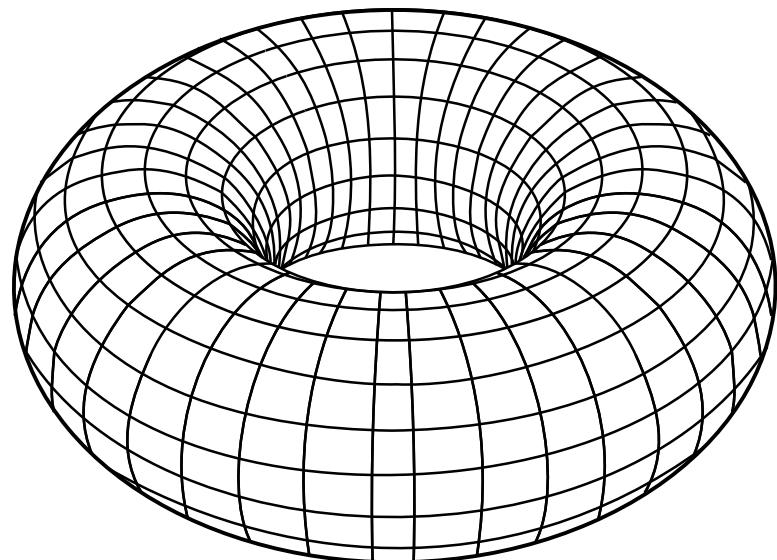


# **Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -**

**Vorlesung im Wintersemester 2011/2012**

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

24. November 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>I Homotopie und Fundamentalgruppe</b>	<b>2</b>
0 Vorwort . . . . .	2
1 Grundlagen der allgemeinen Topologie . . . . .	10
<b>II Topologische Eigenschaften</b>	<b>22</b>
1 Trennungseigenschaften . . . . .	28
2 Abzählbarkeitsaxiome . . . . .	30
<b>III Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume</b>	<b>33</b>
1 Mannigfaltigkeiten . . . . .	33
2 Produkt-Topologie . . . . .	38
3 Differenzierbare Abbildungen . . . . .	40
4 Quotientenräume . . . . .	47
5 Quotientenabbildungen . . . . .	50
6 Konstruktionen von Quotientenräumen . . . . .	54

## Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

# Kapitel I

## Homotopie und Fundamentalgruppe

### 0 Vorwort

#### Topologischer Raum

Ein topologischer Raum  $X$  ist gegeben durch eine Menge  $X$  und ein System  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , den so genannten offenen Mengen von  $X$ , welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und  $X$  und die leere Menge  $\emptyset$  als Elemente enthält.

$X$  Menge,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ :

- (1)  $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
- (2)  $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$  Indexmenge  $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$
- (3)  $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

**Beispiel:**

$\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$  ist topologischer Raum!

**Beispiel:**

$X$  Menge,  $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$   
 $\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$  ist topologischer Raum.  $\mathcal{O}$  ist "Basis" der Topologie  $\tilde{\mathcal{O}}$ .

### Metrischer Raum

Ein metrischer Raum  $X$  ist eine Menge  $X$  mit einer Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , der "Metrik" auf  $X$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:  $\forall x, y, z \in X$

- (1)  $d(x, y) = d(y, x)$  "Symmetrie"
- (2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$  "Definitheit"
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  "Dreiecksungleichung"

### Stetigkeit

Eine Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt stetig, falls die  $F$ -Urbilder offener Mengen in  $Y$  offene Teilmengen von  $X$  sind.

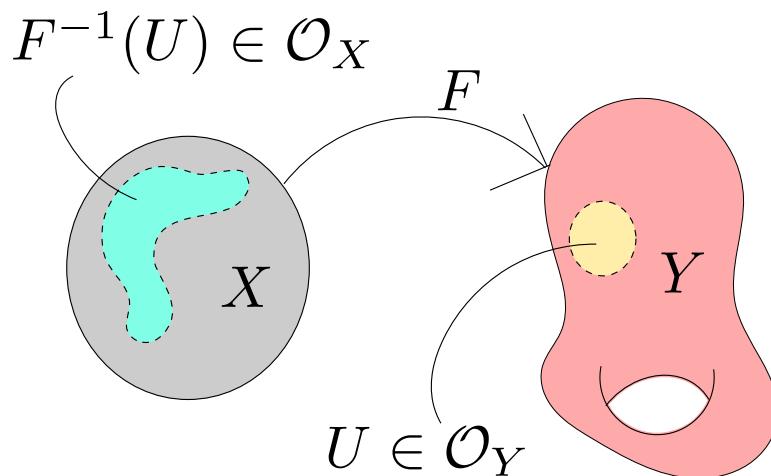


Abbildung I.1: Stetige Abbildung

**Bemerkung I.1.** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen  $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} (\epsilon > 0)$ , und  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit  $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$ .

## Homotopie

Eine Homotopie  $H: f \simeq g$  zwischen zwei (stetigen) Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  ist eine (stetige) Abbildung

$$H: X \times I^a \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit  $H(x, 0) = f(x)$  und  $H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$ .

$$I^a = [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

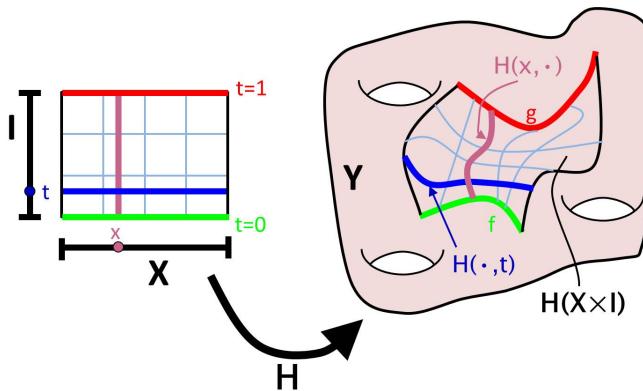


Abbildung I.2: Homotopie

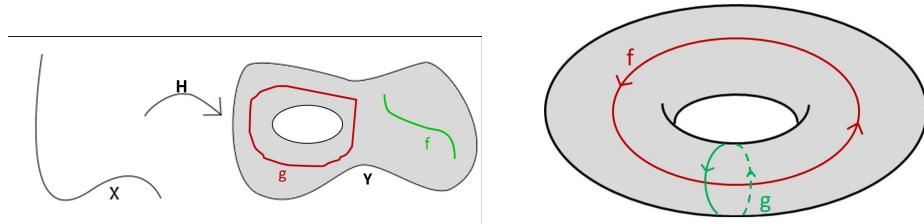
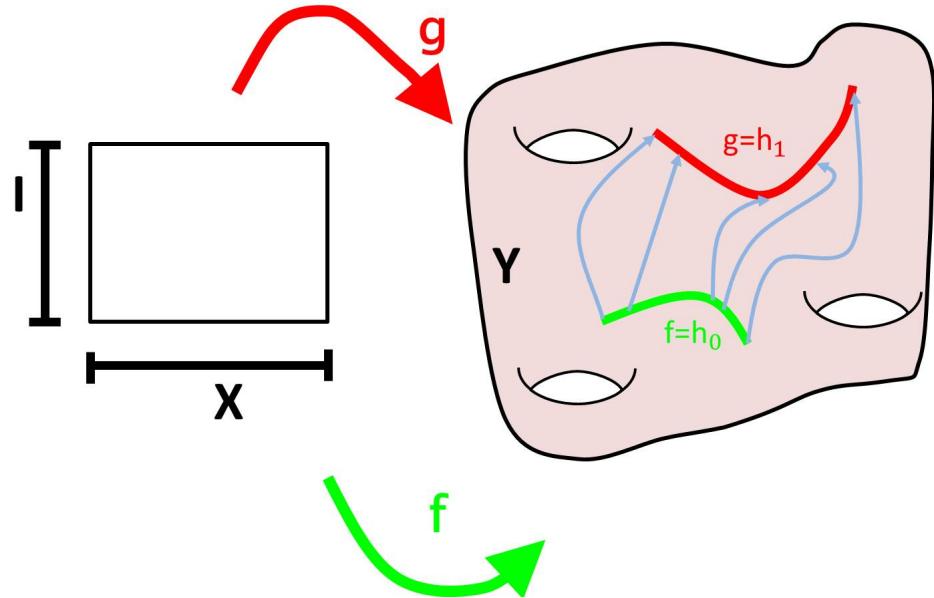


Abbildung I.3:  $f$  und  $g$  sind jeweils nicht homotop!

**Bemerkung I.2.**  $H$  heißt auch Homotopie von  $f$  nach  $g$ , eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang"  $f$  und "Ende"  $g$ .  $f$  und  $g$  heißen dann homotop, in Zeichen:  $f \simeq g$ .

**Erinnerung** Sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume, so ist eine Homotopie  $H = (h_t), t \in [0, 1]$ , eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen  $h_t: X \rightarrow Y$ .

tigen Abbildungen  $h_t: X \rightarrow Y$  mit Anfang  $h_0$  und Ende  $h_1$ .



### Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen:  $f \simeq g$ , falls eine Homotopie mit Anfang  $f$  und Ende  $g$  existiert.

**Bemerkung I.3.** "Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Symmetrie: Gilt für  $f, g \in C(X, Y) := \{F: X \rightarrow Y \text{ stetig}\}$   $f \simeq g$  vermöge  $H = (h_t), t \in [0, 1]$ , so liefert  $(\tilde{h}_t)$  mit  $\tilde{h}_t := h_{1-t}$  eine Homotopie von  $g$  nach  $f$ , d.h.  $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$ .

Reflexivität:  $f \simeq f$  vermöge  $h_t := f \forall t \in [0, 1]$

Transitivität: Es sei  $f \simeq g$  vermöge  $(h_t)$  und ferner  $g \simeq l$  vermöge  $(k_t)$ . Dann liefert  $M: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $f$  nach  $l$ .

Also ist  $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$ . □

**Bemerkung I.4.** Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von  $C(X, Y)$  in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  wird mit  $[X, Y]$  bezeichnet.

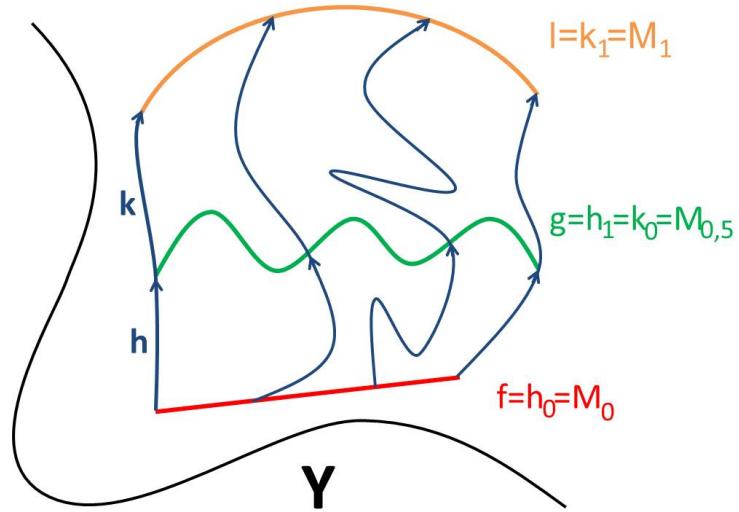
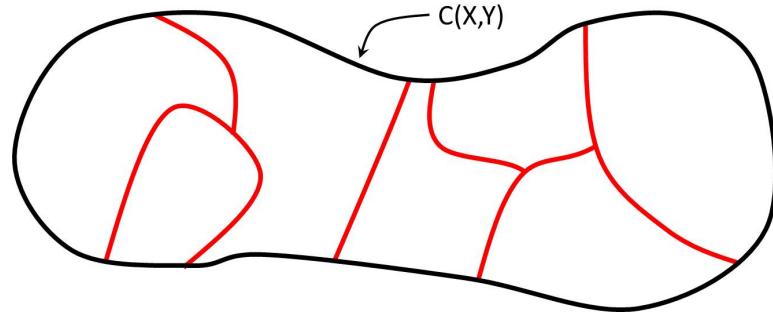


Abbildung I.4: Transitivität der Relation "homotop sein"

Abbildung I.5: Äquivalenzklassen  $[X, Y]$  von  $C(X, Y)$ 

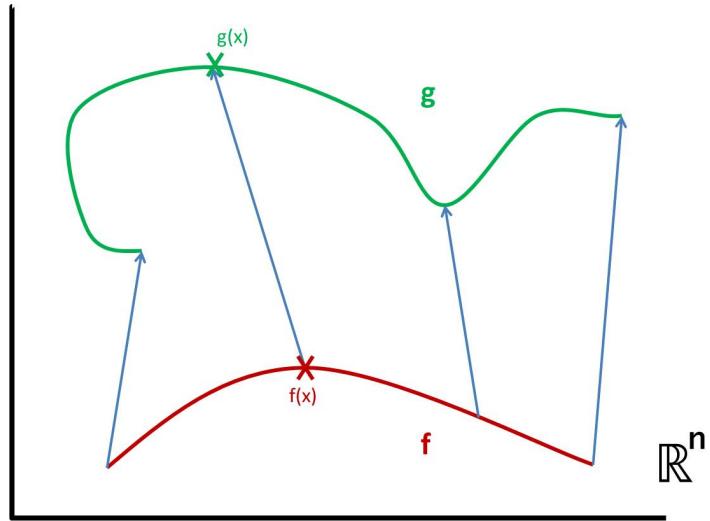
**Bemerkung I.5.**  $C(X, Y)$  ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als  $[X, Y]!$

### Beispiel:

Je zwei stetige Abbildungen  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind homotop! Denn

$$H(x, t) := (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$$

liefert eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ :



### Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

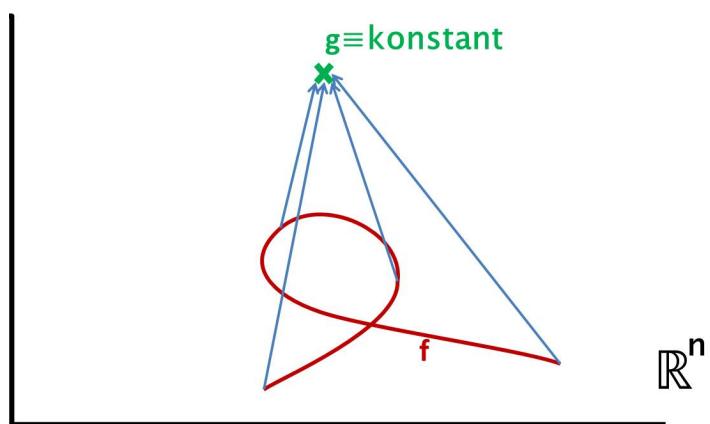


Abbildung I.6:  $f$  ist nullhomotop

**Korollar I.1.** Jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum  $X$  besteht  $[X, \mathbb{R}^n]$ ,  $n$  beliebig, nur aus einem Punkt!

