BÀI THỰC HÀNH LẦN 3
FINITE VOLUME METHOD

LƯU GIANG NAM[1,2]

MỤC LỤC

DANH SÁCH HÌNH VẼ

1 Mã số sinh viên: 1411174
2 Email: luugiangnam96@gmail.com

1 BÀI TOÁN POISSON HAI CHIỀU VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN DIRICLET

Giới thiệu bài toán:
Xét bài toán Poisson 2 chiều trên miền $\Omega = (0,1) \times (0,1)$:

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{1}$$

Ta sẽ giải bài toán (1) với điều kiện biên Dirichlet sau:

$$u(x,y) = u_d, \quad \text{on} \quad \Gamma = \partial\Omega \tag{2}$$

bằng Phương pháp Thể tích hữu hạn. Đầu tiên ta cần một số dữ liệu đầu vào và biết được số lần lặp lại của thuật toán. Dưới đây là đoạn code cho phần nhập:

```
%% Thong tin dau vao, Input.
ax=0.0;
bx=1.0;
ay=0.0;
by=1.0;
N = 8; % So cach chia tren truc Ox
M = 9; % So cach chia tren truc Oy
iteration=4;
ll = zeros(iteration,1);
norml2=zeros(iteration,1);
normh1=zeros(iteration,1);
```

1.1 Trường hợp $u_d = 0$

1.1.1 *Xây dựng lưới*

Xét miền $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Trên đoạn $[0,1]$, ta chọn hai phân hoạch $\left(x_{i+1/2}\right)_{i\in\overline{0,N_1}}$, $\left(y_{i+1/2}\right)_{j\in\overline{0,N_2}}$ thỏa mãn:

$$0 = x_{1\_2} < x_{3\_2} < \cdots < x_{N_1-1/2} < x_{N_1+1/2} = 1$$

$$0 = y_{1\_2} < y_{3\_2} < \cdots < y_{N_2-1/2} < y_{N_2+1/2} = 1T$$

Đặt $\mathfrak{T} = (T_{ij})_{i\in\overline{1,N_1},j\in\overline{1,N_2}}$ là một lưới của $(0,1) \times (0,1)$ thỏa mãn:

$$T_{ij} = \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right] \times \left[y_{i-1/2}, y_{i+1/2}\right]$$

Khi đó ta gọi T_{ij} là một control volume của $\mathfrak{T}$. Các điểm $x_{i+1/2}$, $y_{i+1/2}$ được gọi là các mesh point.

Khi đó, sau khi đã có các mesh point ta sẽ chọn các điểm $(x_i)_{i\in\overline{0,N_1+1}}$ và $(y_j)_{j\in\overline{0,N_2+1}}$ thỏa mãn:

$$x_0 \equiv x_{1/2},\ x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-1/2} + x_{i+1/2}\right),\ x_{N_1+1} \equiv x_{N_1+1/2} \tag{3}$$

$$y_0 \equiv y_{1/2},\ y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1/2} + y_{i+1/2}\right),\ y_{N_1+1} \equiv y_{N_1+1/2} \tag{4}$$

Khi đó cặp (x_i, y_j) được gọi là control point của control volume T_{ij}.
Đặt

$$h_i = \left|x_{i+1/2} - x_{i-1/2}\right|, \quad k_j = \left|y_{j+1/2} - y_{j-1/2}\right|, \text{ với mọi } i \in \overline{1,N_1},\ j \in \overline{1,N_2}$$

và

$$h_{i+1/2} = |x_{i+1} - x_i|, \quad k_{j+1/2} = \left|y_{j+1} - y_j\right|, \text{ với mọi } i \in \overline{0, N_1},\ j \in \overline{0, N_2}$$

Khi đó ta có diện tích của $T_{ij} = h_i k_j$, là độ dài lưới là $h = \max\{h_i, k_j\}$.

Code cho phần chia lưới:

```
dx = (bx-ax)/N;
dy = (by-ay)/M;


%% Tao luoi
x=zeros(N+1,1);
for i=1:N+1
    x(i)=(i-1)*dx;
end

x_cp=zeros(N+2,1);
for i=1:N+2
    if(i==1)
        x_cp(i)=x(i);
    else
        if(i==N+2)
            x_cp(i)=x(i-1);
        else
            x_cp(i)=(x(i-1)+x(i))/2.0;
        end
    end
end

y = zeros(M+1,1);
for j=1:M+1
    y(j)=(j-1)*dy;
end

y_cp=zeros(M+2,1);
for j=1:M+2
    if(j==1)
        y_cp(j)=y(j);
    else
        if(j==M+2)
            y_cp(j)=y(j-1);
        else
            y_cp(j)=(y(j-1)+y(j))/2.0;
        end
    end
end
```

1.1.2 *Phân rã bài toán*

Khi đó ta biến đổi (1) thành:

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} -\Delta u(x,y)dxdy = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)dxdy$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} u_{xx}dxdy - \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} u_{yy}dxdy = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)dxdy$$

Một cách rõ ràng hơn ta có:

$$-\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xx}dxdy - \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{yy}dxdy = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)dxdy \tag{5}$$

Ta lại có:

$$\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xx}dxdy = \int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2} u_x\left(x_{i+1/2,y}\right)dy - \int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2} u_x\left(x_{i-1/2,y}\right)dy$$

và

$$\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{yy}\,dxdy = \int_{x_{i-1/2}}^{x+1/2} u_y\left(x, y_{i+1/2}\right)dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x+1/2} u_y\left(x, y_{i-1/2}\right)dy$$

Thay vào ta có:

$$\begin{aligned}(5) \Leftrightarrow \frac{-1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right) + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i-1/2}, y\right)\\ -\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, y_{i+1/2}\right) + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, x_{i+1/2}\right)\\ = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

Ta sẽ xấp xỉ $\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right)$ như sau:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right) &= \frac{k_j u_x(x_{i+1/2}, y_j)}{|T_{ij}|}\\ &= \frac{u_x\left(x_{i+1/2}, y\right)}{h_i}\\ &= \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_i h_{i+1/2}}, \quad \text{theo khai triển Taylor}\end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right) = \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_i h_{i+1/2}} \tag{6}$$

Áp dụng (6) ta có các kết quả tương tự:

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i-1/2}, y\right) = \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i h_{i-1/2}} \tag{7}$$

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, y_{j+1/2}\right) = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k_j k_{j+1/2}} \tag{8}$$

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, y_{i-1/2}\right) = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k_j k_{j-1/2}} \tag{9}$$

Khi đó ta có xấp xỉ của bài toán là:

$$-\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_i h_{i+1/2}} + \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_i h_{i-1/2}} - \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k_j k_{i+1/2}} + \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k_j k_{j-1/2}} = f_{ij} \tag{10}$$

với $f_{ij} = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)dxdy$ ta giá trị trung bình của f trên T_{ij}.

Sắp xếp lai (10) ta được:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h_i h_{i-1/2}}u_{i-1,j} - \frac{1}{h_i h_{i+1/2}}u_{i+1,j} - \frac{1}{k_j k_{j-1/2}}u_{i,j-1} - \frac{1}{k_j k_{j+1/2}}u_{i,j+1}\\ +\left(\frac{1}{h_i h_{i-1/2}} + \frac{1}{h_i h_{i+1/2}} + \frac{1}{k_j k_{j-1/2}} + \frac{1}{k_j k_{j-1/2}}\right)u_{i,j} = f_{ij}\end{aligned}$$

Khi đó đặt

$$a_i = -\frac{1}{h_i h_{i-1/2}}, \quad b_i = -\frac{1}{h_i h_{i+1/2}} \tag{11}$$

$$cj = -\frac{1}{k_j k_{j-1/2}}, \quad d_j = -\frac{1}{k_j k_{j+1/2}} \tag{12}$$

$$s_{i,j} = a_i + b_i + c_j + d_j \tag{13}$$

Khi đó với mọi (i,j), $i \in [1, N_1], j \in [1, N_2]$ ta có phương trình phân rã sau:

$$a_i u_{i-1,j} + b_i u_{i+1,j} + c_j u_{i,j-1} + d_j u_{i,j+1} - s_{i,j} u_{i,j} = f_{i,j} \tag{14}$$

Kết hợp với điều kiện biên ta có:

$$u_{0,j} = u_{N_1+1,j} = 0, \quad j \in \overline{1, N_2} \tag{15}$$
$$u_{i,0} = u_{i,N_2+1} = 0, \quad i \in \overline{1, N_1} \tag{16}$$

1.1.3 *Ma trận sau khi phân rã*

Từ phương trình phân rã (14) và điều kiện biên (15) và (16) ta có ma trận mô tả các phương trình của hệ phương trình vừa xây dựng được là $Au = f$ với:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & D_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_2 & A_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots \ddots \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{N_2-1} & D_{N_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{N_2} & A_{N_2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

với đại lượng cần tìm là $(u_{j,i})$, $i = 1, \cdots N_1, j = 1, \cdots N_2$ có dạng:

$$u = (u_{1,1}, u_{1,2}, \cdots, u_{1,N_1}; u_{2,1}, u_{2,2}, \cdots, u_{2,N_1}; \cdots; u_{N_2,1}, u_{N_2,2}, \cdots, u_{N_2,N_1})^T \tag{18}$$

và

$$f = (f_{1,1}, f_{1,2}, \cdots, f_{1,N_1}; f_{2,1}, f_{2,2}, \cdots, f_{2,N_1}; \cdots; f_{N_2,1}, f_{N_2,2}, \cdots, f_{N_2,N_1})^T \tag{19}$$

và trong định nghĩa ma trận A ta cần phải định nghĩa trên các ma trận sau:

$$A_i = \begin{pmatrix} -s_{i,1} & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -s_{i,2} & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s_{i,N_1-1} & b_{N_1-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N_1} & -s_{i,N_1} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_i & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_i \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$D_i = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_i & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \tag{22}$$

Code ma trận A trên Matlab:

```
%% Tao ma tran A

A=zeros(N*M,N*M);
B=sparse(N,N);
C=sparse(N,N);
D=sparse(N,N);
for j=1:M
    c1 = -1/((y(j+1) - y(j))*(y_cp(j+1) - y_cp(j)));
    for i=1:N
        C(i,i)=c1;
    end
```

```
    d1 = -1/((y(j+1) - y(j))*(y_cp(j+2) - y_cp(j+1)));
    for i=1:N
        D(i,i)=d1;
    end
    for i=1:N
        a1 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+1) - x_cp(i)));
        b1 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+2) - x_cp(i+1)));
        if(i==1)
            B(i,i)=-(a1+ b1 + c1 + d1);
            B(i,i+1)=b1;
        else
            if(i==N)
                B(i,i)=-(a1+ b1 + c1 + d1);
                B(i,i-1)=a1;
            else
                B(i,i)=-(a1+ b1 + c1 + d1);
                B(i,i-1)=a1;
                B(i,i+1)=b1;
            end
        end
    end
    if(j==1)
        A((j-1)*N+1:j*N,(j-1)*N+1:j*N)=B;
        A((j-1)*N+1:j*N,j*N+1:(j+1)*N)=D;
    else
        if(j==M)
            A((j-1)*N+1:j*N,(j-1)*N+1:j*N)=B;
            A((j-1)*N+1:j*N,(j-2)*N+1:(j-1)*N)=C;
        else
            A((j-1)*N+1:j*N,(j-1)*N+1:j*N)=B;
            A((j-1)*N+1:j*N,j*N+1:(j+1)*N)=D;
            A((j-1)*N+1:j*N,(j-2)*N+1:(j-1)*N)=C;
        end
    end
end
```

Tạo vector F của vế phải:

```
%% Tao vector ve phai F
F=zeros(N*M,1);
for j=1:M
    for i = 1:N
        F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
             f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4;
    end
end
```

1.1.4 *Biểu diễn nghiệm xấp xỉ và sai số*

Sau khi có A và F thì ta chỉ cần thêm dòng lệnh:

```
%% Tim nghiem xap xi u
u=A\F;
```

để tìm được nghiệm xấp xỉ u.

