählt und

$$\pi \colon \mathbb{R}^{n+l} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+l}) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

die Projektion und

$$\iota \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+l}, (x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

die Inklusion.

Setze $W := \pi(\varphi(U \cap M))$ und definiere $\psi\colon W \to U$ durch $\psi := \varphi^{-1} \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+l} \arrow[r, shift left, "\iota"] & \mathbb{R}^{n} \arrow[l, shift left, "\pi"] \\
 & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\
U \arrow[uu, "\varphi"] & W \arrow[l, dashed, "\psi = \varphi^{-1} \circ \iota"']
\end{tikzcd}$$

Dann ist W offen und $\psi\colon W \to U \cap M$ ein Homöomorphismus, denn $\iota'\colon W \to \varphi(U \cap M)$ ist Homöomorphismus und $\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap M) \to U \cap M$ ist Homöomorphismus.
Mit der Kettenregel folgt: Für alle $w \in W$ gilt:

$$\begin{aligned}
D\psi(w) &= D(\varphi^{-1} \circ \iota')(w) = \underline{(D\varphi^{-1})(\iota'(w))} \cdot D\iota'(w) \\
&\overset{(D\varphi^{-1})(y)=((D\varphi)(\varphi^{-1}(y)))^{-1}}{=} ((D\varphi)(\varphi^{-1}(\iota'(w))))^{-1} \circ \iota' \\
&= (D\varphi(\psi(w))^{-1} \circ \iota'.
\end{aligned}$$

Somit ist $D\psi(w)$ als Komposition einer bijektiven und einer injektiven Abbildung injektiv für alle $w \in W$.
<u>(c)⇒(a):</u> Es seien U, W und ψ wie in (c) gewählt und $\psi(\hat{w}) = x_0$ für $\hat{w} \in W$. Da Rang $D\psi(\hat{w}) = n$ folgt nach evtl. Umnummerierung

$$\left(\frac{\delta\psi_i}{\delta w_j}(\hat{w})\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$$

ist invertierbar. Definiere $g\colon W \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{n+l}, (w,y) \mapsto \psi(w) + (0,y)$, d.h. $g(w_1,\dots,w_n,y_1,\dots,y_l) = (\psi_1(w),\dots,\psi_n(w),\psi_{n+1}(w)+y_1,\psi_{n+l}(w)+y_l)$. Dann gilt:

$$Dy(\hat{w},0) = (TODO : Matrix4)$$

ist invertierbar. Mit dem Satz über inverse Funktionen folgt: Es existieren Umgebungen $V = V((\hat{w},0)) \subseteq W \times \mathbb{R}^l$ und $U' = U'(g(\hat{w},0))$, so dass $g\big|_V\colon V \to U'$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.
Verkleinert man gegebenenfalls V, so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass gilt: $U' \subseteq U$. Da $\{w \in W \mid (w,0) \in V\}$ offen ist in W und $\psi\colon W \to \psi(W)$ nach Voraussetzung ein Homöomorphismus ist, folgt: $\{\psi(w) \mid (w,0) \in V\}$ ist offen in $\psi(W)$.
Nach Definition der Unterraumtopologie existiert $U'' \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ mit $\{\psi(w) \mid (w,0) \in V\} = U'' \cap \psi(W)$.
Wegen $\psi(w) = g(w,0)$ bedeutet dies:

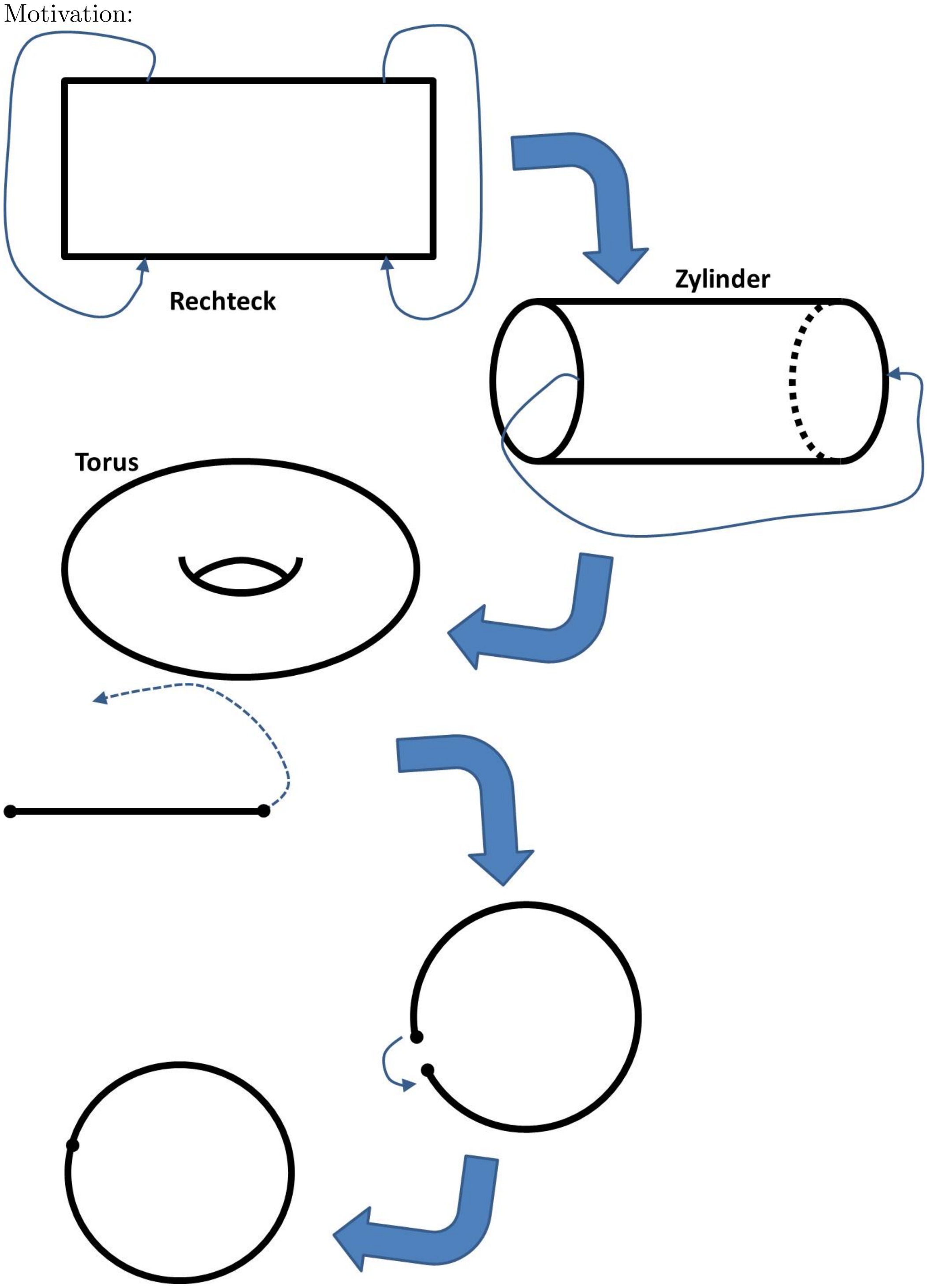
$$(*) U'' \cap \psi(W) = g(V \cap (W \times \{0\})).$$

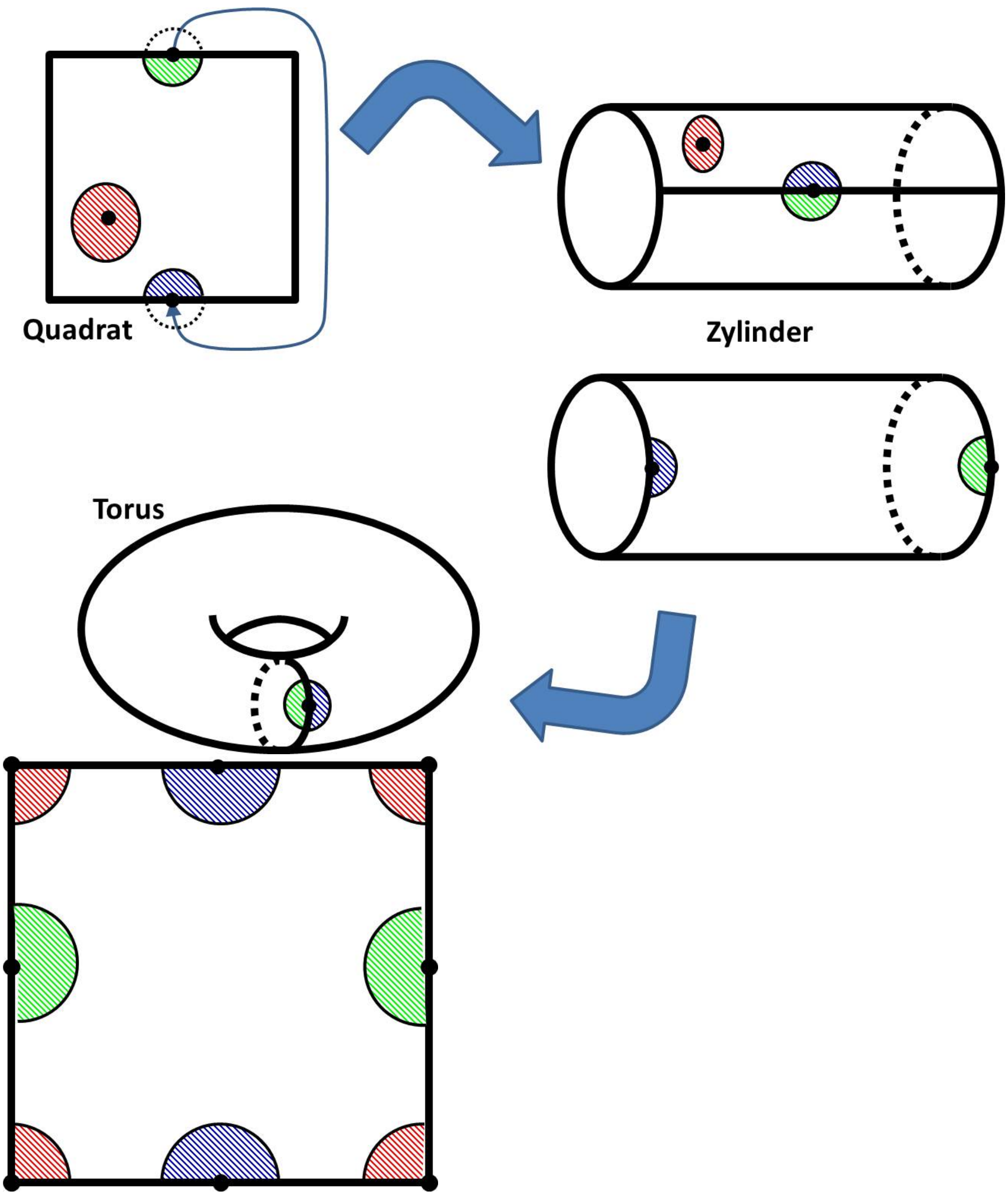
Setze $\tilde{U} := U' \cap U'', \tilde{V} := (g\big|_V)^{-1}(\tilde{U}) = g^{-1}(\tilde{U}) \cap V$. Dann ist $g\big|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ ein C^∞-Diffeomorphismus.
Behauptung: Es gilt: $\tilde{U} \cap M = g(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$.
[Beweis: folgt mit (*)].
Ist $\pi : \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}^l, (x_1, \ldots, x_{n+l}) \mapsto (x_{n+1}, \ldots, x_{n+l})$ die Projektion, so erfüllt $f := \pi \circ (g\big|_{\tilde{V}})^{-1} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^l$ die Bedingung in (a). $\square$

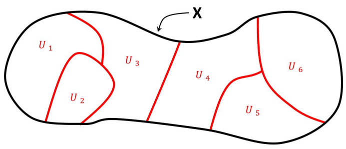
Satz II.3. *(C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+l}$ sind C^∞-Mannigfaltigkeiten) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$ und $\{\psi_\alpha : W_\alpha \to U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$ eine Menge lokaler Parametrisierungen (wie in (c)) mit $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Dann ist $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^∞-Atlas und M eine C^∞-Mannigfaltigkeit.*

2 Quotientenräume

Motivation:




Quadrat
Zylinder
Torus

Erinnerung Jede Partition 

S einer Menge X bestimmt eine Äquivalenzrelation auf X (und umgekehrt).
Menge der Äquivalenzklassen (oder auch: Quotient von X nach S) ist X/S.
Zusätzlich existiert dann die Quotientenabbildung $\pi \colon X \to X/S, x \mapsto [x]$

Bemerkung II.3. Ist X ein topologischer Raum und X/S ein Quotientenraum von X, so gibt es auf X/S eine natürliche Topologie:

Definition II.8 (Quotienten(raum)topologie)**.** Eine Teilmenge $U \subset X/S$ heißt offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X

Bemerkung II.4. Alle im Sinne dieser Definition offenen Teilmengen von X/S definieren dann eine Topologie auf X/S und die Menge X/S zusammen mit dieser Topologie heißt Qotientenraum von X nach S.

Bemerkung II.5. $\pi \colon X \to X/S$, X/S versehen mit der Quotiententopologie, ist dann eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

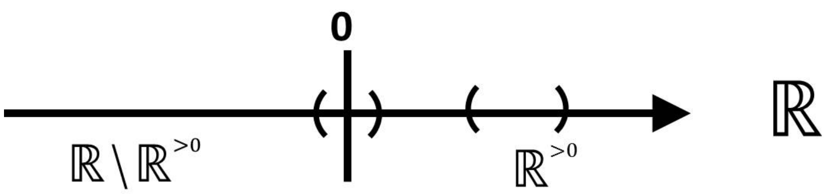
Eigenschaften der Quotiententopologie

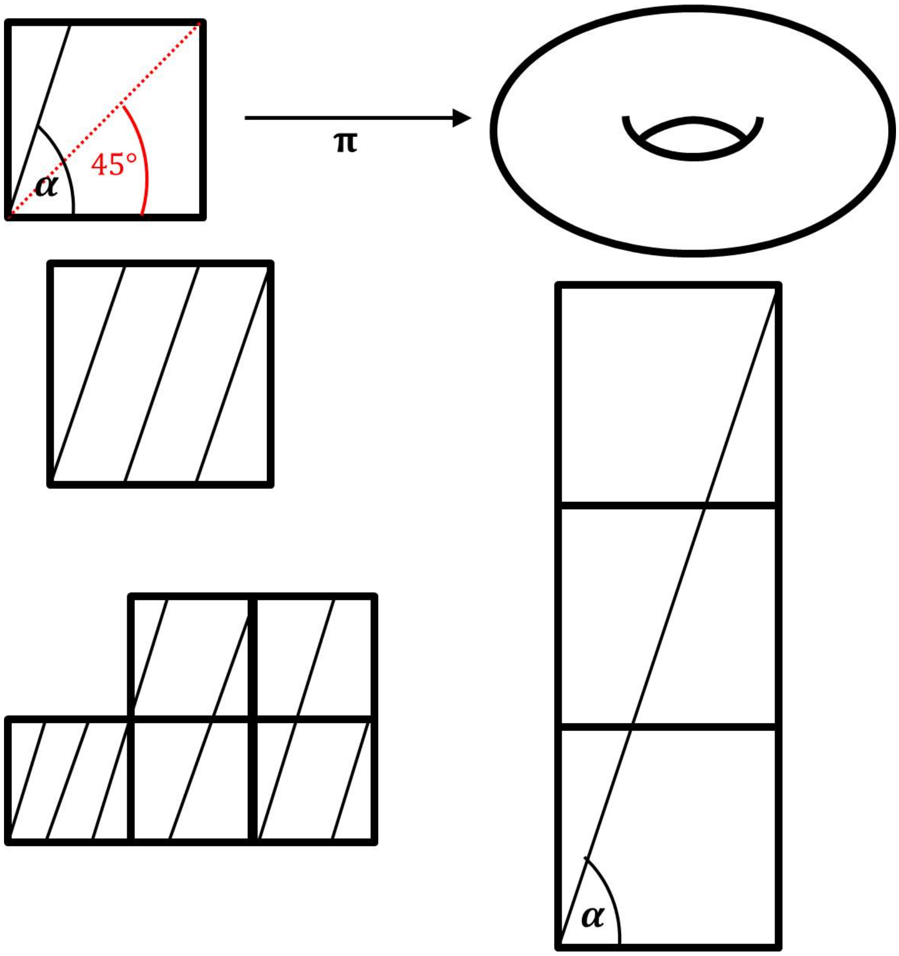
- Quotientenräume zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.
- Quotientenräume wegzusammenhängender Räume sind wegzusammenhängend.
- Quotientenräume separabler Räume sind separabel.
- Quotientenräume kompakter Räume sind kompakt.

