

Praktikum Multicore-Programmierung

Abschlussprojekt 1

Gruppe 3: Sarah Lutteropp und Johannes Sailer

2. Februar 2016

Zusammenfassung

Dies ist eine Ausarbeitung für das Abschlussprojekt des Praktikums Multicore-Programmierung im Wintersemester 2015/16. Ziel des Projektes war es, am Beispiel des Jacobi-Verfahrens und des Gauß-Seidel-Verfahrens parallele Lösungsmethoden partieller Differentialgleichungen zu implementieren.

1 Mathematischer Hintergrund

Anhand des Beispiels der Approximation von Stoffkonzentrationen innerhalb eines festgelegten zweidimensionalen durch ein Gitter angenäherten Gebietes ergibt sich mittels der auf dem Aufgabenblatt dargestellten Umformungen, Randbedingungen und Argumentationsschritte das lineare Gleichungssystem $Au = b$, das wir mittels Iterationsverfahren lösen sollen.

$$\text{Hierbei ist } A = \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -I & T & -I \\ & & & -I & T \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}, \quad T \in \mathbb{Z}^{TODO \times TODO}$$

$$\text{mit } T_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{falls } i = j \\ -1 & \text{falls } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad u = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{und } b = h^2 * \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ f(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Es ist $h \leq 1$, $\frac{1}{h} \in \mathbb{N}$, $n = \frac{1}{h} - 1$, $x_i = y_i = h * i$ für $i = 1, \dots, n$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Bei I handelt es sich um die $TODO \times TODO$ -Einheitsmatrix.

Für $h = \frac{1}{3}$ ergibt sich beispielsweise das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \begin{pmatrix} f(1/3, 1/3) \\ f(1/3, 2/3) \\ f(2/3, 1/3) \\ f(2/3, 2/3) \end{pmatrix}$$

Man könnte dieses lineare Gleichungssystem natürlich auch mit direkten Verfahren wie dem Gaußschen-Eliminationsverfahren lösen. Dieses ist jedoch nur sehr schlecht parallelisierbar. Außerdem ist das Gaußsche-Eliminationsverfahren sehr anfällig für numerische Störungen. Das ist bei iterativen Verfahren normalerweise nicht der Fall.

TODO: Überführung auf zweidimensionales Problem, den Lösungsvektor u als Lösungsmatrix U uminterpretieren.

1.1 Jacobi-Verfahren

Blabla

1.1.1 Herleitung

Blabla

1.1.2 Abbruchkriterium

Unser Abbruchkriterium nimmt von allen Matrix Einträgen die Differenz zum neuen Punkt und summiert die Beträge davon auf. Dies schien uns recht Performant zu sein und da es auch in der Vorlesung Heterogene Parallele Rechensysteme Verwendung findet sollte es nicht so schlecht sein. Es werden auch keine Sprünge oder ähnliches verwendet, von demher ist der Overhead konstant. Zur Auswahl standen außerdem das selbe wie oben in der euklidischen Norm zu berechnen, jedoch erschien uns oberes schneller. Desweiteren dachten wir an den Vergleich der Veränderung der Hauptdiagonalelemente, was in einem zusätzlichen if geendet hätte. Dann gab es noch eine Version mit Eigenwerten, welche wir nicht haben, was sich dadurch erledigt hatte.

1.2 Gauß-Seidel-Verfahren

Blabla

1.2.1 Herleitung

Blabla

1.2.2 Abbruchkriterium

Für das Gauß-Seidel-Verfahren haben wir dasselbe Abbruchkriterium wie in Abschnitt 1.1.2 verwendet. (TODO: Begründung)

1.3 Vergleich der Konvergenz und Stabilität beider Verfahren

Beide Verfahren sind uneingeschränkt stabil.

	h=4	h=32	H=128
Gaus-Seidel	13	1067	13425
Jacobi	24	2280	29230

Abbildung 1: Beide Verfahren für verschiedene Verfeinerungen, bis das Abbruchkriterium true wurde.

2 Sequentielle Implementierung

Die Matrixeinträge werden in dem auf dem Aufgabenblatt zur Verfügung gestellten Pseudocode spaltenweise durchlaufen. Daher haben wir in unserer Implementierung die Matrizen spaltenweise indiziert, um eine möglichst gute Cache-Lokalität zu erzielen.

Anstatt des Parameters h übergeben wir einen Parameter $size$, der $\frac{1}{h} + 1$ entspricht. Dies hat den Vorteil, dass der Nutzer den Grad der Verfeinerung exakt ohne Gleitkommaungenauigkeiten angeben kann und U eine $size \times size$ -Matrix ist.

Da sich die Einträge des Vektors b innerhalb der Iterationen nicht ändern, haben wir b vorberechnet.

2.1 Laufzeiten bei verschiedenen Verfeinerungen

Blabla

2.2 Approximationsfehler

Wir haben den Approximationsfehler nur für $h=4$ und $h=32$ dargestellt, weil Open Office nicht genug Punkte verarbeiten kann.

