FINITE DIFFERENCE METHOD
HEAT EQUATIONS

LƯU GIANG NAM

Faculty of Math & Computer Science
Ho Chi Minh City University of Science
VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY HO CHI MINH CITY

19th January 2018

1. Bài toán số 3
   - Xây dựng scheme cho bài toán với a và b hằng số, $c = 0$
   - Ví dụ 1
     - Phương pháp Backward
     - Phương pháp Crank - Nicolson
   - Ví dụ 2
     - Phương pháp Crank - Nicolson

2. Bài toán số 4
   - Xây dựng scheme cho bài toán với các hàm số $a, \ b, \ c$
   - Ví dụ 1
   - Ví dụ 1
     - Phương pháp Forward
     - Phương pháp Crank - Nicolson
     - Phương pháp Crank - Nicolson
   - Ví dụ 2
     - Phương pháp Backward
     - Phương pháp Crank - Nicolson

Phát biểu bài toán I

Bài toán: Với $a(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t),\ f(x,t) \in L^2(\Omega)$ ta xét bài toán sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla.\left(a(x,t)\nabla u(x,t)\right) + \nabla\left(b(x,t)u(x,t)\right) + c(x,t)u(x,t) + f(x,t),\ \forall\ (x,t) \in [0,1] \times [0,T]$$

với điều kiện biên là

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t),\ \forall t \in [0,1] \tag{1}$$

và điều kiện đầu là

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0,1] \tag{2}$$

Chia lưới I

Ta sẽ xét một lưới đều với $N_x + 1$ điểm x_i với $i = 0, 1, ..., N_x$ với khoảng cách là $h = \dfrac{1}{N_x}$. Trên trục thời gian ta cũng chia $[0, T]$ thành N_t khoảng với độ đo mỗi khoảng là $k = \dfrac{T}{N_t}$.

Khi đó ta có:

$$x_i = ih, \quad \text{và} \quad t_n = nk \tag{3}$$

Đặt $U_i^n = u(x_i, t_n)$ là giá trị xấp xỉ trên lưới tại điểm (x_i, t_n).
Ta sẽ tính toán tổng quát bằng phương pháp θ tổng quát.

a và b hằng số, $c = 0$ I

Khi này bài toán 3 của project:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla.\left(a\nabla u(x,t)\right) + \nabla\left(bu(x,t)\right) + f(x,t) \\ u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t), \ \forall t \in [0,1] \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = au''(x,t) + bu'(x,t) + f(x,t)$$

Phân tích các đạo hàm bằng các dùng đạo hàm tích như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = au''(x,t) + b(x,t)u'(x,t) + f(x,t)$$

a và b hằng số, $c = 0$ I

Xấp xỉ các đạo hàm ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} + O(k) \tag{5}$$

$$u''(x_i, t_n) = (1-\theta)\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} + \theta\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2) \tag{6}$$

$$u'(x_i, t_n) = (1-\theta)\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \theta\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} + O(h^2) \tag{7}$$

a và b hằng số, $c = 0$ I

Thay vào ta có:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} =$$
$$= a\left((1-\theta)\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} + \theta\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2}\right)$$
$$+ b\left((1-\theta)\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \theta\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h}\right) + F_i^n$$

Rút gọn lại ta có:

$$U_i^{n+1} - U_i^n = \frac{ak}{h^2}(1-\theta)\left(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n\right)$$
$$+ \frac{ak}{h^2}\theta\left(U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}\right)$$
$$+ \frac{bk}{2h}(1-\theta)\left(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n\right) + \frac{bk}{2h}\theta\left(U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}\right) + kF_i^n$$

a và b hằng số, $c = 0$ I

Chuyển vế:

$$U_{i-1}^{n+1}\left(-\frac{ak\theta}{h^2}+\frac{bk\theta}{2h}\right)+U_i^{n+1}\left(1+2\frac{ak\theta}{h^2}\right)+U_{i+1}^{n+1}\left(-\frac{ak\theta}{h^2}-\frac{bk\theta}{2h}\right)$$
$$=U_{i-1}^{n}\left(\frac{ak(1-\theta)}{h^2}-\frac{bk(1-\theta)}{2h}\right)+U_i^{n+1}\left(1-2\frac{ak(1-\theta)}{h^2}\right)$$
$$+U_{i+1}^{n+1}\left(\frac{ak(1-\theta)}{h^2}+\frac{bk(1-\theta)}{2h}\right)+kF_i^n$$