Achtung: Die Hausdorff-Eigenschaft vererbt sich i.a. nicht!

Beispiel:

$X = \mathbb{R}, \quad S := \{\mathbb{R}^{>0}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^{>0}\}$

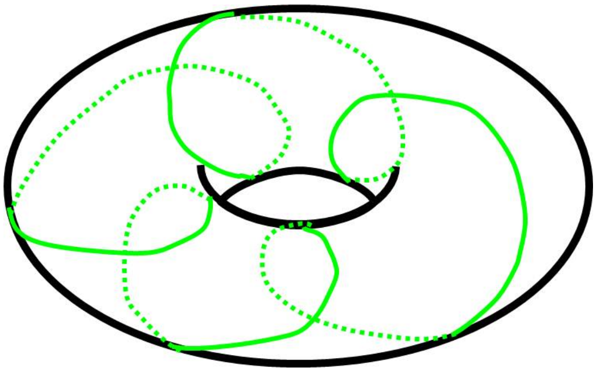




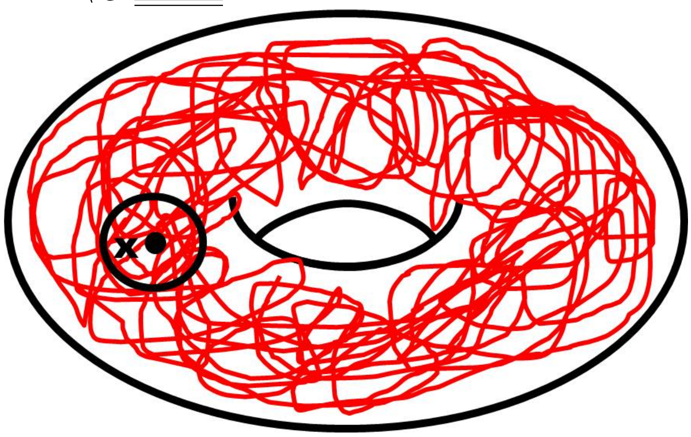
Ist α rational, so schließen sich die ins Einheitsquadrat "zurückgeholten" Kurvensegmente zu einer geschlossenen Kurve K_α auf dem Torus T^2, doch für $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ füllt die entsprechende Kurve K_α den T^2 <u>dicht</u> aus. $\rightsquigarrow$

$$\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow K_\alpha \cong S^1$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \Rightarrow K_\alpha \cong \mathbb{R} \ldots !$$



$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: <u>ÜBEL!</u>

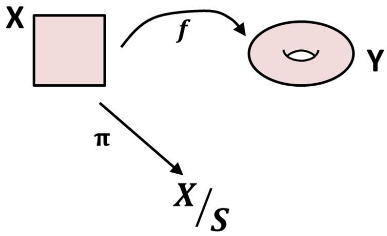


$t \mapsto e^{2\pi i t}$
T^2 ist Hausdorffsch, $T^2/\sim$ *nicht*!

TODO: Exkurs: Instabilität von Planetensystemen

3 Quotientenabbildungen

Definition II.9 (Quotientenabbildung)**.** Ist S eine Partition von X in nichtleere disjunkte Teilmengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, die auf jedem Element von S konstant ist, so existiert eine Abbildung $X/S \to Y$, die jedes Element A von S auf $f(a), a \in A$, abbildet.



Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von f nach S, in Zeichen f/S.

Interpretation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \\ X/S \arrow[ur, dashed, "f/S"'] & \end{tikzcd}$$

Allgemeiner S Partition von X, T Partition von Y
$\Rightarrow$ Jede Abbildung $f\colon X \to Y$, die jedes Element von S auf ein Element von T abbildet, induziert eine Abbildung

$$f/_{S,T}\colon X/S \to Y/T$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/S \arrow[r, "f/_{S,T}"'] & Y/T \end{tikzcd}$$

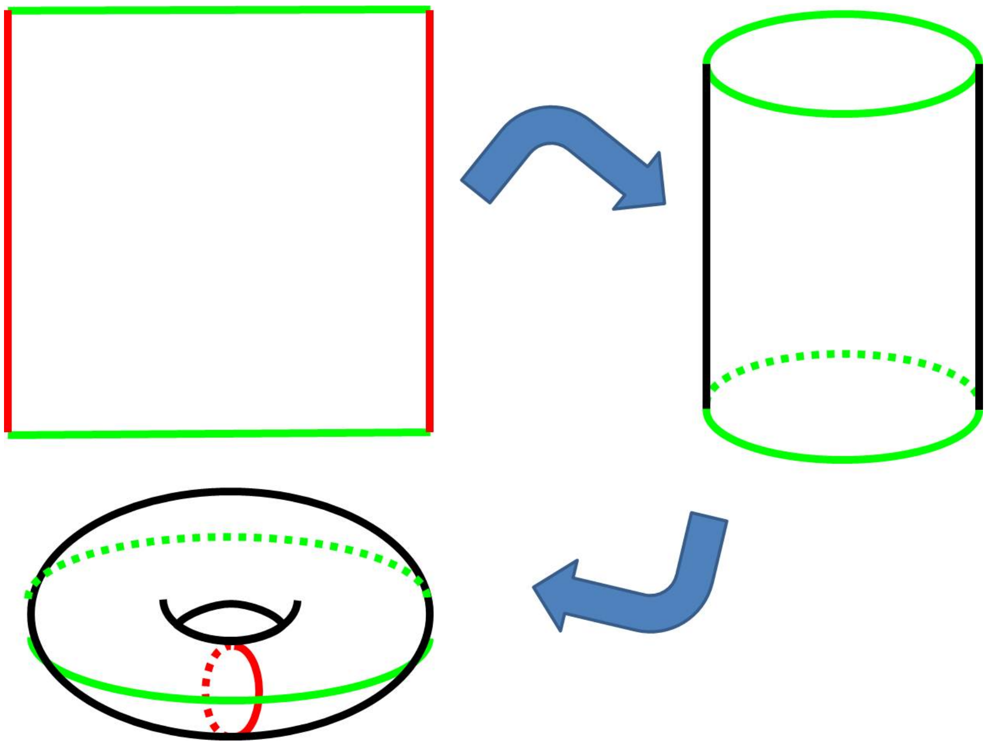
Bemerkung II.6. Sind X, Y topologische Räume, S Partition von X und $f\colon X \to Y$ eine auf Elementen von S konstante, <u>stetige</u> Abbildung, so ist auch $f/S\colon X/S \to Y$ stetig.
$f \mapsto f/S$ ist <u>dann</u> Bijektion!

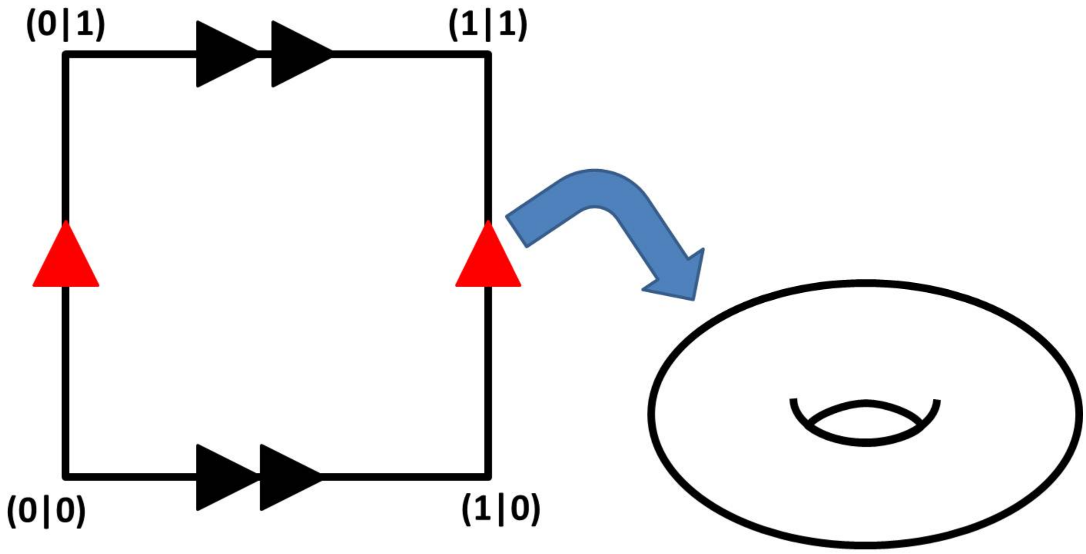
Erinnerung $F\colon X \to Y$ stetige Bijektion von einem kompakten Raum X auf einen Hausdorff-Raum $Y \Rightarrow F$ ist Homöomorphismus!

Korollar II.1. *X kompakt, Y Hausdorffsch und $f\colon X \to Y$ sei stetig $\Rightarrow$ Der injektive Quotient $f/_{S(f)}$ ist Homöomorphismus $X/_{S(f)} \to f(X)$*

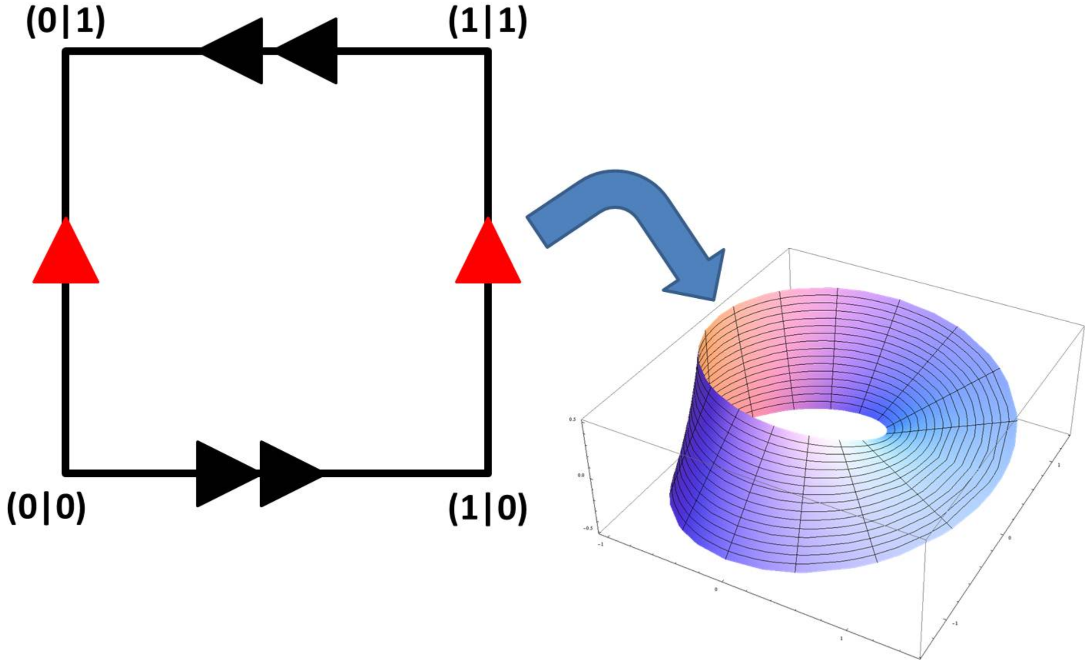
Definition II.10 (injektiver Quotient)**.** Jede Abbildung $f\colon X \to Y$ definiert eine Partition $S = S(f)$ von X, und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von Y unter f.
Die induzierte Abbildung $f/_{S(f)}\colon X/_{S(f)} \to Y$ ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von f.

Beispiel:





$(x, 0) \sim (x, 1)$
$(0, y) \sim (1, y)$



$(x, 0) \sim (1 - x, 1)$

Möbiusband

Bild Möbiusband von:

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:M%C3%B6biusband.png&filetimestamp=20090802105255

4 Konstruktionen von Quotientenräumen

Im Folgenden "Kontrahieren", "Anheften", "Verkleben" etc.

Definition II.11 (Kontraktion)**.** Die Quotientenmenge eines topologischen Raumes X bzgl. einer Partition S von X, welche aus einer Teilmenge A von X und allen Einpunktmengen aus $X \backslash A$ besteht,

$$S = A \cup \{\{x\} \mid x \in X \backslash A\}$$

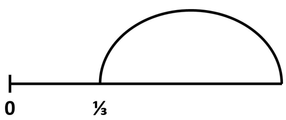
heißt Kontraktion (von X bzgl. $X \backslash A$), und für X/S schreibt man einfach X/A.

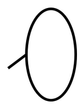
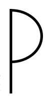
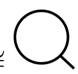
Beispiel:

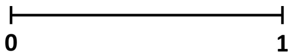
- $X = [0,1], \quad A = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ 

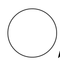
$$X/A \cong I = [0,1]$$

- $$X = [0,1], A = \{\frac{1}{3}, 1\}$$

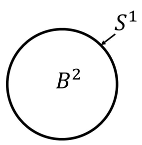
$\Rightarrow X/A \cong$ 

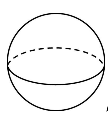
$\cong$  $\cong$  $\cong$ 

- $X = [0,1], A = \{0,1\}$ 

$$\Rightarrow X/A \cong$$  S^1

- $X = \overline{B^n} = D^n$ abgeschlossener Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ mit Rand S^{n-1} und Innerem B^n. $A := S^{n-1} = \partial \overline{B^n}, X = \overline{B^n}$

$X/A = S^n$ 

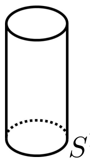
$\overline{B^2}/_{S^1} =$  S^2

Formal: $S = S^{n-1} \cup \{\{x\} \mid x \in B^n = (\overline{\mathring{B}^n})\}$ [4]
Mit anderen Worten: Kontraktion des Randes des abgeschlossenen n-Balles liefert die n-Sphäre!

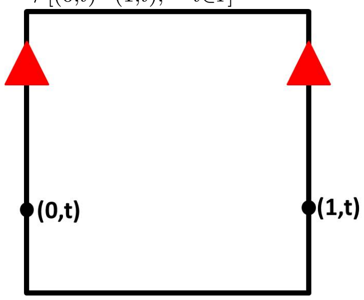
Bemerkung II.7. Wie beschreibt man Partitionen S von X möglichst bequem?
Oftmals einfach durch die entsprechende Äquivalenzrelation, die S liefert, und hier dann nur durch die nicht-trivialen Relationen.
Für X/S schreibt man dann oft nur $X/_{[\text{Relation 1, Relation 2, } \dots]}$.

Beispiel:

- Für $X = I = [0,1]$ ist $I/_{[0\sim 1]} \cong S^1$.

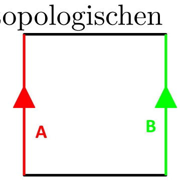


- $I^2/_{[(0,t)\sim(1,t), \quad t\in I]} \cong S^1 \times I$



Andere Sichtweise: Der Zylinder $S^1 \times I$ entsteht aus dem Quadrat I^2 durch geeignetes "Verkleben" zweier Kanten.