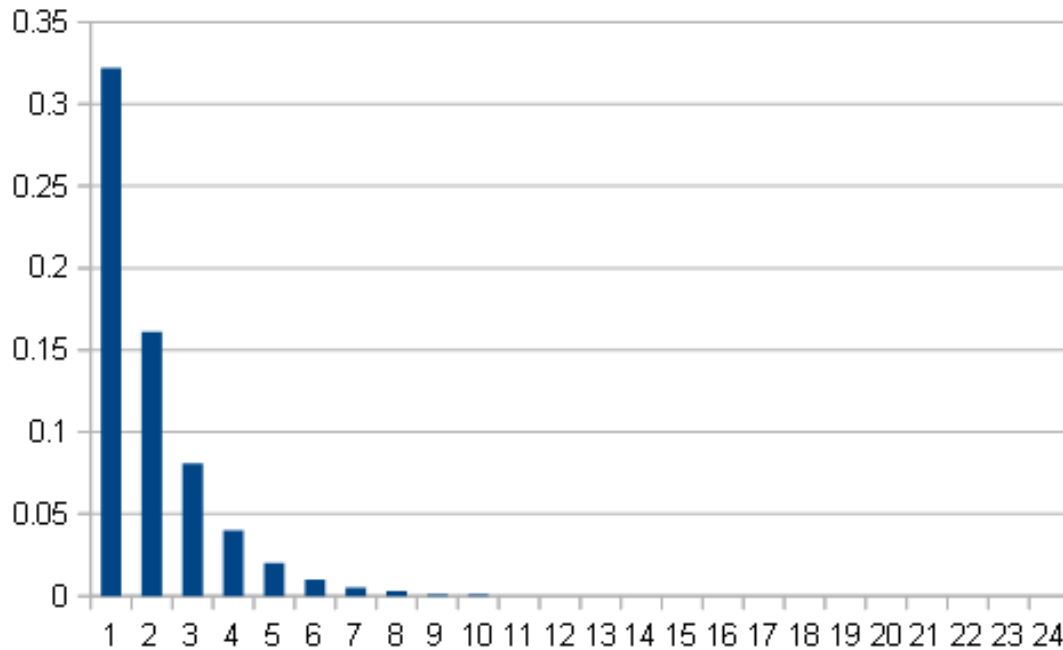


Abbildung 2: Jacobi Approximationsfehler für $h=4$

3 Parallelisierung

Blabla

3.1 Jacobi-Verfahren

Da innerhalb der Iterationsschritte des Jacobi-Verfahrens keinerlei Datenabhängigkeiten bei der Berechnung der Matrixeinträge bestehen, haben wir mittels OpenMP (`#pragma omp parallel for`) die äußere Schleife parallelisiert.

Zudem haben wir eine weitere Version des Jacobi-Verfahrens implementiert, in der wir zusätzlich zur Parallelisierung der `for`-Schleife auch den Code innerhalb der `for`-Schleife mit SSE vektorisiert haben.

Hierbei haben wir folgenden Speedup bei verschiedenen Problemgrößen h und sowie verschiedenen Prozessorzahlen p gemessen: TODO

3.2 Gauß-Seidel-Verfahren

Innerhalb der Iterationsschritte des Gauß-Seidel-Verfahrens bestehen Datenabhängigkeiten, da die Berechnung der Matrixeinträge in einer Iteration von den vorher berechneten Einträgen der selben Iteration abhängt. Das Gauß-Seidel-Verfahren ist daher inhärent sequentiell. Daher ist eine Parallelisierung des Gauß-Seidel-Verfahrens mit mehr Aufwand verbunden als beim “embarrassingly parallel” Jacobi-Verfahren.

Wir haben sowohl den naiven, falschen Parallelisierungsansatz als auch zwei verschiedene funktionierende Parallelisierungsansätze implementiert.