Đặt:

$$r_1=\frac{ak}{h^2}-\frac{bk}{2h} \quad (8)$$
$$r_2=-2\frac{ak}{h^2} \quad (9)$$
$$r_3=\frac{ak}{h^2}+\frac{bk}{2h} \quad (10)$$

a và b hằng số, $c = 0$ I

$$A = \begin{bmatrix} r_2 & r_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_1 & r_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Khi đó bài toán thành:

$$(I - \theta A)U^{n+1} = (I + (1-\theta)A)U^n + F^n \tag{12}$$

a và b hằng số, $c = 0$ I

với

$$F = \begin{pmatrix} kf(x_1, t_n) + \theta r_1 g_0(t_{n+1}) + (1-\theta) r_1 g_0(t_n) \\ kf(x_2, t_n) \\ \vdots \\ kf(x_{N_x-2}, t_n) \\ kf(x_{N_x-1}, t_n) + \theta r_3 g_1(t_{n+1}) + (1-\theta) r_3 g_1(t_n) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Ta sẽ giải bài toán trên với các θ bằng 2 ví dụ sau:

Ví dụ 1 bài toán 3 I

Ví dụ 1: Xét bài toán:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla.\left(a\nabla u(x,t)\right) + \nabla\left(bu(x,t)\right) + f(x,t) \\ u(0,t) = e^{-2t}, \quad u(1,t) = 2e^{-2t}, \ \forall t \in [0,1] \\ u(x,0) = x^2 + 1, \quad \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{14}$$

với

$$f(x,t) = -2e^{-2t}(x^2+1) - 2a.e^{-2t} - 2b.xe^{-2t} \tag{15}$$

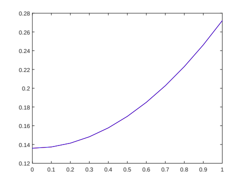
với nghiệm chính xác là

$$u(x,t) = (x^2+1)e^{-2t} \tag{16}$$

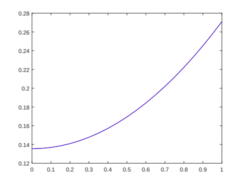
và các giá trị a, b được thay đổi qua các trường hợp sau:

Ví dụ 1 Backward I

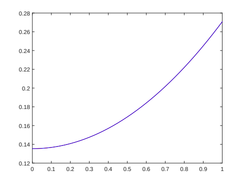
Trường hợp $a = 10, \ b = 1$:



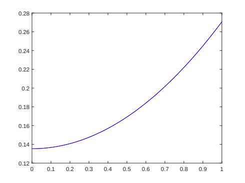
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

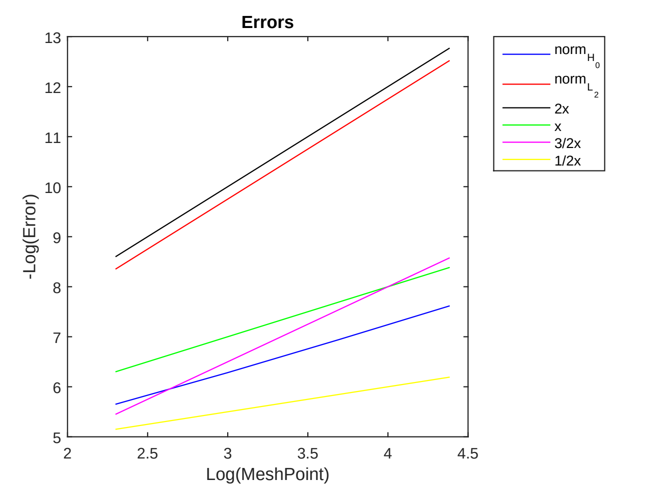


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Ví dụ 1 Backward I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 1 với $a/_b = 10$ của Backward Method

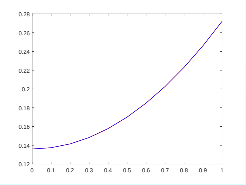
Ví dụ 1 Backward I

Lần lập	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.025901902876700	0.234629803562319 e-03
0.05	0.013854927087606	0.058710601324066 e-03
0.025	0.007169666660734	0.014681187865123 e-03
0.0125	0.003645778744241	0.003670521585877 e-03