**Beispiel:**

Jeder geschlossene Weg im  $\mathbb{R}^2$ , d.h. jede stetige Abbildung  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(0) = f(1)$  ist nullhomotop.  $[[0, 1], \mathbb{R}^2]$  + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve  $t \mapsto (1, 0)$ .

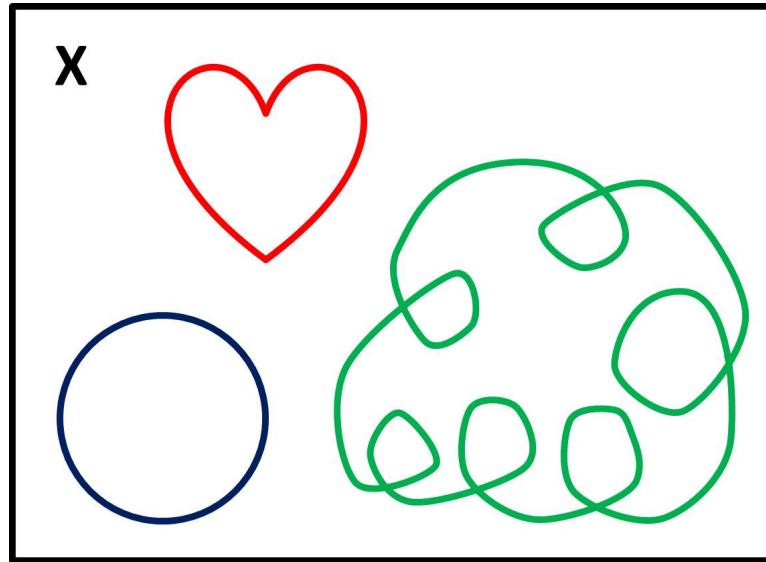
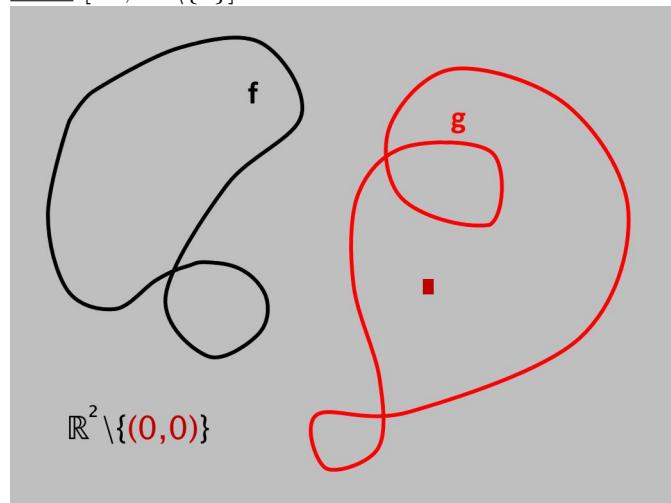
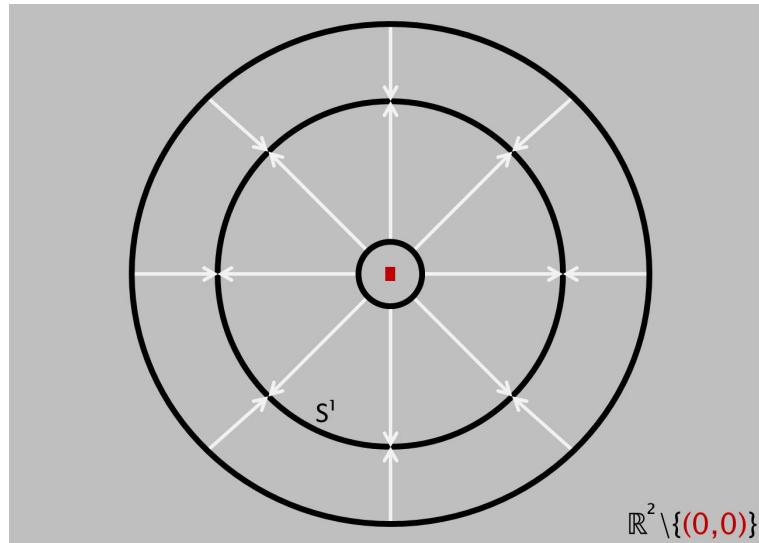


Abbildung I.7: Geschlossene Wege in  $\mathbb{R}^n$

Interpretiere einen geschlossenen Weg im  $\mathbb{R}^2$  auch als stetige Abbildung von  $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  in  $\mathbb{R}^2$ , so gilt also  $[S^1, \mathbb{R}^2]$  ist einelementig.  
Aber  $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$  ist nichttrivial!



Abbildung I.8:  $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}] = [S^1, S^1]$ 

### Teilraumtopologie

Es sei  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum und  $A \subset X$ . Die auf  $A$  durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

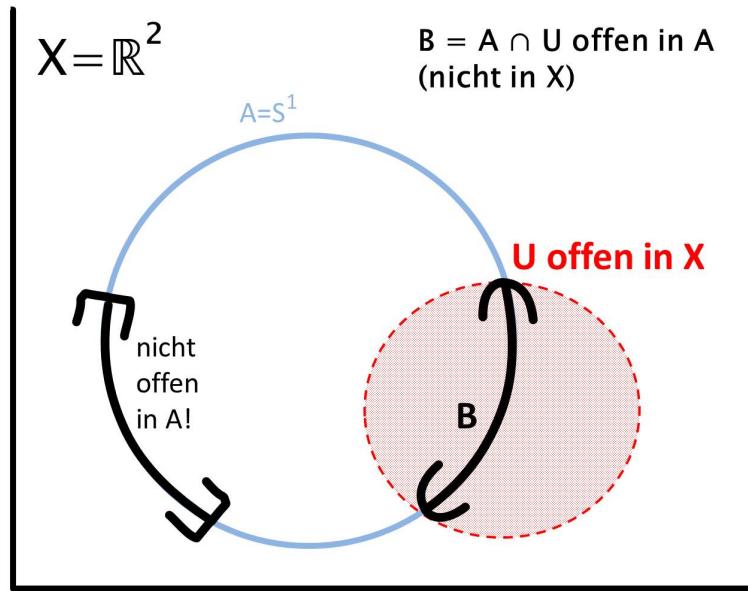
induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum  $(A, \mathcal{O}|_A)$  heißt Teilraum von  $(X, \mathcal{O})$ .

**Bemerkung I.6.**  $B \subset A$  ist also genau dann offen in  $A$ , wenn  $B$  der Schnitt einer offenen Menge mit  $A$  ist.

### Beispiel:

$$X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

Achtung:  $B$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}^2$ !



## 1 Grundlagen der allgemeinen Topologie

**Beispiel:** Beispiele topologischer Räume

- (1)  $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$  ‘triviale Topologie’
- (2)  $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$  ‘diskrete Topologie’
- (3) Metrische Räume, siehe unten
- (4)  $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$  definiert eine Topologie auf  $X$ , aber  $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$  nicht!
- (5)  $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid O \text{ ist Vereinigung von Intervallen } (a, b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$  ist topologischer Raum, und  $\mathcal{O}$  heißt Standard-Topologie.
- (6)  $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$  ist auch eine Topologie auf  $\mathbb{R}$ , die so genannte  $T_1$ -Topologie.

### Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$  topologischer Raum, heißt abgeschlossen

$\Leftrightarrow X \setminus A$  ist offen.

**Bemerkung I.7.** Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso  $X$  und  $\emptyset$ .

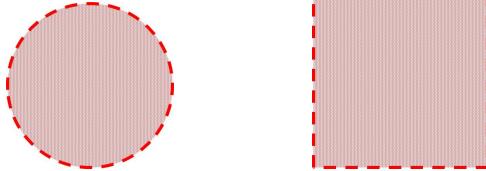
**Beispiel:**

In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in  $\mathbb{R}_{T_1}^1$  alle endlichen Teilmengen und  $X, \emptyset$ .

### Umgebung

Ist  $X$  topologischer Raum und  $x \in X$ , so heißt jede offene Teilmenge  $O \subset X$  mit  $x \in O$  eine Umgebung von  $x$ .

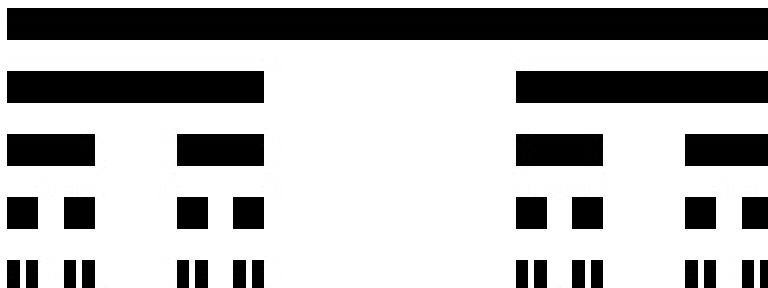
**Bemerkung I.8.** Umgebungen sind per definitionem offen!



**Bemerkung I.9.** Jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}_{\text{Standard}}$  ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!

**Beispiel: Die Cantor-Menge**  $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0, 2\} \right\}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , enthält überabzählbar viele Elemente und hat 'Hausdorff-Dimension'  $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6\dots$




---

<sup>1</sup> $\mathbb{R}$  mit  $T_1$ -Topologie

### Basis

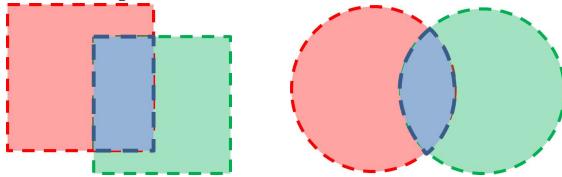
Ist  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum mit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , so heißt  $\mathcal{B}$  Basis der Topologie : $\Leftrightarrow$  Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$ .

### Beispiel:

- (1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von  $\mathbb{R}$ .
- (2) Sämtliche offenen<sup>2</sup> Kreisscheiben  und auch sämtliche offenen Quadrate  bilden Basen ein und derselben Topologie auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Bemerkung I.10.** •  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$  ist Basis der Topologie von  $X \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset O$ .

•  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  bildet die Basis einer Topologie auf  $X \Leftrightarrow X$  ist Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  und der Schnitt je zweier Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist eine Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$ .



### Feiner und größer

Sind  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$  Topologien auf  $X$  und  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ , so heißt  $\mathcal{O}_2$  feiner als  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_1$  größer als  $\mathcal{O}_2$ .

### Beispiel:

- Die triviale Topologie ist die größte Topologie auf  $X$ , die diskrete Topologie die feinste.
- Die Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$  ist feiner als die  $T_1$ -Topologie.

### Mehr zu metrischen Räumen

<sup>2</sup>bezüglich der euklidischen Metrik

### $\epsilon$ -Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und  $\epsilon > 0$  sei für  $p \in X$

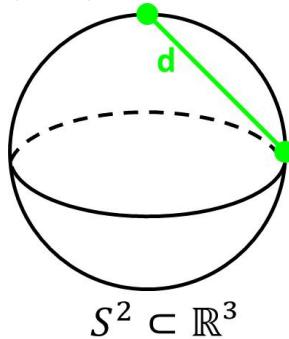
- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$  der offene  $\epsilon$ -Ball um  $p$
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$  der abgeschlossene  $\epsilon$ -Ball um  $p$
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$  die  $\epsilon$ -Sphäre um  $p$  (oder Sphäre vom Radius  $\epsilon$ )

### Metrischer Unterraum

Ist  $(X, d)$  metrischer Raum und  $A \subset X$ , so heißt der metrische Raum  $(A, d|_{A \times A})$  (metrischer) Unterraum von  $X$ .

### Beispiel:

Für  $X = \mathbb{R}_{Eukl}^n$  sind  $B_1(0), D_1(0) =: D^n$  und  $S^{n-1} := S_1(0)$  metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw.  $(n-1)$ -Sphäre.

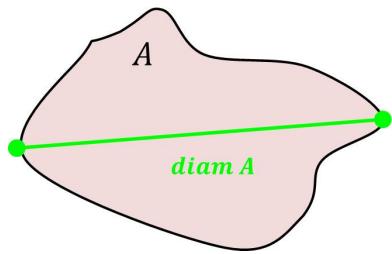


### Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$  heißt beschränkt

$\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}: d(x, y) < \rho \forall x, y \in A$

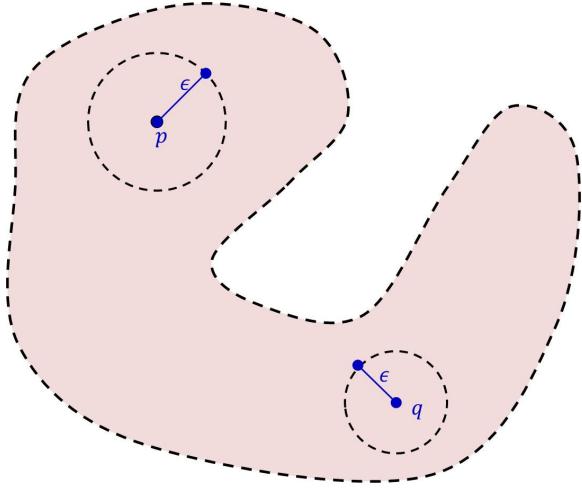
Das Infimum,  $\text{diam } A$ , dieser  $\rho$  heißt dann Durchmesser von  $A$ .



**Bemerkung I.11.** In einem metrischen Raum  $(X, d)$  bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$  von  $X$ , diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.

**Bemerkung I.12.**  $A \subset (X, d)$  ist offen

$$\Leftrightarrow \forall p \in A \exists \text{ ein offener Ball } B_\epsilon(p) \text{ um } p \text{ mit } B_\epsilon(p) \subset A$$



### Abstand

$(X, d)$  sei metrischer Raum und  $A \subset X, p \in X$ .