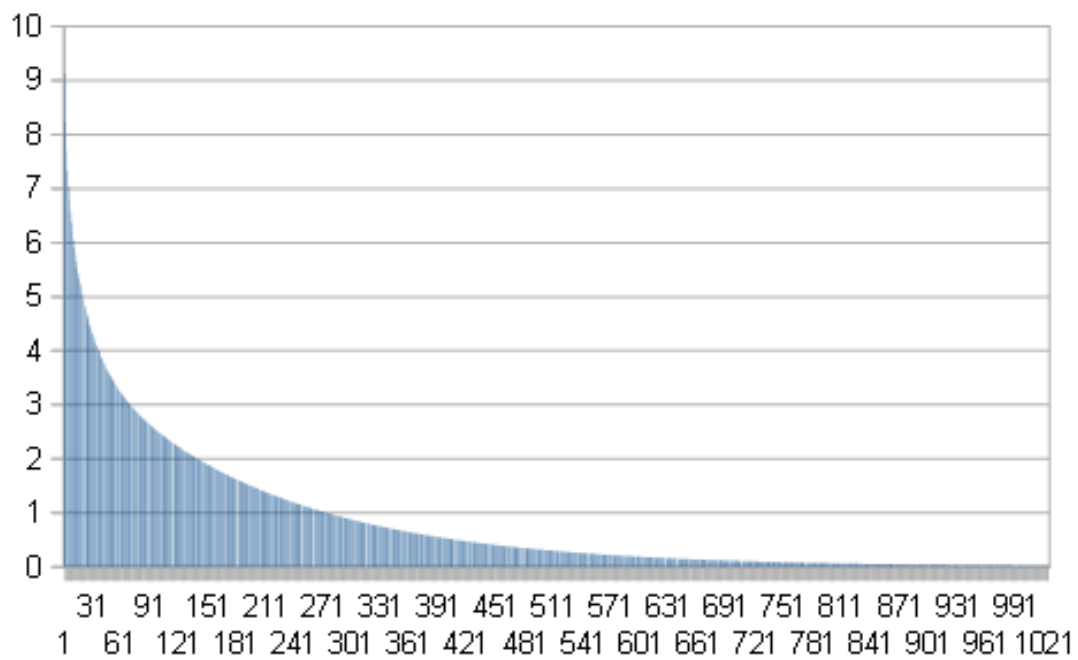


Abbildung 3: Jacobi Approximationsfehler für $h=32$

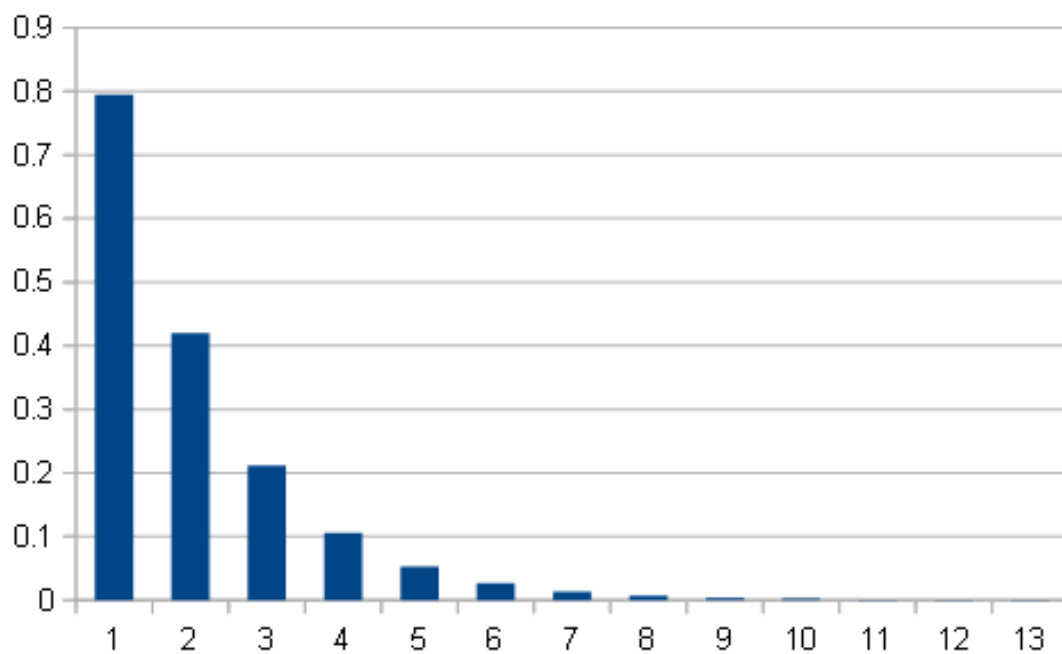


Abbildung 4: Gauss-Seidel Approximationsfehler für $h=4$

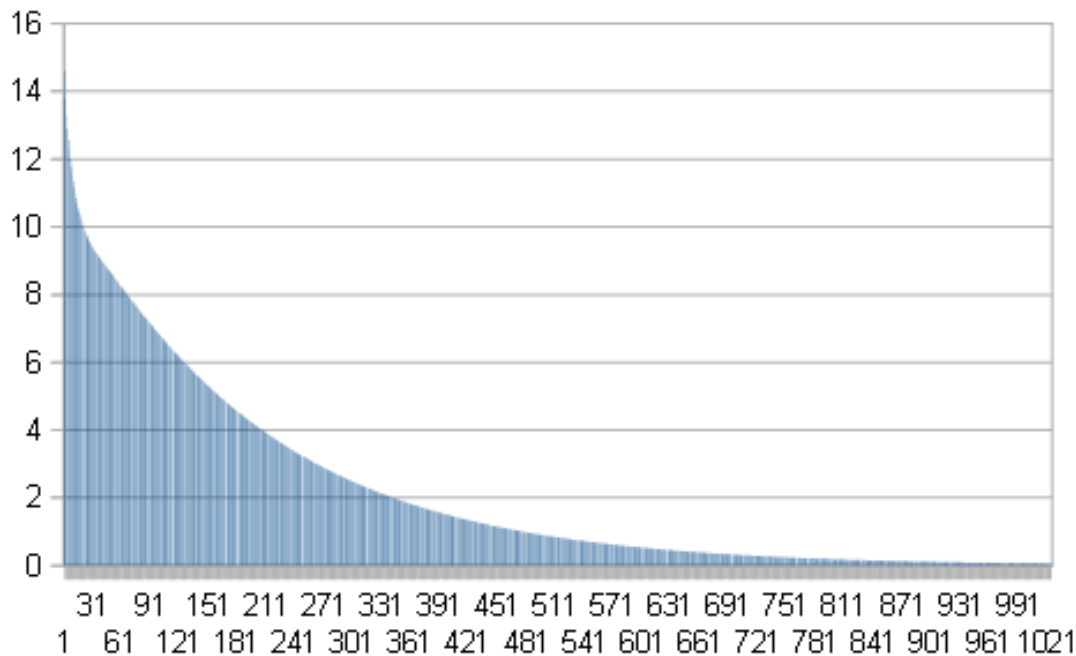


Abbildung 5: Gaus-Seidel Approximationsfehler für $h=32$

3.2.1 Naiver Parallelisierungsansatz

Der naive Parallelisierungsansatz ist, wie in Abschnitt 3.1 die äußerste Schleife mittels `#pragma omp parallel for` zu parallelisieren. Da eine parallele Ausführung der Schleifeniterationen mittels OpenMP nicht die Iterationsreihenfolge garantiert, kann es hierbei zu Wettlaufsituationen (“Race Conditions”) kommen.

Im Fall des Gauß-Seidel-Verfahrens tritt dies in folgendem Beispiel auf (TODO: Beispiel):

Der im Praktikum vorgestellte Intel Thread Sanitizer erkennt die auftretende Wettlaufsituation nicht.

3.2.2 Erweiterter Parallelisierungsansatz: Rot-Schwarz

Bei der Rot-Schwarz-Parallelisierung des Gauß-Seidel-Verfahrens wird ausgenutzt, dass jeder Matrixeintrag nur von seinem linken, rechten, oberen und unteren direkten Nachbarn abhängt. Wir färben also die Matrixeinträge in rote und schwarze Felder ein, wobei die Datenabhängigkeiten nur zwischen Einträgen unterschiedlicher Farbe bestehen. Hierbei ergibt sich ein Schachbrettmuster, wie in Abbildung 6 gezeigt.

Da die Matrixeinträge gleicher Farbe nicht voneinander abhängen, können wir diese parallel berechnen. Dies führt zu folgendem Ansatz: (TODO: Pseudocode)

Hierbei ist zu beachten, dass die einzelnen Iterationen des sequentiellen Gauß-Seidel-Verfahrens und dessen Rot-Schwarz-Parallelisierung nicht genau dasselbe Ergebnis liefern. Dies liegt darin begründet, dass durch die Rot-Schwarz-Aufteilung eine Umordnung der Matrixeinträge geschieht.

