

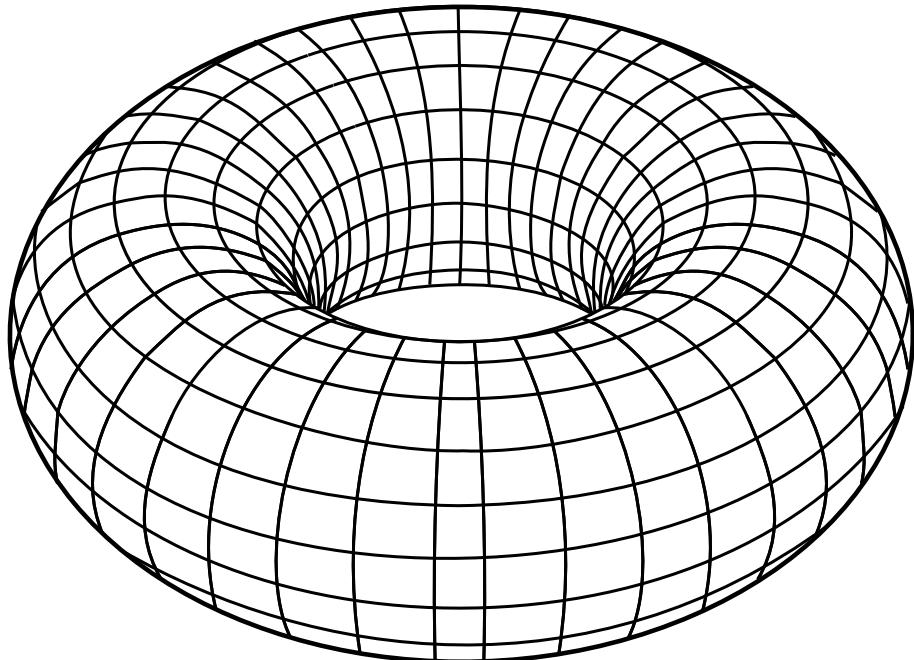
# **Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -**

**Vorlesung im Wintersemester 2011/2012**

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

[sarah.lutteropp@student.kit.edu](mailto:sarah.lutteropp@student.kit.edu), [simon-bischof@t-online.de](mailto:simon-bischof@t-online.de)

30. Januar 2012



# Inhaltsverzeichnis

<b>0 Einführung</b>	<b>2</b>
<b>I Grundlagen der Allgemeinen Topologie</b>	<b>7</b>
1 Erste Beispiele topologischer Räume . . . . .	7
2 Topologische Grundbegriffe . . . . .	8
3 Stetige Abbildungen . . . . .	13
4 Zusammenhang und Kompaktheit . . . . .	16
5 Trennungseigenschaften . . . . .	20
6 Abzählbarkeitsaxiome und lokale Kompaktheit . . . . .	22
<b>II Geometrische Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume</b>	<b>24</b>
1 Mannigfaltigkeiten . . . . .	24
2 Quotientenräume . . . . .	32
3 Quotientenabbildungen . . . . .	36
4 Konstruktionen von Quotientenräumen . . . . .	38
<b>III Konzepte der Algebraischen Topologie</b>	<b>43</b>
1 Die Fundamentalgruppe . . . . .	43
2 Überlagerungen . . . . .	58
3 Liften von Abbildungen . . . . .	66
<b>IV Topologie und Geometrie von Flächen</b>	<b>78</b>
1 Topologie von Flächen . . . . .	79
2 Die Geometrie von Flächen . . . . .	87
3 Isometrien (von Flächen) . . . . .	94

## Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

# Kapitel 0

## Einführung

Topologie ist qualitative Geometrie. Ihr grundlegendes Studienobjekt sind topologische Räume und Abbildungen zwischen diesen.

**Definition 0.1.** Ein topologischer Raum  $X$  ist gegeben durch eine Menge  $X$  und ein System  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , den so genannten offenen Mengen von  $X$ , welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und  $X$  und die leere Menge  $\emptyset$  als Elemente enthält.

*Topologischer Raum*

$X$  Menge,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ :

- (1)  $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
- (2)  $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$  Indexmenge  $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$
- (3)  $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

**Beispiel:**

$\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$  ist topologischer Raum!

**Beispiel:**

$X$  Menge,  $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\} +$  Axiome, die zu erfüllen sind  $\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$   
 $\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$  ist topologischer Raum.  $\mathcal{O}$  ist "Basis" der Topologie  $\tilde{\mathcal{O}}$ .

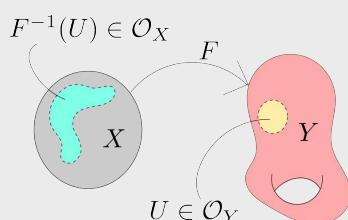
*Metrischer Raum*

**Definition 0.2.** Ein metrischer Raum  $X$  ist eine Menge  $X$  mit einer Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , der "Metrik" auf  $X$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:  $\forall x, y, z \in X$  gilt:

- (1)  $d(x, y) = d(y, x)$  "Symmetrie"
- (2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$  "Definitheit"
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  "Dreiecksungleichung"

*Stetigkeit*

**Definition 0.3.** Eine Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt stetig, falls die  $F$ -Urbilder offener Mengen in  $Y$  offene Teilmengen von  $X$  sind.



**Bemerkung 0.1.** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie<sup>1</sup> Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen  $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} (\epsilon > 0)$ , und  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle  $\epsilon > 0$  und alle  $x \in X$  ein  $\delta > 0$  existiert mit  $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$ .

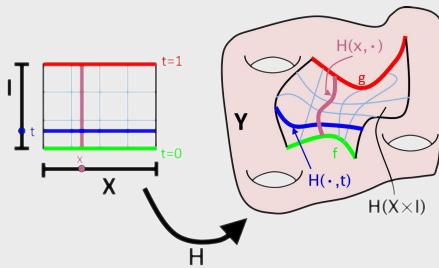
**Definition 0.4.** Eine Homotopie  $H: f \simeq g$  zwischen zwei (stetigen) Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  ist eine (stetige) Abbildung

$$H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit  $H(x, 0) = f(x)$  und  $H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$ .

(Hier ist  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ )

$f$  und  $g$  heißen dann homotop, in Zeichen:  $f \simeq g$ .



**Achtung:** "Stetig" meint hier im Sinne der Produkt-Topologie (siehe später) auf  $X \times I$ .

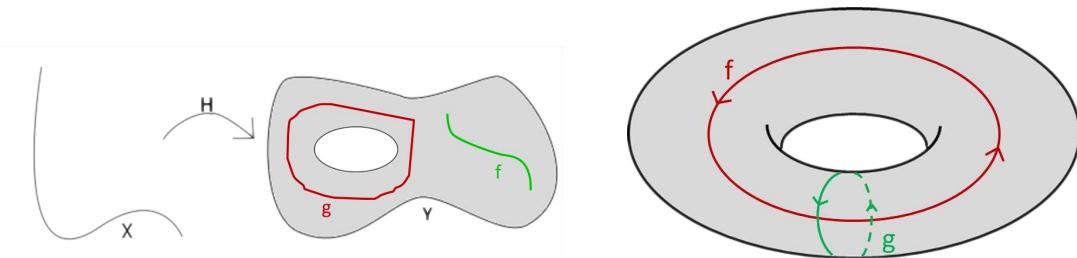


Abbildung 1:  $f$  und  $g$  sind jeweils homotop, vgl. Bemerkung 0.6!

**Bemerkung 0.2.**  $H$  heißt auch Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Eine solche ist auch interpretierbar als eine stetige parametrisierte Schar.

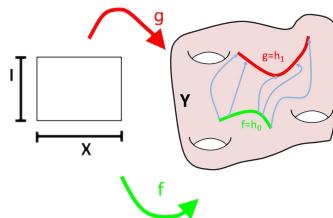


Abbildung 2:  $H = (h_t), t \in [0, 1]$ , von stetigen Abbildungen  $h_t: X \rightarrow Y$  mit Anfang  $h_0 = f$  und Ende  $h_1 = g$ .

<sup>1</sup>siehe später

*Homotope  
Abbildun-  
gen  
 $f, g: X \rightarrow Y$*

**Definition 0.5.** Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen:  $f \simeq g$ , falls eine Homotopie mit Anfang  $f$  und Ende  $g$  existiert.

**Bemerkung 0.3.** "Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.

**Beweis.** Symmetrie: Gilt für  $f, g \in C(X, Y) := \{F: X \rightarrow Y \text{ stetig}\}$   $f \simeq g$  vermöge  $H = (h_t), t \in [0, 1]$ , so liefert  $(\tilde{h}_t)$  mit  $\tilde{h}_t := h_{1-t}$  eine Homotopie von  $g$  nach  $f$ , d.h.  $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$ .

Reflexivität:  $f \simeq f$  vermöge  $h_t := f \quad \forall t \in [0, 1]$

Transitivität: Es sei  $f \simeq g$  vermöge  $(h_t)$  und ferner  $g \simeq l$  vermöge  $(k_t)$ . Dann liefert  $M: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $f$  nach  $l$ , d.h.  $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$ . □

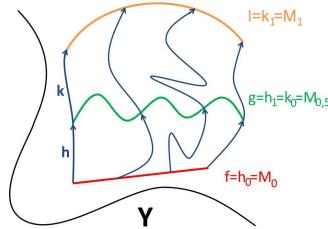


Abbildung 3: Transitivität der Relation "homotop sein"

**Bemerkung 0.4.** Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von  $C(X, Y)$  in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  wird mit  $[X, Y]$  bezeichnet.

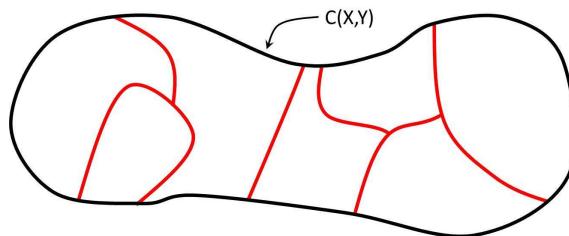


Abbildung 4: Äquivalenzklassen  $[X, Y]$  von  $C(X, Y)$

**Bemerkung 0.5.**  $C(X, Y)$  ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als  $[X, Y]!$

**Beispiel:**

Je zwei stetige Abbildungen  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind homotop! Denn

$$H(x, t) := (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$$

liefert eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ :

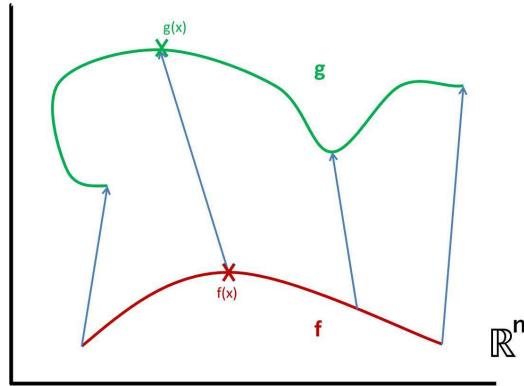
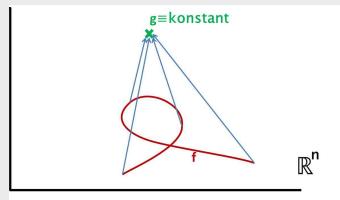


Abbildung 5: Zwei stetige Abbildungen  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind immer homotop.

**Definition 0.6.** Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist. *Nullhomotopie*



**Korollar 0.1.** Jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum  $X$  besteht  $[X, \mathbb{R}^n]$ ,  $n$  beliebig, nur aus einem Punkt!

**Beispiel:**

Jeder geschlossene Weg im  $\mathbb{R}^2$ , d.h. jede stetige Abbildung  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(0) = f(1)$  ist nullhomotop.  $[[0, 1], \mathbb{R}^2]$  + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve  $t \mapsto (1, 0)$ .

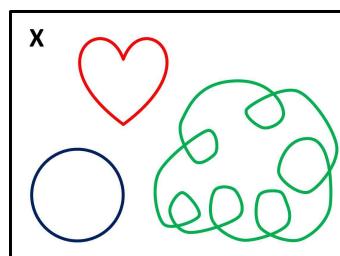


Abbildung 6: Geschlossene Wege in  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 0.6.** Interpretiere einen geschlossenen Weg im  $\mathbb{R}^2$  auch als stetige Abbildung von  $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  in  $\mathbb{R}^2$ , so gilt also  $[S^1, \mathbb{R}^2]$  ist einelementig.

Aber  $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$  ist nicht trivial, wenn für  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  der Punkt  $f(1), 1 = (1, 0) \in S^1$ , unter allen betrachteten Homotopien festgelassen werden soll. Dieses Phänomen wird uns zum Studium der Fundamentalgruppe führen ...

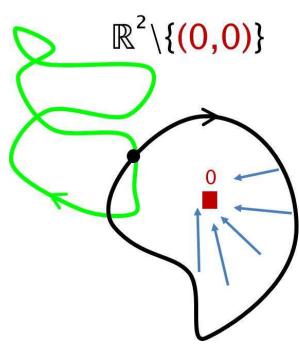


Abbildung 7:  $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$  ist nicht-trivial.

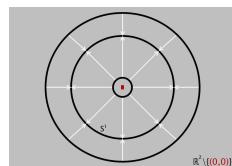


Abbildung 8:  
 $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}] = [S^1, S^1]$ .

# Kapitel I

## Grundlagen der Allgemeinen Topologie

### 1 Erste Beispiele topologischer Räume

Beispiel:

- (1)  $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$  ‘triviale Topologie’
- (2)  $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$  ‘diskrete Topologie’
- (3) Metrische Räume, siehe unten
- (4)  $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$  definiert eine Topologie auf  $X$ , aber  $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$  nicht!
- (5)  $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid O \text{ ist Vereinigung von Intervallen } (a, b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}$ .  $\Rightarrow (X, \mathcal{O})$  ist topologischer Raum, und  $\mathcal{O}$  heißt Standard-Topologie.
- (6)  $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$  ist auch eine Topologie auf  $\mathbb{R}$ , die so genannte  $T_1$ -Topologie.

**Definition I.1.** Es sei  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum und  $A \subset X$ . Die auf  $A$  durch

*Teilraumtopologie*

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

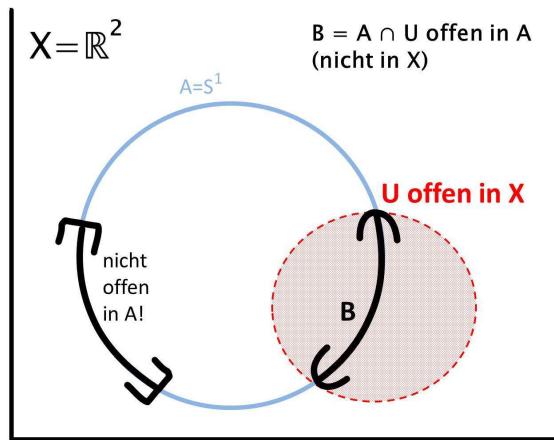
induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum  $(A, \mathcal{O}|_A)$  heißt Teilraum von  $(X, \mathcal{O})$ .

**Bemerkung I.1.**  $B \subset A$  ist also genau dann offen in  $A$ , wenn  $B$  der Schnitt einer in  $X$  offenen Menge mit  $A$  ist.

Beispiel:

$$X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

Achtung:  $B$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}^2$ !



## 2 Topologische Grundbegriffe

**Definition I.2.**  $A \subset X$ ,  $X$  topologischer Raum, heißt abgeschlossen

*Abgeschlossenheit*

$\Leftrightarrow X \setminus A$  ist offen.

Die De Morgan'schen Regeln der Mengenlehre zeigen:

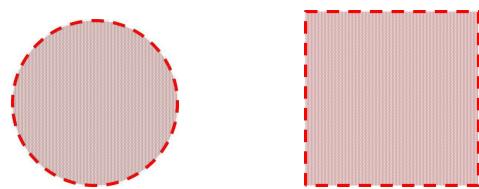
**Bemerkung I.2.** Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso  $X$  und  $\emptyset$ .

**Beispiel:**

In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in  $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}^1$  alle endlichen Teilmengen und  $X, \emptyset$ .

**Definition I.3.** Ist  $X$  topologischer Raum und  $x \in X$ , so heißt jede offene Teilmenge  $O \subset X$  mit  $x \in O$  eine Umgebung von  $x$ .

**Bemerkung I.3.** Umgebungen sind per definitionem offen!



**Bemerkung I.4.** Jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}_{\text{Standard}}$  ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!

**Beispiel: Die Cantor-Menge**  $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0, 2\} \right\}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , enthält überabzählbar viele Elemente und hat 'Hausdorff-Dimension'  $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6\dots$

<sup>1</sup> $\mathbb{R}$  mit  $\mathcal{T}_1$ -Topologie

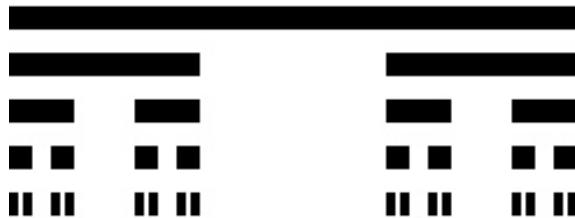


Abbildung I.1: Die Cantor-Menge.

**Definition I.4.** Ist  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum mit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , so heißt  $\mathcal{B}$  Basis der Topologie  $\Leftrightarrow$  Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$ .

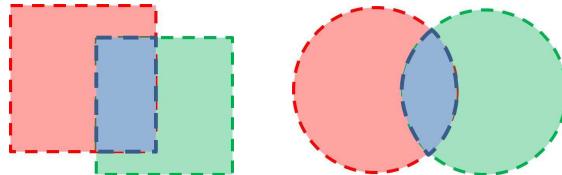
Basis

**Beispiel:**

- (1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von  $\mathbb{R}$ .
- (2) Sämtliche offenen<sup>2</sup> Kreisscheiben und auch sämtliche offenen Quadrate bilden Basen ein und derselben Topologie auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Bemerkung I.5.** •  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$  ist Basis der Topologie von  $X \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset O$ .

•  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  bildet die Basis einer Topologie auf  $X \Leftrightarrow X$  ist Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  und der Schnitt je zweier Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist eine Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$ .



**Definition I.5.** Sind  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  topologische Räume, so bildet

Produkt-Topologie

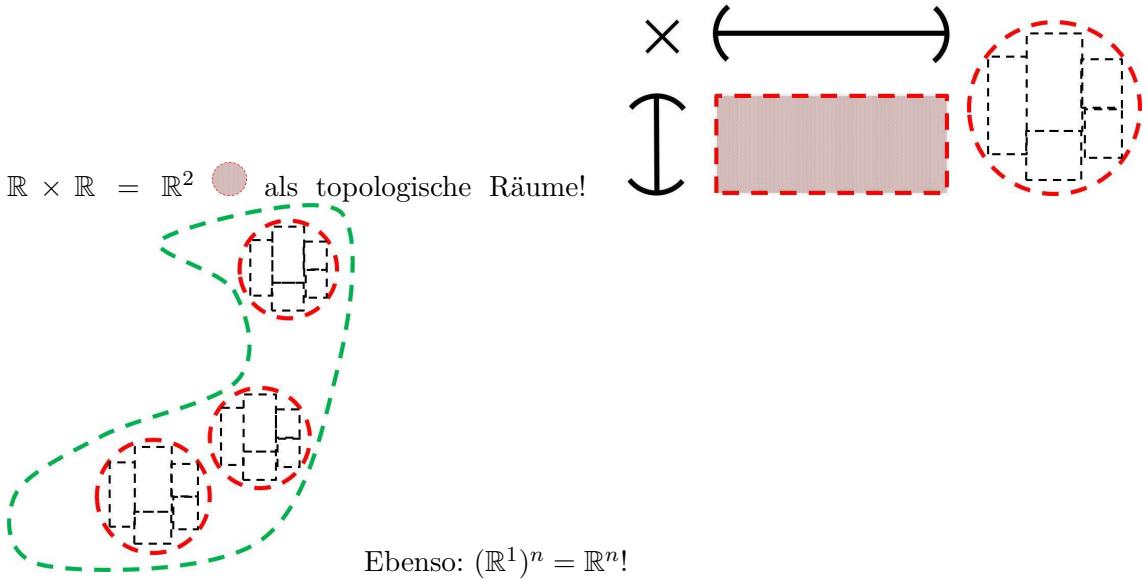
$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge  $X \times Y$ , und diese heißt Produkt-Topologie auf  $X \times Y$ .

Versehen mit der Produkt-Topologie ist  $X \times Y$  selbst ein topologischer Raum und für gegebene  $X, Y$  denkt man sich  $X \times Y$  stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.

<sup>2</sup>bezüglich der euklidischen Metrik

Beispiel:



**Definition I.6.** Sind  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$  Topologien auf  $X$  und  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ ,  
so heißt  $\mathcal{O}_2$  feiner als  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_1$  größer als  $\mathcal{O}_2$ .

Feiner  
und  
größer

Beispiel:

- Die triviale Topologie ist die größte Topologie auf  $X$ , die diskrete Topologie die feinste.
- Die Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$  ist feiner als die  $\mathcal{T}_1$ -Topologie.

## Mehr zu metrischen Räumen

**Definition I.7.** Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und  $\epsilon > 0$  sei für  $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$  der offene  $\epsilon$ -Ball um  $p$
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$  der abgeschlossene  $\epsilon$ -Ball um  $p$
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$  die  $\epsilon$ -Sphäre um  $p$  (oder Sphäre vom Radius  $\epsilon$  um  $p$ )

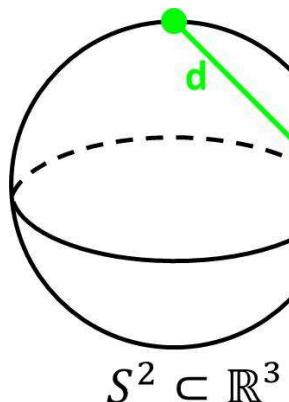
$\epsilon$ -Ball,  
Sphäre

**Definition I.8.** Ist  $(X, d)$  metrischer Raum und  $A \subset X$ , so heißt der metrische Raum  $(A, d|_{A \times A})$  (metrischer) Unterraum von  $X$ .

Metrischer  
Unter-  
raum

### Beispiel:

Für  $X = \mathbb{R}_{Eukl.}^n$  sind  $B_1(0), D_1(0) =: D^n$  und  $S^{n-1} := S_1(0)$  metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw.  $(n-1)$ -Sphäre.

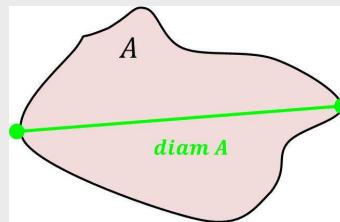


**Definition I.9.**  $A \subset (X, d)$  heißt beschränkt

$\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}: d(x, y) < \rho \forall x, y \in A$

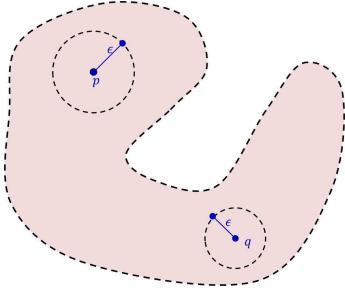
Das Infimum,  $\text{diam } A$ , dieser  $\rho$  heißt dann Durchmesser von  $A$ .

Beschränktheit,  
Durch-  
messer



**Bemerkung I.6.** In einem metrischen Raum  $(X, d)$  bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$  von  $X$ , diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.

**Bemerkung I.7.**  $A \subset (X, d)$  ist offen  
 $\Leftrightarrow \forall p \in A \quad \exists \text{ ein offener Ball } B_\epsilon(p) \text{ um } p \text{ mit } B_\epsilon(p) \subset A$



**Definition I.10.**  $(X, d)$  sei metrischer Raum und  $A \subset X, p \in X$ .

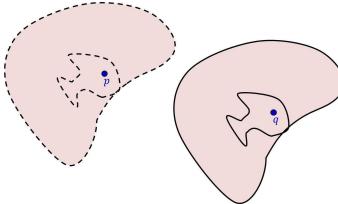
*Abstand*

$$d(p, A) := \text{dist}(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

**Erinnerung** Ist  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum und  $A \subset X$ , so definiert  $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$  eine Topologie auf  $A$ , die Teilraumtopologie der in A offenen Mengen.

**Bemerkung I.8.** Ist  $A \subset X$  offen in X, so ist auch jede in  $A$  offene Menge offen in  $X$ , und abgeschlossene<sup>3</sup> Teilmengen einer in  $X$  abgeschlossenen Menge  $A$  sind auch abgeschlossen in  $X$ .



Aber abgeschlossene Mengen  $B$  in  $A \subset X$  sind für beliebiges  $A$  im Allgemeinen nicht abgeschlossen in  $X$ .

**Beispiel: Beispiel zu Bemerkung I.8**

$$B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$$

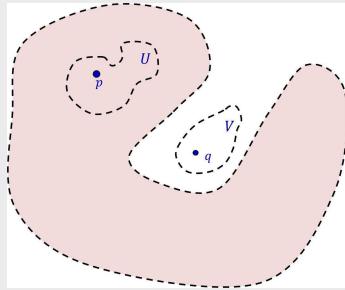
---

<sup>3</sup>in A

**Definition I.11.** Für  $p \in A \subset X$ ,  $X$  topologischer Raum, heißt  $p$

- (1) innerer Punkt von  $A$ , falls es eine in  $A$  enthaltene Umgebung  $U$  um  $p$  gibt.
- (2) äußerer Punkt von  $A$ , falls eine zu  $A$  disjunkte Umgebung  $V$  um  $p$  in  $X$  existiert.
- (3) Randpunkt von  $A$ , falls jede Umgebung von  $p$  nichtleeren Durchschnitt mit  $A$  und  $X \setminus A$  hat.

Innerer  
Punkt,  
äußerer  
Punkt,  
Rand-  
punkt



**Definition I.12.** Für  $A \subset X$  heißt die größte in  $X$  offene und in  $A$  enthaltene Teilmenge  $\overset{\circ}{A}$  Inneres von  $A$ .

Inneres

**Bemerkung I.9.**  $\overset{\circ}{A}$  ist die Menge aller inneren Punkte von  $A$  und die Vereinigung aller in  $X$  offenen Teilmengen von  $A$ , und  $A$  ist offen  $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

**Beispiel:**

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

**Definition I.13.** Der Abschluss  $\bar{A}$  von  $A$  ist  $X \setminus ((X \setminus A))$ .

Abschluss

**Definition I.14.** Der Rand  $\partial A$  von  $A$  ist

Rand

$$\partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

d.h. Rand  $A = \{ \text{Randpunkte von } A \}$ .

**TODO:Exkurs zu "Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander"**

### 3 Stetige Abbildungen

**Definition I.15.**  $f: X \rightarrow Y$  ist stetig  $\Leftrightarrow \forall$  offenen Mengen in  $Y$  ist das Urbild unter  $f$  offene Menge in  $X$ .

Stetigkeit

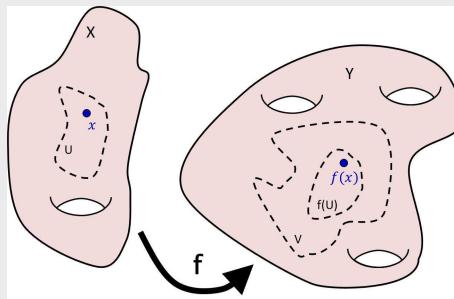
**Beispiel:**

- $f: X \rightarrow Y$  ist stetig  $\Leftrightarrow$  Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- Sind  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$  Topologien auf  $X$ , so ist die Identität  $\text{id}: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$  stetig  $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ .
- Für  $A \subset X$  ist die Teilraumtopologie  $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}|_A$  die größte Topologie, bezüglich der die Inklusion  $i: A \hookrightarrow X, a \mapsto a$  stetig ist.

**Definition I.16.**  $f: X \rightarrow Y$  ist stetig in  $x \in X$

Stetigkeit

$\Leftrightarrow \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(x) \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } f(U) \subset V.$



**Bemerkung I.10.**  $f: X \rightarrow Y$  ist stetig  $\Leftrightarrow f$  ist stetig in jedem Punkt  $x \in X$ .

**Beispiel:**

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in  $x \in X$  genau dann, wenn für jeden offenen Ball  $B$  um  $f(x)$  ein offener Ball um  $x$  existiert, der unter  $f$  in  $B$  abgebildet wird. (Und ferner stetig in  $x \in X$  genau dann, wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x' \in X$  mit  $d_X(x, x') < \delta$  auch  $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$  folgt.)

**Definition I.17.** Sind  $X, Y$  metrische Räume, so heißt eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  isometrische Einbettung

$\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$  gilt  $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ .

Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.

Ist  $f$  zusätzlich bijektiv, so heißt  $f$  Isometrie.

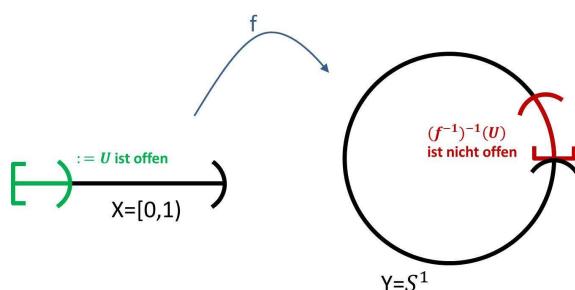
Isometrische  
Einbet-  
tung,  
Isometrie

**Definition I.18.** Eine invertierbare Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind.

Homöomorphismus

**Beispiel:**

- $f: [0, 1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!



- $id_X: X \rightarrow X$  ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.

**Bemerkung I.11.** ‘Homöomorph sein’ ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.

**Definition I.19.** Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen  $X \cong Y$ , falls es einen Homöomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  gibt.

homöomorph

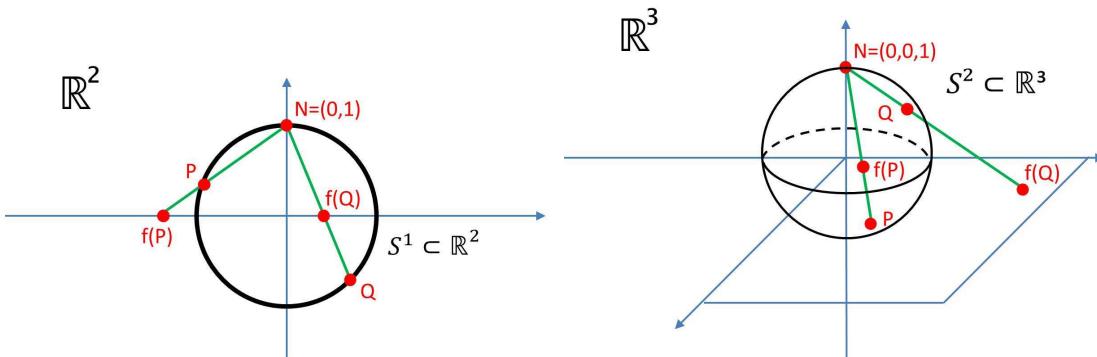
**Bemerkung I.12.** Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:

- Ist  $f: X \rightarrow Y$  Homöomorphismus, so ist  $U \subset X$  offen  $\Leftrightarrow f(U)$  offen in  $Y$ .
- $A \subset X$  ist abgeschlossen  $\Leftrightarrow f(A)$  ist abgeschlossen in  $Y$ .
- $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ ,  $f(\dot{A}) = (f(\dot{A}))$ .
- $U$  ist Umgebung von  $x \in X \Leftrightarrow f(U)$  ist Umgebung von  $f(x)$ .

Beispiel:

- Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- $[0, 1] \cong [a, b] \forall a < b \in \mathbb{R}$
- $(0, 1) \cong (a, b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$

Beispiel: Stereographische Projektion



Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von  $S^n \setminus \{N\}$ ,  $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , gegeben wie folgt:

Der Schnitt der Geraden im  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $N$  und  $x \in S^n \setminus \{N\}$  mit der Hyperebene  $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ ,  $f(x)$ , ist gegeben durch  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$  mit Umkehrabbildung  $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1})$ .

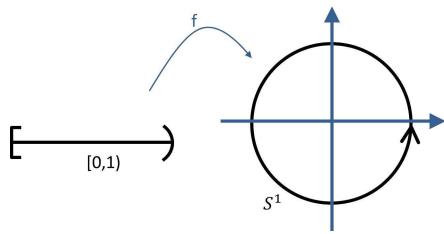
**Definition I.20.**  $f: X \rightarrow Y$  stetig heißt Einbettung

Einbettung

$$\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y \text{ Homöomorphismus.}$$

Beispiel:

- Für  $A \subset X$  ist die Inklusion  $\iota: A \hookrightarrow X, x \mapsto x$ , stets eine Einbettung.
- $[0, 1] \rightarrow S^1$  ist keine Einbettung!

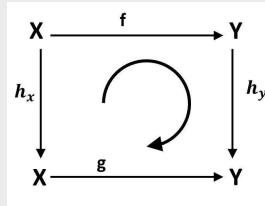


- Der Satz über die Umkehrabbildung/ Impliziter Funktionensatz aus der Analysis zeigt:

Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und in  $p \in \mathbb{R}^n$  die Jacobi-Matrix  $Df(p)$  invertierbar, so existiert eine Umgebung von  $p$ , auf der  $f|_U$  eine Einbettung ist.

**Definition I.21.** Zwei Einbettungen  $f, g: X \rightarrow Y$  heißen äquivalent : $\Leftrightarrow$   $\exists$  Homöomorphismen  $h_X: X \rightarrow X, h_Y: Y \rightarrow Y$  mit  $g \circ h_X = h_Y \circ f$ , d.h. dass das Diagramm

Aequivalenz  
von Ein-  
bettungen

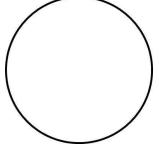
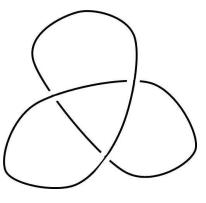
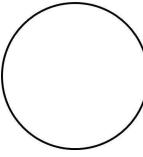
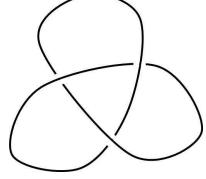


kommutiert.