Definition II.12 (Verkleben)**.** Sind A und B disjunkte Teilräume eines topologischen Raumes X und ist $f\colon A \to B$ ein Homöomorphismus,



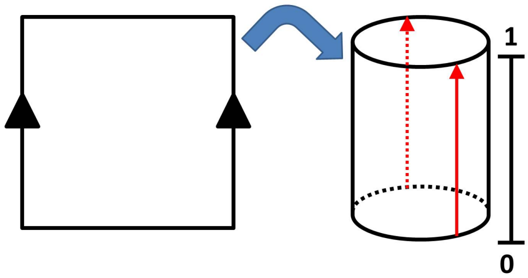
so heißt der Übergang zum Quotientenraum, der durch die Partition von X in die Einpunktmengen von $X \backslash (A \cup B)$ und die Zweipunktmengen $\{x, f(x)\}, x \in A$ gegeben ist, Verkleben (von X längs A und B via des Homöomorphismus f) und dieser Prozess einfach auch Verkleben von A und B.
Notation:

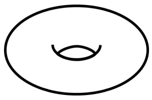
$$X/_{[a\sim f(a)]} \quad (\text{mit } a \in A)$$

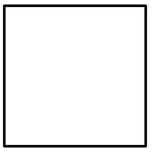
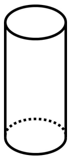
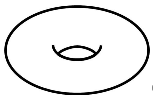
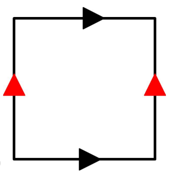
[4] S ist die Partition.

Beispiel:

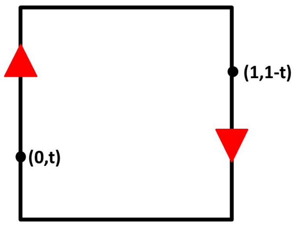
$$S^1 \times I$$



$S^1 \times I/_{[(z,0)\sim(z,1), z\in S^1]} \cong$ 

 $\rightsquigarrow$  $\rightsquigarrow$  $(TODO: umgekehrtes \rightsquigarrow)$ 

Beispiel:



, d.h.: Betrachte $I^2/_{[(0,t)\sim(1,1-t)]}$ und verklebe also die gegenüberliegenden Kanten von I^2 in <u>entgegengesetzter</u> Richtung $\rightsquigarrow$

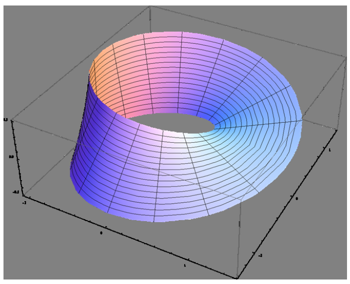
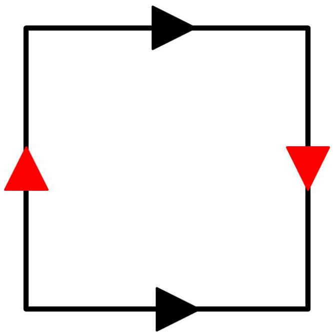
Möbiusband 

Bild Möbiusband von:

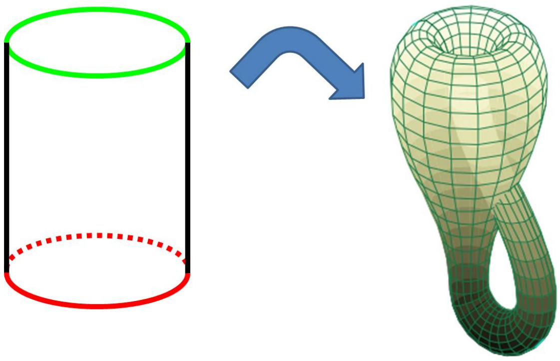
http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:M%C3%B6biusband.png&filetimestamp=20090802105255

Beispiel: Die Kleinsche Flasche/ der Kleinsche Schlauch

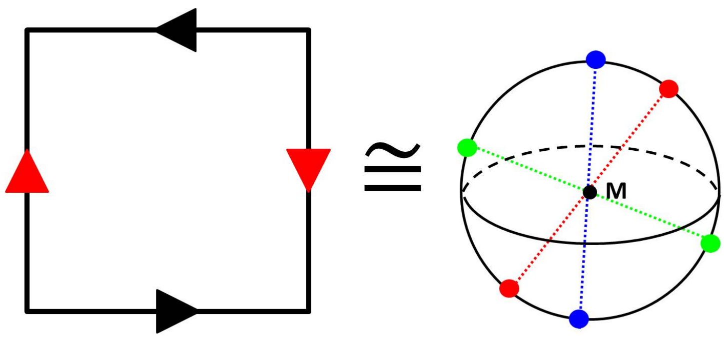
$$K := I^2/_{[(t,0)\sim(t,1),(0,t)\sim(1,1-t)]}$$



ist Quotient des Zylinders bzw. Möbiusbandes.



Beispiel: Die projektive Ebene



$\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{RP}^2$)

Definition II.13 (n-dimensionaler projektiver Raum)**.** Der n-dimensionale reell-projektive Raum[5] ist

$$\mathbb{RP}^n := S^n/_{[x\sim -x]}$$

[5]Anschaulich (projektive Geometrie): Die Menge aller Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$

und der n-dimensionale komplex-projektive Raum ist

$$\mathbb{CP}^n := \underbrace{S^{2n+1}}_{\subset \mathbb{C}^{n+1}} / _{[v \sim \lambda v, \lambda \in S^1]}$$

TODO: Exkurs: Video von einer Kleinschen Flasche (Klein Bottle Adventures)

TODO: Exkurs: Homotopietheorie, Homologietheorie

Kapitel III

Konzepte der Algebraischen Topologie

1 Die Fundamentalgruppe

Erinnerung Homotopie von Abbildungen
X, Y topologische Räume, $f, g\colon X \to Y$ stetig.
Eine stetige Abbildung

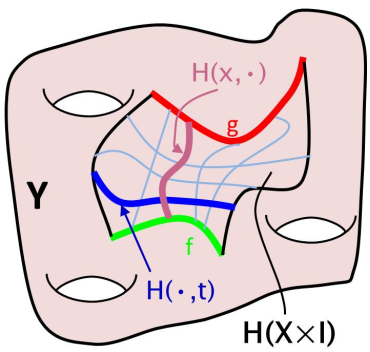
$$H\colon X \times I \to Y, (x,t) \mapsto H(x,t)$$

mit

$$H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

heißt Homotopie von f nach g, und f und g dann homotop, in Zeichen:

$$f \simeq g.$$



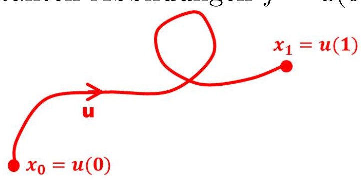
$$H \hat{=} (h_t)_{t\in I}, h_t\colon X \to Y$$

$$h_0 = f, \quad h_1 = g$$

Wege $u\colon I \to X$, u stetig, spielen eine ganz wesentliche Rolle im Homotopiebegriff für Abbildungen.

Beispiel:

- Jeder Weg u ist selbst eine Homotopie, und zwar zwischen den konstanten Abbildungen $f \equiv u(0), g \equiv u(1)$.



- Jede Homotopie besteht aus Wegen:
  Ist $(h_t)_{t\in I}$ Homotopie $f \simeq g$ und $x \in X$, so ist $u_x \colon I \to X, t \mapsto h_t(x)$ ein Weg.

- Jede (allgemeine) Homotopie ist (selber) ein Weg:
  $\forall t \in I$ ist $h_t \colon X \to Y$ stetige Abbildung.
  $\rightsquigarrow \Gamma \colon I \to C(X,Y) := \{f \colon X \to Y \text{ stetig}\}, \quad t \mapsto h_t$

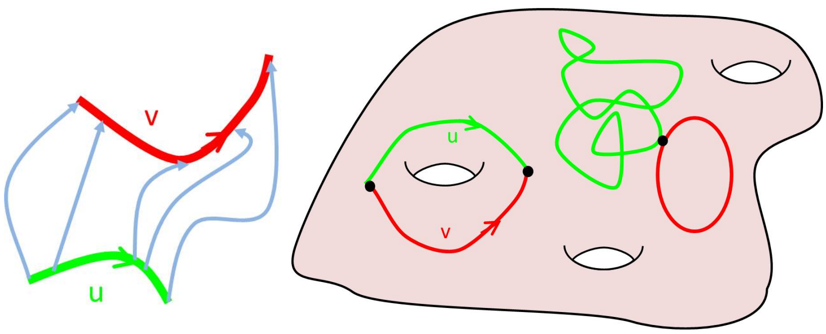
Γ ist zunächst nur eine Abbildung, doch gilt:

Bemerkung III.1. $C(X,Y)$ ist, versehen mit der sogenannten kompakt-offenen Topologie, selbst ein topologischer Raum und jede Homotopie $H \colon f \simeq g, \quad f,g \in C(X,Y)$ ist bezüglich dieser Topologie auf $C(X,Y)$ dann tatsächlich als stetige Abbildung (also Weg) $\Gamma \colon I \to C(X,Y)$, Γ wie oben, interpretierbar.
Die kompakt-offene Topologie auf $C(X,Y)$ wird erzeugt von allen Mengen der Form $\{\varphi \in C(X,Y) \mid \varphi(A) \subset B\}, \quad A \subset X$ kompakt, $B \subset Y$ offen

TODO: Exkurs: Anwendungen von $C(X,Y)$ mit dieser Topologie: Lösen von DGL, DGL-Systemen usw. Homotopie von Wegen ist zunächst nicht sehr interessant:

Bemerkung III.2. Zwei Wege $u, v \colon I \to X$ sind homotop

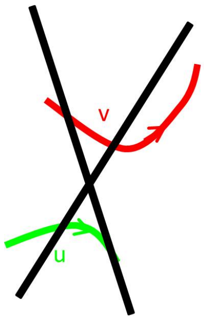
$\Leftrightarrow$ $u(I)$ und $v(I)$ liegen in derselben Wegzusammenhangskomponente

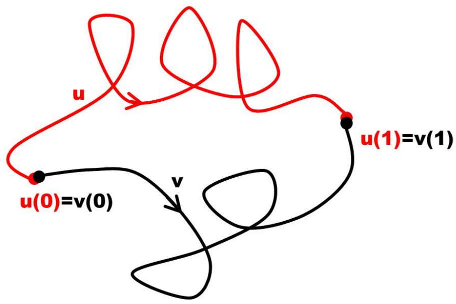


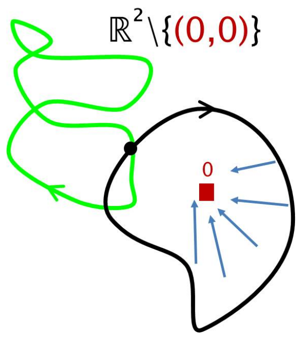
Deshalb neues Konzept:

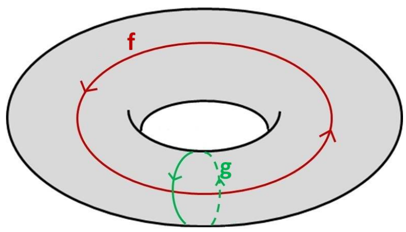
Definition III.1 (homotop bezüglich der Endpunkte)**.** Zwei Wege $u, v\colon I \to X$, X topologischer Raum, heißen <u>homotop</u> (<u>bezüglich der Endpunkte</u>) :⇔

1. $u(0) = v(0), u(1) = v(1)$
2. $\exists$ Homotopie $H\colon u \simeq v$ (mit $H(0,t) \equiv u(0), H(1,t) \equiv u(1)$)



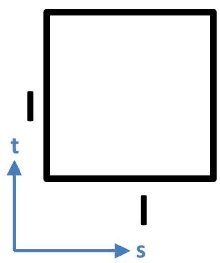


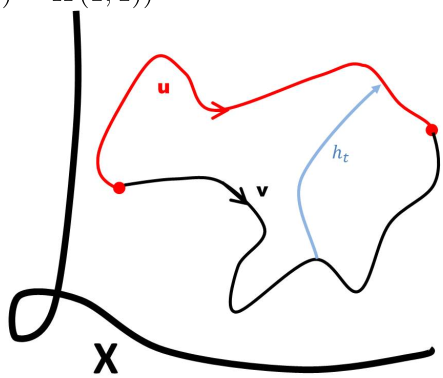




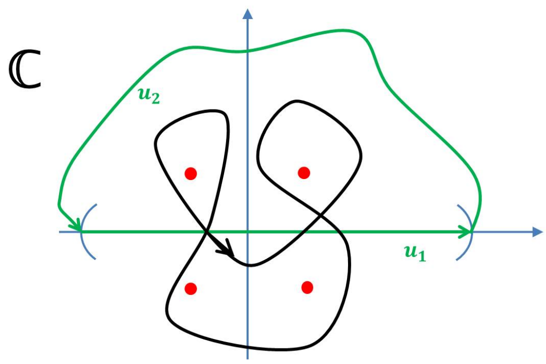
$u, v\colon \underbrace{I}_{=X} \to \underbrace{X}_{=Y}$

$H\colon I \times I \to X, (s,t) \mapsto H(s,t)$
$u = u(s), v = v(s)$
$H(s,0) = u(s), H(s,1) = v(s)$
$H(0,t) \equiv u(0)(= v(0) = H(0,0))$
$H(1,t) \equiv u(1)(= v(1) = H(1,1))$





Beispiel:



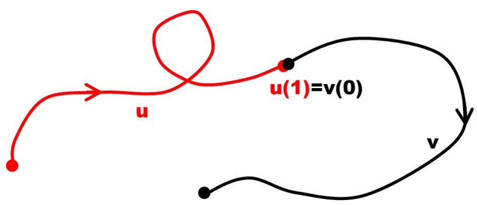
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}$[1]

TODO: Exkurs: Residuensatz, Wegintegrale

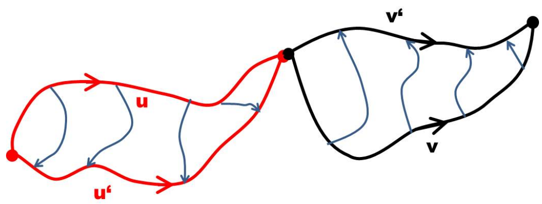
Bemerkung III.3. Die Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation und für die Homotopieklasse eines Weges u schreibt man $[u]$.

Definition III.2 (Produkt von Wegen)**.** Sind u, v Wege in X mit $u(1) = v(0)$, so heißen u und v <u>zusammensetzbar</u> oder <u>aneinanderfügbar</u> und ihr <u>Produkt</u> $u \cdot v$ ist definiert als

$$(u \cdot v)(s) := \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ v(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Bemerkung III.4. Gilt $u \simeq u'$ und $v \simeq v'$ und ist $u \cdot v$ definiert, so auch $u' \cdot v'$, und $u' \cdot v$ ist dann auch homotop zu $u \cdot v$.



<u>Denn</u>

$$u_t \colon I \to X \text{ sei Homotopie } u \simeq u',$$

$$v_t \colon I \to X \text{ sei Homotopie } v \simeq v'$$

$$\Rightarrow u_t \cdot v_t \colon I \to X \text{ ist Homotopie } uv \simeq u'v'$$

[1]Explodiert für $x^4 = -1$ (Singularität)

Formal(er): $u \cdot v$ ist definiert $\Rightarrow u(1) = v(0)$

$$u \simeq u' \Rightarrow u'(1) = u(1), \quad v \simeq v' \Rightarrow v'(0) = v(0)\big(= u(1) = u'(1)\big)$$

$$\Rightarrow u' \cdot v' \text{ ist definiert.}$$

Homotopie H von $u \cdot v$ zu $u' \cdot v'$ ist dann die stetige Abbildung

$$H\colon I \times I \to X \text{ mit } (s,t) \mapsto \begin{cases} H^{u,u'}(2s,t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H^{v,v'}(2s-1,t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

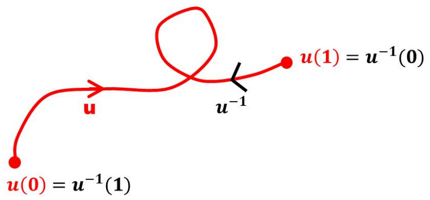
wobei $H^{u,u'}\colon u \simeq u'$, $\quad H^{v,v'}\colon v \simeq v'$.
Folgerung: Setzt man für aneinanderfügbare Wege u, v

$$[u] \cdot [v] := [u \cdot v],$$

so ist dieses Produkt wohldefiniert!

