PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Plate problem with Argyris basis

LƯU GIANG NAM
Email: luugiangnam96@gmail.com

TRẦN NGUYÊN TRY
Email: nguyentry@gmail.com

University of Science, Ho Chi Minh City

14th July 2017

Contents

List of Figures

Chương 1

Phương pháp phần tử hữu hạn và Bài toán Plate Bending

1.1. Sơ lược về Phương pháp phần tử hữu hạn - FEM

Xét bài toán Đạo hàm riêng (PDE) với giá trị biên và chuyển được về dạng yếu: Tìm $u \in V$ sao cho $a(u, v) = F(v),\ \forall v \in V$, với V là không gian Hilbert, a là một toán tử song tuyến tính liên tục, F là toán tử tuyến tính liên tục. Nếu kèm theo điều kiện a đối xứng và coercive thì theo định lý Lax- Milgram ta có $u \in V$ là duy nhất và dạng yếu của bài toán tương đương với dạng biến phân:

$$u = arg \min_{v \in V} \left[\frac{1}{2} a(u, v) - F(v) \right] \tag{1}$$

Có nhiều phương pháp số có thể sử dụng để giải những bài toán PDE này nhưng phương pháp phổ biến nhất chính là Phương pháp Galerkin. Phương pháp Galerkin là phương pháp ta phải tìm $u_h \in V_h$ là không gian hữu hạn chiều con V thỏa mãn $a(u_h, v) = F(v),\ \forall v \in V_h$. Xấp xỉ sai số cho phương pháp Galerkin được cho bởi định lý Céa :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \int_{v \in V_h} \|u - v\|_V \tag{2}$$

với α là hệ số coercive và γ là hệ số liện tục.

Với phương pháp phần tử hữu hạn, không gian V_h được xây dựng như là không gian của những đa thức từng phần, piecewise polynomials.

1.2. Mô hình Euler - Bernoulli và bài toán Plate Bending

Plate Bending là bài toán đạo hàm riêng cấp 4 (fourth-order problems) với công thức dạng yếu thuộc $H^2(\Omega)$. Có nhiều mô hình cho bài toán này là: Mô hình Euler - Bernoulli, với công thức là có dạng một đạo hàm cấp 4; Mô hình Timoshenko là mô hình với công thức là có dạng tích của hai đạo hàm cấp 2, Mô hình Reissner-Mindlin, Mô hình Kirchhoff (có dạng $u_x^{(4)} + u_x^{(2)} u_y^{(2)} + u_y^{(4)}$).

Ở đây ta sẽ xét đến Mô hình Euler - Bernoulli vì khi ta sử dụng các cơ sở của FEM bậc cao khi phân rã bài toán sẽ được bậc sai số tốt hơn (tham khảo Chương 6 của [6]). Có 2 cơ sở thường được dùng là Hermite và Argyris, bài viết sẽ tập trung nói về cơ sở Argyris.

Phương trình Plate Bending theo Mô hình Euler - Bernoulli như sau:

$$\Delta (b \Delta u) = f, \text{ trên } \Omega \tag{3}$$

với $b \in C^2(\Omega)$ và $f \in C(\Omega)$.
Bài viết sẽ tập trung vào việc giải quyết bài toán (3) với $b = 1$ tức là ta sẽ có bài toán sau:

$$\Delta^2 u = f, \forall \text{ trên } \Omega \tag{4}$$

với $u \in C^4(\Omega),\ f \in C(\Omega)$.

Phương trình (3) là một phương trình đạo hàm riêng cấp 4 nên ta cần 4 điều kiện biên để bài toán tồn tại duy nhất nghiệm. Chúng ta thường xét đến 2 điều kiện sau:

Điều kiện biên cở bản (Essential boundary conditions)

- Độ lệch hướng (deflection):

$$u|_{\partial\Omega} = u_0 \tag{5}$$

- Độ dốc (slope)

$$\nabla u|_{\partial\Omega} = du_0 \tag{6}$$

1.3. Công thức dạng yếu của bài toán Plate - Bending

Với mọi hàm thử v đủ tốt (có thể chọn $v \in C_0^2(\Omega)$) ta có:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega fv &= \int_\Omega \Delta(b\Delta u)v \\
&= \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial(\nabla(b\Delta u))}{\partial n} d(\partial\Omega) - \int_\Omega \nabla(b\Delta u).\nabla v \\
&= \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial(\nabla(b\Delta u))}{\partial n} d(\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} \nabla v.\frac{\partial(b\Delta u)}{\partial n} d(\partial\Omega) + \int_\Omega b\Delta u\Delta v
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện biên (5) và (6) ta có công thức dạng yếu của (3) là:

$$\int_\Omega b\Delta u\Delta v = \int_\Omega fv \tag{7}$$

với các điều kiện để tồn tại sau (theo trang 214, [6]) :

$$b \in L^\infty(\Omega),\ u, v \in H_0^2(\Omega),\ \ f \in L^2(\Omega)$$

Để dễ dàng ta sẽ xét $b = 1$, điều kiện biên là **clamped boundary condition**.

