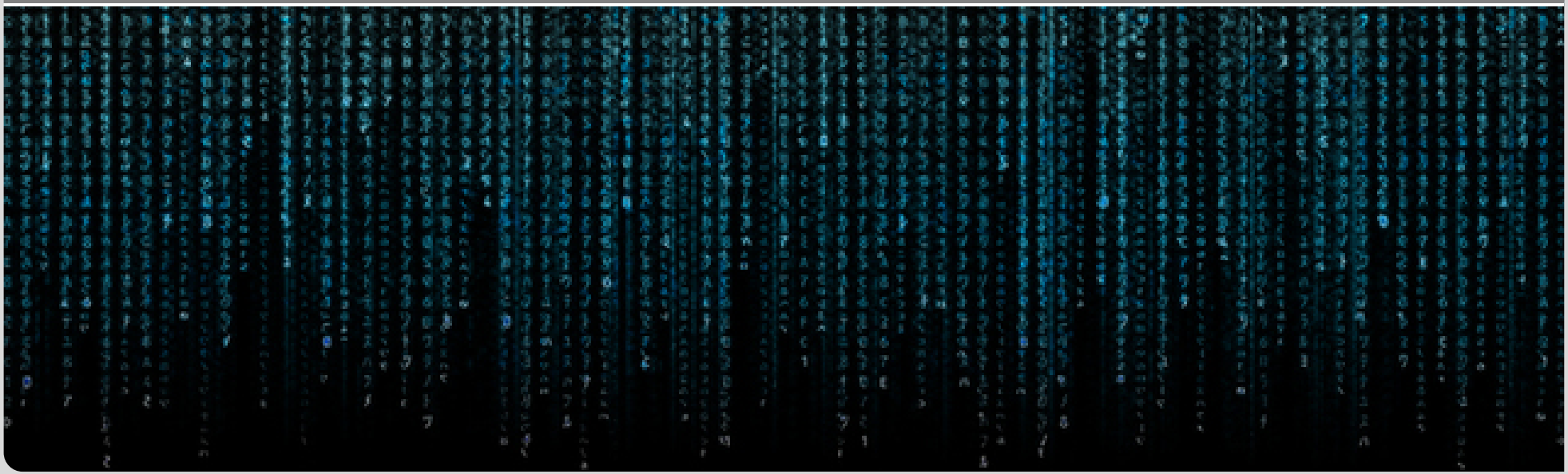
Karlsruher Institut für Technologie

Projekt 1 – Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren

Sarah Lutteropp und Johannes Sailer

Lehrstuhl für Rechnerarchitektur und Parallelverarbeitung



Gliederung

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabenstellung

Mathematischer Hintergrund

Parallelisierung

Experimentelle Auswertung

Fazit

Aufgabenstellung

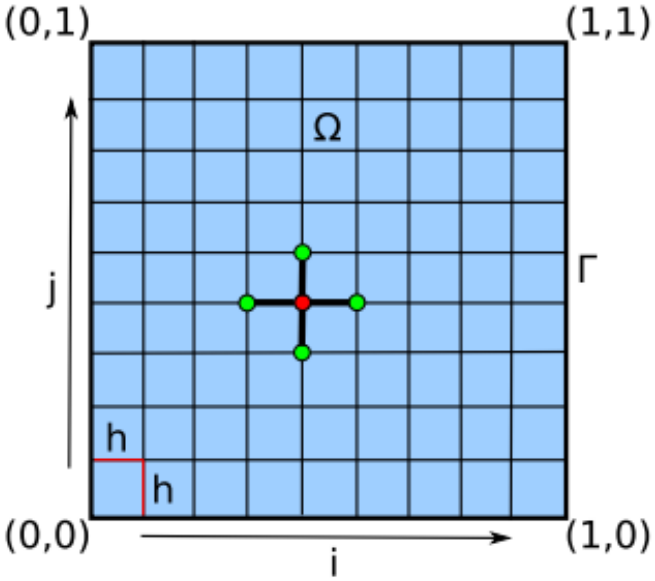
Approximation von Stoffkonzentrationen

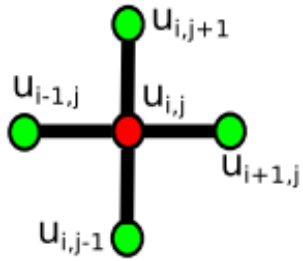
$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in (0,1)^2 \tag{1}$$

$$u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2 \backslash (0,1)^2 \tag{2}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Approximation von Stoffkonzentrationen