Để so sánh được sai số ta cần ma trận chứa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ (có biên).

```
 %% Tao ma tran cho ket qua chinh xac
u_ex=zeros(M+2,N+2);
for j=1:M+2
    for i=1:N+2
        u_ex(j,i)=u_exact(x_cp(i),y_cp(j));
    end
```

```
    end

    %% Tao ma tran chua ket qua xap xi va bien
    u_dis=u_ex;
    for j=1:M
        for i=1:N
            u_dis(j+1,i+1)=u((j-1)*N+i); %Ma tran se co dang (M+1)x(N+1)
        end
    end
```

Sau khi đã có ma trận chứa nghiệm xấp xỉ và ma trận chứa nghiệm chính xác, chúng ta sẽ bắt tay vào tính sai số:

```
    %% Tinh sai so
    for i=1:N
        for j = 1:M
            norml2(jj)=norml2(jj)+(u_dis(j+1,i+1)...
            -u_ex(j+1,i+1))^2*(x(i+1)-x(i))*(y(j+1)-y(j));
        end
    end
    norml2(jj)=sqrt(norml2(jj)); % Sai so trong L^2
    for i=1:N
        for j=1:M
            normh1(jj)=normh1(jj)+((u_dis(j+1,i)-u_ex(j+1,i))-...
            (u_dis(j,i)-u_ex(j,i)))^2*(x(i+1)-x(i))/(y_cp(j+1)-y_cp(j)) ...
                + ((u_dis(j,i+1)-u_ex(j,i+1))-(u_dis(j,i)-...
            u_ex(j,i)))^2*(y_cp(j+1)-y_cp(j))/(x(i+1)-x(i));
        end
    end

    normh1(jj)=sqrt(normh1(jj)); % Sai so trong H^1
    ll(jj) = N*M;
```

Cuối cùng là vẽ nghiệm xấp xỉ,

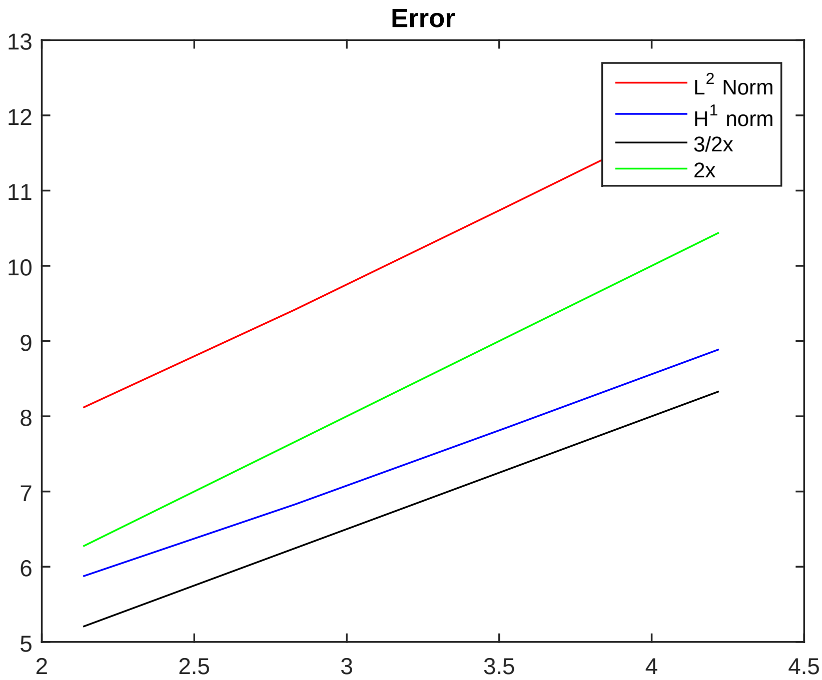
```
    %% Ve nghiem xap xi
    figure
    surf(x_cp,y_cp,u_dis)
    %% Ve bac sai so va so sanh voi duong thang 2x, 3/2x
    figure
    plot(log(ll.^(1/2)),-log(norml2),'r', log(ll.^(1/2)), ...
        -log(normh1),'blue', log(ll.^(1/2)),1.5*log(ll.^(1/2))+2, ...
        'black', log(ll.^(1/2)), 2*log(ll.^(1/2))+2,'green');
    title('Error');
    legend('L^2 Norm', 'H^1 norm', '3/2x', '2x')
```

1.1.5 *Một số ví dụ*

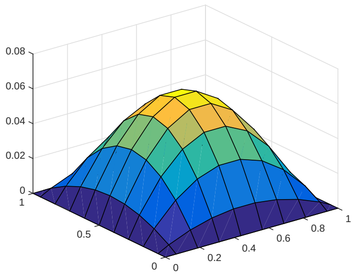
Ví dụ 1: Ta sẽ xét $f = -2(x^2 + y^2) + 2(x + y)$ khi đó:

$$u = (x^2 - x)(y^2 - y)$$

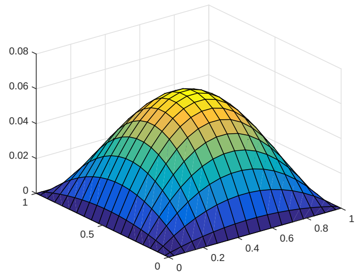
Khi đó một số ảnh minh họa và bậc xấp xỉ cho ví dụ 1:



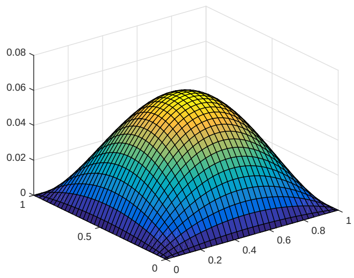
Hình 1: Bậc sai số của Ví dụ 1 - Dirichlet thuần nhất



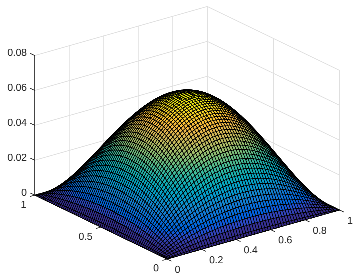
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai



(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

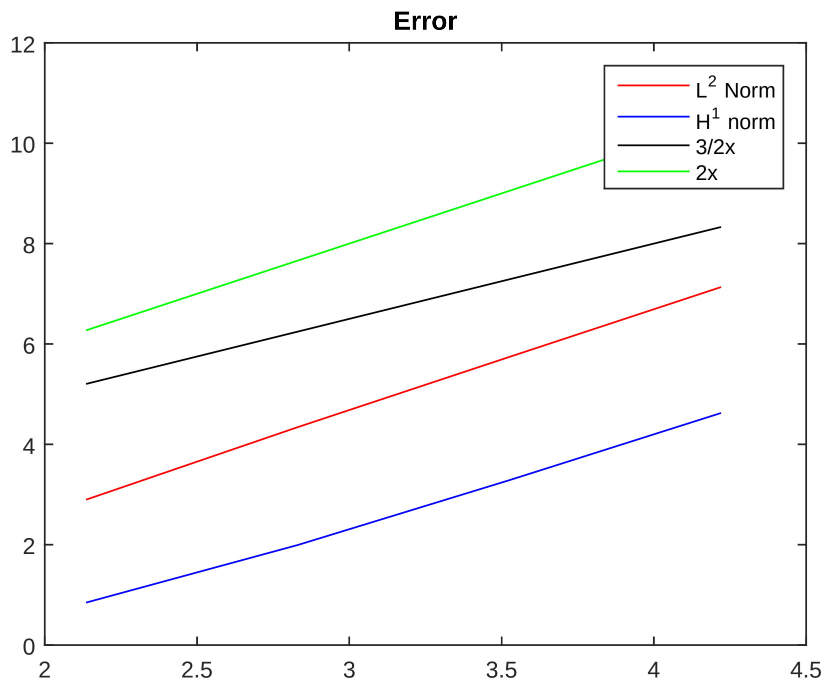
Hình 2: Ví dụ 1 được mô phỏng qua 4 lần chia lưới mịn hơn

NHẬN XÉT: Ta thấy nghiệm bậc sai số của L^2 song song $2x$ (red và green) và trong H^1 song song $\frac{3}{2}x$ (blue và black), đúng nhưng lý thuyết chứng minh được.

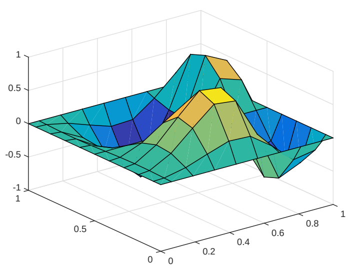
Ví dụ 2: Ta sẽ xét $f = \left((4\pi x)^2 + (2\pi)^2\right)\sin(2\pi x^2)\sin(2\pi y) - 4\pi\cos(2\pi x^2)\sin(2\pi y)$ khi đó:

$$u(x, y) = \sin(2\pi x^2)\sin(2\pi y)$$

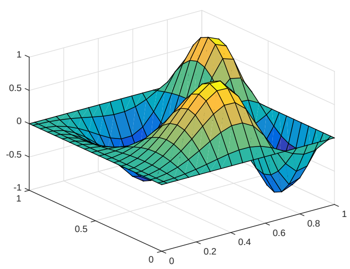
Khi đó một số ảnh minh họa và bậc xấp xỉ cho ví dụ 1:



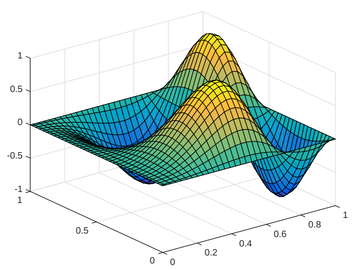
Hình 3: Bậc sai số Ví dụ 2 - Dirichlet thuần nhất



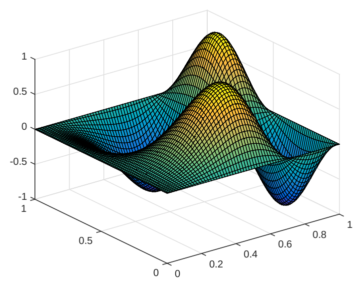
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai



(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 4: Ví dụ 2 được mô phỏng qua 4 lần chia lưới mịn hơn

NHẬN XÉT: Ta thấy nghiệm bậc sai số của L^2 "gần" song song với $2x$ (red và green) và trong H^1 "gần" song song với $\frac{3}{2}x$ (blue và black), đúng nhưng lý thuyết chứng minh được (ở đây gần đúng là vì đối với những làm phức tạp như $\sin \& \cos$ thì sai số sẽ khó kiểm soát hơn hàm đa thức).

