

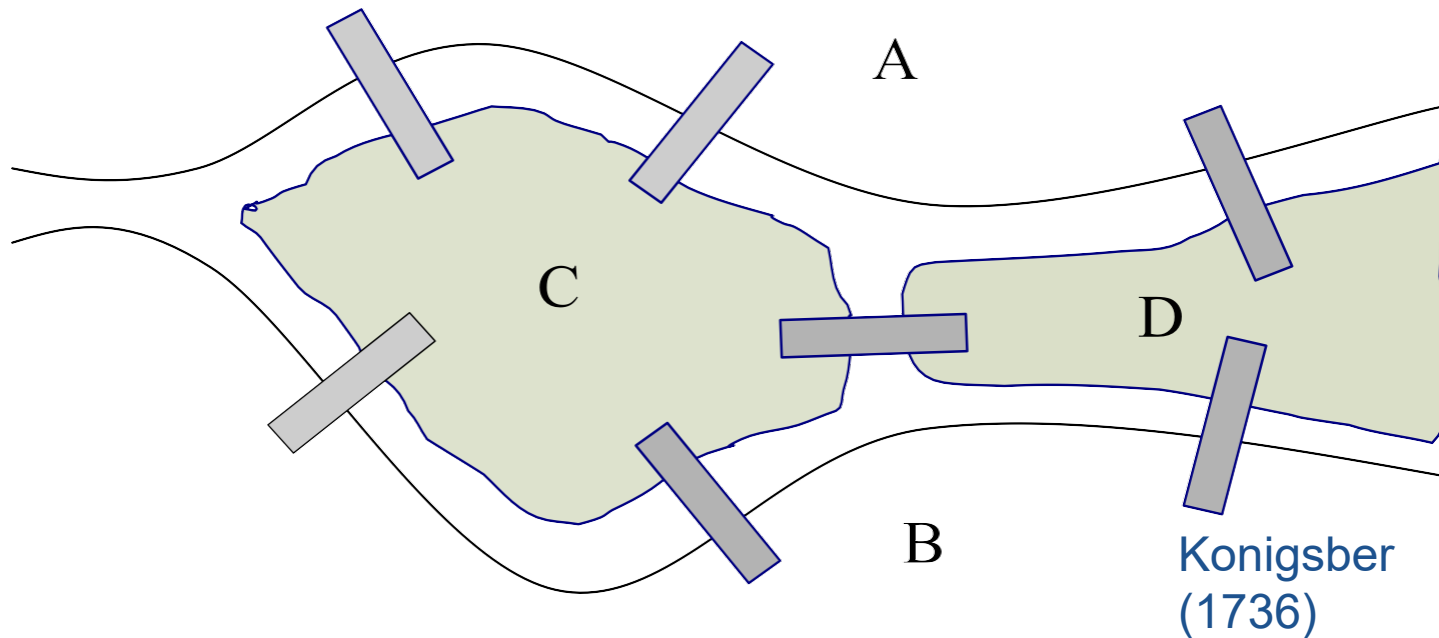
Chương 2: Các khái niệm đồ thị và mạng truyền dữ liệu

Nội dung

- I. Định nghĩa đồ thị
- II. Các loại đồ thị
- III. Các thuật ngữ cơ bản trong đồ thị
- IV. Đường đi, chu trình
- V. Đồ thị liên thông
- VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

I. Định nghĩa đồ thị

❖ Bài toán Euler

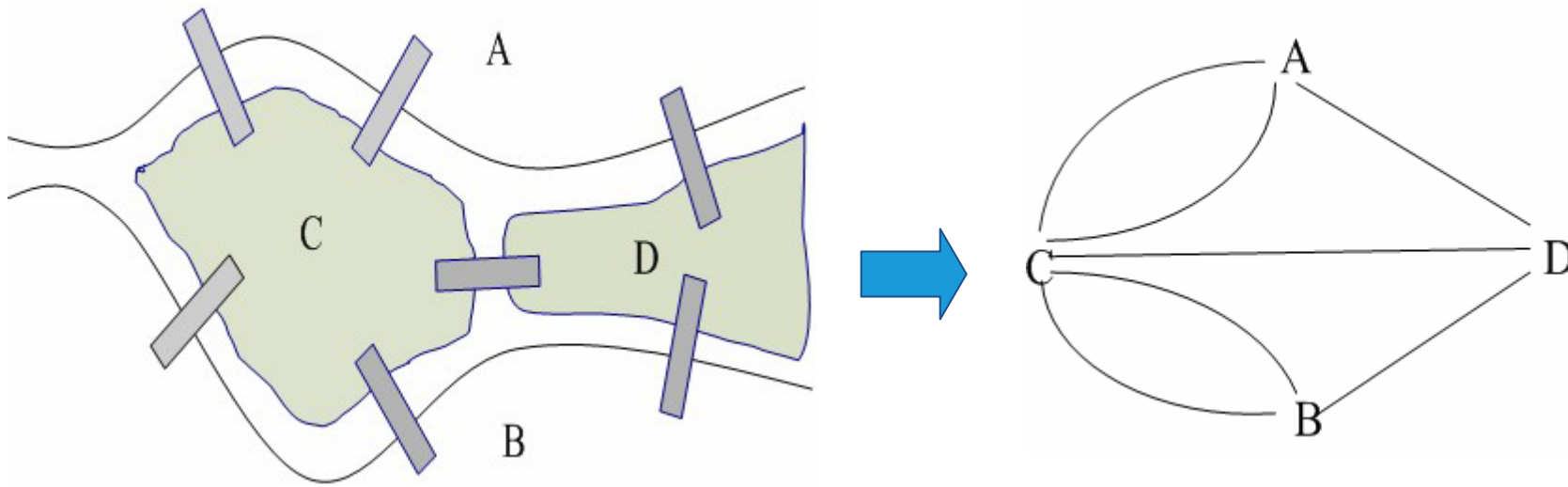


Có thể chỉ một lần đi qua tất cả 7 chiếc cầu này hay không?