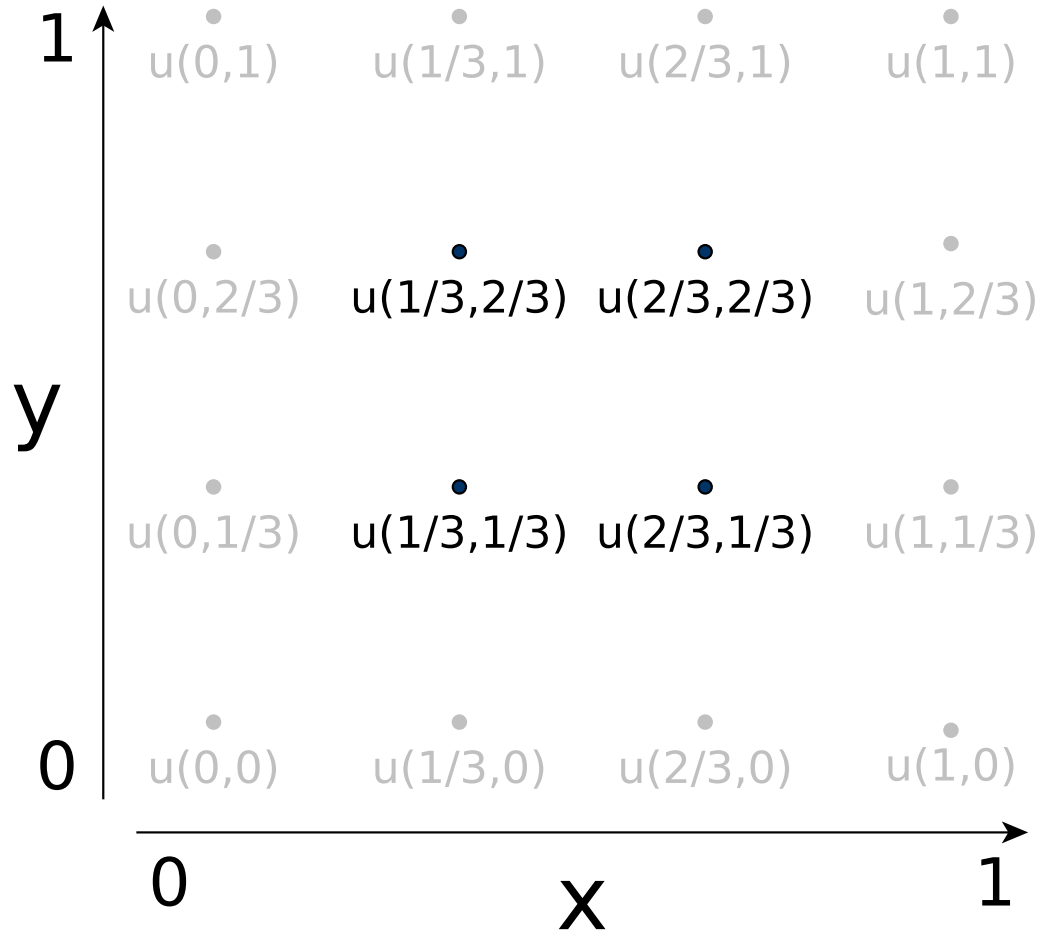
Approximation mit Methode der Finiten Differenzen

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} * \left(u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j} + h^2 f(x_i, y_j) \right)$$