1.2 Trường hợp $u_d \neq 0$

Trường hợp này ta cũng chia lưới và làm tương tự như trường hợp $u_d = 0$. Nhưng vì $u_{0,j} \neq 0$ và $u_{i,0} \neq 0$ nên ta phải thay đổi như sau:

1.2.1 *Phân rã bài toán*

Khi đó ta có xấp xỉ của bài toán là:

$$-\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_i h_{i+1/2}} + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_i h_{i-1/2}} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_j k_{i+1/2}} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k_j k_{j-1/2}} = f_{ij} \tag{23}$$

với $f_{ij} = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)dxdy$ ta giá trị trung bình của f trên T_{ij}.
Sắp xếp lai (23) ta được:

$$-\frac{1}{h_i h_{i-1/2}}u_{i-1,j} - \frac{1}{h_i h_{i+1/2}}u_{i+1,j} - \frac{1}{k_j k_{j-1/2}}u_{i,j-1} - \frac{1}{k_j k_{j+1/2}}u_{i,j+1}$$
$$+\left(\frac{1}{h_i h_{i-1/2}} + \frac{1}{h_i h_{i+1/2}} + \frac{1}{k_j k_{j-1/2}} + \frac{1}{k_j k_{j-1/2}}\right)u_{i,j} = f_{ij}$$

Khi đó đặt

$$a_i = -\frac{1}{h_i h_{i-1/2}}, \quad b_i = -\frac{1}{h_i h_{i+1/2}} \tag{24}$$
$$cj = -\frac{1}{k_j k_{j-1/2}}, \quad d_j = -\frac{1}{k_j k_{j+1/2}} \tag{25}$$
$$s_{i,j} = a_i + b_i + c_j + d_j \tag{26}$$

Khi đó với mọi (i,j), $i \in [1, N_1], j \in [1, N_2]$ ta có phương trình phân rã sau:

$$a_i u_{i-1,j} + b_i u_{i+1,j} + c_j u_{i,j-1} + d_j u_{i,j+1} - s_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j} \tag{27}$$

Kết hợp với điều kiện biên ta có:

$$u_{0,j} = u(0, y_j), \quad u_{N_1+1,j} = u(1, y_j), \quad j \in \overline{1, N_2} \tag{28}$$
$$u_{i,0} = u(x_i, 0), \quad u_{i,N_2+1} = u(x_i, 1), \quad i \in \overline{1, N_1} \tag{29}$$

Vậy nếu

1. $i = 1$ thì
   a) $j = 1$
   $$b_1 u_{2,1} + d_1 u_{1,2} - s_{1,1}u_{1,1} = f_{1,1} - a_1 u(0, y_1) - c_j u(x_1, 0)$$
   b) $j = N_2$
   $$b_1 u_{2,N_2} + c_{N_2} u_{1,N_2-1} - s_{1,N_2} u_{1,N_2} = f_{1,N_2} - a_1 u(0, y_{N_2}) - c_j u(x_1, 0)$$
   c) Những trường hợp còn lại:
   $$b_1 u_{2,j} + c_j u_{1,j-1} + d_j u_{1,j+1} - s_{1,j} u_{1,j} = f_{1,j} - a_1 u(0, y_j)$$

2. $i = N_1$ thì
   a) $j = 1$

$$a_{N_1} u_{N_1-1,1} + d_1 u_{N_1,2} - s_{N_1,1} u_{N_1,1} = f_{i,j} - b_{N_1} u(1, y_1) - c_1 u(N_1, 0)$$

   b) $j = N_2$

$$a_{N_1} u_{N_1-1,N_2} + c_{N_2} u_{N_1,N_2-1} - s_{N_1,N_2} u_{N_1,N_2} = f_{N_1,N_2} - b_{N_1} u(1, N_2) - d_{N_2} u(x_{N_1}, 1)$$

   c) Những trường hợp còn lại:

$$a_1 u_{N_1-1,j} + c_j u_{N_1,j-1} + d_j u_{N_1,j+1} - s_{N_1,j} u_{N_1,j} = f_{1,j} - b_{N_1} u(1, y_j)$$

3. Những trường hợp còn lại:
   a) $j = 1$

$$a_i u_{i-1,1} + b_i u_{i+1,1} + d_i u_{i,2} - s_{i,1} u_{i,1} = f_{i,1} - c_1 u(x_i, 0)$$

   b) $j = N_2$

$$a_i u_{i-1,N_2} + b_i u_{i+1,N_2} + c_{N_2} u_{i,N_2-1} - s_{i,N_2} u_{i,N_2} = f_{i,N_2} - d_{N_2} u(x_i, 1)$$

   c) Những trường hợp còn lại:

$$a_i u_{i-1,j} + b_i u_{i+1,j} + c_j u_{i,j-1} + d_j u_{i,j+1} - s_{i,j} u_{i,j} = f_{i,j}$$

1.2.2 *Ma trận sau khi phân rã*

Từ phương trình phân rã (14) và điều kiện biên (15) và (16) ta có ma trận mô tả các phương trình của hệ phương trình vừa xây dựng được là $Au = f$ với:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & D_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_2 & A_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{N_2-1} & D_{N_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{N_2} & A_{N_2} \end{pmatrix} \tag{30}$$

với đại lượng cần tìm là (u_{ij}), $i = 1, \cdots N_1, j = 1, \cdots N_2$ có dạng:

$$u = (u_{1,1}, u_{1,2}, \cdots, u_{1,N_2}; u_{2,1}, u_{2,2}, \cdots, u_{2,N_2}; \cdots; u_{N_1,1}, u_{N_1,2}, \cdots, u_{N_1,N_2})^T \tag{31}$$

và $f \in M_{N_1 \times N_2, 1}$ thỏa mãn các xây dựng phía trên,
Trong định nghĩa ma trận A ta cần phải định nghĩa trên các ma trận sau:

$$A_i = \begin{pmatrix} -s_{i,1} & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -s_{i,2} & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s_{i,N_1-1} & b_{N_1-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N_1} & -s_{i,N_1} \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_i & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_i \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$D_i = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_i & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} - c_1 u(x_1, 0) - a_1 u(0, y_1) \\ \vdots \\ f_{1,i} - c_1 u(x_i, 0) \\ \vdots \\ f_{1,N_1} - c_1 u(x_{N_1}, 0) - a_{N_1} u(0, y_1) \\ \vdots \\ f_{j,1} - a_1 u(0, y_2) \\ \vdots \\ f_{j,i} \\ \vdots f_{j,N_1} - b_{N_1} u(0, y_j) \\ \vdots \\ f_{N_2,1} - d_{N_2} u(x_1, 0) - a_1 u(0, y_{N_1}) \\ \vdots \\ f_{1,i} - d_i u(x_i, 0) \\ \vdots \\ f_{N_2,N_1} - c_{N_2} u(x_{N_1}, 0) - a_{N_1} u(0, y_{N_2}) \end{pmatrix} \tag{35}$$

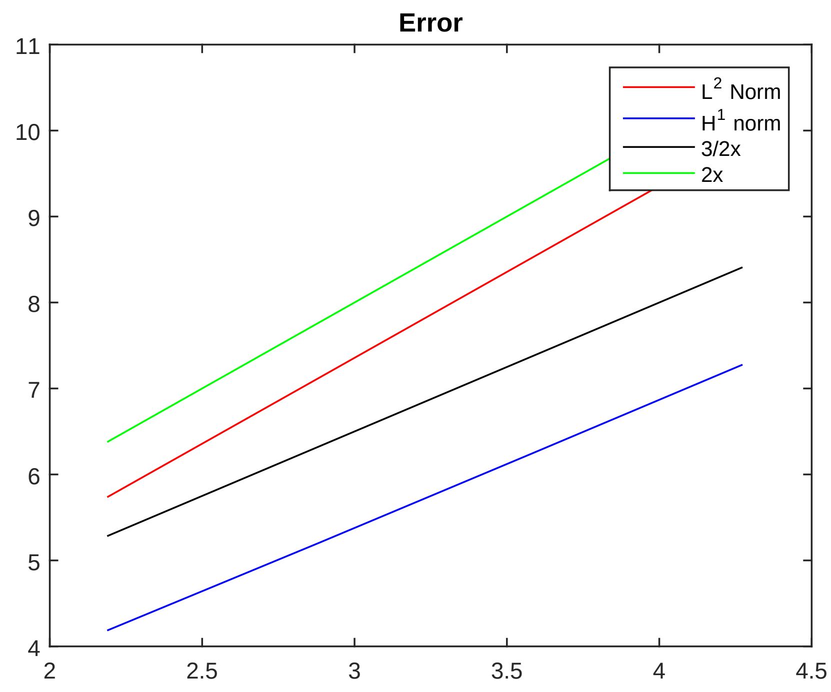
Ở đây ma trận A và các bước còn lại làm y như $u_d = 0$, chỉ khác code tại vector F.

```
%% Create vector F
F=zeros(N*M,1);
for j=1:M
    c0 = -1/((y(j+1) - y(j))*(y_cp(j+1) - y_cp(j)));
    d0 = -1/((y(j+1) - y(j))*(y_cp(j+2) - y_cp(j+1)));
    if(j==1)
        for i =1:N
            a0 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+1) - x_cp(i)));
            b0 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+2) - x_cp(i+1)));
            if(i==1)
                F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                    f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                    c0*u_exact(x_cp(i+1),0) - ...
                    a0*u_exact(0,y_cp(j+1));
            elseif(i==N)
                F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                    f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                    c0*u_exact(x_cp(i+1),0) - ...
                    b0*u_exact(1,y_cp(j+1));
            else
                F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                    f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                    c0*u_exact(x_cp(i+1),0);
            end
        end
    elseif(j==M)
        for i =1:N
            a0 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+1) - x_cp(i)));
            b0 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+2) - x_cp(i+1)));
            if(i==1)
                F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                    f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                    d0*u_exact(x_cp(i+1),1) - ...
                    a0*u_exact(0,y_cp(j+1));
            elseif(i==N)
                F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                    f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                    d0*u_exact(x_cp(i+1),1) - ...
                    b0*u_exact(1,y_cp(j+1));
            else
```