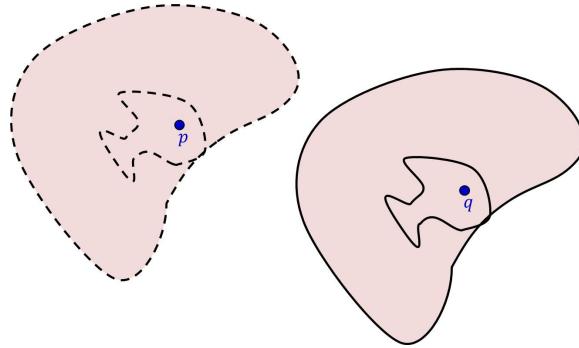
$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von  $p$  und  $A$ .

**Erinnerung** Ist  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum und  $A \subset X$ , so definiert  $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$  eine Topologie auf  $A$ , die Teilraumtopologie der in  $A$  offenen Mengen.

**Bemerkung I.13.** Ist  $A \subset X$  offen in  $X$ , so ist auch jede in  $A$  offene Menge offen in  $X$ , und abgeschlossene<sup>3</sup> Teilmengen einer in  $X$  abgeschlossenen Menge  $A$  sind auch abgeschlossen in  $X$ .

<sup>3</sup>in  $A$



Aber abgeschlossene Mengen  $B$  in  $A \subset X$  sind für beliebiges  $A$  im Allgemeinen nicht abgeschlossen in  $X$ .

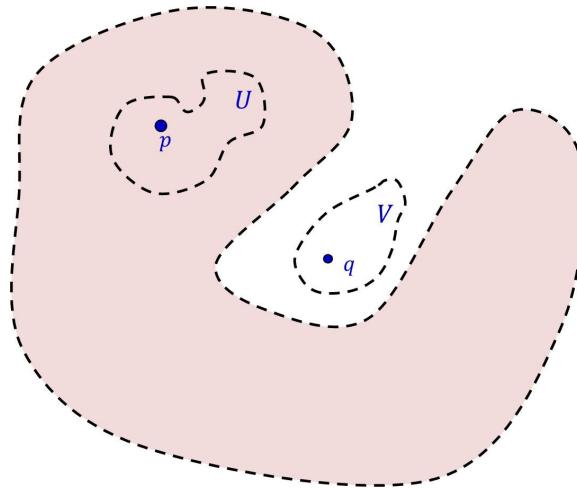
### Beispiel: Beispiel zu Bemerkung I.13

$$B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$$

#### Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für  $p \in A \subset X$ ,  $X$  topologischer Raum, heißt  $p$

- (1) innerer Punkt von  $A$ , falls es eine in  $A$  enthaltene Umgebung  $U$  um  $p$  gibt.
- (2) äußerer Punkt, falls eine zu  $p$  disjunkte Umgebung  $V$  in  $X$  existiert.
- (3) Randpunkt von  $A$ , falls jede Umgebung von  $p$  nichtleeren Durchschnitt mit  $A$  und  $X \setminus A$  hat.



**Inneres**

Für  $A \subset X$  heißt die größte in  $X$  offene und in  $A$  enthaltene Teilmenge  $\mathring{A}$  Inneres von  $A$ .

**Bemerkung I.14.**  $\mathring{A}$  ist die Menge aller inneren Punkte von  $A$  und die Vereinigung aller in  $X$  offenen Teilmengen von  $A$ , und  $A$  ist offen  $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

**Beispiel:**

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

**Abschluss**

Der Abschluss  $\bar{A}$  von  $A$  ist  $X \setminus ((X \setminus A))$ .

**Rand**

Der Rand  $\partial A$  von  $A$  ist

$$\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A},$$

d.h. Rand  $A = \{ \text{Randpunkte von } A \}$ .

(TODO:Exkurs zu ‘Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander’)

**Stetigkeit**

$f: X \rightarrow Y$  ist stetig : $\Leftrightarrow \forall$  offenen Mengen in  $Y$  ist das Urbild unter  $f$  offene Menge in  $X$ .

**Beispiel:**

- $f: X \rightarrow Y$  ist stetig  $\Leftrightarrow$  Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- Sind  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$  Topologien auf  $X$ , so ist die Identität  $\text{id}: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$  stetig  $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ .

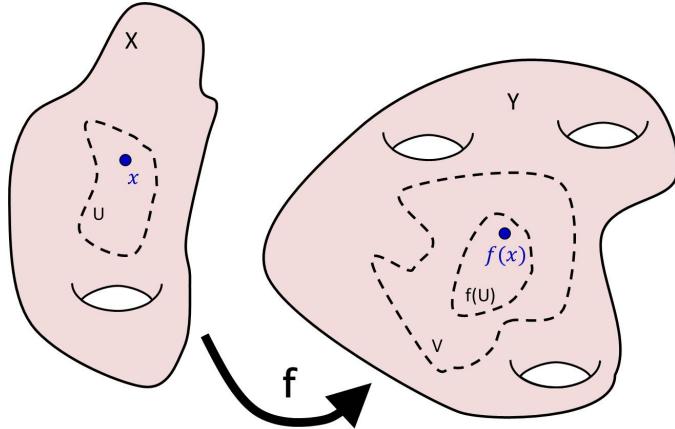
- Für  $A \subset X$  ist die Teilraumtopologie  $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}|_A$  die gröbste Topologie, bezüglich der die Inklusion  $i: A \hookrightarrow X, a \mapsto a$  stetig ist.

### Stetigkeit

$f: X \rightarrow Y$  ist stetig in  $x \in X$

$\Leftrightarrow \forall$  Umgebungen  $V$  von  $f(x)$   $\exists$  Umgebung  $U$  von  $x$  mit

$$f(U) \subset V.$$



**Bemerkung I.15.**  $f: X \rightarrow Y$  ist stetig  $\Leftrightarrow f$  ist stetig in jedem Punkt  $x \in X$ .

### Beispiel:

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in  $x \in X$  genau dann, wenn für jeden offenen Ball  $B$  um  $f(x)$  ein offener Ball um  $x$  existiert, der unter  $f$  in  $B$  abgebildet wird. (Und ferner stetig in  $x \in X$  genau dann, wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x' \in X$  mit  $d_X(x, x') < \delta$  auch  $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$  folgt.)

### Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind  $X, Y$  metrische Räume, so heißt eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  isometrische Einbettung

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in X \text{ gilt } d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x').$$

Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.

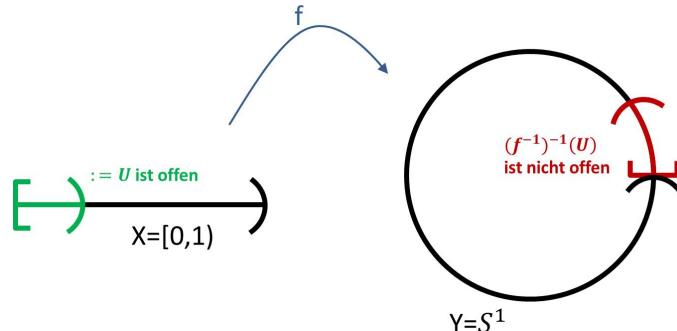
Ist  $f$  zusätzlich bijektiv, so heißt  $f$  Isometrie.

### Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind.

#### Beispiel:

- $f: [0, 1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi it} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!



- $id_X: X \rightarrow X$  ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.

**Bemerkung I.16.** ‘Homöomorph sein’ ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.

### homöomorph

Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen  $X \cong Y$ , falls es einen Homöomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  gibt.

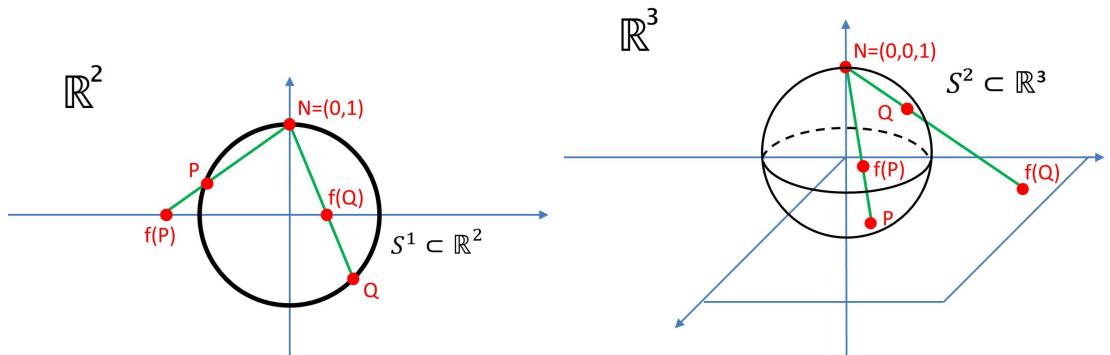
**Bemerkung I.17.** Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:

- Ist  $f: X \rightarrow Y$  Homöomorphismus, so ist  $U \subset X$  offen  $\Leftrightarrow f(U)$  offen in  $Y$ .
- $A \subset X$  ist abgeschlossen  $\Leftrightarrow f(A)$  ist abgeschlossen in  $Y$ .
- $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ ,  $f(\mathring{A}) = (f(\mathring{A}))$ .
- $U$  ist Umgebung von  $x \in X \Leftrightarrow f(U)$  ist Umgebung von  $f(x)$ .

**Beispiel:**

- Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- $[0, 1] \cong [a, b] \forall a < b \in \mathbb{R}$
- $(0, 1) \cong (a, b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$

**Beispiel: Stereographische Projektion**



Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von  $S^n \setminus \{N\}$ ,  $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , gegeben wie folgt:

Der Schnitt der Geraden im  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $N$  und  $x \in S^n \setminus \{N\}$  mit der Hyperebene  $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ ,  $f(x)$ , ist gegeben durch  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$  mit Umkehrabbildung  $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1})$ .

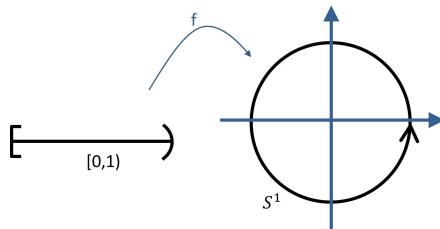
### Einbettung

$f: X \rightarrow Y$  stetig heißt Einbettung

$$\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y \text{ Homöomorphismus.}$$

### Beispiel:

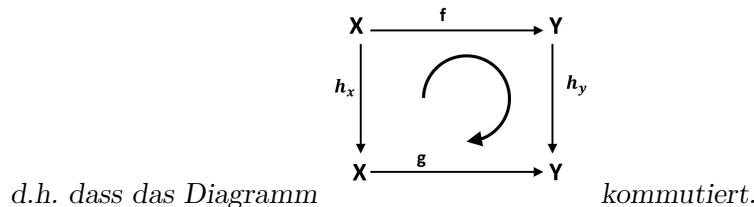
- Für  $A \subset X$  ist die Inklusion  $\iota: A \hookrightarrow X, x \mapsto x$ , stets eine Einbettung.
- $[0, 1] \rightarrow S^1$  ist keine Einbettung!



- Der Satz über die Umkehrabbildung/ Impliziter Funktionensatz aus der Analysis zeigt:  
Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und in  $p \in \mathbb{R}^n$  die Jacobi-Matrix  $Df(p)$  invertierbar, so existiert eine Umgebung von  $p$ , auf der  $f|_U$  eine Einbettung ist.

### Äquivalenz von Einbettungen

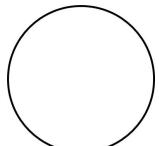
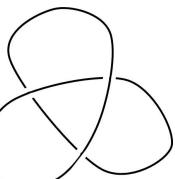
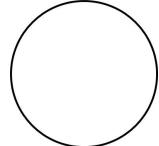
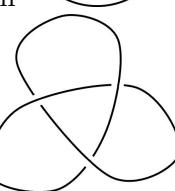
Zwei Einbettungen  $f, g: X \rightarrow Y$  heißen äquivalent  $\Leftrightarrow \exists$  Homöomorphismen  $h_X: X \rightarrow X, h_Y: Y \rightarrow Y$  mit  $g \circ h_X = h_Y \circ f$ ,



### Knoten

Eine Einbettung  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt Knoten.

**Beispiel:**

Die Knoten mit Bildern  und  sind äquivalent, die  
mit  und  nicht!

## Kapitel II

# Topologische Eigenschaften

### **zusammenhängend**

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend : $\Leftrightarrow$  Die einzigen in  $X$  gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind  $\emptyset$  und  $X$ .

Ansonsten heißt  $X$  un- oder nicht zusammenhängend.

### **Überdeckung**

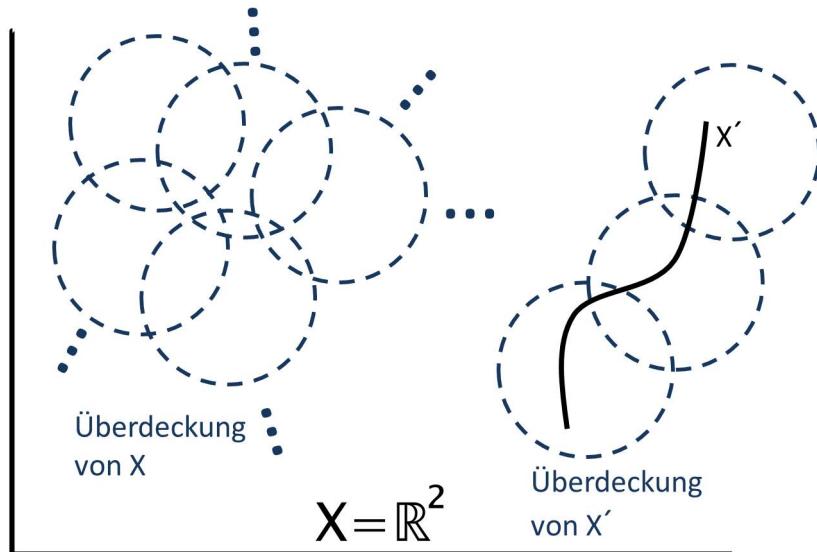
Eine Familie  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ <sup>a</sup> von Teilmengen von  $X$  heißt Überdeckung von  $X$  : $\Leftrightarrow X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .

$\mathcal{U}$  heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung  $\Leftrightarrow$  alle  $U_\alpha$  sind offen beziehungsweise abgeschlossen.

Für  $X' \subset X$  heißt eine Familie  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  wie oben Überdeckung von  $X'$  : $\Leftrightarrow X' \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .

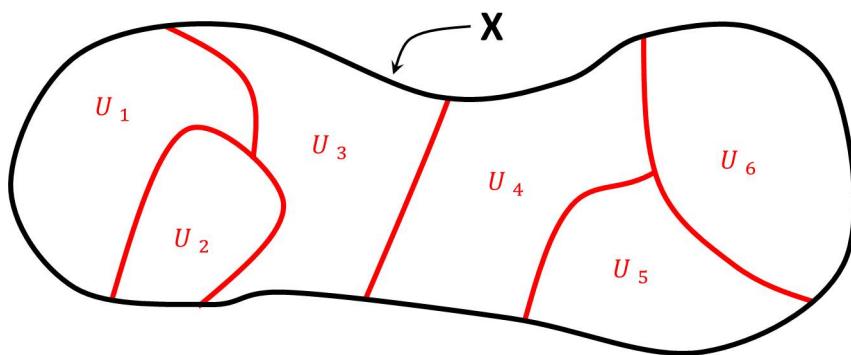
---

<sup>a</sup>A Indexmenge



### Partition

Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte Teilmengen.



**Bemerkung II.1.** Ein topologischer Raum  $X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  Es existiert keine Partition von  $X$  in zwei nichtleere offene Teilmengen  $\Leftrightarrow$  es existiert keine Partition von  $X$  in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen  
Denn:  $A \subset X$  ist offen und abgeschlossen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  sind offen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  sind abgeschlossen

**Beispiel:**

- $\mathbb{Q}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, denn  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \pi)) \cup (\mathbb{Q} \cap (\pi, +\infty))$ .
- Die einzigen zusammenhängenden und mit der diskreten Topologie versehenen Räume sind  $\emptyset$  und der nur aus einem Punkt bestehende Raum.

**Bemerkung II.2.** Allgemein sagt man von einer Menge, sie sei zusammenhängend, wenn diese, aufgefasst als Teilraum eines topologischen Raumes, zusammenhängend ist.

**Beispiel:**

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist zusammenhängend, aber  $[0, 1] \cup (2, 3)$  nicht!

**Beispiel:**

Eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}_{T_1}$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow A$  ist leer, einpunktig, oder unendlich!

**Bemerkung II.3** (Eigenschaften zusammenhängender Mengen). •  $A$  zusammenhängend  $\Rightarrow \bar{A}$  zusammenhängend

- $A, B \subset X$  zusammenhängend,  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$  zusammenhängend
- $A \cup B$  zusammenhängend,  $A \cap B$  zusammenhängend  $\not\Rightarrow A, B$  zusammenhängend ( $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ )

**Zusammenhangskomponente**

Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes  $X$  ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von  $X$ .

**Bemerkung II.4.** • Jeder Punkt von  $X$  liegt genau in einer Zusammenhangskomponente, und diese ist die Vereinigung aller diesen Punkt enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen.

- Zwei Zusammenhangskomponenten sind damit entweder gleich oder disjunkt.
- Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

**Satz II.1.** Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

(D.h.: Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  zusammenhängend, so auch  $f(X) \subset Y$ .)

*Beweis.* Es sei ohne Einschränkung  $Y = f(X)$  und sei  $Y = U \cup V$  Partition von  $Y$  in zwei offene Mengen  $\Rightarrow f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  sind offen in  $X$  ( $f$  stetig) und bilden eine Partition von  $X$ .  $X$  ist zusammenhängend.  $\Rightarrow f^{-1}(U)$  oder  $f^{-1}(V) = \emptyset$ .

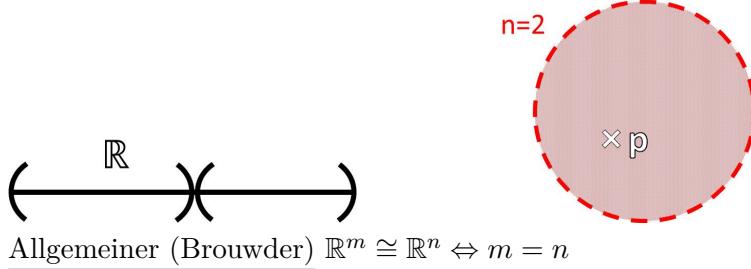
Sei o.E.  $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow V = f(X)$  ( $f$  surjektiv auf  $f(X)$ )  
 $\Rightarrow$  Es existiert keine Partition von  $Y$  in nichtleere offene Mengen  $\Leftrightarrow Y$  zusammenhängend.  $\square$

**Korollar II.1.** *Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, und ebenso die Zahl der Zusammenhangskomponenten.*

**Beispiel:**

Für  $n > 1$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}$  nicht homöomorph!

Denn:  $\mathbb{R}^n \cong \mathring{D}^n$  (Einheitskugel) und nimmt man aus  $\mathring{D}^n$  einen Punkt  $p$  heraus, so bleibt für  $n > 1$   $\mathring{D}^n \setminus \{p\}$  zusammenhängend,  $\mathring{D}^1 = (-1, 1) \cong \mathbb{R}$  aber nicht!

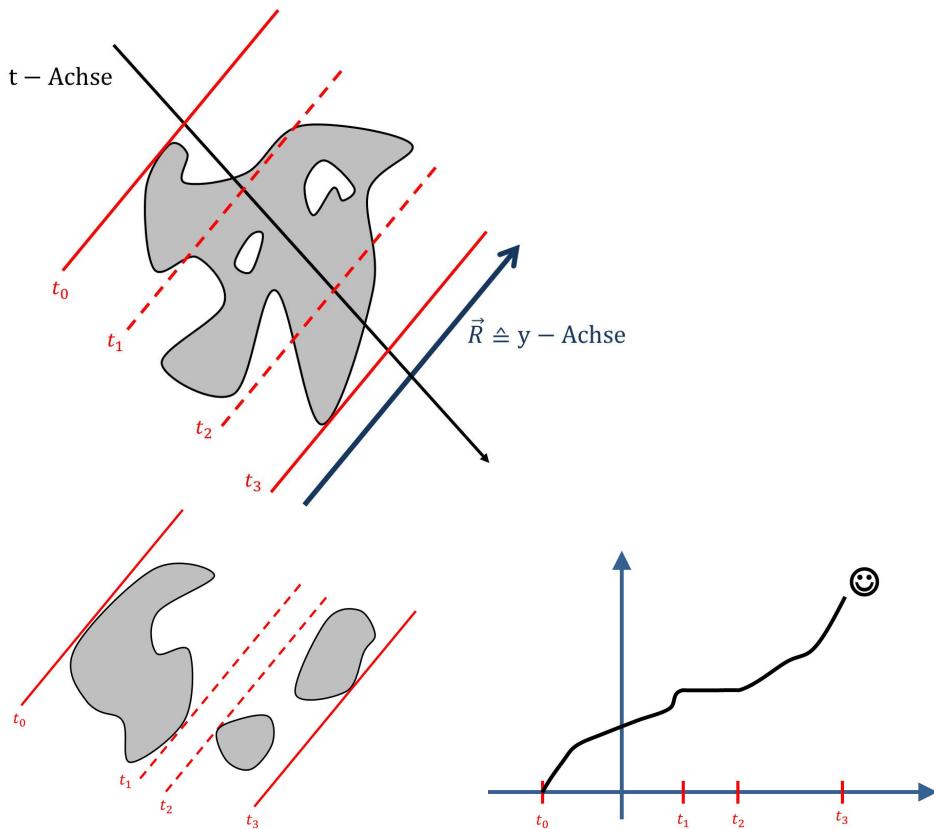


Allgemeiner (Brouwder)  $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow m = n$

**Korollar II.2.** *Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.*

**Beispiel: Waffel teilen.**

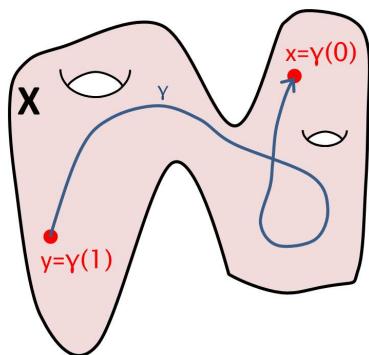
Eine Waffel, wie unregelmäßig auch immer, lässt sich immer in zwei gleich große Teile schneiden.



Bei unzusammenhängenden Waffeln ist die Schnittgerade selbst bei vorgegebener Schnittrichtung nicht eindeutig.

### Weg, Anfangspunkt, Endpunkt

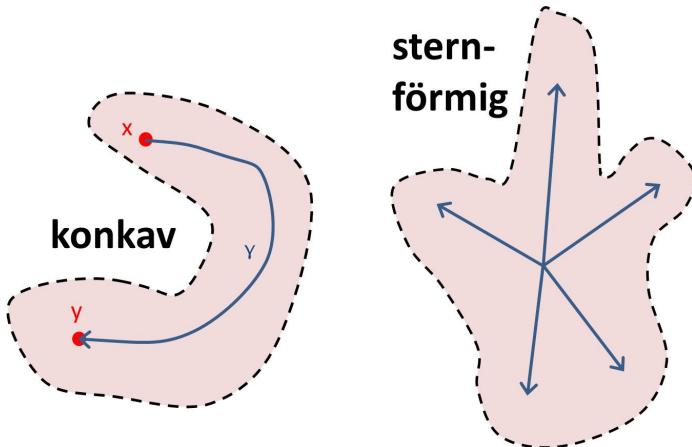
ein Weg in einem topologischen Raum  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ , und  $\gamma(0)$  heißt Anfangs-,  $\gamma(1)$  Endpunkt.



### Wegzusammenhang

$X$  heißt wegzusammenhängend

$$\Leftrightarrow \text{Zu je zwei Punkten } x, x' \in X \quad \exists \text{ Weg } \gamma: [0, 1] \rightarrow X \\ \text{mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = x'.$$



Beispiel:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$B = A \cup \{(0, 0)\}$$

$\Rightarrow B$  ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

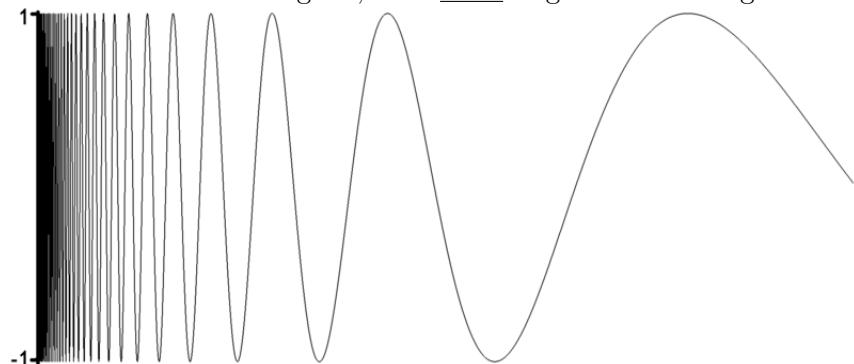


Bild: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sinuseinsdurchx.png&filetimestamp=20080624085708>

### Kompaktheit

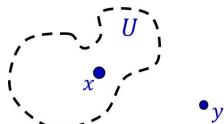
Ein topologischer Raum  $X$  heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung enthält.

## 1 Trennungseigenschaften

### $T_1$ -Raum

Ein topologischer Raum  $X$  heißt  $T_1$ -Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom : $\Leftrightarrow$  Für je zwei verschiedene Punkte von  $X$  existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in  $X$ , die den anderen nicht enthält.

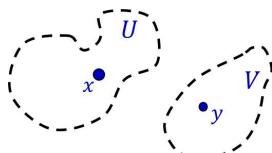
$$\forall x \neq y \in X \exists U = U_x : y \notin U_x$$



### $T_2$ -Raum

$X$  heißt Hausdorff- oder  $T_2$ -Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom : $\Leftrightarrow$  Je zwei verschiedene Punkte in  $X$  besitzen disjunkte Umgebungen.

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y \text{ mit } U_x \cap U_y = \emptyset$$



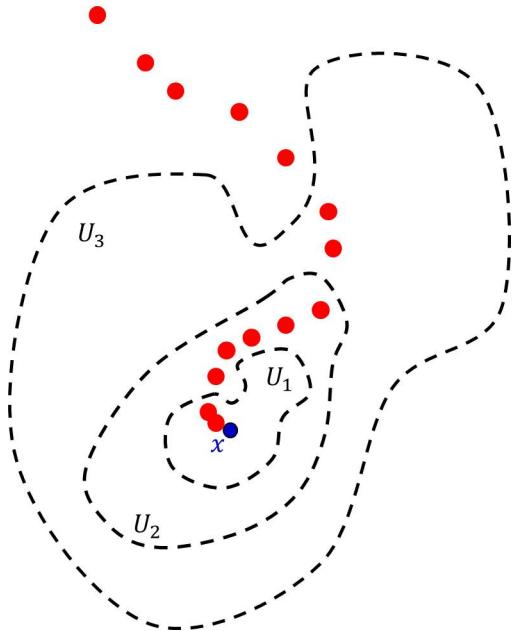
### Beispiel:

Jeder metrische Raum ist Hausdorff-Raum.

**Bemerkung II.5.** Hausdorff-Räume sind z.B. deshalb wichtig, weil Grenzwerte dort eindeutig sind!

### Grenzwert

Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum  $X$ , so heißt  $x \in X$  Grenzwert der Folge  $(x_n)$  genau dann, wenn zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n \in U \quad \forall n \geq N$ .



### Beispiel:

In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.

**Bemerkung II.6.** *Hausdorff-Räume sind auch  $T_1$ -Räume, aber:*

### Beispiel:

In  $X = \mathbb{R}_{T_1}$  ist jeder Punkt abgeschlossen ( $\Rightarrow T_1$ ), doch je zwei nichtleere offene Mengen schneiden sich -  $X$  ist damit nicht  $T_2$ ! "Schlimmer": In  $\mathbb{R}_{T_1}$  ist jeder Punkt Grenzwert der Folge  $x_n = n$ ! Denn eine Umgebung eines Punktes in  $\mathbb{R}_{T_1}$  hat die Form  $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_M\}$  mit  $x_1 < \dots < x_M$ . Dann gilt aber  $x_n = n \in U \forall n > x_M$ .

## 2 Abzählbarkeitsaxiome

### Umgebungsbasis

Ist  $X$  topologischer Raum und  $x \in X$ , so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von  $X$  in  $x$  eine Familie von Umgebungen von  $x$ , sodass jede Umgebung von  $x$  eine Umgebung aus der Familie enthält.

#### Beispiel:

Ist  $B$  Basis der Topologie eines Raumes  $X$ , so ist für jedes  $x \in X$   $\{U \in B \mid x \in U\}$  eine Basis von  $X$  in  $x$ .