Khi đó (7) sẽ được biến đổi thành:

$$\int_\Omega \Delta u\Delta v = \int_\Omega fv \tag{8}$$

Từ giờ đến cuối bài viết sẽ chỉ xét bài toán (8).

1.4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Phát biểu lại bài toán:

Cho $f \in L^2(\Omega)$, tìm $u \in V = H_0^2(\Omega)$ thỏa mãn:

$$u(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \tag{9}$$

với a là dạng tuyến tính $a : V \times V \to \mathbb{R}$ và $l \in V'$ được cho bởi:

$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v$$

$$l(v) = \int_\Omega f v$$

Định lý: Chứng minh bài toán (8) có duy nhất một nghiệm.

Chứng minh. Trước khi bắt đầu chứng minh, ta cần xem lại đinh lý Lax-Milgram (tham khảo [1]). Khi đó ta cần chứng minh 3 điều:

Song tuyến tính: Ta sẽ chứng minh:

$$a(cu_1 + u_2, v) = ca(u_1, v) + a(u_2, v) \tag{10}$$

và

$$a(u, dv_1 + v_2) = da(u, v_1) + a(u, v_2) \tag{11}$$

Do tính đối xứng của toán tử a nên nếu (10) đúng thì (11) cũng đúng theo. Vậy ta chỉ cần chứng minh (10):

$$\begin{aligned} a(cu_1 + u_2, v) &= \int_\Omega \Delta(cu_1 + u_2)\Delta v \\ &= \int_\Omega (c\Delta u_1 + \Delta u_2)\Delta v \\ &= c\int_\Omega \Delta u_1 \Delta v + \int_\Omega \Delta u_2 \Delta v \\ &= c.a(u_1, v) + a(u_2, v) \end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Liên tục: Sử dụng Bất đẳng thức Holder ta có:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \Delta u \Delta v \right| \\
&\leq \left(\int_\Omega (\Delta u)^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega (\Delta v)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega u^2 + (\nabla u)^2 + (\Delta u)^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega v^2 + (\nabla v)^2 + (\Delta v)^2 \right)^{1/2} \\
&= \|u\|_V \|v\|_V
\end{aligned}$$

Coercive: Vì ta có $u \in H_0^1(\Omega)$ và $\nabla u \in H_0^1(\Omega)$ nên áp dụng định lý Poincare - Friedrichs ta có tồn tại hai số dương $C_0,\ C_1$ sao cho:

$$\int_\Omega v^2 + |\nabla v|^2 \leq C_0 \int_\Omega |\nabla v|^2,\ \forall v \in V \tag{12}$$

và

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + (\Delta v)^2 \leq C_1 \int_\Omega (\Delta v)^2,\ \forall v \in V \tag{13}$$

Khi đó ta có đánh giá:

$$\begin{aligned}
a(v,v) = \int_\Omega (\Delta v)^2 &\geq \int_\Omega |\nabla v|^2 + (\Delta v)^2,\ \forall v \in V \\
&\geq \frac{1}{C_0 C_1} \int_\Omega v^2 + |\nabla v|^2 + \frac{1}{C_1} \int_\Omega (\Delta v)^2,\ \forall v\ inV \\
&\geq \frac{1}{C_1 \max(C_0, 1)} \|v\|_V^2,\ \forall v \in V
\end{aligned}$$

Vậy ta thấy a là một toán tử song tuyến tính, liên tục và coercive nên dựa vào định lí Lax - Milgram ta có phương trình (8) sẽ có nghiệm và đó là nghiệm duy nhất. □

Chương 2

Bài toán Plate một chiều

2.1. Bài toán

Ta viết lại dạng yếu của Bài toán (4) là (9) thành

$$u''''(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega \tag{14}$$

dạng yếu là

Cho $f \in L^2(\Omega)$, tìm $u \in V = H_0^2(\Omega)$ thỏa mãn:

$$a(u, v) = l(v),\quad \forall v \in V \tag{15}$$

với a là dạng tuyến tính $a : V \times V \to \mathbb{R}$ và $l \in V'$ được cho bởi:

$$a(u, v) = \int_\Omega u''(x)v''(x)dx$$

$$l(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

Khi đó bài toán phân rã sẽ là: Tìm $u_{h,p} \in V_{h,p}$ sao cho

$$a(u_{h,p}(x), v_{h,p}(x)) = l(v_{h,p}(x)), \forall v_{h,p} \in V_{h,p} \tag{16}$$