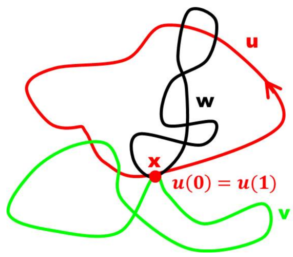
Definition III.3 (Konstanter Weg, Inverser Weg, Geschlossener Weg)**.**

- Für $x \in X$ sei $c_x\colon I \to X$ mit $c_x \equiv x$ der konstante Weg in $x \in X$.
- Für einen Weg $u\colon I \to X$ sei $u^{-1}\colon I \to X, s \mapsto u(1-s)$, der zu u inverse (oder: umgekehrt durchlaufene) Weg.



- $u\colon I \to X$ heißt geschlossener Weg (oder: Schleife) in $x \in X$

$$:\Leftrightarrow u(0) = x = u(1)$$



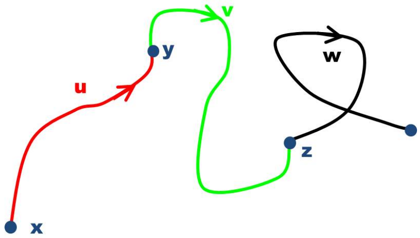
Bemerkung III.5. Geschlossene Wege (in x) sind immer aneinanderfügbar.

Definition III.4 (nullhomotop, einfach zusammenhängend)**.**

- Ein geschlossener Weg u in x heißt nullhomotop
$:\Leftrightarrow [u] = [c_x]$

- X heißt einfach zusammenhängend $:\Leftrightarrow$
  X ist wegzusammenhängend und
  jeder geschlossene Weg u in X ist nullhomotop (zu $c_{u(0)}$).

Lemma III.1. *Für Wege $u, v, w\colon I \to X$*



mit $u(0) = x, u(1) = y = v(0), \quad v(1) = z = w(0)$
gilt

1. $[u] \cdot [u^{-1}] = [u \cdot u^{-1}] = [c_x]$
2. $[u^{-1}] \cdot [u] = [u^{-1} \cdot u] = [c_y]$
3. $[u] \cdot [c_y] = [u] = [c_x] \cdot [u]$
4. $[u] \cdot ([v] \cdot [w]) = ([u] \cdot [v]) \cdot [w]$

Beweis. (von (1), Rest analog)
Es sei H die Homotopie

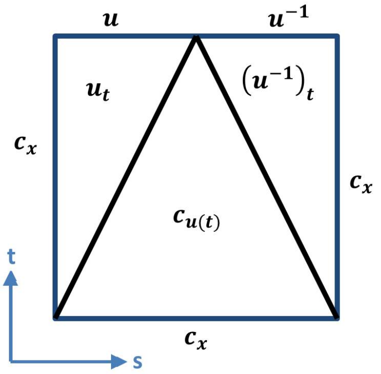
$$(s,t) \mapsto \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ u(t) & \frac{t}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ u(2-2s) & 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Es gilt

$$(u \cdot u^{-1})(s) = \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ u^{-1}(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

H ist stetig und erfüllt

1. $H(s,0) = u(t) = u(0) = x = c_x(s)$
2. $H(s,1) = (u \cdot u^{-1})(s)$, denn
   - $H(s,1)\big|_{[0,\frac{1}{2}]} = u(2s) = (u \cdot u^{-1})\big|_{[0,\frac{1}{2}]}$
   - $H(s,1)\big|_{[\frac{1}{2},1]} = u(2-2s) = u(1-(2s-1)) = u^{-1}(2s-1) = (u \cdot u^{-1})\big|_{[\frac{1}{2},1]}$
3. $H(0,t) = u(0) = x = c_x(0) = (u \cdot u^{-1})(0)$
4. $H(1,t) = u(2-2) = u(0) = x = c_x(1) = (u \cdot u^{-1})(1)$



<u>Schematisch:</u>
Also ist H Homotopie von c_x nach $(u \cdot u^{-1})$ und

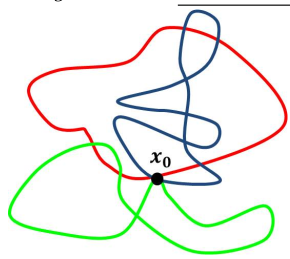
$$[u] \cdot [u^{-1}] = [u \cdot u^{-1}] = [c_x]$$

$\square$

Satz III.1. *Für einen topologischen Raum X und $x_0 \in X$ ist*

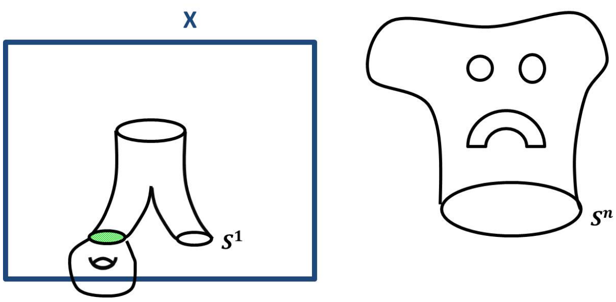
$$\pi_1(X, x_0) := \{[u] \mid u \colon I \to X \text{ geschlossener Weg in } x_0\}$$

bezüglich $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$ eine Gruppe, die sogenannte <u>Fundamentalgruppe</u>



oder <u>erste Homotopiegruppe</u> von X in x_0.
Neutrales Element ist $1 = 1_{x_0} := [c_{x_0}]$
und Inverses zu $\alpha = [u]$ ist $\alpha^{-1} = [u^{-1}]$.

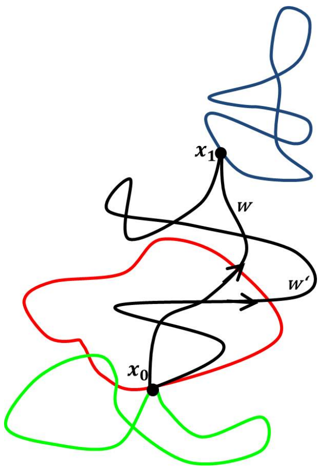
TODO. Exkurs: Kobordismus von Mannigfaltigkeiten, Stringtheorie, ... [2]



[2] http://www.scienceblogs.de/mathlog/2008/03/physik-topologie-logik-und-berechenbarkeit.php

Satz III.2 (Unabhängigkeit vom Basispunkt)**.** *Ist $w\colon I \to X$ Weg von x_0 nach x_1, so ist die Abbildung*

$$w_{\#}\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1), \quad [u] \mapsto [w^{-1} \cdot u \cdot w]$$



ein Gruppen-Isomorphismus.

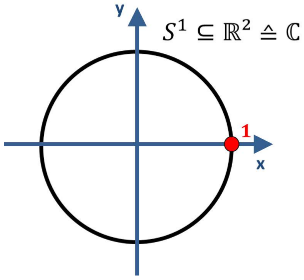
Beweis. Lemma $\Rightarrow w_{\#}$ ist Homomorphismus und $(w_{\#})^{-1} = (w^{-1})_{\#}$
$\Rightarrow w_{\#}$ ist Isomorphismus! □

Bemerkung III.6. Dieser Isomorphismus hängt von w ab und ist deshalb im Allgemeinen nicht kanonisch! Kanonisch ist er, falls π_1 abelsche Gruppe ist!
$[w^{-1}][u \cdot v][w] = [w^{-1}uw][w^{-1}vw] \Rightarrow w_{\#}$ ist Homomorphismus.

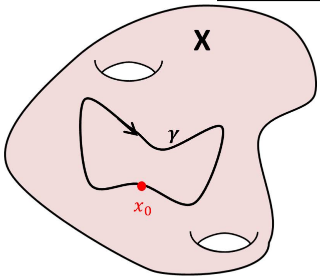
Erinnerung $\forall$ topologischen Räume X und $x_0 \in X$ ist $\pi_1(X,x_0)$, die Menge der Homotopieklassen $[u]$ geschlossener Wege in x_0, mit der Multiplikation $[u] \cdot [v] = [u \cdot v]$ eine Gruppe, die sogenannte Fundamentalgruppe von X in x_0.

1.1 Geschlossene Wege als Abbildungen $S^1 \to X$

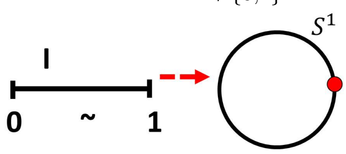
Definition III.5 (Schleife)**.** Es sei $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $1 := (1,0) \in S^1$



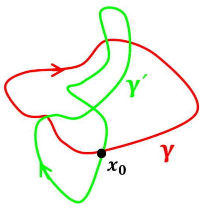
Eine stetige Abbildung $\gamma\colon S^1 \to X, X$ topologischer Raum, $x_0 \in X$, mit $\gamma(1) = x_0$, heißt Schleife in x_0.



Bemerkung III.7. Assoziiert man zu einer Schleife γ in $x_0 \in X$ die Komposition mit der Exponentialabbildung $\exp\colon I \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i \cdot t}(= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$, so ist $\gamma \circ \exp$ ein gewöhnlicher geschlossener Weg in x_0.
Tatsächlich kann jeder gewöhnliche geschlossene Weg in x_0 auf diese Art aus einer Schleife in x_0 erhalten werden:
Denn ist $u\colon I \to X$ geschlossener Weg in $x_0 \in X$, so existiert eine Quotientenabbildung $\tilde{u}\colon I/_{\{0,1\}} \to X$ und $I/_{\{0,1\}} \cong S^1$!



Definition III.6 (schleifenhomotop)**.** Zwei Schleifen γ, γ' in x_0 heißen (schleifen-)homotop, falls es eine Homotopie zwischen ihnen gibt, die auf $1 \in S^1$ stationär ist, also $\gamma(1) = x_0 = \gamma'(1)$ die ganze Zeit festhält.



Bemerkung III.8. Zwei Schleifen in x_0 sind genau dann homotop, wenn die entsprechenden gewöhnlichen geschlossenen Wege homotop sind.
Denn: " $\Rightarrow$ " Ist $H\colon S^1 \times I \to X$ eine Homotopie von Schleifen, so definiert

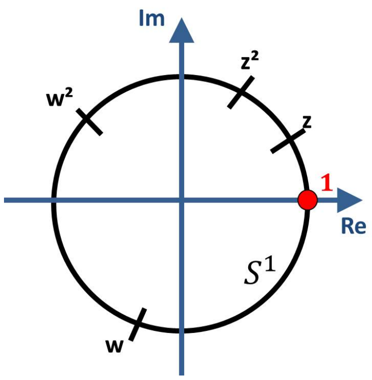
$$H'\colon I \times I \to X, \quad (s,t) \mapsto H(e^{2\pi i s}, t)$$

eine Homotopie geschlossener Wege.
"$\Leftarrow$" Homotopien von Schleifen sind nichts anderes als Quotientenräume von Homotopien von gewöhnlichen geschlossenen Wegen nach der Partition des Einheitsquadrates $I \times I$, die von $(0,t) \sim (1,t)$ erzeugt wird.

Bemerkung III.9. $\pi_1(X, x_0)$ lässt sich dann auch vollständig über die Multiplikation von Schleifen in x_0 definieren!

Beispiel:

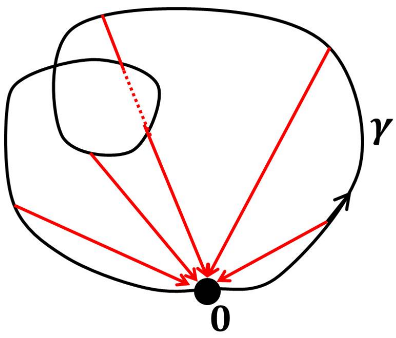
Sind γ, γ' Schleifen in x_0, die zu den Wegen $u, u'\colon I \to X$ (mit $u(0) = u(1) = x_0 = u'(0) = u'(1)$) gehören, so entspricht dem Produkt $u \cdot u'$ die Abbildung
$$S^1 \ni z \mapsto \begin{cases} \gamma(z^2) & Im(z) \geq 0 \\ \gamma'(z^2) & Im(z) \leq 0 \end{cases}$$



1.2 Erste Beispiele von Fundamentalgruppen

Beispiel:

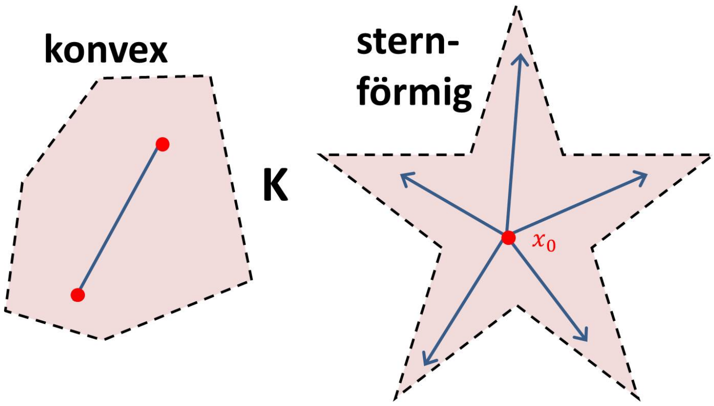
$\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{0\}$ (ist trivial)
Denn zwischen jeder Schleife in $0 \in \mathbb{R}^n$ und c_0 gibt es eine Homotopie.



Bemerkung III.10. Für triviale, also nur aus einem Element bestehende, Fundamentalgruppe schreibt man oft auch $\pi_1 = \{1\}$ (statt "$= \{0\}$").

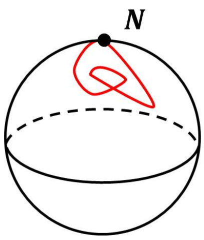
Beispiel:

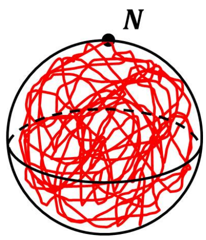
Für jede konvexe oder auch sternförmige Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und alle $x_0 \in K$ ist $\pi_1(K, x_0)$ trivial.



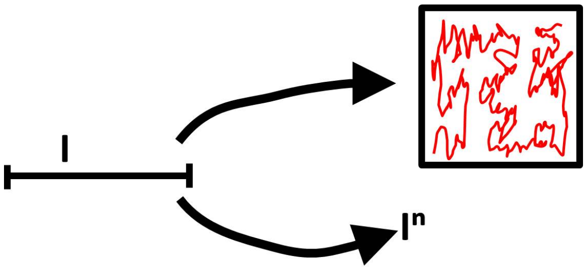
Beispiel:

$\pi_1 \left(S^n, N := (0, \dots, 0, 1) \right) = \{0\} \quad \forall n \geq 2$





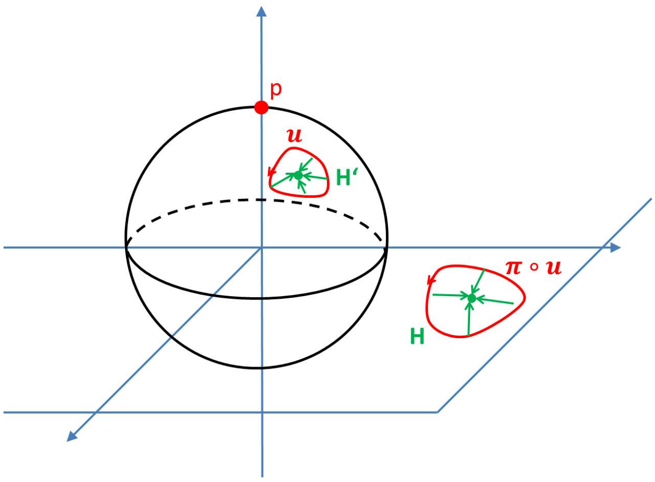
Achtung: $\forall n \in \mathbb{N}$ existieren stetige Surjektionen $I \to S^n$



Frage: Gibt es stetige Surjektionen $I \to S^n$, die nullhomotop sind? Ja: Ist u eine, so ist $u \cdot u^{-1}$ auch eine, doch ~ 0!