Um die Indexberechnung zu vereinfachen und die Cachelokalität zu verbessern, haben wir die roten und die schwarzen Einträge jeweils in eigenen, neuen Matrizen gespeichert. Dadurch liegen Einträge gleicher Farbe zusammenhängend im Speicher. Dies hat es uns auch ermöglicht, unsere Implementierung mittels SSE-Vektorinstruktionen zu beschleunigen. Die Vektorisierung mittels SIMD-Instruktionen haben wir explizit implementiert. Zwar ist mit OpenMP 4.0 eine Vektorisierung von Code auch mittels `#pragma omp simd` möglich, aber unser händisch vektorisierter Code war schneller als der von OpenMP generierte.

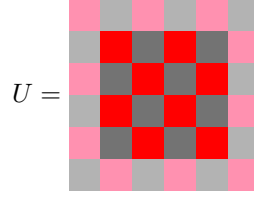


Abbildung 6: Aufteilung der Lösungsmatrix U in rote und schwarze Zellen, sodass zwischen Zellen gleicher Farbe keine Datenabhängigkeiten bestehen. Die Randzellen, deren Einträge per Annahme immer den Wert 0 enthalten, sind in blasseren Farben markiert.

Bei den Indexberechnungen haben wir zwischen $size \times size$ -Matrizen gerader und ungerader $size$ unterschieden.

Berechnung der Nachbarindizes für gerade Werte von $size$

Für rote $U_{i,j}$ gilt: Der zugehörige Index in der Matrix für die roten Einträge ist $idx = \lfloor \frac{i+j*size}{2} \rfloor$. Der linke Nachbar ist an Stelle $idx - \frac{size}{2}$ in der Schwarz-Matrix. Der obere Nachbar ist an Stelle $idx - (1 - (j \bmod 2))$ in der Schwarz-Matrix. Der rechte Nachbar ist an Stelle $idx + \frac{size}{2}$ in der Schwarz-Matrix. Der untere Nachbar ist an Stelle $idx + (j \bmod 2)$ in der Schwarz-Matrix.

Für schwarze $U_{i,j}$ gilt: Der zugehörige Index in der Matrix für die schwarzen Einträge ist $idx = \lfloor \frac{i+j*size}{2} \rfloor$. Der linke Nachbar ist an Stelle $idx - \frac{size}{2}$ in der Rot-Matrix. Der obere Nachbar ist an Stelle $idx - (j \bmod 2)$ in der Rot-Matrix. Der rechte Nachbar ist an Stelle $idx + \frac{size}{2}$ in der Rot-Matrix. Der untere Nachbar ist an Stelle $idx + (1 - (j \bmod 2))$ in der Rot-Matrix.

Abbildung 7 zeigt die Berechnung der Nachbarindizes am Beispiel $size = 6$.

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ \hline 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ \hline 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ \hline 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ \hline \end{array}$$

Abbildung 7: Berechnung der Nachbarindizes für gerade Werte von $size$ am Beispiel $size = 6$

Berechnung der Nachbarindizes für ungerade Werte von $size$

Für rote $U_{i,j}$ gilt: Der zugehörige Index in der Matrix für die roten Einträge ist $idx = \lfloor \frac{i+j*size}{2} \rfloor$. Der linke Nachbar ist an Stelle $idx - \lceil \frac{size}{2} \rceil$ in der Schwarz-Matrix. Der obere Nachbar ist an Stelle $idx - 1$ in der Schwarz-Matrix. Der rechte Nachbar ist an Stelle $idx + \lfloor \frac{size}{2} \rfloor$ in der Schwarz-Matrix. Der untere Nachbar ist an Stelle idx in der Schwarz-Matrix.

Für schwarze $U_{i,j}$ gilt: Der zugehörige Index in der Matrix für die schwarzen Einträge ist $idx = \lfloor \frac{i+j*size}{2} \rfloor$. Der linke Nachbar ist an Stelle $idx - \lfloor \frac{size}{2} \rfloor$ in der Rot-Matrix. Der obere Nachbar ist an Stelle idx in der Rot-Matrix. Der rechte Nachbar ist an Stelle $idx + \lceil \frac{size}{2} \rceil$ in der Rot-Matrix. Der untere Nachbar ist an Stelle $idx + 1$ in der Rot-Matrix.

Abbildung 8 zeigt die Berechnung der Nachbarindizes am Beispiel $size = 7$.

$$U = \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 7 & 10 & 14 & 17 & 21 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 14 & 18 & 21 \\ 1 & 4 & 8 & 11 & 15 & 18 & 22 \\ 1 & 5 & 8 & 12 & 15 & 19 & 22 \\ 2 & 5 & 9 & 12 & 16 & 19 & 23 \\ 2 & 6 & 9 & 13 & 16 & 20 & 23 \\ 3 & 6 & 10 & 13 & 17 & 20 & 24 \end{array}$$

Abbildung 8: Berechnung der Nachbarindizes für ungerade Werte von *size* am Beispiel *size* = 7

		size= 3							
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=16	
		Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup
GCC	Jacobi Sequential	0,000		0,000		0,000		0,000	
	Jacobi	0,002		0,011		2,063		0,303	
	Jacobi SSE	0,002		0,009		0,015		0,303	
	Gaus-Seidel	0,000		0,000		0,000		0,000	
	Gaus-Seidel Naiv	0,002		0,011		0,017		0,310	
	Gaus-Seidel RS	0,002		0,013		0,022		0,475	
	Gaus-Seidel RS SSE	0,002		0,014		0,022		0,462	
	Wavefront	0,002		0,009		0,015		0,299	
	Wavefront Cache	0,002		0,007		0,011		0,223	
ICC	Jacobi Sequential	0,000		0,000		0,000		0,000	
	Jacobi	0,001		0,013		0,021		0,115	
	Jacobi SSE	0,001		0,013		0,021		0,067	
	Gaus-Seidel	0,000		0,000		0,000		0,000	
	Gaus-Seidel Naiv	0,001		0,013		0,021		0,081	
	Gaus-Seidel RS	0,002		0,019		0,034		0,167	
	Gaus-Seidel RS SSE	0,001		0,018		0,034		0,114	
	Wavefront	0,001		0,012		0,021		0,067	
	Wavefront Cache	0,001		0,009		0,014		0,053	

Abbildung 9: Performance für size=3 auf sn02(8 Kerne).