I. Định nghĩa đồ thị

❖ Chuyển bài toán về dạng đồ thị

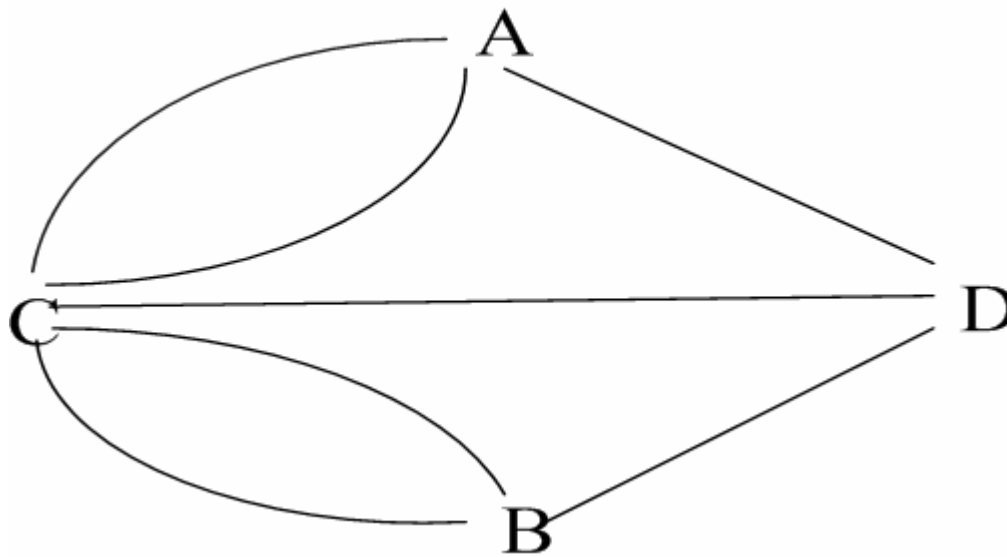
- Mỗi vùng là 1 đỉnh
- Mỗi chiếc cầu là 1 cạnh



I. Định nghĩa đồ thị

❖ Đồ thị được xây dựng từ bài toán Euler

- Có thể đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, sao cho mỗi cạnh chỉ đi qua đúng một lần được không?



I. Định nghĩa đồ thị

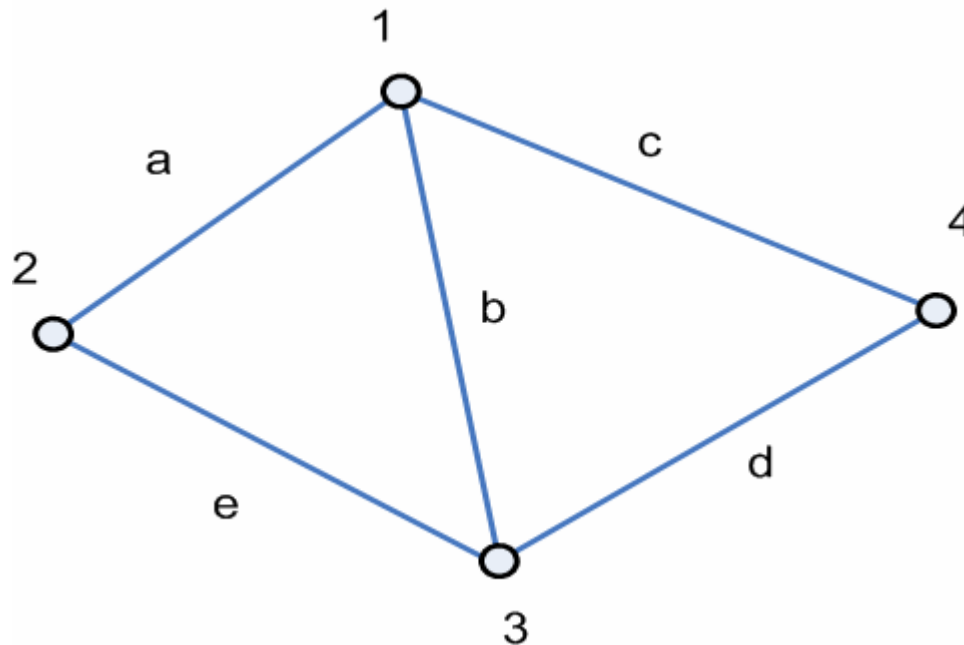
❖ Định nghĩa

- Đồ thị G là một tập hợp gồm các đỉnh và các cạnh. Ta thường ký hiệu: $G = (V, E)$, trong đó:

+ V : Là tập các đỉnh

+ E : Là tập các cạnh

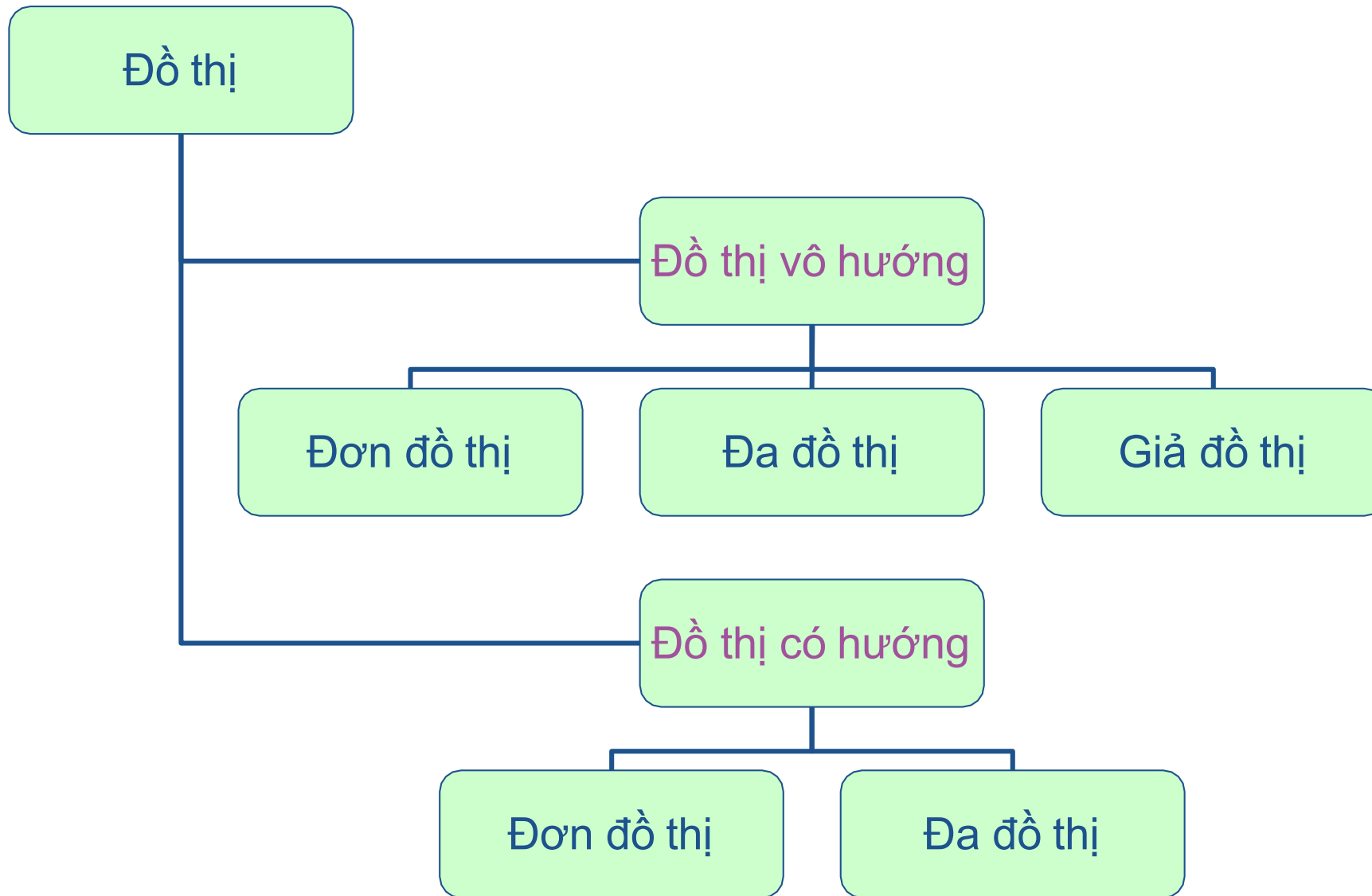
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E = \{a, b, c, d, e\}$