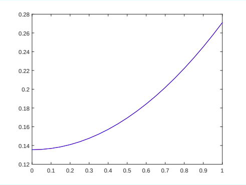
Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 1 với $a/_b = 10$ Backward Method

Ví dụ 1 Backward I

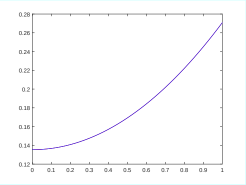
Trường hợp $a = 100, \;\; b = 1$:



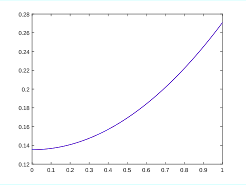
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

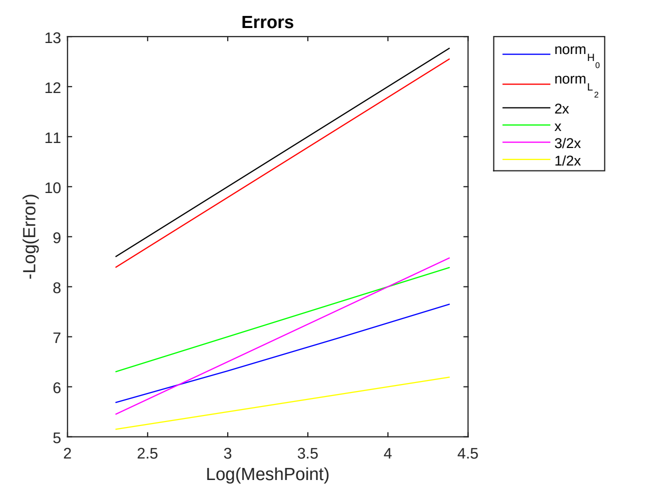


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Ví dụ 1 Backward I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 1 với $a/_b = 100$ của Backward Method

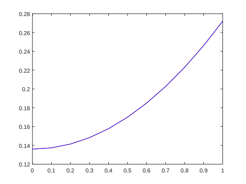
Ví dụ 1 Backward I

Lần lặp	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.025038390445888	0.226848028568571 e-03
0.05	0.013387392301525	0.056736511416229 e-03
0.025	0.006927518538069	0.014186768889234 e-03
0.0125	0.003522722669261	0.003546897321327 e-03

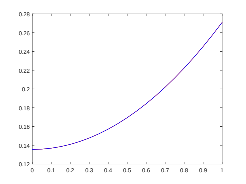
Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 1 với $a/_b = 100$ Backward Method

Ví dụ 1 Crank - Nicolson I

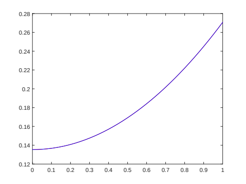
Trường hợp $a = 1, \ b = 10$:



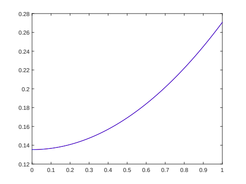
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

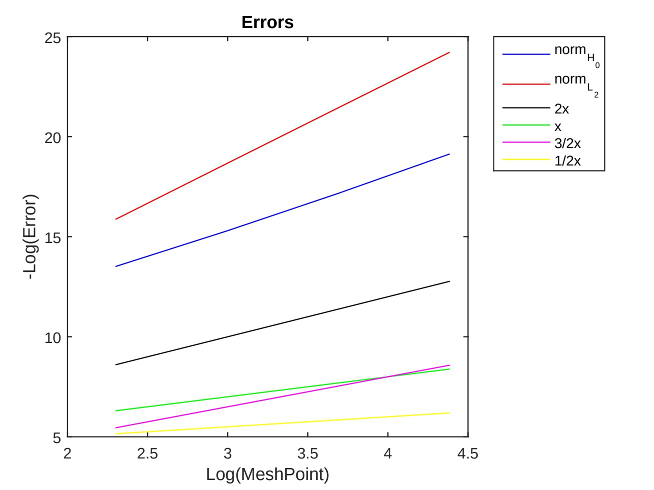


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Ví dụ 1 Crank - Nicolson I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 1 với $a/_b = 0.1$ của Crank - Nicolson Method