Messung von Speedup und Effizienz unter verschiedenen Verfeinerungen, Skalierbarkeit

3.2.3 Erweiterter Parallelisierungsansatz: Wavefront

Beim Wavefront Algorithmus wird anstatt über die Spalten oder Zeilen zu iterieren über die Diagonalen iteriert. Das hat den Vorteil, dass die Daten nicht voneinander abhängig sind und das selbe herauskommt, wie beim eigentlichen Gaus-Seidel Verfahren in serieller Form.

Vermutlicher Grund wieso unsere Wavefront-Implementierung langsamer als sequentielles Gauß-Seidel: Die Indexberechnung ist sehr aufwändig. Wir berechnen die Indizes in jeder Iteration neu, anstatt sie einmalig vorzuberechnen und in einer "Indextabelle" zu speichern. Außerdem richtet sich die Parallelität nach der Anzahl der Diagonal Elemente. D.h. es lohnt sich erst bei großen Diagonalen.

Bei der Wavefront Cache Lösung, wurden die Matrix zu erst in einen anderen Array kopiert, indem die Diagonalen in den Zeilen stehen. Dadurch haben wir uns erhofft, dass es zu einer höheren Cache Hitrate kommt.

In beiden Wavefront Lösungen hätte man sicher noch einiges optimieren können(z.B. Cuda für große Diagonalen), jedoch erschien uns Rot-Schwarz so viel schneller, dass es sich nicht lohnen würde.

Berechnung der Indexe Für die Implementierung wurden drei Schleifen verwendet. die Äußere ist zwischen den Schritten des Gaus-Seidel verfahren, die mittlere geht über die Diagonalen und die innere über die Elemente der Diagonalen.

In der Mittleren schleife werden die Variablen für die aktuelle Anzahl an Elementen gesteuert sowie eine Variable die angibt in welchem Durchlauf man nach der Diagonalen ist(border). Diese dient dazu anzugeben, wie viele Elemente man am Rand weg lassen kann, weil sie nicht mehr in

		size = 5									
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=16			
		Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	0,003	1	0,003	1,000	0,003	1,000	0,003	1		
	Jacobi	0,024	0,13	0,158	0,019	0,945	0,003	4,128	0		
	Jacobi SSE	0,020	0,15	0,121	0,025	0,186	0,016	4,045	0		
	Gaus-Seidel	0,002	1,000	0,002	1,000	0,002	1,000	0,002	1		
	Gaus-Seidel Naiv	0,013	0,154	0,130	0,015	0,215	0,009	3,812	0		
	Gaus-Seidel RS	0,020	0,100	0,114	0,018	0,194	0,010	3,465	0		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,020	0,100	0,115	0,017	0,200	0,010	3,483	0		
	Wavefront	0,450	0,004	0,279	0,007	0,497	0,004	7,732	0		
	Wavefront Cache	0,480	0,004	-	-	-	-	0,479	0		
ICC	Jacobi Sequential	0,002	1,000	0,002	1,000	0,002	1,000	0,002	1		
	Jacobi	0,029	0,069	0,149	0,013	0,334	0,006	1,443	0		
	Jacobi SSE	0,019	0,105	0,142	0,014	0,341	0,006	1,408	0		
	Gaus-Seidel	0,002	1,000	0,002	1,000	0,002	1,000	0,002	1		
	Gaus-Seidel Naiv	0,015	0,133	0,092	0,022	0,241	0,008	1,129	0		
	Gaus-Seidel RS	0,018	0,111	0,149	0,013	0,346	0,006	1,423	0		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,018	0,111	0,149	0,013	0,342	0,006	1,454	0		
	Wavefront	0,042	0,048	0,375	0,005	0,823	0,002	2,982	0		
	Wavefront Cache	0,045	0,044	0,363	0,006	0,687	0,003	1,136	0		

Abbildung 10: Performance für size=5 auf sn02(8 Kerne).

		size=32									
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=16			
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	0,008	1,000	0,008	1,000	0,008	1,000	0,008	1,000		
	Jacobi	0,016	0,500	0,011	0,727	0,021	0,381	0,197	0,041		
	Jacobi SSE	0,009	0,889	0,007	1,143	0,014	0,571	0,193	0,041		
	Gaus-Seidel	0,012	1,000	0,012	1,000	0,012	1,000	0,012	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	0,013	0,923	0,007	1,714	0,009	1,333	0,100	0,120		
	Gaus-Seidel RS	0,007	1,714	0,006	2,000	0,012	1,000	0,164	0,073		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,006	2,000	0,006	2,000	0,011	1,091	0,163	0,074		
	Wavefront	0,025	0,480	0,161	0,075	0,280	0,043	4,300	0,003		
	Wavefront Cache	0,026	0,462	0,173	0,069	0,313	0,038	4,500	0,003		
ICC	Jacobi Sequential	0,008	1,000	0,008	1,000	0,008	1,000	0,008	1,000		
	Jacobi	0,075	0,107	0,026	0,308	0,023	0,348	0,090	0,089		
	Jacobi SSE	0,008	1,000	0,009	0,889	0,018	0,444	0,054	0,148		
	Gaus-Seidel	0,012	1,000	0,012	1,000	0,012	1,000	0,021	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	0,037	0,324	0,014	0,857	0,015	0,800	0,050	0,420		
	Gaus-Seidel RS	0,006	2,000	0,008	1,500	0,015	0,800	0,055	0,382		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,006	2,000	0,009	1,333	0,015	0,800	0,056	0,375		
	Wavefront	0,026	0,462	0,220	0,055	0,441	0,027	1,600	0,013		
	Wavefront Cache	0,026	0,462	0,230	0,052	0,512	0,023	2,000	0,011		

Abbildung 11: Performance für size=32 auf sn02(8 Kerne).