Nội dung

- I. Định nghĩa đồ thị
- II. Các loại đồ thị
- III. Các thuật ngữ cơ bản trong đồ thị
- IV. Đường đi, chu trình
- V. Đồ thị liên thông
- VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

II. Các loại đồ thị

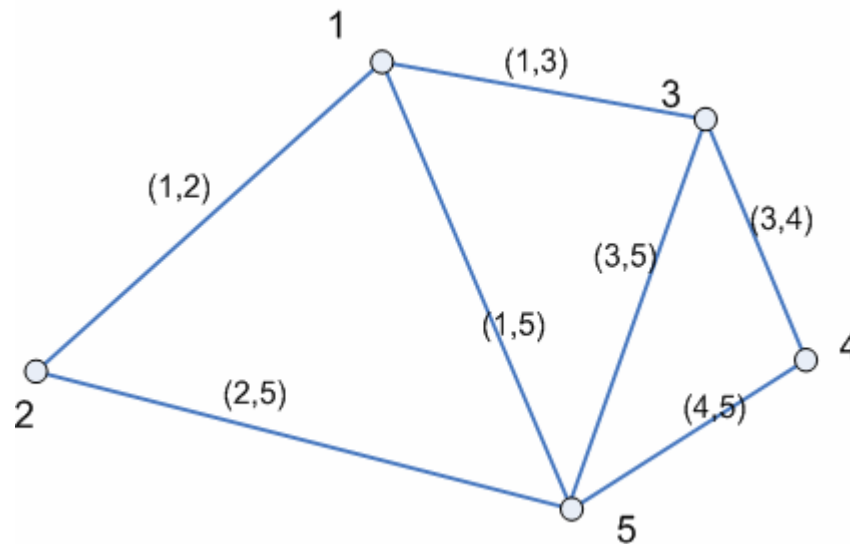


II. Các loại đồ thị

❖ Đơn đồ thị vô hướng

Đồ thị $G=(V, E)$ được gọi là đơn đồ thị vô hướng:

- V : Là tập các đỉnh
- E : là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V .



$$V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

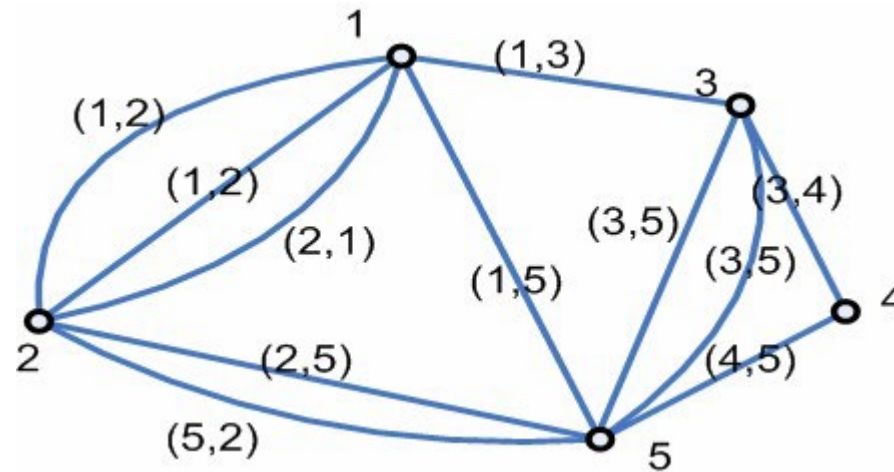
II. Các loại đồ thị

❖ Đa đồ thị vô hướng

Đồ thị $G=(V, E)$ được gọi là đa đồ thị vô hướng:

- V : Là tập các đỉnh
- E : Là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V .

Hai cạnh e_1, e_2 gọi là canh lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh



$V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (1, 2), (2, 1), (5, 2), (3, 5) \}$

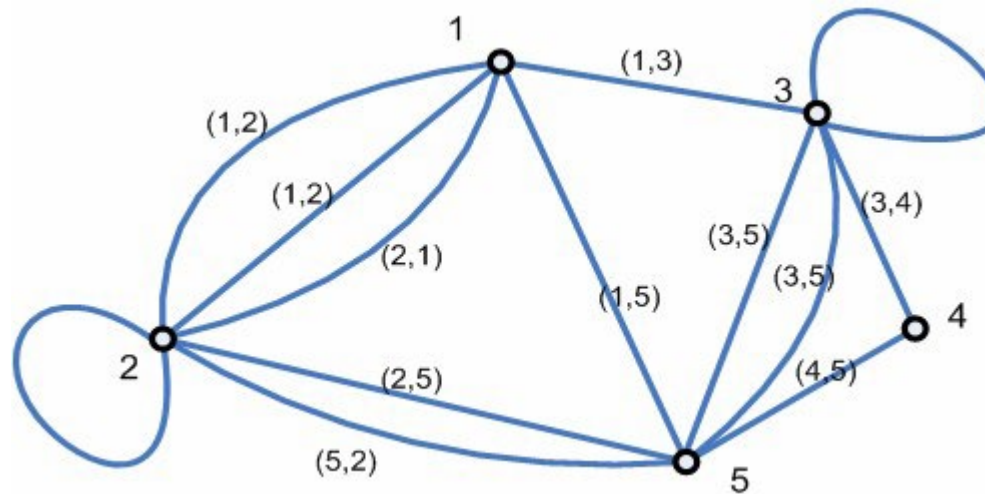
II. Các loại đồ thị

❖ Giả đồ thị vô hướng

Đồ thị $G=(V, E)$ được gọi là giả đồ thị vô hướng:

- V : Là tập các đỉnh
- E : Là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử không nhất thiết khác nhau của V .