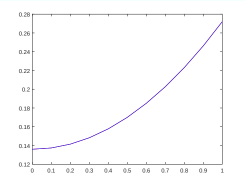
Ví dụ 1 Crank - Nicolson I

k	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.995902573054926 e-05	0.127291585247477 e-06
0.5	0.169077037885438 e-05	0.007862940522930 e-06
0.3	0.026007536088516 e-05	0.000489982362544 e-06
0.125	0.003655311366320 e-05	0.000030756158739 e-06

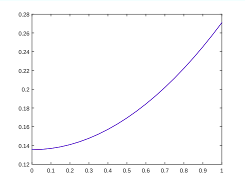
Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 1 với $a/_b = 0.1$ Crank - Nicolson Method

Ví dụ 1 Crank - Nicolson I

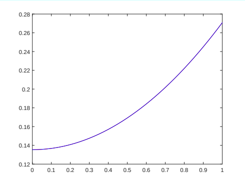
Trường hợp $a = 5, \ b = 10$:



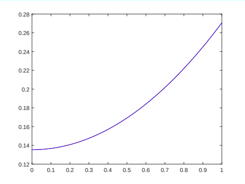
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

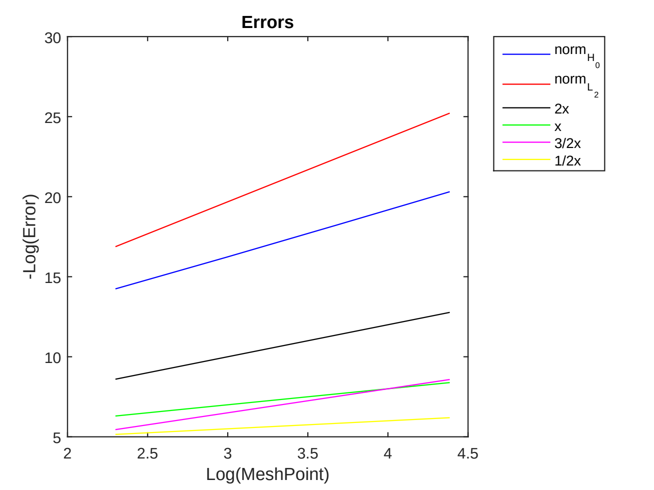


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Ví dụ 1 Crank - Nicolson I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 1 với $a/_b = 0.5$ của Crank - Nicolson Method

Ví dụ 1 Crank - Nicolson I

Lần lặp	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.478401036239359 e-05	0.462097340736644 e-07
0.05	0.066190455037896 e-05	0.028877422228576 e-07
0.025	0.008744020719175 e-05	0.001805082324672 e-07
0.0125	0.001130684641131 e-05	0.000113426170011 e-07

Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 1 với $a/_b = 0.5$ Crank - Nicolson Method

Ví dụ 2 I

Ví dụ 2: Xét bài toán:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla.\left(a\nabla u(x,t)\right) + \nabla\left(bu(x,t)\right) + f(x,t) \\ u(0,t) = e^{-2t}, \quad u(1,t) = -e^{-2t}, \ \forall t \in [0,1] \\ u(x,0) = \cos\left(\dfrac{5\pi x}{3}\right), \quad \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{17}$$

với

$$f(x,t) = \frac{25\pi^2 a.e^{-2t}\cos\left(\dfrac{5\pi x}{3}\right)}{9} - 2e^{-2t}\cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right) + \frac{5\pi b.e^{-2t}\sin\left(\dfrac{5\pi x}{3}\right)}{3}$$

Ví dụ 2 I

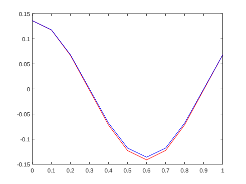
với hàm chính xác là:

$$u(x,t) = \cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right) e^{-2t} \tag{18}$$

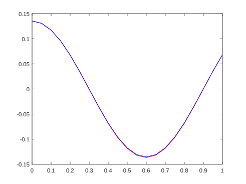
và các giá trị $a,\ b$ là các hàm số như sau:

Ví dụ 2 Crank - Nicolson I

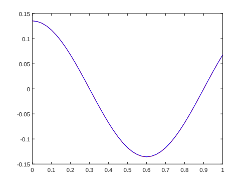
Trường hợp $a = 100, \ b = 1$:



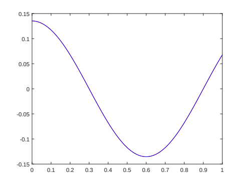
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