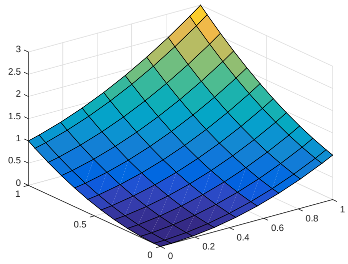
```
                        F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                            f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                            d0*u_exact(x_cp(i+1),1) ;
                    end
                end
            else
                for i =1:N
                    a0 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+1) - x_cp(i)));
                    b0 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+2) - x_cp(i+1)));
                    if(i==1)
                        F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                            f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                            a0*u_exact(0,y_cp(j+1));
                    elseif(i==N)
                        F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                            f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4 - ...
                            b0*u_exact(1,y_cp(j+1));
                    else
                        F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                            f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4;
                    end
                end
            end
        end
```

1.2.3 *Một số ví dụ*

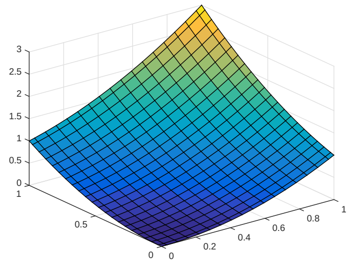
Ví dụ 1: Ta sẽ xét $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$ và $f(x) = -4$.
Khi đó một số ảnh minh họa và bậc xấp xỉ cho ví dụ 1:



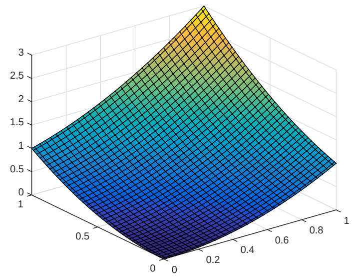
Hình 5: Bậc sai Ví dụ - Dirichlet không thuần nhất



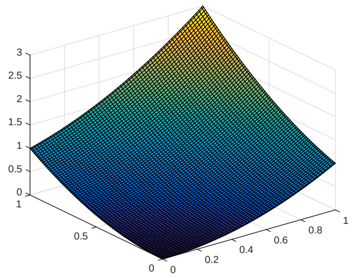
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai



(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 6: Ví dụ được mô phỏng qua 4 lần chia lưới mịn hơn

NHẬN XÉT: Ta thấy nghiệm bậc sai số của L^2 song song $2x$ (red và green) và trong H^1 song song $\frac{3}{2}x$ (blue và black), đúng nhưng lý thuyết chứng minh được.

1.3 So sánh lưới vuông và lưới chữ nhật với các điều kiện của control point

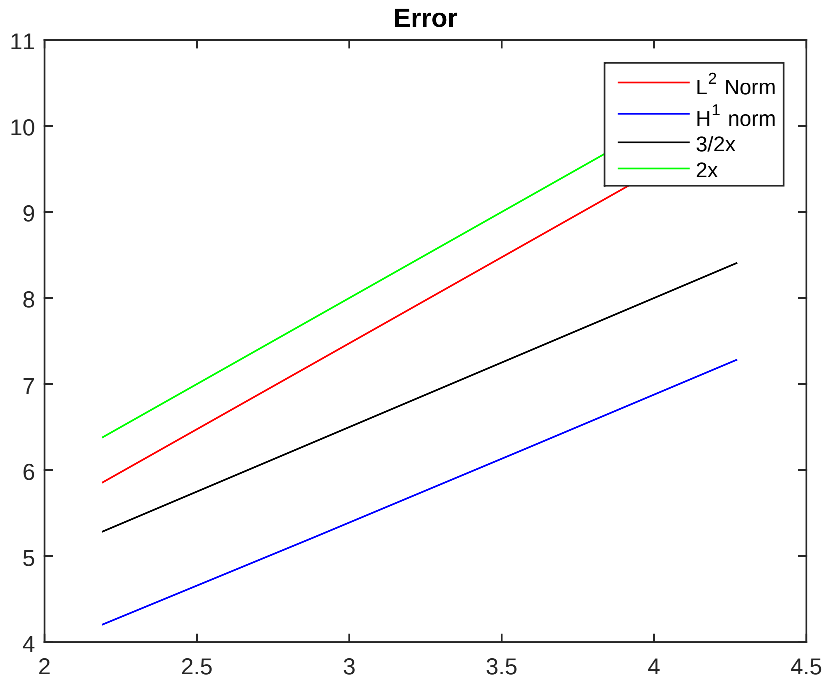
Như các ví dụ trên của $u_d = 0$ và $u_d \neq 0$ ta sử dụng lưới hình chữ nhật với control point là điểm giữa. Nay ta sẽ cho $N_1 = N_2$ để tạo lưới vuông.
Ta sẽ dùng lại ví dụ 1 của trường hợp $u_d \neq 0$. Ví dụ: $u(x, y) = x^2 + xy + y^2$ và $f(x) = -4$.

1.3.1 *Lưới chữ nhật và control point không là điểm giữa*

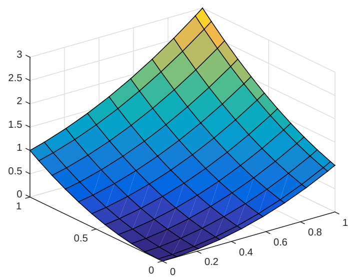
Ở đây cụ thể là $N_1 = 8,\ N_2 = 10$ và

$$x_0 \equiv x_{1/2},\ x_i = \frac{1}{3}x_{i-1/2} + \frac{2}{3}x_{i+1/2},\ x_{N_1+1} \equiv x_{N_1+1/2} \tag{36}$$

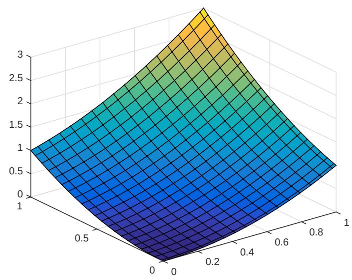
$$y_0 \equiv y_{1/2},\ y_i = \frac{2}{3}y_{i-1/2} + \frac{1}{3}y_{i+1/2},\ y_{N_1+1} \equiv y_{N_1+1/2} \tag{37}$$



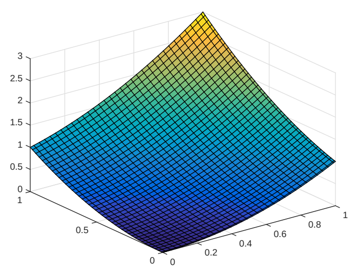
Hình 7: Bậc sai số ưới chử nhật và control point không là điểm giữa



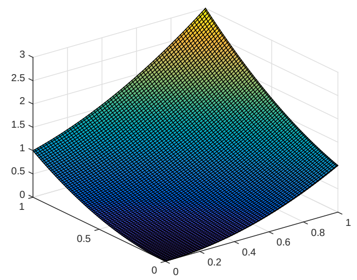
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai



(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 8: Xấp xỉ ví dụ với trường hợp lưới hình chử nhật, control point không là điểm giữa

Dưới đây là kết quả tính xấp xỉ sau các lần chia lưới min hơn của trường hợp lưới hình chử nhật.

Lần lập	Chuẩn L^2	Chuẩn H^1
1	0.002857364860624	0.014905610996424
2	0.000715628697559	0.005415237716119
3	0.000179008890846	0.001937381491436
4	0.000044759899214	0.000688528712215

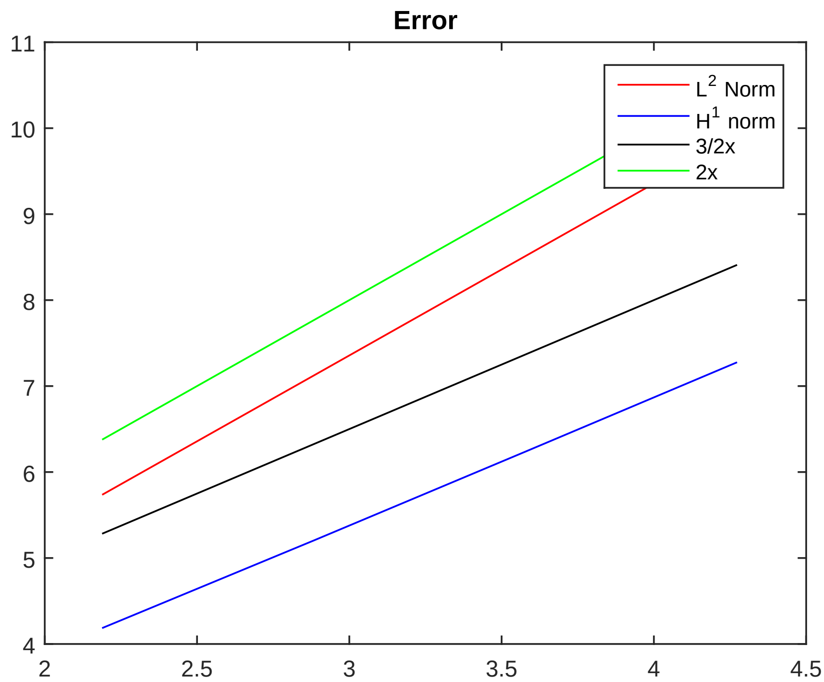
Bảng 1: Bảng sai số cho trường hợp lưới hình chữ nhật.