		size = 65									
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=16			
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	0,142	1,000	0,142	1,000	0,142	1,000	0,142	1,000		
	Jacobi	0,288	0,493	0,105	1,352	1,000	0,142	0,830	0,171		
	Jacobi SSE	0,155	0,916	0,066	2,152	0,081	1,753	0,799	0,178		
	Gaus-Seidel	0,202	1,000	0,202	1,000	0,202	1,000	0,202	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	0,211	0,957	0,073	2,767	0,055	3,673	0,409	0,494		
	Gaus-Seidel RS	0,111	1,820	0,050	4,040	0,057	3,544	0,668	0,302		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,062	3,258	0,040	5,050	0,056	3,607	0,637	0,317		
	Wavefront	0,241	0,838	1,310	0,154	2,300	0,088	34,827	0,006		
	Wavefront Cache	0,257	0,786	1,500	0,135	2,700	0,075	39,000	0,005		
ICC	Jacobi Sequential	0,151	1,000	0,151	1,000	0,151	1,000	0,151	1,000		
	Jacobi	1,511	0,100	0,426	0,354	0,249	0,606	0,420	0,360		
	Jacobi SSE	0,147	1,027	0,073	2,068	0,091	1,659	0,242	0,624		
	Gaus-Seidel	0,207	1,000	0,207	1,000	0,207	1,000	0,257	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	0,662	0,313	0,194	1,067	0,119	1,739	0,240	1,071		
	Gaus-Seidel RS	0,094	2,202	0,049	4,224	0,066	3,136	0,208	1,236		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,061	3,393	0,044	4,705	0,067	3,090	0,201	1,279		
	Wavefront	0,245	0,845	1,856	0,112	3,700	0,056	14,000	0,018		
	Wavefront Cache	0,249	0,831	2,100	0,099	4,200	0,049	17,000	0,015		

Abbildung 12: Performance für size=65 auf sn02(8 Kerne).

		size=128											
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=16					
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup				
GCC	Jacobi Sequential	1,8	1	1,8	1	1,8	1	1,8	1				
	Jacobi	3,4	0,53	1	1,8	1	1,8	3,7	0,49				
	Jacobi SSE	1,8	1	0,5	3,6	0,4	4,5	2,7	0,67				
	Gaus-Seidel	2,7	1	2,7	1	2,7	1	2,7	1				
	Gaus-Seidel Naiv	2,7	1	0,7	3,86	0,44	6,14	2	1,35				
	Gaus-Seidel RS	1,3	2,08	0,4	6,75	0,31	8,68	2,1	1,29				
	Gaus-Seidel RS SSE	1,1	2,45	0,3	9	0,29	9,25	2,1	1,29				
	Wavefront	2,1	1,29	9,2	0,29	16,4	0,16	224	0,01				
	Wavefront Cache	2	1,35	10,6	0,25	18,4	0,15	261	0,01				
ICC	Jacobi Sequential	1,8	1	1,8	1	1,8	1	1,8	1				
	Jacobi	19,7	0,09	5	0,36	2,6	0,69	4,3	0,42				
	Jacobi SSE	1,7	1,06	0,52	3,46	0,41	4,42	1,1	1,64				
	Gaus-Seidel	2,7	1	2,7	1	2,7	1	2,7	1				
	Gaus-Seidel Naiv	8,9	0,3	2,4	1,13	1,29	2,09	2,2	1,23				
	Gaus-Seidel RS	1,1	2,45	0,37	7,3	0,32	8,54	0,9	3				
	Gaus-Seidel RS SSE	1,08	2,5	0,37	7,28	0,32	8,52	0,9	3				
	Wavefront	3	0,9	12	0,23	24	0,11	94	0,03				
	Wavefront Cache	2	1,35	13	0,21	28	0,1	108	0,03				

Abbildung 13: Performance für size=128 auf sn02(8 Kerne).

		size=256											
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8							
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup						
GCC	Jacobi Sequential	27	1	27	1	27	1						
	Jacobi	46	0,59	12	2,25	6,3	4,29						
	Jacobi SSE	25	1,08	6,4	4,22	3,7	7,3						
	Gaus-Seidel	36	1	36,6	1	36,4	1						
	Gaus-Seidel Naiv	35	1,03	9	4,07	4,8	7,58						
	Gaus-Seidel RS	18	2	4,8	7,63	2,7	13,48						
	Gaus-Seidel RS SSE	14	2,57	4	9,15	2,3	15,83						
	Wavefront	33	1,09	64	0,57	107	0,34						
	Wavefront Cache	21	1,71	78	0,47	128	0,28						
ICC	Jacobi Sequential	27	1	27	1	27	1						
	Jacobi	277	0,1	71	0,38	36	0,75						
	Jacobi SSE	22,5	1,2	6,2	4,35	3,6	7,5						
	Gaus-Seidel	36	1	37	1	37	1						
	Gaus-Seidel Naiv	127	0,28	33	1,12	17	2,18						
	Gaus-Seidel RS	14,4	2,5	4	9,25	2,4	15,42						
	Gaus-Seidel RS SSE	13,9	2,59	4	9,25	2,4	15,42						
	Wavefront	28	1,29	81	0,46	166	0,22						
	Wavefront Cache	22,5	1,6	96	0,39	197	0,19						

Abbildung 14: Performance für size=256 auf sn02(8 Kerne).

		size=3											
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=12		Thread Zahl=16			
		Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	0,000		0,000		0,050		0,000		0,000			
	Jacobi	0,002		0,017		0,025		0,409		0,044			
	Jacobi SSE	0,002		0,013		0,003		0,035		0,035			
	Gaus-Seidel	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000			
	Gaus-Seidel Naiv	0,002		0,015		0,003		0,042		0,044			
	Gaus-Seidel RS	0,003		0,019		0,037		0,052		0,055			
	Gaus-Seidel RS SSE	0,003		0,019		0,036		0,053		0,057			
	Wavefront	0,002		0,013		0,021		0,035		0,037			
	Wavefront Cache	0,002		0,009		0,016		0,026		0,027			
ICC	Jacobi Sequential	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000			
	Jacobi	0,002		0,018		0,031		0,050		0,070			
	Jacobi SSE	0,002		0,017		0,028		0,049		0,076			
	Gaus-Seidel	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000			
	Gaus-Seidel Naiv	0,002		0,017		0,028		0,049		0,074			
	Gaus-Seidel RS	0,003		0,026		0,048		0,087		0,113			
	Gaus-Seidel RS SSE	0,003		0,030		0,048		0,089		0,113			
	Wavefront	0,002		0,018		0,030		0,054		0,076			
	Wavefront Cache	0,002		0,014		0,020		0,035		0,047			