Nếu xét một cơ sở $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N\}$ cho $V_{h,p}$, khi đó ta viết $u_{h,p}$ thành:

$$u_{h,p}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x) \tag{17}$$

Khi đó lần lượt chọn $v_{h,p}(x) = \phi_i(x) \in V_{h,p},\ i = \overline{1, N}$ ta có:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_\Omega \phi_j''(x)\phi_i''(x)dx = \int_\Omega f(x)\phi_i(x)dx,\ \forall i = 1, 2, ..., N \tag{18}$$

Khi đó ta có:

$$AU = F \tag{19}$$

với

$$A_{ij} = \int_\Omega \phi_j''(x)\phi_i''(x)dx$$

$$F_i = \int_\Omega f(x)\phi_i(x)dx$$

2.2. Phần tử hữu hạn trong $\mathbb{R}$

Cho một đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Đặt $\mathbb{P}_k$ là tập hợp của các đa thức có bậc bé hơn hoặc bằng k. Ta có bảng sau biểu diễn số chiều của P_k:

k	$dim\mathbb{P}_k$
1	2
2	3
...	...
5	6
6	7
...	...
k	k+1

Ở đây ta xét đến cơ sở Argyris và bậc nhỏ nhất của cơ sở này chính là bậc 5. Ngoài ra bài viết cũng giới thiệu sơ về Argyris bậc 6.

2.3. Chuyển đổi từ đoạn reference K_a sang đoạn K_m

Phần này sẽ trình bày cách chuyển các nodal basis từ đoạn reference K_a sang một đoạn bất kì của lưới, ví dụ đoạn $K_m = [x_{m-1}, x_m]$. Ý tưởng để thực hiện điều này chính là sẽ xác định với mỗi K_m sẽ tìm một ánh xạ $g_{K_m} : K_a \to K_m$, gọi đây là ánh xạ reference.

Định nghĩa: Với mỗi đoạn K_m, ánh xạ reference g_{K_m} được có dạng:

$$g_{K_m}(\xi) = c_1^{(m)} + c_2^{(m)}\xi \tag{20}$$

với

$$c_1^{(m)} = \frac{x_{m-1} + x_m}{2},\ c_2^{(m)} = J_{K_m} = \frac{x_m - x_{m-1}}{2}$$

Khi đó không gian $V_{h,p}$ có dạng

$$V_{h,p} = \{v \in V :\ v|_{K_m} \in \mathbb{P}^k(K_m),\ \forall m = 1, 2, ..., M\} \tag{21}$$

hay tương đương là:

$$V_{h,p} = \{v \in V :\ v|_{K_m} \circ g_{K_m} \in \mathbb{P}^k(K_a),\ \forall m = 1, 2, ..., M\} \tag{22}$$

Chuyển giá trị hàm: Công thức chuyển của nghiệm xấp xỉ là:

$$\widetilde{u}_{h,p}^{(m)}(\xi) = (u_{h,p} \circ g_{K_m})(\xi) = u_{h,p}(g_{K_m}(\xi)) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(g_{K_m}(\xi)) \tag{23}$$

Chuyển giá trị đạo hàm cấp 1: Sử dụng đạo hàm hợp ta có:

$$\left(\widetilde{u}_{h,p}^{(m)}(\xi)\right)' = u'_{h,p}(g_{K_m})J_{K_m}$$

hay

$$u'_{h,p}(g_{K_m}) = \frac{1}{J_{K_m}}\left(\sum_{j=1}^{N} u_j\phi_j(g_{K_m}(\xi))\right)' = \frac{1}{J_{K_m}}\sum_{j=1}^{N} u_j\phi'_j(g_{K_m}(\xi)) \tag{24}$$

Chuyển giá trị đạo hàm cấp 2: Sử dụng đạo hàm hợp ta có:

$$\left(\widetilde{u}_{h,p}^{(m)}(\xi)\right)'' = u''_{h,p}(g_{K_m})J_{K_m}^2$$

hay

$$u''_{h,p}(g_{K_m}) = \frac{1}{J_{K_m}^2}\left(\widetilde{u}_{h,p}^{(m)}(\xi)\right)'' = \frac{1}{J_{K_m}^2}\sum_{j=1}^{N} u_j\phi''_j(g_{K_m}(\xi)) \tag{25}$$

Chuyển đổi (18) sang tích phân trên K_a :
Ta có tích phân của vế trái là:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j\left(\sum_{m=1}^{M}\int_{K_m}\phi''_j(x)\phi''_i(x)dx\right) = \sum_{j=1}^{N} u_j\left(\sum_{m=1}^{M}\int_{K_a}\frac{1}{J_{K_m}^3}\phi''_j(g_{K_m}(\xi))\phi''_i(g_{K_m}(\xi))d\xi\right) \tag{26}$$

với $i = 1, 2, ..., N$.