1.3.2 *Lưới chữ nhật và control point là điểm giữa*

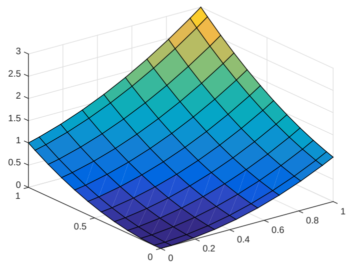
Ở đây cụ thể là $N_1 = 8, \ N_2 = 10$ và

$$x_0 \equiv x_{1/2}, \ x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}, \ x_{N_1+1} \equiv x_{N_1+1/2} \tag{38}$$

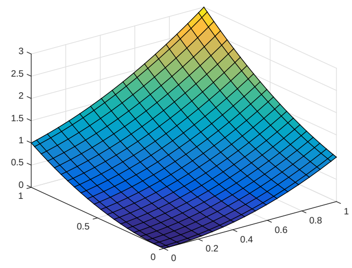
$$y_0 \equiv y_{1/2}, \ y_i = \frac{y_{i-1/2} + y_{i+1/2}}{2}, \ y_{N_1+1} \equiv y_{N_1+1/2} \tag{39}$$



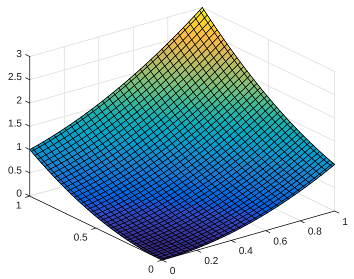
Hình 9: Bậc sai số lưới hình chữ nhật và control point là điểm giữa



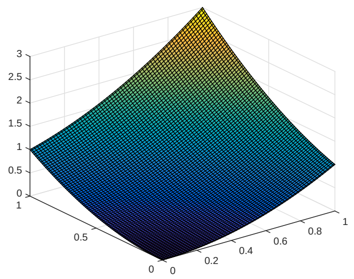
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai



(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 10: Xấp xỉ ví dụ với trường hợp lưới hình chữ nhật, control point là điểm giữa

Dưới đây là kết quả tính xấp xỉ sau các lần chia lưới min hơn của trường hợp lưới hình chữ nhật, control point là điểm giữa.

Lần lặp	Chuẩn L^2	Chuẩn H^1
1	0.003212705433940	0.015166726440692
2	0.000804931484052	0.005487368423004
3	0.000201373317158	0.001957240727117
4	0.000050354015177	0.000694173581415

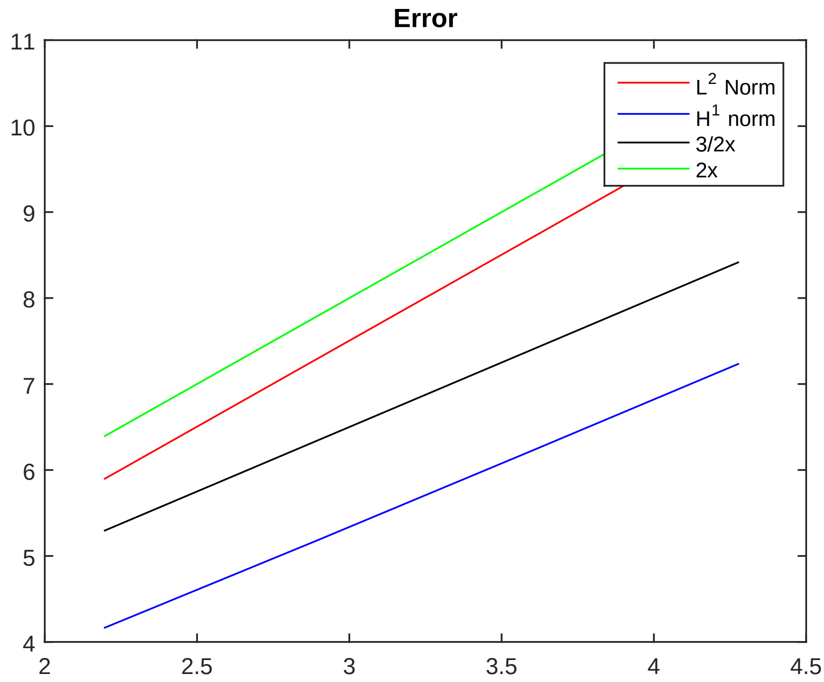
Bảng 2: Bảng sai số cho trường hợp lưới hình chữ nhật.

1.3.3 *Lưới vuông và control point không là điểm giữa*

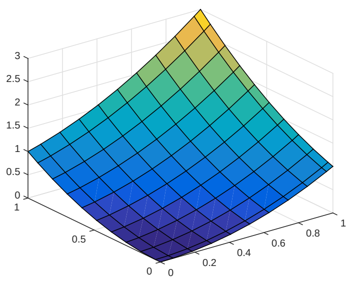
Ở đây cụ thể là $N_1 = N_2 = 9$ và

$$x_0 \equiv x_{1/2},\ x_i = \frac{1}{3}x_{i-1/2} + \frac{2}{3}x_{i+1/2},\ x_{N_1+1} \equiv x_{N_1+1/2} \tag{40}$$

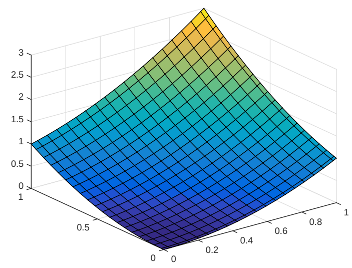
$$y_0 \equiv y_{1/2},\ y_i = \frac{2}{3}y_{i-1/2} + \frac{1}{3}y_{i+1/2},\ y_{N_1+1} \equiv y_{N_1+1/2} \tag{41}$$



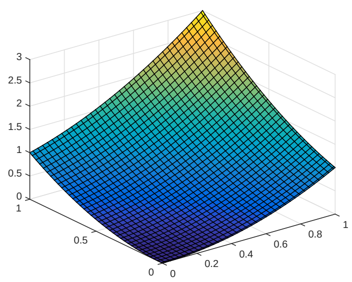
Hình 11: Bậc sai số lưới vuông, control point không là điểm giữa



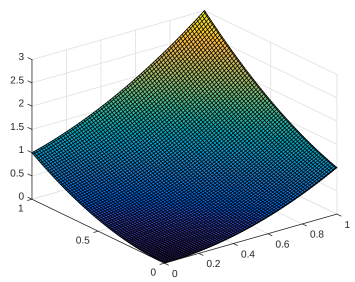
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai



(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 12: Xấp xỉ lưới là hình vuông, control point không là điểm giữa

Dưới đây là kết quả tính xấp xỉ sau các lần chia lưới min hơn của trường hợp lưới hình vuông.

Lần lặp	Chuẩn L^2	Chuẩn H^1
1	0.002743484224966	0.015519490396413
2	0.000685871056242	0.005655837620876
3	0.000171467764060	0.002028833944823
4	0.000042866941026	0.000722406530626

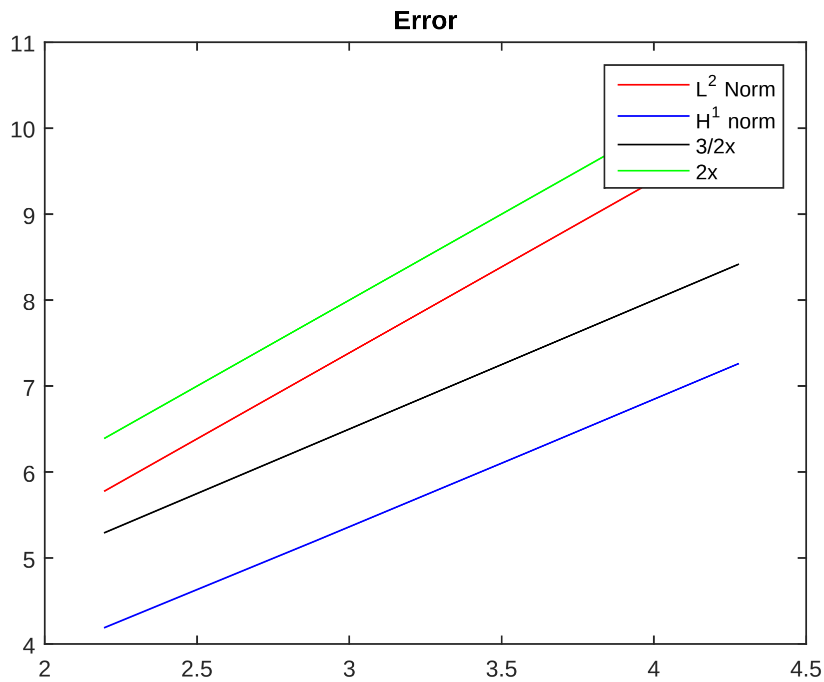
Bảng 3: Bảng sai số cho trường hợp lưới hình vuông.

1.3.4 *Lưới vuông và control point là điểm giữa*

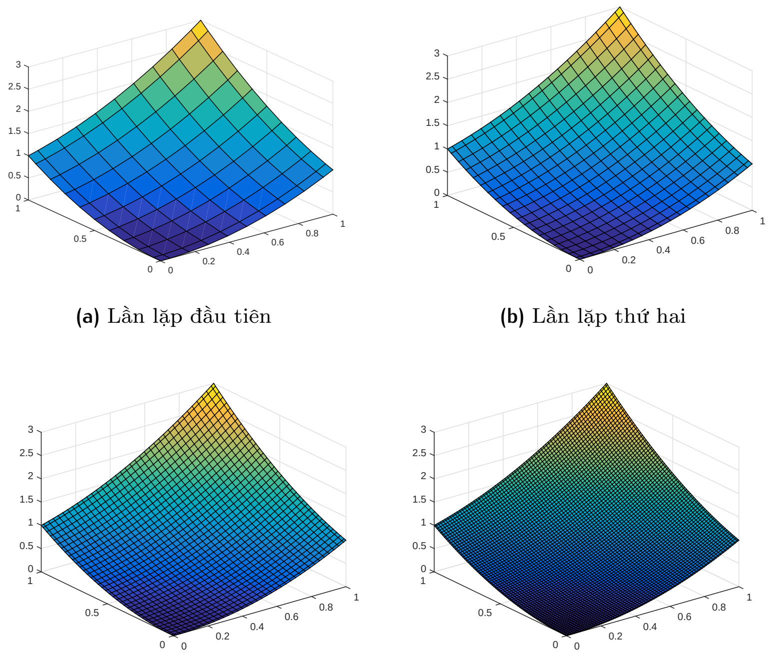
Ở đây cụ thể là $N_1 = N_2 = 9$ và

$$x_0 \equiv x_{1/2},\ x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2},\ x_{N_1+1} \equiv x_{N_1+1/2} \tag{42}$$

$$y_0 \equiv y_{1/2},\ y_i = \frac{y_{i-1/2} + y_{i+1/2}}{2},\ y_{N_1+1} \equiv y_{N_1+1/2} \tag{43}$$



Hình 13: Bậc sai số cho trường hợp lưới vuông, control point là điểm giữa



(a) Lần lặp đầu tiên

(b) Lần lặp thứ hai

(c) Lần lặp thứ ba

(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 14: Xấp xỉ ví dụ với trường hợp lưới vuông, control point là điểm giữa

Dưới đây là kết quả tính xấp xỉ sau các lần chia lưới min hơn của trường hợp lưới hình vuông, control point là điểm giữa

Lần lặp	Chuẩn L^2	Chuẩn H^1
1	0.003086419753087	0.015120307054218
2	0.000771604938272	0.005510361441777
3	0.000192901234570	0.001976649453311
4	0.000048225308660	0.000703825208309

Bảng 4: Bảng sai số cho trường hợp lưới hình vuông.