Zwei Schritte zum Beweis von $\pi_1(S^n, N) = \{0\}$:

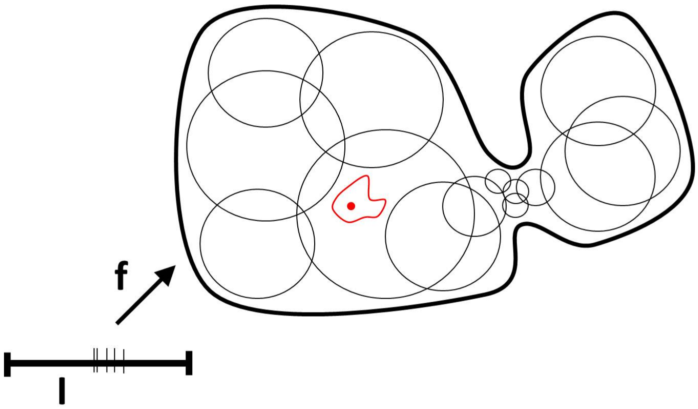
1. Jeder geschlossene Weg $u\colon I \to S^n$ mit $u(I) \neq S^n$ ist für $n \geq 2$ nullhomotop.
   Denn: Es sei $p \in S^n \backslash u(I)$ und $\pi\colon S^n \backslash \{p\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion (von p aus). Dann ist $\pi \circ u$ geschlossener Weg in $\mathbb{R}^n$ und nullhomotop in $\mathbb{R}^n$.

   Ist H Homotopie, so ist $H' := \pi^{-1} \circ H$ eine Homotopie, die u auf S^n zu einer konstanten Kurve homotopiert, d.h. $u \sim c_{x_0}$.

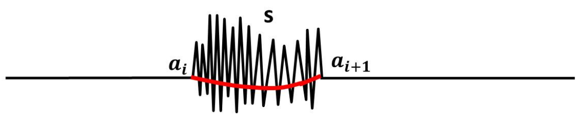
2. Jeder stetige Weg auf S^n mit $n \geq 2$ ist homotop zu einem nicht surjektiven Weg auf S^n!

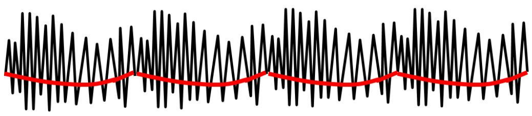
Erinnerung (Lebesguelemma) Ist $f\colon Z \to Y$, Z kompakter metrischer Raum, Y topologischer Raum und Γ eine offene Überdeckung von Y, so existiert $\delta > 0$ mit:
$\forall A \subset Z$ mit $diam(A) < \delta$ ist $f(A)$ in einem Element von Γ (ganz) enthalten.



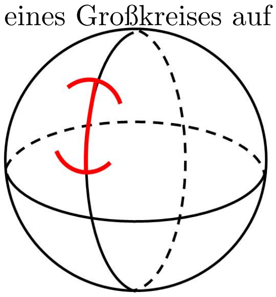
Korollar III.1. *Ist $s\colon I \to X$ Weg und Γ offene Überdeckung von X, so existiert eine Folge von Punkten*
$a_1, \ldots, a_N \in I$ mit $0 = a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = 1$ mit
$s([a_i, a_{i+1}])$ ist in einem Element von Γ enthalten.

Lemma III.2. *$\forall n \geq 2$ gilt: $\forall$ Wege $s\colon I \to S^n$ existiert eine endliche Unterteilung von I in Teilintervalle, so dass die Einschränkung von s auf jedes der Teilintervalle homotop zu einer Abbildung mit nirgendwo dichtem Bild ist, und zwar durch eine Homotopie, die auf den Endpunkten des Intervalls fixiert ist.*





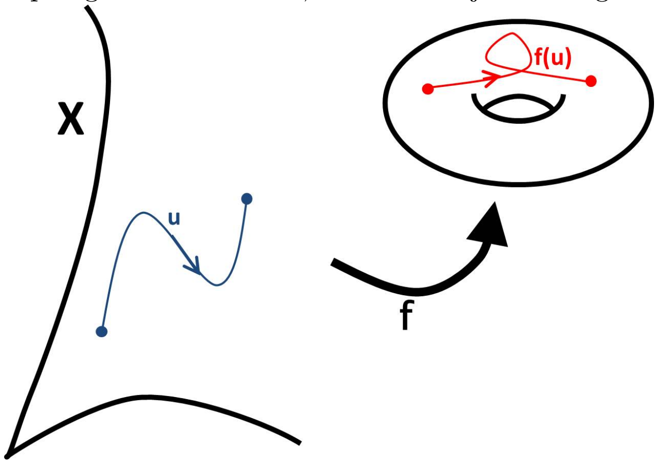
Beweis. Denn: Sei $x \in S^n$ beliebig und überdecke S^n durch $U := S^n \backslash \{x\}$ und $V := S^n \backslash \{-x\}$. Korollar zu Lebesgue-Lemma $\Rightarrow \exists a_0, \ldots, a_N \in I, 0 = a_1 < \ldots < a_N = 1\colon \forall i$ liegt $s([a_i, a_{i+1}])$ ganz in U oder V.
$U, V \cong \mathbb{R}^n$ (hier sind alle Wege homotop) $\Rightarrow \forall i\colon s\big|_{[a_i,a_{i+1}]} \sim$ Weg, der Teil eines Großkreises auf S^n ist.



Für $n \geq 2$ füllt letzterer nicht S^n. $\square$

1.3 Induzierte Homomorphismen

Bemerkung III.11. Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, so liefert jeder Weg in X einen Weg in Y,



und für aneinanderfügbare Wege $u, v\colon I \to X$ gilt offenbar $f \circ (u \cdot v) = (f \circ u) \cdot (f \circ v)$.
Sind u und v ferner homotop, so auch $f \circ u$ und $f \circ v$, denn ist $H\colon I \times I \to X$ eine Homotopie zwischen u und v, so ist $f \circ H\colon I \times I \to Y$ eine Homotopie zwischen $f \circ u$ und $f \circ v$.
Betrachtet man insbesondere geschlossene Wege u in $x_0 \in X$, so definiert $[u] \mapsto [f \circ u]$ also einen Homomorphismus $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, den sogenannten von f induzierten Homomorphismus der Fundamentalgruppen.
Ist $g\colon Y \to Z$ eine weitere stetige Abbildung topologischer Räume, so gilt für jeden Weg u in X

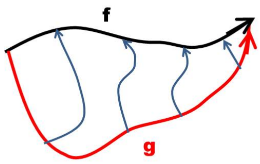
$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g \circ (f \circ u)$$

und damit für die induzierten Homomorphismen $\boxed{(g \circ f)_* = g_* \circ f_*}$
Speziell gilt für $id_X\colon X \to X, x \mapsto x$, und $x_0 \in X$

$$id_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

Folgerung Homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen! Denn: $f\colon X \cong Y$ Homöomorphismus $\Rightarrow f_*$ Isomorphismus!
$(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$, denn für $f\colon X \to Y, f^{-1}\colon Y \to X$ gilt:
$(f^{-1} \circ f)_* = id_* = (f^{-1})_* \circ f_*$

Bemerkung III.12. Tatsächlich hängt der von einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ induzierte Homomorphismus $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ sogar nur von der Homotopieklasse von $f \in C(X, Y)$ ab, und damit gilt:
Die Fundamentalgruppe eines (wegzusammenhängenden) topologischen Raumes ist nicht nur eine Homöomorphie-, sondern sogar eine Homotopie-Invariante, d.h. hängt nur vom Homotopietyp des Raumes ab!



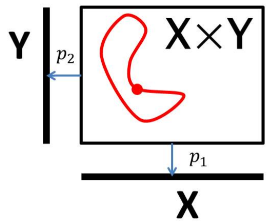
$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

1.4 Produkte

Satz III.3. *Sind X, Y topologische Räume und $x_0 \in X, y_0 \in Y$, so ist die Fundamentalgruppe des Produktraumes $X \times Y$ in (x_0, y_0) kanonisch isomorph zum Produkt der Fundamentalgruppen der Faktoren:*

$$\boxed{\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \cdot \pi_1(Y, y_0)}$$

Beweis. $p_1 \colon X \times Y \to X$ und $p_2 \colon X \times Y \to Y$ seinen die Projektionen von $X \times Y$ auf den erstem bzw. zweiten Faktor.



Ist Z irgendein anderer topologischer Raum, so entspricht jeder stetigen Abbildung $f \colon Z \to X \times Y$ bijektiv ein Paar (f_1, f_2) stetiger Abbildungen $f_1 \colon Z \to X, f_2 \colon Z \to Y$ mit $f_i = p_i \circ f, \quad i = 1, 2$
Insbesondere entspricht jeder Weg u in $X \times Y$ seinen Projektionen u_1 in X und u_2 in Y ($u_i = p_i \circ u$), und zwei Wege in $X \times Y$ sind homotop genau dann, wenn ihre Projektionen in X und in Y homotop sind.
Betrachtet man nun die Fundamentalgruppen von $X \times Y, X, Y$ in $(x_0, y_0), x_0, y_0$, so ist

$$p_* \colon \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \quad [u] \mapsto (\underbrace{[p_1 \circ u]}_{=p_{1*}[u]}, \underbrace{[p_2 \circ u]}_{=p_{2*}[u]})$$

deshalb eine Bijektion.
Fasst man $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ jetzt als direktes Produkt von Gruppen auf, so ist p_* auch ein Homomorphismus, denn p_{1_*} und p_{2_*} sind Homomorphismen, und damit, weil bijektiv, ist p_* Isomorphismus. □

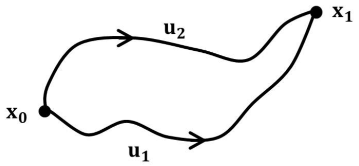
Beispiel:

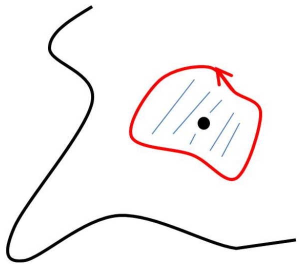
$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (siehe später)
$\Rightarrow \pi_1(T^n, x_0) \cong \mathbb{Z}^n$

Satz III.4. *Für einen wegzusammenhängenden Raum X sind äquivalent:*

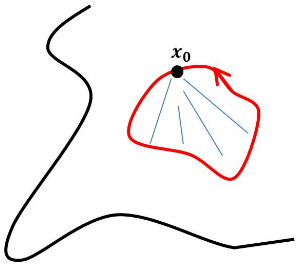
1. *$\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ (für ein und damit alle $x_0 \in X$);*
2. *Jede stetige Abbildung $\gamma \colon S^1 \to X$ ist (frei) nullhomotop;*
3. *Jede stetige Abbildung $\gamma \colon S^1 \to X$ setzt sich stetig auf D^2 fort;*

4. *Je zwei Wege u_1, u_2 in X mit gleichen Anfangs- bzw. Endpunkten sind homotop.*

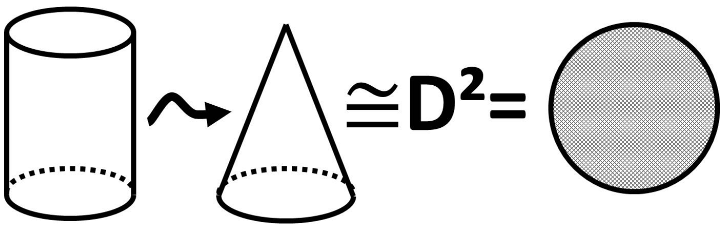




Beweis.
(1) $\Rightarrow$ (2): X einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ Jeder geschlossene Weg in X ist nullhomotop $\Rightarrow$ Jede Schleife in X ist nullhomotop $\Rightarrow$ jede Schleife in X ist frei nullhomotop
(2) $\Rightarrow$ (3): Für jede stetige Abbildung $\gamma\colon S^1 \to X$ existiert eine Homotopie $H\colon S^1 \times I \to X$ mit $H(z,0) = \gamma(z), H(z,1) = x_0$



$\Rightarrow \exists$ stetige Abbildung $H'\colon S^1 \times I/_{S^1\times\{1\}} \to X$ mit $H = H' \circ \pi$, mit $\pi\colon S^1 \times I \to \underbrace{S^1 \times I/_{S^1\times\{1\}}}_{\cong D^2}$:



(3) $\Rightarrow$ (4): Es sei G die Abbildung mit

$$G(t,0) = u_1(t), G(t,1) = u_2(t), G(0,t) = x_0, G(1,t) = x_1 \text{ für } t \in I,$$

d.h. G bildet den $\underbrace{\text{Rand von } I \times I}_{\cong S^1}$ auf X ab.
Wegen $I \times I \cong D^2$ und $\partial(I \times I) \cong S^1$, setzt sich G stetig auf ganz $I \times I$ fort

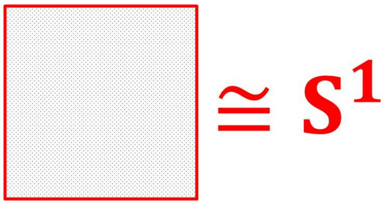


Abbildung III.1: Der Rand des Einheitsquadrates ist homöomorph zur S^1.

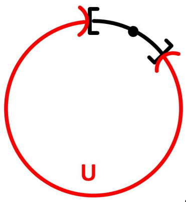
und ist Homotopie $u_1 \simeq u_2$.
(4) $\Rightarrow$ (1): klar $\square$

2 Überlagerungen

Motivation Betrachte die stetige und surjektive Abbildung

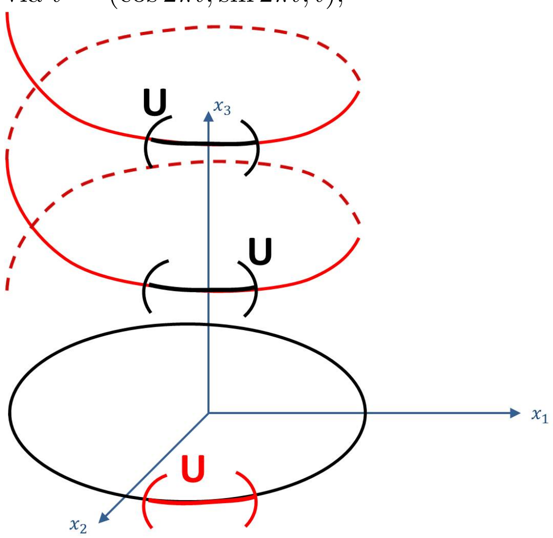
$$\pi\colon \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = e^{2\pi i t}$$

Entfernt man aus S^1 einen Punkt oder auch ein abgeschlossenes Kreisseg-



ment , so erhält man eine offene Teilmenge U von S^1, deren Urbild unter π aus disjunkten offenen Intervallen besteht, und jedes dieser Intervalle wird unter π homöomorph auf U abgebildet.

Veranschaulichung Indentifiziere $\mathbb{R}$ zunächst mit einer "Spirale" im $\mathbb{R}^3$ via $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$;



projiziere orthogonal auf die x-y-Ebene, die S^1 enthält.

Zu π gehört zudem eine Gruppe von Homöomorphismen von $\mathbb{R}$, die Gruppe der ganzzahligen Translationen

$$\tau_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + k, k \in \mathbb{Z}$$

und zwei Punkte $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ haben dasselbe Bild unter π genau dann, wenn sie sich um eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ unterscheiden.
Jede solche "Deckbewegung" ist durch eine ganze Zahl, z.B. das Bild von $0 \in \mathbb{R}$, eindeutig bestimmt.
Es gilt ferner:

$$\tau_{(k+l)} = \tau_k \circ \tau_l$$

Betrachtet man abermals $\mathbb{R}$ als via π auf S^1 "aufgewickelt", so wird jedes Intervall der Form $[0,n]$ bzw. $[-n,0]$, $n \in \mathbb{N}$, auf einen geschlossenen Weg auf S^1 abgebildet, und man erhält dadurch alle Elemente der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1)$.
Wir werden sehen: $\pi_1(S^1, 1)$ ist isomorph zur Gruppe der Deckbewegungen von $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$, also $\cong \mathbb{Z}$, weil $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist und dieses Phänomen allgemein für sogenannte "universelle" Überlagerungen gilt.