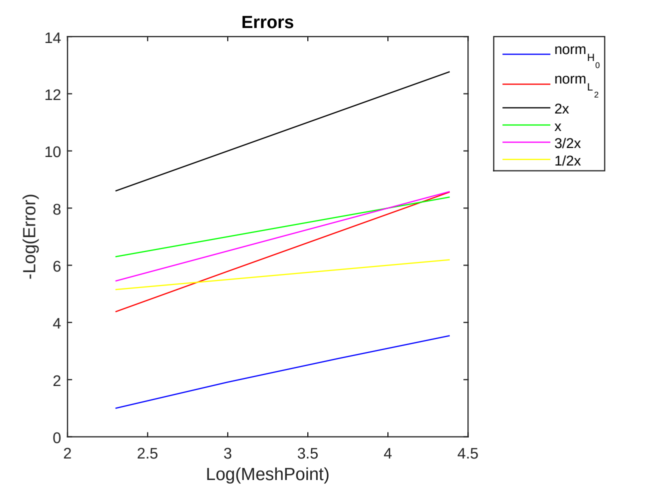


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Ví dụ 2 Crank - Nicolson I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 2 với $a/_b = 100$ của Crank - Nicolson Method

Ví dụ 2 Crank - Nicolson I

Lần lập	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	2.713875840200804	0.012518222738817
0.05	1.097314405596327	0.003090047537479
0.025	0.478370486588444	0.000770327239110
0.0125	0.215846659472552	0.000192448031643

Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 2 với $a/_b = 100$ Crank - Nicolson Method

Bài toán số 4 tổng quát I

Bài toán được viết lại như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla.\left(a(x,t)\nabla u(x,t)\right) + \nabla\left(b(x,t)u(x,t)\right) + c(x,t)u(x,t) + f(x,t)$$

Hay đơn giản hơn:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \left(a(x,t)u'(x,t)\right)' + \left(b(x,t)u(x,t)\right)' + c(x,t)u(x,t) + f(x,t)$$

Phân tích các đạo hàm bằng các dùng đạo hàm tích như sau:

Bài toán số 4 tổng quát I

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= a(x,t)u''(x,t) + a'(x,t)u'(x,t) + b(x,t)u'(x,t)\\ &+ b'(x,t)u(x,t) + c(x,t)u(x,t) + f(x,t)\\ &= a(x,t)u''(x,t) + \left(a'(x,t) + b(x,t)\right) u'(x,t)\\ &+ \left(b'(x,t) + c(x,t)\right) u(x,t) + f(x,t)\end{aligned}$$

Bài toán số 4 tổng quát ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} + O(k) \tag{19}$$

$$u''(x_i,t_n) = (1-\theta)\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} + \theta\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2) \tag{20}$$

Phát biểu bài toán I

$$u'(x_i,t_n) = (1-\theta)\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \theta\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} + O(h^2) \quad (21)$$

Thay vào (x_i, t_n) vào và các xấp xỉ đạo hàm ta được:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = a(x_i,t_n)\left((1-\theta)\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} + \theta\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2}\right)$$
$$+\left(a'(x_i,t_n) + b(x_i,t_n)\right)\left((1-\theta)\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \theta\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h}\right)$$
$$+\left(b'(x_i,t_n) + c(x_i,t_n)\right)u(x_i,t_n) + f(x_i,t_n)$$

Phát biểu bài toán I

Biến đổi và thu gọn ta có:

$$
\begin{aligned}
U_i^{n+1} - U_i^n = {} & \frac{ka(x_i,t_n)}{h^2}(1-\theta)\left(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n\right) \\
& + \frac{ka(x_i,t_n)}{h^2}\theta\left(U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}\right) \\
& + \frac{k(a'(x_i,t_n) + b(x_i,t_n))}{2h}(1-\theta)\left(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n\right) \\
& + \frac{k(a'(x_i,t_n) + b(x_i,t_n))}{2h}\theta\left(U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}\right) \\
& + k(b'(x_i,t_n) + c(x_i,t_n))U_i^n + kF_i^n
\end{aligned}
$$