1.3.5 *Kết luận*

Rõ ràng qua Bảng 1, Bảng 2, Bảng 3 và Bảng 4 ta có được nhận xét sau:

LƯỚI CHIA HÌNH VUÔNG SẼ TỐT HƠN HÌNH CHỮ NHẬT. CONTROL POINT NÊN LÀ ĐIỂM GIỮA ĐỂ SAI SỐ TỐT HƠN. Điều này tương tự với khi làm 1 chiều là chia đều đoạn thẳng vẫn tốt hơn khi chia với các tỉ số khác $(1/_2, 1/_2)$ và $x_{x+1/_2} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ là tốt nhất.

1.4 Một số cách xấp xỉ khác cho f_{ij}

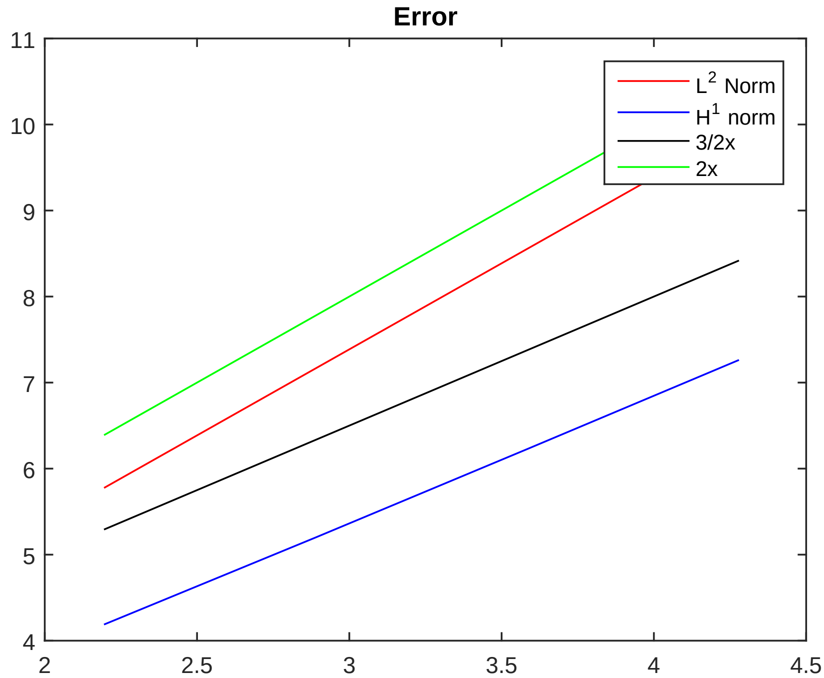
Ta vẫn sẽ xét bài toán $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$ và $f(x) = -4$ như các bài trên. Để cho các xấp xỉ tốt bài viết sẽ dùng cách chia lưới vuông và control point là điểm giữa.

1.4.1 *Quy tắc hình thang, Trapezoidal Rule*

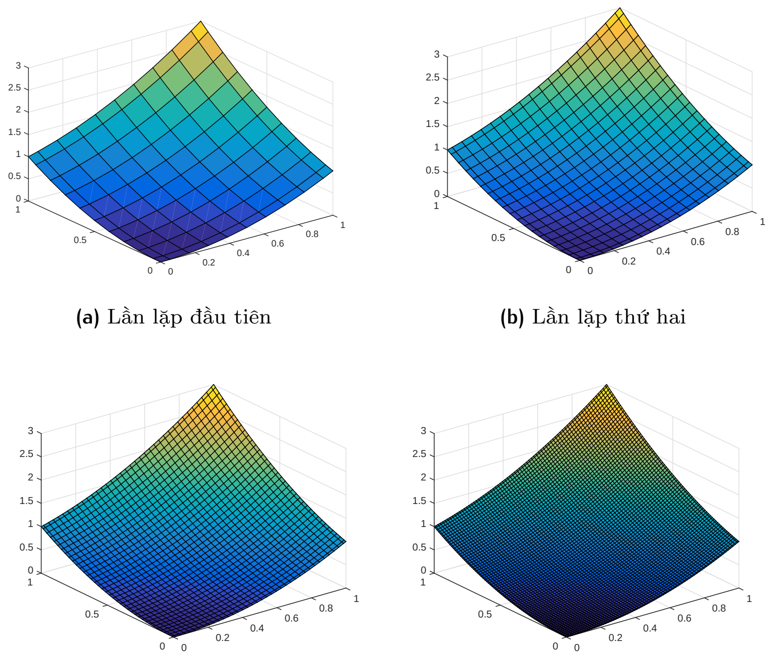
Đây là quy tắc đã được sử dụng cho các bài toán trên, công thức là:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(x) = \frac{1}{4h_i k_j} \left[f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i+1}, y_{j+1}) \right] \quad (44)$$

Khi đó ta sẽ có kết quả như sau:



Hình 15: Bậc sai số ví dụ khi xấp xỉ f_{ij} bằng Trapezoidal



(a) Lần lặp đầu tiên

(b) Lần lặp thứ hai

(c) Lần lặp thứ ba

(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 16: Xấp xỉ ví dụ khi xấp xỉ f_{ij} bằng Trapezoidal

Dưới đây là kết quả tính xấp xỉ sau các lần chia lưới min hơn của trường hợp xấp xỉ f_{ij} bằng Trapezoidal.

Lần lặp	Chuẩn L^2	Chuẩn H^1
1	0.003086419753087	0.015120307054218
2	0.000771604938272	0.005510361441777
3	0.000192901234570	0.001976649453311
4	0.000048225308660	0.000703825208309

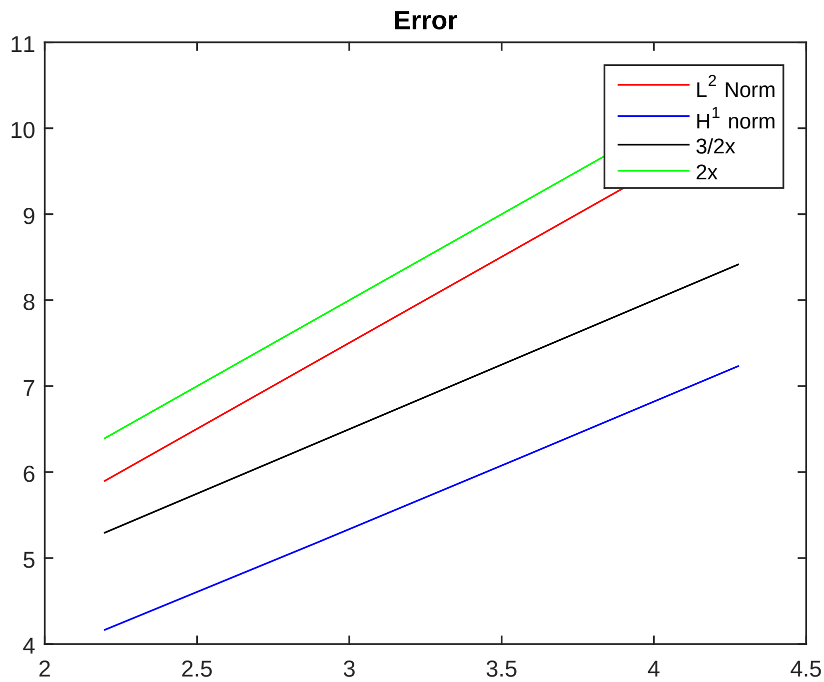
Bảng 5: Bảng sai số cho trường hợp lưới hình vuông.

1.4.2 *Quy tắc điểm giữa*

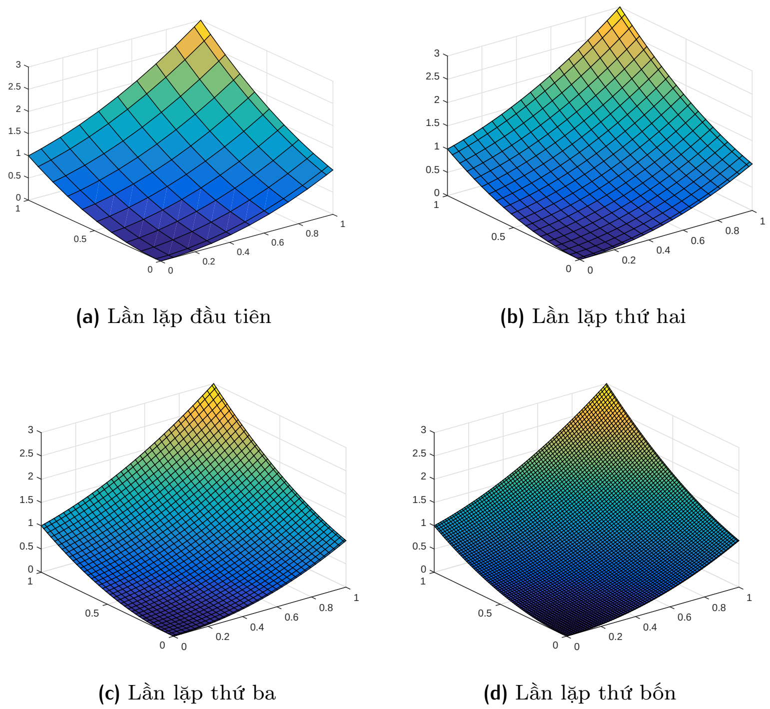
Công thức là:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(x) = h_i k_j f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right) \tag{45}$$

Khi đó ta sẽ có kết quả như sau:



Hình 17: Bậc sai số ví dụ khi xấp xỉ f_{ij} bằng Midpoint



(a) Lần lặp đầu tiên

(b) Lần lặp thứ hai

(c) Lần lặp thứ ba

(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 18: Xấp xỉ ví dụ khi xấp xỉ f_{ij} bằng Midpoint

Dưới đây là kết quả tính xấp xỉ sau các lần chia lưới min hơn của trường hợp xấp xỉ f_{ij} bằng Midpoint.

Lần lặp	Chuẩn L^2	Chuẩn H^1
1	0.002743484224966	0.015519490396413
2	0.000685871056242	0.005655837620876
3	0.000171467764060	0.002028833944823
4	0.000042866941026	0.000722406530626

Bảng 6: Bảng sai số cho trường hợp lưới hình vuông.

1.4.3 *Kết luận*

Ta dễ thấy từ hai bảng 5 và 6 là quy tắc hình thang (Trapezoidal) vẫn tốt hơn quy tắc điểm giữa, tức là kết quả sẽ hội tụ về 0 nhanh hơn. Điều này cũng có thể giải thích được là vì độ chênh lệch sai số là vì sai số cho Trapezoidal bé hơn (tốt hơn) midpoint.