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$
$\tilde{X}/G = X, \pi_1(\tilde{X}) = \{0\} \Rightarrow \pi_1(X) \cong G$

Definition III.7 (Überlagerung)**.** (TODO: Tuschmann wegen Wegzusammenhang fragen) Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, so ist eine Überlagerung von X ein wegzusammenhängender Raum $\tilde{X}$ zusammen mit einer stetigen surjektiven Abbildung $\pi\colon \tilde{X} \to X$, so dass gilt:

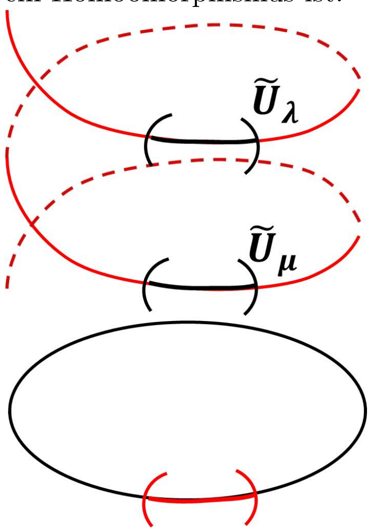
(Ü) Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung $U = U(x)$, so dass das Urbild $\pi^{-1}(U(x)) \subset \tilde{X}$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen von $\tilde{X}$ ist,

$$\pi^{-1}(U(x)) = \{\tilde{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \tilde{U}_\lambda \subset \tilde{X} \text{ ist offen}, \tilde{U}_\lambda \cap \tilde{U}_\mu = \emptyset \quad \forall \lambda \neq \mu,$$

so dass für alle $\lambda \in \Lambda$

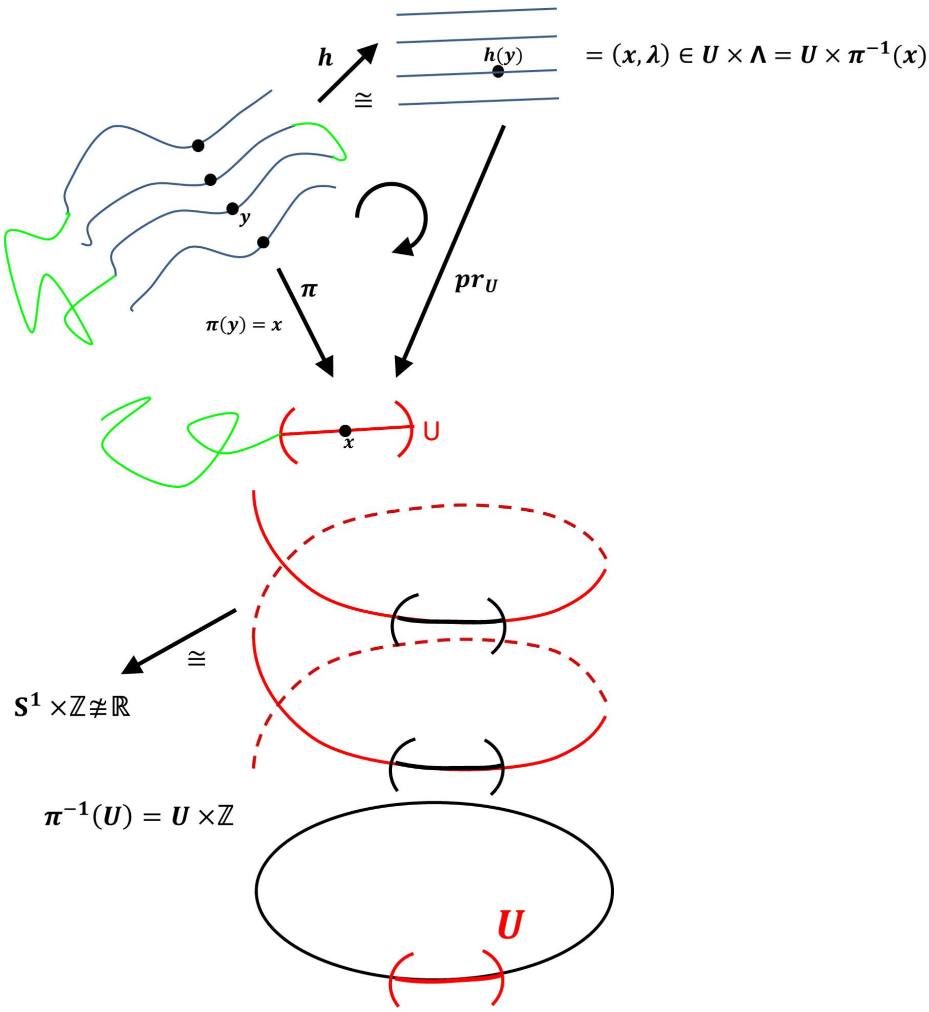
$$\pi\big|_{\tilde{U}_\lambda\colon \tilde{U}_\lambda \to U(X)}$$

ein Homöomorphismus ist.



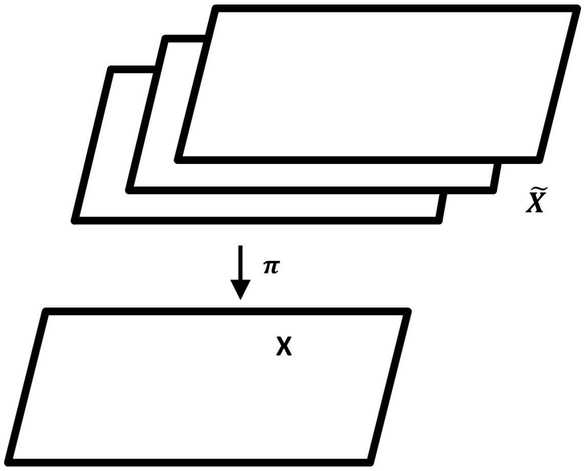
Terminologie/Sprechweisen $\pi\colon \tilde{X} \to X$ heißt auch Projektion oder Überlagerungsabbildung, $\tilde{X}$ der überlagernde und X der überlagerte Raum. Für $A \subset X$ sagt man auch, $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$ liege über A, und speziell für $x \in X$ heißt $\pi^{-1}(x) \subset \tilde{X}$ auch Faser über x. Für die Einschränkung $\pi^{-1}(A), \pi\big|_{\pi^{-1}(A)}$ von $\pi\colon \tilde{X} \to X$ auf $A \subset X$ schreibt man auch kurz $\tilde{X}\big|_A$. $U(x)$ wie in III.7.(Ü) heißt auch kanonische oder lokal trivialisierende Umgebung von x.

Bemerkung III.13. $\pi\colon \tilde{X} \to X$ ist also eine Überlagerung, wenn es für alle $x \in X$ offenes $U = U(x)$ und einen diskreten Raum Λ gibt, so dass $\tilde{X}\big|_U$ und $U \times \Lambda$ über U homöomorph sind:



Für Λ kann natürlich auch $\pi^{-1}(x)$ gewählt werden!

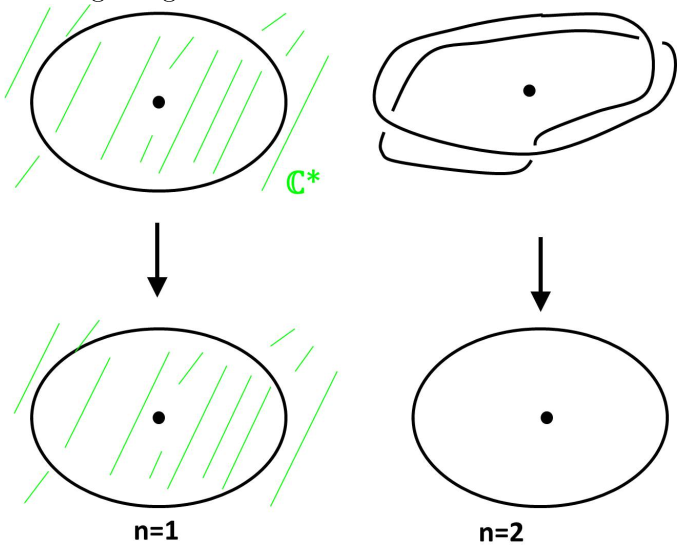
Bemerkung III.14. Die Kardinalität von $\pi^{-1}(x)$ heißt Blätterzahl der Überlagerung $\pi\colon \tilde{X} \to X$ und ist für zusammenhängendes X konstant.



Beispiel: Beispiele für Überlagerungen

1. $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$

2. $\pi\colon \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n, n \in \mathbb{N}$, ist für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Überlagerung.



Für alle $n \in \mathbb{N}$ überlagert S^1 sich aber selber, und läuft auf unendlich viele verschiedene Arten.

Mini-Exkurs: Funktionentheorie, verzweigte Überlagerung ...

Definition III.8 (Äquivalenz von Überlagerungen)**.** Zwei Überlagerungen

$\pi\colon \tilde{X} \to X, \pi'\colon \tilde{X}' \to X$ heißen äquivalent

$$:\Leftrightarrow \exists \text{ Homöomorphismus } f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}'$$

mit $\pi' \circ f = \pi$:

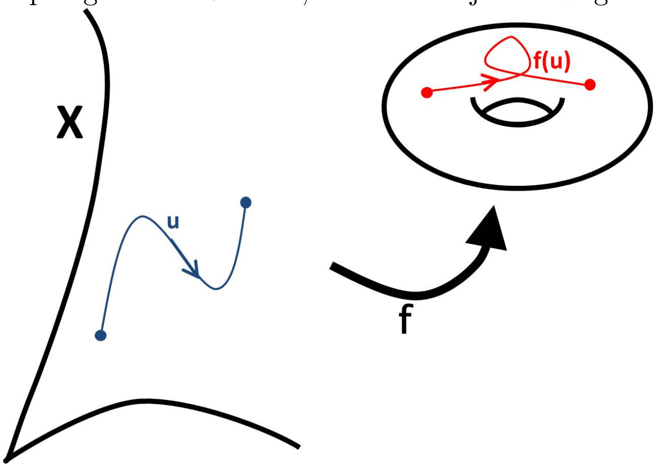
$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{X}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Beispiel:

$\mathbb{R}^2 \to \underbrace{S^1 \times \mathbb{R}}_{\cong \mathbb{C}^*}, (x,y) \mapsto (e^{2\pi i x}, y)$ und $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$ sind (wenn man $S^1 \times \mathbb{R}$ mit $\mathbb{C}^*$ identifiziert) äquivalent.

2.1 Induzierte Homomorphismen

Bemerkung III.15. Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, so liefert jeder Weg in X einen Weg in Y,



und für aneinanderfügbare Wege $u, v\colon I \to X$ gilt offenbar $f \circ (u \cdot v) = (f \circ u) \cdot (f \circ v)$.
Sind u und v ferner homotop, so auch $f \circ u$ und $f \circ v$, denn ist $H\colon I \times I \to X$ eine Homotopie zwischen u und v, so ist $f \circ H\colon I \times I \to Y$ eine Homotopie zwischen $f \circ u$ und $f \circ v$.
Betrachtet man insbesondere geschlossene Wege u in $x_0 \in X$, so definiert $[u] \mapsto [f \circ u]$ also einen Homomorphismus $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, den sogenannten von f induzierten Homomorphismus der Fundamentalgruppen.
Ist $g\colon Y \to Z$ eine weitere stetige Abbildung topologischer Räume, so gilt

für jeden Weg u in X

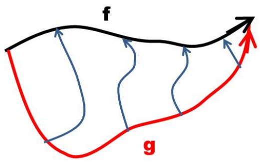
$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g \circ (f \circ u)$$

und damit für die induzierten Homomorphismen $\boxed{(g \circ f)_* = g_* \circ f_*}$
Speziell gilt für $id_X \colon X \to X, x \mapsto x$, und $x_0 \in X$

$$id_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$$

Folgerung Homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen! Denn: $f \colon X \cong Y$ Homöomorphismus $\Rightarrow f_*$ Isomorphismus!
$(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$, denn für $f \colon X \to Y, f^{-1} \colon Y \to X$ gilt:
$(f^{-1} \circ f)_* = id_* = (f^{-1})_* \circ f_*$

Bemerkung III.16. Tatsächlich hängt der von einer stetigen Abbildung $f \colon X \to Y$ induzierte Homomorphismus $f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ sogar nur von der Homotopieklasse von $f \in C(X, Y)$ ab, und damit gilt:
Die Fundamentalgruppe eines (wegzusammenhängenden) topologischen Raumes ist nicht nur eine Homöomorphie-, sondern sogar eine Homotopie-Invariante, d.h. hängt nur vom Homotopietyp des Raumes ab!



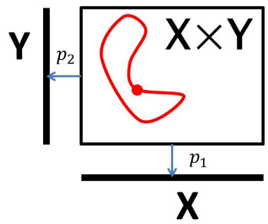
$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

2.2 Produkte

Satz III.5. *Sind X, Y topologische Räume und $x_0 \in X, y_0 \in Y$, so ist die Fundamentalgruppe des Produktraumes $X \times Y$ in (x_0, y_0) kanonisch isomorph zum Produkt der Fundamentalgruppen der Faktoren:*

$$\boxed{\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \cdot \pi_1(Y, y_0)}$$

Beweis. $p_1 \colon X \times Y \to X$ und $p_2 \colon X \times Y \to Y$ seinen die Projektionen von $X \times Y$ auf den erstem bzw. zweiten Faktor.



Ist Z irgendein anderer topologischer Raum, so entspricht jeder stetigen Abbildung $f \colon Z \to X \times Y$ bijektiv ein Paar (f_1, f_2) stetiger Abbildungen $f_1 \colon Z \to X, f_2 \colon Z \to Y$ mit $f_i = p_i \circ f, \quad i = 1, 2$
Insbesondere entspricht jeder Weg u in $X \times Y$ seinen Projektionen u_1 in X und u_2 in Y $(u_i = p_i \circ u)$, und zwei Wege in $X \times Y$ sind homotop genau dann, wenn ihre Projektionen in X und in Y homotop sind.
Betrachtet man nun die Fundamentalgruppen von $X \times Y, X, Y$ in $(x_0, y_0), x_0, y_0$, so ist

$$p_* \colon \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \quad [u] \mapsto (\underbrace{[p_1 \circ u]}_{=p_{1*}[u]}, \underbrace{[p_2 \circ u]}_{=p_{2*}[u]})$$

deshalb eine Bijektion.
Fasst man $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ jetzt als direktes Produkt von Gruppen auf, so ist p_* auch ein Homomorphismus, denn p_{1*} und p_{2*} sind Homomorphismen, und damit, weil bijektiv, ist p_* Isomorphismus. □

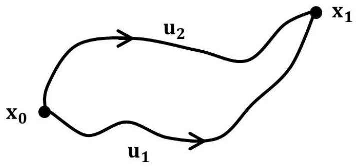
Beispiel:

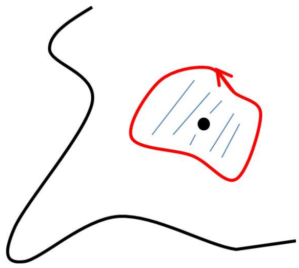
$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (siehe später)
$\Rightarrow \pi_1(T^n, x_0) \cong \mathbb{Z}^n$

Satz III.6. *Für einen wegzusammenhängenden Raum X sind äquivalent:*

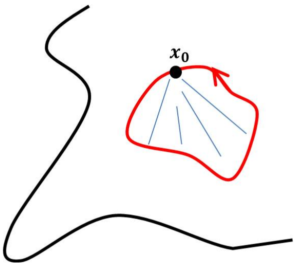
1. *$\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ (für ein und damit alle $x_0 \in X$);*
2. *Jede stetige Abbildung $\gamma \colon S^1 \to X$ ist (frei) nullhomotop;*
3. *Jede stetige Abbildung $\gamma \colon S^1 \to X$ setzt sich stetig auf D^2 fort;*

4. *Je zwei Wege u_1, u_2 in X mit gleichen Anfangs- bzw. Endpunkten sind homotop.*

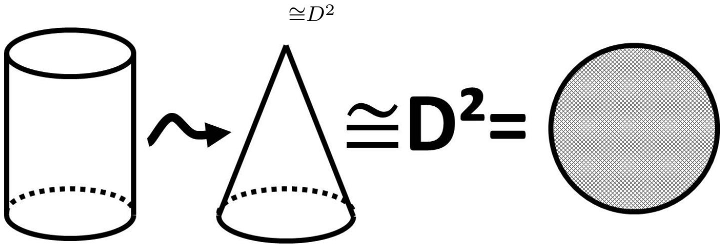




Beweis.
(1) $\Rightarrow$ (2): X einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ Jeder geschlossene Weg in X ist nullhomotop $\Rightarrow$ Jede Schleife in X ist nullhomotop $\Rightarrow$ jede Schleife in X ist frei nullhomotop
(2) $\Rightarrow$ (3): Für jede stetige Abbildung $\gamma\colon S^1 \to X$ existiert eine Homotopie $H\colon S^1 \times I \to X$ mit $H(z,0) = \gamma(z), H(z,1) = x_0$



$\Rightarrow \exists$ stetige Abbildung $H'\colon S^1 \times I/_{S^1\times\{1\}} \to X$ mit $H = H' \circ \pi$,
mit $\pi\colon S^1 \times I \to \underbrace{S^1 \times I/_{S^1\times\{1\}}}_{\cong D^2}$:



(3) $\Rightarrow$ (4): Es sei G die Abbildung mit

$$G(t,0) = u_1(t), G(t,1) = u_2(t), G(0,t) = x_0, G(1,t) = x_1 \text{ für } t \in I,$$

d.h. G bildet den $\underbrace{\text{Rand von } I \times I}_{\cong S^1}$ auf X ab.
Wegen $I \times I \cong D^2$ und $\partial(I \times I) \cong S^1$, setzt sich G stetig auf ganz $I \times I$ fort

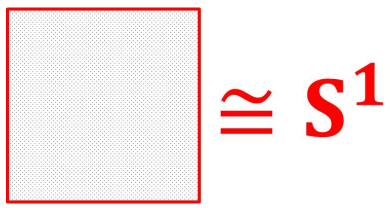


Abbildung III.2: Der Rand des Einheitsquadrates ist homöomorph zur S^1.