#### Beispiel:

In einem metrischen Raum  $X$  sind folgende Mengen von Bällen Basen von  $X$  in  $x \in X$ :

- alle offenen Bälle mit Zentrum  $x$
- alle offenen Bälle mit Zentrum  $x$  und rationalen Radii

#### Beispiel:

Ist  $X$  mit der diskreten bzw. trivialen Topologie versehen, so ist die ‘kleinste’ Basis in  $x \in X$  gegeben durch  $\{\{x\}\}$  bzw.  $\{X\}$ .

### Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

$X$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom : $\Leftrightarrow$  jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine abzählbare Basis.

$X$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom : $\Leftrightarrow$   $X$  selbst besitzt eine abzählbare Basis.

$X$  heißt separabel : $\Leftrightarrow$   $X$  enthält eine abzählbare und dichte ( $\bar{A} = X$ ) Menge  $A$ .

**Bemerkung II.7.** Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste, aber:

**Beispiel:**

Überabzählbare diskrete Räume (wie  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{diskret})$ ) erfüllen nach Beispiel 2 das erste Abzählbarkeitsaxiom, nicht aber das zweite!

**Bemerkung II.8.** Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und jeder separabile metrische Raum auch das zweite.

**Beispiel:**

$\mathbb{R}_{T_1}$  erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist aber separabel -  $\mathbb{N}$  ist dicht!

**Beispiel:**

Euklidische Räume und alle ihre Teilmengen erfüllen das 2. Abzählbarkeitsaxiom und sind separabel.

Wozu das Ganze?

~~ Funktionenräume

~~ Mannigfaltigkeiten

~~ Satz von Lindelöf: Jede offene Überdeckung eines Raumes, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, enthält auch eine abzählbare Teilüberdeckung.

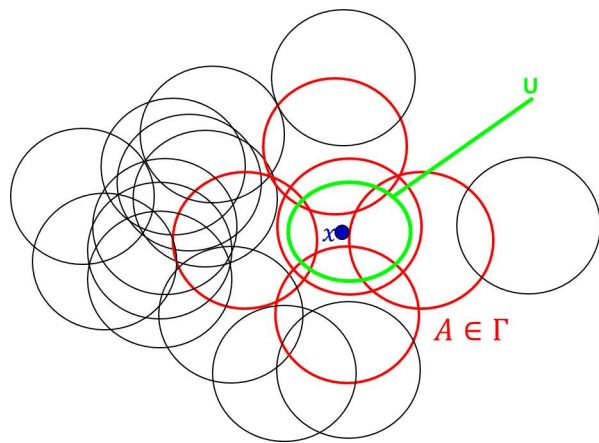
### Lokale Kompaktheit

$X$  heißt lokal kompakt

$\Leftrightarrow$  Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung  $U$ , sodass  $\overline{U}$  kompakt ist.

### Lokale Endlichkeit

Eine Familie  $\Gamma$  von Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$  heißt lokal endlich: $\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \exists U = U(x): A \cap U = \emptyset \quad \forall A \in \Gamma$  bis auf endlich viele  $A$ .

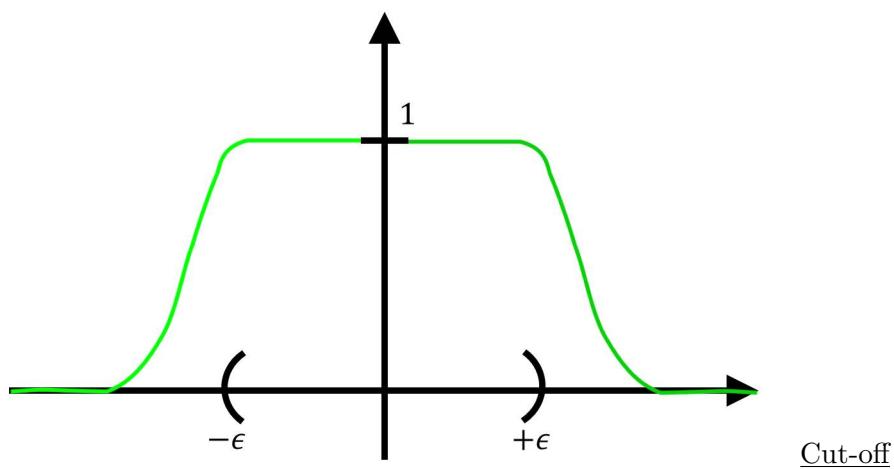


### Verfeinerung

$\Gamma, \Delta$  Überdeckungen von  $X$ .  $\Delta$  heißt Verfeinerung von  $\Gamma$   
 $\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma: A \subset B$ .

### Parakompaktheit

$X$  heißt parakompakt : $\Leftrightarrow$  Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.

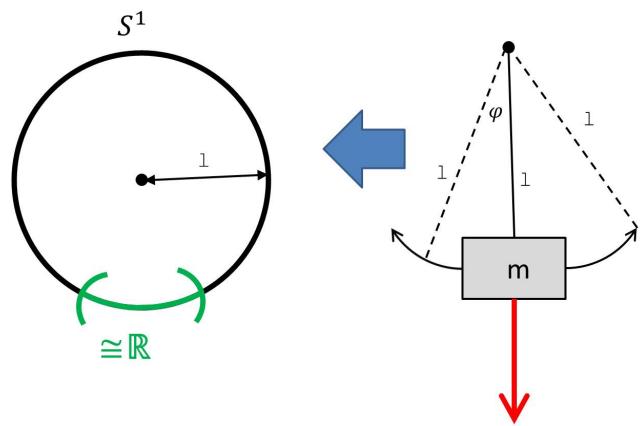
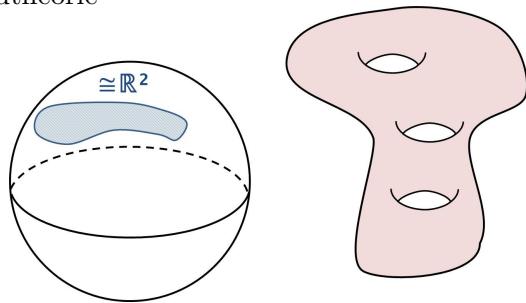


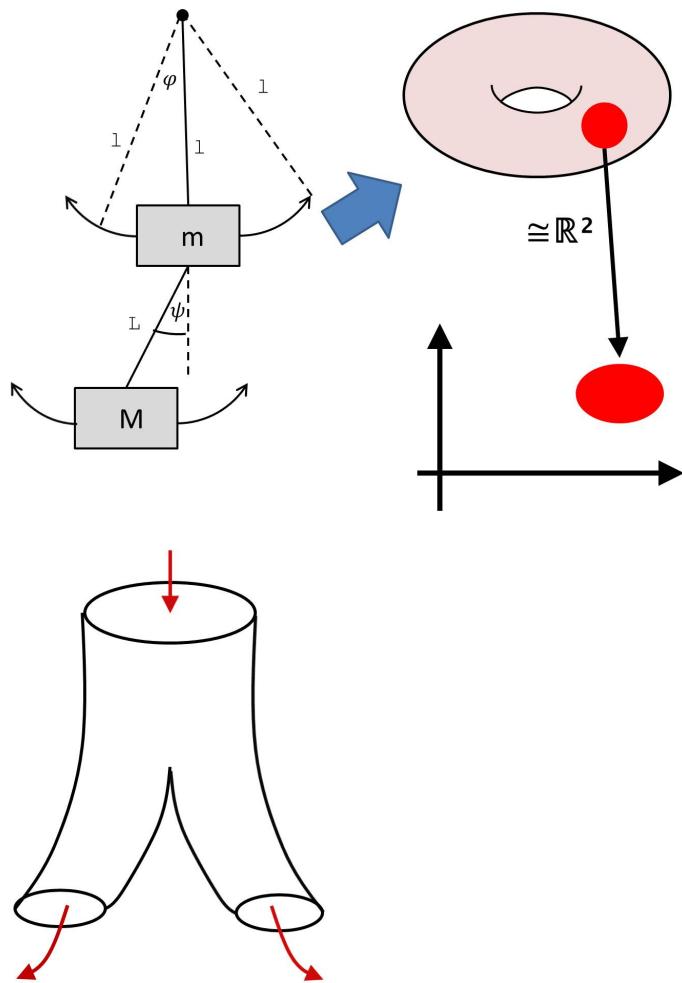
## Kapitel III

# Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume

### 1 Mannigfaltigkeiten

Beispiele zu Mannigfaltigkeiten (Exkurs) Doppelpendel, Quantenfeldtheorie

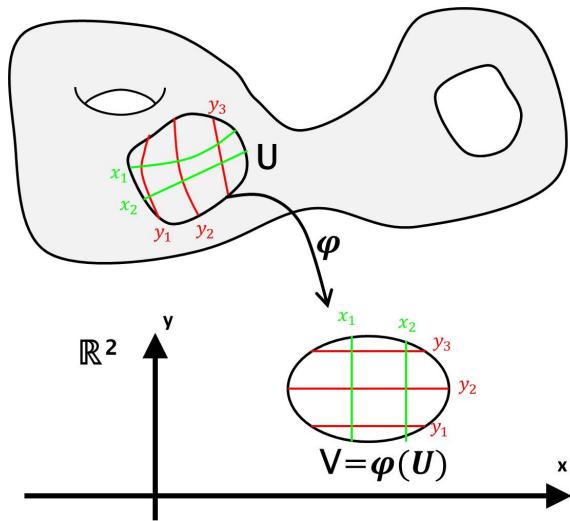




### Mannigfaltigkeit, Karte

Ein topologischer Raum  $M$  heißt  $n$ -dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1.  $M$  ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie
  2.  $M$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , d.h. zu jedem  $p \in M$  existieren eine Umgebung  $U = U(p) \subset_{\text{offen}} M$  und ein Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V, V \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$ .
- Jedes solche Paar  $(U, \varphi)$  heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um  $p$ .



**Bemerkung III.1.** Die Zahl  $n$ , die Dimension von  $M$ , ist eindeutig bestimmt! (folgt aus Brouwers Satz von der Invarianz des Gebietes)

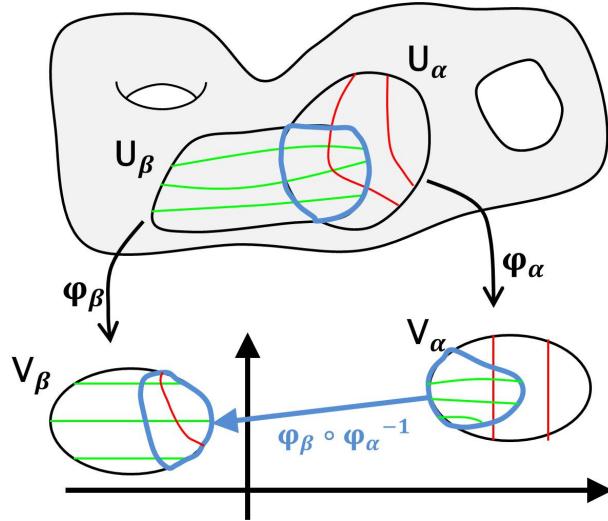
### Atlas

Ein Atlas für eine topologische  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Menge  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ <sup>a</sup> von Karten  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ , so dass  $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

<sup>a</sup>  $\Lambda$  Indexmenge

### $C^k$ -Atlas, Kartenwechsel

Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse  $C^k$  (oder:  $C^k$ -Atlas von  $M$ ), wenn für alle  $\alpha, \beta \in \Lambda$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  der Kartenwechsel  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  eine  $C^k$ -Abbildung, also  $k$ -mal stetig differenzierbar ist. ( $k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$ )

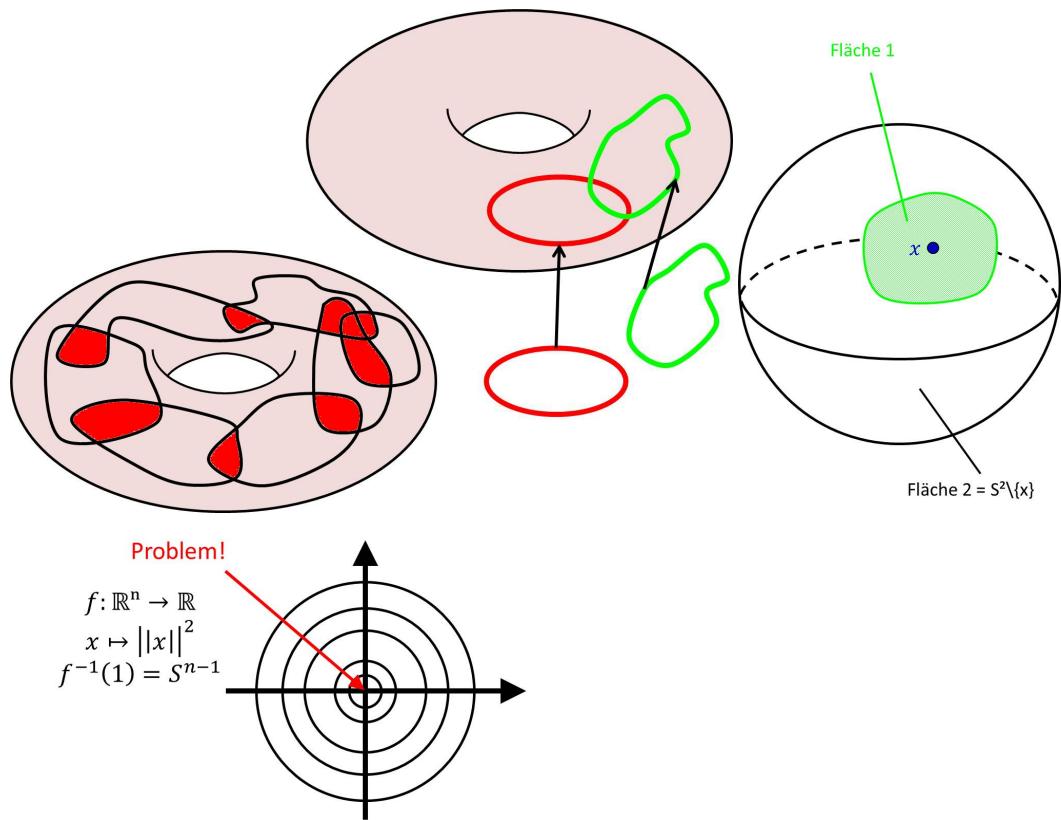


### Verträglichkeit, differenzierbare Struktur

Ist  $M$  topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein  $C^k$ -Atlas von  $M$ , so heißt eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $M$  mit  $\mathcal{A}$  verträglich, falls  $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$  ebenfalls  $C^k$ -Atlas ist. Ein  $C^k$ -Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse  $C^k$ )), falls  $\mathcal{A}$  alle mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten enthält.