Cạnh e được gọi là khuyên nếu nó có dạng: $e=(u, u)$



$V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

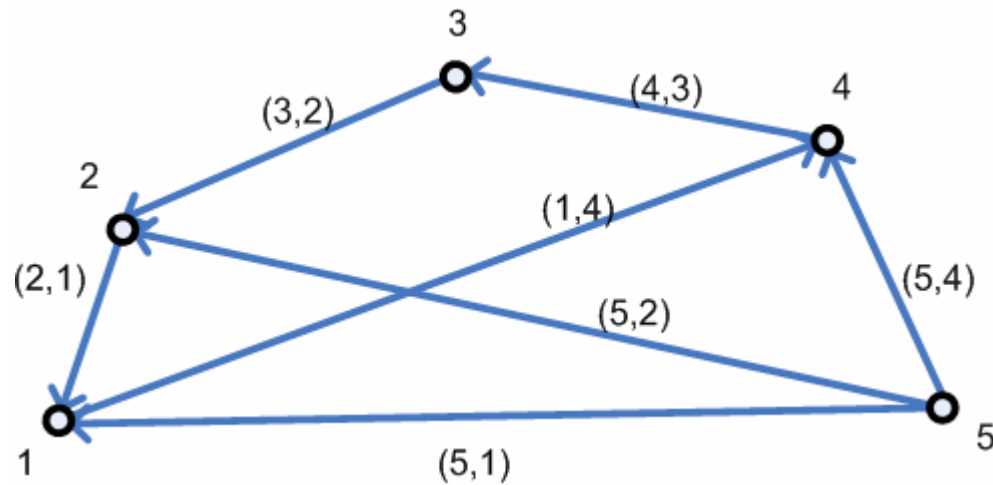
$E=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (1, 2), (2, 1), (5, 2), (3, 5), (2, 2), (3, 3)\}$

II. Các loại đồ thị

❖ Đơn đồ thị có hướng

Đồ thị $G=(V, E)$ được gọi là đơn đồ thị có hướng:

- V : Là tập các đỉnh
- E : Là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V . (tập các cung)



$$V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E=\{(2, 1), (1, 3), (5, 1), (4, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 4)\}$$

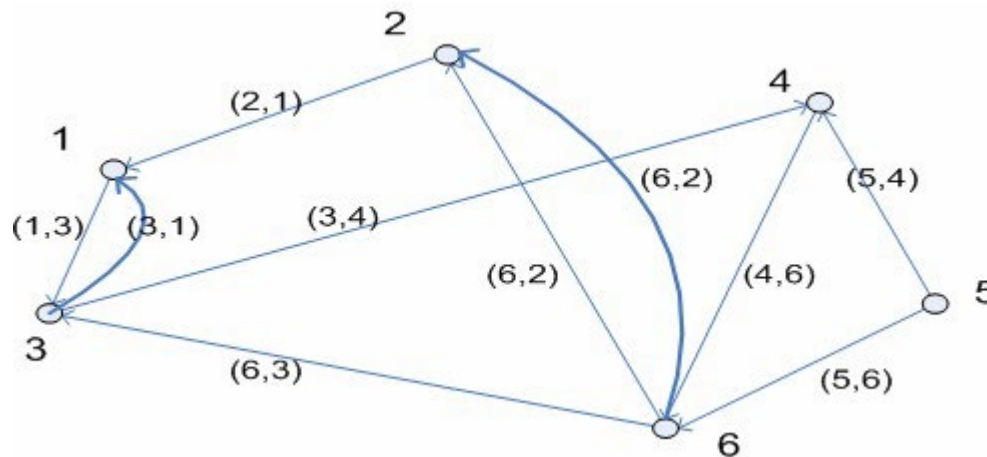
II. Các loại đồ thị

❖ Đa đồ thị có hướng

Đồ thị $G=(V, E)$ được gọi là đơn đồ thị có hướng:

- V : Là tập các đỉnh
- E : Là họ các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V . (tập các cung)

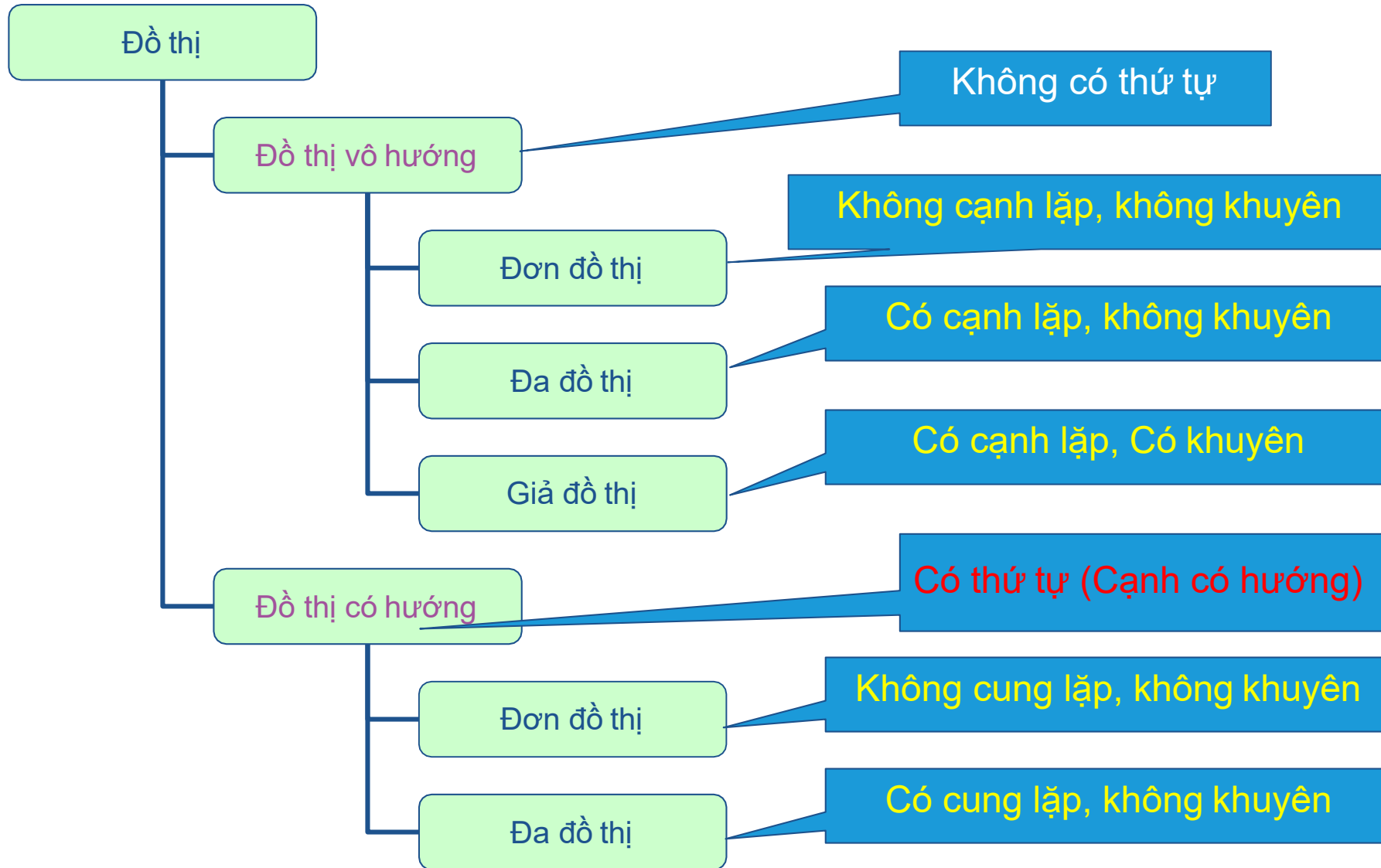
Hai cung e_1, e_2 được gọi là cung lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.