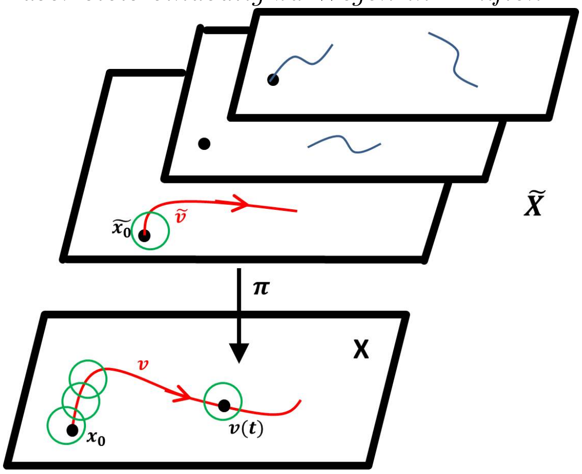
und ist Homotopie $u_1 \simeq u_2$.
(4) $\Rightarrow$ (1): klar $\square$

3 Liften von Abbildungen

Definition III.9 (Lift, Hochhebung)**.** Ist $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ Überlagerung und $f\colon Z \to X$ eine Abbildung, so heißt eine Abbildung $\widetilde{f}\colon Z \to \widetilde{X}$ mit $f = \pi \circ \widetilde{f}$ ein Lift oder Hochhebung von f (in $\widetilde{X}$).

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ Z \arrow[ur] \arrow[r] & T^n \end{tikzcd}$$

Satz III.7 (Liften von Wegen)**.** *Es sei $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ Überlagerung. Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $v\colon [a,b] \to X$ stetig sowie $v(a) = x_0 \in X$ und $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ mit $\pi(\widetilde{x_0}) = x_0$, so existiert genau ein stetiger Lift $\widetilde{v}$ von v in $\widetilde{X}$ mit $\widetilde{v}(a) = \widetilde{x_0}$. Insbesondere lassen sich Wege in X bei vorgegebenem Anfangspunkt in der Faser stets eindeutig zu Wegen in $\widetilde{X}$ liften.*



Beweis. Jeder Punkt $t \in [a,b]$ besitzt in $[a,b]$ eine Umgebung, die durch v in einer lokal trivialisierende Umgebung von $v(t)$ abgebildet wird. Ferner existiert eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ von $[a,b]$, sodass gilt:

$$v([t_{i-1}, t_i]) \text{ ist in einer lokal trivialisierenden Umgebung in } X \text{ enthalten.}$$

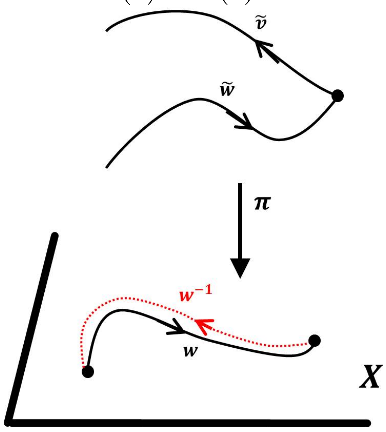
$$\widetilde{v}(a) := \widetilde{x_0} \text{ existiert und ist eindeutig bestimmt.}$$

Ist $\widetilde{v}(t)$ für $a \le t \le t_{i-1}$ bereits erklärt, so betrachte $v(t)$ für $t_{i-1} \le t \le t_i$. Dieses Wegstück liegt in einer lokal trivialisierenden Umgebung U, und wegen (Ü) existiert $\widetilde{U_\lambda} \subset \widetilde{X}$ offen, so dass $\pi|_{\widetilde{U_\lambda}}\colon \widetilde{U_\lambda} \to U$ ist Homöomorphismus, und $\widetilde{v}(t_{i-1}) \in \widetilde{U_\lambda}$ enthalten ist.

$$q := (\pi(\widetilde{U_\lambda}))^{-1}\colon U \to \widetilde{U_\lambda} \Rightarrow \widetilde{v}(t) := (q \circ v)(t)$$

ist stetig für $t_{i-1} \leq t \leq t_i \Rightarrow \widetilde{v}(t)$ ist auch auf $[t_{i-1}, t_i]$ erklärt, und damit auf $[0, t]$.
Soll andererseits $\widetilde{v}$ für $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ <u>stetig</u> sein, so kann $\widetilde{v}(t)$ für diese t die Wegzusammenhangskomponente von $\widetilde{v}(t_{i-1}) \subset \pi^{-1}(U)$ nicht verlassen, also erst recht nicht $\widetilde{U_\lambda} \Rightarrow \widetilde{v}$ ist eindeutig. □

Korollar III.2. *Ist $w\colon I \to X$ ein Weg mit Lift $\widetilde{w}$ und $\widetilde{v}$ ein Lift von w^{-1}, so dass $\widetilde{v}(0) = \widetilde{w}(1)$*



so gilt $\widetilde{v} = (\widetilde{w})^{-1}$, denn $\widetilde{v}$ und $\widetilde{w}^{-1}$ liegen über w^{-1} und haben denselben Anfangspunkt.

Korollar III.3. *$x, y \in X \Rightarrow \#\pi^{-1}(x) = \#\pi^{-1}(y)$, d.h. die <u>Blätterzahl</u> einer Überlagerung ist wohldefiniert.*
<u>Denn:</u> X ist wegzusammenhängend $\Rightarrow \exists$ Weg w von x nach y. Lifte w auf alle möglichen Weisen $\Rightarrow$ alle Punkte von $\pi^{-1}(x)$ sind genau einmal Anfangspunkt $\Rightarrow$ Jeder Punkt $\in \pi^{-1}(y)$ ist genau einmal Endpunkt nach vorstehendem Korollar.

Satz III.8 (Hochheben/Liften von Homotopien)**.** *Es sei $f\colon Z \to X$ stetige Abbildung und $\widetilde{f}\colon Z \to \widetilde{X}$ (stetiger) Lift von f sowie $H\colon Z \times I \to X$ mit $H_0 = f$ stetig $\Rightarrow \exists!$ stetige Abbildung $\widetilde{H}\colon Z \times I \to \widetilde{X}$ mit:*

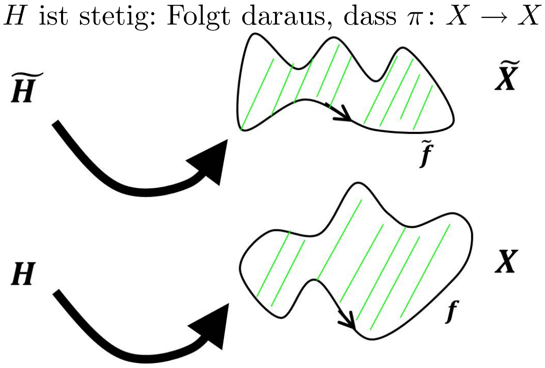
$$\widetilde{H} \text{ ist Lift von } H \text{ und } \widetilde{H_0} = \widetilde{f}.$$

Ferner gilt:
Ist $A \subset Z$ und H Homotopie relativ A [3]*, so auch $\widetilde{H}$.*

Beweis. Satz über das Liften von Wegen zeigt:
$\forall z \in Z$ muss $\widetilde{H_z}\colon I \to \widetilde{X}$ derjenige Weg sein, der über H_z liegt und Anfangspunkt $\widetilde{f}(z)$ besitzt. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \widetilde{H}$ ist eindeutig bestimmt, und damit folgt auch der letzte Teil des Satzes.

[3] Auf dem Teilraum A ist diese Homotopie konstant, also stationär.

$\widetilde{H}$ ist stetig: Folgt daraus, dass $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ lokaler Homöomorphismus ist.



□

TODO: Exkurs: Jede Gruppe ist realisierbar als Fundamentalgruppe eines C-W-Komplexes. Dieser ist kompakt, falls es endlich viele Erzeuger/Zellen gibt. (Man kann Räume aus Zellen "zusammenlegen", so ist z.B. die S^2 = Nullzelle + Zweizelle.)

Satz III.9 (Monodromie-Satz)**.** *Sind $w_0, w_1\colon I \to X$ Wege in X mit Liften $\widetilde{w_0}, \widetilde{w_1}$, die denselben Anfangspunkt haben, so gilt $w_0 \simeq w_1 \Leftrightarrow \widetilde{w_0} \simeq \widetilde{w_1}$*

Beweis. " $\Rightarrow$ ": $H\colon I \times I \to X$ sei Homotopie $w_0 \simeq w_1$ letzter Satz $\Rightarrow \exists$ Homotopie $\widetilde{H}\colon I \times I \to \widetilde{X}$ über H $(\pi \circ \widetilde{H} = H)$ zwischen $\widetilde{w_0}$ und $\widetilde{w_1}$
$\widetilde{w_0}(0) = \widetilde{w_1}(0)$ und Eindeutigkeit der Liftung von Wegen $\Rightarrow \widetilde{H_1} = \widetilde{w_1}$, also $\widetilde{w_1} \simeq \widetilde{w_0}$.
" $\Leftarrow$ ": klar, da π stetig. □

3.1 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

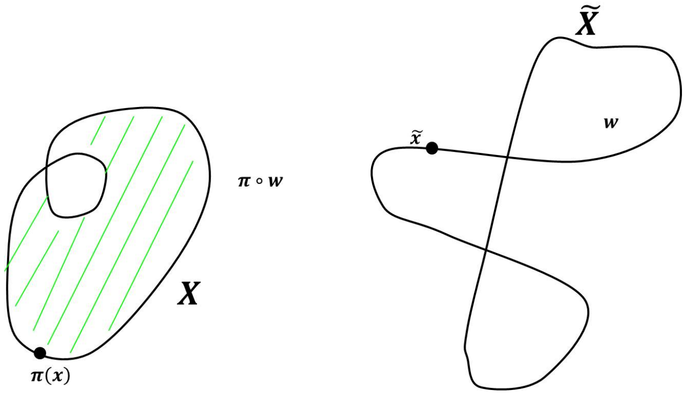
Satz III.10. *Ist $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ Überlagerung und $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, so ist die induzierte Abbildung $\pi_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi_1\big(X, \pi(\widetilde{x})\big)$ injektiv!* [4]

Beweis. Ist w geschlossener Weg in $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ und

$$\pi_*([w]) = [\pi \circ w] = 1 \in \pi_1(X, \pi(\widetilde{x})),$$

so ist $\pi \circ w$ homotop zum konstanten Weg $c_{\pi(\widetilde{x})}$. Ist nun H eine Homotopie von Wegen zwischen $\pi \circ w$ und $c_\pi(\widetilde{x})$, so liefert ein Lift von H eine Homotopie von Wegen zwischen w und einem Lift von $c_{\pi(\widetilde{x})}$.

[4] Ein Raum kann nur von einem anderen Überlagert werden, wenn der andere eine Fundamentalgruppe hat, die Untergruppe der Fundamentalgruppe von ihm ist / "in die andere reinpasst".

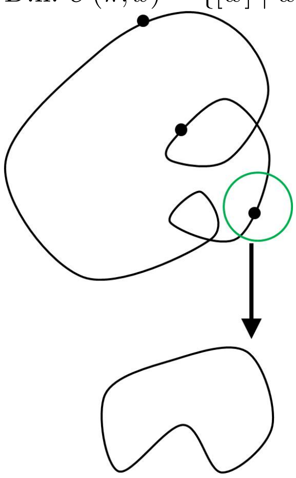


Aber jeder Lift eines konstanten Weges ist konstant! □

Definition III.10 (charakterisierende Untergruppe)**.** Die Untergruppe $U(\pi, \widetilde{x}) := \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) < \pi_1(X, \pi(\widetilde{x}))$ heißt charakterisierende Untergruppe der Überlagerung $\widetilde{X} \to X$.

Bemerkung III.17. $U(\pi, \widetilde{x})$ besteht also aus den Homotopieklassen von Schleifen in X, deren Lift mit Anfangspunkt $\widetilde{x}$ wieder eine Schleife in $\widetilde{x}$ ist.

Definition III.11 (Lift)**.** $L_\pi(w, \widetilde{x}) :=$ Lift von w zu $\widetilde{X}$ mit Anfangspunkt $\widetilde{x}$ (w Weg in X)
D.h. $U(\pi, \widetilde{x}) = \{[w] \mid w \text{ ist Schleife in } \pi(\widetilde{x}) \text{ und } L_\pi(w, \widetilde{x}(1)) = \widetilde{x}$



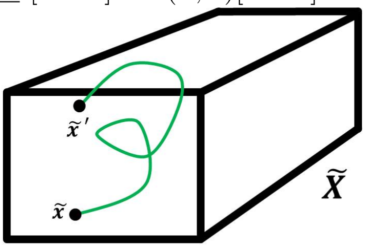
Wie hängt $U(\pi, \widetilde{x})$ von $\widetilde{x}$ ab?

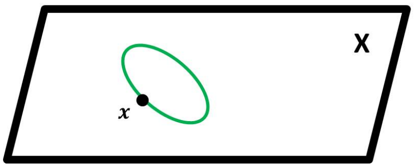
Bemerkung III.18. Ist $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ Überlagerung, $x \in X$, und $\widetilde{x}, \widetilde{x'} \in \pi^{-1}(x)$ und ist w Weg von $\widetilde{x}$ zu $\widetilde{x'}$, so ist $\pi \circ w$ Schleife in x und es gilt

$$U(\pi, \widetilde{x'}) = [\pi \circ w]^{-1} \cdot U(\pi, \widetilde{x})[\pi \circ w]$$

d.h. $U(\pi, \widetilde{x'})$ und $U(\pi, \widetilde{x})$ sind konjugiert und
$U(\pi, \widetilde{x'}) = U(\pi, \widetilde{x}) \Leftrightarrow [\pi \circ w]$ normalisiert $U(\pi, \widetilde{x})$

Denn: $[\pi \circ w]^{-1} U(\pi, \widetilde{x})[\pi \circ w] \subset U(\pi, x')$: v Schleife in $(\widetilde{X}, \widetilde{x})$





$\Rightarrow (\pi \circ w^{-1}) \cdot (\pi \circ v) \cdot (\pi \circ w)$ hat in $\pi_1(X, \pi(\widetilde{x}))$ die Form $\pi(w^{-1} \cdot v \cdot w)$, d.h. gehört zu $U(\pi, \widetilde{x'})$.