$$-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} = h^2 f(x_i, y_j)$$

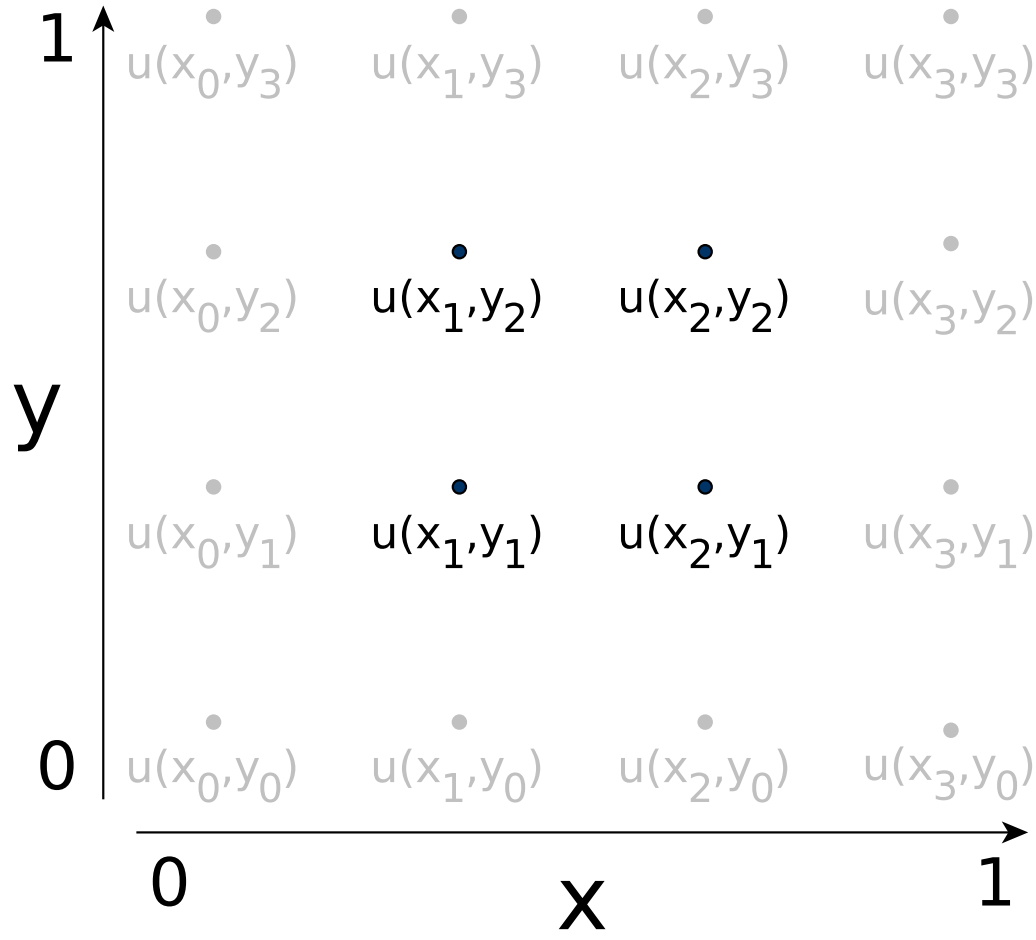
Konkretes Beispiel

Für $h = \frac{1}{3}$



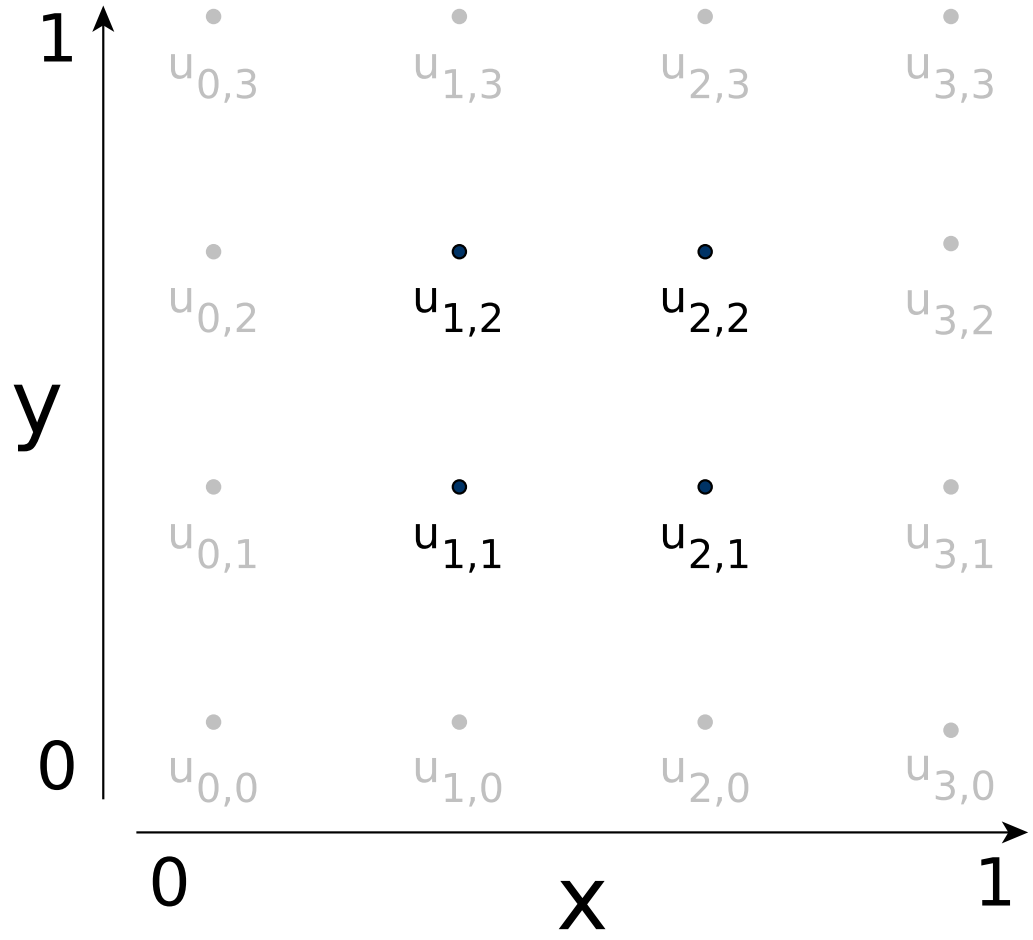
Konkretes Beispiel

Für $h = \frac{1}{3}$



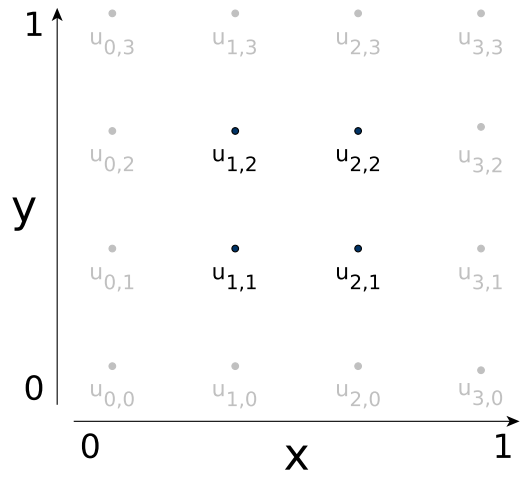
Konkretes Beispiel

Für $h = \frac{1}{3}$



Konkretes Beispiel

Für $h = \frac{1}{3}$



$$-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} = h^2 f(x_i, y_j)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \begin{pmatrix} f(1/3, 1/3) \\ f(1/3, 2/3) \\ f(2/3, 1/3) \\ f(2/3, 2/3) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Löse $Au = b$

Warum nicht einfach gaußen?

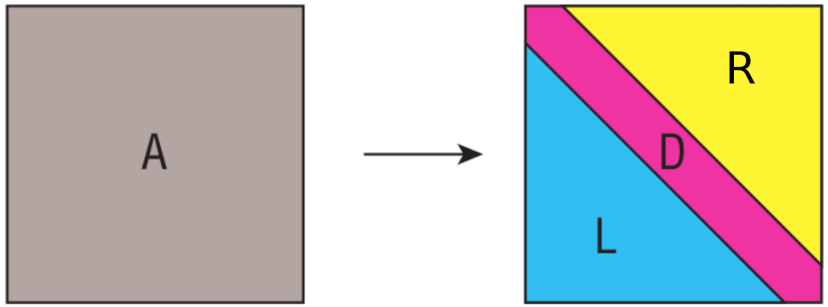
Karlsruher Institut für Technologie

Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist . . .

- anfällig für Rechenfehler
- schlecht parallelisierbar
- langsam für viele Unbekannte
- schlechte Wahl bei dünn besetzter Matrix

Im Folgenden: **Iterative Verfahren**!

Herleitung der Verfahren

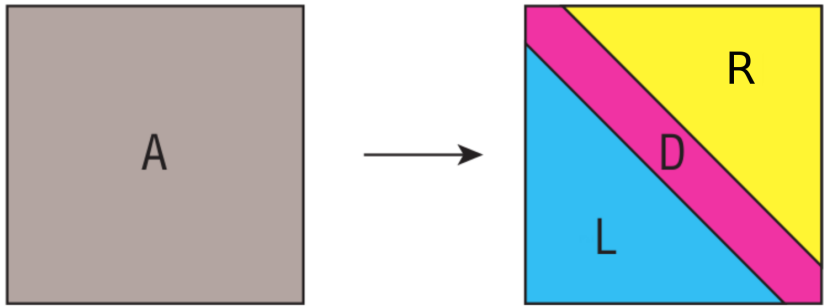


$$Au = b$$

$$\Leftrightarrow (D + L + R)u = b \Leftrightarrow \ldots$$

- Jacobi-Verfahren: $u^{(k)} = D^{-1}\left(b - (L + R)u^{(k-1)}\right)$
- Gauß-Seidel-Verfahren: $u^{(k)} = D^{-1}\left(b - Lu^{(k)} - Ru^{(k-1)}\right)$