$$V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E=\{(2, 1), (1, 3), (6, 2), (3, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 4), (5, 6), (3,1), (6,2)\}$$

II. Các loại đồ thị



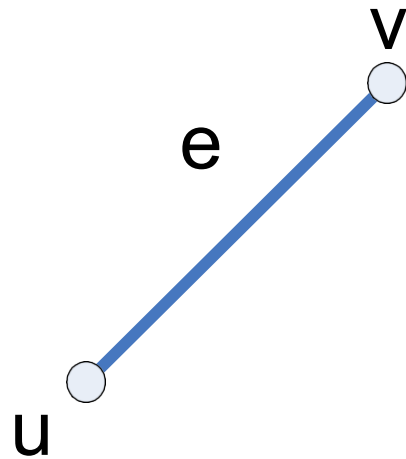
Nội dung

- I. Định nghĩa đồ thị
- II. Các loại đồ thị
- III. Các thuật ngữ cơ bản trong đồ thị
- IV. Đường đi, chu trình
- V. Đồ thị liên thông
- VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Kề và liên thuộc

- Giả sử u và v là hai đỉnh của đồ thị vô hướng G và $e=(u, v)$ là cạnh của đồ thị, khi đó ta nói:
 - + u và v kề nhau và e liên thuộc với u và v .
 - + u và v là các đỉnh đầu của cạnh e

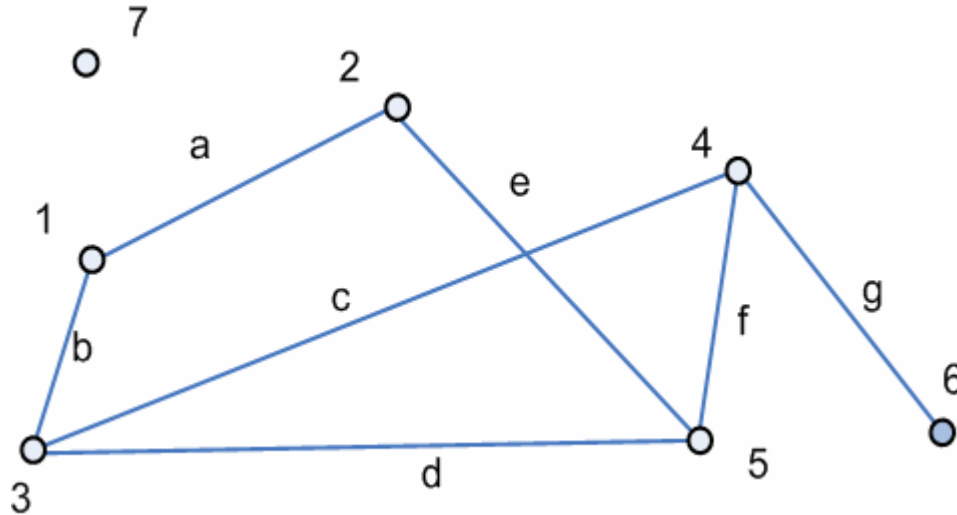


III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bậc của đỉnh

- Bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó.
- Ký hiệu: $\deg(v)$

$\deg(1)=2, \deg(2)=2,$
 $\deg(3)=3, \deg(4)=3,$
 $\deg(5)=3, \deg(6)=1,$
 $\deg(7)=0.$

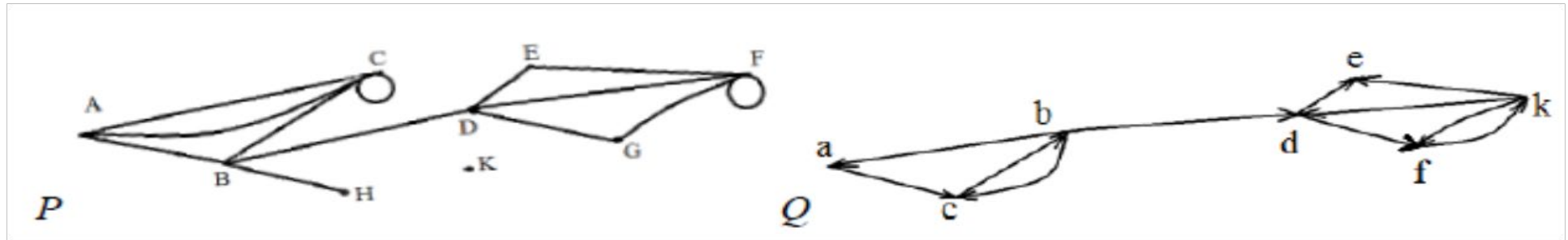


- Đỉnh treo là đỉnh chỉ có duy nhất một cạnh liên thuộc với nó. (Đỉnh 6)
- Đỉnh cô lập là đỉnh không có cạnh nào liên thuộc với nó. (Đỉnh 7)

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bậc của đỉnh

Ví dụ 3: Xác định bậc của các đỉnh; đỉnh treo; đỉnh cô lập; cạnh (cung) treo trong các đồ thị sau.



Ta có bậc của các đỉnh trong P là:

Đỉnh	A	B	C	D	E	F	G	H	K
Bậc	3	4	5	4	2	5	2	1	0

Vậy trong đồ thị vô hướng P có: K là đỉnh cô lập; H là đỉnh treo; Cạnh (B,H) là cạnh treo.