Abbildung 15: Performance für size=3 auf sn07(12 Kerne).

		size=5											
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=12		Thread Zahl=16			
		Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup	Zeit in ms	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	0,006		0,006		0,006		0,006		0,006			
	Jacobi	0,029		0,210		0,370		0,510		0,800			
	Jacobi SSE	0,024		0,170		0,280		0,390		0,618			
	Gaus-Seidel	0,002		0,002		0,002		0,002		0,002			
	Gaus-Seidel Naiv	0,016		0,124		0,331		0,440		0,700			
	Gaus-Seidel RS	0,025		0,156		0,270		0,400		0,606			
	Gaus-Seidel RS SSE	0,025		0,161		0,280		0,390		0,618			
	Wavefront	0,058		0,430		0,640		0,980		1,400			
	Wavefront Cache	0,060		-		0,043		0,056		0,083			
ICC	Jacobi Sequential	0,005		0,005		0,005		0,004		0,003			
	Jacobi	0,035		0,240		0,490		0,750		1,300			
	Jacobi SSE	0,022		0,230		0,510		0,800		1,300			
	Gaus-Seidel	0,002		0,002		0,002		0,002		0,002			
	Gaus-Seidel Naiv	0,018		0,145		0,410		0,780		1,000			
	Gaus-Seidel RS	0,022		0,235		0,510		0,750		1,350			
	Gaus-Seidel RS SSE	0,021		0,300		0,500		0,730		1,400			
	Wavefront	0,051		0,600		1,200		1,900		3,350			
	Wavefront Cache	0,053		0,500		1,000		0,108		0,166			

Abbildung 16: Performance für size=5 auf sn07(12 Kerne).

		size=32											
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=12		Thread Zahl=16			
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	0,014	1,000	0,014	1,000	0,014	1,000	0,014	1,000	0,014	1,000		
	Jacobi	0,020	0,700	0,020	0,700	0,023	0,609	0,027	0,519	0,050	0,280		
	Jacobi SSE	0,011	1,273	0,012	1,167	0,020	0,700	0,025	0,560	0,037	0,378		
	Gaus-Seidel	0,015	1,000	0,015	1,000	0,015	1,000	0,015	1,000	0,015	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	0,015	1,000	0,013	1,154	0,015	1,000	0,020	0,750	0,031	0,484		
	Gaus-Seidel RS	0,009	1,667	0,010	1,500	0,016	0,938	0,022	0,682	0,032	0,469		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,007	2,143	0,010	1,500	0,015	1,000	0,021	0,714	0,031	0,484		
	Wavefront	0,031	0,484	0,218	0,069	0,044	0,345	0,562	0,027	0,860	0,017		
	Wavefront Cache	0,033	0,455	0,248	0,060	0,503	0,030	0,064	0,234	0,927	0,016		
ICC	Jacobi Sequential	0,014	1,000	0,014	1,000	0,014	1,000	0,014	1,000	0,014	1,000		
	Jacobi	0,096	0,146	0,032	0,438	0,035	0,400	0,043	0,326	0,064	0,219		
	Jacobi SSE	0,010	1,400	0,011	1,273	0,025	0,560	0,044	0,318	0,070	0,200		
	Gaus-Seidel	0,015	1,000	0,015	1,000	0,015	1,000	0,015	1,000	0,015	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	0,044	0,341	0,018	0,833	0,020	0,750	0,029	0,517	0,050	0,300		
	Gaus-Seidel RS	0,008	1,875	0,011	1,364	0,027	0,556	0,038	0,395	0,062	0,242		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,007	2,143	0,010	1,500	0,025	0,600	0,043	0,349	0,067	0,224		
	Wavefront	0,030	0,500	0,264	0,057	0,501	0,030	1,200	0,013	1,800	0,008		
	Wavefront Cache	0,031	0,484	0,301	0,050	0,647	0,023	1,400	0,011	2,100	0,007		

Abbildung 17: Performance für size=32 auf sn07(12 Kerne).

		size=65											
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=12		Thread Zahl=16			
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	0,176	1,000	0,174	1,000	0,174	1,000	0,175	1,000	0,174	1,000		
	Jacobi	0,349	0,504	0,139	1,252	0,125	1,392	0,160	1,094	0,160	1,088		
	Jacobi SSE	0,186	0,946	0,085	2,047	0,100	1,740	0,140	1,250	0,170	1,024		
	Gaus-Seidel	0,242	1,000	0,245	1,000	0,243	1,000	0,244	1,000	0,243	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	0,252	0,960	0,087	2,816	0,079	3,076	0,080	3,050	0,085	2,859		
	Gaus-Seidel RS	0,135	1,793	0,065	3,769	0,090	2,700	0,110	2,218	0,113	2,150		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,075	3,227	0,050	4,900	0,070	3,471	0,100	2,440	0,120	2,025		
	Wavefront	0,282	0,858	1,750	0,140	3,400	0,071	4,800	0,051	6,500	0,037		
	Wavefront Cache	0,300	0,807	1,890	0,130	4,000	0,061	5,500	0,044	7,500	0,032		
ICC	Jacobi Sequential	0,185	1,000	0,185	1,000	0,185	1,000	0,185	1,000	0,185	1,000		
	Jacobi	1,850	0,100	0,500	0,370	0,325	0,569	0,315	0,587	0,370	0,500		
	Jacobi SSE	0,179	1,034	0,090	2,056	0,128	1,445	0,202	0,916	0,280	0,661		
	Gaus-Seidel	0,249	1,000	0,249	1,000	0,248	1,004	0,248	1,004	0,248	1,004		
	Gaus-Seidel Naiv	0,795	0,313	0,249	1,000	0,157	1,586	0,159	1,566	0,195	1,277		
	Gaus-Seidel RS	0,113	2,204	0,073	3,411	0,104	2,394	0,170	1,465	0,250	0,996		
	Gaus-Seidel RS SSE	0,074	3,365	0,070	3,557	0,104	2,394	0,195	1,277	0,255	0,976		
	Wavefront	0,301	0,827	2,700	0,092	6,000	0,042	10,000	0,025	14,000	0,018		
	Wavefront Cache	0,296	0,841	2,900	0,086	6,700	0,037	11,500	0,022	17,000	0,015		