### $C^k$ -Mannigfaltigkeit, glatt

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^k$  (kurz:  $C^k$ -Mannigfaltigkeit) ist ein Paar  $(M, \mathcal{A})$  bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  und einer  $C^k$ -Struktur auf  $M$ . Eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.



Richtig toller Exkurs zu Mannigfaltigkeiten ... Killing-Fields, Lie-Groups (festgenommener Matheprof kurz nach 9/11), Perverse Garben, wir leben in einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit, ...

## 2 Produkt-Topologie

### Produkt-Topologie

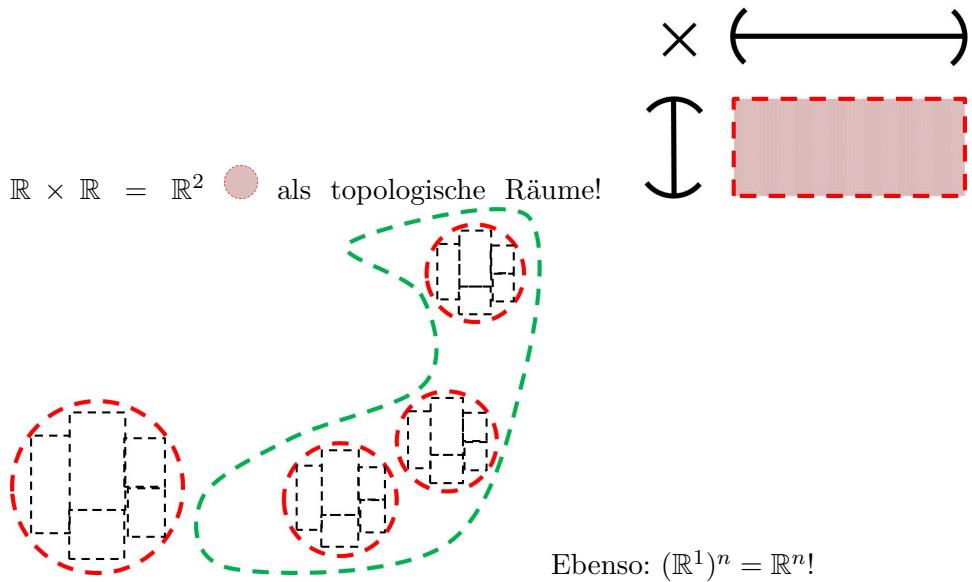
Sind  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, so bildet

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge  $X \times Y$ , und diese heißt Produkt-Topologie auf  $X \times Y$ .

Versehen mit der Produkt-Topologie ist  $X \times Y$  selbst ein topologischer Raum und für gegebene  $X, Y$  denkt man sich  $X \times Y$  stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.

**Beispiel:**



### Einige Eigenschaften der Produkt-Topologie

- Produkte von Hausdorff-Räumen sind Hausdorff-Räume.
- Produkte von zusammenhängenden Räumen sind zusammenhängend.
- Produkte von wegzusammenhängenden Räumen sind wegzusammenhängend.
- Produkte von kompakten/separablen Räumen sind kompakt/separabel.

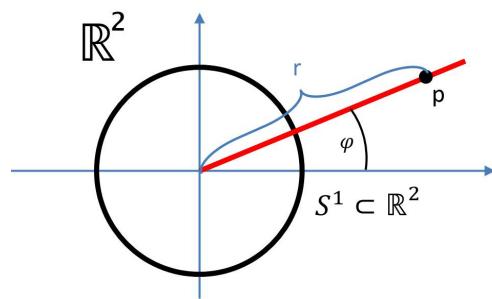
- Produkte von Räumen, die das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, erfüllen diese auch.

**Beispiel:**

Produkte topologischer oder differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind topologische oder differenzierbare<sup>1</sup> Mannigfaltigkeiten.

**Beispiel:**

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$  (Polarkoordinaten)



- $O(n) \cong SO(n) \times O(1)$
- $(S^1)^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ mal}}$  heißt n-dimensionaler Torus (TODO: Bild 3:  
Exkurs höherdimensionale Sphären)

---

<sup>1</sup>( $C^\infty$ )

### 3 Differenzierbare Abbildungen

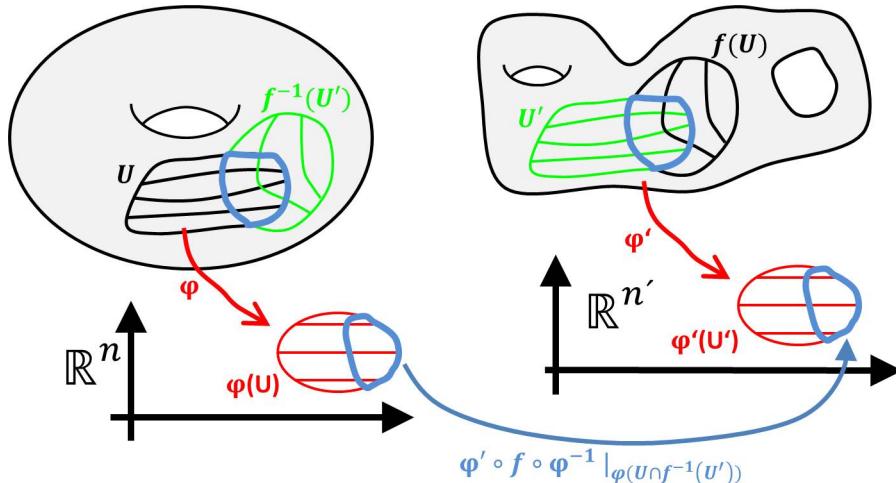
#### $C^l$ -Abbildung

Es seien  $(M, \mathcal{A})$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $(M', \mathcal{A}')$  eine  $n'$ -dimensionale  $C^{k'}$ -Mannigfaltigkeit und  $l \leq \min(k, k')$ . Eine stetige Abbildung  $f: M \rightarrow M'$  heißt differenzierbar (von der Klasse  $C^l$ ) oder kurz:  $C^l$ -Abbildung, falls gilt:

$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A}$  und  $(\varphi', U') \in \mathcal{A}'$  mit  $f(U) \cap U' \neq \emptyset$  ist

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow \varphi'(f(U) \cap U')$$

eine  $C^l$ -Abbildung im üblichen Sinn.



TODO: Exkurs über Tangentialvektoren, Vektorfelder, Satz vom Igel, Physik des starren Körpers, Differentialtopologie

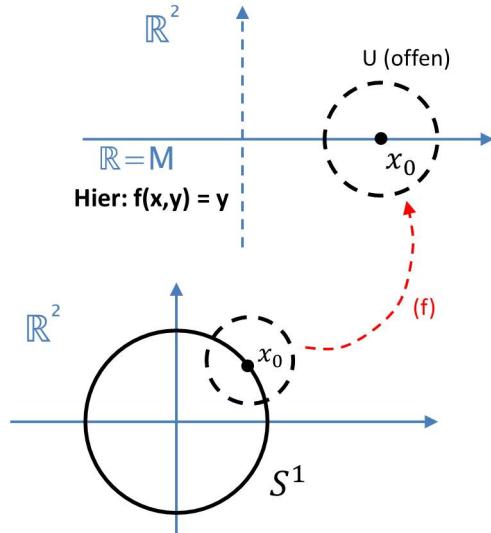
**Spezielle Mannigfaltigkeiten: Untermannigfaltigkeiten topologischer Räume:**

**Satz III.1** (Äquivalente Beschreibungen einer Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ ). Für Teilmengen  $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$  sind äquivalent:

(a)  $\forall x_0 \in M \exists$  Umgebung  $U = U(x_0) \subset \text{offen } \mathbb{R}^{n+l}$  und

$$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l) := \{g: U \rightarrow \mathbb{R}^l \mid g \text{ ist } C^\infty\} \text{ mit } \text{Rang } Df(x) = l \quad \forall x \in U$$

<sup>2</sup> dergestalt, dass  $U \cap M = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$



(b)  $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$  und  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$  mit folgenden Eigenschaften:  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+l}$  ist offen,  $\varphi$  ist  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $U \rightarrow \varphi(U)$  und

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_{n+l}) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$$

(c)  $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}, W \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\psi \in C^\infty(W, U)$  mit

- $\psi$  ist Homöomorphismus  $W \rightarrow U \cap M$
- $D\psi(w)$  ist injektiv für alle  $w \in W$

(Jedes solche  $\psi$  heißt lokale Parametrisierung von  $M$ ).

### Interpretation

- (a) besagt:  $U \cap M$  ist (im Sinne der Rangbedingung) durch  $l$  unabhängige Gleichungen  $f_1(x) = \dots = f_l(x) = 0$  definiert.
- (b) besagt: nach Anwendung eines Diffeomorphismus sieht  $U \cap M$  wie eine offene Teilmenge eines linearen Unterraumes von  $\mathbb{R}^{n+l}$  aus.
- (c) besagt:  $M$  lässt sich lokal parametrisieren.

---

<sup>2</sup> $Df$  ist die Jacobi-Matrix von  $f$

### Untermannigfaltigkeit

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$ , die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann  $n$ -dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ .

**Satz III.2.** Äquivalente Beschreibung einer glatten Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$  Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ . Es sind äquivalent:

(a)  $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$  und  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l)$  mit Rang  $Df(x) = l$  für alle  $x \in U$  dergestalt, dass  $U \cap M = f^{-1}(0)$ .

(b)  $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$  und  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  ist offen
- $\varphi$  ist  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $U \rightarrow \varphi(U)$
- $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$

(c)  $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\psi \in C^\infty(W, U)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\psi$  ist Homöomorphismus  $W \rightarrow U \cap M$
- $D\psi(w)$  ist injektiv für alle  $w \in W$ .

#### Beispiel:

zu (a)

Die  $n$ -Sphäre vom Radius  $r$

$$S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$$

ist eine  $n$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Denn: Definiere  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|^2 - r^2$ . Dann gilt:

- $S_r^n = f^{-1}(0)$  und
- $Df(x) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) = 2x$  erfüllt Rang  $Df(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supseteq S_r^n$  (wegen  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$ ).

Allgemeiner:

- Niveaumengen: Es seien  $V \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ ,  $f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$ ,  $c \in \mathbb{R}^l$ . Gilt  $\overline{\text{Rang } Df(x)} = l$  in jedem Punkt  $x$  der Niveaumenge

$$f^{-1}(c) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

so ist  $f^{-1}(c)$  eine glatte  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ .

*Beweis.* (a) $\Rightarrow$ (b): Es seien  $U$  und  $f$  wie in (a) gewählt und  $f_1, \dots, f_l$  die Komponenten von  $f$ . Sei  $x_0 \in M$ . Durch Umnummerierung seien die Indizes so gewählt, dass ohne Einschränkung die Reihenfolge so, dass die  $(l \times l)$ -Matrix

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}} \right)_{i,j \in \{1, \dots, l\}}$$

in  $x_0$  invertierbar ist. Definiere die Abbildung  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}, x \mapsto (x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_l(x))$ . Dann gilt:

$$D\varphi(x_0) = (\text{TODO : Matrix2})$$

und damit

$$\det D\varphi(x_0) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}} \right)_{i,j} \neq 0.$$

Mit dem Satz über inverse Funktionen (oder "Satz über die Umkehrabbildung") folgt: Es existieren Umgebungen  $U' = U'(x_0) \subseteq U$  und  $V'(\varphi(x_0)) \subseteq V = \varphi(U)$ , so dass  $\varphi|_{U'}: U' \rightarrow V'$  ist  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

Es gilt:  $\varphi(U' \cap M) = \{(y_1, \dots, y_{n+l}) \in \varphi(U') \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$ , denn: " $\subseteq$ " ist klar nach Definition von  $f$  und  $\varphi$ .

" $\supseteq$ " : Ist  $y$  Element der rechten Seite, so existiert  $x \in U'$  mit  $\varphi(x) = y$  und  $f(x) = 0$ . Da  $x \in U' \subseteq U$  und  $f(x) = 0$ , gilt:  $x \in U' \cap M$ , und damit  $y = \varphi(x) \in \varphi(U' \cap M)$ .

(b) $\Rightarrow$ (c): Es seien  $U$  und  $\varphi$  wie in (b) gewählt und

$$\pi: \mathbb{R}^{n+l} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+l}) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

die Projektion und

$$\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

die Inklusion.

Setze  $W := \pi(\varphi(U \cap M))$  und definiere  $\psi: W \rightarrow U$  durch  $\psi := \varphi^{-1} \circ \iota$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+l} & \xleftrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^n \\ \varphi \uparrow & \pi & \cup \\ \mathbf{U} & \xleftarrow[\psi = \varphi^{-1} \circ \iota]{} & \mathbf{W} \end{array}$$

Dann ist  $W$  offen und  $\psi: W \rightarrow U \cap M$  ein Homöomorphismus, denn  $\iota': W \rightarrow \varphi(U \cap M)$  ist Homöomorphismus und  $\varphi^{-1}: \varphi(U \cap M) \rightarrow U \cap M$  ist Homöomorphismus.

Mit der Kettenregel folgt: Für alle  $w \in W$  gilt:

$$D\psi(w) = D(\varphi^{-1} \circ \iota')(w) = (\underline{D\varphi^{-1}})(\iota'(w)) \cdot D\iota'(w)$$

$$\begin{aligned} (D\varphi^{-1})(y) &= ((D\varphi)(\varphi^{-1}(y)))^{-1} \cdot ((D\varphi)(\varphi^{-1}(\iota'(w))))^{-1} \circ \iota' \\ &= (D\varphi(\psi(w)))^{-1} \circ \iota'. \end{aligned}$$

Somit ist  $D\psi(w)$  als Komposition einer bijektiven und einer injektiven Abbildung injektiv für alle  $w \in W$ .

(c) $\Rightarrow$ (a): Es seien  $U, W$  und  $\psi$  wie in (c) gewählt und  $\psi(\hat{w}) = x_0$  für  $\hat{w} \in W$ . Da  $\text{Rang } D\psi(\hat{w}) = n$  folgt nach evtl. Umnummerierung

$$\left( \frac{\delta \psi_i}{\delta w_j} (\hat{w}) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

ist invertierbar. Definiere  $g: W \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}, (w, y) \mapsto \psi(w) + (0, y)$ , d.h.  $g(w_1, \dots, w_n, y_1, \dots, y_l) = (\psi_1(w), \dots, \psi_n(w), \psi_{n+1}(w) + y_1, \psi_{n+l}(w) + y_l)$ . Dann gilt:

$$Dy(\hat{w}, 0) = (\text{TODO : Matrix4})$$

ist invertierbar. Mit dem Satz über inverse Funktionen folgt: Es existieren Umgebungen  $V = V((\hat{w}, 0)) \subseteq W \times \mathbb{R}^l$  und  $U' = U'(g(\hat{w}, 0))$ , so dass  $g|_V: V \rightarrow U'$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist.