2 BÀI TOÁN POISSON VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN NEUMANN THUẦN NHẤT

Giới thiệu bài toán:
Xét bài toán Poisson 2 chiều trên miền $\Omega = (0,1) \times (0,1)$:

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{46}$$

Ta sẽ giải bài toán (1) với điều kiện biên Dirichlet sau:

$$\bigtriangledown u.n = 0, \quad \text{trên} \quad \Gamma = \partial\Omega \tag{47}$$

và

$$\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = 0 \tag{48}$$

bằng Phương pháp Thể tích hữu hạn. Nhập dữ liệu đầu vào:

2.1 Lưới vuông, midpoint là điểm giữa

```
%% Thong tin dau vao, Input.
ax=0.0;
bx=1.0;
ay=0.0;
by=1.0;
N = 9; % So cach chia tren truc Ox
M = 9; % So cach chia tren truc Oy
iteration=4;
ll = zeros(iteration,1);
norml2=zeros(iteration,1);
normh1=zeros(iteration,1);
```

2.1.1 *Xây dựng lưới*

Xét miền $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Trên đoạn $[0,1]$, ta chọn hai phân hoạch $\left(x_{i+1/2}\right)_{i\in\overline{0,N_1}}$, $\left(y_{i+1/2}\right)_{j\in\overline{0,N_2}}$ thỏa mãn:

$$0 = x_{1\_2} < x_{3\_2} < \cdots < x_{N_1-1/2} < x_{N_1+1/2} = 1$$

$$0 = y_{1\_2} < y_{3\_2} < \cdots < y_{N_2-1/2} < y_{N_2+1/2} = 1T$$

Đặt $\mathfrak{T} = (T_{ij})_{i\in\overline{1,N_1},j\in\overline{1,N_2}}$ là một lưới của $(0,1)\times(0,1)$ thỏa mãn:

$$T_{ij} = \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right] \times \left[y_{i-1/2}, y_{i+1/2}\right]$$

Khi đó ta gọi T_{ij} là một control volume của $\mathfrak{T}$. Các điểm $x_{i+1/2}$, $y_{i+1/2}$ được gọi là các mesh point.

Khi đó, sau khi đã có các mesh point ta sẽ chọn các điểm $(x_i)_{i\in\overline{0,N_1+1}}$ và $(y_j)_{j\in\overline{0,N_2+1}}$ thỏa mãn:

$$x_0 \equiv x_{1/2},\ x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-1/2} + x_{i+1/2}\right),\ x_{N_1+1} \equiv x_{N_1+1/2} \tag{49}$$

$$y_0 \equiv y_{1/2},\ y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1/2} + y_{i+1/2}\right),\ y_{N_1+1} \equiv y_{N_1+1/2} \tag{50}$$

Khi đó cặp (x_i, y_j) được gọi là control point của control volume T_{ij}.
Đặt

$$h_i = \left|x_{i+1/2} - x_{i-1/2}\right|, \quad k_j = \left|y_{j+1/2} - y_{j-1/2}\right|, \text{ với mọi } i \in \overline{1,N_1},\ j \in \overline{1,N_2}$$

và

$$h_{i+1/2} = |x_{i+1} - x_i|, \quad k_{j+1/2} = |y_{j+1} - y_j|, \text{ với mọi } i \in \overline{0, N_1},\ j \in \overline{0, N_2}$$

Khi đó ta có diện tích của $T_{ij} = h_i k_j$, là độ dài lưới là $h = \max\{h_i, k_j\}$.
Code Matlab cho lưới vừa được xây dựng:

```
%% Tao luoi
x=zeros(N+1,1);
for i=1:N+1
    x(i)=(i-1)*dx;
end

x_cp=zeros(N+2,1);
for i=1:N+2
    if(i==1)
        x_cp(i)=x(i);
    else
        if(i==N+2)
            x_cp(i)=x(i-1);
        else
            x_cp(i)=(x(i-1)+x(i))/2.0;
        end
    end
end

y = zeros(M+1,1);
for j=1:M+1
    y(j)=(j-1)*dy;
end

y_cp=zeros(M+2,1);
for j=1:M+2
    if(j==1)
        y_cp(j)=y(j);
    else
        if(j==M+2)
            y_cp(j)=y(j-1);
        else
            y_cp(j)=(y(j-1)+y(j))/2.0;
        end
    end
end
dx = dx/2;
dy = dy/2;
```

2.1.2 *Phân rã bài toán*

Khi đó ta biến đổi (46) thành:

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} -\Delta u(x,y)\,dxdy = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)\,dxdy$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} u_{xx}\,dxdy - \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} u_{yy}\,dxdy = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)\,dxdy$$

Một cách rõ ràng hơn ta có:

$$-\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xx}\,dxdy - \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{yy}\,dxdy = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)\,dxdy \tag{51}$$

Ta lại có:

$$\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xx}\,dxdy = \int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2} u_x\left(x_{i+1/2,y}\right)dy - \int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2} u_x\left(x_{i-1/2,y}\right)dy$$

và

$$\int_{y_{i-1/2}}^{y+1/2}\int_{y_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{yy}\,dxdy = \int_{x_{i-1/2}}^{x+1/2} u_y\left(x, y_{i+1/2}\right)dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x+1/2} u_y\left(x, y_{i-1/2}\right)dy$$

Thay vào ta có:

$$\begin{aligned}(5) \Leftrightarrow & \frac{-1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right) + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i-1/2}, y\right)\\ & - \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, y_{i+1/2}\right) + \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, x_{i+1/2}\right)\\ & = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)\,dxdy\end{aligned}$$

Ta sẽ xấp xỉ $\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right)$ như sau:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right) &= \frac{k_j u_x(x_{i+1/2}, y_j)}{|T_{ij}|}\\ &= \frac{u_x\left(x_{i+1/2}, y\right)}{h_i}\\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_i h_{i+1/2}}, \quad \text{theo khai triển Taylor}\end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i+1/2}, y\right) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_i h_{i+1/2}} \tag{52}$$

Áp dụng (52) ta có các kết quả tương tự:

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} u_x\left(x_{i-1/2}, y\right) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_i h_{i-1/2}} \tag{53}$$

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, y_{j+1/2}\right) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_j k_{j+1/2}} \tag{54}$$

$$\frac{1}{|T_{ij}|}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_y\left(x, y_{i-1/2}\right) = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k_j k_{j-1/2}} \tag{55}$$

Khi đó ta có xấp xỉ của bài toán là:

$$-\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_i h_{i+1/2}} + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_i h_{i-1/2}} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_j k_{i+1/2}} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k_j k_{j-1/2}} = f_{ij} \tag{56}$$

với $f_{ij} = \frac{1}{|T_{ij}|}\int_{T_{ij}} f(x,y)dxdy$ ta giá trị trung bình của f trên T_{ij}.

Sắp xếp lai (56) ta được:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{h_i h_{i-1/2}}u_{i-1,j} - \frac{1}{h_i h_{i+1/2}}u_{i+1,j} - \frac{1}{k_j k_{j-1/2}}u_{i,j-1} - \frac{1}{k_j k_{j+1/2}}u_{i,j+1}\\ &+\left(\frac{1}{h_i h_{i-1/2}} + \frac{1}{h_i h_{i+1/2}} + \frac{1}{k_j k_{j-1/2}} + \frac{1}{k_j k_{j-1/2}}\right)u_{i,j} = f_{ij}\end{aligned}$$

Khi đó đặt

$$a_i = -\frac{1}{h_i h_{i-1/2}}, \quad b_i = -\frac{1}{h_i h_{i+1/2}} \tag{57}$$

$$cj = -\frac{1}{k_j k_{j-1/2}}, \quad d_j = -\frac{1}{k_j k_{j+1/2}} \tag{58}$$

$$s_{i,j} = a_i + b_i + c_j + d_j \tag{59}$$

Khi đó với mọi $(i,j),\ i \in [1,N_1], j \in [1,N_2]$ ta có phương trình phân rã sau:

$$a_i u_{i-1,j} + b_i u_{i+1,j} + c_j u_{i,j-1} + d_j u_{i,j+1} - s_{i,j} u_{i,j} = f_{i,j} \tag{60}$$

Từ điều kiện (48) ta có đây chính là điều kiện có nghiệm của bài toán còn (47) là điều kiện có nghiệm duy nhất.
Từ điều kiện (47) $\bigtriangledown u.n = 0,$ trên $\Gamma = \partial\Omega$ ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y_j) = \dfrac{u_{j,1} - u_{j,0}}{h_1} = 0 \Leftrightarrow u_{j,1} = u_{j,0}. \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y_j) = \dfrac{u_{j,N_1+1} - u_{j,N_1}}{h_{N_1}} = 0 \Leftrightarrow u_{j,N_1+1} = u_{j,N_1}. \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_i,0) = \dfrac{u_{1,i} - u_{0,i}}{h_1} = 0 \Leftrightarrow u_{1,i} = u_{0,i}. \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_i,1) = \dfrac{u_{N_2+1,i} - u_{N_2,i}}{h_{N_2}} = 0 \Leftrightarrow u_{N_2+1,i} = u_{N_2,i}. \end{cases} \tag{61}$$

Mà ta cũng có

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0 \Leftrightarrow u_{1,0} = u_{0,0} (= u_{11}) \tag{62}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \Leftrightarrow u_{0,1} = u_{0,0} (= u_{1,1}) \tag{63}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0 \Leftrightarrow u_{N_2+1,N_1+1} = u_{N_2+1,N_1} (= u_{N_2,N_1}) \tag{64}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 0 \Leftrightarrow u_{N_2,N_1+1} = u_{N_2,N_1} (= u_{N_2,N_1}) \tag{65}$$

Như vậy điều kiện biên cần tìm là:

$$\begin{cases} u_{1,0} = u_{0,0} = u_{1,1} = u_{0,1} \\ u_{N_2,N_1+1} = u_{N_2+1,N_1+1} = u_{N_2,N_1} = u_{N_2,N_1+1} \\ u_{j,1} = u_{j,0} \\ u_{j,N_1+1} = u_{j,N_1} \\ u_{1,i} = u_{0,i} \\ u_{N_2+1,i} = u_{N_2,i} \end{cases} \tag{66}$$