**Definition I.22.** Eine Einbettung  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt Knoten.

Knoten

Beispiel:

Die Knoten mit Bildern  und  sind äquivalent, die mit  und  nicht!

## 4 Zusammenhang und Kompaktheit

**Definition I.23.** Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend : $\Leftrightarrow$  Die einzigen in  $X$  gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind  $\emptyset$  und  $X$ . Ansonsten heißt  $X$  un- oder nicht zusammenhängend.

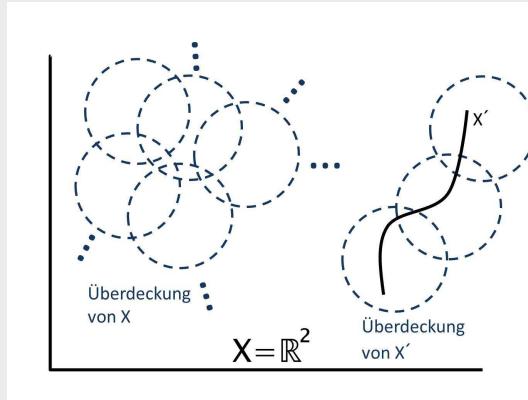
zusammenhängend

**Definition I.24.** Eine Familie  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ <sup>a</sup> von Teilmengen von  $X$  heißt Überdeckung von  $X$   $\Leftrightarrow X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .

Überdeckung

$\mathcal{U}$  heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung  $\Leftrightarrow$  alle  $U_\alpha$  sind offen beziehungsweise abgeschlossen.

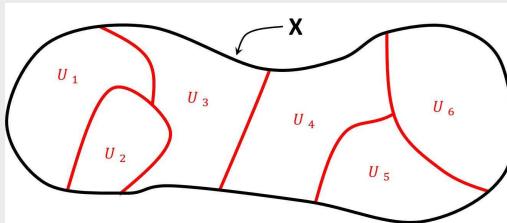
Für  $X' \subset X$  heißt eine Familie  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  wie oben Überdeckung von  $X'$   $\Leftrightarrow X' \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .



<sup>a</sup>A Indexmenge

**Definition I.25.** Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen.

Partition



**Bemerkung I.13.** Ein topologischer Raum  $X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  Es existiert keine Partition von  $X$  in zwei nichtleere offene Teilmengen  $\Leftrightarrow$  es existiert keine Partition von  $X$  in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen

Denn:  $A \subset X$  ist offen und abgeschlossen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  sind offen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  sind abgeschlossen

**Beispiel:**

- $\mathbb{Q}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, denn  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \pi)) \cup (\mathbb{Q} \cap (\pi, +\infty))$ .
- Die einzigen zusammenhängenden und mit der diskreten Topologie versehenen Räume sind  $\emptyset$  und der nur aus einem Punkt bestehende Raum.

**Bemerkung I.14.** Allgemein sagt man von einer Menge, sie sei zusammenhängend, wenn diese, aufgefasst als Teilraum eines topologischen Raumes, zusammenhängend ist.

**Beispiel:**

$[0, 1] (\subset \mathbb{R})$  ist zusammenhängend, aber  $[0, 1] \cup (2, 3)$  nicht!

**Beispiel:**

Eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow A$  ist leer, einpunktig, oder unendlich!

**Bemerkung I.15.** Eigenschaften zusammenhängender Mengen

- $A$  zusammenhängend  $\Rightarrow \bar{A}$  zusammenhängend
- $A, B \subset X$  zusammenhängend,  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$  zusammenhängend
- $A \cup B$  zusammenhängend,  $A \cap B$  zusammenhängend  $\not\Rightarrow A, B$  zusammenhängend  
( $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ )

**Definition I.26.** Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes  $X$  ist eine im Sinne der Inklusion von Mengen maximale zusammenhängende Teilmenge von  $X$ .

*Zusammenhangskomponente*

**Bemerkung I.16.** • Jeder Punkt von  $X$  liegt genau in einer Zusammenhangskomponente, und diese ist die Vereinigung aller diesen Punkt enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen.

- Zwei Zusammenhangskomponenten sind damit entweder gleich oder disjunkt.
- Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

**Satz I.1.** Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

(D.h.: Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  zusammenhängend, so auch  $f(X) \subset Y$ .)

**Beweis.** Es sei ohne Einschränkung  $Y = f(X)$  und sei  $Y = U \cup V$  Partition von  $Y$  in zwei offene Mengen  $\Rightarrow f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  sind offen in  $X$  ( $f$  stetig) und bilden eine Partition von  $X$ .  $X$  ist zusammenhängend.  $\Rightarrow f^{-1}(U)$  oder  $f^{-1}(V) = \emptyset$ .

Sei o.E.  $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow V = f(X)$  ( $f$  surjektiv auf  $f(X)$ )

$\Rightarrow$  Es existiert keine Partition von  $Y$  in nichtleere offene Mengen  $\Leftrightarrow Y$  zusammenhängend.

□

**Korollar I.1.** Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, und ebenso die Zahl der Zusammenhangskomponenten.

**Beispiel:**

Für  $n > 1$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}$  nicht homöomorph!

Denn:  $\mathbb{R}^n \cong \mathring{D}^n$  (Einheitskugel) und nimmt man aus  $\mathring{D}^n$  einen Punkt  $p$  heraus, so bleibt für  $n > 1$   $\mathring{D}^n \setminus \{p\}$  zusammenhängend,  $\mathring{D}^1 = (-1, 1) \cong \mathbb{R}$  aber nicht!

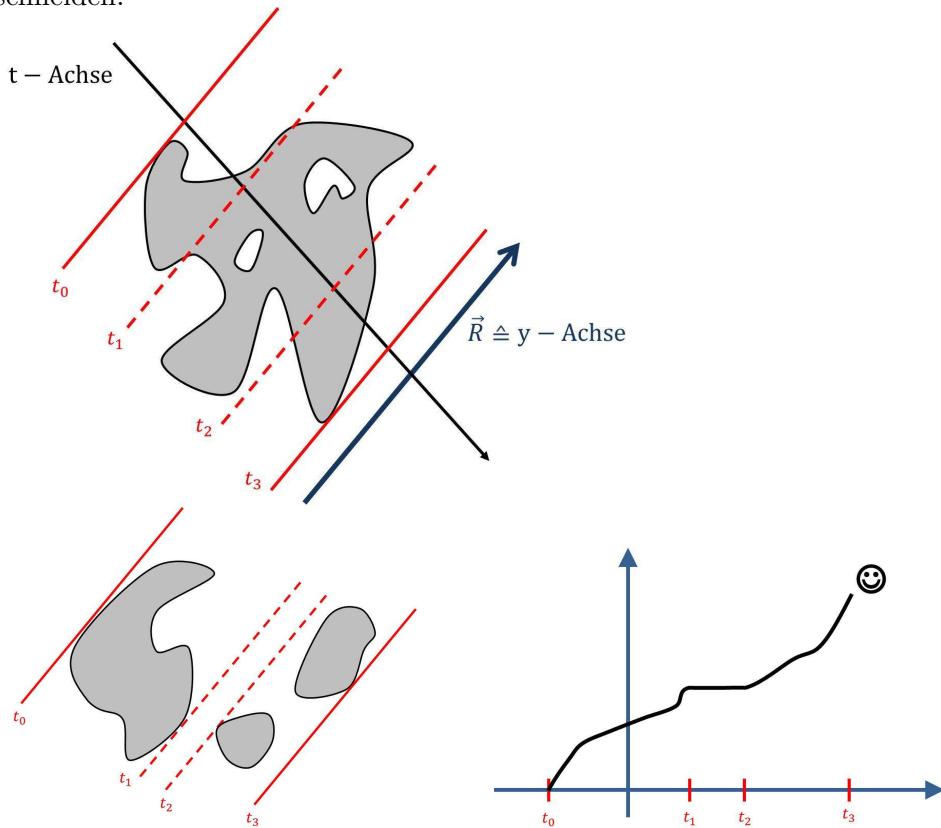


Allgemeiner (Brouwer)  $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow m = n$

**Korollar I.2.** Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

### Beispiel: Waffelteilen

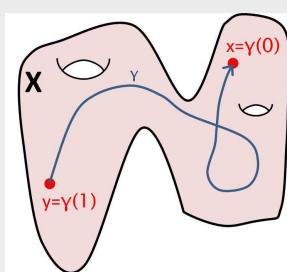
Eine Waffel, wie unregelmäßig auch immer, lässt sich immer in zwei gleich große Teile schneiden.



Bei unzusammenhängenden Waffeln ist die Schnittgerade selbst bei vorgegebener Schnittrichtung nicht eindeutig.

**Definition I.27.** Ein Weg in einem topologischen Raum  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ , und  $\gamma(0)$  heißt Anfangspunkt,  $\gamma(1)$  Endpunkt.

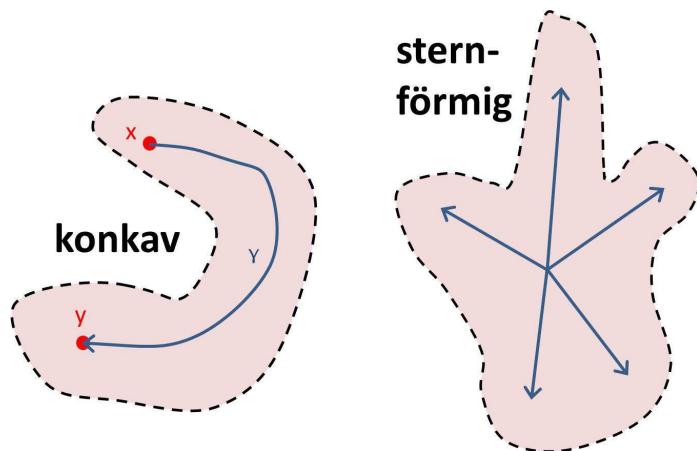
*Weg,  
Anfangs-  
punkt,  
Endpunkt*



**Definition I.28.**  $X$  heißt wegzusammenhängend

*Wegzusammenhang*

$$\Leftrightarrow \text{Zu je zwei Punkten } x, x' \in X \quad \exists \text{ Weg } \gamma: [0, 1] \rightarrow X \\ \text{mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = x'.$$



**Beispiel:**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$B = A \cup \{(0, 0)\}$$

$\Rightarrow B$  ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

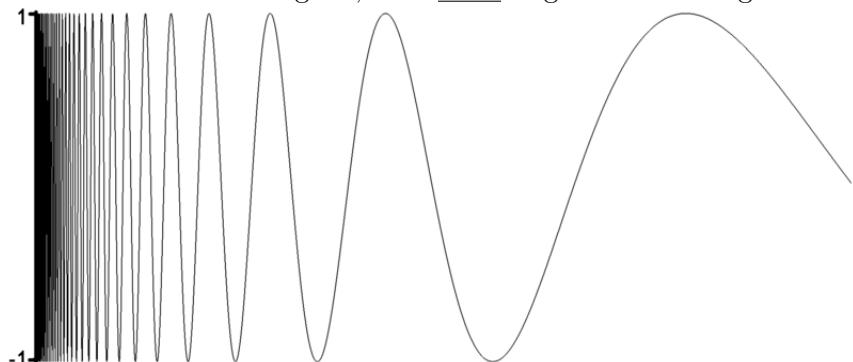


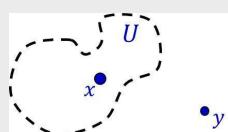
Bild: <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sinuseinsdurchx.jpg&filetimestamp=20080624085708>

**Definition I.29.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung enthält. *Kompaktheit*

## 5 Trennungseigenschaften

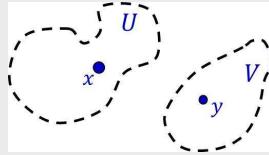
**Definition I.30.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt  $T_1$ -Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom  $\Leftrightarrow$  Für je zwei verschiedene Punkte von  $X$  existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in  $X$ , die den anderen nicht enthält.

$$\forall x \neq y \in X \exists U = U_x : y \notin U_x$$



**Definition I.31.**  $X$  heißt Hausdorff- oder  $T_2$ -Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom : $\Leftrightarrow$  Je zwei verschiedene Punkte in  $X$  besitzen disjunkte Umgebungen.

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y \text{ mit } U_x \cap U_y = \emptyset$$

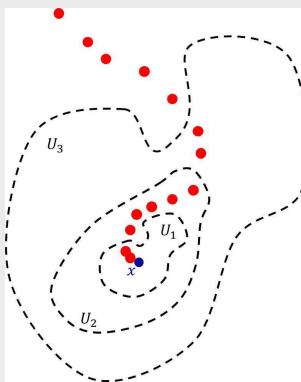


**Beispiel:**

Jeder metrische Raum ist Hausdorff-Raum.

**Bemerkung I.17.** Hausdorff-Räume sind z.B. deshalb wichtig, weil Grenzwerte dort eindeutig sind!

**Definition I.32.** Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum  $X$ , so heißt  $x \in X$  Grenzwert der Folge  $(x_n)$  genau dann, wenn zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n \in U \quad \forall n \geq N$ .



**Beispiel:**

In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.

**Bemerkung I.18.** Hausdorff-Räume sind auch  $T_1$ -Räume, aber:

**Beispiel:**

In  $X = \mathbb{R}_{T_1}$  ist jeder Punkt abgeschlossen ( $\Rightarrow T_1$ ), doch je zwei nichtleere offene Mengen schneiden sich -  $X$  ist damit nicht  $T_2$ ! "Schlimmer": In  $\mathbb{R}_{T_1}$  ist jeder Punkt Grenzwert der Folge  $x_n = n$ ! Denn eine Umgebung eines Punktes in  $\mathbb{R}_{T_1}$  hat die Form  $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_M\}$  mit  $x_1 < \dots < x_M$ . Dann gilt aber  $x_n = n \in U \quad \forall n > x_M$ .

## 6 Abzählbarkeitsaxiome und lokale Kompaktheit

**Definition I.33.** Ist  $X$  topologischer Raum und  $x \in X$ , so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von  $X$  in  $x$  eine Familie von Umgebungen von  $x$ , sodass jede Umgebung von  $x$  eine Umgebung aus der Familie enthält.

*Umgebungsbasis*

**Beispiel:**

Ist  $B$  Basis der Topologie eines Raumes  $X$ , so ist für jedes  $x \in X$   $\{U \in B \mid x \in U\}$  eine Basis von  $X$  in  $x$ .

**Beispiel:**

In einem metrischen Raum  $X$  sind folgende Mengen von Bällen Basen von  $X$  in  $x \in X$ :

- alle offenen Bälle mit Zentrum  $x$
- alle offenen Bälle mit Zentrum  $x$  und rationalen Radii

**Beispiel:**

Ist  $X$  mit der diskreten bzw. trivialen Topologie versehen, so ist die ‘kleinste’ Basis in  $x \in X$  gegeben durch  $\{\{x\}\}$  bzw.  $\{X\}$ .

**Definition I.34.**  $X$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom  $\Leftrightarrow$  jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine abzählbare Basis.

*Abzählbarkeitsaxiome,  
Separabilität*

$X$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom  $\Leftrightarrow X$  selbst besitzt eine abzählbare Basis.

$X$  heißt separabel  $\Leftrightarrow X$  enthält eine abzählbare und dichte ( $\bar{A} = X$ ) Menge  $A$ .

**Bemerkung I.19.** Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste, aber:

**Beispiel:**

Überabzählbare diskrete Räume (wie  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{diskret})$ ) erfüllen nach Beispiel 6 das erste Abzählbarkeitsaxiom, nicht aber das zweite!

**Bemerkung I.20.** Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und jeder separable metrische Raum auch das zweite.

**Beispiel:**

$\mathbb{R}_{T_1}$  erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist aber separabel -  $\mathbb{N}$  ist dicht!

**Beispiel:**

Euklidische Räume und alle ihre Teilmengen erfüllen das 2. Abzählbarkeitsaxiom und sind separabel.

Wozu das Ganze?

$\rightsquigarrow$  Funktionenräume

$\rightsquigarrow$  Mannigfaltigkeiten

$\rightsquigarrow$  Satz von Lindelöf: Jede offene Überdeckung eines Raumes, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, enthält auch eine abzählbare Teilüberdeckung.

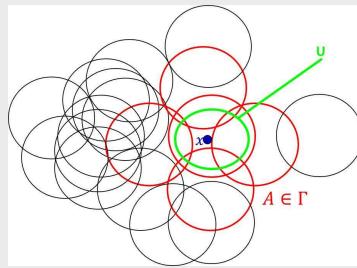
**Definition I.35.**  $X$  heißt lokal kompakt

*Lokale  
Kompaktheit*

$\Leftrightarrow$  Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung  $U$ , sodass  $\overline{U}$  kompakt ist.

**Definition I.36.** Eine Familie  $\Gamma$  von Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$  heißt lokal endlich : $\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \exists U = U(x): A \cap U = \emptyset \quad \forall A \in \Gamma$  bis auf endlich viele  $A$ .

Lokale  
Endlich-  
keit

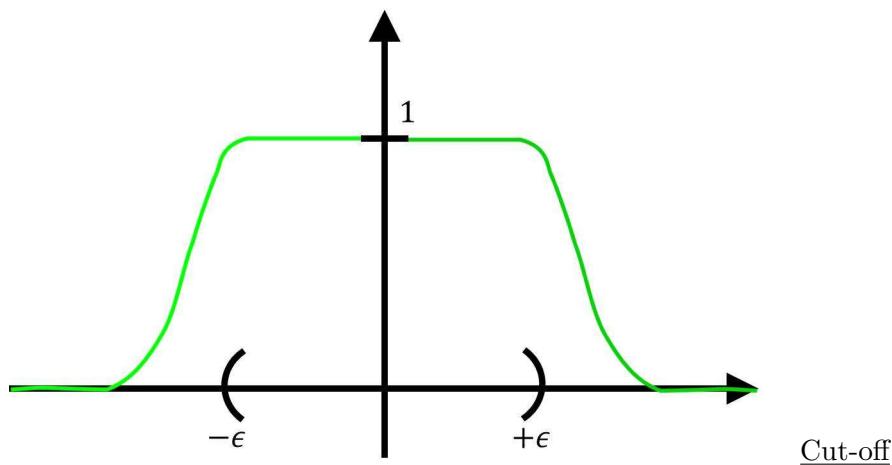


**Definition I.37.**  $\Gamma, \Delta$  Überdeckungen von  $X$ .  $\Delta$  heißt Verfeinerung von  $\Gamma$  : $\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma: A \subset B$ .

Verfeinerung

**Definition I.38.**  $X$  heißt parakompakt : $\Leftrightarrow$  Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.

Parakompaktheit



**Beispiel:**

- Kompakte Räume sind parakompakt.
- $\mathbb{R}^n$  ist parakompakt.
- Mannigfaltigkeiten sind parakompakt!

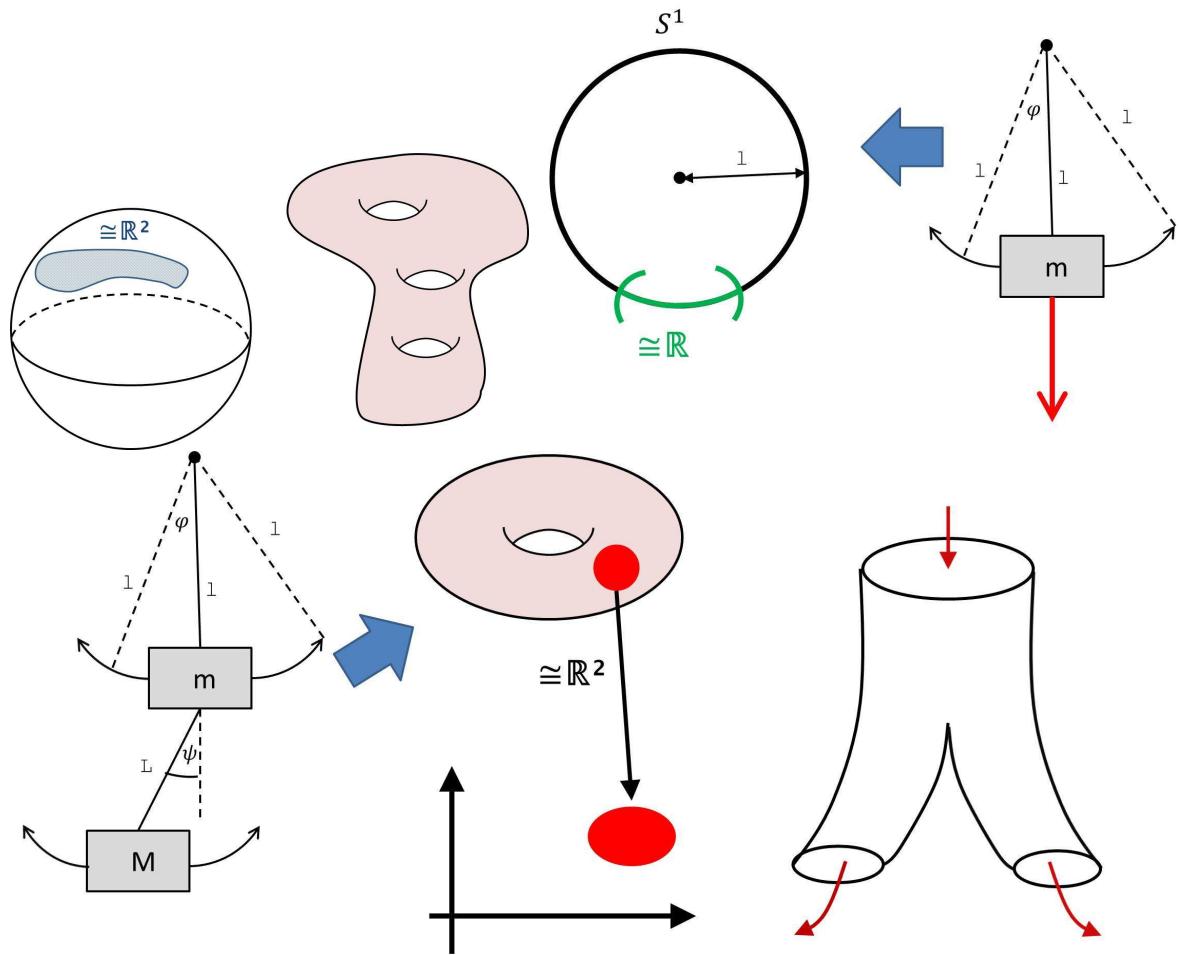
**Bemerkung I.21.** Parakompaktheit ist wichtig, da dann bestimmte Einbettungen und sogenannte Zerlegungen der Eins existieren.

## Kapitel II

# Geometrische Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume

### 1 Mannigfaltigkeiten

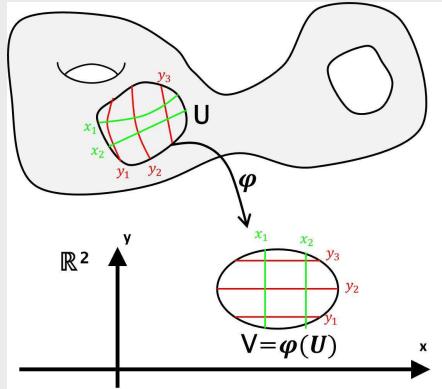
Beispiele zu Mannigfaltigkeiten (Exkurs) Doppelpendel, Quantenfeldtheorie



**Definition II.1.** Ein topologischer Raum  $M$  heißt  $n$ -dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

*Mannigfaltigkeit,  
Karte*

1.  $M$  ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie
2.  $M$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , d.h. zu jedem  $p \in M$  existieren eine Umgebung  $U = U(p) \subset_{\text{offen}} M$  und ein Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V, V \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$ . Jedes solche Paar  $(U, \varphi)$  heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um  $p$ .



**Bemerkung II.1.** Die Zahl  $n$ , die Dimension von  $M$ , ist eindeutig bestimmt! (folgt aus Brouwers Satz von der Invarianz des Gebietes)

**Definition II.2.** Ein Atlas für eine topologische  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Menge  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ <sup>a</sup> von Karten  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ , so dass  $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

*Atlas*

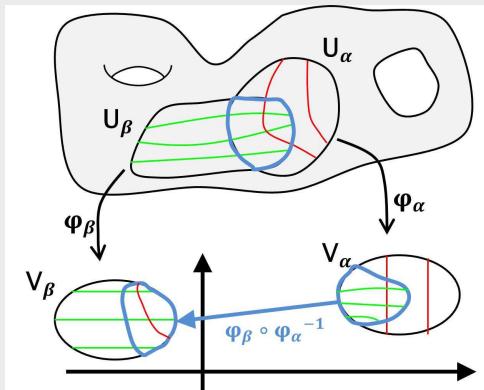
<sup>a</sup>  $\Lambda$  Indexmenge

**Definition II.3.** Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse  $C^k$  (oder:  $C^k$ -Atlas von  $M$ ), wenn für alle  $\alpha, \beta \in \Lambda$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  der Kartenwechsel

*$C^k$ -Atlas,  
Karten-  
wechsel*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

eine  $C^k$ -Abbildung, also  $k$ -mal stetig differenzierbar ist. ( $k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$ )

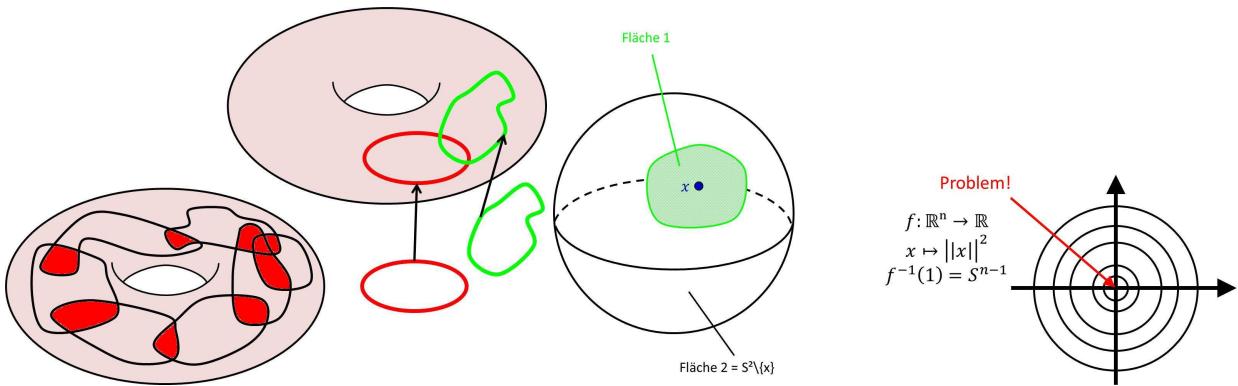


**Definition II.4.** Ist  $M$  topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein  $C^k$ -Atlas von  $M$ , so heißt eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $M$  mit  $\mathcal{A}$  verträglich, falls  $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$  ebenfalls  $C^k$ -Atlas ist. Ein  $C^k$ -Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse  $C^k$ )), falls  $\mathcal{A}$  alle mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten enthält.

*Verträglichkeit,  
differen-  
zierbare  
Struktur*

**Definition II.5.** Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^k$  (kurz:  $C^k$ -Mannigfaltigkeit) ist ein Paar  $(M, \mathcal{A})$  bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  und einer  $C^k$ -Struktur auf  $M$ . Eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.

$C^k$ -Mannigfaltigkeit,  
glatt



**TODO: Richtig toller Exkurs zu Mannigfaltigkeiten** ... Killing-Fields, Lie-Groups (festgenommener Matheprof kurz nach 9/11), Perverse Garben, wir leben in einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit, ...

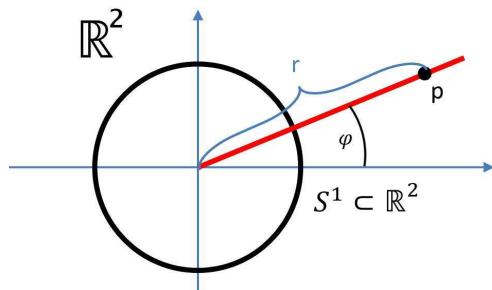
**Bemerkung II.2.** Bemerkung zur Produkt-Topologie

- Produkte von Hausdorff-Räumen sind Hausdorff-Räume.
- Produkte von zusammenhängenden Räumen sind zusammenhängend.
- Produkte von wegzusammenhängenden Räumen sind wegzusammenhängend.
- Produkte von kompakten/separablen Räumen sind kompakt/separabel.
- Produkte von Räumen, die das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, erfüllen diese auch.

**Folgerung** Produkte topologischer oder differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind topologische oder differenzierbare<sup>1</sup> Mannigfaltigkeiten.

**Beispiel:**

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$  (Polarkoordinaten)



- $O(n) \cong SO(n) \times O(1)$

<sup>1</sup>( $C^\infty$ )

- $(S^1)^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ mal}}$  heißt n-dimensionaler Torus (TODO: Bild 3: Exkurs höher-dimensionale Sphären)

## 1.1 Differenzierbare Abbildungen

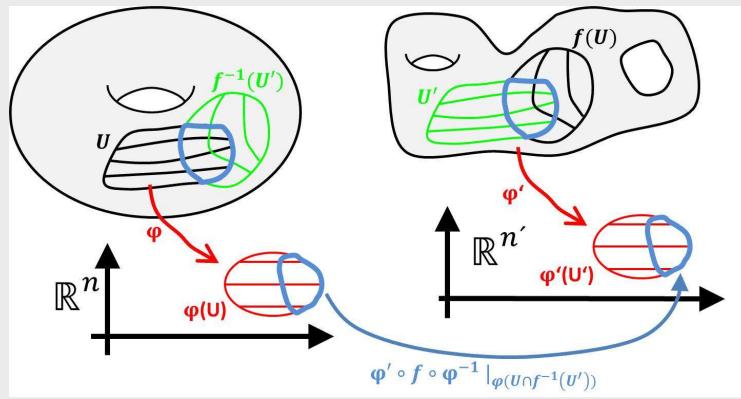
**Definition II.6.** Es seien  $(M, \mathcal{A})$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $(M', \mathcal{A}')$  eine  $n'$ -dimensionale  $C^{k'}$ -Mannigfaltigkeit und  $l \leq \min(k, k')$ . Eine stetige Abbildung  $f: M \rightarrow M'$  heißt differenzierbar (von der Klasse  $C^l$ ) oder kurz:  $C^l$ -Abbildung, falls gilt:

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow \varphi'(f(U) \cap U')}$$

eine  $C^l$ -Abbildung im üblichen Sinn.

$C^l$ -  
Abbildung



TODO: Exkurs über Tangentialvektoren, Vektorfelder, Satz vom Igel, Physik des starren Körpers, Differentialtopologie

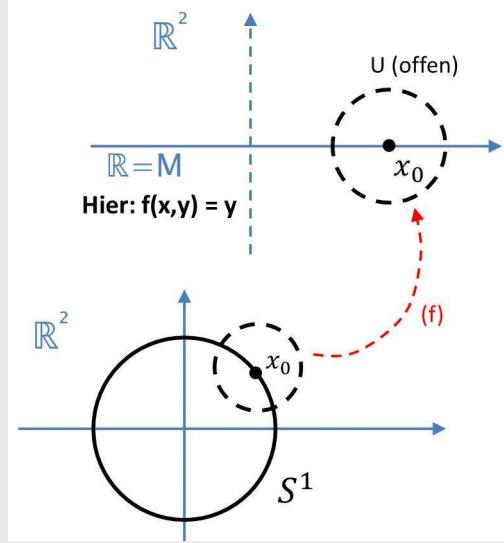
### Spezielle Mannigfaltigkeiten: Untermannigfaltigkeiten topologischer Räume:

**Satz II.1** (Äquivalente Beschreibungen einer Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ ). Für Teilmengen  $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$  sind äquivalent:

- (a)  $\forall x_0 \in M \exists$  Umgebung  $U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$  und

$$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l) := \{g: U \rightarrow \mathbb{R}^l \mid g \text{ ist } C^\infty\} \text{ mit } \text{Rang } Df(x) = l \quad \forall x \in U$$

<sup>a</sup> dergestalt, dass  $U \cap M = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$



- (b)  $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$  und  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$  mit folgenden Eigenschaften:  
 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+l}$  ist offen,  
 $\varphi$  ist  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $U \rightarrow \varphi(U)$  und

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_{n+l}) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$$

- (c)  $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}, W \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\psi \in C^\infty(W, U)$  mit

- $\psi$  ist Homöomorphismus  $W \rightarrow U \cap M$
- $D\psi(w)$  ist injektiv für alle  $w \in W$

(Jedes solche  $\psi$  heißt lokale Parametrisierung von  $M$ ).

<sup>a</sup> $Df$  ist die Jacobi-Matrix von  $f$

### Interpretation

- (a) besagt:  $U \cap M$  ist (im Sinne der Rangbedingung) durch  $l$  unabhängige Gleichungen  $f_1(x) = \dots = f_l(x) = 0$  definiert.
- (b) besagt: nach Anwendung eines Diffeomorphismus sieht  $U \cap M$  wie eine offene Teilmenge eines linearen Unterraumes von  $\mathbb{R}^{n+l}$  aus.
- (c) besagt:  $M$  lässt sich lokal parametrisieren.

**Definition II.7.** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$ , die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n-dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ .

Untermannigfaltigkeit

**Satz II.2.** Äquivalente Beschreibung einer glatten Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ . Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ . Es sind äquivalent:

(a)  $\forall x_0 \in M \quad \exists U = U(x_0) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$  und  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l)$  mit  $\text{Rang } Df(x) = l$  für alle  $x \in U$  dergestalt, dass  $U \cap M = f^{-1}(0)$ .