Erinnerung $\pi\colon \widetilde{X} \to X, \widetilde{x} \in \widetilde{X}, x = \pi(\widetilde{x})$

$$\Rightarrow \pi_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi_1(X, x) \text{ ist Monomorphismus!}$$

$U(\pi, \widetilde{x}) := \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ heißt charakterisierende Untergruppe der Überlagerung $\pi\colon \widetilde{X} \to X$. (TODO Bild 1)

Bemerkung III.19. Für $U(\pi, \widetilde{x})$ gilt:
Sind $\widetilde{x}, \widetilde{x'} \in \widetilde{X}$ Punkte über $x = \pi(\widetilde{x}) = \pi(\widetilde{x'}) \in X$, und ist $H := \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})), H' := \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x'}))$ sowie $\widetilde{w}$ Weg in $\widetilde{X}$ von $\widetilde{x}$ nach $\widetilde{x'}$ und $w = \pi \circ \widetilde{w}$, so gilt $\boxed{H' = [w]^{-1} H [w]}$ und für jedes $\alpha \in \pi_1(X, x)$ existiert auch immer ein $\widetilde{x'} \in \widetilde{X}$ über x, so dass $H' = \alpha H \alpha^{-1}$ ist, d.h. $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ entspricht einer Klasse von zueinander konjugierten Untergruppen von $\pi_1(X, x)$. (TODO: Bild 2)
Diese[5] hängt auch nicht von der Wahl des Punktes $x \in X$ ab, da für $x, x' \in X$ ja auch $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, x')$ konjugiert sind.

---

w sei Weg in X mit Anfangspunkt x und $\widetilde{w}$ sei Lift von w zu $\widetilde{z} \in \pi^{-1}(x) \subset \widetilde{X}$. $\widetilde{w}(1)$ hängt (TODO: Bild 3) nur von $[w]$ ab und es gilt

Satz III.11. *Es seien $\widetilde{w_1}$ und $\widetilde{w_2}$ wege in $\widetilde{X}$ mit $\widetilde{w_1}(0) = \widetilde{x} = \widetilde{w_2}(0)$ sowie $w_1 = \pi \circ \widetilde{w_1}, w_2 = \pi \circ \widetilde{w_2}$. Dann gilt*

$$\widetilde{w_1}(1) = \widetilde{w_2}(1) \Leftrightarrow w_1(1) = w_2(1) \textit{ und } [w_1 \cdot w_2^{-1}] \in H = \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = U(\pi, \widetilde{x})$$

[5] Klasse von Untergruppen

Beweis. <u>Denn:</u> $\widetilde{w_1}(1) = \widetilde{w_2}(1) \Rightarrow \exists \widetilde{w_1} \cdot \widetilde{w_2}^{-1}$, und dies ist geschlossener Weg $\Rightarrow w_1(1) = w_2(1), [w_1 \cdot w_2^{-1}] \in H$.
Sei umgekehrt $w_1(1) = w_2(1)$, also damit $w_1 w_2^{-1}$ definiert, und $[w_1 \cdot w_2^{-1}] \in H$. Über (TODO: Bild 4) w_2^{-1} liegt ein Weg $\widetilde{v}$ mit $\widetilde{v}(0) = \widetilde{w_1}(1)$, und $\widetilde{w_1} \cdot \widetilde{v}$ liegt über $w_1 \cdot w_2^{-1}$.
Ferner existiert nach Voraussetzung in $\widetilde{X}$ ein geschlossener Weg $\widetilde{u}$ mit $\widetilde{u}(0) = \widetilde{x}$ sowie $\pi_*([u]) = [w_1 \cdot w_2^{-1}]$. Eindeutigkeit von Lifts/Homotopien $\Rightarrow \widetilde{u} \simeq \widetilde{w_1} \cdot \widetilde{v} \Rightarrow \widetilde{w_1} \cdot v$ ist geschlossen $\Rightarrow \widetilde{v}(1) = \widetilde{x}$.
$\widetilde{v}^{-1}, \widetilde{w_2}$ liegen über $\widetilde{w_2} \Rightarrow \widetilde{w_2} = \widetilde{v}^{-1} \Rightarrow \widetilde{w_2}(1) = \widetilde{v}(0) = \widetilde{w_1}(1)$. □

Andere Interpretation: Betrachte alle Homotopieklassen von Wegen in X mit Anfangspunkt x.
Es sei $H < \pi_1(X, x)$ eine Untergruppe, und setze

$$H[w] := \{\gamma \cdot [w] \mid \gamma \in H\}$$

$[w'] \in H \cdot [w]$ bedeutet: $\exists$ geschlossenen Weg v mit $[w'] = [v] \cdot [w]$ und $[v] \in H$. Hier ist $w'(1) = w(1)$, also $w' \cdot w^{-1}$ erklärt, und es gilt $[w' \cdot w^{-1}] = [w'] \cdot [w^{-1}] = [v] \cdot [w] \cdot [w^{-1}] = [v] \in H$.
Ist umgekehrt $w'(1) = w(1)$ und $[w' \cdot w^{-1}] \in H$, so ist $[w'] = [w'][w^{-1} \cdot w] = [w' \cdot w^{-1}][w] \in H[w]$, d.h.

$$(*) \qquad [w'] \in H[w] \Leftrightarrow w'(1) = w(1) \text{ und } [w'][w^{-1}] \in H.$$

Wegen $[w][w'^{-1}] = [w \cdot w'^{-1}] = [(w' \cdot w^{-1})^{-1}] = [w' \cdot w^{-1}]^{-1}$ ist deshalb $[w'] \in H[w] \Leftrightarrow [w] \in H[w']$
$\Rightarrow$ Für zwei Wege w_1, w_2 mit Anfangspunkt $x \in X$ gilt entweder $H[w_1] = H[w_2]$ oder $H[w_1] \cap H[w_2] = \emptyset$!
$H[w]$ heißt <u>Rechtsnebenklasse</u> von $[w]$ nach H,
und ist w geschlossen, so ist $H[w]$ eine Rechtsnebenklasse (oder Rechtsrestklasse) von $\pi_1(X, x)$ nach H im üblichen Sinn der Gruppentheorie.
Damit gilt der

Satz III.12. *Ist $H = \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = U(\pi, \widetilde{x})$ und w Weg in X mit Anfangspunkt $x = \pi(\widetilde{x})$ sowie $\widetilde{w}$ der Lift von w mit Anfangspunkt $\widetilde{x}$, so ist*

$$(**) \qquad H[w] \mapsto \widetilde{w}(1)$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Rechtsnebenklassen $\{H[w]\}$ und $\widetilde{X}$!

Erläuterung Dies gilt, weil $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend ist und also <u>jeder</u> Punkt von $\widetilde{X}$ als $\widetilde{w}(1)$ für geeignetes w erhalten werden kann. Durch $H[w] \mapsto \widetilde{w}(1)$ ist $\pi \colon \widetilde{X} \to X$ nun eindeutig charakterisiert: $(**)$ legt zunächst die Menge der Punkte von $\widetilde{X}$[6] fest und wegen $\pi \circ \widetilde{w} = w$ lässt sich π dann durch $\widetilde{X} \ni \widetilde{w}(1) \mapsto H[w] \mapsto w(1) \in X$ beschreiben!

[6] im Überlagerungsraum

Satz III.13 (Liften von Abbildungen in Überlagerungen)**.** *Es sei $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ und $x = \pi(\widetilde{x}) \in X$. Ferner sei Z ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit $z \in Z$ sowie $f\colon Z \to X$ mit $f(z) = x$ stetig. Dann sind äquivalent:*

1. *f besitzt einen Lift $\widetilde{f}\colon (Z, z) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x})$ (TODO: Bild 5) (mit $\widetilde{f}(z) = \widetilde{x}$)*
2. *$f_*(\pi_1(Z, z)) \subset \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$*

Definition III.12 (lokal wegzusammenhängend)**.** Z lokal wegzusammenhängend :$\Leftrightarrow$ in jeder Umgebung jedes Punktes in Z ist immer eine wegzusammenhängende Umgebung enthalten. (TODO: Bild 6)

Satz III.14 (Liftungssatz für Überlagerungen)**.** *$\pi\colon \widetilde{X} \to X$ Überlagerung, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, Z sei wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.*
$f\colon Z \to X$ und $f(z) = x$ sei stetig.
f besitzt Lift $\widetilde{f}\colon Z \to \widetilde{X}$ mit $\widetilde{f}(z) = \widetilde{x} \Leftrightarrow f_*(\pi_1(Z, z)) < \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$

Beweis. "$\Rightarrow$" Existiert $\widetilde{f}$, so ist $f = \pi \circ \widetilde{f} \Rightarrow f_* = \pi_* \circ \widetilde{f}_*$
$\Rightarrow f_*(\pi_1(Z, z)) < \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.
"$\Leftarrow$" (TODO: Bild 1) Ansatz für $\widetilde{f}$:
$\forall$ Punkte $z' \in Z \exists$ Weg α von z nach z' (TODO: Bild 2)
$\beta := f \circ \alpha$ ist dann Weg von x nach $x' = f(z')$ (TODO: Bild 3)
Setze $\widetilde{f}(z') := \widetilde{\beta}(1)$

- $\widetilde{f}$ ist wohldefiniert: Ist α' anderer Weg von z nach z' in Z, so ist $\beta' = f \circ \alpha'$ Weg von x zu x' in X.
  $\gamma := \beta' \cdot \beta^{-1}$ ist Schleife in x, also $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ und wegen $\gamma = f \circ (\alpha' \cdot \alpha^{-1})$ gilt auch $[\gamma] \in f_* \pi_1(Z, z) < \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$
  $\Rightarrow \widetilde{\gamma}$ ist Schleife in $(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \Rightarrow \widetilde{\beta}(1) = \widetilde{\beta}'(1)$
- f ist stetig: Benutze, dass jede noch so kleine Umgebung eines Punktes $z' \in Z$ eine wegzusammenhängende Umgebung enthält, π lokaler Homöomorphismus ist und Liftungen eindeutig. (TODO:Bild 3)

□

Beispiel III.1. • $\pi_1(Z, z) = 0 \Rightarrow \exists$ *immer Liftung in jede Überlagerung von X'*

Beispiel III.2. *Für $n \in \mathbb{Z}^*$ sei $\pi_k\colon (S^1, 1) \to (S^1, 1), z \mapsto z^n$*

$$\Rightarrow (\pi_n)_*(\pi_1(S^1, 1)) = ((\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}) s.u.)$$

$= n \cdot \mathbb{Z} \Rightarrow \pi_k$ *lässt sich bezüglich π_l liften $\Leftrightarrow k \cdot \mathbb{Z} < l \cdot \mathbb{Z} \Leftrightarrow k$ ist Vielfaches von l,, also $k = l \cdot m \Rightarrow \pi_k = \pi_l \circ \pi_m$.*

Definition III.13 (Decktransformation)**.** Eine Decktransformation/Deckbewegung einer Überlagerung $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ ist ein Homöomorphismus $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ mit $\boxed{\pi = \pi \circ f}$ (TODO: Bild 4)

Bemerkung III.20. Die Decktransformationen einer Überlagerung $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ bilden eine Gruppe $D = D(\widetilde{X}, \pi)$

Bemerkung III.21. Deckkonfigurationen sind also Spezialfälle von Äquivalenzen zwischen Überlagerungen (TODO: Bild 5), und als Anwendung des Liftungssatzes gilt auch:
Ist X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so sind $\pi \circ \widetilde{X} \to X$ und $\pi'\colon \widetilde{X'} \to X$ äquivalent genau dann, wenn sie zur gleichen Klasse konjugierter Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ gehören.
$\pi\colon \widetilde{X} \to X$ sei Überlagerung von wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Räumen und $\widetilde{x}, \widetilde{x'} \in \pi^{-1}(x), x \in X$ (TODO: Bild 6)
$\exists$ Deckbewegung $g\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ mit $d(\widetilde{x}) = \widetilde{x'}$, wenn

$$(1)\boxed{\pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x'})) = H}$$

und wegen des Liftungssatzes ist dies andererseits auch notwendig.
d ist dann durch (2)$\boxed{d(\widetilde{x}) = \widetilde{x'}}$ eindeutig bestimmt.
Halte nun $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ fest und lasse $[u]$ die Elemente von $\pi_1(X, x)$ durchlaufen, wobei $\widetilde{u}$ der über u liegende Weg mit Anfangspunkt $\widetilde{x}$ sei. (TODO: Bild 7)
Dies liefert (s.o.) eine Bijektion der Rechtsnebenklassen $\{H[u]\}$ von $\pi_1(X, x_0)$ nach H und der Faser $\pi^{-1}(x)$ vermöge (3)$\boxed{H[u] \to \widetilde{u}(1)}$
Ferner ist für $\widetilde{x'} = \widetilde{u}(1)$ (1) erfüllt $\Leftrightarrow$ $\underbrace{[u]^{-1}H[u] = H}_{(4)}$ und die Elemente $[u] \in \pi_1(X, x)$ mit (4) bilden eine Untergruppe $N(H) \leq \pi_1(X, x)$, den sogenannten Normalisator von H in $\pi_1(X, x)$. Mit $d(\widetilde{x}) = \widetilde{x'}$ und $H[u] \mapsto \widetilde{u}(1)\exists$ damit eine Bijektion zwischen den Elementen der Faktorgruppe $N(H)/_H$ und den Elementen der Deckbewegungsgruppe, und diese ist Isomorphismus.

Satz III.15. *X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ zu $H < \pi_1(X, x)$ gehörende Überlagerung $\Rightarrow$ Die Deckbewegungsgruppe $D(\widetilde{X}, \pi)$ ist isomorph zu $N(H)/_H$.*

Beispiel III.3. *H sei Normalteiler von $\pi_1(X, x) \Rightarrow N(H) = \pi_1(X, x)$ $\Rightarrow N(H)/_H = \pi_1(X, x)/_H$*

Definition III.14 (reguläre Überlagerung)**.** $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ heißt regulär :$\Leftrightarrow$ $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ gehört zu Normalteiler H.

Beispiel III.4. $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$.
$\pi_1(\mathbb{R}) = 0 \Rightarrow \pi$ *gehört zur trivialen Untergruppe von* $\pi_1(S^1)$ *und ist regulär.*

$D(\mathbb{R}, \pi) \cong \mathbb{Z}$ *(TODO: Bild 8)*
(ganzzahlige Translationen) $\Rightarrow$
$\mathbb{Z} \cong N(H)/_H \cong \pi_1(S^1)/\underbrace{H}_{trivial} \cong \pi_1(S^1)!$

Bemerkung III.22. Für regulära Überlagerungen operiert $D(\widetilde{X}, \pi)$ transitiv auf $\pi^{-1}(x)$, h.h. $\forall \widetilde{x'} \in \pi^{-1}(x) \exists d \in D$ mit $d(\widetilde{x}) = \widetilde{x'}$.
Hat speziell $\widetilde{X} \to X$ endliche Blätterzahl, so ist $\widetilde{X} \to X$ regulär $\Leftrightarrow$ Ordnung $D(\widetilde{X}, \pi) =$ Blätterzahl.

Definition III.15 (semilokal einfach zusammenhängend)**.** X heißt semilokal einfach zusammenhängend
$:\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \exists$ Umgebung $U(x)$: jeder in U liegende geschlossene Weg ist nullhomotop in X.

Beispiel III.5 (Der Hawaiianische Ohrring)**.** *(TODO: Bild 9) Der Hawaiianische Ohrring ist lokal wegzusammenhängend, wegzusammenhängend, aber nicht semilokal einfach zusammenhängend.*

Satz III.16. *X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend*
$\Rightarrow \forall H < \pi_1(X, x) \quad \exists$ *zu H gehörende Überlagerung $\pi \colon \widetilde{X} \to X$.*

FAZIT X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Dann gilt:
$\exists$ Überlagerung $\pi \colon \widetilde{X} \to X$ mit $\pi_1(\widetilde{X}) = 0$ (die universelle Überlagerung von X). $D(\widetilde{X}, \pi)$ ist isomorph zu $\pi_1(X, x)$, und identifiziert man in $\widetilde{X}$ die Punkte, die bezüglich einer Untergruppe von D äquivalent sind, so existiert hierzu eine Überlagerung von X. Bis auf Äquivalenz erhält man so alle Überlagerungen von X, und genau die konjugierten Untergruppen von D liefern äquivalente Überlagerungen.