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Định lý bắt tay: Tổng bậc của đỉnh

*Giả sử $G=(V,E)$ là đồ thị vô hướng **với m cạnh**. Khi đó tổng tất cả các bậc của đỉnh trong V bằng $2m$.*

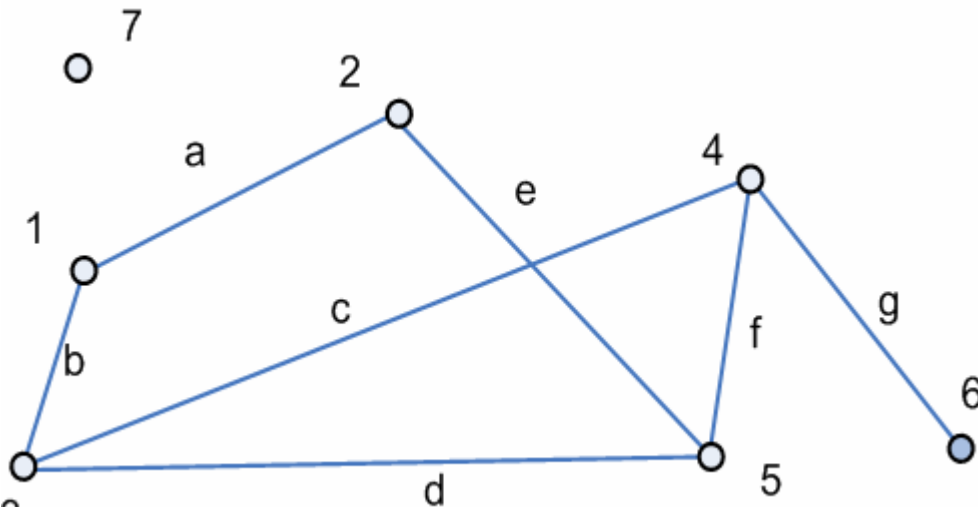
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$$

VD: có tổng số cạnh $m = 7$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m = 14$$

VD: Kiểm tra lại ví dụ trước có tổng số cạnh $m = 13$ (có khuyên)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m = 26$$



III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Định lý bắt tay

Chứng minh: Tự tham khảo

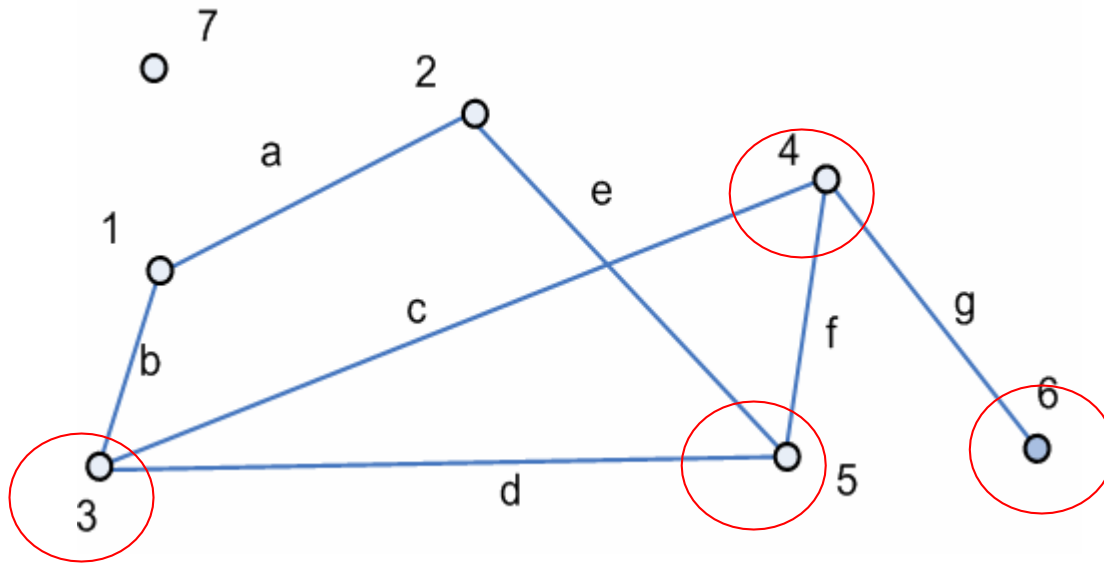
- ❖ Mỗi một cạnh nối với đúng hai đỉnh, vì thế một cạnh đóng góp 2 đơn vị vào tổng các bậc của tất cả các đỉnh.

Suy ra: tổng các bậc của tất cả các đỉnh gấp đôi số **cạnh** của đồ thị

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Hệ quả của định lý bắt tay

Trong đồ thị vô hướng, tổng số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.



Các đỉnh bậc lẻ: 3, 5, 4, 6 có 4 đỉnh

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Hệ quả của định lý bắt tay

Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Chứng minh:?

- ❖ Gọi L và C lần lượt là tập các đỉnh bậc lẻ và bậc chẵn của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. Ta có:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in L} \deg(v) + \sum_{v \in C} \deg(v)$$

+ Tổng $2m$ chẵn

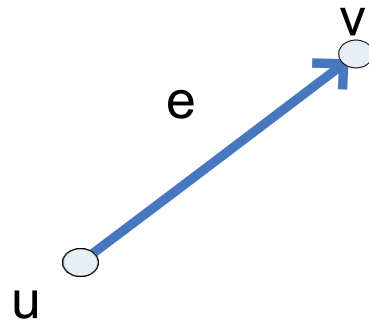
+ Tổng $\sum_{v \in C} \deg(v)$ chẵn

Suy ra $\sum_{v \in L} \deg(v)$ chẵn

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Kề trong đồ thị có hướng

- Giả sử u và v là hai đỉnh của đồ thị có hướng G và $e=(u, v)$ là một cung của đồ thị, khi đó ta nói:
 - + u và v kề nhau, cung e đi ra khỏi u và đi vào v .
 - + u là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối của cạnh e .



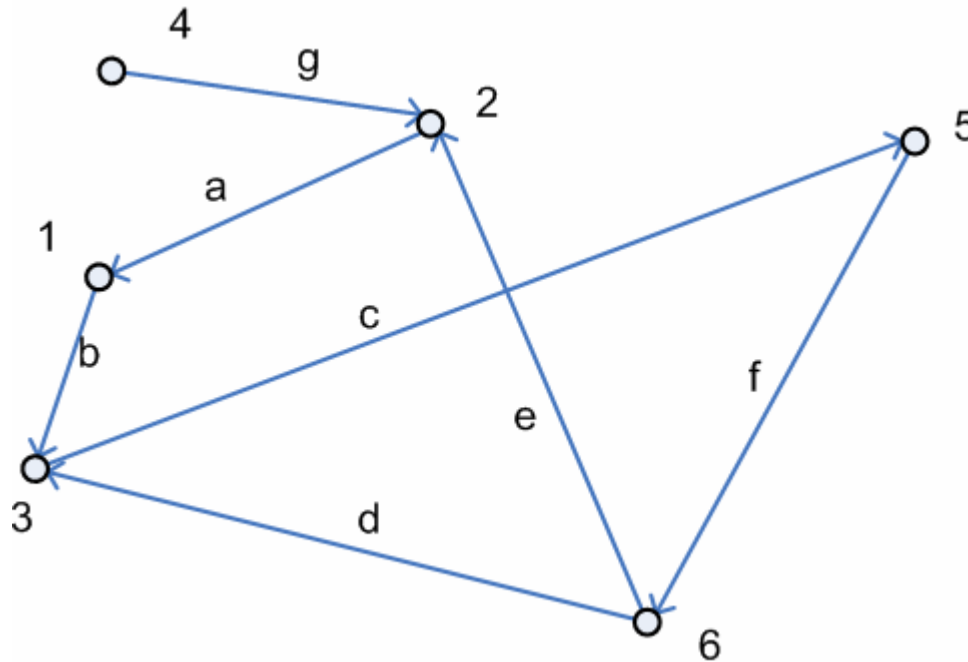
III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bán bậc vào và bán bậc ra của đỉnh

- Bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung ra khỏi nó (đi vào nó).
- Ký hiệu: $\deg^+(v)$ ($\deg^-(v)$)

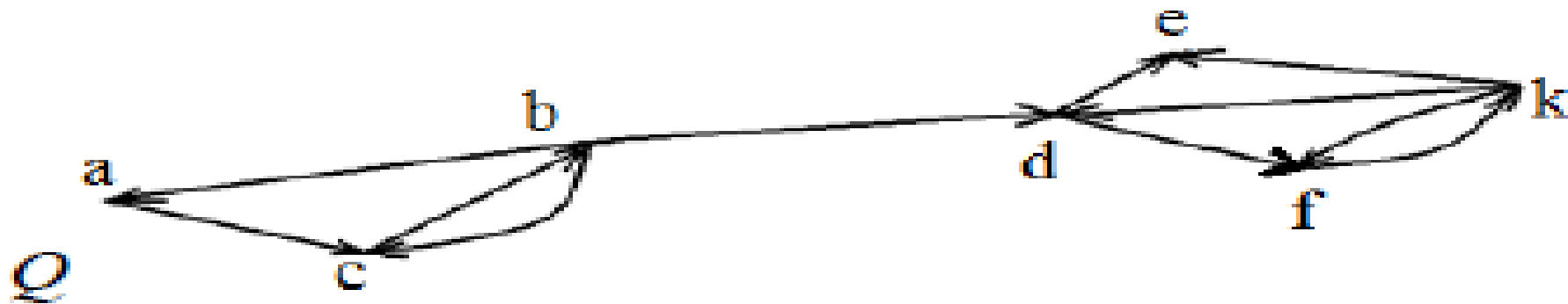
$$\deg^+(2) = 1, \deg^-(2) = 2$$

$$\deg^+(6) = 2, \deg^-(6) = 1$$



III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bậc của đỉnh & bán bậc của đỉnh



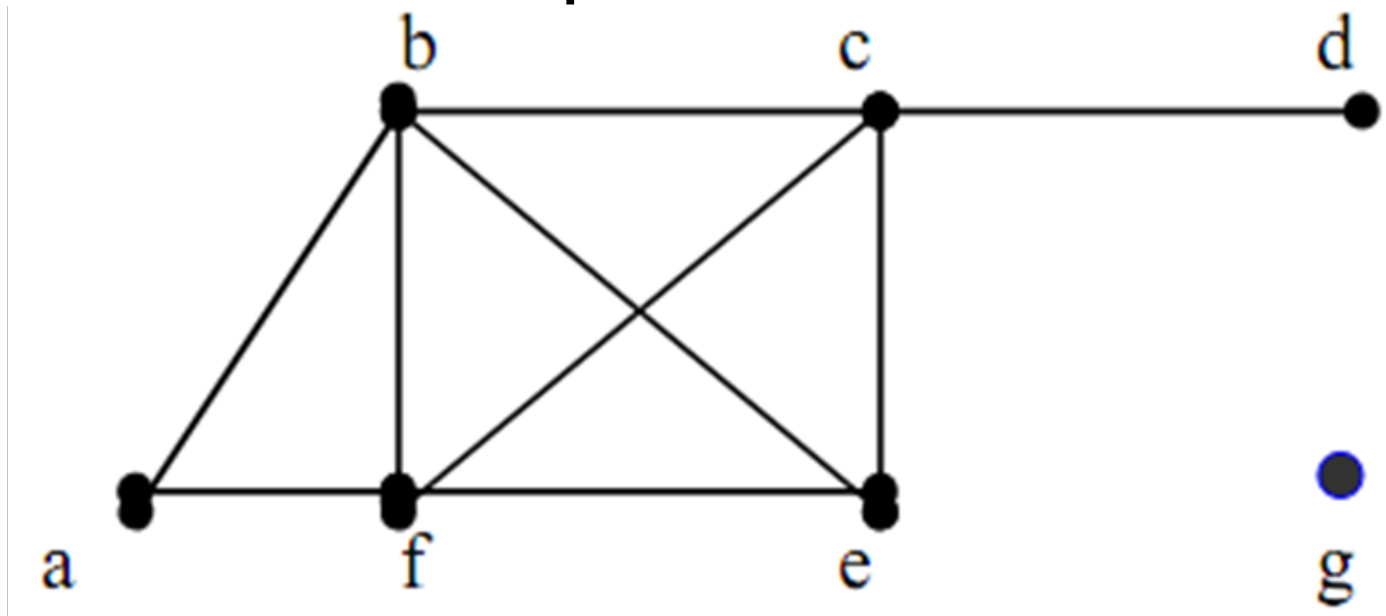
Ta có bán bậc vào và bán bậc ra của các đỉnh trong Q là:

Đỉnh x	a	b	c	d	e	f	k
$\deg^-(x)$	1	1	2	2	2	2	1
$\deg^+(x)$	1	3	1	2	0	1	3

Vậy trong đồ thị có hướng Q : không có đỉnh cô lập, đỉnh treo, cung treo.