Phát biểu bài toán I

Thu gọn theo các phần ta có:

$$U_{i-1}^{n+1}\left(-\frac{k\theta a(x_i,t_n)}{h^2}+\frac{k\theta(a'(x_i,t_n)+b(x_i,t_n))}{2h}\right)$$
$$+U_i^{n+1}\left(1+2\frac{k(1-\theta)a(x_i,t_n)}{h^2}\right)$$
$$+U_{i+1}^{n+1}\left(-\frac{k\theta a(x_i,t_n)}{h^2}-\frac{k\theta(a'(x_i,t_n)+b(x_i,t_n))}{2h}\right)$$
$$=U_{i-1}^{n}\left(\frac{k(1-\theta)a(x,t)}{h^2}-\frac{k(1-\theta)\left(a'(x_i,t_n)+b(x_i,t_n)\right)}{2h}\right)$$
$$+U_i^{n}\left(1-2\frac{k(1-\theta)a(x,t)}{h^2}+k\left(b'(x_i,t_n)+c(x_i,t_n)\right)\right)$$
$$+U_{i+1}^{n}\left(\frac{k(1-\theta)a(x,t)}{h^2}+\frac{k(1-\theta)\left(a'(x_i,t_n)+b(x_i,t_n)\right)}{2h}\right)+kF_i^n$$

Phát biểu bài toán I

Đặt

$$r_1 = \frac{ka(x,t)}{h^2} - \frac{k\left(a'(x_i,t_n) + b(x_i,t_n)\right)}{2h} \tag{22}$$

$$r_2 = -2\frac{ka(x,t)}{h^2} \tag{23}$$

$$r_3 = \frac{ka(x,t)}{h^2} + \frac{k\left(a'(x_i,t_n) + b(x_i,t_n)\right)}{2h} \tag{24}$$

$$r = k\left(b'(x_i,t_n) + c(x_i,t_n)\right) \tag{25}$$

Phát biểu bài toán I

Khi đó đặt

$$A = \begin{bmatrix} -r_2 & r_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & -r_2 & r_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & -r_2 & r_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_1 & -r_2 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_1 & -r_2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Khi đó bài toán thành:

$$(I - \theta A)U^{n+1} = ((1+r)I + (1-\theta)A)U^n + kF^n \tag{27}$$

Ví dụ 1 bài toán 3 I

Ví dụ 1: Xét bài toán:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla.\left(a\nabla u(x,t)\right) + \nabla\left(bu(x,t)\right) + f(x,t) \\ u(0,t) = e^{-2t}, \quad u(1,t) = 2e^{-2t}, \ \forall t \in [0,1] \\ u(x,0) = x^2 + 1, \quad \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{28}$$

với

$$f(x,t) = -2e^{-2t}\left(x^2+1\right) - 2.a(x,t)e^{-2t} - 2x.e^{-2t}\left(b(x,t) + a'(x,t)\right) - e^{-2t}\left(c(x,t) + b'(x,t)\right)\left(x^2+1\right)$$

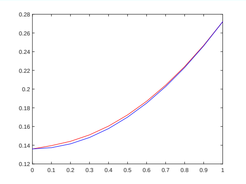
với nghiệm chính xác là

$$u(x,t) = (x^2+1)e^{-2t} \tag{29}$$

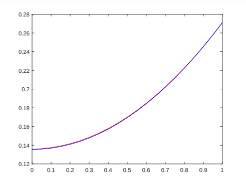
và các giá trị $a, \ b$ được thay đổi qua các trường hợp sau:

Phương pháp Forward I

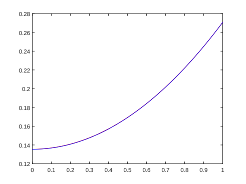
Trường hợp $a(x,t) = xt$, $b(x,t) = x^2t$ và $c = 2x^3 + t^2$:



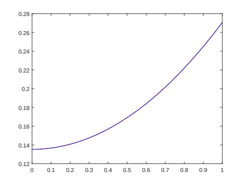
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