(b)  $\forall x_0 \in M \quad \exists U = U(x) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$  und  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  ist offen
- $\varphi$  ist  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $U \rightarrow \varphi(U)$
- $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$

(c)  $\forall x_0 \in M \quad \exists U = U(x_0) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\psi \in C^\infty(W, U)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\psi$  ist Homöomorphismus  $W \rightarrow U \cap M$
- $D\psi(w)$  ist injektiv für alle  $w \in W$ .

### Beispiel:

zu (a)

Die  $n$ -Sphäre vom Radius  $r$

$$S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$$

ist eine  $n$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Denn: Definiere  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|^2 - r^2$ . Dann gilt:

- $S_r^n = f^{-1}(0)$  und
- $Df(x) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) = 2x$  erfüllt  $\text{Rang } Df(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supseteq S_r^n$  (wegen  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$ ).

Allgemeiner:

- Niveaumengen: Es seien  $V \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ ,  $f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$ ,  $c \in \mathbb{R}^l$ . Gilt  $\text{Rang } Df(x) = l$  in jedem Punkt  $x$  der Niveaumenge

$$f^{-1}(c) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

so ist  $f^{-1}(c)$  eine glatte  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ .

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Es seien  $U$  und  $f$  wie in (a) gewählt und  $f^1, \dots, f^l$  die Komponenten von  $f$ . Sei  $x_0 \in M$ . Durch Umnummerierung seien die Indizes so gewählt, dass ohne Einschränkung die Reihenfolge so, dass die  $(l \times l)$ -Matrix

$$\left( \frac{\partial f^i}{\partial x_{n+j}} \right)_{i,j \in \{1, \dots, l\}}$$

in  $x_0$  invertierbar ist. Definiere die Abbildung  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ ,  $x \mapsto (x_1, \dots, x_n, f^1(x), \dots, f^l(x))$ . Dann gilt:

$$D\varphi(x_0) = \left( \begin{array}{c|c} Id_{n \times n} & 0 \\ \hline \dots & \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}} \right)_{i,j} \end{array} \right)$$

und damit

$$\det D\varphi(x_0) = \det \left( \frac{\partial f^i}{\partial x_{n+j}} \right)_{i,j} \neq 0.$$

Mit dem Satz über inverse Funktionen (oder "Satz über die Umkehrabbildung") folgt: Es existieren Umgebungen  $U' = U'(x_0) \subseteq U$  und  $V'(\varphi(x_0)) \subseteq V = \varphi(U)$ , so dass  $\varphi|_{U'}: U' \rightarrow V'$  ist  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

Es gilt:  $\varphi(U' \cap M) = \{(y_1, \dots, y_{n+l}) \in \varphi(U') \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$ , denn:

" $\subseteq$ " : ist klar nach Definition von  $f$  und  $\varphi$ .

" $\supseteq$ " : Ist  $y$  Element der rechten Seite, so existiert  $x \in U'$  mit  $\varphi(x) = y$  und  $f(x) = 0$ . Da  $x \in U' \subseteq U$  und  $f(x) = 0$ , gilt:  $x \in U' \cap M$ , und damit  $y = \varphi(x) \in \varphi(U' \cap M)$ .

(b) $\Rightarrow$ (c): Es seien  $U$  und  $\varphi$  wie in (b) gewählt und

$$\pi: \mathbb{R}^{n+l} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+l}) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

die Projektion und

$$\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

die Inklusion.

Setze  $W := \pi(\varphi(U \cap M))$  und definiere  $\psi: W \rightarrow U$  durch  $\psi := \varphi^{-1} \circ \iota$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+l} & \xrightleftharpoons[\pi]{\iota} & \mathbb{R}^n \\ \varphi \uparrow & & \cup \\ U & \xleftarrow[\psi = \varphi^{-1} \circ \iota]{\quad} & W \end{array}$$

Dann ist  $W$  offen und  $\psi: W \rightarrow U \cap M$  ein Homöomorphismus, denn  $\iota': W \rightarrow \varphi(U \cap M)$  ist Homöomorphismus und  $\varphi^{-1}: \varphi(U \cap M) \rightarrow U \cap M$  ist Homöomorphismus.

Mit der Kettenregel folgt: Für alle  $w \in W$  gilt:

$$\begin{aligned} D\psi(w) &= D(\varphi^{-1} \circ \iota')(w) = (D\varphi^{-1})(\iota'(w)) \cdot D\iota'(w) \\ (D\varphi^{-1})(y) &\stackrel{=} {=} ((D\varphi)(\varphi^{-1}(y)))^{-1} ((D\varphi)(\varphi^{-1}(\iota'(w))))^{-1} \circ \iota' \\ &= (D\varphi(\psi(w)))^{-1} \circ \iota'. \end{aligned}$$

Somit ist  $D\psi(w)$  als Komposition einer bijektiven und einer injektiven Abbildung injektiv für alle  $w \in W$ .

(c) $\Rightarrow$ (a): Es seien  $U$ ,  $W$  und  $\psi$  wie in (c) gewählt und  $\psi(\hat{w}) = x_0$  für  $\hat{w} \in W$ . Da Rang  $D\psi(\hat{w}) = n$  folgt nach evtl. Ummumerierung

$$\left( \frac{\delta \psi^i}{\delta w_j} (\hat{w}) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

ist invertierbar. Definiere  $g: W \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}, (w, y) \mapsto \psi(w) + (0, y)$ , d.h.  $g(w_1, \dots, w_n, y_1, \dots, y_l) = (\psi^1(w), \dots, \psi^n(w), \psi^{n+1}(w) + y_1, \psi^{n+l}(w) + y_l)$ . Dann gilt:

$$Dy(\hat{w}, 0) = \left( \begin{array}{c|c} \left( \frac{\partial y^i}{\partial w_j} (\hat{w}) \right)_{i,j} & 0 \\ \hline \dots & Id_{l \times l} \end{array} \right)$$

ist invertierbar. Mit dem Satz über inverse Funktionen folgt: Es existieren Umgebungen  $V = V((\hat{w}, 0)) \subseteq W \times \mathbb{R}^l$  und  $U' = U'(g(\hat{w}, 0))$ , so dass  $g|_V: V \rightarrow U'$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist.

Verkleinert man gegebenenfalls  $V$ , so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass gilt:  $U' \subseteq U$ . Da  $\{w \in W \mid (w, 0) \in V\}$  offen ist in  $W$  und  $\psi: W \rightarrow \psi(W)$  nach Voraussetzung

ein Homöomorphismus ist, folgt:  $\{\psi(w) \mid (w, 0) \in V\}$  ist offen in  $\psi(W)$ .

Nach Definition der Unterraumtopologie existiert  $U'' \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$  mit  $\{\psi(w) \mid (w, 0) \in V\} = U'' \cap \psi(W)$ .

Wegen  $\psi(w) = g(w, 0)$  bedeutet dies:

$$(*) U'' \cap \psi(W) = g(V \cap (W \times \{0\})).$$

Setze  $\tilde{U} := U' \cap U'', \tilde{V} := (g|_V)^{-1}(\tilde{U}) = g^{-1}(\tilde{U}) \cap V$ . Dann ist  $g|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

Behauptung: Es gilt:  $\tilde{U} \cap M = g(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$ .

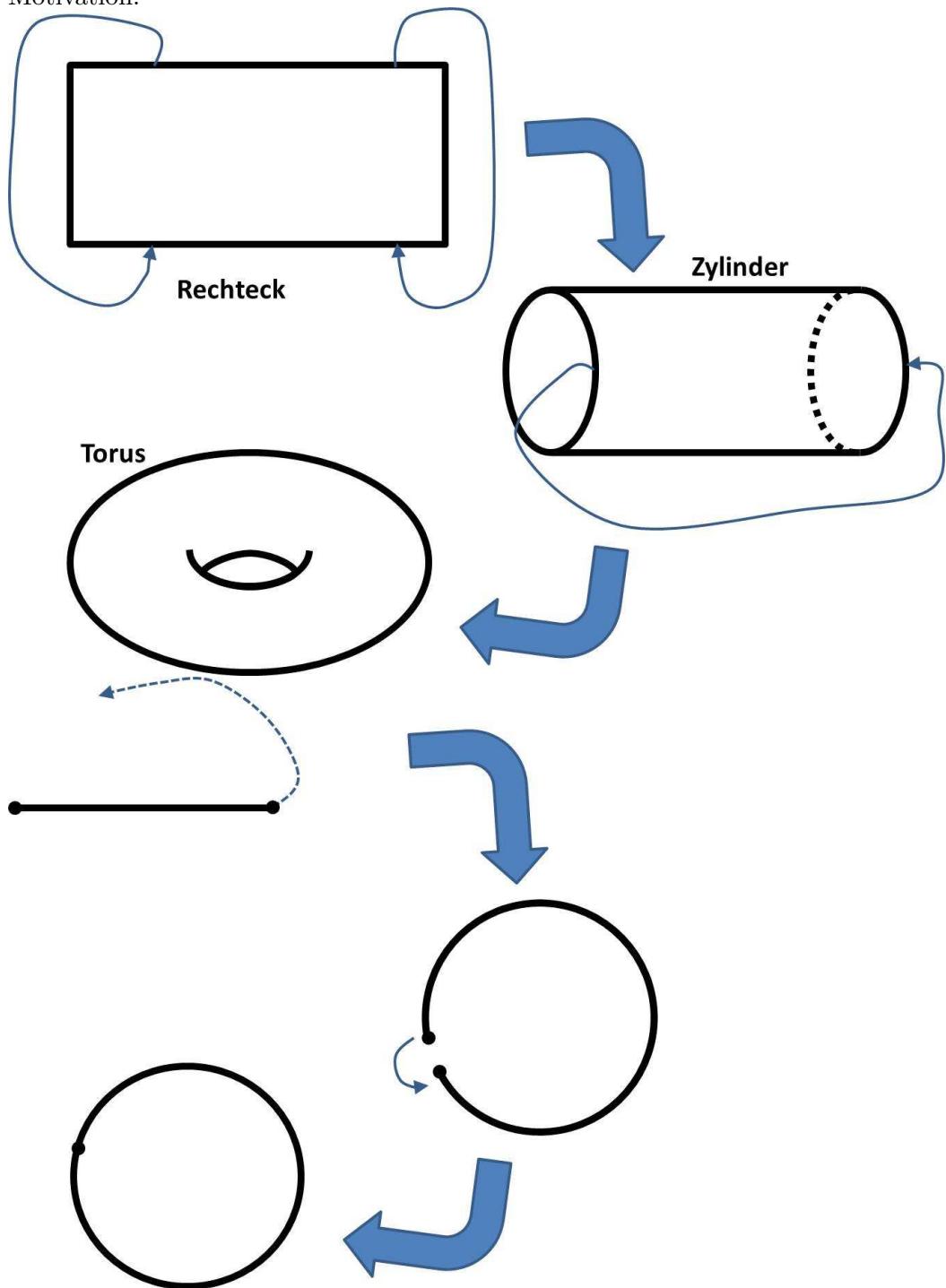
[Beweis: folgt mit  $(*)$ ].

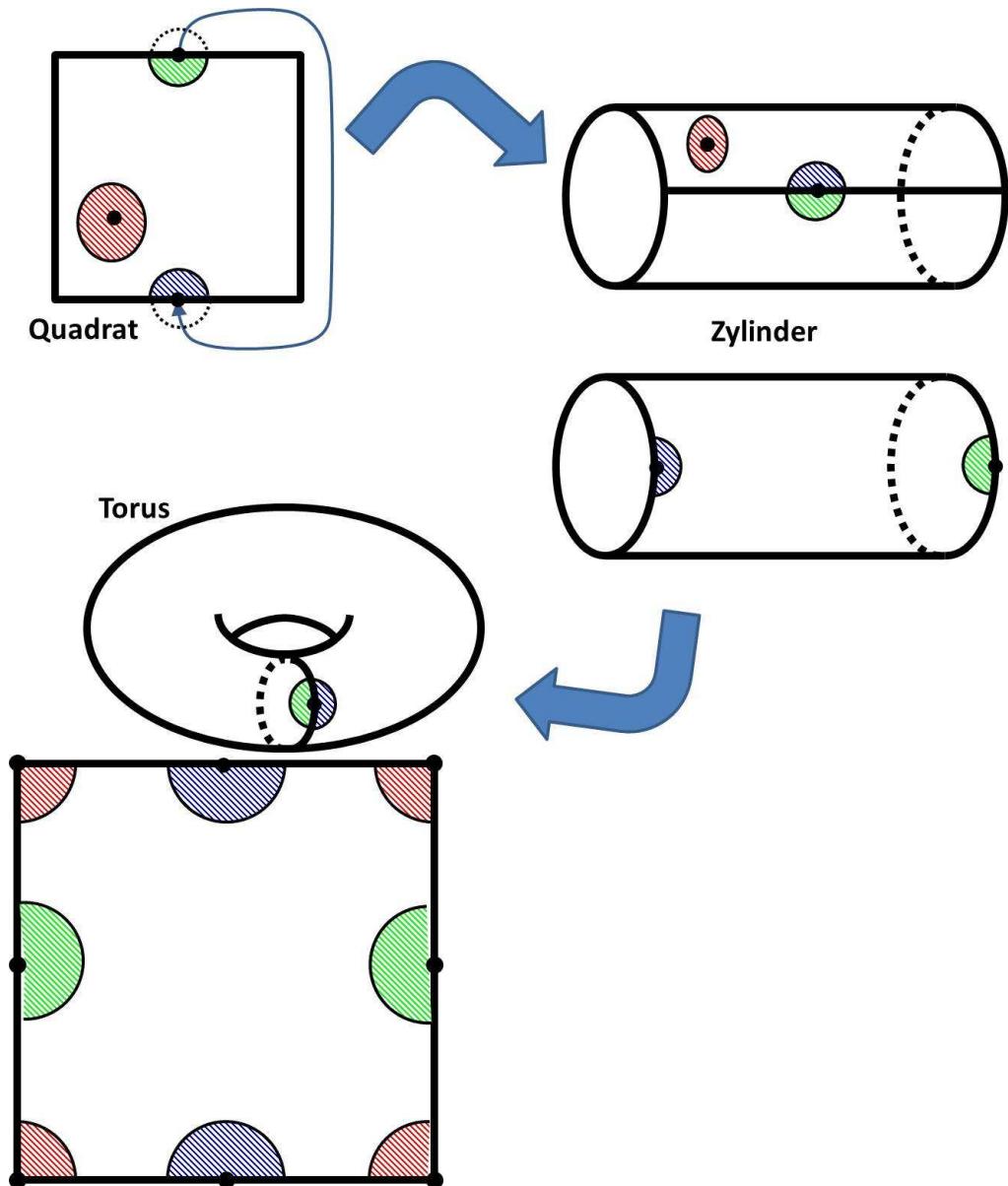
Ist  $\pi: \mathbb{R}^{n+l} \rightarrow \mathbb{R}^l, (x_1, \dots, x_{n+l}) \mapsto (x_{n+1}, \dots, x_{n+l})$  die Projektion, so erfüllt  $f := \pi \circ (g|_{\tilde{V}})^{-1}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^l$  die Bedingung in (a).  $\square$

**Satz II.3.** ( $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^{n+l}$  sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten) Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$   $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$  und  $\{\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$  eine Menge lokaler Parametrisierungen (wie in (c)) mit  $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ . Dann ist  $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas und  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

## 2 Quotientenräume

Motivation:







**Erinnerung** Jede Partition  $S$  einer Menge  $X$  bestimmt eine Äquivalenzrelation auf  $X$  (und umgekehrt).

Menge der Äquivalenzklassen (oder auch: Quotient von  $X$  nach  $S$ ) ist  $X/S$ . Zusätzlich existiert dann die Quotientenabbildung  $\pi: X \rightarrow X/S, x \mapsto [x]$

**Bemerkung II.3.** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $X/S$  ein Quotientenraum von  $X$ , so gibt es auf  $X/S$  eine natürliche Topologie:

**Definition II.8.** Eine Teilmenge  $U \subset X/S$  heißt offen : $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$  ist offen in  $X$

Quotienten(raum)-

topologie

**Bemerkung II.4.** Alle im Sinne dieser Definition offenen Teilmengen von  $X/S$  definieren dann eine Topologie auf  $X/S$  und die Menge  $X/S$  zusammen mit dieser Topologie heißt Quotientenraum von  $X$  nach  $S$ .

**Bemerkung II.5.**  $\pi: X \rightarrow X/S, X/S$  versehen mit der Quotententopologie, ist dann eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

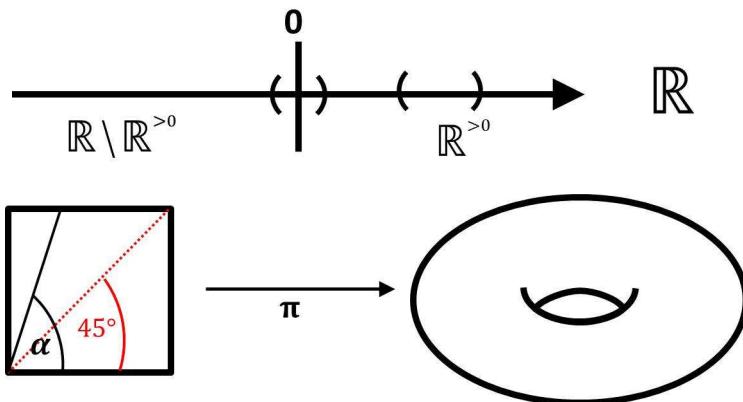
### Eigenschaften der Quotententopologie

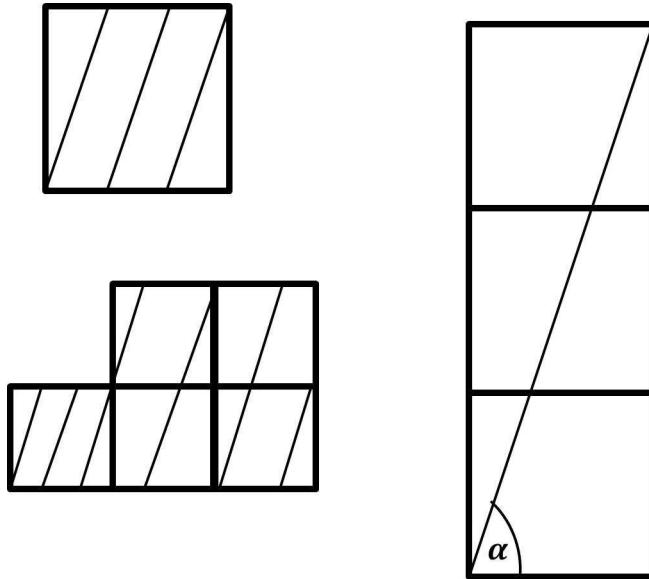
- Quotientenräume zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.
- Quotientenräume wegzusammenhängender Räume sind wegzusammenhängend.
- Quotientenräume separabler Räume sind separabel.
- Quotientenräume kompakter Räume sind kompakt.

**Achtung:** Die Hausdorff-Eigenschaft vererbt sich i.a. nicht!

### Beispiel:

$$X = \mathbb{R}, \quad S := \{\mathbb{R}^{>0}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^{>0}\}$$

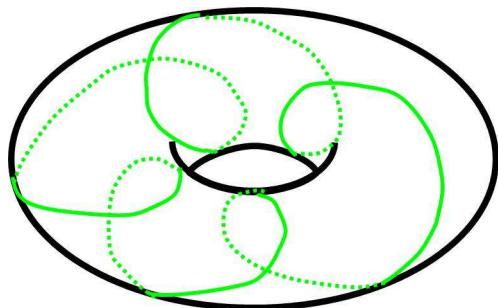




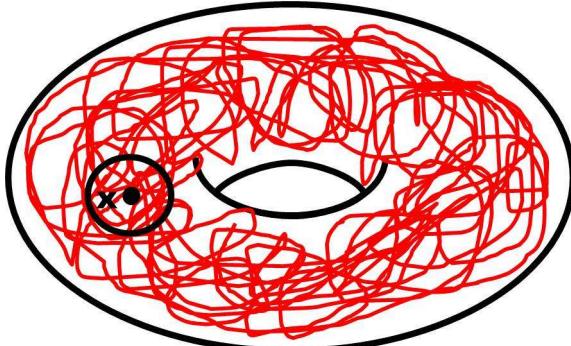
Ist  $\alpha$  rational, so schließen sich die ins Einheitsquadrat "zurückgeholten" Kurvensegmente zu einer geschlossenen Kurve  $K_\alpha$  auf dem Torus  $T^2$ , doch für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  füllt die entsprechende Kurve  $K_\alpha$  den  $T^2$  dicht aus.  $\leadsto$

$$\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow K_\alpha \cong S^1$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow K_\alpha \cong \mathbb{R} \dots !$$



$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : ÜBEL!



$$t \mapsto e^{2\pi it}$$

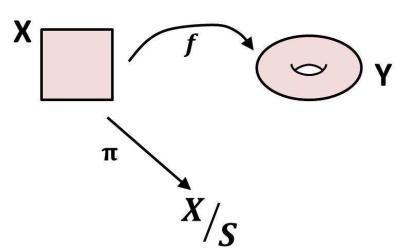
$T^2$  ist Hausdorffsch,  $T^2 / \sim$  nicht!

**TODO:** Exkurs: Instabilität von Planetensystemen

### 3 Quotientenabbildungen

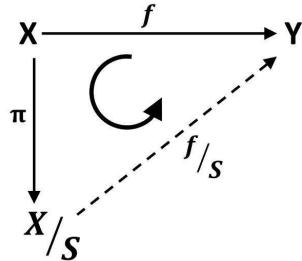
**Definition II.9.** Ist  $S$  eine Partition von  $X$  in nichtleere disjunkte Teilmengen und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung, die auf jedem Element von  $S$  konstant ist, so existiert eine Abbildung  $X/S \rightarrow Y$ , die jedes Element  $A$  von  $S$  auf  $f(a)$ ,  $a \in A$ , abbildet.

Quotientenabbildung



Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von  $f$  nach  $S$ , in Zeichen  $f/S$ .

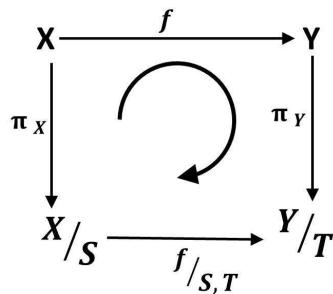
#### Interpretation



**Allgemeiner**  $S$  Partition von  $X$ ,  $T$  Partition von  $Y$

$\Rightarrow$  Jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , die jedes Element von  $S$  auf ein Element von  $T$  abbildet, induziert eine Abbildung

$$f_{S,T}: X/S \rightarrow Y/T$$



**Bemerkung II.6.** Sind  $X, Y$  topologische Räume,  $S$  Partition von  $X$  und  $f: X \rightarrow Y$  eine auf Elementen von  $S$  konstante, stetige Abbildung, so ist auch  $f/S: X/S \rightarrow Y$  stetig.  $f \mapsto f/S$  ist dann Bijektion!

**Erinnerung**  $F: X \rightarrow Y$  stetige Bijektion von einem kompakten Raum  $X$  auf einen Hausdorff-Raum  $Y \Rightarrow F$  ist Homöomorphismus!

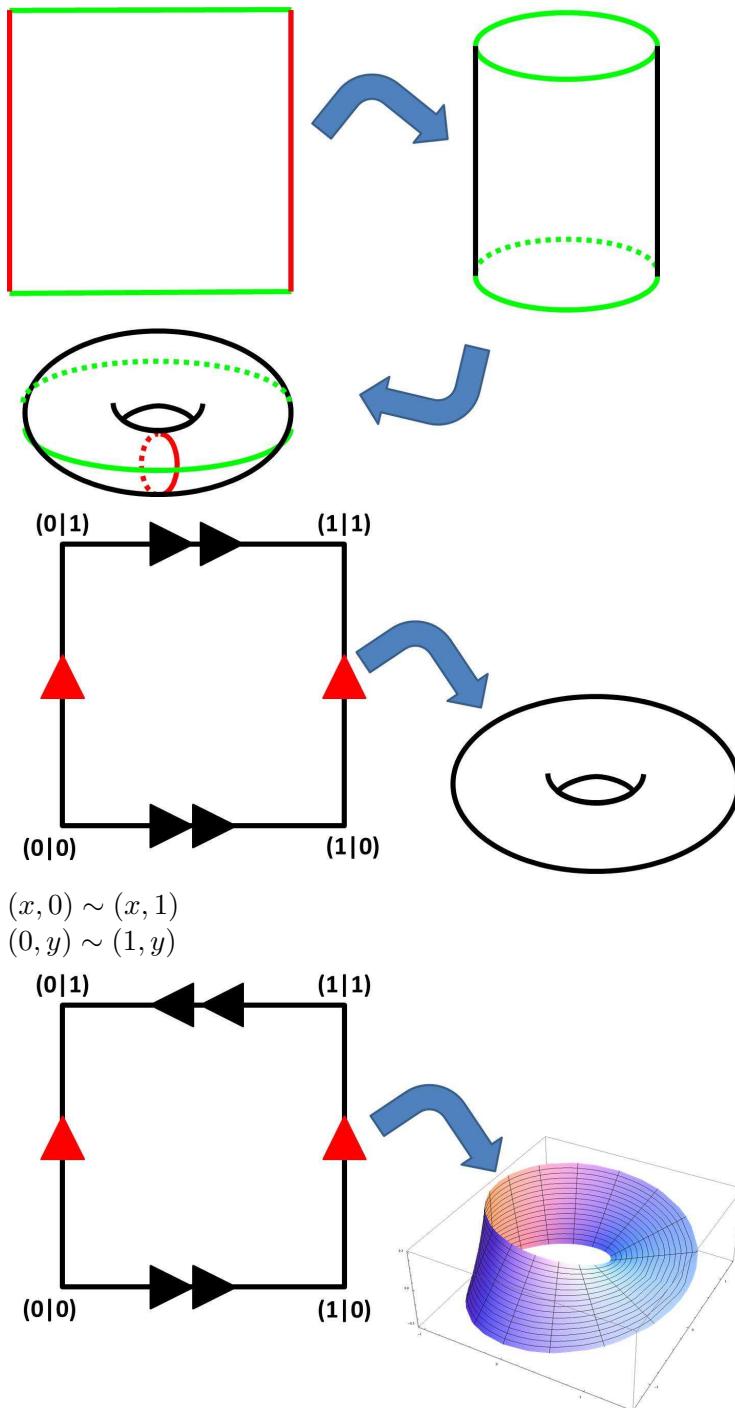
**Korollar II.1.**  $X$  kompakt,  $Y$  Hausdorffsch und  $f: X \rightarrow Y$  sei stetig  $\Rightarrow$  Der injektive Quotient  $f/S(f)$  ist Homöomorphismus  $X/S(f) \rightarrow f(X)$

*injektiver  
Quotient*

**Definition II.10.** Jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  definiert eine Partition  $S = S(f)$  von  $X$ , und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von  $Y$  unter  $f$ . Die induzierte Abbildung  $f/S(f): X/S(f) \rightarrow Y$  ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von  $f$ .

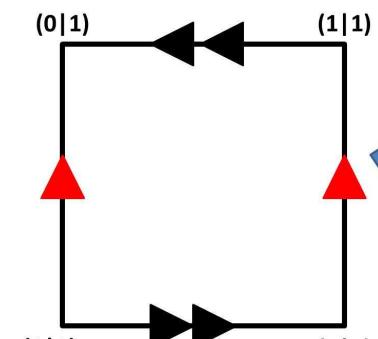
## 4 Konstruktionen von Quotientenräumen

Beispiel: Motivation



$$(x, 0) \sim (x, 1)$$

$$(0, y) \sim (1, y)$$



$$(x, 0) \sim (1 - x, 1)$$

Möbiusband

Bild Möbiusband von:

<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:M%C3%BCbiusband.jpg&filetimestamp=20090802105255>

Im Folgenden "Kontrahieren", "Anheften", "Verkleben" etc.

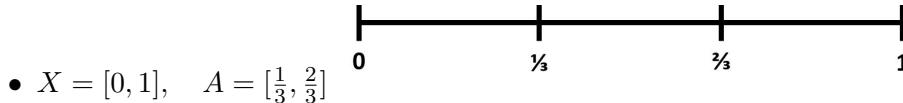
**Definition II.11.** Die Quotientenmenge eines topologischen Raumes  $X$  bzgl. einer Partition  $S$  von  $X$ , welche aus einer Teilmenge  $A$  von  $X$  und allen Einpunktmenigen aus  $X \setminus A$  besteht,

$$S = A \cup \{\{x\} \mid x \in X \setminus A\}$$

heißt Kontraktion (von  $X$  bzgl.  $X \setminus A$ ), und für  $X/S$  schreibt man einfach  $X/A$ .

*Kontraktion*

Beispiel:



$$X/A \cong I = [0, 1]$$

- $X = [0, 1], A = \{\frac{1}{3}, 1\}$

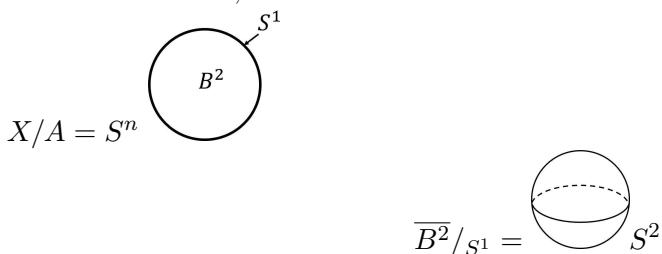


$$\Rightarrow X/A \cong \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 0 \quad \frac{1}{3} \end{array} \cong \bigcirc P \cong Q$$

- $X = [0, 1], A = \{0, 1\}$

$$\Rightarrow X/A \cong \bigcirc S^1$$

- $X = \overline{B^n} = D^n$  abgeschlossener Einheitsball in  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $S^{n-1}$  und Innerem  $B^n$ .  
 $A := S^{n-1} = \partial \overline{B^n}, X = \overline{B^n}$



Formal:  $S = S^{n-1} \cup \{\{x\} \mid x \in B^n = (\overset{\circ}{B^n})\}$ <sup>2</sup>

Mit anderen Worten: Kontraktion des Randes des abgeschlossenen  $n$ -Balles liefert die  $n$ -Sphäre!

**Bemerkung II.7.** Wie beschreibt man Partitionen  $S$  von  $X$  möglichst bequem?

Oftmals einfach durch die entsprechende Äquivalenzrelation, die  $S$  liefert, und hier dann nur durch die nicht-trivialen Relationen.

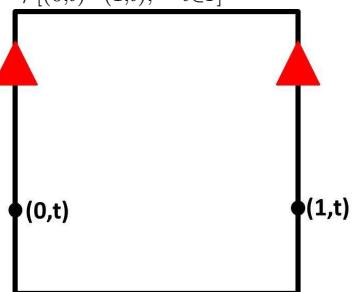
Für  $X/S$  schreibt man dann oft nur  $X/[$ Relation 1, Relation 2, ...].

<sup>2</sup> $S$  ist die Partition.

**Beispiel:**

- Für  $X = I = [0, 1]$  ist  $I/[0 \sim 1] \cong S^1$ .

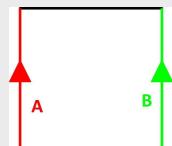
$$\bullet I^2 /_{[(0,t) \sim (1,t), t \in I]} \cong S^1 \times I$$



**Andere Sichtweise:** Der Zylinder  $S^1 \times I$  entsteht aus dem Quadrat  $I^2$  durch geeignetes "Verkleben" zweier Kanten.

**Definition II.12.** Sind  $A$  und  $B$  disjunkte Teilräume eines topologischen Raums

*Verkleben*

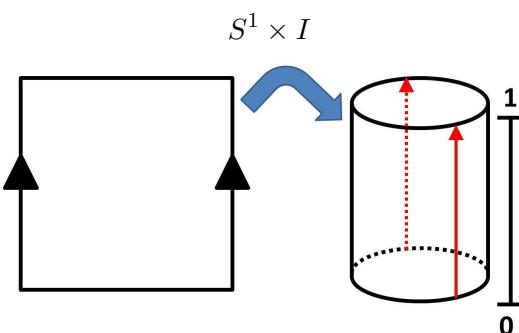


es  $X$  und ist  $f: A \rightarrow B$  ein Homöomorphismus, so heißt der Übergang zum Quotientenraum, der durch die Partition von  $X$  in die Einpunktmengen von  $X \setminus (A \cup B)$  und die Zweipunktmengen  $\{x, f(x)\}, x \in A$  gegeben ist, Verkleben (von  $X$  längs  $A$  und  $B$  via des Homöomorphismus  $f$ ) und dieser Prozess einfach auch Verkleben von  $A$  und  $B$ .