Vế trái tích phân thành:

$$\sum_{m=1}^{M}\int_{K_m} f(x)v_{h,p}dx = \sum_{m=1}^{M}\int_{K_a} J_{K_m}f(g_{K_m}(\xi))\phi_i(g_{K_m}(\xi))d\xi \tag{27}$$

với $i = 1, 2, ..., N$.

2.4. Argyris bậc 5 - Bậc thấp nhất

Đặt $P = \mathbb{P}_5$. Khi đó theo Bảng 2.2 ta có $dimP = 6$ hay mỗi đa thức trong P cần 6 giá trị để xác định được. Cơ sở Argyris sẽ sử dụng 6 điểm sau:

- 2 giá trị tại 2 a và b (trong hình là 2 •) .
- Hai giá trị của đạo hàm bậc 1 tại a và b, trong hình là 2 đường tròn bên trong.
- Hai giá trị của đạo hàm bậc 2 tại a và b, trong hình là 2 đường tròn đậm bên ngoài.

Giả sử xét trên đoạn $K_a = [-1, 1]$, khi đó ta có một phần tử hữu hạn là $(K_a, \mathbb{P}^5(K_a), N_a)$ với N_a là tập chưa các toán tử $N_i : \mathbb{P}^5(K_a) \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{array}{cc} N_1(u) = u(-1) & N_2(u) = u(1) \\ N_3(u) = u'(-1) & N_4(u) = u'(1) \\ N_5(u) = u''(-1) & N_6(u) = u''(1) \end{array}$$

Khi đó ta phải xây dựng một nodal basis cho K_a, gọi cơ sở đó là:

$$\{1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5\} \tag{28}$$

Khi đó ta có ma trận Vandermonde như sau:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 12 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Khi đó ta có:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 5/16 & -5/16 & 1/16 & 1/16 \\ -15/16 & 15/16 & -7/16 & -7/16 & -1/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & -3/8 & 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ 5/8 & -5/8 & 5/8 & 5/8 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/16 & -1/16 & 1/16 & 1/16 \\ -3/16 & 3/16 & -3/16 & -3/16 & -1/16 & 1/16 \end{pmatrix} \tag{30}$$

là ma trận mà cột của nó xác định các hàm cơ sở φ_i theo ξ như sau:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{15\xi}{2} + \frac{5\xi^3}{8} - \frac{3\xi^5}{16} \\
\varphi_2(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{15\xi}{16} - \frac{5\xi^3}{8} + \frac{3\xi^5}{16} \\
\varphi_3(\xi) &= \frac{5}{16} + \frac{7\xi}{16} - \frac{3\xi^2}{8} + \frac{5\xi^3}{8} + \frac{\xi^4}{16} - \frac{-3\xi^5}{16} \\
\varphi_4(\xi) &= \frac{-5}{16} - \frac{7\xi}{16} + \frac{3\xi^2}{8} + \frac{5\xi^3}{8} - \frac{\xi^4}{16} - \frac{3\xi^5}{16} \\
\varphi_5(\xi) &= \frac{1}{16} - \frac{\xi}{16} + \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{8} + \frac{\xi^4}{16} - \frac{\xi^5}{16} \\
\varphi_6(\xi) &= \frac{1}{16} + \frac{\xi}{16} - \frac{\xi^2}{8} - \frac{\xi^3}{8} + \frac{\xi^4}{16} + \frac{\xi^5}{16}
\end{aligned}
$$

Ta dễ dàng kiểm tra được là $L_i(\varphi_j) = \delta_{ij},\ \forall i, j = \overline{1,6}$.

Định lý: Với tập $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ đã tìm được nhu trên ta sẽ kiểm tra đây là một cơ sở của $\mathbb{P}^5(K_a)$.

Chứng minh. Với $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6 \in \mathbb{R}$ thỏa:

$$
c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5 + c_6\varphi_6 = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}
c_1\left(\frac{1}{2} - \frac{15\xi}{2} + \frac{5\xi^3}{8} - \frac{3\xi^5}{16}\right) \\
+c_2\left(\frac{1}{2} + \frac{15\xi}{16} - \frac{5\xi^3}{8} + \frac{3\xi^5}{16}\right) \\
+c_3\left(\frac{5}{16} + \frac{7\xi}{16} - \frac{3\xi^2}{8} + \frac{5\xi^3}{8} + \frac{\xi^4}{16} - \frac{-3\xi^5}{16}\right) \\
+c_4\left(\frac{-5}{16} - \frac{7\xi}{16} + \frac{3\xi^2}{8} + \frac{5\xi^3}{8} - \frac{\xi^4}{16} - \frac{3\xi^5}{16}\right) \\
+c_5\left(\frac{1}{16} - \frac{\xi}{16} + \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{8} + \frac{\xi^4}{16} - \frac{\xi^5}{16}\right) \\
+c_6\left(\frac{1}{16} + \frac{\xi}{16} - \frac{\xi^2}{8} - \frac{\xi^3}{8} + \frac{\xi^4}{16} + \frac{\xi^5}{16}\right)
\end{array}\right) = 0,\ \forall \xi \in (-1,1)
$$

Vì phương trình trên đúng với mọi $\xi \in (-1,1)$ nên ta có hệ sau:

$$
L^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = 0
$$

Rõ ràng L^{-1} khả nghịch với $(L^{-1})^{-1} = L$ nên ta có phương trình trện có 1 nghiệm duy nhất chính là $(0,0,0,0,0,0)$.