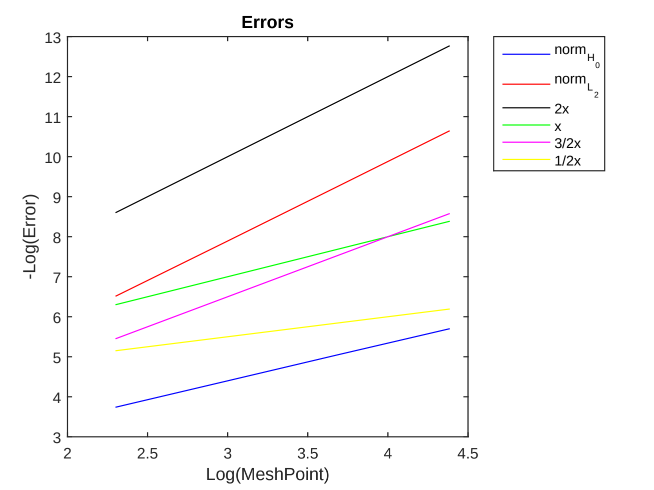


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Phương pháp Forward I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 1 với $a/_b = 10$ của Backward Method

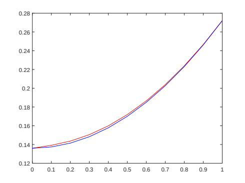
Phương pháp Forward I

Lần lặp	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.204352763033746	0.001746359117828
0.05	0.105730810773186	0.000444335072537
0.025	0.054813504413604	0.000112206171933
0.0125	0.028696360928270	0.000028234507336

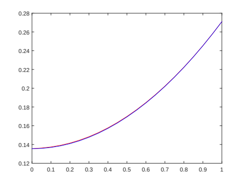
Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 1 Forward Method

Phương pháp Crank - Nicolson I

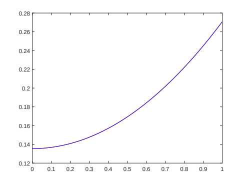
Phương pháp Crank - Nicolson



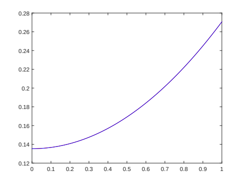
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

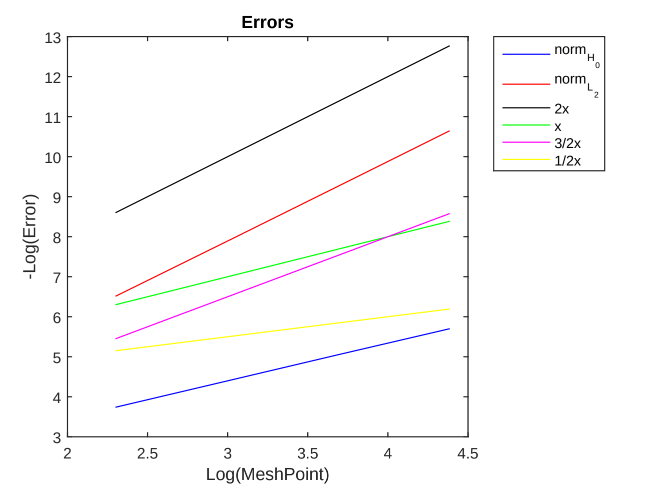


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Phương pháp Crank - Nicolson I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 1 với Crank - Nicolson Method

Phương pháp Crank - Nicolson I

Lần lập	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.175328584548422	0.001477563868595
0.05	0.091167932522718	0.000376500695640
0.025	0.047330224652226	0.000095117268316
0.0125	0.024788146144868	0.000023938386338

Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 1 với Crank - Nicolson Method

Phương pháp Backward I

Ví dụ 2: Xét bài toán:

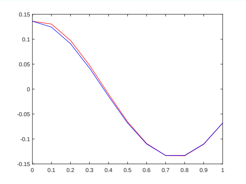
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla.\left(a\nabla u(x,t)\right) + \nabla\left(bu(x,t)\right) + f(x,t) \\
u(0,t) = e^{-2t}, \quad u(1,t) = -e^{-2t}, \ \forall t \in [0,1] \\
u(x,0) = \cos\left(\dfrac{5\pi x}{3}\right), \quad \forall x \in [0,1]
\end{cases}
\tag{30}
$$

với

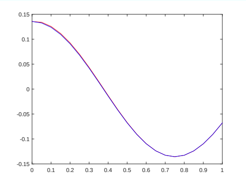
$$
\begin{aligned}
f(x,t) = {} & \frac{16\pi^2 a(x,t)e^{-2t}\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)}{9} \\
& - e^{-2t}\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)\left(c(x,t) + b'(x,t)\right) \\
& - 2e^{-2t}\cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right) + \frac{4\pi e^{-2t}\sin\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)\left(b(x,t) + a'(x,t)\right)}{3}
\end{aligned}
$$