Herleitung der Verfahren



- Jacobi-Verfahren:

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} * \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} u_j^{(k-1)} \right) \quad \forall i = 1, \ldots, n^2$$

- Gauß-Seidel-Verfahren:

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} * \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n^2} a_{ij} * u_j^{(k-1)} \right) \quad \forall i = 1, \ldots, n^2$$

Unsere Lösungsmatrix U

Für $h = \frac{1}{3}$

Betrachte statt

$$u = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u_{0,0} & u_{1,0} & u_{2,0} & u_{3,0} \\ \hline u_{0,1} & u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} \\ \hline u_{0,2} & u_{1,2} & u_{2,2} & u_{3,2} \\ \hline u_{0,3} & u_{1,3} & u_{2,3} & u_{3,3} \\ \hline \end{array}$$

(Die Randeinträge sind hierbei 0)

Vorteil

- Jeder Eintrag in U entspricht einem Punkt im Gitter
- Parallelisierung intuitiver

Unser Abbruchkriterium

$$\frac{\sum_{i,j} |u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k-1)}|}{size * size} \leq \mathrm{TOL}$$

Vorteile

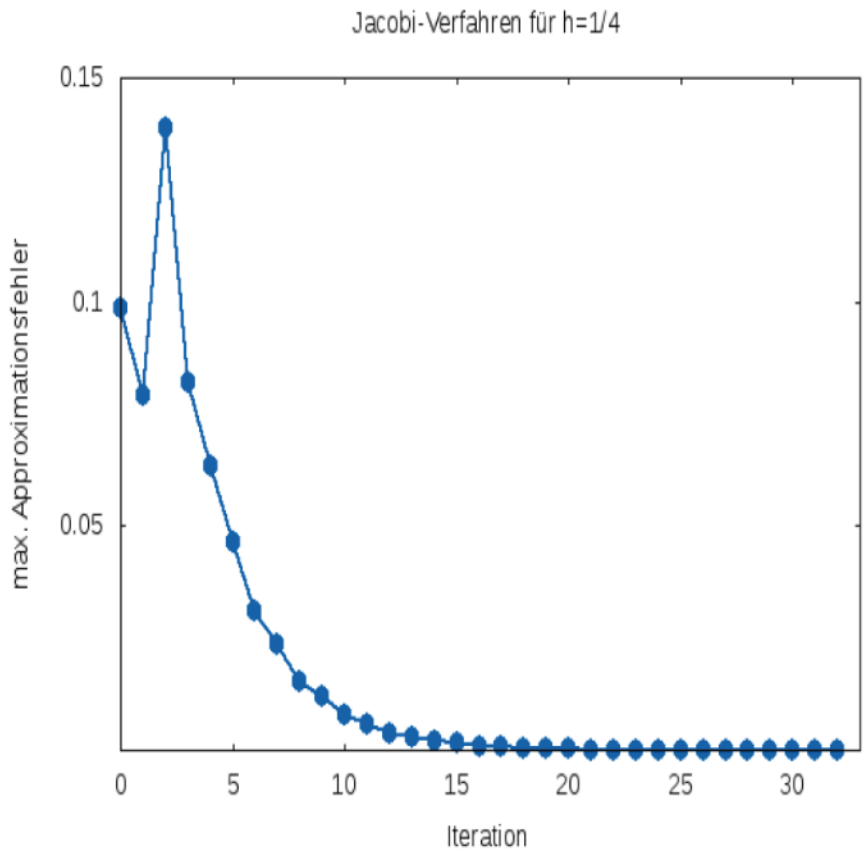
- Sprunglos
- Implementierung mit `#pragma omp reduce`

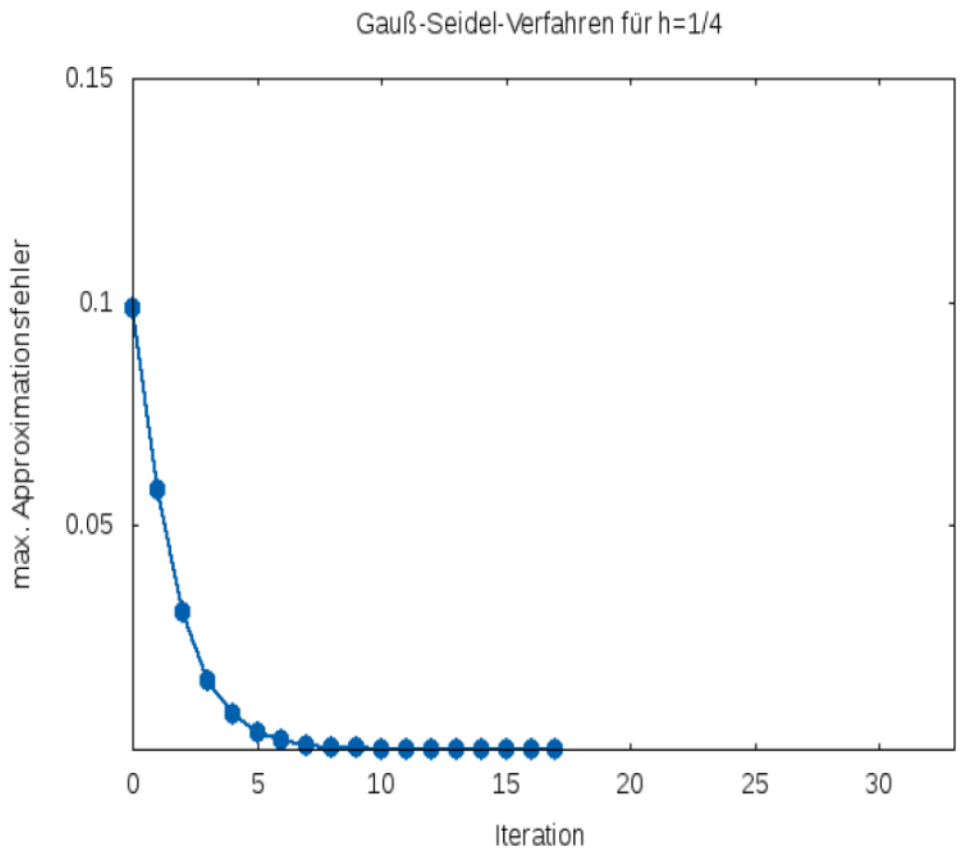
Nachteile

- Maximum der Differenzen wäre exakter

Unser Abbruchkriterium

Beide Verfahren konvergieren.