Vậy ta có $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ là một cơ sở của $\mathbb{P}^5(K_a)$. $\square$

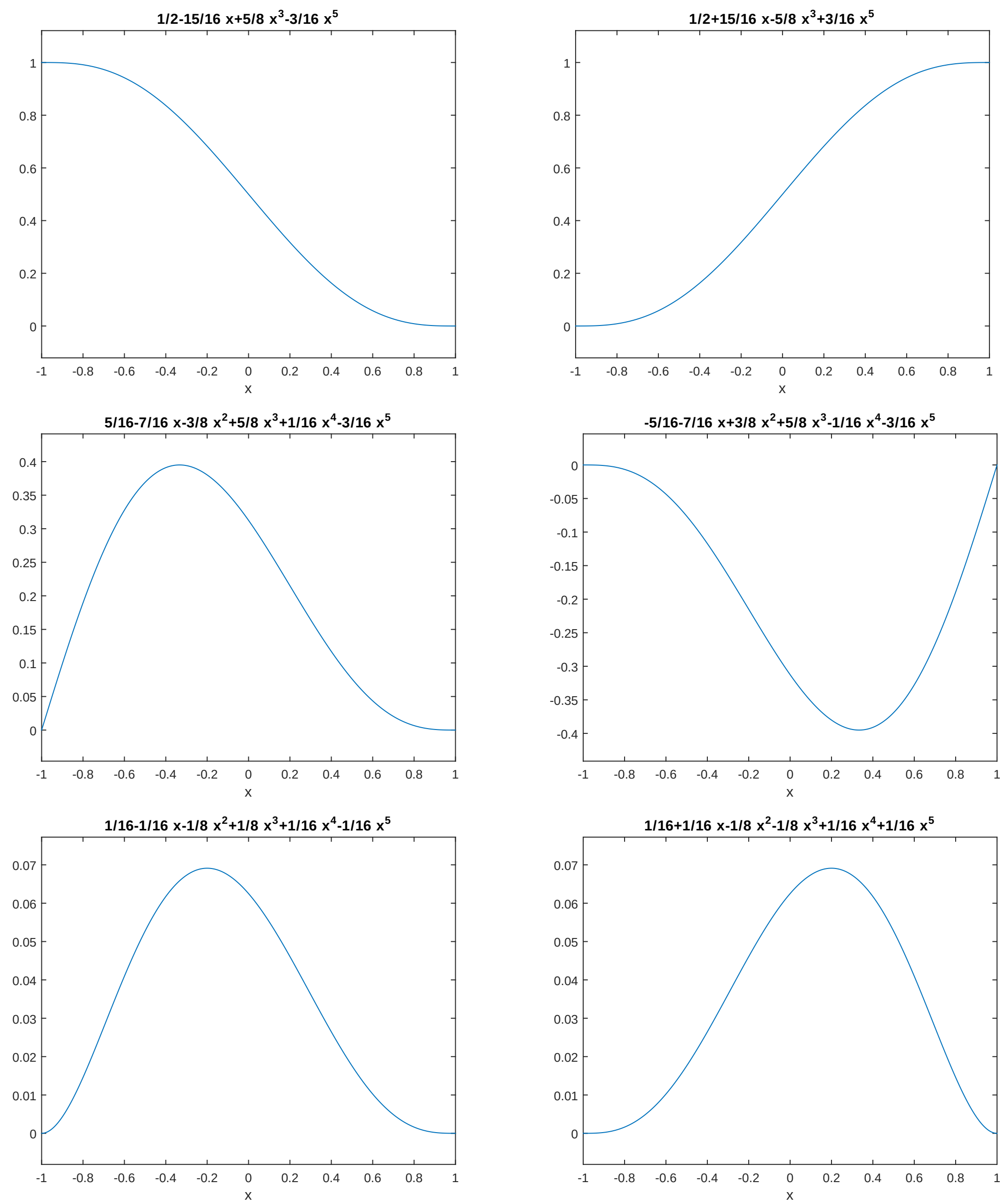


Figure 1: Hàm cơ sở Argyris bậc 5

Sau khi xây dựng xong phần tử hữu hạn trên đoạn $(-1, 1)$ ta sẽ chuyển qua một khoảng $K_m = (x_{m-1}, x_m)$ bất kì. Ta có hàm cơ sở tại x_0 là