Verkleinert man gegebenenfalls  $V$ , so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass gilt:  $U' \subseteq U$ . Da  $\{w \in W \mid (w, 0) \in V\}$  offen ist in  $W$  und  $\psi: W \rightarrow \psi(W)$  nach Voraussetzung ein Homöomorphismus ist, folgt:  $\{\psi(w) \mid (w, 0) \in V\}$  ist offen in  $\psi(W)$ .

Nach Definition der Unterraumtopologie existiert  $U'' \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$  mit  $\{\psi(w) \mid (w, 0) \in V\} = U'' \cap \psi(W)$ .

Wegen  $\psi(w) = g(w, 0)$  bedeutet dies:

$$(*) U'' \cap \psi(W) = g(V \cap (W \times \{0\})).$$

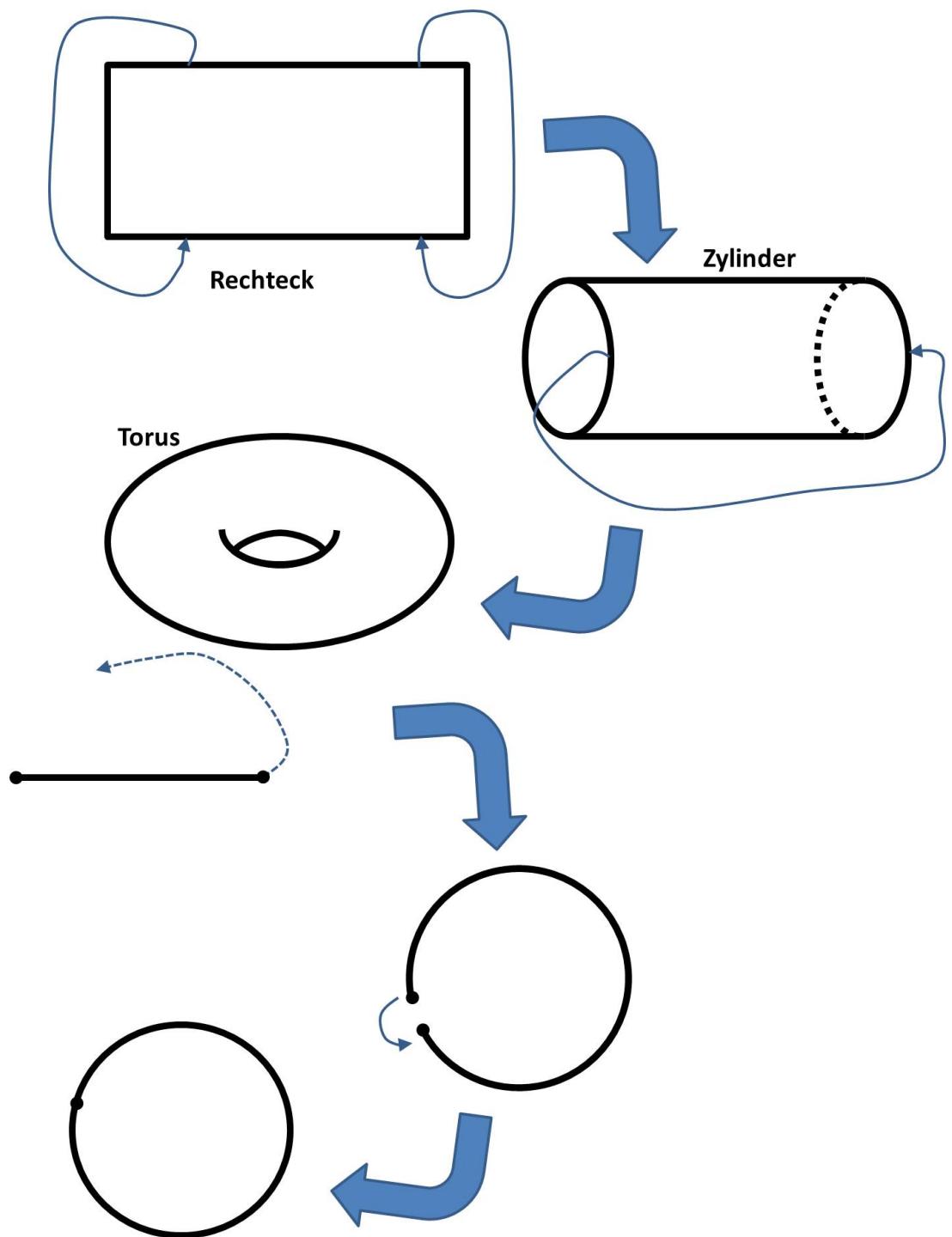
Setze  $\tilde{U} := U' \cap U'', \tilde{V} := (g|_V)^{-1}(\tilde{U}) = g^{-1}(\tilde{U}) \cap V$ . Dann ist  $g|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

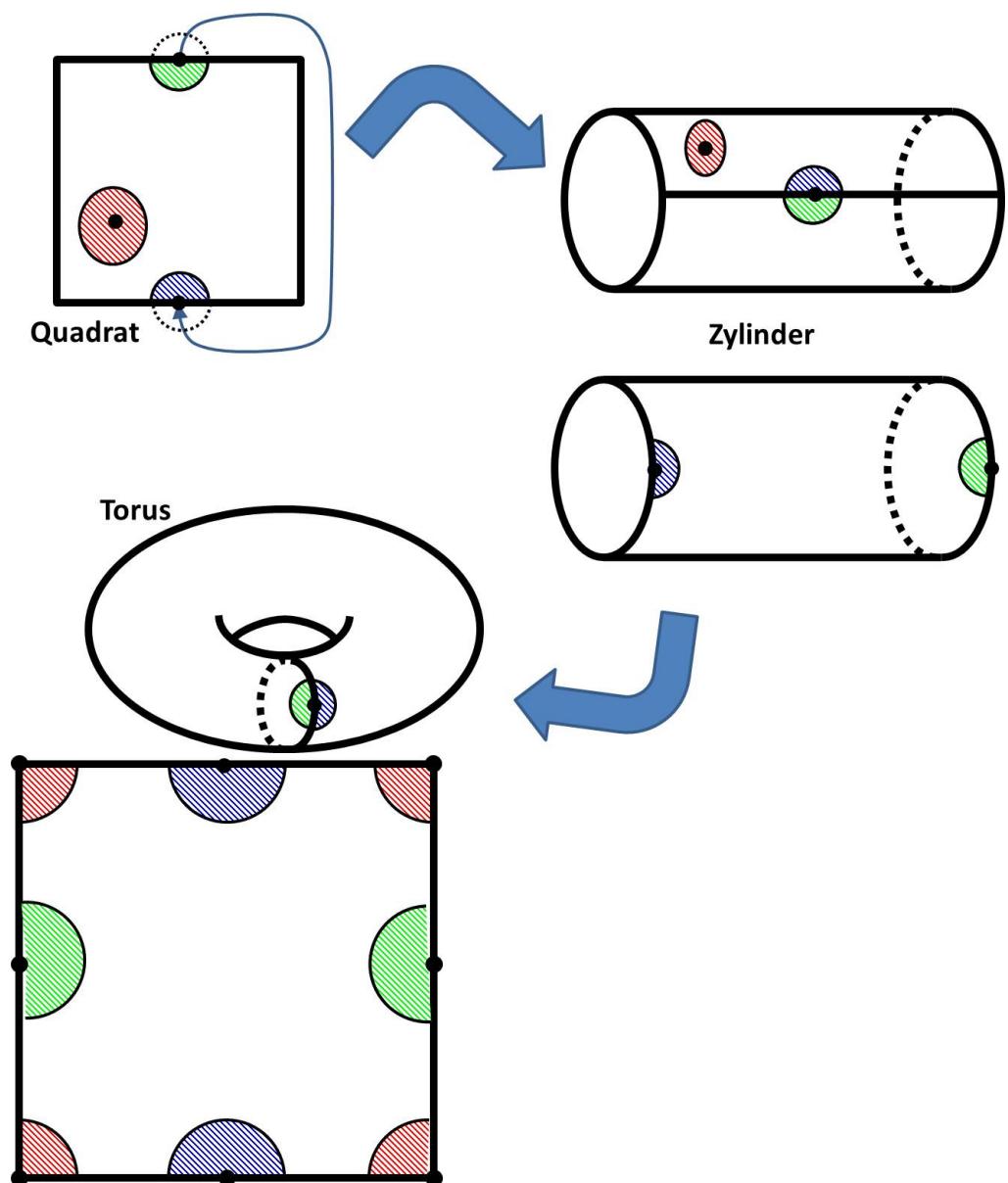
Behauptung: Es gilt:  $\tilde{U} \cap M = g(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$ .

[Beweis: folgt mit (\*)].

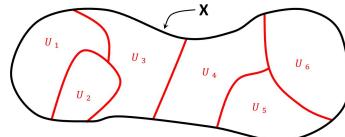
Ist  $\pi: \mathbb{R}^{n+l} \rightarrow \mathbb{R}^l, (x_1, \dots, x_{n+l}) \mapsto (x_{n+1}, \dots, x_{n+l})$  die Projektion, so erfüllt  $f := \pi \circ (g|_{\tilde{V}})^{-1}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^l$  die Bedingung in (a).  $\square$

**Satz III.3.** ( $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^{n+l}$  sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten)  
Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$   $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$  und  $\{\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$  eine Menge lokaler Parametrisierungen (wie in (c)) mit  $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ . Dann ist  $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas und  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.





## 4 Quotientenräume



**Erinnerung** Jede Partition bestimmt eine Äquivalenzrelation auf  $X$  (und umgekehrt).

Menge der Äquivalenzklassen (oder auch: Quotient von  $X$  nach  $S$ ) ist  $X/S$ . Zusätzlich existiert dann die Quotientenabbildung  $\pi: X \rightarrow X/S, x \mapsto [x]$

**Bemerkung III.2.** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $X/S$  ein Quotientenraum von  $X$ , so gibt es auf  $X/S$  eine natürliche Topologie:

### Quotienten(raum)topologie

Eine Teilmenge  $U \subset X/S$  heißt offen : $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$  ist offen in  $X$

**Bemerkung III.3.** Alle im Sinne dieser Definition offenen Teilmengen von  $X/S$  definieren dann eine Topologie auf  $X/S$  und die Menge  $X/S$  zusammen mit dieser Topologie heißt Quotientenraum von  $X$  nach  $S$ .

**Bemerkung III.4.**  $\pi: X \rightarrow X/S, X/S$  versehen mit der Quotiententopologie, ist dann eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

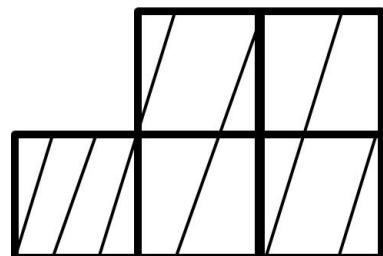
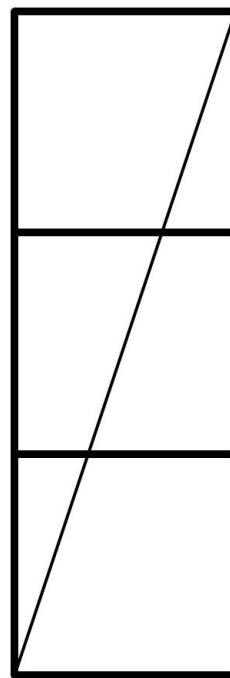
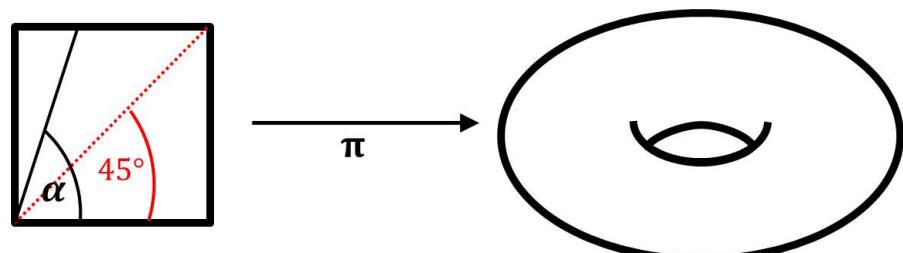
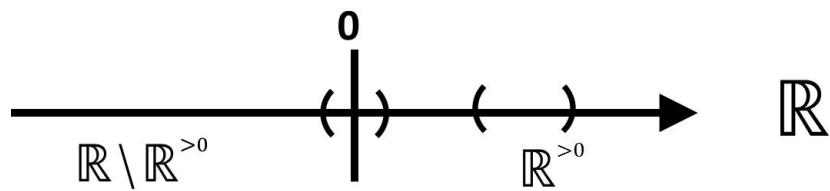
### Eigenschaften der Quotiententopologie

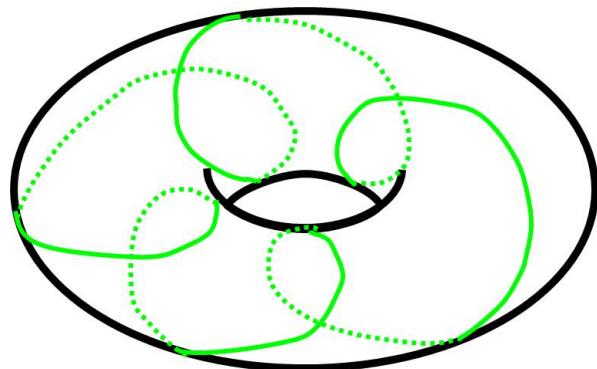
- Quotientenräume zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.
- Quotientenräume wegzusammenhängender Räume sind wegzusammenhängend.
- Quotientenräume separabler Räume sind separabel.
- Quotientenräume kompakter Räume sind kompakt.