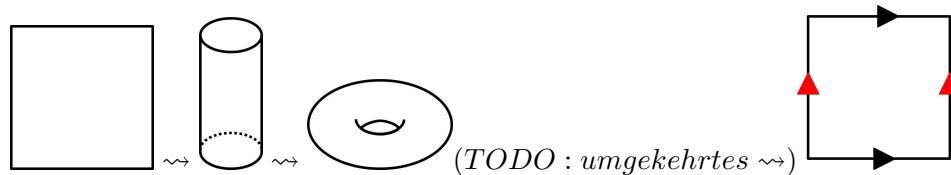
**Notation:**

$$X /_{[a \sim f(a)]} \quad (\text{mit } a \in A)$$

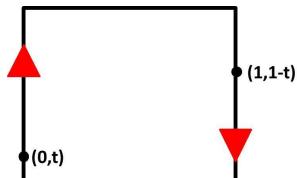
**Beispiel:**



$$S^1 \times I /_{[(z,0) \sim (z,1), z \in S^1]} \cong$$



**Beispiel:**



, d.h.: Betrachte  $I^2 / [(0,t) \sim (1,1-t)]$  und verklebe also die gegenüberliegenden Kanten von  $I^2$  in entgegengesetzter Richtung  $\rightsquigarrow$  Möbiusband

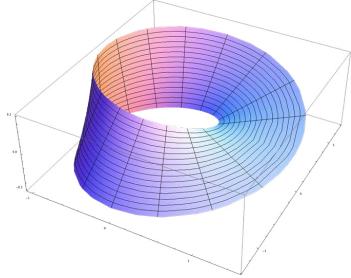
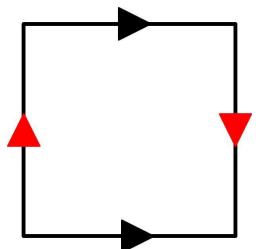


Bild Möbiusband von:

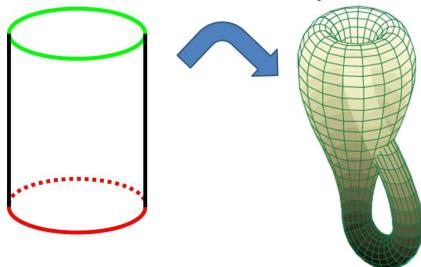
<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:M%C3%BCbiusband.jpg&filetimestamp=20090802105255>

**Beispiel: Die Kleinsche Flasche/ der Kleinsche Schlauch**

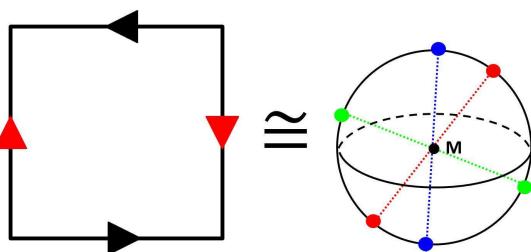
$$K := I^2 / [(t,0) \sim (t,1), (0,t) \sim (1,1-t)]$$



ist Quotient des Zylinders bzw. Möbiusbandes.



**Beispiel: Die projektive Ebene**



$$\mathbb{P}^2\mathbb{R} \text{ (oder auch } \mathbb{RP}^2)$$

**Definition II.13.** Der  $n$ -dimensionale reell-projektive Raum<sup>a</sup> ist

$$\mathbb{RP}^n := S^n /_{[x \sim -x]}$$

und der  $n$ -dimensionale komplex-projektive Raum ist

$$\mathbb{CP}^n := \underbrace{S^{2n+1}}_{\subset \mathbb{C}^{n+1}} /_{[v \sim \lambda v, \lambda \in S^1]}$$

*n-dimensional  
projektiver  
Raum*

<sup>a</sup>Anschaulich (projektive Geometrie): Die Menge aller Geraden durch den Ursprung im  $\mathbb{R}^{n+1}$

**TODO: Exkurs: Video von einer Kleinschen Flasche (Klein Bottle Adventures)**

**TODO: Exkurs: Homotopietheorie, Homologietheorie**

# Kapitel III

## Konzepte der Algebraischen Topologie

### 1 Die Fundamentalgruppe

**Erinnerung** Homotopie von Abbildungen  
 $X, Y$  topologische Räume,  $f, g: X \rightarrow Y$  stetig.  
Eine stetige Abbildung

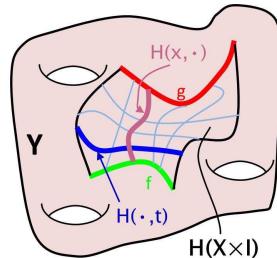
$$H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit

$$H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

heißt Homotopie von  $f$  nach  $g$ , und  $f$  und  $g$  dann homotop,  
in Zeichen:

$$f \simeq g.$$



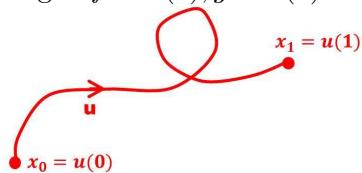
$$H \hat{=} (h_t)_{t \in I}, h_t: X \rightarrow Y$$

$$h_0 = f, \quad h_1 = g$$

Wege  $u: I \rightarrow X$ ,  $u$  stetig, spielen eine ganz wesentliche Rolle im Homotopiebegriff für Abbildungen.

**Beispiel:**

- Jeder Weg  $u$  ist selbst eine Homotopie, und zwar zwischen den konstanten Abbildungen  $f \equiv u(0), g \equiv u(1)$ .



- Jede Homotopie besteht aus Wegen:

Ist  $(h_t)_{t \in I}$  Homotopie  $f \simeq g$  und  $x \in X$ , so ist  $u_x: I \rightarrow X, t \mapsto h_t(x)$  ein Weg.

- Jede (allgemeine) Homotopie ist (selber) ein Weg:

$\forall t \in I$  ist  $h_t: X \rightarrow Y$  stetige Abbildung.

$\rightsquigarrow \Gamma: I \rightarrow C(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y \text{ stetig}\}, \quad t \mapsto h_t$

$\Gamma$  ist zunächst nur eine Abbildung, doch gilt:

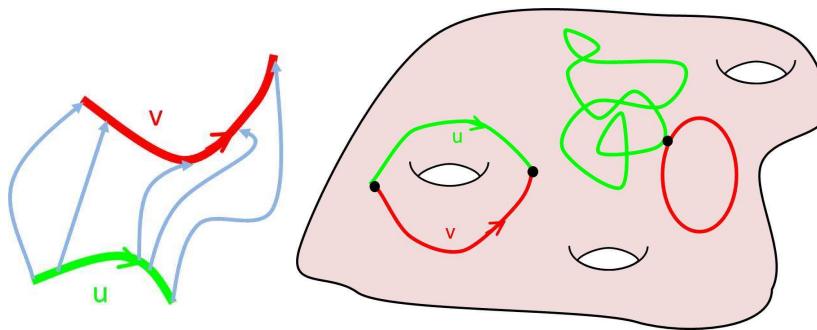
**Bemerkung III.1.**  $C(X, Y)$  ist, versehen mit der sogenannten kompakt-offenen Topologie, selbst ein topologischer Raum und jede Homotopie  $H: f \simeq g, \quad f, g \in C(X, Y)$  ist bezüglich dieser Topologie auf  $C(X, Y)$  dann tatsächlich als stetige Abbildung (also Weg)  $\Gamma: I \rightarrow C(X, Y)$ ,  $\Gamma$  wie oben, interpretierbar.

Die kompakt-offene Topologie auf  $C(X, Y)$  wird erzeugt von allen Mengen der Form  $\{\varphi \in C(X, Y) \mid \varphi(A) \subset B\}, \quad A \subset X$  kompakt,  $B \subset Y$  offen

**TODO: Exkurs: Anwendungen von  $C(X, Y)$  mit dieser Topologie: Lösen von DGL, DGL-Systemen usw.** Homotopie von Wegen ist zunächst nicht sehr interessant:

**Bemerkung III.2.** Zwei Wege  $u, v: I \rightarrow X$  sind homotop

$\Leftrightarrow u(I)$  und  $v(I)$  liegen in derselben Wegzusammenhangskomponente

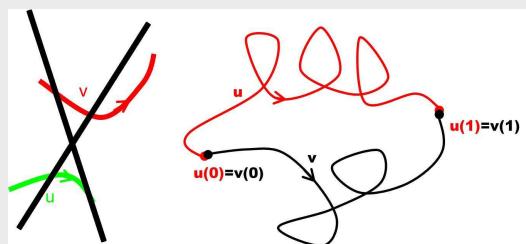


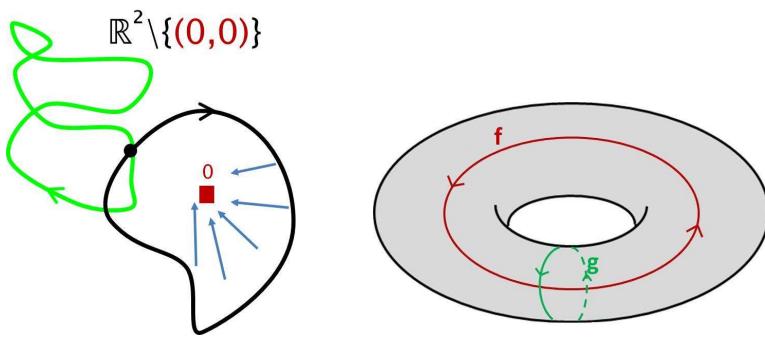
Deshalb neues Konzept:

**Definition III.1.** Zwei Wege  $u, v: I \rightarrow X$ ,  $X$  topologischer Raum, heißen homotop (bezüglich der Endpunkte) : $\Leftrightarrow$

1.  $u(0) = v(0), u(1) = v(1)$
2.  $\exists$  Homotopie  $H: u \simeq v$  (mit  $H(0, t) \equiv u(0), H(1, t) \equiv u(1)$ )

*homotop  
bezüglich  
der End-  
punkte*





$$u, v: \underbrace{I}_{=X} \rightarrow \underbrace{X}_{=Y}$$

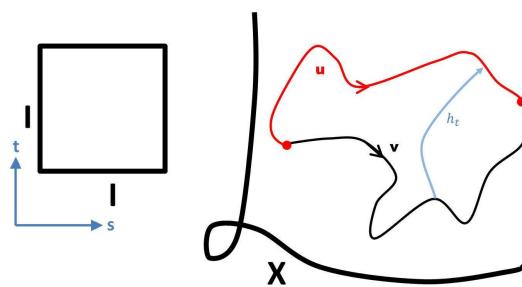
$$H: I \times I \rightarrow X, (s, t) \mapsto H(s, t)$$

$$u = u(s), v = v(s)$$

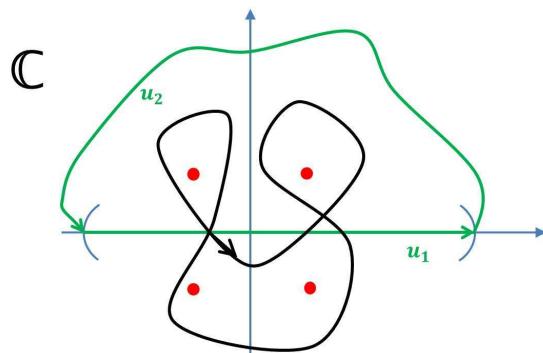
$$H(s, 0) = u(s), H(s, 1) = v(s)$$

$$H(0, t) \equiv u(0) (= v(0) = H(0, 0))$$

$$H(1, t) \equiv u(1) (= v(1) = H(1, 1))$$



Beispiel:



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} 1$$

TODO: Exkurs: Residuensatz, Wegintegrale

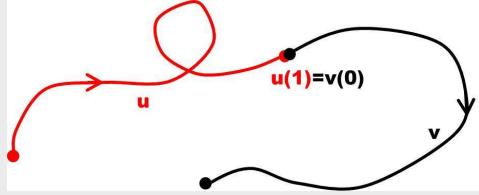
**Bemerkung III.3.** Die Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation und für die Homotopieklassen eines Weges  $u$  schreibt man  $[u]$ .

<sup>1</sup>Explodiert für  $x^4 = -1$  (Singularität)

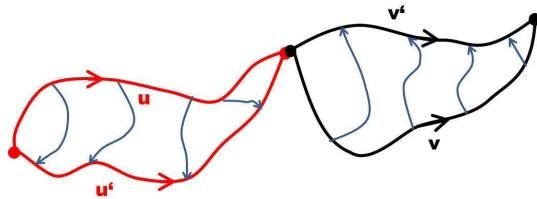
Produkt  
von  
Wegen

**Definition III.2.** Sind  $u, v$  Wege in  $X$  mit  $u(1) = v(0)$ , so heißen  $u$  und  $v$  zusammensetzbare oder aneinanderfügbar und ihr Produkt  $u \cdot v$  ist definiert als

$$(u \cdot v)(s) := \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ v(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



**Bemerkung III.4.** Gilt  $u \simeq u'$  und  $v \simeq v'$  und ist  $u \cdot v$  definiert, so auch  $u' \cdot v'$ , und  $u' \cdot v$  ist dann auch homotop zu  $u \cdot v$ .



Denn

$$u_t: I \rightarrow X \text{ sei Homotopie } u \simeq u',$$

$$v_t: I \rightarrow X \text{ sei Homotopie } v \simeq v'$$

$$\Rightarrow u_t \cdot v_t: I \rightarrow X \text{ ist Homotopie } uv \simeq u'v'$$

Formal(er):  $u \cdot v$  ist definiert  $\Rightarrow u(1) = v(0)$

$$u \simeq u' \Rightarrow u'(1) = u(1), \quad v \simeq v' \Rightarrow v'(0) = v(0) (= u(1) = u'(1))$$

$$\Rightarrow u' \cdot v' \text{ ist definiert.}$$

Homotopie  $H$  von  $u \cdot v$  zu  $u' \cdot v'$  ist dann die stetige Abbildung

$$H: I \times I \rightarrow X \text{ mit } (s, t) \mapsto \begin{cases} H^{u, u'}(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H^{v, v'}(2s - 1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

wobei  $H^{u, u'}: u \simeq u'$ ,  $H^{v, v'}: v \simeq v'$ .

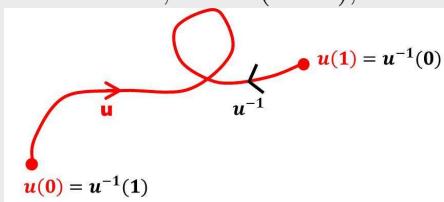
Folgerung: Setzt man für aneinanderfügbare Wege  $u, v$

$$[u] \cdot [v] := [u \cdot v],$$

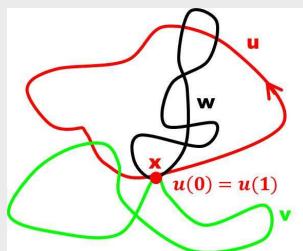
so ist dieses Produkt wohldefiniert!

**Definition III.3.**

- Für  $x \in X$  sei  $c_x: I \rightarrow X$  mit  $c_x \equiv x$  der konstante Weg in  $x \in X$ .
- Für einen Weg  $u: I \rightarrow X$  sei  $u^{-1}: I \rightarrow X, s \mapsto u(1-s)$ , der zu  $u$  inverse (oder: umgekehrt durchlaufene) Weg.
- $u: I \rightarrow X$  heißt geschlossener Weg (oder: Schleife) in  $x \in X$



$$\Leftrightarrow u(0) = x = u(1)$$



Konstanter Weg,  
Inverser Weg,  
Geschlossen-  
sener Weg

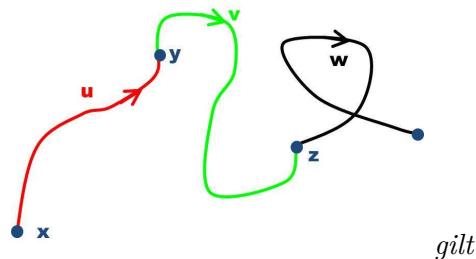
**Bemerkung III.5.** Geschlossene Wege (in  $x$ ) sind immer aneinanderfügbar.

**Definition III.4.**

- Ein geschlossener Weg  $u$  in  $x$  heißt nullhomotop  
 $\Leftrightarrow [u] = [c_x]$
- $X$  heißt einfach zusammenhängend : $\Leftrightarrow$   
 $X$  ist wegzusammenhängend und  
jeder geschlossene Weg  $u$  in  $X$  ist nullhomotop (zu  $c_{u(0)}$ ).

nullhomotop,  
einfach  
zusam-  
menhän-  
gend

**Lemma III.1.** Für Wege  $u, v, w: I \rightarrow X$   
mit  $u(0) = x, u(1) = y = v(0), v(1) = z = w(0)$



gilt

1.  $[u] \cdot [u^{-1}] = [u \cdot u^{-1}] = [c_x]$
2.  $[u^{-1}] \cdot [u] = [u^{-1} \cdot u] = [c_y]$
3.  $[u] \cdot [c_y] = [u] = [c_x] \cdot [u]$
4.  $[u] \cdot ([v] \cdot [w]) = ([u] \cdot [v]) \cdot [w]$

*Beweis.* (von (1), Rest analog)

Es sei  $H$  die Homotopie

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ u(t) & \frac{t}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ u(2 - 2s) & 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

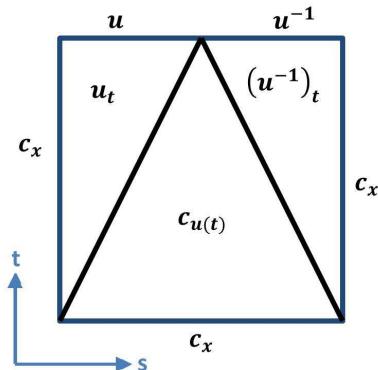
Es gilt

$$(u \cdot u^{-1})(s) = \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ u^{-1}(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$H$  ist stetig und erfüllt

1.  $H(s, 0) = u(t) = u(0) = x = c_x(s)$
2.  $H(s, 1) = (u \cdot u^{-1})(s)$ , denn
  - $H(s, 1)|_{[0, \frac{1}{2}]} = u(2s) = (u \cdot u^{-1})|_{[0, \frac{1}{2}]}$
  - $H(s, 1)|_{[\frac{1}{2}, 1]} = u(2 - 2s) = u(1 - (2s - 1)) = u^{-1}(2s - 1) = (u \cdot u^{-1})|_{[\frac{1}{2}, 1]}$
3.  $H(0, t) = u(0) = x = c_x(0) = (u \cdot u^{-1})(0)$
4.  $H(1, t) = u(2 - 2) = u(0) = x = c_x(1) = (u \cdot u^{-1})(1)$

Schematisch:



Also ist  $H$  Homotopie von  $c_x$  nach  $(u \cdot u^{-1})$  und

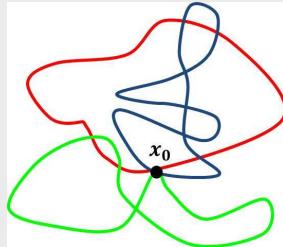
$$[u] \cdot [u^{-1}] = [u \cdot u^{-1}] = [c_x]$$

□

**Satz III.1.** Für einen topologischen Raum  $X$  und  $x_0 \in X$  ist

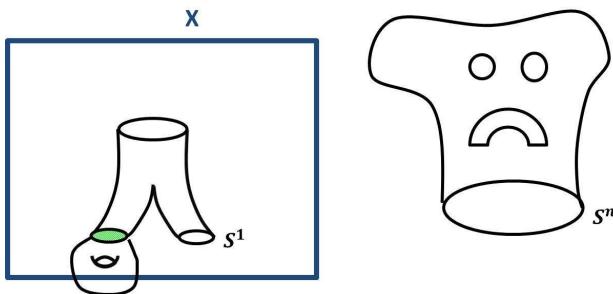
$$\pi_1(X, x_0) := \{[u] \mid u: I \rightarrow X \text{ geschlossener Weg in } x_0\}$$

bezüglich  $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$  eine Gruppe, die sogenannte Fundamentalgruppe oder erste Homotopiegruppe von  $X$  in  $x_0$ .



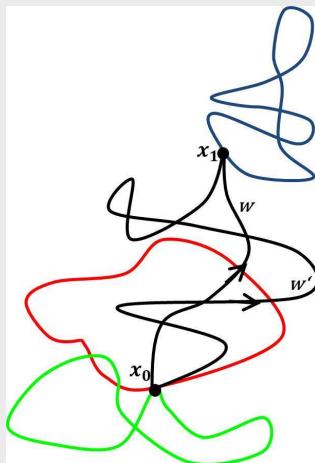
Neutrales Element ist  $1 = 1_{x_0} := [c_{x_0}]$   
und Inverses zu  $\alpha = [u]$  ist  $\alpha^{-1} = [u^{-1}]$ .

**TODO. Exkurs: Kobordismus von Mannigfaltigkeiten, Stringtheorie, ...** <sup>2</sup>



**Satz III.2** (Unabhängigkeit vom Basispunkt). Ist  $w: I \rightarrow X$  Weg von  $x_0$  nach  $x_1$ , so ist die Abbildung

$$w_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), \quad [u] \mapsto [w^{-1} \cdot u \cdot w]$$



ein Gruppen-Isomorphismus.

*Beweis.* Lemma  $\Rightarrow w_\#$  ist Homomorphismus und  $(w_\#)^{-1} = (w^{-1})_\#$   
 $\Rightarrow w_\#$  ist Isomorphismus! □

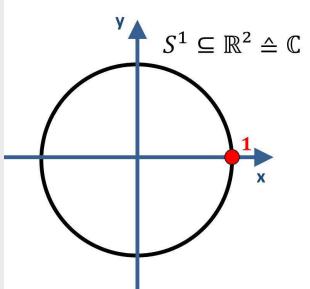
<sup>2</sup><http://www.scienceblogs.de/mathlog/2008/03/physik-topologie-logik-und-berechenbarkeit.php>

**Bemerkung III.6.** Dieser Isomorphismus hängt von  $w$  ab und ist deshalb im Allgemeinen nicht kanonisch! Kanonisch ist er, falls  $\pi_1$  abelsche Gruppe ist!  
 $[w^{-1}][u \cdot v][w] = [w^{-1}uw][w^{-1}vw] \Rightarrow w_{\#}$  ist Homomorphismus.

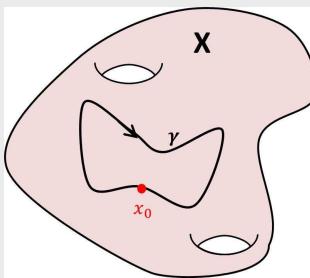
**Erinnerung**  $\forall$  topologischen Räume  $X$  und  $x_0 \in X$  ist  $\pi_1(X, x_0)$ , die Menge der Homotopieklassen  $[u]$  geschlossener Wege in  $x_0$ , mit der Multiplikation  $[u] \cdot [v] = [u \cdot v]$  eine Gruppe, die sogenannte Fundamentalgruppe von  $X$  in  $x_0$ .

## 1.1 Geschlossene Wege als Abbildungen $S^1 \rightarrow X$

**Definition III.5.** Es sei  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  und  $1 := (1, 0) \in S^1$



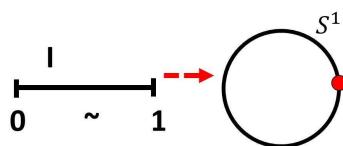
Eine stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow X$ ,  $X$  topologischer Raum,  $x_0 \in X$ , mit  $\gamma(1) = x_0$ , heißt Schleife in  $x_0$ .



**Bemerkung III.7.** Assoziiert man zu einer Schleife  $\gamma$  in  $x_0 \in X$  die Komposition mit der Exponentialabbildung  $\exp: I \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i \cdot t} (= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ , so ist  $\gamma \circ \exp$  ein gewöhnlicher geschlossener Weg in  $x_0$ .

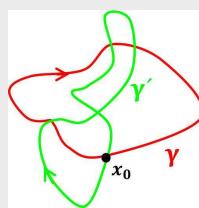
Tatsächlich kann jeder gewöhnliche geschlossene Weg in  $x_0$  auf diese Art aus einer Schleife in  $x_0$  erhalten werden:

Denn ist  $u: I \rightarrow X$  geschlossener Weg in  $x_0 \in X$ , so existiert eine Quotientenabbildung  $\tilde{u}: I/\{0,1\} \rightarrow X$  und  $I/\{0,1\} \cong S^1$ !



**Definition III.6.** Zwei Schleifen  $\gamma, \gamma'$  in  $x_0$  heißen (schleifen-)homotop, falls es eine Homotopie zwischen ihnen gibt, die auf  $1 \in S^1$  stationär ist, also  $\gamma(1) = x_0 = \gamma'(1)$  die ganze Zeit festhält.

*schleifenhomotop*



**Bemerkung III.8.** Zwei Schleifen in  $x_0$  sind genau dann homotop, wenn die entsprechenden gewöhnlichen geschlossenen Wege homotop sind.

Denn: "  $\Rightarrow$  " Ist  $H: S^1 \times I \rightarrow X$  eine Homotopie von Schleifen, so definiert

$$H': I \times I \rightarrow X, \quad (s, t) \mapsto H(e^{2\pi i s}, t)$$

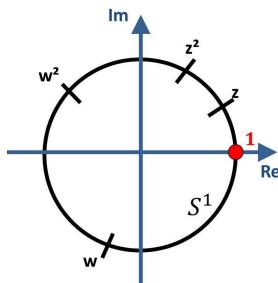
eine Homotopie geschlossener Wege.

" $\Leftarrow$ " Homotopien von Schleifen sind nichts anderes als Quotientenräume von Homotopien von gewöhnlichen geschlossenen Wegen nach der Partition des Einheitsquadrates  $I \times I$ , die von  $(0, t) \sim (1, t)$  erzeugt wird.

**Bemerkung III.9.**  $\pi_1(X, x_0)$  lässt sich dann auch vollständig über die Multiplikation von Schleifen in  $x_0$  definieren!

**Beispiel:**

Sind  $\gamma, \gamma'$  Schleifen in  $x_0$ , die zu den Wegen  $u, u': I \rightarrow X$  (mit  $u(0) = u(1) = x_0 = u'(0) = u'(1)$ ) gehören, so entspricht dem Produkt  $u \cdot u'$  die Abbildung  $S^1 \ni z \mapsto \begin{cases} \gamma(z^2) & \text{Im}(z) \geq 0 \\ \gamma'(z^2) & \text{Im}(z) \leq 0 \end{cases}$

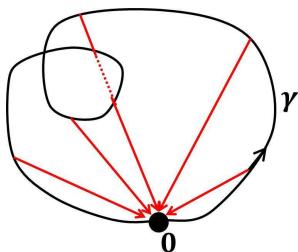


## 1.2 Erste Beispiele von Fundamentalgruppen

**Beispiel:**

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{0\} \text{ (ist trivial)}$$

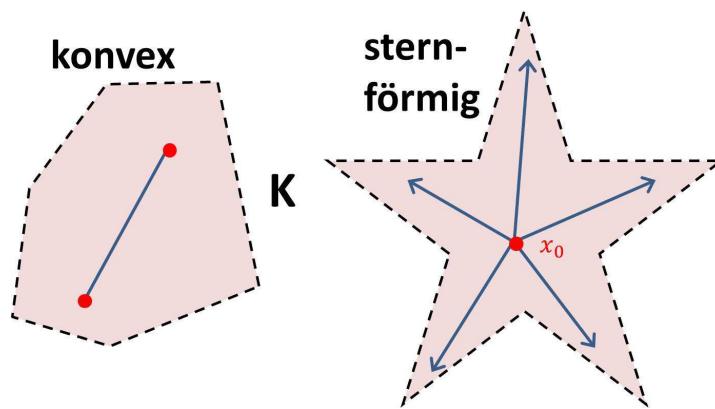
Denn zwischen jeder Schleife in  $0 \in \mathbb{R}^n$  und  $c_0$  gibt es eine Homotopie.



**Bemerkung III.10.** Für triviale, also nur aus einem Element bestehende, Fundamentalgruppe schreibt man oft auch  $\pi_1 = \{1\}$  (statt " $= \{0\}$ ").

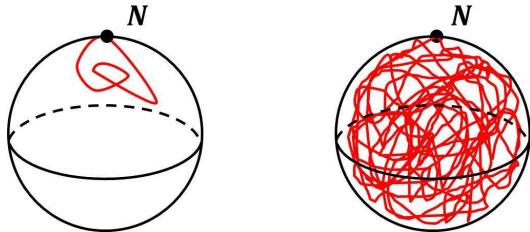
**Beispiel:**

Für jede konvexe oder auch sternförmige Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  und alle  $x_0 \in K$  ist  $\pi_1(K, x_0)$  trivial.

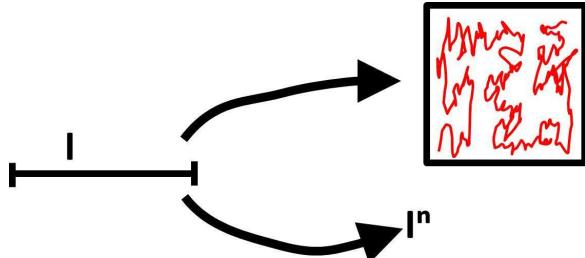


**Beispiel:**

$$\pi_1(S^n, N := (0, \dots, 0, 1)) = \{0\} \quad \forall n \geq 2$$



Achtung:  $\forall n \in \mathbb{N}$  existieren stetige Surjektionen  $I \rightarrow S^n$

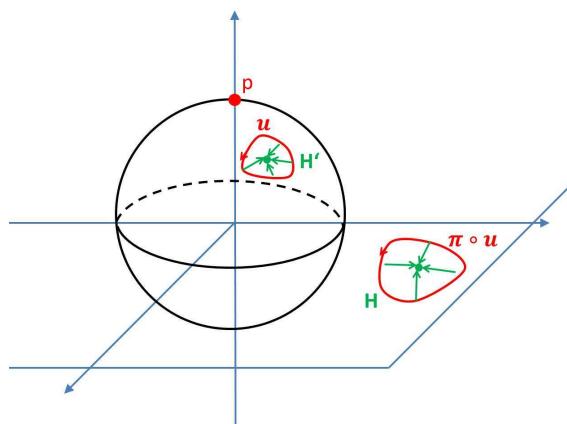


Frage: Gibt es stetige Surjektionen  $I \rightarrow S^n$ , die nullhomotop sind? Ja: Ist  $u$  eine, so ist  $u \cdot u^{-1}$  auch eine, doch  $\sim 0!$

**Zwei Schritte zum Beweis von  $\pi_1(S^n, N) = \{0\}$ :**

1. Jeder geschlossene Weg  $u: I \rightarrow S^n$  mit  $u(I) \neq S^n$  ist für  $n \geq 2$  nullhomotop.

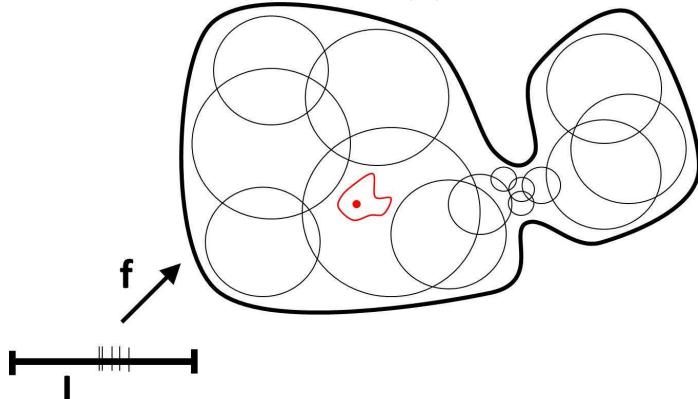
Denn: Es sei  $p \in S^n \setminus u(I)$  und  $\pi: S^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die stereographische Projektion (von  $p$  aus). Dann ist  $\pi \circ u$  geschlossener Weg in  $\mathbb{R}^n$  und nullhomotop in  $\mathbb{R}^n$ .



Ist  $H$  Homotopie, so ist  $H' := \pi^{-1} \circ H$  eine Homotopie, die  $u$  auf  $S^n$  zu einer konstanten Kurve homotopiert, d.h.  $u \sim c_{x_0}$ .

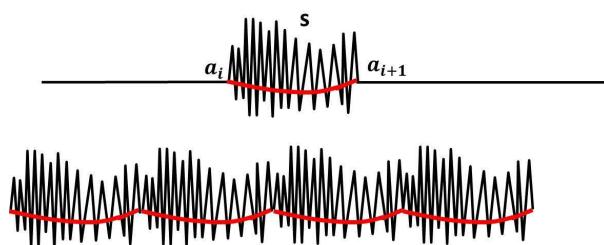
2. Jeder stetige Weg auf  $S^n$  mit  $n \geq 2$  ist homotop zu einem nicht surjektiven Weg auf  $S^n$ !

**Erinnerung (Lebesguelemma)** Ist  $f: Z \rightarrow Y$ ,  $Z$  kompakter metrischer Raum,  $Y$  topologischer Raum und  $\Gamma$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , so existiert  $\delta > 0$  mit:  
 $\forall A \subset Z$  mit  $diam(A) < \delta$  ist  $f(A)$  in einem Element von  $\Gamma$  (ganz) enthalten.



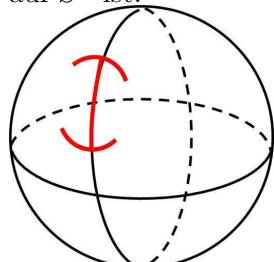
**Korollar III.1.** Ist  $s: I \rightarrow X$  Weg und  $\Gamma$  offene Überdeckung von  $X$ , so existiert eine Folge von Punkten  $a_1, \dots, a_N \in I$  mit  $0 = a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1$  mit  $s([a_i, a_{i+1}])$  ist in einem Element von  $\Gamma$  enthalten.

**Lemma III.2.**  $\forall n \geq 2$  gilt:  $\forall$  Wege  $s: I \rightarrow S^n$  existiert eine endliche Unterteilung von  $I$  in Teilintervalle, so dass die Einschränkung von  $s$  auf jedes der Teilintervalle homotop zu einer Abbildung mit nirgendwo dichtem Bild ist, und zwar durch eine Homotopie, die auf den Endpunkten des Intervalls fixiert ist.



**Beweis.** Denn: Sei  $x \in S^n$  beliebig und überdecke  $S^n$  durch  $U := S^n \setminus \{x\}$  und  $V := S^n \setminus \{-x\}$ . Korollar zu Lebesgue-Lemma  $\Rightarrow \exists a_0, \dots, a_N \in I, 0 = a_1 < \dots < a_N = 1: \forall i$  liegt  $s([a_i, a_{i+1}])$  ganz in  $U$  oder  $V$ .

$U, V \cong \mathbb{R}^n$  (hier sind alle Wege homotop)  $\Rightarrow \forall i: s|_{[a_i, a_{i+1}]} \sim$  Weg, der Teil eines Großkreises auf  $S^n$  ist.