$$\phi_3^{(0)} = \varphi_5(g_{K_1})$$

tương tự với hàm cơ sở ứng với x_M:

$$\phi_3^{(M)} = \varphi_6(g_{K_M})$$

còn ứng với các $x_i,\ i \in \overline{1, M-1}$ là:

$$\phi_1^{(i)} = \begin{cases} \varphi_1(g_{K_{i+1}}), & \text{trên } K_{i+1} \\ \varphi_2(g_{K_i}), & \text{trên } K_i \end{cases}$$

$$\phi_2^{(i)} = \begin{cases} \varphi_3(g_{K_{i+1}}), & \text{trên } K_{i+1} \\ \varphi_4(g_{K_i}), & \text{trên } K_i \end{cases}$$

$$\phi_3^{(0)} = \begin{cases} \varphi_5(g_{K_{i+1}}), & \text{trên } K_{i+1} \\ \varphi_6(g_{K_i}), & \text{trên } K_i \end{cases}$$

Vậy ta có không gian các hàm cơ sở $V_{h,p}$ có số chiều là $N = 3M - 1$ và với mỗi $v_{h,p} \in V_{h,p}$ ta có thể biểu diễn:

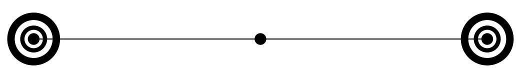
$$v_{h,p} = u''(x_0)\phi_5^{(0)} + \sum_{i=1}^{M-1} \left(u(x_i)\phi_1^{(i)} + u'(x_i)\phi_2^{(i)} + u''(x_i)\phi_3^{(i)} \right) + u''(x_M)\phi_6^{(M)} \tag{31}$$

Thay vào các phương trình ta sẽ được một hệ phương trình $3M-1$ nghiệm ($M-1$ giá trị $u(x_i)$, $M-1$ giá trị $u'(x_i)$ và $M+1$ giá trị $u''(x_i)$) và $3M-1$ phương trình.

2.5. Argyris bậc 6

Đặt $P = \mathbb{P}_6$. Khi đó theo Bảng 2.2 ta có $dimP = 7$ hay mỗi đa thức trong P cần 7 giá trị để xác định được. Cơ sở Argyris sẽ sử dụng 6 điểm sau:

- 3 giá trị tại 3 điểm a và b và trung điểm của $a,\ b$ (trong hình là 3 •) .
- Hai giá trị của đạo hàm bậc 1 tại a và b, trong hình là 2 đường tròn bên trong.
- Hai giá trị của đạo hàm bậc 2 tại a và b, trong hình là 2 đường tròn đậm bên ngoài.



Giả sử xét trên đoạn $K_a = [-1, 1]$, khi đó ta có một phần tử hữu hạn là $(K_a, \mathbb{P}^6(K_a), N_a)$ với N_a là tập chưa các toán tử $N_i : \mathbb{P}^5(K_a) \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{array}{ccc} N_1(u) = u(-1) & N_2(u) = u(0) & N_3(u) = u(1) \\ N_4(u) = u'(-1) & & N_5(u) = u'(1) \\ N_6(u) = u''(-1) & & N_7(u) = u''(1) \end{array}$$

Khi đó ta phải xây dựng một nodal basis cho K_a, gọi cơ sở đó là:

$$\{1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5, \xi^6\} \tag{32}$$

Khi đó ta có ma trận Vandermonde như sau:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 12 & -20 & 30 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Khi đó ta có:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15/16 & 0 & -15/16 & -7/16 & -7/16 & -1/16 & 1/16 \\ 3/2 & -3 & 3/2 & 9/16 & -9/16 & 1/16 & 1/16 \\ 5/8 & 0 & -5/8 & 5/8 & 5/8 & 1/8 & -1/8 \\ -3/2 & 3 & -3/2 & -7/8 & 7/8 & -1/8 & -1/8 \\ -3/16 & 0 & 3/16 & -3/16 & -3/16 & -1/16 & 1/16 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 5/16 & -5/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix} \tag{34}$$

là ma trận mà cột của nó xác định các hàm ϕ_i theo ξ như sau:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\xi) &= -\frac{15}{16}\xi + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^4 + \frac{3}{16}\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6 \\
\varphi_2(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 3\xi^4 - \xi^6 \\
\varphi_3(\xi) &= -\frac{15}{16}\xi + \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^4 + \frac{3}{16}\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6 \\
\varphi_4(\xi) &= -\frac{7}{16}\xi + \frac{9}{16}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{7}{8}\xi^4 - \frac{3}{16}\xi^5 + \frac{5}{16}\xi^6 \\
\varphi_5(\xi) &= -\frac{7}{16}\xi - \frac{9}{16}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^3 + \frac{7}{8}\xi^4 - \frac{3}{16}\xi^5 - \frac{5}{16}\xi^6 \\
\varphi_6(\xi) &= -\frac{1}{16}\xi + \frac{1}{16}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^4 - \frac{1}{16}\xi^5 + \frac{1}{16}\xi^6 \\
\varphi_7(\xi) &= \frac{1}{16}\xi + \frac{1}{16}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{16}\xi^5 + \frac{1}{16}\xi^6
\end{aligned}$$

Ta dễ dàng kiểm tra được là $L_i(\varphi_j) = \delta_{ij},\ \forall i, j = \overline{1, 7}$.