Phương pháp Backward I

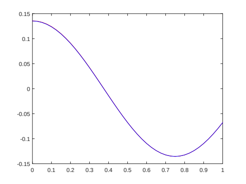
Trường hợp $a(x,t) = xt,\ b(x,t) = x^2 t$ và $c = 2x^3 + t^2$:



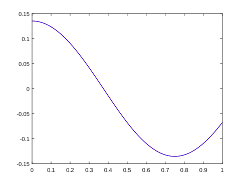
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

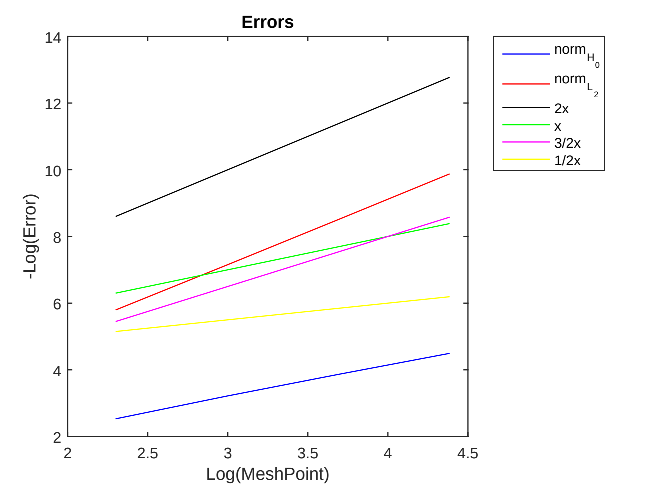


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Phương pháp Backward I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 2 với Backward Method

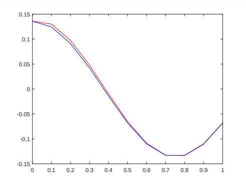
Ví dụ 2 Backward I

Lần lặp	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.585869551579723	0.003022005246673
0.05	0.296528307491779	0.000787618047869
0.025	0.155287685294623	0.000202771647834
0.0125	0.082772097944469	0.000051755513643

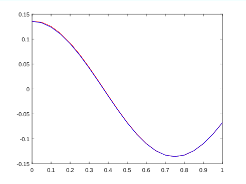
Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 2 với Backward Method

Phương pháp Crank - Nicolson I

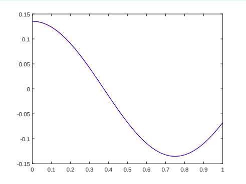
Phương pháp Crank - Nicolson:



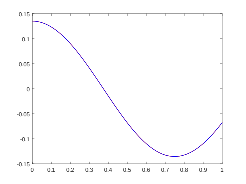
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai

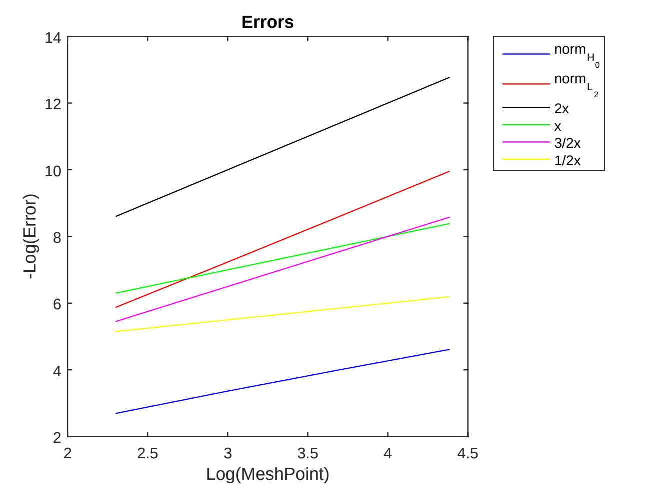


(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Phương pháp Crank - Nicolson I



Hình: Bậc sai số của Ví dụ 2 với Crank - Nicolson Method

Phương pháp Crank - Nicolson I

Lần lập	Chuẩn H_0^2	Chuẩn L^2
0.1	0.498723548317426	0.002797660884780
0.05	0.256874090919943	0.000728080019476
0.025	0.136394374134457	0.000187360012114
0.0125	0.073544138436430	0.000047811893444

Bảng: Bảng sai số cho các chuẩn H_0^2 và chuẩn L^2, ví dụ 2 với Crank - Nicolson Method