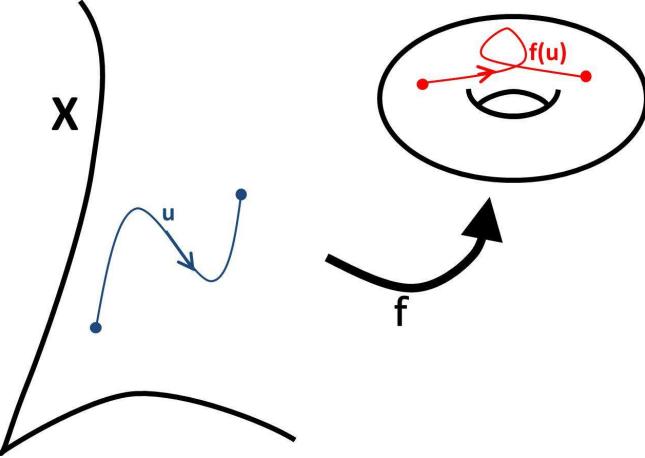


Für  $n \geq 2$  füllt letzterer nicht  $S^n$ .

□

### 1.3 Induzierte Homomorphismen

**Bemerkung III.11.** Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, so liefert jeder Weg in  $X$  einen Weg in  $Y$ ,



und für aneinanderfügbare Wege  $u, v: I \rightarrow X$  gilt offenbar  $f \circ (u \cdot v) = (f \circ u) \cdot (f \circ v)$ . Sind  $u$  und  $v$  ferner homotop, so auch  $f \circ u$  und  $f \circ v$ , denn ist  $H: I \times I \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen  $u$  und  $v$ , so ist  $f \circ H: I \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f \circ u$  und  $f \circ v$ .

Betrachtet man insbesondere geschlossene Wege  $u$  in  $x_0 \in X$ , so definiert  $[u] \mapsto [f \circ u]$  also einen Homomorphismus  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ , den sogenannten von  $f$  induzierten Homomorphismus der Fundamentalgruppen.

Ist  $g: Y \rightarrow Z$  eine weitere stetige Abbildung topologischer Räume, so gilt für jeden Weg  $u$  in  $X$

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g \circ (f \circ u)$$

und damit für die induzierten Homomorphismen  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$   
Speziell gilt für  $\text{id}_X: X \rightarrow X, x \mapsto x$ , und  $x_0 \in X$

$$\text{id}_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

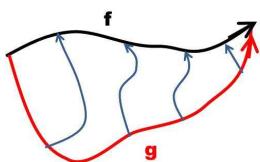
**Folgerung** Homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen! Denn:  
 $f: X \cong Y$  Homöomorphismus  $\Rightarrow f_*$  Isomorphismus!

$(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$ , denn für  $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$  gilt:

$$(f^{-1} \circ f)_* = \text{id}_* = (f^{-1})_* \circ f_*$$

**Bemerkung III.12.** Tatsächlich hängt der von einer stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induzierte Homomorphismus  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  sogar nur von der Homotopieklasse von  $f \in C(X, Y)$  ab, und damit gilt:

Die Fundamentalgruppe eines (wegzusammenhängenden) topologischen Raumes ist nicht nur eine Homöomorphie-, sondern sogar eine Homotopie-Invariante, d.h. hängt nur vom Homotopietyp des Raumes ab!



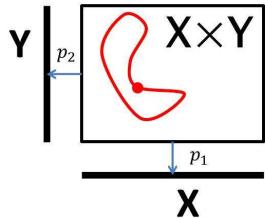
$$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$$

## 1.4 Produkte

**Satz III.3.** Sind  $X, Y$  topologische Räume und  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ , so ist die Fundamentalgruppe des Produktraumes  $X \times Y$  in  $(x_0, y_0)$  kanonisch isomorph zum Produkt der Fundamentalgruppen der Faktoren:

$$\boxed{\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \cdot \pi_1(Y, y_0)}$$

*Beweis.*  $p_1: X \times Y \rightarrow X$  und  $p_2: X \times Y \rightarrow Y$  seien die Projektionen von  $X \times Y$  auf den ersten bzw. zweiten Faktor.



Ist  $Z$  irgendein anderer topologischer Raum, so entspricht jeder stetigen Abbildung  $f: Z \rightarrow X \times Y$  bijektiv ein Paar  $(f_1, f_2)$  stetiger Abbildungen  $f_1: Z \rightarrow X, f_2: Z \rightarrow Y$  mit  $f_i = p_i \circ f, i = 1, 2$

Insbesondere entspricht jeder Weg  $u$  in  $X \times Y$  seinen Projektionen  $u_1$  in  $X$  und  $u_2$  in  $Y$  ( $u_i = p_i \circ u$ ), und zwei Wege in  $X \times Y$  sind homotop genau dann, wenn ihre Projektionen in  $X$  und in  $Y$  homotop sind.

Betrachtet man nun die Fundamentalgruppen von  $X \times Y, X, Y$  in  $(x_0, y_0), x_0, y_0$ , so ist

$$p_*: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \quad [u] \mapsto ([\underbrace{p_1 \circ u}_{=p_{1*}[u]}], [\underbrace{p_2 \circ u}_{=p_{2*}[u]}])$$

deshalb eine Bijektion.

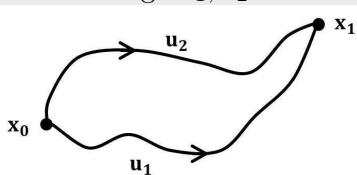
Fasst man  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$  jetzt als direktes Produkt von Gruppen auf, so ist  $p_*$  auch ein Homomorphismus, denn  $p_{1*}$  und  $p_{2*}$  sind Homomorphismen, und damit, weil bijektiv, ist  $p_*$  Isomorphismus.  $\square$

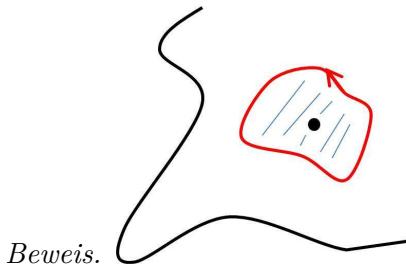
### Beispiel:

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1, x_0) &\cong \mathbb{Z} \text{ (siehe später)} \\ \Rightarrow \pi_1(T^n, x_0) &\cong \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

**Satz III.4.** Für einen wegzusammenhängenden Raum  $X$  sind äquivalent:

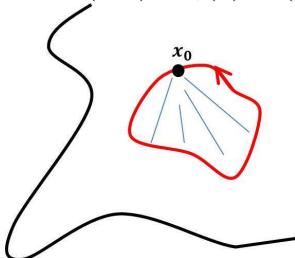
1.  $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$  (für ein und damit alle  $x_0 \in X$ );
2. Jede stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow X$  ist (frei) nullhomotop;
3. Jede stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow X$  setzt sich stetig auf  $D^2$  fort;
4. Je zwei Wege  $u_1, u_2$  in  $X$  mit gleichen Anfangs- bzw. Endpunkten sind homotop.





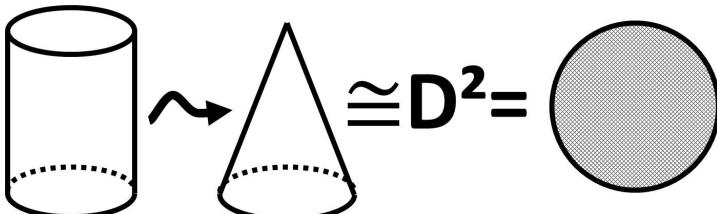
(1)  $\Rightarrow$  (2):  $X$  einfach zusammenhängend  $\Rightarrow$  Jeder geschlossene Weg in  $X$  ist nullhomotop  $\Rightarrow$  Jede Schleife in  $X$  ist nullhomotop  $\Rightarrow$  jede Schleife in  $X$  ist frei nullhomotop

(2)  $\Rightarrow$  (3): Für jede stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow X$  existiert eine Homotopie  $H: S^1 \times I \rightarrow X$  mit  $H(z, 0) = \gamma(z), H(z, 1) = x_0$



$\Rightarrow \exists$  stetige Abbildung  $H': S^1 \times I /_{S^1 \times \{1\}} \rightarrow X$  mit  $H = H' \circ \pi$ ,

mit  $\pi: S^1 \times I \rightarrow \underbrace{S^1 \times I /_{S^1 \times \{1\}}}_{\cong D^2}$ :



(3)  $\Rightarrow$  (4): Es sei  $G$  die Abbildung mit

$$G(t, 0) = u_1(t), G(t, 1) = u_2(t), G(0, t) = x_0, G(1, t) = x_1 \text{ für } t \in I,$$

d.h.  $G$  bildet den  $\underbrace{\text{Rand von } I \times I}_{\cong S^1}$  auf  $X$  ab.

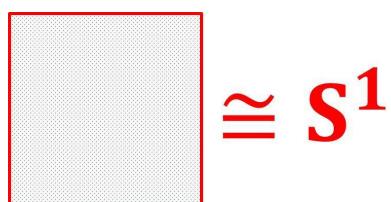


Abbildung III.1: Der Rand des Einheitsquadrates ist homöomorph zur  $S^1$ .

Wegen  $I \times I \cong D^2$  und  $\partial(I \times I) \cong S^1$ , setzt sich  $G$  stetig auf ganz  $I \times I$  fort und ist Homotopie  $u_1 \simeq u_2$ .

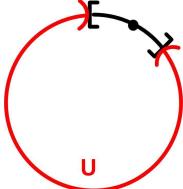
(4)  $\Rightarrow$  (1): klar □

## 2 Überlagerungen

**Motivation** Betrachte die stetige und surjektive Abbildung

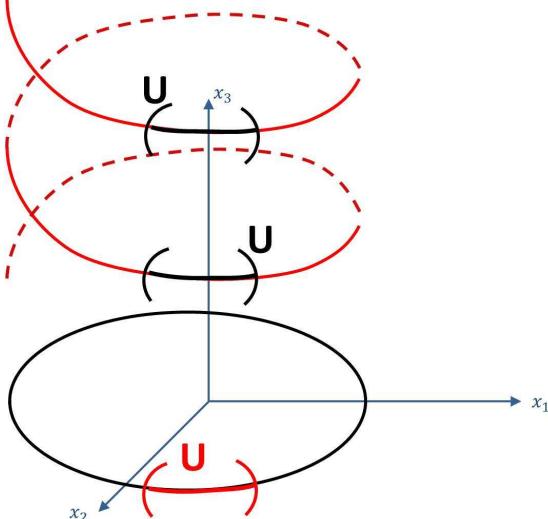
$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = e^{2\pi i t}$$

Entfernt man aus  $S^1$  einen Punkt oder auch ein abgeschlossenes Kreissegment



, so erhält man eine offene Teilmenge  $U$  von  $S^1$ , deren Urbild unter  $\pi$  aus disjunkten offenen Intervallen besteht, und jedes dieser Intervalle wird unter  $\pi$  homöomorph auf  $U$  abgebildet.

**Veranschaulichung** Identifiziere  $\mathbb{R}$  zunächst mit einer "Spirale" im  $\mathbb{R}^3$  via  $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ ;



projiziere orthogonal auf die x-y-Ebene, die  $S^1$  enthält.

Zu  $\pi$  gehört zudem eine Gruppe von Homöomorphismen von  $\mathbb{R}$ , die Gruppe der ganzzahligen Translationen

$$\tau_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + k, k \in \mathbb{Z}$$

und zwei Punkte  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  haben dasselbe Bild unter  $\pi$  genau dann, wenn sie sich um eine ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  unterscheiden.

Jede solche "Deckbewegung" ist durch eine ganze Zahl, z.B. das Bild von  $0 \in \mathbb{R}$ , eindeutig bestimmt.

Es gilt ferner:

$$\tau_{(k+l)} = \tau_k \circ \tau_l$$

Betrachtet man abermals  $\mathbb{R}$  als via  $\pi$  auf  $S^1$  "aufgewickelt", so wird jedes Intervall der Form  $[0, n]$  bzw.  $[-n, 0]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , auf einen geschlossenen Weg auf  $S^1$  abgebildet, und man erhält dadurch alle Elemente der Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^1, 1)$ .

Wir werden sehen:  $\pi_1(S^1, 1)$  ist isomorph zur Gruppe der Deckbewegungen von  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , also  $\cong \mathbb{Z}$ , weil  $\mathbb{R}$  einfach zusammenhängend ist und dieses Phänomen allgemein für sogenannte "universelle" Überlagerungen gilt.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}/\mathbb{Z} &\cong S^1 \\ \tilde{X}/G = X, \pi_1(\tilde{X}) &= \{0\} \Rightarrow \pi_1(X) \cong G\end{aligned}$$

**Definition III.7.** Ist  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum, so ist eine Überlagerung von  $X$  ein wegzusammenhängender Raum  $\tilde{X}$  zusammen mit einer stetigen surjektiven Abbildung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ , so dass gilt:

Überlagerung

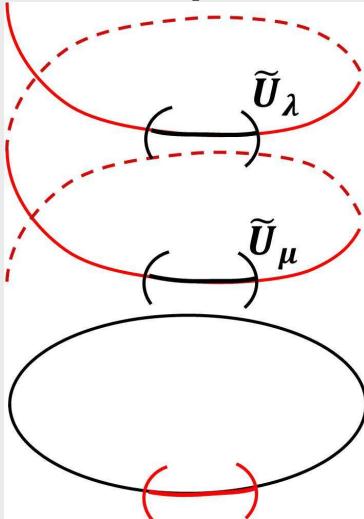
(Ü) Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine offene Umgebung  $U = U(x)$ , so dass das Urbild  $\pi^{-1}(U(x)) \subset \tilde{X}$  eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen von  $\tilde{X}$  ist,

$$\pi^{-1}(U(x)) = \{\tilde{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \tilde{U}_\lambda \subset \tilde{X} \text{ ist offen, } \tilde{U}_\lambda \cap \tilde{U}_\mu = \emptyset \quad \forall \lambda \neq \mu,$$

so dass für alle  $\lambda \in \Lambda$

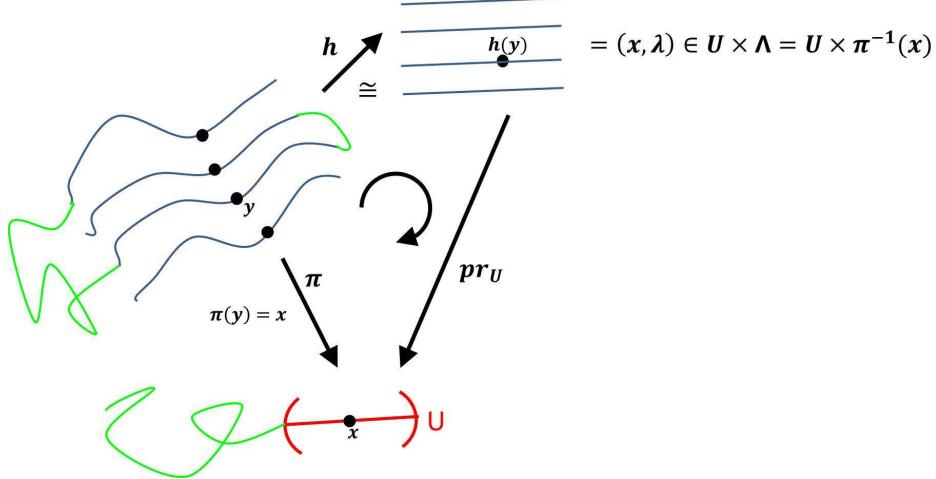
$$\pi|_{\tilde{U}_\lambda}: \tilde{U}_\lambda \rightarrow U(x)$$

ein Homöomorphismus ist.

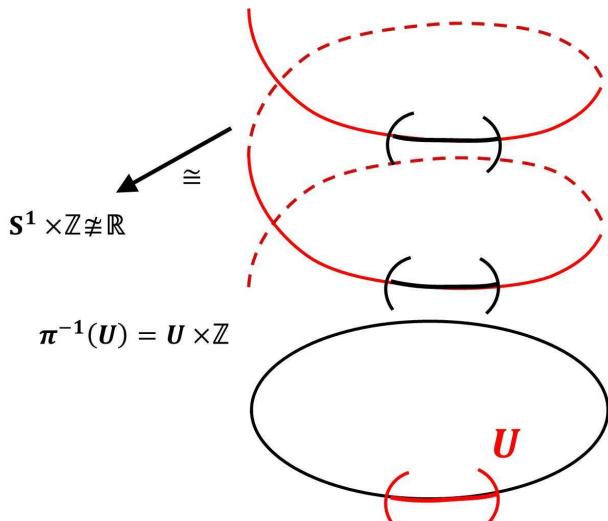


**Terminologie/Sprechweisen**  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt auch Projektion oder Überlagerungsabbildung,  $\tilde{X}$  der überlagernde und  $X$  der überlagerte Raum. Für  $A \subset X$  sagt man auch,  $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$  liege über  $A$ , und speziell für  $x \in X$  heißt  $\pi^{-1}(x) \subset \tilde{X}$  auch Faser über  $x$ . Für die Einschränkung  $\pi^{-1}(A), \pi|_{\pi^{-1}(A)}$  von  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  auf  $A \subset X$  schreibt man auch kurz  $\tilde{X}|_A$ .  $U(x)$  wie in III.7.(Ü) heißt auch kanonische oder lokal trivialisierende Umgebung von  $x$ .

**Bemerkung III.13.**  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  ist also eine Überlagerung, wenn es für alle  $x \in X$  offenes  $U = U(x)$  und einen diskreten Raum  $\Lambda$  gibt, so dass  $\tilde{X}|_U$  und  $U \times \Lambda$  über  $U$  homöomorph

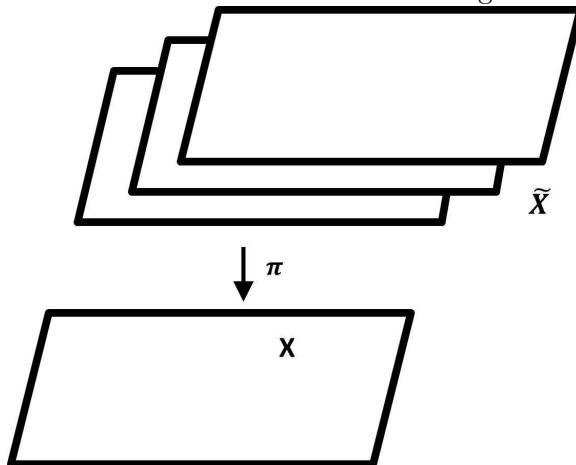


sind:



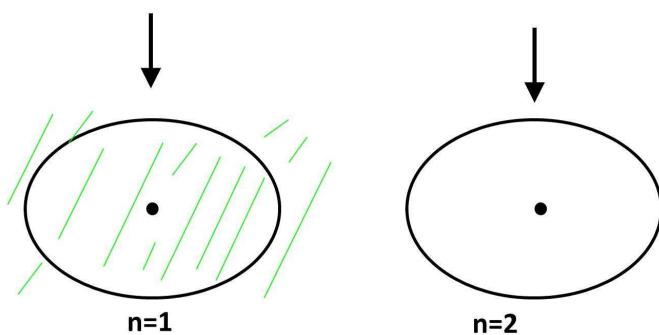
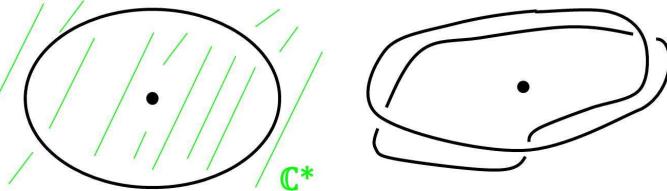
Für  $\Lambda$  kann natürlich auch  $\pi^{-1}(x)$  gewählt werden!

**Bemerkung III.14.** Die Kardinalität von  $\pi^{-1}(x)$  heißt Blätterzahl der Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  und ist für zusammenhängendes  $X$  konstant.



### Beispiel: Beispiele für Überlagerungen

1.  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$
2.  $\pi: \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^n, n \in \mathbb{N}$ , ist für jedes  $n = 1, 2, 3, \dots$  eine Überlagerung.



Für alle  $n \in \mathbb{N}$  überlagert  $S^1$  sich aber selber, und läuft auf unendlich viele verschiedene Arten.

### Mini-Exkurs: Funktionentheorie, verzweigte Überlagerung ...

**Definition III.8.** Zwei Überlagerungen  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X, \pi': \tilde{X}' \rightarrow X$  heißen äquivalent

$$\Leftrightarrow \exists \text{ Homöomorphismus } f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$$

mit  $\pi' \circ f = \pi$ :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{X}' \\ \pi \searrow & \curvearrowright & \swarrow \pi' \\ & X & \end{array}$$

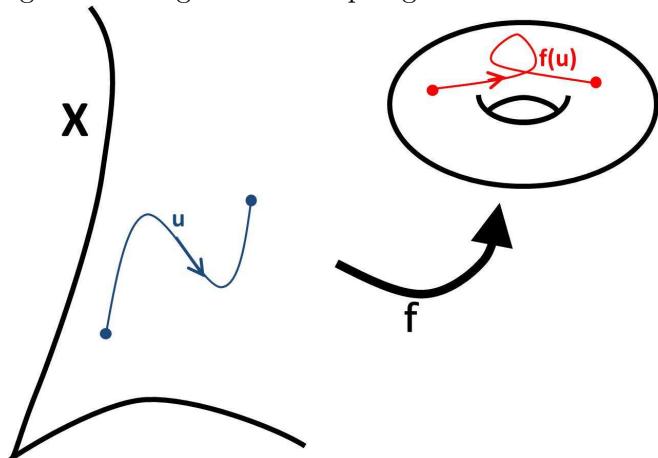
Aequivalenz  
von  
Überlage-  
rungen

**Beispiel:**

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \underbrace{S^1 \times \mathbb{R}}_{\cong \mathbb{C}^*}, (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, y)$  und  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$  sind (wenn man  $S^1 \times \mathbb{R}$  mit  $\mathbb{C}^*$  identifiziert) äquivalent.

## 2.1 Induzierte Homomorphismen

**Bemerkung III.15.** Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen,



men, so liefert jeder Weg in  $X$  einen Weg in  $Y$ , und für aneinanderfügbare Wege  $u, v: I \rightarrow X$  gilt offenbar  $f \circ (u \cdot v) = (f \circ u) \cdot (f \circ v)$ . Sind  $u$  und  $v$  ferner homotop, so auch  $f \circ u$  und  $f \circ v$ , denn ist  $H: I \times I \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen  $u$  und  $v$ , so ist  $f \circ H: I \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f \circ u$  und  $f \circ v$ .

Betrachtet man insbesondere geschlossene Wege  $u$  in  $x_0 \in X$ , so definiert  $[u] \mapsto [f \circ u]$  also einen Homomorphismus  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ , den sogenannten von  $f$  induzierten Homomorphismus der Fundamentalgruppen.

Ist  $g: Y \rightarrow Z$  eine weitere stetige Abbildung topologischer Räume, so gilt für jeden Weg  $u$  in  $X$

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g \circ (f \circ u)$$

und damit für die induzierten Homomorphismen  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$   
 Speziell gilt für  $id_X: X \rightarrow X, x \mapsto x$ , und  $x_0 \in X$

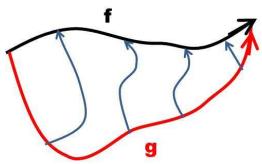
$$id_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

**Folgerung** Homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen! Denn:  
 $f: X \cong Y$  Homöomorphismus  $\Rightarrow f_*$  Isomorphismus!

$(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$ , denn für  $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$  gilt:  
 $(f^{-1} \circ f)_* = id_* = (f^{-1})_* \circ f_*$

**Bemerkung III.16.** Tatsächlich hängt der von einer stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induzierte Homomorphismus  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  sogar nur von der Homotopiekasse von  $f \in C(X, Y)$  ab, und damit gilt:

Die Fundamentalgruppe eines (wegzusammenhängenden) topologischen Raumes ist nicht nur eine Homöomorphie-, sondern sogar eine Homotopie-Invariante, d.h. hängt nur vom Homotopietyp des Raumes ab!



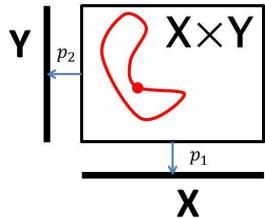
$$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$$

## 2.2 Produkte

**Satz III.5.** Sind  $X, Y$  topologische Räume und  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ , so ist die Fundamentalgruppe des Produktraumes  $X \times Y$  in  $(x_0, y_0)$  kanonisch isomorph zum Produkt der Fundamentalgruppen der Faktoren:

$$\boxed{\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \cdot \pi_1(Y, y_0)}$$

*Beweis.*  $p_1: X \times Y \rightarrow X$  und  $p_2: X \times Y \rightarrow Y$  seien die Projektionen von  $X \times Y$  auf den ersten bzw. zweiten Faktor.



Ist  $Z$  irgendein anderer topologischer Raum, so entspricht jeder stetigen Abbildung  $f: Z \rightarrow X \times Y$  bijektiv ein Paar  $(f_1, f_2)$  stetiger Abbildungen  $f_1: Z \rightarrow X, f_2: Z \rightarrow Y$  mit  $f_i = p_i \circ f, i = 1, 2$

Insbesondere entspricht jeder Weg  $u$  in  $X \times Y$  seinen Projektionen  $u_1$  in  $X$  und  $u_2$  in  $Y$  ( $u_i = p_i \circ u$ ), und zwei Wege in  $X \times Y$  sind homotop genau dann, wenn ihre Projektionen in  $X$  und in  $Y$  homotop sind.

Betrachtet man nun die Fundamentalgruppen von  $X \times Y, X, Y$  in  $(x_0, y_0), x_0, y_0$ , so ist

$$p_*: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), [u] \mapsto ([\underbrace{p_1 \circ u}_{=p_{1*}[u]}], [\underbrace{p_2 \circ u}_{=p_{2*}[u]}])$$

deshalb eine Bijektion.

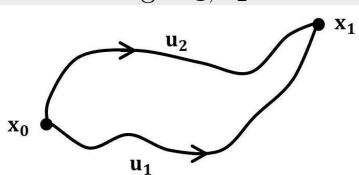
Fasst man  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$  jetzt als direktes Produkt von Gruppen auf, so ist  $p_*$  auch ein Homomorphismus, denn  $p_{1*}$  und  $p_{2*}$  sind Homomorphismen, und damit, weil bijektiv, ist  $p_*$  Isomorphismus.  $\square$

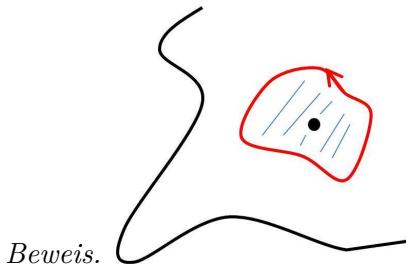
### Beispiel:

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1, x_0) &\cong \mathbb{Z} \text{ (siehe später)} \\ \Rightarrow \pi_1(T^n, x_0) &\cong \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

**Satz III.6.** Für einen wegzusammenhängenden Raum  $X$  sind äquivalent:

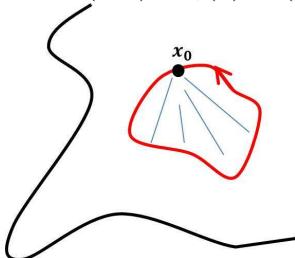
1.  $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$  (für ein und damit alle  $x_0 \in X$ );
2. Jede stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow X$  ist (frei) nullhomotop;
3. Jede stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow X$  setzt sich stetig auf  $D^2$  fort;
4. Je zwei Wege  $u_1, u_2$  in  $X$  mit gleichen Anfangs- bzw. Endpunkten sind homotop.





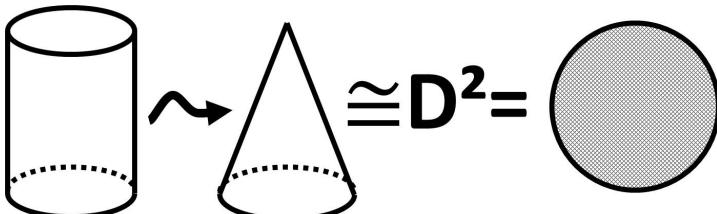
(1)  $\Rightarrow$  (2):  $X$  einfach zusammenhängend  $\Rightarrow$  Jeder geschlossene Weg in  $X$  ist nullhomotop  $\Rightarrow$  Jede Schleife in  $X$  ist nullhomotop  $\Rightarrow$  jede Schleife in  $X$  ist frei nullhomotop

(2)  $\Rightarrow$  (3): Für jede stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow X$  existiert eine Homotopie  $H: S^1 \times I \rightarrow X$  mit  $H(z, 0) = \gamma(z), H(z, 1) = x_0$



$\Rightarrow \exists$  stetige Abbildung  $H': S^1 \times I /_{S^1 \times \{1\}} \rightarrow X$  mit  $H = H' \circ \pi$ ,

mit  $\pi: S^1 \times I \rightarrow \underbrace{S^1 \times I /_{S^1 \times \{1\}}}_{\cong D^2}$ :



(3)  $\Rightarrow$  (4): Es sei  $G$  die Abbildung mit

$$G(t, 0) = u_1(t), G(t, 1) = u_2(t), G(0, t) = x_0, G(1, t) = x_1 \text{ für } t \in I,$$

d.h.  $G$  bildet den  $\underbrace{\text{Rand von } I \times I}_{\cong S^1}$  auf  $X$  ab.

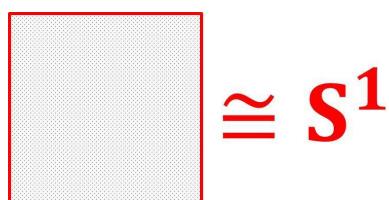


Abbildung III.2: Der Rand des Einheitsquadrates ist homöomorph zur  $S^1$ .

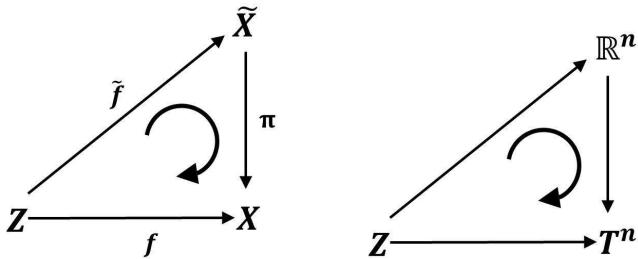
Wegen  $I \times I \cong D^2$  und  $\partial(I \times I) \cong S^1$ , setzt sich  $G$  stetig auf ganz  $I \times I$  fort und ist Homotopie  $u_1 \simeq u_2$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1): klar □

### 3 Liften von Abbildungen

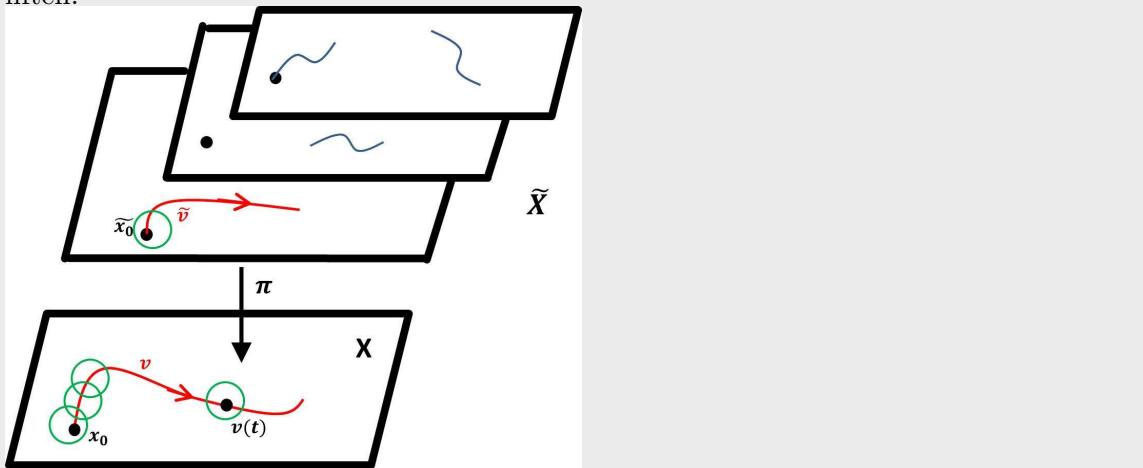
**Definition III.9.** Ist  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  Überlagerung und  $f: Z \rightarrow X$  eine Abbildung, so heißt eine Abbildung  $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$  mit  $f = \pi \circ \tilde{f}$  ein Lift oder Hochhebung von  $f$  (in  $\tilde{X}$ ).

*Lift,  
Hochhe-  
bung*



**Satz III.7** (Liften von Wegen). Es sei  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  Überlagerung.

Ist  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $v: [a, b] \rightarrow X$  stetig sowie  $v(a) = x_0 \in X$  und  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  mit  $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ , so existiert genau ein stetiger Lift  $\tilde{v}$  von  $v$  in  $\tilde{X}$  mit  $\tilde{v}(a) = \tilde{x}_0$ . Insbesondere lassen sich Wege in  $X$  bei vorgegebenem Anfangspunkt in der Faser stets eindeutig zu Wegen in  $\tilde{X}$  liften.



*Beweis.* Jeder Punkt  $t \in [a, b]$  besitzt in  $[a, b]$  eine Umgebung, die durch  $v$  in einer lokal trivialisierende Umgebung von  $v(t)$  abgebildet wird. Ferner existiert eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  von  $[a, b]$ , sodass gilt:

$v([t_{i-1}, t_i])$  ist in einer lokal trivialisierenden Umgebung in  $X$  enthalten.

$\tilde{v}(a) := \tilde{x}_0$  existiert und ist eindeutig bestimmt.