Abbildung 18: Performance für size=65 auf sn07(12 Kerne).

		size=128											
		Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8		Thread Zahl=12		Thread Zahl=16			
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup		
GCC	Jacobi Sequential	2,150	1,000	2,150	1,000	2,150	1,000	2,150	1,000	2,150	1,000		
	Jacobi	4,000	0,538	1,100	1,955	0,730	2,945	0,650	3,308	0,900	2,389		
	Jacobi SSE	2,150	1,000	0,670	3,209	0,550	3,909	0,530	4,057	0,700	3,071		
	Gaus-Seidel	3,200	1,000	3,200	1,000	3,200	1,000	3,200	1,000	3,200	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	3,200	1,000	0,900	3,556	0,550	5,818	0,470	6,809	0,480	6,667		
	Gaus-Seidel RS	1,640	1,951	0,500	6,400	0,410	7,805	0,420	7,619	0,510	6,275		
	Gaus-Seidel RS SSE	1,354	2,363	0,440	7,273	0,400	8,000	0,440	7,273	0,510	6,275		
	Wavefront	2,600	1,231	11,500	0,278	22,000	0,145	31,000	0,103	42,000	0,076		
	Wavefront Cache	2,470	1,296	12,500	0,256	27,000	0,119	37,000	0,086	51,000	0,063		
ICC	Jacobi Sequential	2,200	0,977	2,200	0,977	2,200	0,977	2,200	0,977	2,200	0,977		
	Jacobi	24,000	0,090	6,200	0,347	3,200	0,672	2,200	0,977	2,000	1,075		
	Jacobi SSE	2,000	1,075	0,700	3,071	0,601	3,577	0,700	3,071	1,000	2,150		
	Gaus-Seidel	3,200	1,000	3,200	1,000	3,200	1,000	3,200	1,000	3,200	1,000		
	Gaus-Seidel Naiv	10,700	0,299	2,940	1,088	1,600	2,000	1,200	2,667	1,200	2,667		
	Gaus-Seidel RS	1,300	2,462	0,470	6,809	0,480	6,667	0,500	6,400	0,900	3,556		
	Gaus-Seidel RS SSE	1,290	2,481	0,480	6,667	0,480	6,667	0,588	5,442	0,910	3,516		
	Wavefront	3,700	0,865	18,000	0,178	40,000	0,080	65,000	0,049	103,000	0,031		
	Wavefront Cache	2,400	1,333	21,000	0,152	45,000	0,071	69,000	0,046	117,000	0,027		

Abbildung 19: Performance für size=128 auf sn07(12 Kerne).

		Thread Zahl =4		Thread Zahl = 8	
		Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup
GCC	Jacobi Sequential	70,5	1	47,9	1
	Jacobi	19	3,71	9,5	5,04
	Jacobi SSE	10,6	6,65	5,4	8,87
	Gaus-Seidel	135	1	133	1
	Gaus-Seidel Naiv	32,1	4,21	16	8,31
	Gaus-Seidel RS	16,3	8,28	8,2	16,22
	Gaus-Seidel RS SSE	13,4	10,07	6,9	19,28
	Wavefront	98	1,38	113	1,18
	Wavefront Cache	77	1,75	113	1,18
ICC	Jacobi Sequential	72	1	49	1
	Jacobi	125	0,58	62	0,79
	Jacobi SSE	9,4	7,66	4,7	10,43
	Gaus-Seidel	135	1	136	1
	Gaus-Seidel Naiv	125	1,08	62	2,19
	Gaus-Seidel RS	13	10,38	6,7	20,3
	Gaus-Seidel RS SSE	12	11,25	6,4	21,25
	Wavefront	116	1,16	160	0,85
	Wavefront Cache	94	1,44	157	0,87

Abbildung 20: Performance für size=1024 auf sn02(8 Kerne). Ab hier macht Wavefront zumindest etwas sinnvolles.

der Matrix sind.

Bei der Wavefront Cache Lösung muss bei jeder Indexberechnung die Eingangspermutation, welche die Diagonalen den Zeilen des Arrays zuweist umkehren um die Indexe zu berechnen. Hierbei möchte ich auf die grandios benannten Variablen `hack` und `hack2` eingehen. Diese werden benutzt um die Elemente um das zu berechnende Element zu adressieren. `hack` wird 1 Durchgang vor der Diagonalen zu 1, weil sich ab hier die Abhängigkeit der Elemente um 1 verschiebt. Das selbe gilt für `hack2` ab der mittleren Diagonalen.

Da der Ansatz nicht so viel schneller wurde, dass man Rot schwarz hätte schlagen können, wurde der Algorithmus nicht platz effizient implementiert und die Matrixgröße ist größer als bei den anderen Algorithmen. Es wäre jedoch auch möglich gewesen dieselbe Matrix Größe zu verwenden.

0	1	2	3	4		0				
5	6	7	8	9		5	1			
10	11	12	13	14		10	6	2		
15	16	17	18	19		15	11	7	3	
20	21	22	23	24		20	16	12	8	4
						21	17	13	9	
						22	18	14		
						23	19			
						24				

Abbildung 21: Veranschaulichung der Permutation, welche verwendet wird sowie der Verschiebung der Indexe anhand eines Beispiels. `hack` ist dabei blau und `hack2` rot.

4 Methodenwahl

Da das Gauß-Seidel-Verfahren schneller konvergiert als das Jacobi-Verfahren (siehe Abschnitt 1.3) und zudem unsere parallele Implementierung des Gauß-Seidel-Verfahrens mittels Rot-Schwarz-Verfahren TODO