Parallele Ansätze – Jacobi-Verfahren

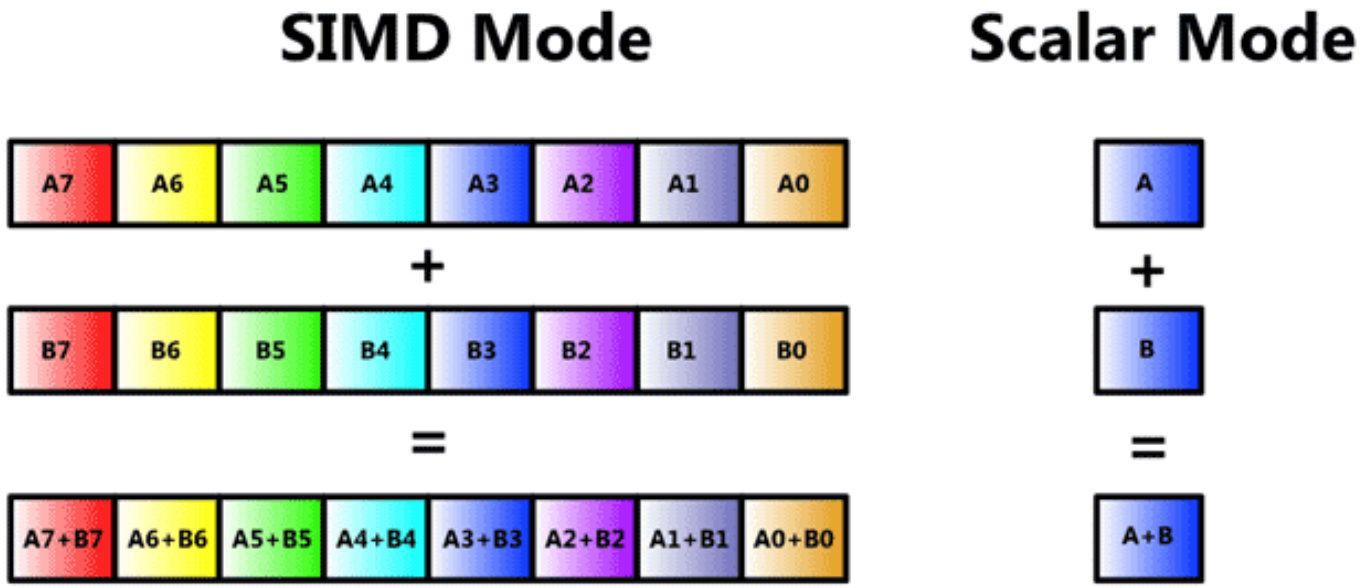
Keine Abhängigkeiten innerhalb einer Iteration

```
#pragma omp parallel for private(j, i)  reduction(+:diff) collapse(2)
for (j = 1; j < size - 1; j++)
{
    for (i = 1; i < size - 1; i++)
    {
        a1[CO(i,j)] = a0[CO(i, j - 1)]
                    + a0[CO(i - 1, j)]
                    + a0[CO(i, j + 1)]
                    + a0[CO(i + 1, j)]
                    + functionTable[CO(i, j)];
        a1[CO(i,j)] *= 0.25;

        diff += fabsf(a1[CO(i,j)] - a0[CO(i,j)]);
    }
}
```

Parallele Ansätze – Jacobi-Verfahren

Zusätzliche Optimierung: SSE-Vektorinstruktionen

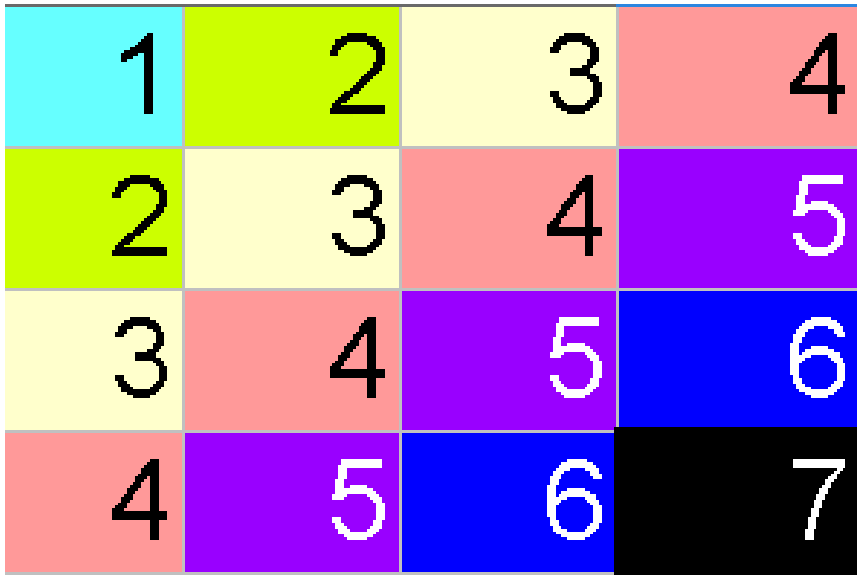


Parallele Ansätze – Gauß-Seidel-Wavefront

- Abhängigkeiten innerhalb einer Iteration:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + h^2 f(x_i, y_j)$$