**Achtung:** Die Hausdorff-Eigenschaft vererbt sich i.a. nicht!

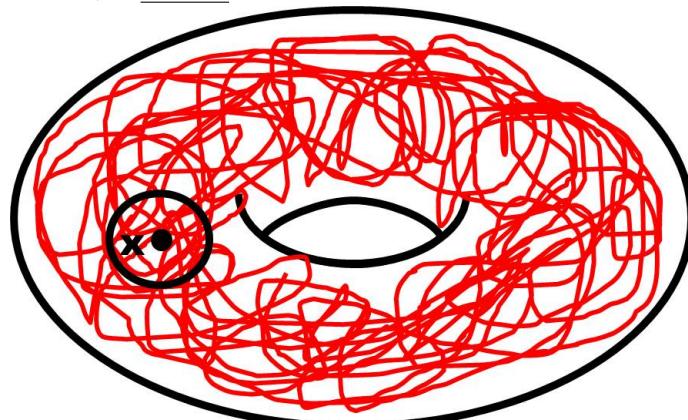
**Beispiel:**

$$X = \mathbb{R}, \quad S := \{\mathbb{R}^{>0}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^{>0}\}$$





$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : ÜBEL!



$t \mapsto e^{2\pi i t}$

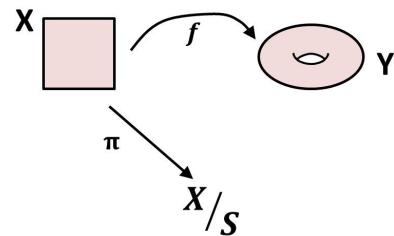
$T^2$  ist Hausdorffsch,  $T^2 / \sim$  nicht!

**TODO:** Exkurs: Instabilität von Planetensystemen

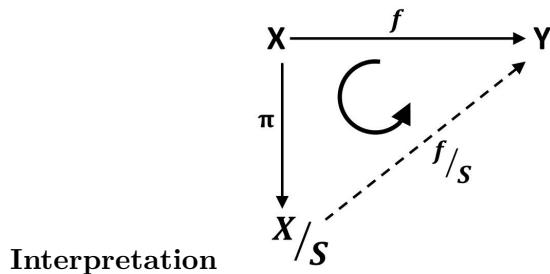
## 5 Quotientenabbildungen

### Quotientenabbildung

Ist  $S$  eine Partition von  $X$  in nichtleere disjunkte Teilmengen und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung, die auf jedem Element von  $S$  konstant ist, so existiert eine Abbildung  $X/S \rightarrow Y$ , die jedes Element  $A$  von  $S$  auf  $f(a)$ ,  $a \in A$ , abbildet.



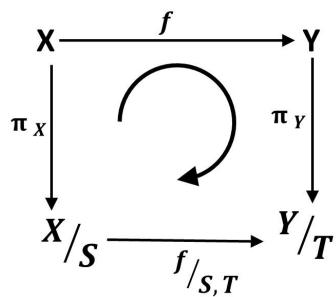
Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von  $f$  nach  $S$ , in Zeichen  $f/S$ .



**Allgemeiner**  $S$  Partition von  $X$ ,  $T$  Partition von  $Y$

$\Rightarrow$  Jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , die jedes Element von  $S$  auf ein Element von  $T$  abbildet, induziert eine Abbildung

$$f/S,T: X/S \rightarrow Y/T$$



**Bemerkung III.5.** Sind  $X, Y$  topologische Räume,  $S$  Partition von  $X$  und  $f: X \rightarrow Y$  eine auf Elementen von  $S$  konstante, stetige Abbildung, so ist auch  $f/S: X/S \rightarrow Y$  stetig.  
 $f \mapsto f/S$  ist dann Bijektion!

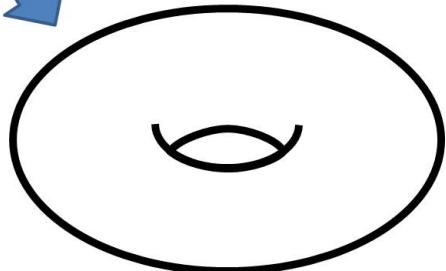
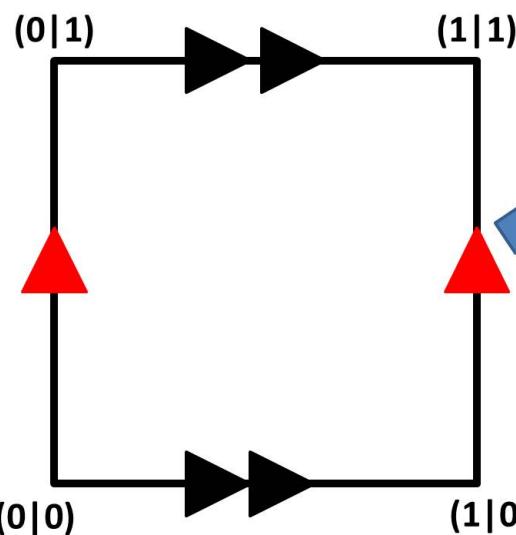
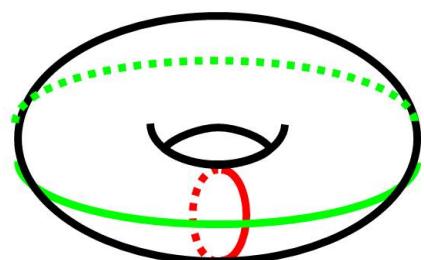
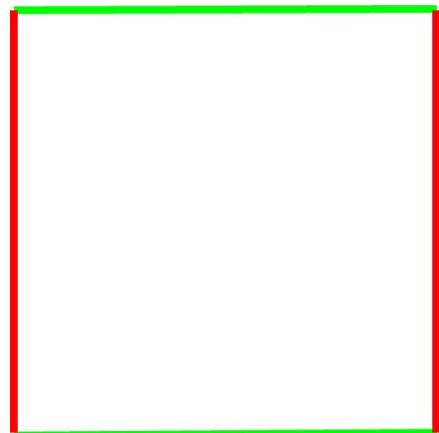
**Erinnerung**  $F: X \rightarrow Y$  stetige Bijektion von einem kompakten Raum  $X$  auf einen Hausdorff-Raum  $Y \Rightarrow F$  ist Homöomorphismus!

**Korollar III.1.**  $X$  kompakt,  $Y$  Hausdorffsch und  $f: X \rightarrow Y$  sei stetig  $\Rightarrow$  Der injektive Quotient  $f/S(f)$  ist Homöomorphismus  $X/S(f) \rightarrow f(X)$

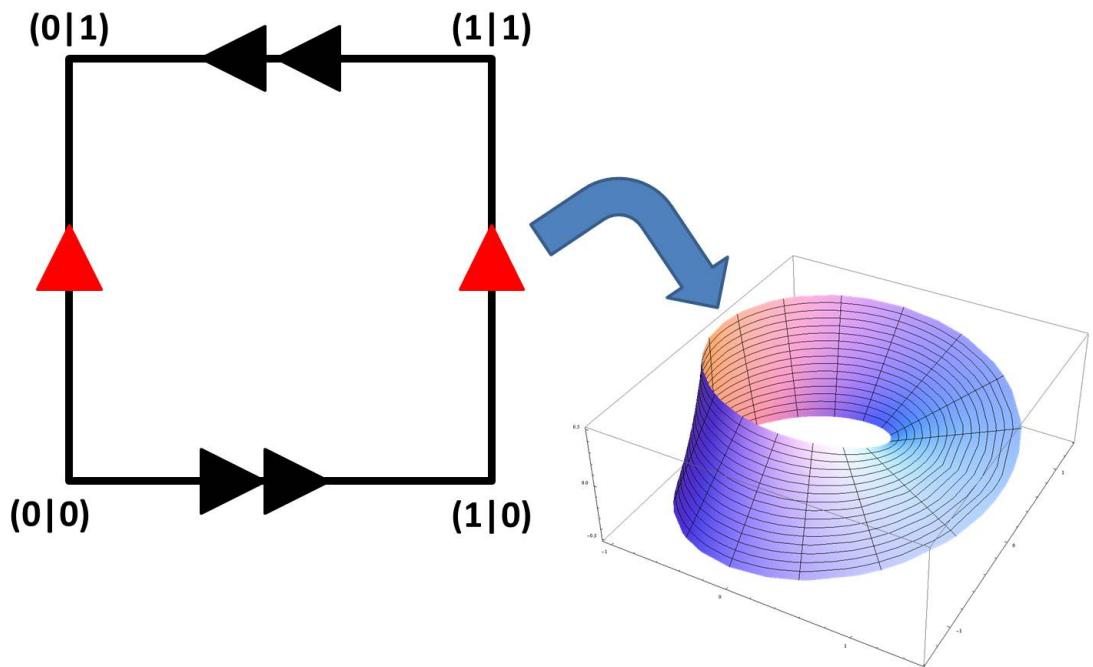
### injektiver Quotient

Jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  definiert eine Partition  $S = S(f)$  von  $X$ , und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von  $Y$  unter  $f$ . Die induzierte Abbildung  $f/S(f): X/S(f) \rightarrow Y$  ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von  $f$ .

Beispiel:



$$\begin{aligned}(x, 0) &\sim (x, 1) \\ (0, y) &\sim (1, y)\end{aligned}$$



$$(x, 0) \sim (1 - x, 1)$$

Möbiusband

Bild Möbiusband von:

<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:M%C3%BCbiusband.png&filetimestamp=20090802105255>

## 6 Konstruktionen von Quotientenräumen

Im Folgenden "Kontrahieren", "Anheften", "Verkleben" etc.

### Kontraktion

Die Quotientenmenge eines topologischen Raumes  $X$  bzgl. einer Partition  $S$  von  $X$ , welche aus einer Teilmenge  $A$  von  $X$  und allen Einpunktmengen aus  $X \setminus A$  besteht,

$$S = A \cup \{\{x\} \mid x \in X \setminus A\}$$

heißt Kontraktion (von  $X$  bzgl.  $X \setminus A$ ), und für  $X/S$  schreibt man einfach  $X/A$ .

#### Beispiel:

- $X = [0, 1]$ ,  $A = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  (TODO: Bild)

$$X/A \cong I = [0, 1]$$

- 

$$X = [0, 1], A = \{\frac{1}{3}, 1\}$$

(TODO: Bild)

$$\Rightarrow X/A \cong (TODO : Bild) \cong (TODO : Bild) \cong (TODO : Bild) \cong (TODO : Bild)$$

- $X = [0, 1], A = \{0, 1\}$  (TODO : Bild)

$$\Rightarrow X/A \cong (TODO : Bild) S^1$$

- $X = \overline{B^n}$  abgeschlossener Einheitsball in  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $S^{n-1}$  und Innenren  $B^n$ .  $A := S^{n-1} = \partial \overline{B^n}, X = \overline{B^n}$

$$X/A = S^n (TODO : Bild)$$

$$\overline{B^2}/_{S^1} = (TODO : Bild) S^2$$

Formal:  $S = S^{n-1} \cup \{\{x\} \mid x \in B^n = (\overset{\circ}{B^n})\}$ <sup>3</sup>

Mit anderen Worten: Kontraktion des Randes des abgeschlossenen  $n$ -Balles liefert die  $n$ -Sphäre!

**Bemerkung III.6.** Wie beschreibt man Partitionen  $S$  von  $X$  möglichst bequem?

Oftmals einfach durch die entsprechende Äquivalenzrelation, die  $S$  liefert, und hier dann nur durch die nicht-trivialen Relationen.

Für  $X/S$  schreibt man dann oft nur  $X/[Relation 1, Relation 2, \dots]$ .

---

<sup>3</sup> $S$  ist die Partition.

**Beispiel:**

- Für  $X = I = [0, 1]$  ist  $I/[0 \sim 1] \cong S^1$ .
- $I^2 /_{[(0,t) \sim (1,t), t \in I]} \cong (TODO : Bild) S^1 \times I$   
(TODO: Bild)

**Andere Sichtweise:** Der Zylinder  $S^1 \times I$  entsteht aus dem Quadrat  $I^2$  durch geeignetes "Verkleben" zweier Kanten.

**Verkleben**

Sind  $A$  und  $B$  disjunkte Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$  und ist  $f: A \rightarrow B$  ein Homöomorphismus, (TODO: Bild) so heißt der Übergang zum Quotientenraum, der durch die Partition von  $X$  in die Einpunktmengen von  $X \setminus (A \cup B)$  und die Zweipunktmengen  $\{x, f(x)\}, x \in A$  gegeben ist, als Verkleben (von  $X$  längs  $A$  und  $B$  via des Homöomorphismus  $f$ ) und dieser Prozess einfach auch Verkleben von  $A$  und  $B$ .

**Notation**

$$X /_{[a \sim f(a)]} \quad (\text{mit } a \in A)$$

**Beispiel:**

$$S^1 \times I$$

(TODO:Bild)

$$S^1 \times I /_{[(z,0) \sim (z,1), z \in S^1]} \cong (TODO : Bild)$$

$(TODO : Bild : Quadrat) \rightsquigarrow (TODO : Bild : Zylinder) \rightsquigarrow (TODO : Bild : Torus) (TODO : Bild)$

**Beispiel:**

(TODO: Bild 20), d.h.: Betrachte  $I^2 /_{[(0,t) \sim (1,1-t)]}$  und verklebe also die gegenüberliegenden Kanten von  $I^2$  in entgegengesetzter Richtung  $\rightsquigarrow$  Möbiusband (TODO: Bild 21)

**Beispiel: Die Kleinsche Flasche/ der Kleinsche Schlauch**

$$K := I^2 /_{[(t,0) \sim (t,1), (0,t) \sim (1,1-t)]}$$

(TODO: Bild 22) ist Quotient des Zylinders bzw. Möbiusbandes.

(TODO: Bild 23)

### Beispiel: Die projektive Ebene

(TODO: Bild 24)

$$\mathbb{P}^2\mathbb{R} \text{ (oder auch } \mathbb{RP}^2\text{)}$$

#### *n*-dimensionaler reell-projektiver Raum

Der *n*-dimensionale reell-projektive Raum ist

$$\mathbb{RP}^n := S^n /_{[x \sim -x]}$$

a

und der *n*-dimensionale komplex-projektive Raum ist

$$\mathbb{CP}^n := \underbrace{S^{2n+1}}_{\subset \mathbb{C}^{n+1}} /_{[v \sim \lambda v, \lambda \in S^1]}$$

---

<sup>a</sup>Anschaulich (projektive Geometrie): Die Menge aller Geraden durch den Ursprung im  $\mathbb{R}^{n+1}$

**TODO: Exkurs: Video von einer Kleinschen Flasche (Klein Bottle Adventures)**