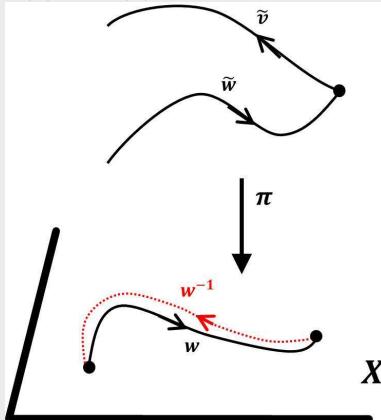
Ist  $\tilde{v}(t)$  für  $a \leq t \leq t_{i-1}$  bereits erklärt, so betrachte  $v(t)$  für  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ . Dieses Wegstück liegt in einer lokal trivialisierenden Umgebung  $U$ , und wegen  $(\ddot{U})$  existiert  $\tilde{U}_\lambda \subset \tilde{X}$  offen, so dass  $\pi|_{\tilde{U}_\lambda}: \tilde{U}_\lambda \rightarrow U$  ist Homöomorphismus, und  $\tilde{v}(t_{i-1}) \in \tilde{U}_\lambda$  enthalten ist.

$$q := (\pi(\tilde{U}_\lambda))^{-1}: U \rightarrow \tilde{U}_\lambda \Rightarrow \tilde{v}(t) := (q \circ v)(t)$$

ist stetig für  $t_{i-1} \leq t \leq t_i \Rightarrow \tilde{v}(t)$  ist auch auf  $[t_{i-1}, t_i]$  erklärt, und damit auf  $[0, t]$ .

Soll andererseits  $\tilde{v}$  für  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$  stetig sein, so kann  $\tilde{v}(t)$  für diese  $t$  die Wegzusammenhangskomponente von  $\tilde{v}(t_{i-1}) \subset \pi^{-1}(U)$  nicht verlassen, also erst recht nicht  $\tilde{U}_\lambda \Rightarrow \tilde{v}$  ist eindeutig.  $\square$

**Korollar III.2.** Ist  $w: I \rightarrow X$  ein Weg mit Lift  $\tilde{w}$  und  $\tilde{v}$  ein Lift von  $w^{-1}$ , so dass  $\tilde{v}(0) = \tilde{w}(1)$



so gilt  $\tilde{v} = (\tilde{w})^{-1}$ , denn  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}^{-1}$  liegen über  $w^{-1}$  und haben denselben Anfangspunkt.

**Korollar III.3.**  $x, y \in X \Rightarrow \#\pi^{-1}(x) = \#\pi^{-1}(y)$ , d.h. die Blätterzahl einer Überlagerung ist wohldefiniert.

Denn:  $X$  ist wegzusammenhängend  $\Rightarrow \exists$  Weg  $w$  von  $x$  nach  $y$ . Lifte  $w$  auf alle möglichen Weisen  $\Rightarrow$  alle Punkte von  $\pi^{-1}(x)$  sind genau einmal Anfangspunkt  $\Rightarrow$  Jeder Punkt  $\in \pi^{-1}(y)$  ist genau einmal Endpunkt nach vorstehendem Korollar.

**Satz III.8** (Hochheben/Liften von Homotopien). Es sei  $f: Z \rightarrow X$  stetige Abbildung und  $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$  (stetiger) Lift von  $f$  sowie  $H: Z \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = f$  stetig  $\Rightarrow \exists!$  stetige Abbildung  $\tilde{H}: Z \times I \rightarrow \tilde{X}$  mit:

$$\tilde{H} \text{ ist Lift von } H \text{ und } \tilde{H}_0 = \tilde{f}.$$

Ferner gilt:

Ist  $A \subset Z$  und  $H$  Homotopie relativ  $A$ <sup>a</sup>, so auch  $\tilde{H}$ .

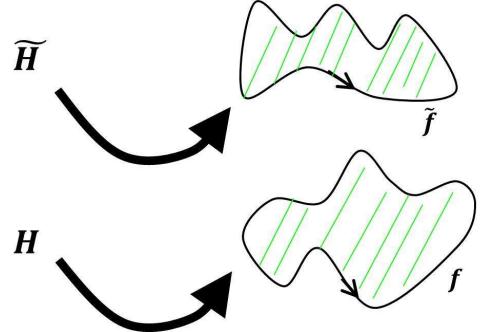
<sup>a</sup>Auf dem Teilraum  $A$  ist diese Homotopie konstant, also stationär.

*Beweis.* Satz über das Liften von Wegen zeigt:

$\forall z \in Z$  muss  $\tilde{H}_z: I \rightarrow \tilde{X}$  derjenige Weg sein, der über  $H_z$  liegt und Anfangspunkt  $\tilde{f}(z)$  besitzt.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{H}$  ist eindeutig bestimmt, und damit folgt auch der letzte Teil des Satzes.

$\tilde{H}$  ist stetig: Folgt daraus, dass  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  lokaler Homöomorphismus ist.



**TODO: Exkurs:** Jede Gruppe ist realisierbar als Fundamentalgruppe eines C-W-Komplexes. Dieser ist kompakt, falls es endlich viele Erzeuger/Zellen gibt. (Man kann Räume aus Zellen "zusammenlegen", so ist z.B. die  $S^2 =$  Nullzelle + Zweizelle.)

**Satz III.9** (Monodromie-Satz). Sind  $w_0, w_1: I \rightarrow X$  Wege in  $X$  mit Liften  $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1$ , die denselben Anfangspunkt haben, so gilt  $w_0 \simeq w_1 \Leftrightarrow \tilde{w}_0 \simeq \tilde{w}_1$

*Beweis.* " $\Rightarrow$ ":  $H: I \times I \rightarrow X$  sei Homotopie  $w_0 \simeq w_1$  letzter Satz  $\Rightarrow \exists$  Homotopie  $\tilde{H}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$  über  $H$  ( $\pi \circ \tilde{H} = H$ ) zwischen  $\tilde{w}_0$  und  $\tilde{w}_1$   
 $\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0)$  und Eindeutigkeit der Lifting von Wegen  $\Rightarrow \tilde{H}_1 = \tilde{w}_1$ , also  $\tilde{w}_1 \simeq \tilde{w}_0$ .  
" $\Leftarrow$ ": klar, da  $\pi$  stetig.  $\square$

### 3.1 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

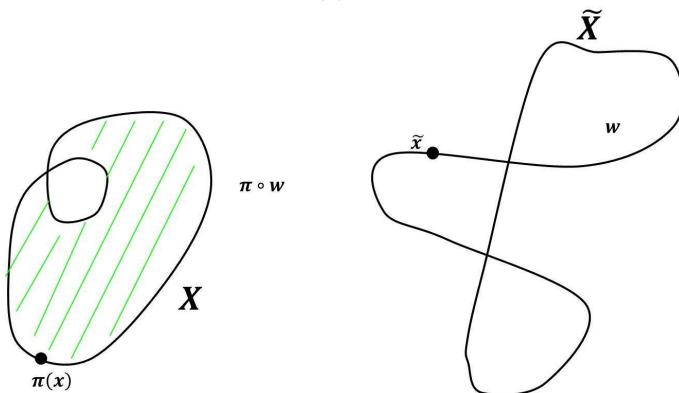
**Satz III.10.** Ist  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  Überlagerung und  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , so ist die induzierte Abbildung  $\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, \pi(\tilde{x}))$  injektiv! <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Ein Raum kann nur von einem anderen Überlagert werden, wenn der andere eine Fundamentalgruppe hat, die Untergruppe der Fundamentalgruppe von ihm ist / "in die andere reinpasst".

*Beweis.* Ist  $w$  geschlossener Weg in  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  und

$$\pi_*([w]) = [\pi \circ w] = 1 \in \pi_1(X, \pi(\tilde{x})),$$

so ist  $\pi \circ w$  homotop zum konstanten Weg  $c_{\pi(\tilde{x})}$ . Ist nun  $H$  eine Homotopie von Wegen zwischen  $\pi \circ w$  und  $c_{\pi(\tilde{x})}$ , so liefert ein Lift von  $H$  eine Homotopie von Wegen zwischen  $w$  und einem Lift von  $c_{\pi(\tilde{x})}$ .



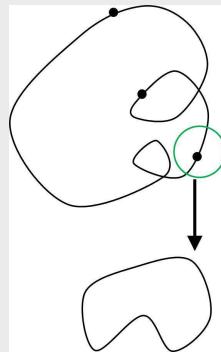
Aber jeder Lift eines konstanten Weges ist konstant!  $\square$

**Definition III.10.** Die Untergruppe  $U(\pi, \tilde{x}) := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) < \pi_1(X, \pi(\tilde{x}))$  heißt charakterisierende Untergruppe der Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$ .

charakterisierende  
Unter-  
gruppe

**Bemerkung III.17.**  $U(\pi, \tilde{x})$  besteht also aus den Homotopieklassen von Schleifen in  $X$ , deren Lift mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$  wieder eine Schleife in  $\tilde{x}$  ist.

**Definition III.11.**  $L_\pi(w, \tilde{x}) :=$  Lift von  $w$  zu  $\tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$  ( $w$  Weg in  $X$ )  
D.h.  $U(\pi, \tilde{x}) = \{[w] \mid w \text{ ist Schleife in } \pi(\tilde{x}) \text{ und } L_\pi(w, \tilde{x}(1)) = \tilde{x}\}$



Wie hängt  $U(\pi, \tilde{x})$  von  $\tilde{x}$  ab?

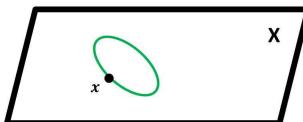
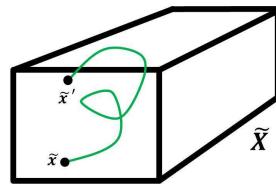
**Bemerkung III.18.** Ist  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  Überlagerung,  $x \in X$ , und  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \pi^{-1}(x)$  und ist  $w$  Weg von  $\tilde{x}$  zu  $\tilde{x}'$ , so ist  $\pi \circ w$  Schleife in  $x$  und es gilt

$$U(\pi, \tilde{x}') = [\pi \circ w]^{-1} \cdot U(\pi, \tilde{x})[\pi \circ w]$$

d.h.  $U(\pi, \tilde{x}')$  und  $U(\pi, \tilde{x})$  sind konjugiert und

$$U(\pi, \tilde{x}') = U(\pi, \tilde{x}) \Leftrightarrow [\pi \circ w] \text{ normalisiert } U(\pi, \tilde{x})$$

Denn:  $[\pi \circ w]^{-1} U(\pi, \tilde{x}) [\pi \circ w] \subset U(\pi, \tilde{x}')$ :  $v$  Schleife in  $(\tilde{X}, \tilde{x})$

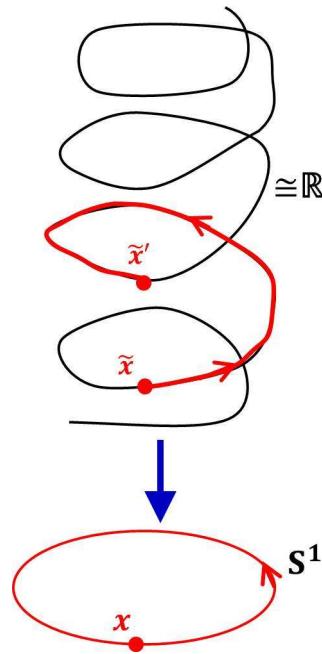


$\Rightarrow (\pi \circ w^{-1}) \cdot (\pi \circ v) \cdot (\pi \circ w)$  hat in  $\pi_1(X, \pi(\tilde{x}))$  die Form  $\pi(w^{-1} \cdot v \cdot w)$ , d.h. gehört zu  $U(\pi, \tilde{x}')$ .

**Erinnerung**  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X, \tilde{x} \in \tilde{X}, x = \pi(\tilde{x})$

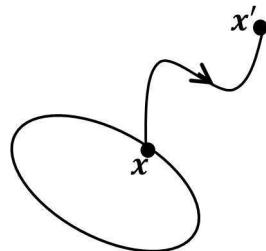
$$\Rightarrow \pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x) \text{ ist Monomorphismus!}$$

$U(\pi, \tilde{x}) := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  heißt charakterisierende Untergruppe der Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ .



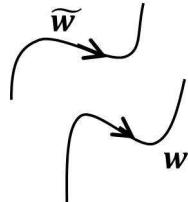
**Bemerkung III.19.** Für  $U(\pi, \tilde{x})$  gilt:

Sind  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X}$  Punkte über  $x = \pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}') \in X$ , und ist  $H := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ ,  $H' := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$  sowie  $\tilde{w}$  Weg in  $\tilde{X}$  von  $\tilde{x}$  nach  $\tilde{x}'$  und  $w = \pi \circ \tilde{w}$ , so gilt  $[H' = [w]^{-1}H[w]]$  und für jedes  $\alpha \in \pi_1(X, x)$  existiert auch immer ein  $\tilde{x}' \in \tilde{X}$  über  $x$ , so dass  $H' = \alpha H \alpha^{-1}$  ist, d.h.  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  entspricht einer Klasse von zueinander konjugierten Untergruppen von  $\pi_1(X, x)$ .



Diese<sup>3</sup> hängt auch nicht von der Wahl des Punktes  $x \in X$  ab, da für  $x, x' \in X$  ja auch  $\pi_1(X, x)$  und  $\pi_1(X, x')$  konjugiert sind.

$w$  sei Weg in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$  und  $\tilde{w}$  sei Lift von  $w$  zu  $\tilde{z} \in \pi^{-1}(x) \subset \tilde{X}$ .  $\tilde{w}(1)$  hängt



nur von  $[w]$  ab und es gilt

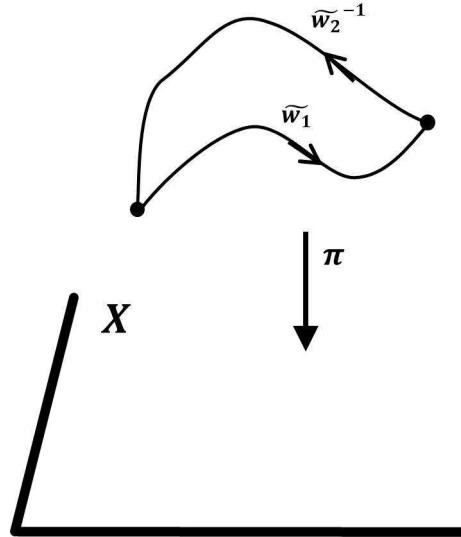
**Satz III.11.** Es seien  $\tilde{w}_1$  und  $\tilde{w}_2$  wege in  $\tilde{X}$  mit  $\tilde{w}_1(0) = \tilde{x} = \tilde{w}_2(0)$  sowie  $w_1 = \pi \circ \tilde{w}_1, w_2 = \pi \circ \tilde{w}_2$ . Dann gilt

$$\tilde{w}_1(1) = \tilde{w}_2(1) \Leftrightarrow w_1(1) = w_2(1) \text{ und } [w_1 \cdot w_2^{-1}] \in H = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = U(\pi, \tilde{x})$$

<sup>3</sup>Klasse von Untergruppen

*Beweis.* Denn:  $\widetilde{w}_1(1) = \widetilde{w}_2(1) \Rightarrow \exists \widetilde{w}_1 \cdot \widetilde{w}_2^{-1}$ , und dies ist geschlossener Weg  $\Rightarrow w_1(1) = w_2(1), [w_1 \cdot w_2^{-1}] \in H$ .

Sei umgekehrt  $w_1(1) = w_2(1)$ , also damit  $w_1 w_2^{-1}$  definiert, und  $[w_1 \cdot w_2^{-1}] \in H$ . Über



$w_2^{-1}$  liegt ein Weg  $\tilde{v}$  mit  $\tilde{v}(0) = \widetilde{w}_2(1)$ , und  $\widetilde{w}_1 \cdot \tilde{v}$  liegt über  $w_1 \cdot w_2^{-1}$ .

Ferner existiert nach Voraussetzung in  $\tilde{X}$  ein geschlossener Weg  $\tilde{u}$  mit  $\tilde{u}(0) = \tilde{x}$  sowie  $\pi_*([u]) = [w_1 \cdot w_2^{-1}]$ . Eindeutigkeit von Lifts/Homotopien  $\Rightarrow \tilde{u} \simeq \widetilde{w}_1 \cdot \tilde{v} \Rightarrow \widetilde{w}_1 \cdot v$  ist geschlossen  $\Rightarrow \tilde{v}(1) = \tilde{x}$ .

$\tilde{v}^{-1}, \widetilde{w}_2$  liegen über  $\widetilde{w}_2 \Rightarrow \widetilde{w}_2 = \tilde{v}^{-1} \Rightarrow \widetilde{w}_2(1) = \tilde{v}(0) = \widetilde{w}_1(1)$ .  $\square$

**Andere Interpretation:** Betrachte alle Homotopieklassen von Wegen in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$ .

Es sei  $H < \pi_1(X, x)$  eine Untergruppe, und setze

$$H[w] := \{\gamma \cdot [w] \mid \gamma \in H\}$$

$[w'] \in H \cdot [w]$  bedeutet:  $\exists$  geschlossenen Weg  $v$  mit  $[w'] = [v] \cdot [w]$  und  $[v] \in H$ .

Hier ist  $w'(1) = w(1)$ , also  $w' \cdot w^{-1}$  erklärt, und es gilt  $[w' \cdot w^{-1}] = [w'] \cdot [w^{-1}] = [v] \cdot [w] \cdot [w^{-1}] = [v] \in H$ .

Ist umgekehrt  $w'(1) = w(1)$  und  $[w' \cdot w^{-1}] \in H$ , so ist  $[w'] = [w'][w^{-1} \cdot w] = [w' \cdot w^{-1}][w] \in H[w]$ , d.h.

$$(*) \quad [w'] \in H[w] \Leftrightarrow w'(1) = w(1) \text{ und } [w' \cdot w^{-1}] \in H.$$

Wegen  $[w][w'^{-1}] = [w \cdot w'^{-1}] = [(w' \cdot w^{-1})^{-1}] = [w' \cdot w^{-1}]^{-1}$  ist deshalb  $[w'] \in H[w] \Leftrightarrow [w] \in H[w']$

$\Rightarrow$  Für zwei Wege  $w_1, w_2$  mit Anfangspunkt  $x \in X$  gilt entweder  $H[w_1] = H[w_2]$  oder  $H[w_1] \cap H[w_2] = \emptyset$ !

$H[w]$  heißt Rechtsnebenklasse von  $[w]$  nach  $H$ ,

und ist  $w$  geschlossen, so ist  $H[w]$  eine Rechtsnebenklasse (oder Rechtsrestklasse) von  $\pi_1(X, x)$  nach  $H$  im üblichen Sinn der Gruppentheorie.

Damit gilt der

**Satz III.12.** Ist  $H = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = U(\pi, \tilde{x})$  und  $w$  Weg in  $X$  mit Anfangspunkt  $x = \pi(\tilde{x})$  sowie  $\tilde{w}$  der Lift von  $w$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$ , so ist

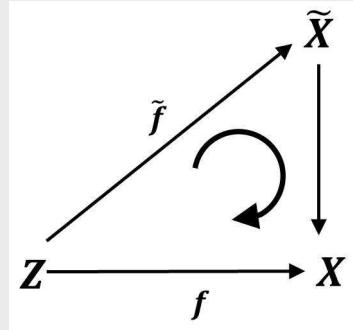
$$(**) \quad H[w] \mapsto \tilde{w}(1)$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Rechtsnebenklassen  $\{H[w]\}$  und  $\tilde{X}$ !

**Erläuterung** Dies gilt, weil  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend ist und also jeder Punkt von  $\tilde{X}$  als  $\tilde{w}(1)$  für geeignetes  $w$  erhalten werden kann. Durch  $H[w] \mapsto \tilde{w}(1)$  ist  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  nun eindeutig charakterisiert: (\*\*\*) legt zunächst die Menge der Punkte von  $\tilde{X}$ <sup>4</sup> fest und wegen  $\pi \circ \tilde{w} = w$  lässt sich  $\pi$  dann durch  $\tilde{X} \ni \tilde{w}(1) \mapsto H[w] \mapsto w(1) \in X$  beschreiben!

**Satz III.13** (Liften von Abbildungen in Überlagerungen). Es sei  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  und  $x = \pi(\tilde{x}) \in X$ . Ferner sei  $Z$  ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit  $z \in Z$  sowie  $f: Z \rightarrow X$  mit  $f(z) = x$  stetig. Dann sind äquivalent:

1.  $f$  besitzt einen Lift  $\tilde{f}: (Z, z) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$

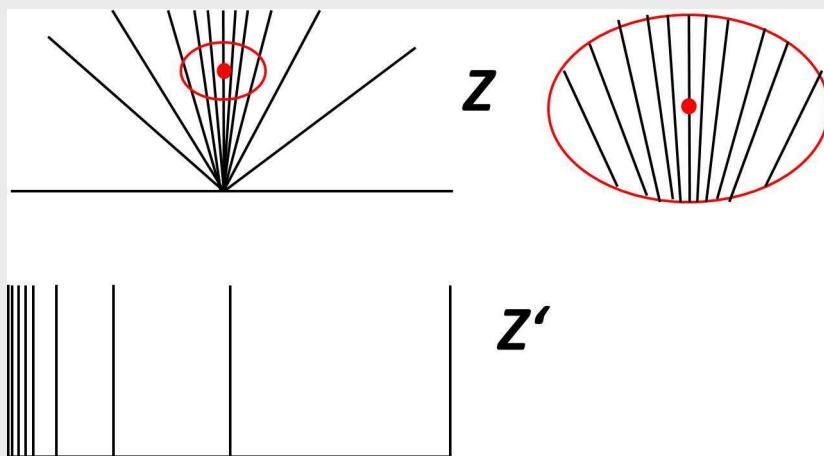


(mit  $\tilde{f}(z) = \tilde{x}$ )

2.  $f_*(\pi_1(Z, z)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$

**Definition III.12.**  $Z$  lokal wegzusammenhängend : $\Leftrightarrow$  in jeder Umgebung jedes Punktes in  $Z$  ist immer eine wegzusammenhängende Umgebung enthalten.

lokal  
wegzu-  
sammen-  
hängend



**Satz III.14** (Liftungssatz für Überlagerungen).  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  Überlagerung,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ,  $Z$  sei wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

$f: Z \rightarrow X$  und  $f(z) = x$  sei stetig.

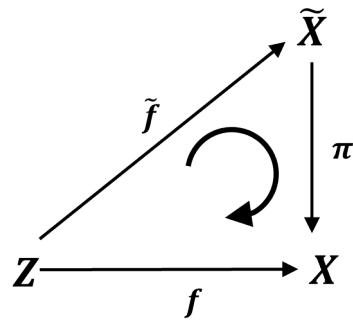
$f$  besitzt Lift  $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{f}(z) = \tilde{x} \Leftrightarrow f_*(\pi_1(Z, z)) < \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " Existiert  $\tilde{f}$ , so ist  $f = \pi \circ \tilde{f} \Rightarrow f_* = \pi_* \circ \tilde{f}_*$

$\Rightarrow f_*(\pi_1(Z, z)) < \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ .

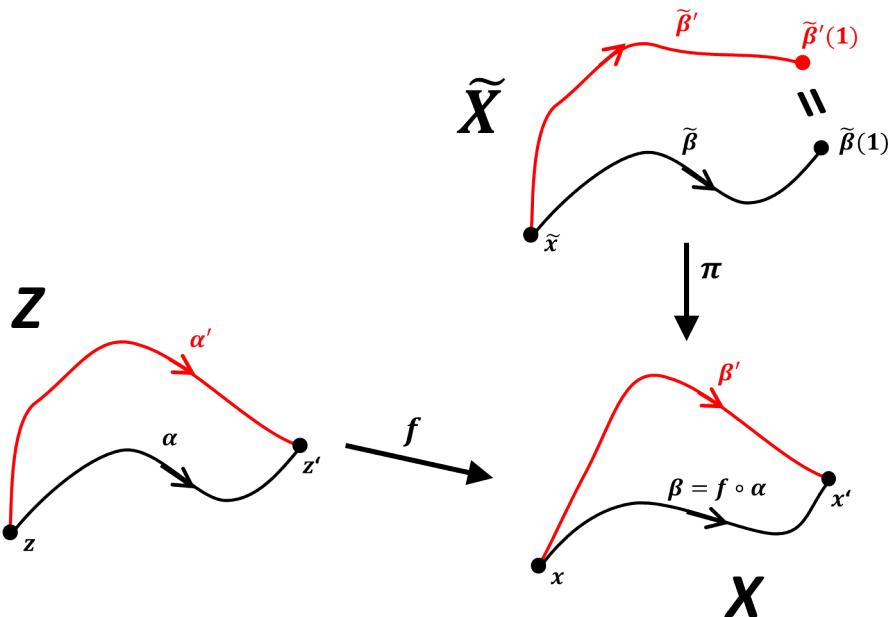
" $\Leftarrow$ "

<sup>4</sup>im Überlagerungsraum



Ansatz für  $\tilde{f}$ :

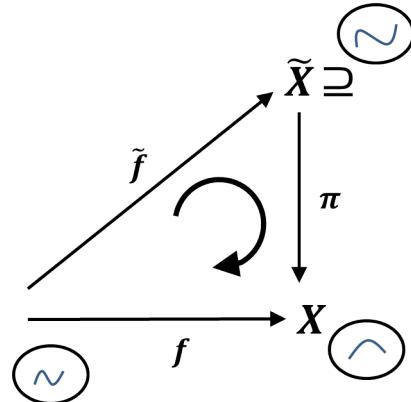
$\forall$  Punkte  $z' \in Z \exists$  Weg  $\alpha$  von  $z$  nach  $z'$



$\beta := f \circ \alpha$  ist dann Weg von  $x$  nach  $x' = f(z')$

Setze  $\tilde{f}(z') := \tilde{\beta}(1)$

- $\tilde{f}$  ist wohldefiniert: Ist  $\alpha'$  anderer Weg von  $z$  nach  $z'$  in  $Z$ , so ist  $\beta' = f \circ \alpha'$  Weg von  $x$  zu  $x'$  in  $X$ .  
 $\gamma := \beta' \cdot \beta'^{-1}$  ist Schleife in  $x$ , also  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$  und wegen  $\gamma = f \circ (\alpha' \cdot \alpha'^{-1})$  gilt auch  $[\gamma] \in f_*\pi_1(Z, z) < \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$   
 $\Rightarrow \tilde{\gamma}$  ist Schleife in  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \Rightarrow \tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta}'(1)$
- $f$  ist stetig: Benutze, dass jede noch so kleine Umgebung eines Punktes  $z' \in Z$  eine wegzusammenhängende Umgebung enthält,  $\pi$  lokaler Homöomorphismus ist und Liften eindeutig.



□

**Beispiel III.1.** •  $\pi_1(Z, z) = 0 \Rightarrow \exists$  immer Lftung in jede Überlagerung von  $X'$

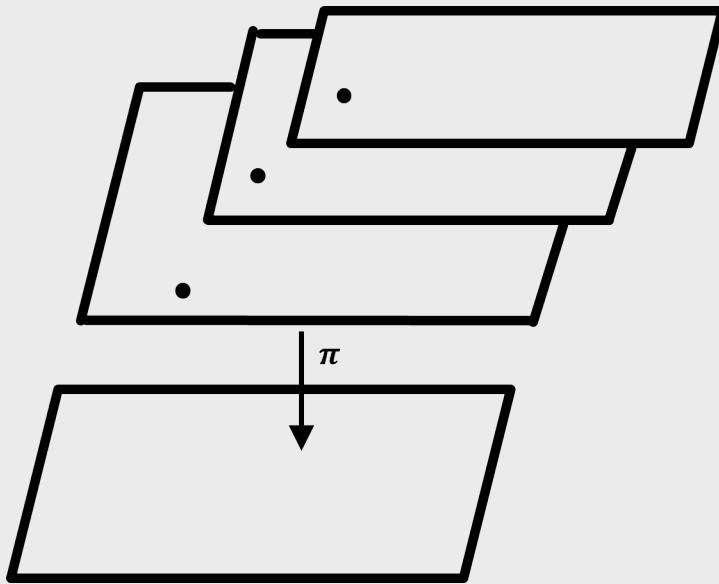
**Beispiel III.2.** Für  $n \in \mathbb{Z}^*$  sei  $\pi_k: (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1), z \mapsto z^n$

$$\Rightarrow (\pi_n)_*(\pi_1(S^1, 1)) = ((\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}) s.u.)$$

$= n \cdot \mathbb{Z} \Rightarrow \pi_k$  lfst sich bezglich  $\pi_l$  liften  $\Leftrightarrow k \cdot \mathbb{Z} < l \cdot \mathbb{Z} \Leftrightarrow k$  ist Vielfaches von  $l$ ,, also  $k = l \cdot m \Rightarrow \pi_k = \pi_l \circ \pi_m$ .

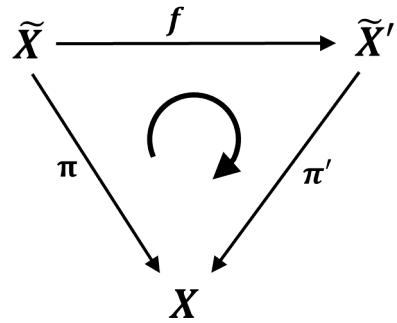
**Definition III.13.** Eine Decktransformation/Deckbewegung einer Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus  $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\boxed{\pi = \pi \circ f}$

Decktransformation



**Bemerkung III.20.** Die Decktransformationen einer Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  bilden eine Gruppe  $D = D(\tilde{X}, \pi)$

**Bemerkung III.21.** Deckkonfigurationen sind also Spezialfälle von Äquivalenzen zwischen Überlagerungen



, und als Anwendung des Liftungssatzes gilt auch:

Ist  $X$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so sind  $\pi \circ \widetilde{X} \rightarrow X$  und  $\pi': \widetilde{X}' \rightarrow X$  äquivalent genau dann, wenn sie zur gleichen Klasse konjugierter Untergruppen von  $\pi_1(X, x)$  gehören.

$\pi: \widetilde{X} \rightarrow X$  sei Überlagerung von wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Räumen und  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \pi^{-1}(x), x \in X$



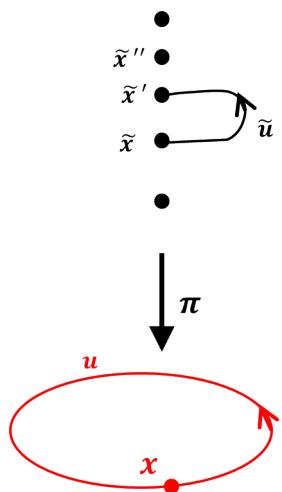
$\exists$  Deckbewegung  $g: \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$  mit  $d(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ , wenn

$$(1) \boxed{\pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) = \pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}')) = H}$$

und wegen des Liftungssatzes ist dies andererseits auch notwendig.

$d$  ist dann durch (2)  $\boxed{d(\tilde{x}) = \tilde{x}'}$  eindeutig bestimmt.

Halte nun  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$  fest und lasse  $[u]$  die Elemente von  $\pi_1(X, x)$  durchlaufen, wobei  $\tilde{u}$  der über  $u$  liegende Weg mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$  sei.



Dies liefert (s.o.) eine Bijektion der Rechtsnebenklassen  $\{H[u]\}$  von  $\pi_1(X, x_0)$  nach  $H$  und der Faser  $\pi^{-1}(x)$  vermöge (3)  $H[u] \rightarrow \tilde{u}(1)$

Ferner ist für  $\tilde{x}' = \tilde{u}(1)$  (1) erfüllt  $\underbrace{[u]^{-1}H[u] = H}_{(4)}$  und die Elemente  $[u] \in \pi_1(X, x)$

mit (4) bilden eine Untergruppe  $N(H) < \pi_1(X, x)$ , den sogenannten Normalisator von  $H$  in  $\pi_1(X, x)$ . Mit  $d(\tilde{x}) = \tilde{x}'$  und  $H[u] \mapsto \tilde{u}(1) \exists$  damit eine Bijektion zwischen den Elementen der Faktorgruppe  $N(H)/H$  und den Elementen der Deckbewegungsgruppe, und diese ist Isomorphismus.

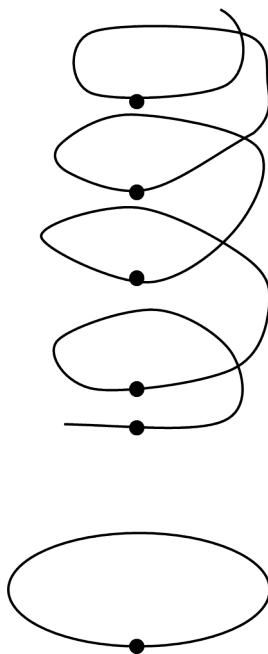
**Satz III.15.**  $X$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend,  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  zu  $H < \pi_1(X, x)$  gehörende Überlagerung  $\Rightarrow$  Die Deckbewegungsgruppe  $D(\tilde{X}, \pi)$  ist isomorph zu  $N(H)/H$ .

**Beispiel III.3.**  $H$  sei Normalteiler von  $\pi_1(X, x)$   $\Rightarrow N(H) = \pi_1(X, x)$   
 $\Rightarrow N(H)/H = \pi_1(X, x)/H$

**Definition III.14.**  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt regulär : $\Leftrightarrow \pi: \tilde{X} \rightarrow X$  gehört zu Normalteiler  $H$ .

**Beispiel III.4.**  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ .  
 $\pi_1(\mathbb{R}) = 0 \Rightarrow \pi$  gehört zur trivialen Untergruppe von  $\pi_1(S^1)$  und ist regulär.  $D(\mathbb{R}, \pi) \cong \mathbb{Z}$

reguläre  
Überlage-  
rung



(ganzzahlige Translationen)  $\Rightarrow$   
 $\mathbb{Z} \cong N(H)/H \cong \pi_1(S^1)/\underbrace{H}_{\text{trivial}} \cong \pi_1(S^1)!$

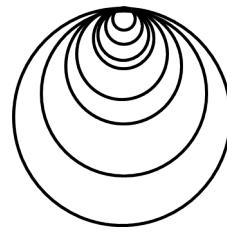
**Bemerkung III.22.** Für reguläre Überlagerungen operiert  $D(\tilde{X}, \pi)$  transitiv auf  $\pi^{-1}(x)$ , h.h.  $\forall \tilde{x}' \in \pi^{-1}(x) \exists d \in D$  mit  $d(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ .

Hat speziell  $\tilde{X} \rightarrow X$  endliche Blätterzahl, so ist  $\tilde{X} \rightarrow X$  regulär  $\Leftrightarrow$  Ordnung  $D(\tilde{X}, \pi) =$  Blätterzahl.

**Definition III.15.**  $X$  heißt semilokal einfach zusammenhängend

$\Leftrightarrow \forall x \in X \ \exists$  Umgebung  $U(x)$ : jeder in  $U$  liegende geschlossene Weg ist nullhomotop in  $X$ .

semilokal  
einfach  
zusam-  
menhän-  
gend



**Beispiel III.5** (Der Hawaiianische Ohrring).

Der Hawaiianische Ohrring ist lokal wegzusammenhängend, wegzusammenhängend, aber nicht semilokal einfach zusammenhängend.

**Satz III.16.**  $X$  wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend

$$\Rightarrow \forall H < \pi_1(X, x) \quad \exists \text{ zu } H \text{ gehörende Überlagerung } \pi: \tilde{X} \rightarrow X.$$

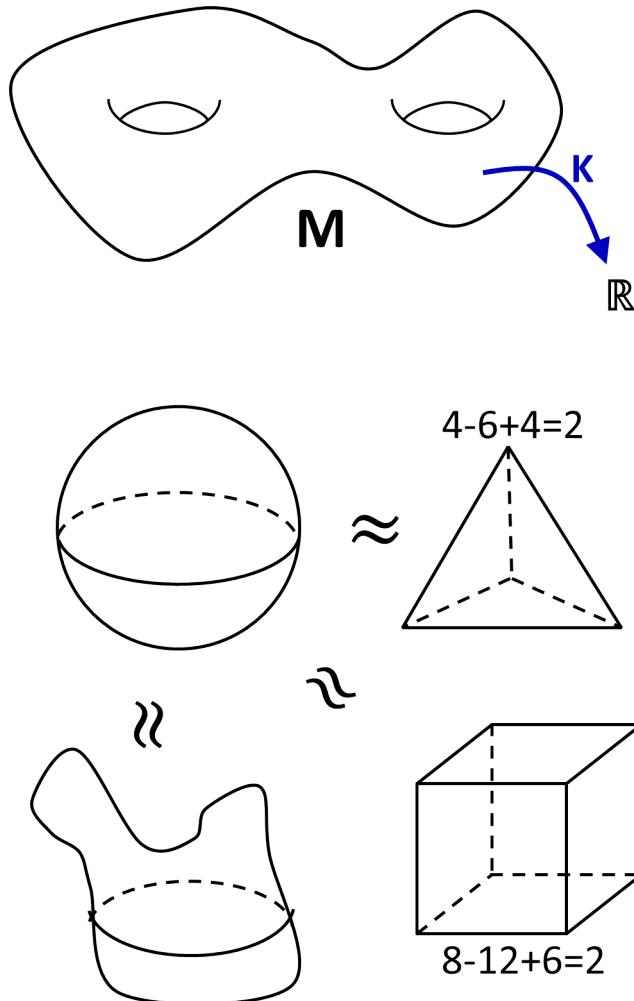
**FAZIT**  $X$  wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Dann gilt:

$\exists$  Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $\pi_1(\tilde{X}) = 0$  (die universelle Überlagerung von  $X$ ).  $D(\tilde{X}, \pi)$  ist isomorph zu  $\pi_1(X, x)$ , und identifiziert man in  $\tilde{X}$  die Punkte, die bezüglich einer Untergruppe von  $D$  äquivalent sind, so existiert hierzu eine Überlagerung von  $X$ . Bis auf Äquivalenz erhält man so alle Überlagerungen von  $X$ , und genau die konjugierten Untergruppen von  $D$  liefern äquivalente Überlagerungen.

## Kapitel IV

# Topologie und Geometrie von Flächen

### Einführung



Euler- Charakteristik: # Ecken - # Kanten + # Flächen =:  $\chi$

**Satz von Gauß-Bonnet:** 
$$\int_M K \cdot dM = 2\pi \cdot \chi(M)$$
<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Linke Seite: Geometrie, Rechte Seite: Topologie

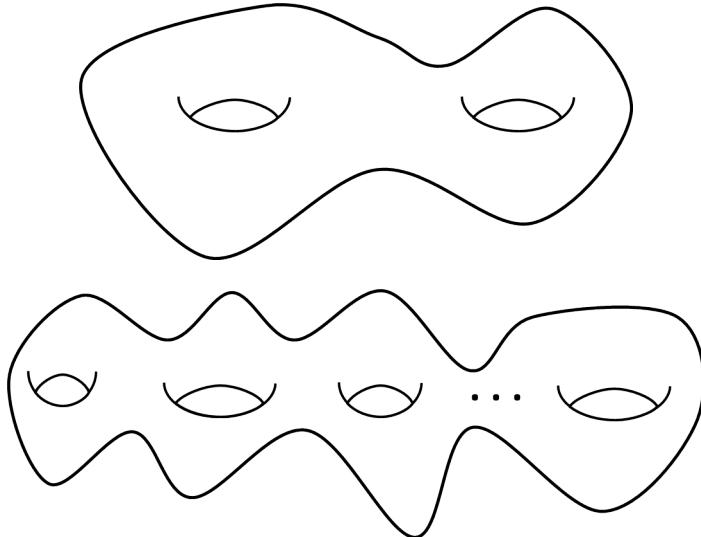
## 1 Topologie von Flächen

**Definition IV.1.** Eine Fläche  $F$  ist eine zweidimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Ist  $F$  kompakt, so heißt  $F$  auch geschlossen.

Fläche,  
geschlos-  
sen  
orientierbar

**Definition IV.2.** Enthält eine Fläche einen Unterraum, der homöomorph zu einem Möbiusband ist, so heißt die Fläche nicht-orientierbar, ansonsten orientierbar.

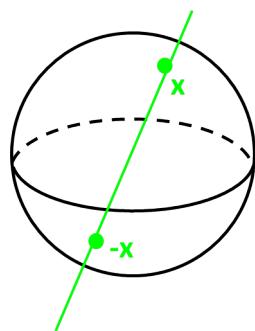
**Beispiel IV.1.**  $S^2, T^2$ ,



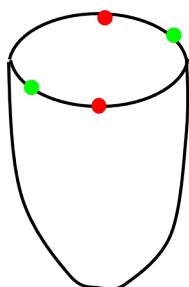
sind orientierbare geschlossene Flächen.

**Beispiel IV.2.**  $\mathbb{RP}^2$  (die reelle projektive Ebene) ist nicht orientierbar.

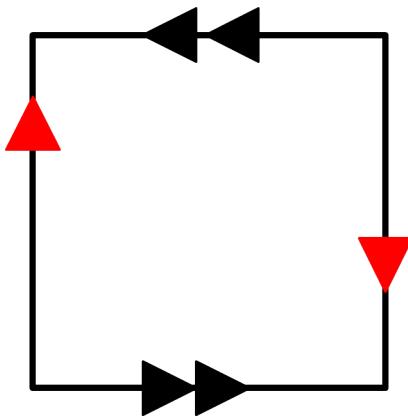
$$\mathbb{RP}^2 = \{\text{Geraden durch } 0 \in \mathbb{R}^3\} = S^2 / \sim \text{ mit } x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \text{ oder } x = -x'$$



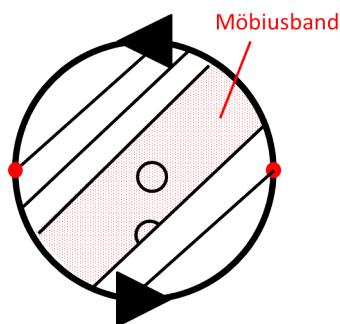
**Visualisierung:** Zerschneide  $S^2$  in zwei Hemisphären längs des Äquators und entferne die obere; um  $\mathbb{RP}^2$  zu erhalten, braucht man dann noch noch entgegengesetzte Punkte des "Äquators" zu identifizieren:



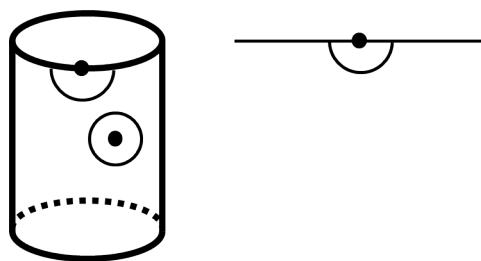
**Einfacher:**  $\mathbb{RP}^2 =$



=



Durch geeignete Modifikation der Kanten eines Quadrates erhält man  $S^2, T^2$  (gecshlossen und orientierbar),  $\mathbb{RP}^2, K^2$  (Kleinsche Flasche) (geschlossen und nicht orientierbar), sowie Möbiusband und Zylinder



2

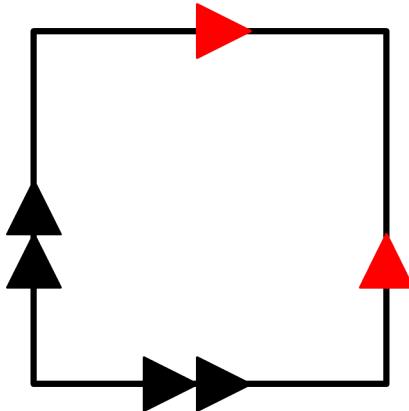
**Bemerkung IV.1.** Um Flächen zu gewinnen, kann man nicht nur Quadrate, sondern jedes ebene Polygon mit einer geraden Anzahl von Kanten benutzen.

**Systematisch:** Gehe entgegen des Uhrzeigersinns die Seiten eines solchen Polygons ab und markiere jede Seite durch ein Symbol, z.B. "a", "b", ...; gibt es dann eine zu identifizierende Seite mit gleichgerichtetem "Pfeil", so nenne diese auch "a", "b", etc., ansonsten, also bei entgegengesetztem Identifikationspfeil, schreibe " $a^{-1}$ ", " $b^{-1}$ ", etc.

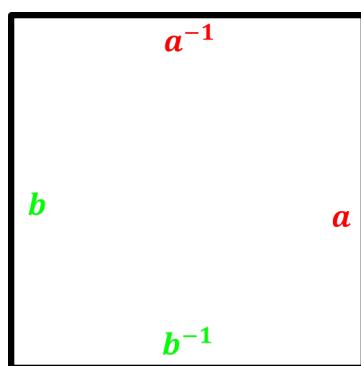
**Beispiel IV.3.**  $S^2 =$

---

<sup>2</sup>Zylinder, Möbiusband: Nicht kompakt; Kleinsche Flasche, reell projektive Ebene: kompakt



$\leadsto$

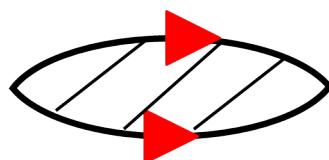


$\leadsto aa^{-1}bb^{-1}$

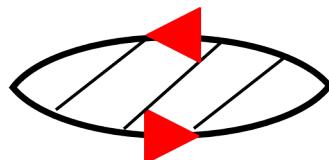
**Beispiel IV.4.**  $T^2 = aba^{-1}b^{-1}, K^2 = abab^{-1}, \mathbb{RP}^2 = abab$

**Bemerkung IV.2.** Wo man hier startet, ist nicht relevant, und es gibt viele Polygonmodelle, die dieselbe Fläche definieren; man kann sogar mit "gekrümmten" Seiten arbeiten:

**Beispiel IV.5.**  $S^2 =$



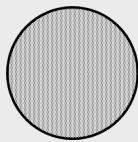
$= aa^{-1}, \mathbb{RP}^2 =$



$= aa$

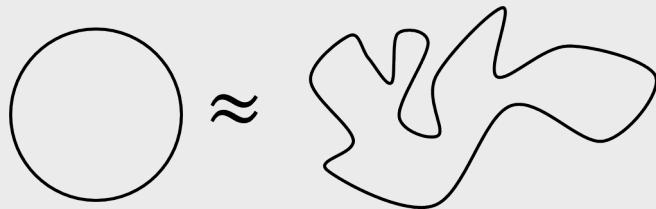
Weitere wichtige Möglichkeit, neue Flächen zu gewinnen:

**Definition IV.3.** Es seien  $F$  und  $F'$  geschlossene Flächen. Schneidet man aus jeder Fläche eine abgeschlossene Scheibe

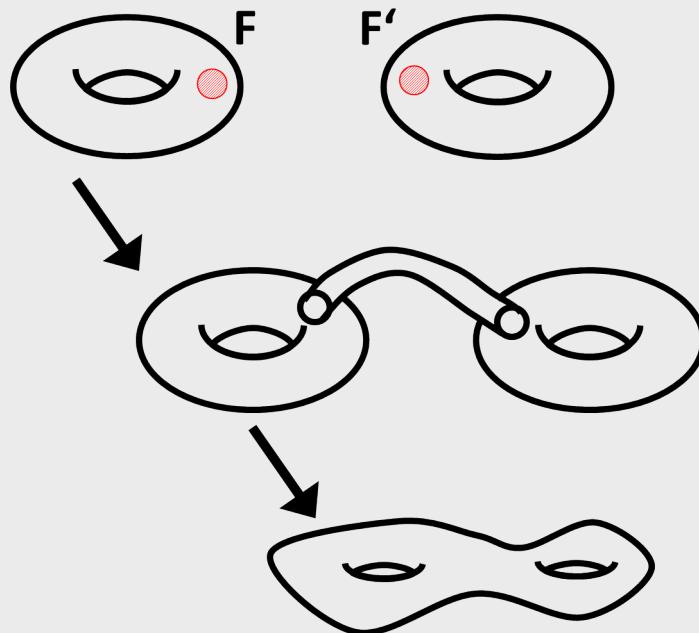


Zusammenhängende  
Summe

heraus und identifiziert diese durch einen Homöomorphismus

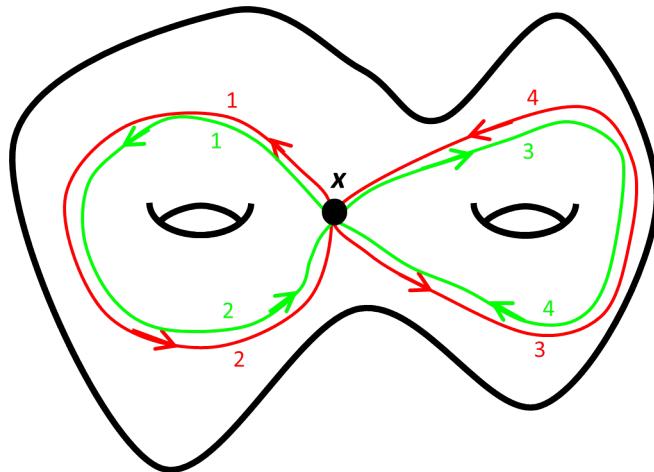


der Ränder, so heißt der durch diese Identifikation entstehende Raum die zusammenhängende Summe  $F \# F'$  von  $F$  und  $F'$ .

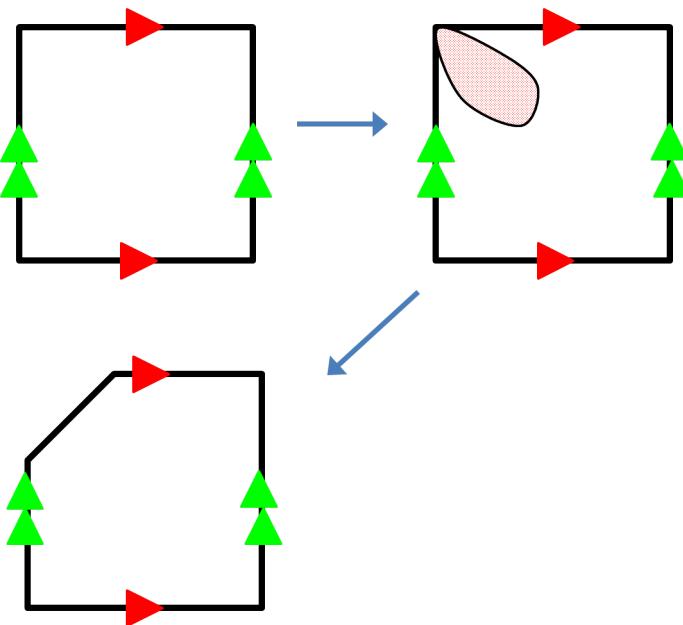


**TODO:** kleiner Exkurs: Gruppentheorie mit Mannigfaltigkeiten,  $S^2$  als "neutrales Element", Kobordismusring

**Beispiel IV.6.**  $T^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong 3\mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$



(Fundamentalgruppe eines 2-Torus ist nicht mehr abelsch  $\rightsquigarrow$  viel, viel größer)

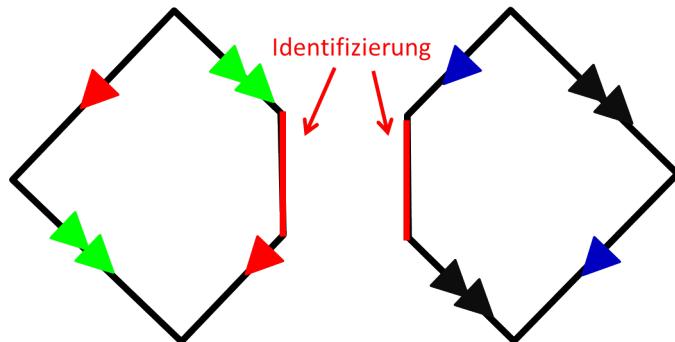


#### Beispiel IV.7.

(Entferne eine Scheibe, die durch eine Ecke geht und keine Kante berührt); mache dies ebenso für den zweiten Torus.

(öffne die Scheibe)

Und klebe dann die beiden Kopien zusammen:



Dies liefert ein Oktogon, und die Identifikation der Seiten ist dann gegeben durch

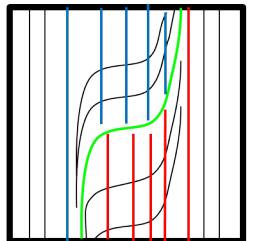
$$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$$

**Bemerkung IV.3.** Allgemein gilt: Entspricht  $F$  dem Zeichensatz  $A$ ,  $F'$  dem Zeichensatz  $B$ , so  $F \# F'$  dem Zeichensatz  $AB$ .

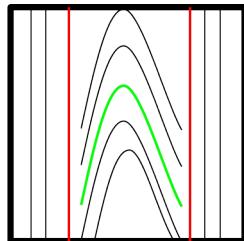
**Beispiel IV.8.**  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$  beschreibt eine geschlossene orientierbare Fläche mit  $g$  Löchern.

### Informationen

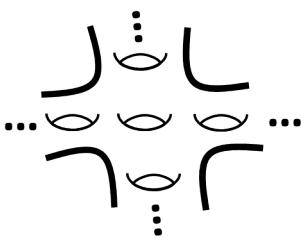
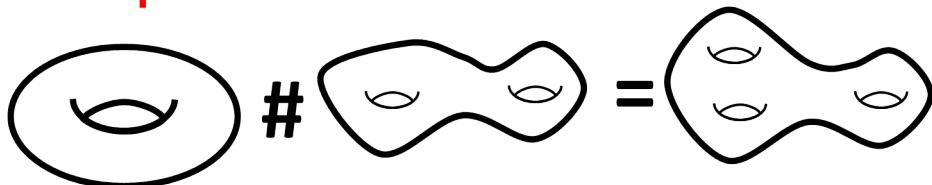
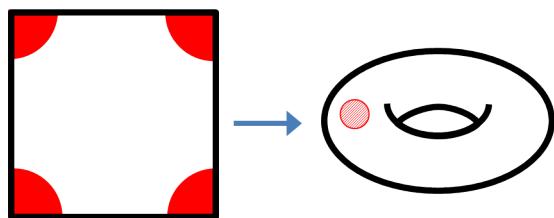
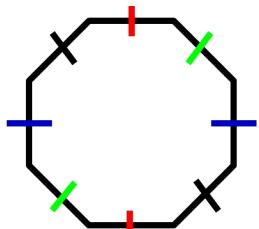
- Montag Test 2 bei Frau Lenz
- Donnerstag Vorlesung nebenan
- Skripte: S. Lutteropp/ S. Bischof, J.-B. Kordaß



Quotientenraum  
Haussdorffsch



Quotientenraum  
nicht Haussdorffsch



3

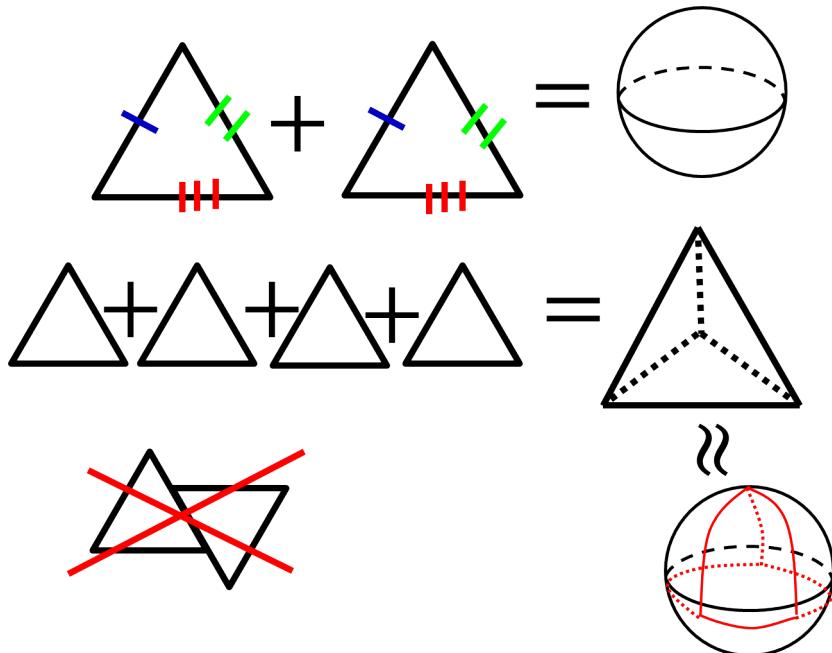
Klassifikation geschlossener Flächen erfolgt z.B. über Polygonmodelle und liefert

**Satz IV.1.** Eine geschlossene, zusammenhängende Fläche ist entweder diffeomorph zur Sphäre  $S^2$  oder diffeomorph zu einer zusammenhängenden Summe von Tori oder diffeomorph zu einer zusammenhängenden Summe von  $\mathbb{RP}^2$ s.

Beweisskizze (vgl. Massey für Ausführlicheres; "A basic course in Algebraic Topology")

<sup>3</sup>Man hat keinerlei Chance, nichtkomplexe Flächen zu klassifizieren.

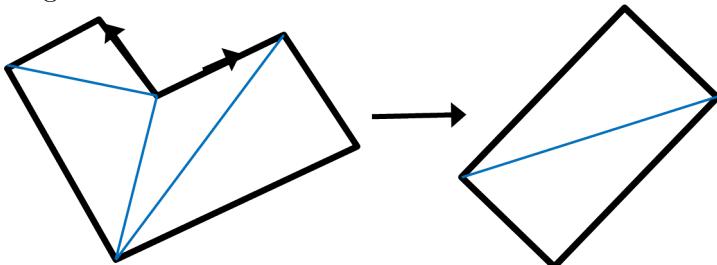
**Lemma IV.1.** (s. Massey) Jede geschlossene Fläche  $F$  besitzt eine Triangulierung, d.h.:  $F$  ist homöomorph zu einem Raum, der aus einer disjunkten Vereinigung endlich vieler Dreiecke im  $\mathbb{R}^2$  entsteht, indem man Kanten paarweise identifiziert.



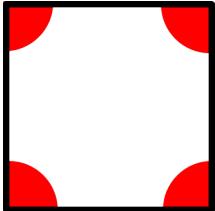
#### Beispiel IV.9.

Wähle ein "Dreieck" auf  $F$  und einen Homöomorphismus dieses Dreiecks auf ein ebenes Dreieck, dann ein angrenzendes mit gemeinsamer Kante usw ...  $\Rightarrow$  die ebenen Dreiecke bilden ein Polygon  $P$ , und  $F$  entsteht aus  $P$  durch paarweises Identifizieren von Kanten. Bringe dies nun auf Standard-Form:

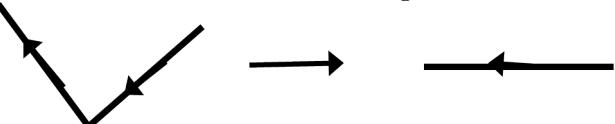
1. Angrenzende Kanten mit  $aa^{-1}$  oder  $a^{-1}a$  werden identifiziert:



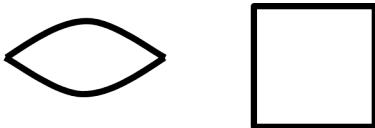
2. Alle Ecken werden identifiziert:



3. Alle Paare der Form  $aa$  sind angrenzend



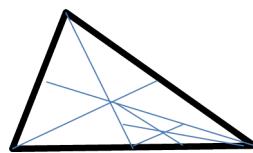
4. Paare  $a, a^{-1}$  entsprechen Ketten  $cdc^{-1}d^{-1}$



In summa:  $F$  ist beschrieben durch eine Zeichenkette von Termen der Form  $aa$  oder  $cdc^{-1}d^{-1}$ , und das ist eine zusammenhängende Summe von  $\mathbb{RP}^2$ s oder Tori.

Gibt es nun einen  $\mathbb{RP}^2$ -Summanden, so kann man mit  $\mathbb{RP}^2 \# T^2 = 3\mathbb{RP}^2$  noch Tori eliminieren.

**Korollar IV.1.** Eine geschlossene, zusammenhängende orientierbare Fläche ist homöomorph zu einer zusammenhängenden Summe von Tori. (oder  $S^2$ !)



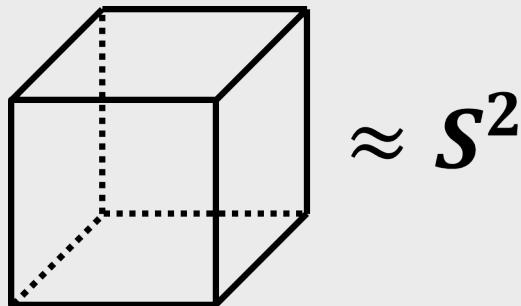
Die Triangulierbarkeit geschlossener Flächen impliziert

**Satz IV.2.** Jede geschlossene Fläche besitzt eine kombinatorische Unterteilung.

**Definition IV.4.** Eine kombinatorische Unterteilung von  $F$  ist eine Zerlegung von  $F$  in

1. Ecken (endlich viele Punkte)
2. Kanten (endlich viele disjunkte Teilmengen von  $F$ , die alle zum offenen Intervall  $(0, 1)$  homöomorph sind)

kombinatorische  
Untertei-  
lung,  
Ecken,  
Kanten,  
Seiten



3. Seiten (endlich viele disjunkte offene Teilmengen von  $F$ , die alle zur offenen Scheibe  $\{||x|| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ) homöomorph sind), so dass gilt:

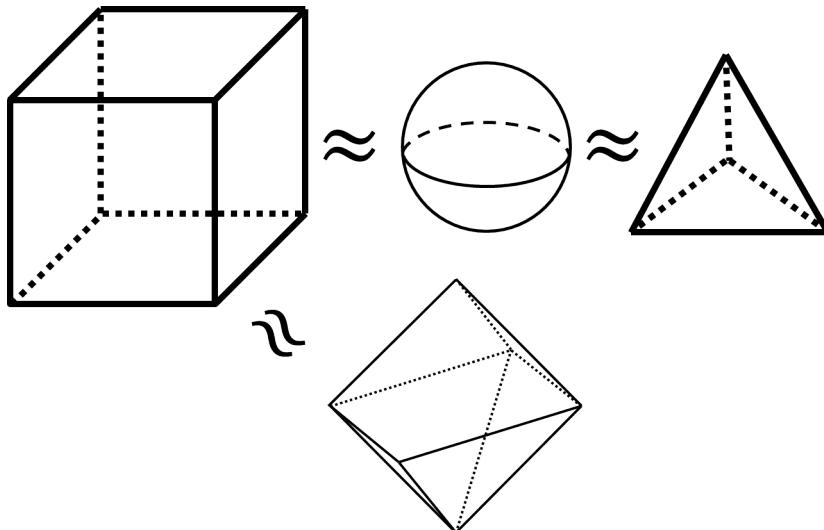
- (a) Die Seiten sind Zusammenhangskomponenten von  $F \setminus \{\text{Ecken und Kanten}\}$
- (b) keine Kante enthält eine Ecke
- (c) jede Kante beginnt und endet in einer Ecke, d.h. ist  $k$  Kante, so gibt es Ecken  $e_0$  und  $e_1$  und eine stetige Abbildung  $f: [0, 1] \rightarrow k \cup \{e_0, e_1\} \subset F$ , die eingeschränkt auf  $(0, 1)$  ein Homöomorphismus ist und  $f(0) = e_0, f(1) = e_1$  erfüllt.

**Definition IV.5.** Die (kombinatorische) Euler-Charakteristik einer geschlossenen Fläche  $F$  mit Unterteilung ist

$$\chi(F) := \# \text{ Ecken} - \# \text{ Kanten} + \# \text{ Seiten}$$

*kombinatorische  
Euler-  
Charakteristik*

**Satz IV.3.**  $\chi(F)$  ist unabhängig von der gewählten Unterteilung von  $F$  und invariant unter Homöomorphismen!



**Beispiel IV.10.**

**Satz IV.4.** Eine geschlossene Fläche ist durch ihre Eulercharakteristik und Orientierbarkeitstyp eindeutig bestimmt.

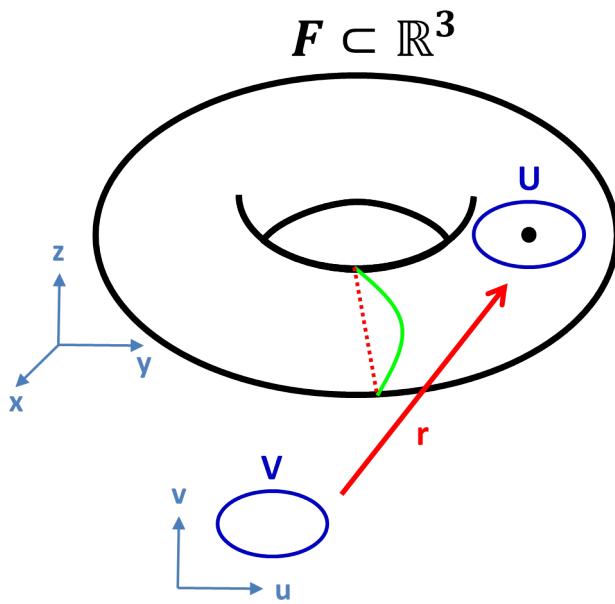
## 2 Die Geometrie von Flächen

**Erinnerung:** Ein Fläche in  $\mathbb{R}^3$  ist eine glatte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

**Bemerkung IV.4.** Nach unserer allgemeinen Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten bedeutet dies insbesondere:

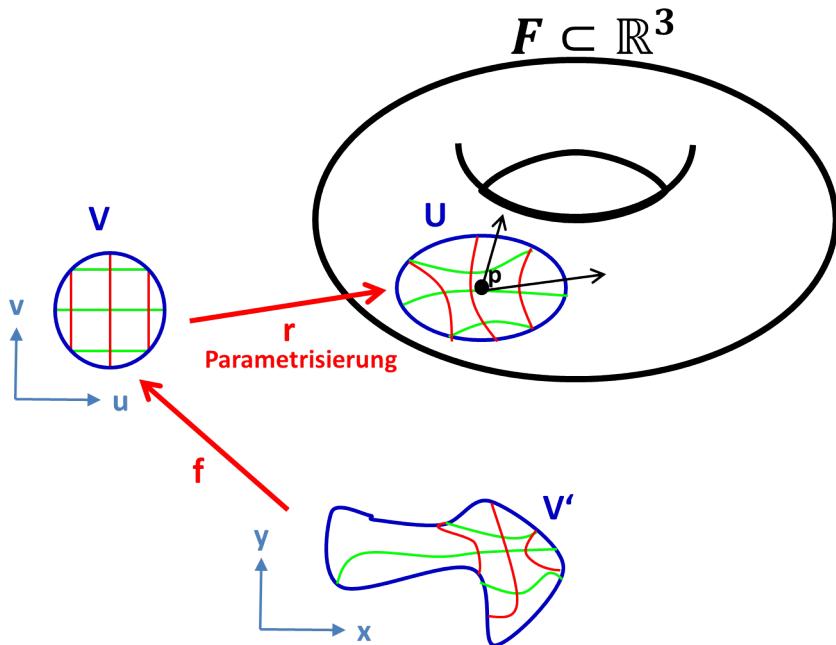
$F \subset \mathbb{R}^3$  ist Fläche im  $\mathbb{R}^3$  genau dann, wenn zu jedem Punkt von  $F$  eine Umgebung  $U \subset F$  und eine Abbildung  $r: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  von einer offenen Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^2$  existiert, sodass gilt:

- $r: V \rightarrow U$  ist Homöomorphismus
- $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  ist glatt,
- $r_u := \frac{\partial r}{\partial u} = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}) =: r_* \frac{\partial}{\partial u}$  und  $r_v := \frac{\partial r}{\partial v} = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}) =: r_* \frac{\partial}{\partial v}$



sind in jedem Punkt linear unabhängig.