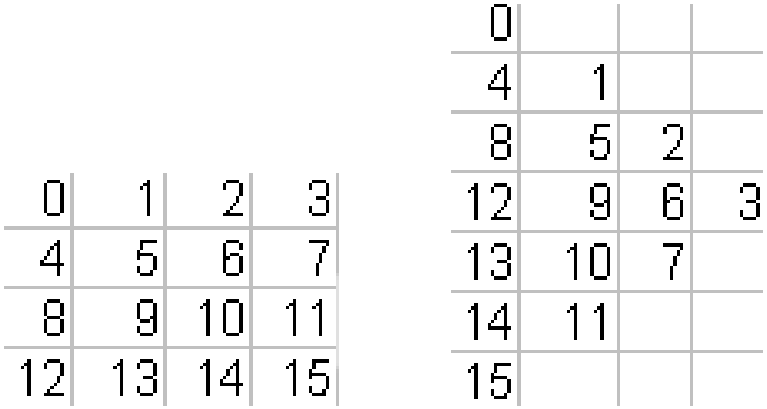
- 1. Möglichkeit: Wavefront



Parallele Ansätze – Gauß-Seidel-Wavefront

Nachteile Wavefront

- Schlecht für Cache

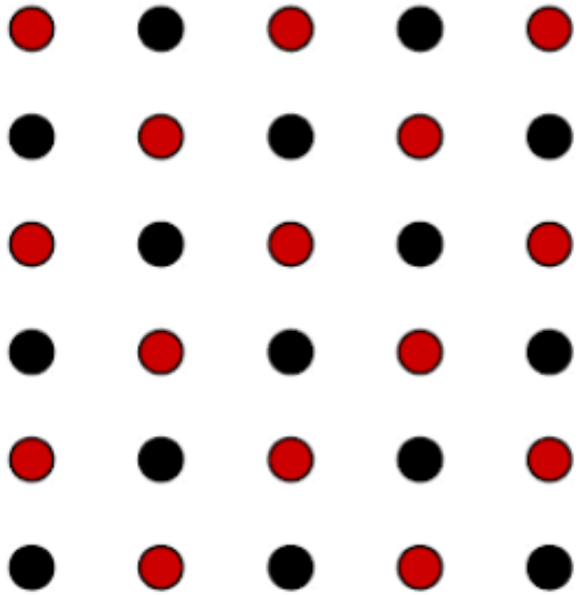


- Aufwändige Berechnung der Indizes
- Geringe Parallelität bei kleinen Diagonalen
- Allgemein großer Overhead

Parallele Ansätze – Gauß-Seidel Rot-Schwarz

Zweite Möglichkeit: Rot-Schwarz-Iteration

Färben der Matrixeinträge nach folgendem Schema:

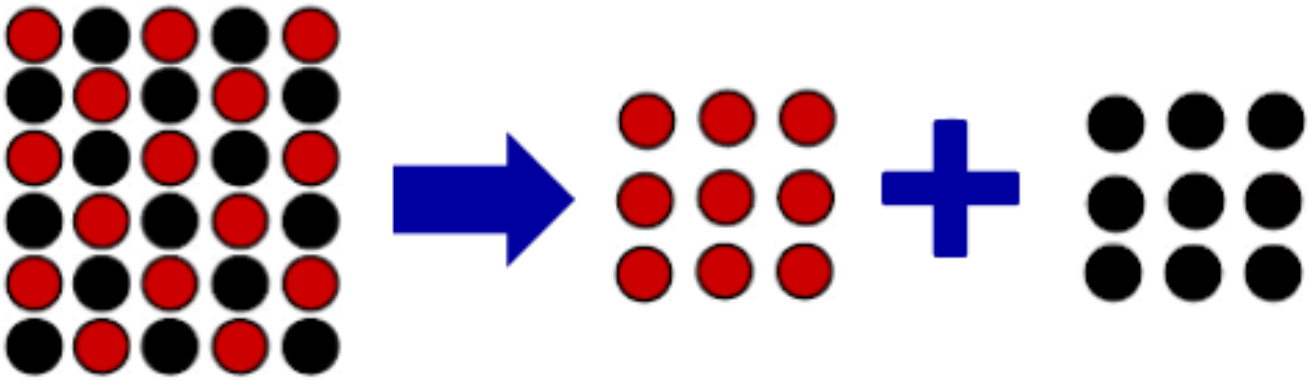


1. Berechnen aller roten Einträge
2. Berechnen aller schwarzen Einträge

Parallele Ansätze – Gauß-Seidel Rot-Schwarz

Optimierung: Rot-Matrix und Schwarz-Matrix separat

- Cache-Effizienz
- Sehr einfache Berechnung der Indizes
- Beschleunigung mit SSE-Vektorinstruktionen



Parallele Ansätze – Gauß-Seidel Rot-Schwarz

Berechnung der Indizes, *size* ungerade für $size = 7$

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 3 & 7 & 10 & 14 & 17 & 21 \\ \hline
0 & 4 & 7 & 11 & 14 & 18 & 21 \\ \hline
1 & 4 & 8 & 11 & 15 & 18 & 22 \\ \hline
1 & 5 & 8 & 12 & 15 & 19 & 22 \\ \hline
2 & 5 & 9 & 12 & 16 & 19 & 23 \\ \hline
2 & 6 & 9 & 13 & 16 & 20 & 23 \\ \hline
3 & 6 & 10 & 13 & 17 & 20 & 24 \\ \hline
\end{array}$$

$\leftarrow: idx - \lceil \frac{size}{2} \rceil \quad \rightarrow: idx + \lfloor \frac{size}{2} \rfloor \quad \uparrow: idx - 1 \quad \downarrow: idx$

$\leftarrow: idx - \lfloor \frac{size}{2} \rfloor \quad \rightarrow: idx + \lceil \frac{size}{2} \rceil \quad \uparrow: idx \quad \downarrow: idx + 1$

Parallele Ansätze – Gauß-Seidel Rot-Schwarz

Berechnung der Indizes, *size* gerade für *size* = 6

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ \hline 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ \hline 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ \hline 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ \hline \end{array}$$

$\leftarrow: idx - \frac{size}{2}$ $\rightarrow: idx + \frac{size}{2}$ $\uparrow: idx - (1 - (j \mod 2))$ $\downarrow: idx + (j \mod 2)$

$\leftarrow: idx - \frac{size}{2}$ $\rightarrow: idx + \frac{size}{2}$ $\uparrow: idx - (j \mod 2)$ $\downarrow: idx + (1 - (j \mod 2))$

Loop-Unrolling vermeidet Modulo-Operation!