2.1.3 *Ma trận sau khi phân rã*

Từ phương trình phân rã (60) và điều kiện biên (66) ta có ma trận mô tả các phương trình của hệ phương trình vừa xây dựng được là $Au = f$ với:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & D_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_2 & A_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots\ \ddots\ \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{N_2-1} & D_{N_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{N_2} & A_{N_2} \end{pmatrix} \tag{67}$$

với đại lượng cần tìm là $(u_{ij}),\ i = 1, \cdots N_1, j = 1, \cdots N_2$ có dạng:

$$u = (u_{1,1}, u_{1,2}, \cdots, u_{1,N_2}; u_{2,1}, u_{2,2}, \cdots, u_{2,N_2}; \cdots; u_{N_1,1}, u_{N_1,2}, \cdots, u_{N_1,N_2})^T \tag{68}$$

và

$$f = (f_{1,1}, f_{1,2}, \cdots, f_{1,N_2}; f_{2,1}, f_{2,2}, \cdots, f_{2,N_2}; \cdots; f_{N_1,1}, f_{N_1,2}, \cdots, f_{N_1,N_2})^T \tag{69}$$

và trong định nghĩa ma trận A ta cần phải định nghĩa trên các ma trận sau:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(b_1+d_1) & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -(a_2+b_2+d_1) & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(a_{N_1-1}+b_{N_1-1}+d_1) & b_{N_1-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N_1} & -(a_{N_1}+d_{N_1}) \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$A_{N_2} = \begin{pmatrix} -(b_1+c_{N_2}) & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -(a_2+b_2+c_{N_2}) & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(a_{N_1-1}+b_{N_1-1}+c_{N_2}) & b_{N_1-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N_1} & -(a_{N_1}+c_{N_2}) \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} -(b_1+c_j+d_j) & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -s_{i,2} & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s_{i,N_1-1} & b_{N_1-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N_1} & -(a_{N_1}+c_j+d_j) \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_i & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_i \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$D_i = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_i & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \tag{74}$$

Code Matran A:

```
%% Create matrix A
A=zeros(N*M,N*M);
B=sparse(N,N);
C=sparse(N,N);
D=sparse(N,N);
dx = dx/2; %Su dung cho control point tai bien
dy = dy/2; %Su dung cho control point tai bien

for j=1:M
    c1 = -1/((y(j+1) - y(j))*(y_cp(j+1) - y_cp(j)));
    d1 = -1/((y(j+1) - y(j))*(y_cp(j+2) - y_cp(j+1)));
    if (j == 1)
        for i=1:N
            D(i,i)=-1/(4*dx^2); %Tai bien
        end
    else
        for i = 1:N
            D(i,i) = d1;
        end
    end
    if (j == M)
        for i=1:N
            C(i,i)=-1/(4*dx^2);  %Tai bien
        end
    else
        for i = 1:N
```

```
                C(i,i) = c1;
            end
        end

        for i=1:N
            a1 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+1) - x_cp(i)));
            b1 = -1/((x(i+1) - x(i))*(x_cp(i+2) - x_cp(i+1)));
            if(j == 1)
                if(i==1)
                    B(i,i)=1/(2*dx^2); %Tai bien control point se khac
                    B(i,i+1)=-1/(4*dx^2); %Tai bien control point se khac
                else
                    if(i==N)
                        B(i,i)=1/(2*dx^2); %Tai bien control point se ...
                            khac
                        B(i,i-1)=-1/(4*dx^2); %Tai bien control point ...
                            se khac
                    else
                        B(i,i)=3/(4*dx^2); %Tai bien control point se ...
                            khac
                        B(i,i-1)=a1;
                        B(i,i+1)=b1;
                    end
                end
            elseif(j == M)
                if(i==1)
                    B(i,i)=1/(2*dx^2); %Tai bien control point se khac
                    B(i,i+1)=-1/(4*dx^2); %Tai bien control point se khac
                else
                    if(i==N)
                        B(i,i)=1/(2*dx^2); %Tai bien control point se ...
                            khac
                        B(i,i-1)=-1/(4*dx^2); %Tai bien control point ...
                            se khac
                    else
                        B(i,i)=3/(4*dx^2); %Tai bien control point se ...
                            khac
                        B(i,i-1)=a1;
                        B(i,i+1)=b1;
                    end
                end
            else
                if(i==1)
                    B(i,i)=3/(4*dx^2); %Tai bien control point se khac
                    B(i,i+1)=-1/(4*dx^2); %Tai bien control point se khac
                else
                    if(i==N)
                        B(i,i)=3/(4*dx^2); %Tai bien control point se ...
                            khac
                        B(i,i-1)=-1/(4*dx^2); %Tai bien control point ...
                            se khac
                    else
                        B(i,i)=-(a1+ b1 + c1 + d1);
                        B(i,i-1)=a1;
                        B(i,i+1)=b1;
                    end
                end
            end
        end
        if(j==1)
            A((j-1)*N+1:j*N,(j-1)*N+1:j*N)=B;
            A((j-1)*N+1:j*N,j*N+1:(j+1)*N)=D;
        else
            if(j==M)
                A((j-1)*N+1:j*N,(j-1)*N+1:j*N)=B;
                A((j-1)*N+1:j*N,(j-2)*N+1:(j-1)*N)=C;
            else
                A((j-1)*N+1:j*N,(j-1)*N+1:j*N)=B;
                A((j-1)*N+1:j*N,j*N+1:(j+1)*N)=D;
                A((j-1)*N+1:j*N,(j-2)*N+1:(j-1)*N)=C;
            end
```

```
            end
        end
        for i = 1:M*N-1
            A(M*N,i) = A(M*N,i) -1/(2*dx^2);
        end
        A(M*N,M*N) = 0;
```

Code cho vector F vế phải:

```
        %% Tao vector ve phai F
        F=zeros(N*M,1);
        for j=1:M
            for i = 1:N
                F((j-1)*N+i)=(f(x(i),y(j)) + f(x(i + 1),y(j)) + ...
                    f(x(i),y(j+1)) + f(x(i+1),y(j+1)))/4;
            end
        end
```

Còn lại vẫn làm tương tự như biên Dirichlet.

2.1.4 *Ví dụ*

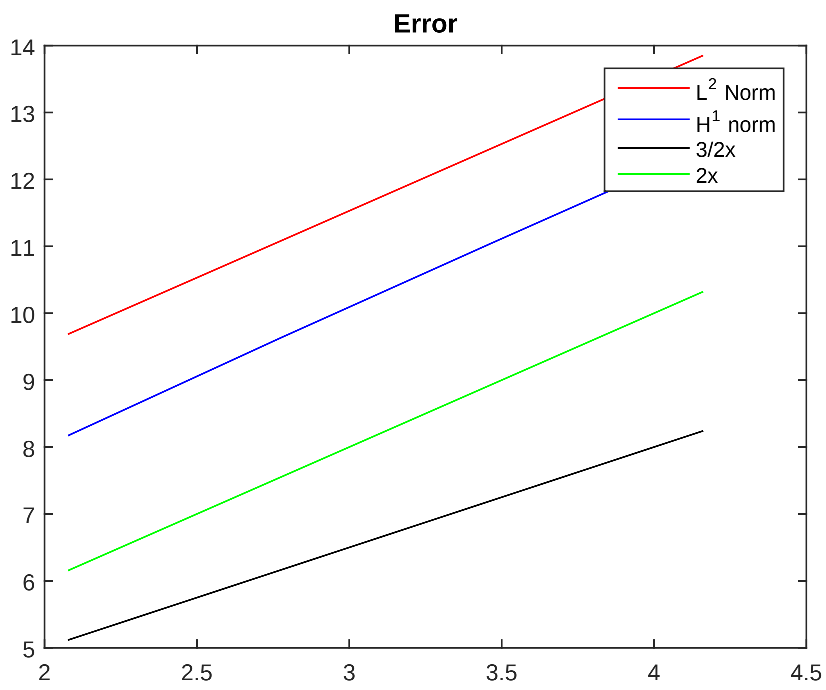
Tìm một ví dụ cho biên Neumann khá khó, dưới đây sẽ trình bày một ví dụ khá phổ biến: Ví dụ: Ta sẽ xét

$$f(x,y) = (2x-1)(\frac{y_2}{2} - \frac{y^3}{3}) + (2y-1)(\frac{x_2}{2} - \frac{x^3}{3})$$

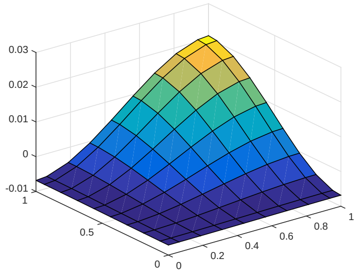
khi đó

$$f(x) = (x^2/2 - x^3/3) * (y^2/2 - y^3/3) - 1/144$$

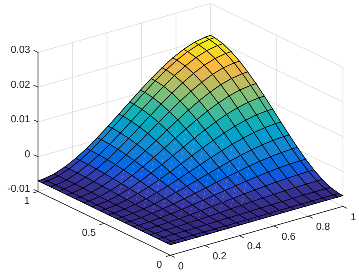
Lưới sẽ được chia đều $N_1 = N_2 = 8$, lặp lại 4 lần.
Khi đó một số ảnh minh họa và bậc xấp xỉ cho ví dụ:



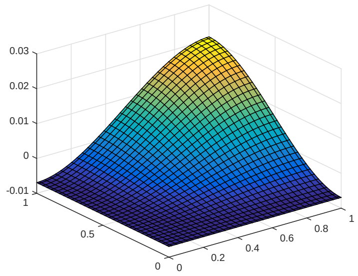
Hình 19: Bậc sai số bài toán 1 - Lưới đều, điểm giữa



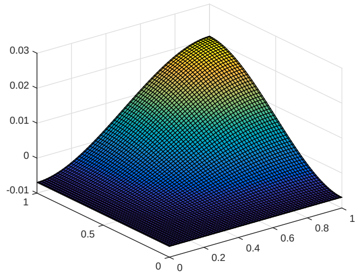
(a) Lần lặp đầu tiên



(b) Lần lặp thứ hai



(c) Lần lặp thứ ba



(d) Lần lặp thứ bốn

Hình 20: Bài toán 1 được mô phỏng qua 4 lần chia lưới mịn hơn

NHẬN XÉT: Ta thấy nghiệm bậc sai số của L^2 song song $2x$ (red và green) và trong H^1 song song $\frac{3}{2}x$ (blue và black), đúng nhưng lý thuyết chứng minh được.

TÀI LIỆU

[1] Finite Volume Methods in 2D, Le Anh Ha (Lecture Note). Khoa Toán - Tin, Đại học Khoa học tự nhiên TPHCM, 2017.

[2] Finite Volume Methods in 1D, Le Anh Ha (Lecture Note). Khoa Toán - Tin, Đại học Khoa học tự nhiên TPHCM, 2017.

[3] Finite Volume Methods Robert Eymard, Thierry Gallowet, Rapphaele herbin. [On the electrodynamics of moving bodies]. Annalen der Physik, 322(10):891–921, 1905.

[4] Introduction to Numerical Integration
http://www.ece.utah.edu/ ece6340/LECTURES/Jan30/NumericalIntegration.pdf

[5] 2D Integration using the Trapezoidal and Simpson Rules
http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/n2003/SimpsonsRule2DMod.html