Định lý: Với tập $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7\}$ đã tìm được như trên ta sẽ kiểm tra đây là một cơ sở của $\mathbb{P}^5(K_a)$.

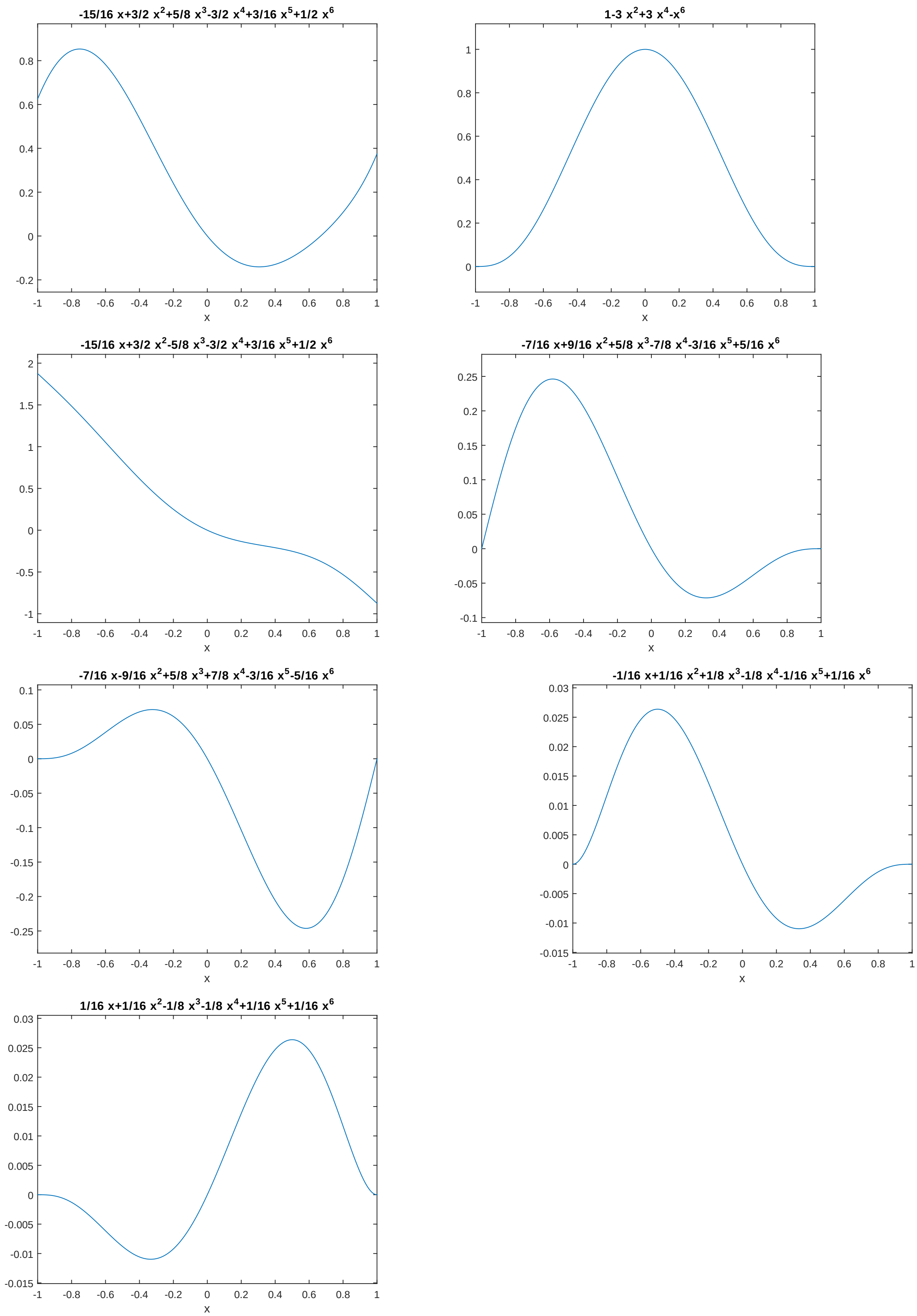


Figure 2: Hàm cơ sở Argyris bậc 6

Chứng minh. Với $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6,\ c_7 \in \mathbb{R}$ thỏa:

$$
\begin{aligned}
& c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5 + c_6\varphi_6 + c_7\varphi_7 = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix}
c_1\left(-\frac{15}{16}\xi + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^4 + \frac{3}{16}\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6\right) \\
c_2\left(1 - 3\xi^2 + 3\xi^4 - \xi^6\right) \\
c_3\left(-\frac{15}{16}\xi + \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^4 + \frac{3}{16}\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6\right) \\
c_4\left(-\frac{7}{16}\xi + \frac{9}{16}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{7}{8}\xi^4 - \frac{3}{16}\xi^5 + \frac{5}{16}\xi^6\right) \\
c_5\left(-\frac{7}{16}\xi - \frac{9}{16}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^3 + \frac{7}{8}\xi^4 - \frac{3}{16}\xi^5 - \frac{5}{16}\xi^6\right) \\
c_6\left(-\frac{1}{16}\xi + \frac{1}{16}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^4 - \frac{1}{16}\xi^5 + \frac{1}{16}\xi^6\right) \\
c_7\left(\frac{1}{16}\xi + \frac{1}{16}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{16}\xi^5 + \frac{1}{16}\xi^6\right)
\end{pmatrix} = 0,\ \forall \xi \in (-1,1)
\end{aligned}
$$

Vì phương trình trên đúng với mọi $\xi \in (-1,1)$ nên ta có hệ sau:

$$
L^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = 0
$$

Rõ ràng L^{-1} khả nghịch với $(L^{-1})^{-1} = L$ nên ta có phương trình trện có 1 nghiệm duy nhất chính là $(0,0,0,0,0,0)$.

Vậy ta có $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7\}$ là một cơ sở của $\mathbb{P}^6(K_a)$. $\square$

Sau khi xây dựng xong phần tử hữu hạn trên đoạn $(-1,1)$ ta sẽ chuyển qua một khoảng $K_m = (x_{m-1}, x_m)$ bất kì. Ta có hàm cơ sở tại x_0 là

$$\phi_3^{(0)} = \varphi_6(g_{K_1})$$

tương tự với hàm cơ sở ứng với x_M:

$$\phi_3^{(M)} = \varphi_7(g_{K_M})$$

còn ứng với các $x_i,\ i \in \overline{1, M-1}$ là:

$$\phi_1^{(i)} = \begin{cases} \varphi_1(g_{K_i}), & \text{trên } K_{i+1} \\ \varphi_3(g_{K_{i+1}}), & \text{trên } K_i \end{cases}$$

$$\phi_2^{(i)} = \begin{cases} \varphi_4(g_{K_i}), & \text{trên } K_{i+1} \\ \varphi_5(K_{i+1}), & \text{trên } K_i \end{cases}$$

$$\phi_3^{(i)} = \begin{cases} \varphi_6(g_{K_i}), \text{ trên } K_{i+1} \\ \varphi_7(g_{K_{i+1}}), \text{ trên } K_i \end{cases}$$

và ứng với $x_{i+1/2}, \ i \in \overline{0, M-1}$ là:

$$\phi^{i+1/2} = \varphi_2(g_{K_i})$$

Vậy ta có không gian các hàm cơ sở $V_{h,p}$ có số chiều là $N = 4M - 1$ và với mỗi $v_{h,p} \in V_{h,p}$ ta có thể biểu diễn:

$$v_{h,p} = u''(x_0)\phi_5^{(0)} + \sum_{i=1}^{M-1} \left(u(x_i)\phi_1^{(i)} + u'(x_i)\phi_2^{(i)} + u''(x_i)\phi_3^{(i)} \right) + \sum_{i=0}^{M-1} u\left(x_{i+1/2}\phi^{i+1/2}\right) + u''(x_M)\phi_6^{(M)} \tag{35}$$

Thay vào các phương trình ta sẽ được một hệ phương trình $4M - 1$ nghiệm ($M - 1$ giá trị $u(x_i)$, $M - 1$ giá trị $u'(x_i)$ và $M + 1$ giá trị $u''(x_i)$), M giá trị $u_{i+1/2}$ và $4M - 1$ phương trình.

References

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2010.

[2] Aurélien Larcher, Niyazi Cem Degirmenci. *Lecture note: The Finite Element Method.* Fall 2013.

[3] K.Eriksson, D.Estep, P.Hansbo and C.Johnson. *Computational Differential Equations.* February, 2009.

[4] Mats G.Larson, Fredrik Bengzon. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Practice.* Springer, 2009.

[5] Lawrence C.Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1997.

[6] Pavel Solín. *Partial Differential Equations and Finite Element Method* A John Wiley & Sons, Inc., Publication in 2005.

[7] Susanne C.Brenner, L.Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* Springer.