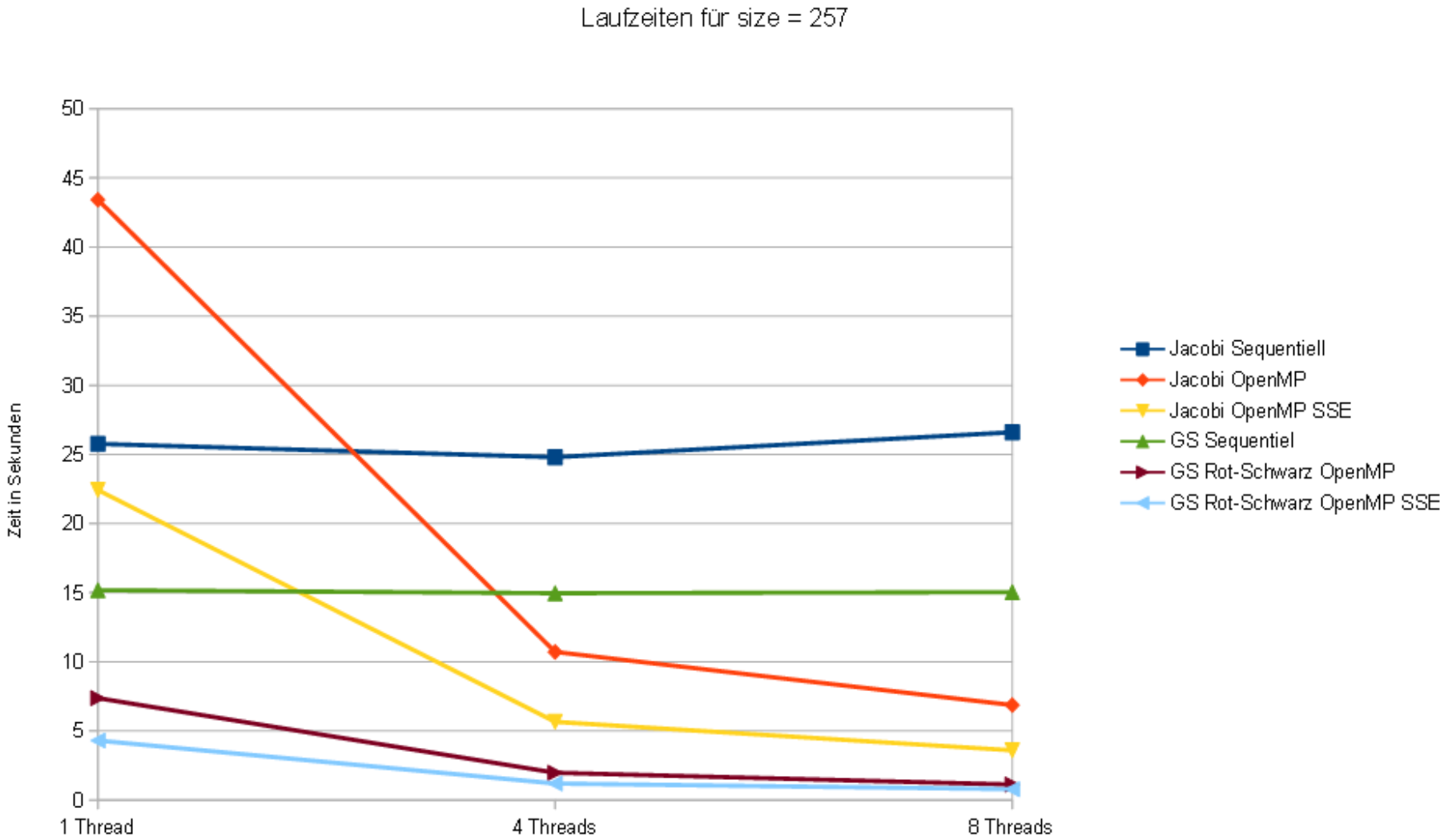
Auswertung ohne Abbruchkriterium

		size = 1024	
		Thread Zahl = 4	
		Zeit in Sekunden	Speedup
GCC	Jacobi Sequential	70,5	1
	Jacobi	19	3,71
	Jacobi SSE	10,6	6,65
	Gaus-Seidel	135	1
	Gaus-Seidel Naiv	32,1	4,21
	Gaus-Seidel RS	16,3	8,28
	Gaus-Seidel RS SSE	13,4	10,07
	Wavefront	98	1,38
	Wavefront Cache	77	1,75
ICC	Jacobi Sequential	72	1
	Jacobi	125	0,58
	Jacobi SSE	9,4	7,66
	Gaus-Seidel	135	1
	Gaus-Seidel Naiv	125	1,08
	Gaus-Seidel RS	13	10,38
	Gaus-Seidel RS SSE	12	11,25
	Wavefront	116	1,16
	Wavefront Cache	94	1,44