- Beispiel IV.11.**
1.  $r(u, v) = (a + b \cdot \cos u)(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + b \sin u \cdot e_3$  (Torus) ( $a, b > 0$ )
  2.  $r(u, v) = a \cdot \sin u \sin v \cdot e_1 + a \cos u \sin v \cdot e_2 + a \cos v \cdot e_3$  (Sphäre)
  3.  $r(u, v) = au \cos v \cdot e_1 + au \sin v \cdot e_2 + ve_3$  (Helikoid)



Ein Kartenwechsel entspricht nun einer Umparametrisierung

$$r \circ f: V' \rightarrow \mathbb{R}^3, f: V' \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2 \text{ Diffeomorphismus}$$

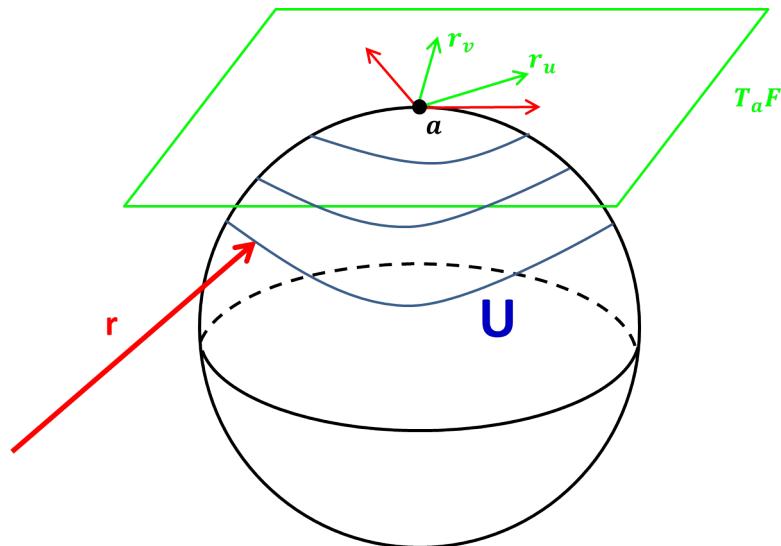
Gilt  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , so ist

$$(r \circ f)_x = r_u u_x + r_v v_x$$

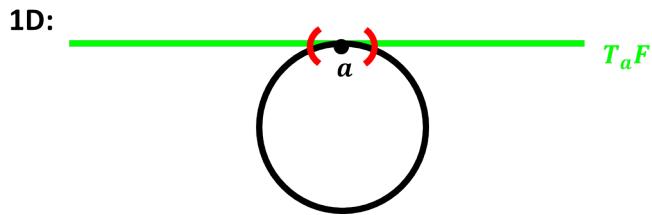
$$(r \circ f)_y = r_u u_y + r_v v_y$$

4

**Definition IV.6.** Der Tangentialraum  $T_a F$  einer Fläche  $F$  in einem Punkt  $a \in F$  wird aufgespannt von  $r_u(a)$  und  $r_v(a)$

*Tangentialraum*

eindimensional:

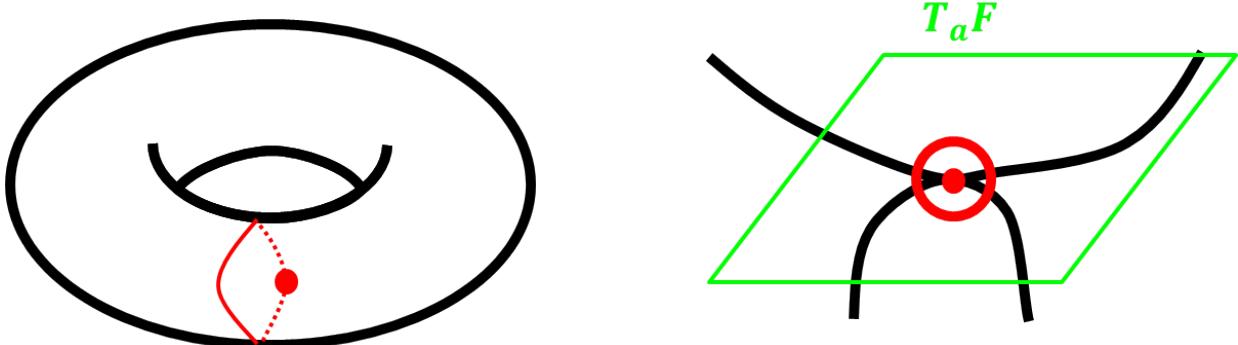


**Bemerkung IV.5.**  $T_a$  ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

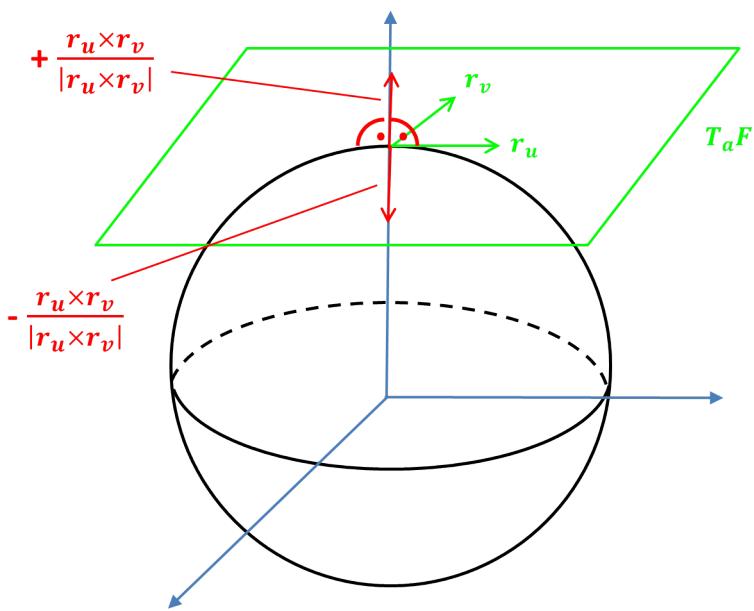
**Definition IV.7.** Die Vektoren  $\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$  heißen auch Einheitsnormalvektoren von  $F$  in  $a$ .

*Einheitsnormalvektoren*

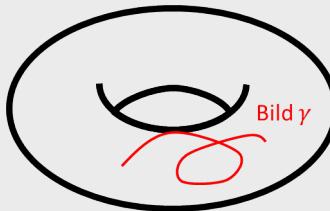
**Bemerkung IV.6.** Diese stehen senkrecht auf  $T_a F$ .



<sup>4</sup>Ableitungen nach  $u/v/x/y\dots$



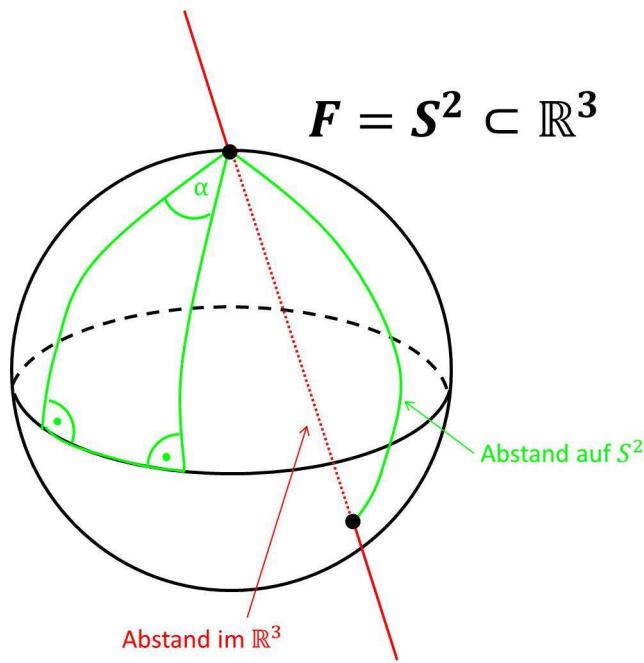
**Definition IV.8.** Eine (glatte) Kurve in  $F$  ist eine glatte Abbildung  $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow F$  mit nirgendwo verschwindendem Differential.



**Bemerkung IV.7.** Ist  $r$  eine Parametrisierung von  $F$ , so ist eine glatte Kurve in  $F$  bezgl.  $r$  gegeben durch eine glatte Abbildung  $t \mapsto (u(t), v(t))$ , so dass  $\gamma(t) := r(u(t), v(t)) \subset F$  eine parametrisierte Kurve in  $\mathbb{R}^3$  ist, d.h.  $u(t)$  und  $v(t)$  sind glatt und  $\gamma' = r_u u' + r_v v' \neq 0$

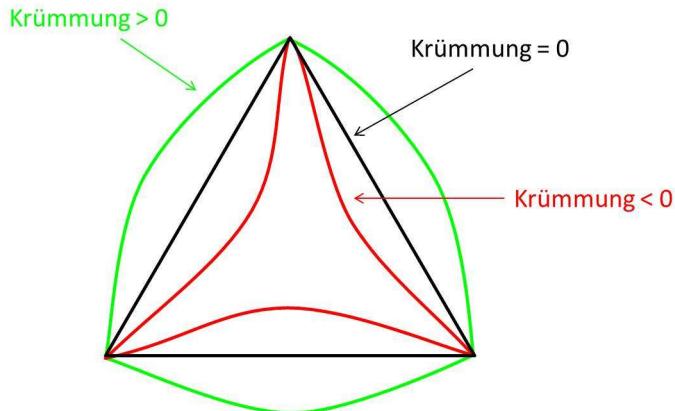
$$\Leftrightarrow (u', v') \neq 0$$

(denn  $r_u, r_v$  sind ja linear unabhängig.)



**Beispiel IV.12.**

$F = S^2 \subset \mathbb{R}^3$  Abstand auf  $S^2$  Abstand in  $\mathbb{R}^3$



### Beispiel IV.13.

Krümmung:

- $< 0$
- $> 0$
- $= 0$

**Definition IV.9.** Die Bogenlänge (oder Länge) einer glatten Kurve in  $F$  von  $\gamma(a)$  zu  $\gamma(b)$  ( $t = a, b$ ) ist

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &= \int_a^b \sqrt{\underbrace{\gamma' \cdot \gamma'}_{\text{Eukl. SKP im } \mathbb{R}^3}} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(r_u u' + r_v v') \cdot (r_u u' + r_v v')} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} dt \end{aligned}$$

mit  $E := r_u \cdot r_u, F = r_u \cdot r_v, G = r_v \cdot r_v$

*Bogenlänge*

**Definition IV.10.** Die erste Fundamentalform einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist der Ausdruck

$$I := E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$(= Edu \otimes du + F du \otimes dv + G dv \otimes dv)$$

*erste Fundamentalf orm*

**Bemerkung IV.8.**  $I$  ist nichts anderes als die quadratische Form  $Q(v, v) := v \cdot v$ <sup>5</sup> eingeschränkt auf den Tangentialraum von  $F$ , der von  $r_u, r_v$  aufgespannt wird.

**Beispiel IV.14.** Die Bogenlänge einer Kurve  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  auf  $F$  ist dann

$$\int_a^b \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt.$$

<sup>5</sup>euklidisches Skalarprodukt

**Motivation:** Ändert man die Parametrisierung von  $F$  via  $u(x, y), v(x, y)$  und wollten wir die Länge von  $\gamma(t)$  (also dann  $x(t), y(t)$ ) direkt bestimmen, müsste man berechnen

$$u' = u_x x' + u_y y', v' = v_x x' + v_y y' \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 &= E(u_x x' + u_y y')^2 + 2F \dots \\ &= \dots \underline{\text{furchtbar!}} \end{aligned}$$

Mit  $du, dv$  schreibt man einfach

$$du = u_x dx + u_y dy$$

$$dv = v_x dx + v_y dy$$

und substituiert man dies in  $I$ , so erhält man einfach  $E'dx^2 + F'dxdy + G'dy^2$  mit

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix}$$

**Beispiel IV.15.** Für die Ebene  $r(x, y) = xe_1 + ye_2$  ist  $r_x = e_1, r_y = e_2 \Rightarrow I = dx^2 + dy^2$ . Wechsel zu Polarkoordinaten:  $x = r \cos \Theta, y = r \sin \Theta$

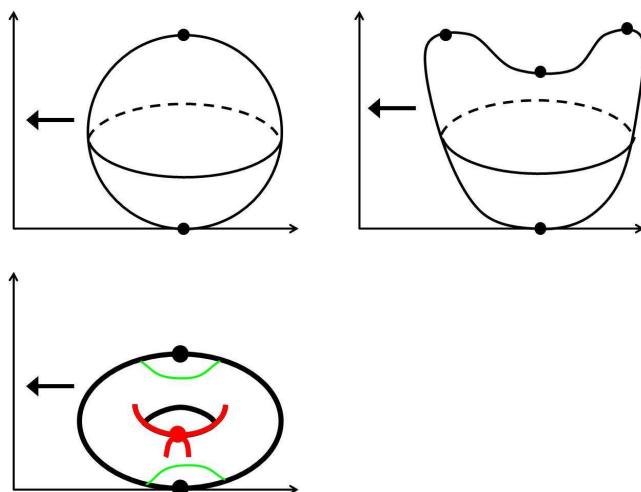
$$\Rightarrow dx = dr \cos \Theta - r \sin \Theta$$

$$dy = dr \sin \Theta + r \cos \Theta d\Theta$$

$$\Rightarrow \underline{dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2}$$

6 7

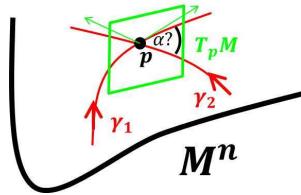
### Exkurs: Kritische Punkte, Werbung für Proseminar und Seminar



<sup>6</sup>wichtige Definitionen und Übungsblätter anschauen für Klausur! In der letzten Vorlesung Komplettwiederholung

<sup>7</sup>Differentialgeometrie-Vorlesung im Wintersemester (5. Semester)

### Exkurs: Riemannsche Metrik, Differentialgeometrie



$$TM^{2n} = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Tangentialbündel

$$g = g(p): T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

Riemannsche Metrik

lokal:  $g = g_{ij}^{dx^i \otimes dx^j}$  Tensor

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} dx^i \otimes dx^j \left( \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ = dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \cdot dx^j \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \delta_{il} \cdot \delta_{jk} \end{aligned}$$

**Definition IV.11.** Sind  $\gamma_1, \gamma_2$  Kurven auf einer Fläche  $F$ , so ist der Winkel  $\Theta$  zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  (in einem Punkt  $p \in F$ ) mit  $\gamma_1(t) = p = \gamma_2(t)$  gegeben durch Winkel

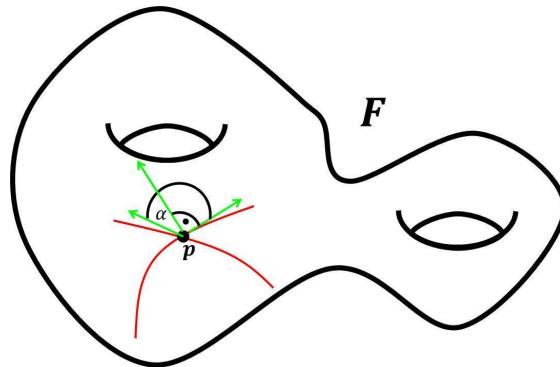
$$\cos \Theta = \frac{\gamma'_1(t) \cdot \gamma'_2(t)}{|\gamma'_1(t)| |\gamma'_2(t)|} \quad (*)$$

**Bemerkung IV.9.** Jeder Term in  $(*)$  lässt sich auch durch  $I$  ausdrücken, denn:

z.B. gilt  $\gamma'_i = r_u u'_i + r_v v'_i$

$$\Rightarrow \gamma'_i \cdot \gamma'_j = (r_u u'_i + r_v v'_i)(r_u u'_j + r_v v'_j)$$

$$= Eu'_i v'_j + F(v'_i v'_j + u'_j v'_i) + Gv'_i v'_j$$



**Definition IV.12.** Der Flächeninhalt des parametrisierten Gebiets  $r(V) \subset F \subset \mathbb{R}^3$  ist

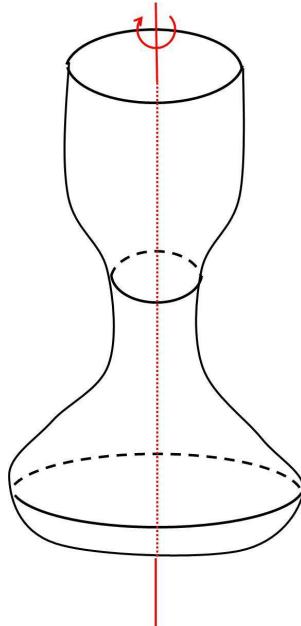
$$A = \int_V |r_u \times r_v| dudv = \int_V \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Flächeninhalt

**Bemerkung IV.10.**  $|r_u \times r_v|^2 = (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2 = EG - F^2$

**Beispiel IV.16.** Eine Rotationsfläche

$$r(u, v) = f(u) \cdot (\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + u \cdot e_3$$



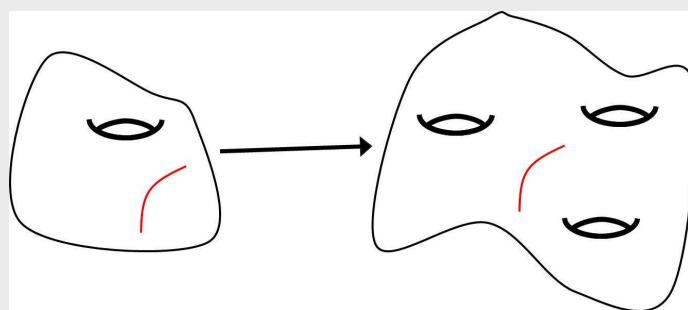
hat  $I = (1 + f'(u))^2 du^2 + f(u)^2 dv^2$  und für den Flächeninhalt zwischen  $u = a$  und  $u = b$  gilt dann

$$A = \int_a^b f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} du = 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} du$$

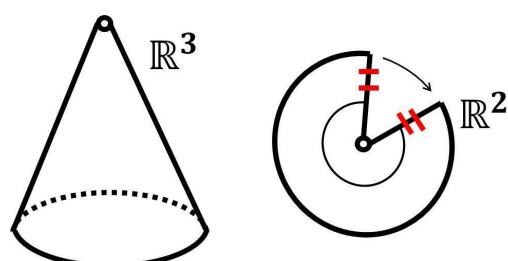
### 3 Isometrien (von Flächen)

**Definition IV.13.** Zwei Flächen im  $\mathbb{R}^3$  mit ersten Fundamentalformen heißen isometrisch, wenn es einen Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt, der Kurven auf Kurven gleicher Länge abbildet.

*isometrische Flächen*



**Beispiel IV.17.** Biegt man ein Stück Papier, so ändern sich Längen von Kurven nicht! Beispielsweise sind also Ebene und Zylinder isometrisch, ebenso auch Kegel und Teile der Ebene:



**Satz IV.5.** Zwei Kartenbereiche  $U$  und  $U'$  von Flächen  $F$  und  $F'$  im  $\mathbb{R}^3$  sind isometrisch genau dann, wenn es Parametrisierungen

$$r: V \rightarrow U \subset F$$

und

$$r': V' \rightarrow U' \subset F'$$

gibt, deren erste Fundamentalformen übereinstimmen.

*Beweis.* " $\Leftarrow$ ": In diesem Fall ist  $id: V \rightarrow V$  bzw.  $r^{-1} \circ r': U \rightarrow U'$  eine Isometrie (abstandserhaltende Abbildung), denn die erste Fundamentalform bestimmt ja die Länge von Kurven.

" $\Rightarrow$ ": Angenommen via  $f: V \xrightarrow{\cong} V'$  seien  $U \subset F$  parametrisiert  $r: V \rightarrow U$ , und  $U' \subset F'$ , parametrisiert durch  $r': V' \rightarrow U'$  isometrisch.

$$\Rightarrow r' \circ f: V \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ und } r: V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sind Parametrisierungen mit demselben Definitionsbereich, d.h. die ersten Fundamentalformen sind hier

$$I' = \tilde{E}du'^2 + 2\tilde{F}dudv' + \tilde{G}dv'^2$$

bzw.

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$f$  ist Isometrie  $\Leftrightarrow$

$$\int_{[a,b]} \sqrt{\tilde{E}u'^2 + 2\tilde{F}u'v' + \tilde{G}v'^2} dt = \int_{[a,b]} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt$$

$\forall$  Kurven  $t \mapsto (u(t), v(t))$

$\forall$  Intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \tilde{E}u'^2 + 2\tilde{F}u'v' + \tilde{G}v'^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$$

Wähle nun  $u$  und  $v$  wie folgt:

Wähle

$$u = t, v = a \Rightarrow \tilde{E} = E$$

$$u = a, v = t \Rightarrow \tilde{G} = G$$

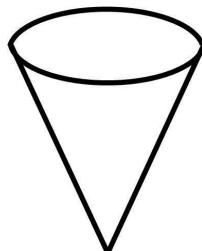
$$u = t, v = t \Rightarrow \tilde{F} = F$$

$$\Rightarrow I = I'.$$

□

**Beispiel IV.18.** Der Kegel

$$r(u, v) = au \cos v \cdot e_1 + au \sin v \cdot e_2 + u \cdot e_3$$



mit  $u, a > 0$  hat  $I_{\text{Kegel}} = (1 + a^2)du^2 + a^2u^2dv^2$ . Setze  $R := \sqrt{1 + a^2} \cdot u$

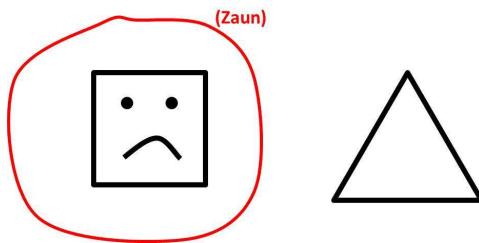
$$\Rightarrow I_{\text{Kegel}} = dR^2 + \frac{a^2}{1 + a^2} R^2 dv^2$$

<sup>8</sup>

$$\Rightarrow \text{mit } \Theta := \sqrt{\frac{a^2}{1 + a^2}} \cdot v \text{ ist } I_{\text{Kegel}} = dR^2 + R^2 d\Theta^2$$

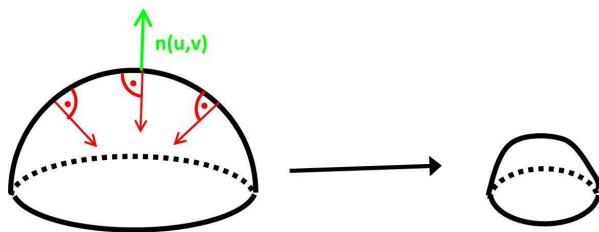
Das ist nichts anderes als  $I_{\text{Ebene}}$  (in Polarkoordinaten). <sup>9</sup>

**Exkurs: Roman: Flächenland (Flatland) - Die Memoiren eines alten Quadrats** <http://de.wikipedia.org/wiki/Flatland> <http://www.flatlandthefilm.com/novel.php>



### 3.1 Die zweite Fundamentalform

**Motivation** Nimm ein Flächenstück, parametrisiert durch  $r(u, v)$ , und deformiere es längs seiner Normalen ein Stück  $t$  weit einwärts:



Dies liefert eine Familie von Flächen

$$R(u, v, t) := r(u, v) - t \cdot n(u, v)$$

mit den nach "außen" weisenden Einheitsnormalenvektor

$$n(u, v) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

und  $R_u = r_u - t \cdot n_u$ ,  $R_v = r_v - t \cdot n_v$

Für jedes feste  $t$  besitzt die Fläche  $R(u, v, t)$  eine erste Fundamentalform

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

und wir berechnen die Änderung in Abhängigkeit von  $t$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) \Big|_{t=0} =$$

<sup>8</sup>Koordinatenwechsel

<sup>9</sup>Die Geometrie auf dem Kegel und auf der Ebene (und auf dem Zylinder) ist identisch. (Längenmessung etc. bleibt das Gleiche.)

10

$$= -(r_u \cdot n_u du^2 + (r_u \cdot n_v + r_v n_u) dudv + r_v \cdot n_v dv^2)$$

11

**Bemerkung:**  $n$  ist senkrecht zu  $u$  und  $v$

$$\Rightarrow 0 = (r_u \cdot n)_u = r_{uu} \cdot n + r_u \cdot n_u,$$

ebenso

$$0 = r_{uv} \cdot n + r_u \cdot n_v$$

und

$$0 = r_{vu} \cdot n = r_v \cdot n_u,$$

also gilt mit  $r_{uv} = r_{vu}$  auch  $r_u \cdot n_v = r_v \cdot n_u$

**Definition IV.14.** Die zweite Fundamentalform einer Fläche,  $II$ , parametrisiert lokal durch  $r(u, v)$ , ist definiert als

$$[Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2]$$

*zweite  
Fundamen-  
tal-  
form*

mit  $L := r_{uu} \cdot n$ ,  $M := r_{uv} \cdot n$ ,  $N := r_{vv} \cdot n$

**Beispiel IV.19.** 1. Die Ebene  $r(u, v) = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$  erfüllt  $r_{uu} = r_{uv} = r_{vv} = 0 \Rightarrow II = 0$

2. Die Sphäre vom Radius  $a > 0$  um  $0 \in \mathbb{R}^3$  ist gegeben durch  $\vec{r} = a \cdot n$ ,

$$\Rightarrow r_u \cdot n_u = \frac{1}{a} r_u \cdot r_u, r_u \cdot n_v = \frac{1}{a} r_u \cdot r_v, r_v \cdot n_v = \frac{1}{a} r_v \cdot r_v$$

$$\Rightarrow II = \frac{1}{a} (Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2) = \frac{1}{a} I$$

12

**Satz IV.6.** Verschwindet die zweite Fundamentalform einer Fläche, so ist die Fläche Teil einer Ebene.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Ebene  $= a + b \cdot u + c \cdot v$

*Beweis.* Denn:  $II = 0 \Rightarrow 0 = r_u \cdot n_u = r_v \cdot n_u = r_u \cdot n_v = r_v \cdot n_v$

$$\Rightarrow n_u = 0 = n_v$$

$(n_u, n_v \perp n$ , d.h. Linearkombination von  $r_u, r_v$ )

$$\Rightarrow n$$
 ist konstant, d.h.  $(r \cdot n)_u = r_u n = 0 = (r \cdot n)_v = r_v n$

$\Rightarrow r \cdot n = const \Rightarrow$  das Flächenstück ist Teil einer Ebene

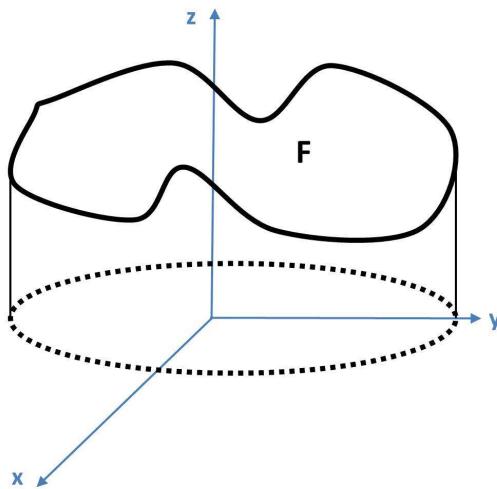
□

**Beispiel IV.20.** Eine Fläche  $F$  sei gegeben als Graph einer glatten Funktion  $z = f(x, y)$

<sup>10</sup>In  $t = 0$  ableiten

<sup>11</sup> $E, F, G$  sind durch die Parametrisierung gegeben.

<sup>12</sup> $r(u, v) = a \cdot n(u, v)$



$$\begin{aligned}
 r(x, y) &= x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + f(x, y) \cdot e_3 \\
 \Rightarrow r_x &= e_1 + f_x \cdot e_3, \quad r_y = e_2 + f_y \cdot e_3 \\
 \Rightarrow r_{xx} &= f_{xx} \cdot e_3, \quad r_{x,y} = f_{xy} \cdot e_3, \quad r_{yy} = f_{yy} \cdot e_3
 \end{aligned}$$

In einem kritischen Punkt von  $f$  gilt  $f_x = 0 = f_y$ .

$\Rightarrow$  hier ist der Normalenvektor in  $f(x, y)$  gerade  $e_3$ .

$\Rightarrow II$  ist hier nichts anderes als die Hesse-Matrix der Funktion  $f$  in diesem Punkt:

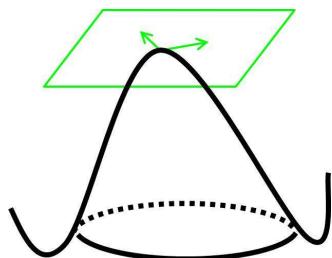
$$II \hat{=} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}!$$

Damit lässt sich das Verhalten von  $II$  qualitativ beschreiben:

Interpretiert man für  $p \in F$  die Fläche  $F$  als parametrisiert durch die Projektion auf  $T_p F$ , so ist  $f(x, y)$  die Höhe über dieser Ebene.

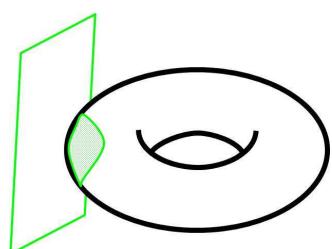
Unterscheide nun:

- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \Rightarrow$  der kritische Punkt ist (lokales) Maximum (falls die Hessesche negativ definit ist, und (lokales) Minimum, falls die Hessesche positiv definit ist)

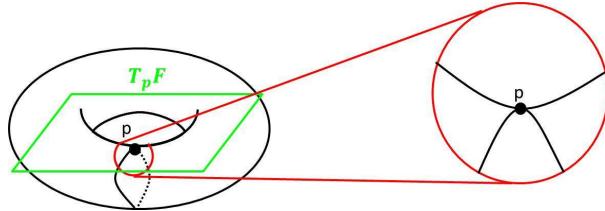


Für  $F$  gibt es aber nur einen Unterschied in der Wahl der Normalen

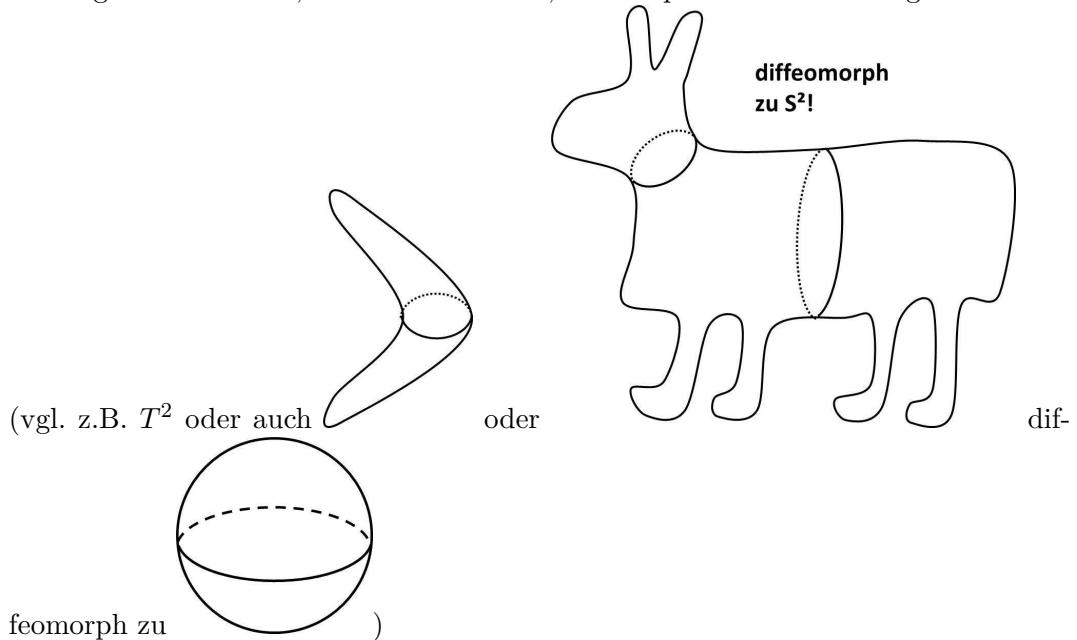
$\Rightarrow F$  sieht lokal um  $p$  wie die Sphäre aus (d.h.  $F$  liegt lokal ganz auf einer Seite von  $T_p F$ )



- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$   
 $\Rightarrow$  der kritische Punkt ist Sattelpunkt, d.h.  $f$  liegt lokal um  $p$  stets auf beiden Seiten von  $T_p F$ .

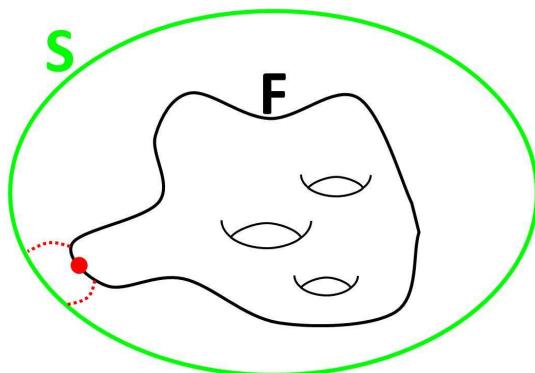


Im Allgemeinen ist  $II$ , hier die Hessesche, sowohl positiv als auch negativ definit.



**Satz IV.7.**  $F \subset \mathbb{R}^3$  geschlossene Fläche  $\Rightarrow \exists$  Punkte auf  $F$  mit  $II > 0$

*Beweis.* Denn:  $F$  kompakt  $\Rightarrow F$  ist in einer Sphäre  $S$  enthalten



Schrumpfe  $S$ , bis  $S$  einen Punkt von  $F$  berührt  $\Rightarrow F$  ist dort  $\Rightarrow F$  ist dort lokal Graph einer Funktion  $f - (R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \geq 0 \Rightarrow$  der erste nichttriviale term in einer Taylor-Entwicklung um  $p$  ist dann

$$\frac{1}{2}(f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2) - \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) \Rightarrow Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 \geq \frac{1}{R}(x^2 + y^2) > 0.$$

□