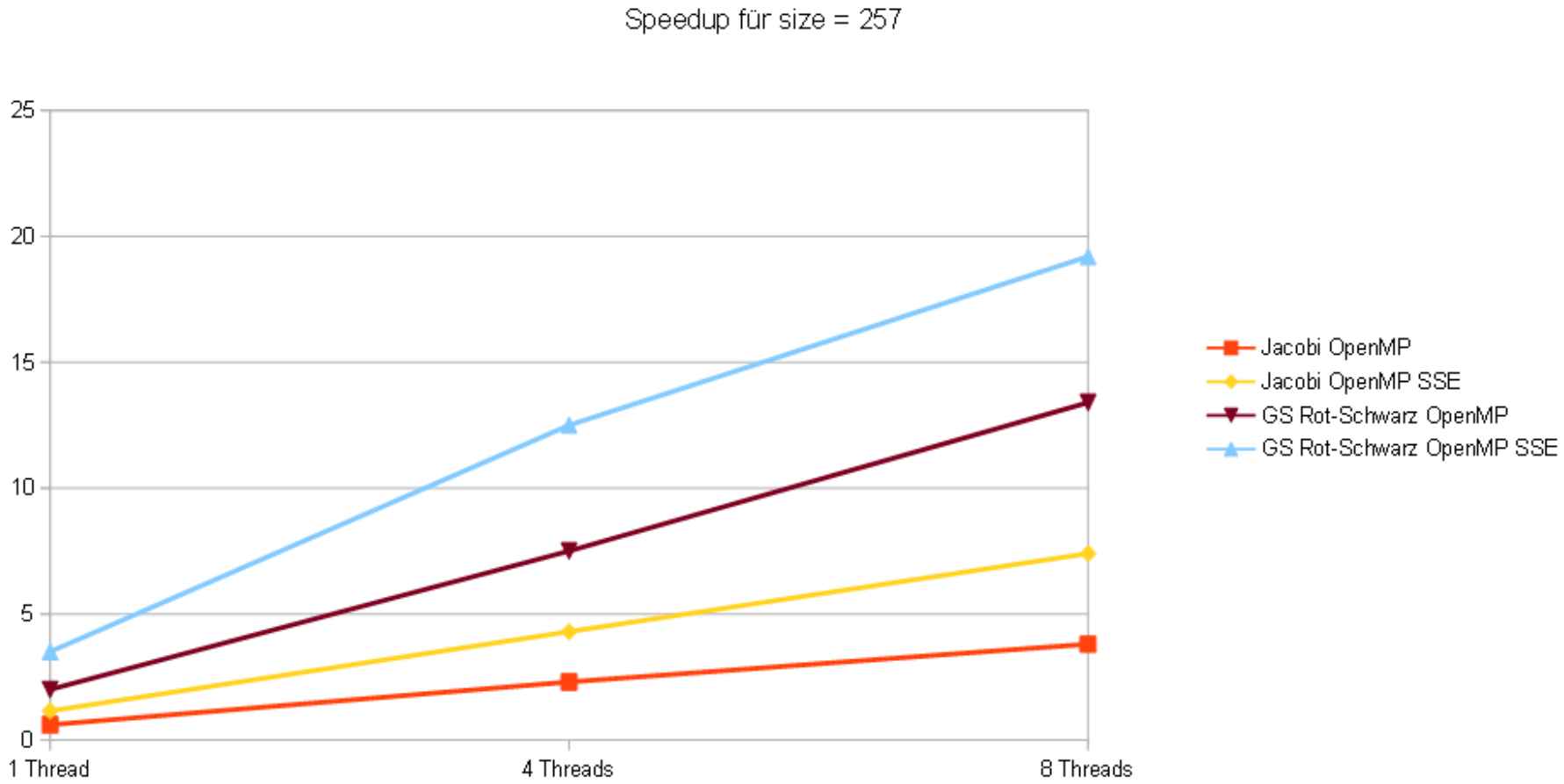
Auswertung mit Abbruchkriterium

	size=128					
	Thread Zahl=1		Thread Zahl=4		Thread Zahl=8	
	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup	Zeit in Sekunden	Speedup
Jacobi Sequential	2,150	1,000	2,150	1,000	2,150	1,000
Jacobi	4,000	0,538	1,100	1,955	0,730	2,945
Jacobi SSE	2,150	1,000	0,670	3,209	0,550	3,909
Gaus-Seidel	3,200	1,000	3,200	1,000	3,200	1,000
Gaus-Seidel Naiv	3,200	1,000	0,900	3,556	0,550	5,818
Gaus-Seidel RS	1,640	1,951	0,500	6,400	0,410	7,805
Gaus-Seidel RS SSE	1,354	2,363	0,440	7,273	0,400	8,000
Wavefront	2,600	1,231	11,500	0,278	22,000	0,145
Wavefront Cache	2,470	1,296	12,500	0,256	27,000	0,119

Auswertung mit Abbruchkriterium



Auswertung mit Abbruchkriterium



Auswertung mit Abbruchkriterium

Jacobi-Verfahren für *size* = 257

	1 Thread		4 Threads		8 Threads	
	Laufzeit	Speedup	Laufzeit	Speedup	Laufzeit	Speedup
Sequentiell	25.765 s	-	24.8 s	-	26.605 s	-
OpenMP	43.427 s	0.593	10.714 s	2.315	6.867 s	3.874
OpenMP + SSE	22.424 s	1.149	5.655 s	4.385	3.593 s	7.405

Gauß-Seidel-Verfahren für *size* = 257

	1 Thread			4 Threads			8 Threads		
	Laufzeit	Speedup	Effizienz	Laufzeit	Speedup	Effizienz	Laufzeit	Speedup	Effizienz
Sequentiell	15,179 s	-	-	14,963 s	-	-	15,036 s	-	-
Rot-Schwarz OpenMP	7,371 s	2,059	2,059	1,973 s	7,584	1,896	1,118 s	13,449	1,681
Rot-Schwarz OpenMP + SSE	4,303 s	3,528	3,528	1,196 s	12,511	3,128	0,782 s	19,228	2,404

Fazit

- Jacobi leichter zu parallelisieren
- Gauß-Seidel konvergiert doppelt so schnell
- Rot-Schwarz-Iteration liefert den besten Speedup
- Vektorisierung lohnt sich