III. Các thuật ngữ cơ bản

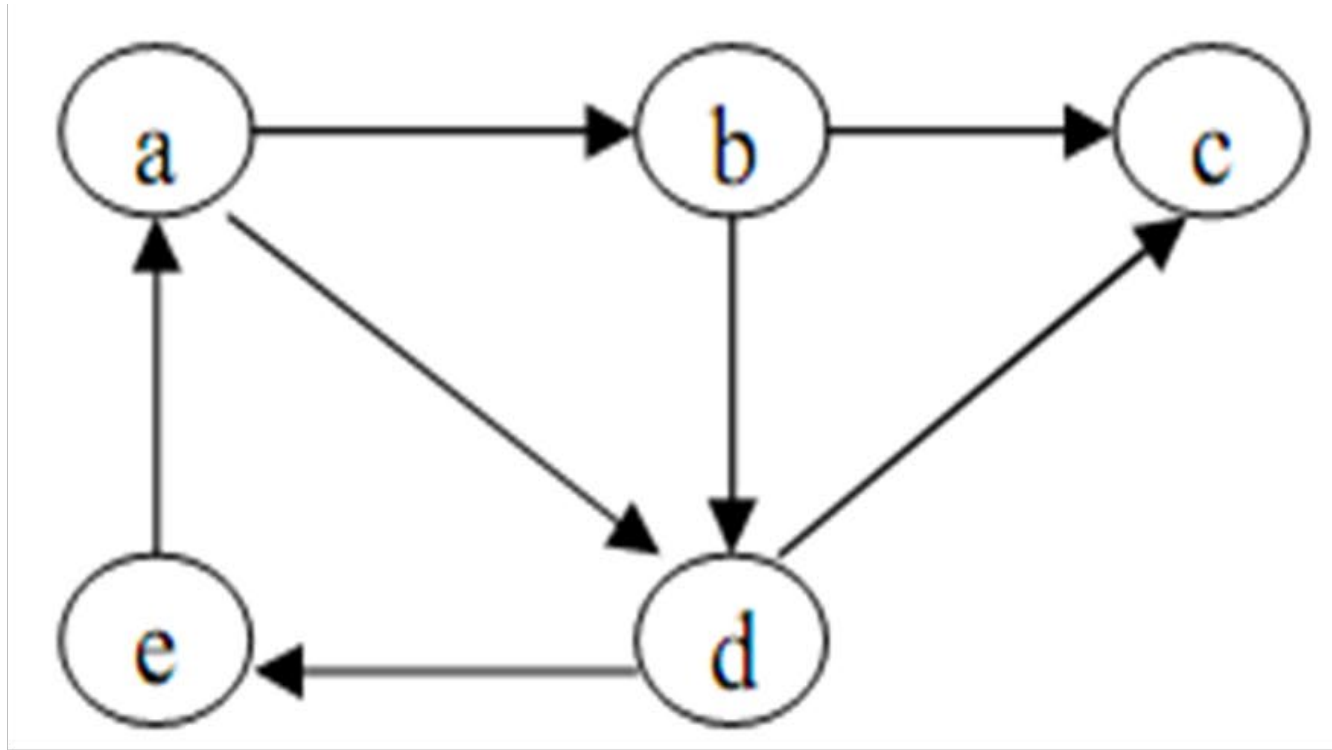
❖ Bậc của đỉnh & bán bậc của đỉnh



- $\deg(a) = 2, \deg(b) = \deg(c) = \deg(f) = 4;$
- $\deg(e) = 3, \deg(d) = 1, \deg(g) = 0.$
- Đỉnh có bậc 0 được gọi là **đỉnh cô lập** (g)
- Đỉnh bậc 1 được gọi là **đỉnh treo** (d)

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bậc của đỉnh & bán bậc của đỉnh



- $\deg^+(a) = 2, \deg^+(b) = 2, \deg^+(c) = 0, \deg^+(d) = 2, \deg^+(e) = 1.$
- $\deg^-(a) = 1, \deg^-(b) = 1, \deg^-(c) = 2, \deg^-(d) = 2, \deg^-(e) = 1.$

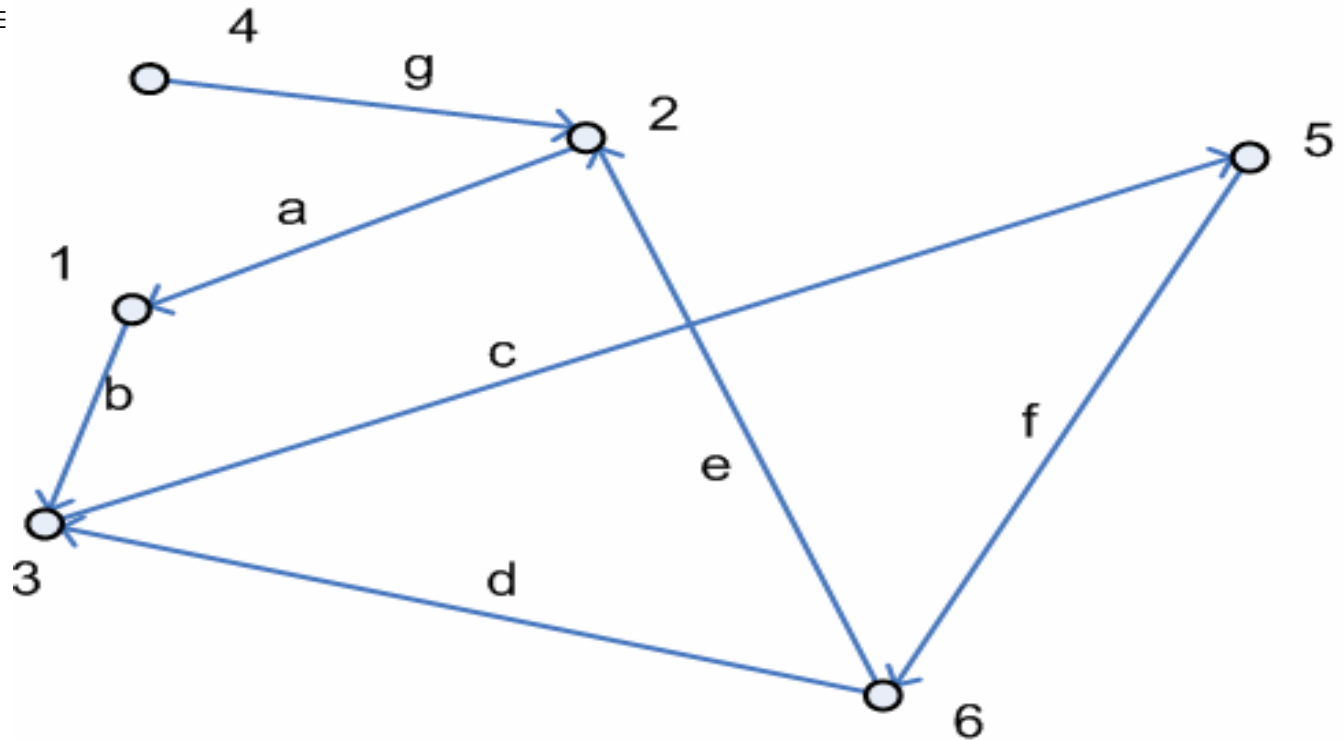
III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Định lý

Giả sử $G=(V,E)$ là đồ thị có hướng với m cung, khi đó tổng tất cả các bán bậc ra bằng tổng tất cả các bán bậc vào và bằng m .

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = m$$

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = 7$$



III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bài tập

1. Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 6
 - a) 20
 - b) 30
 - c) 40
 - d) 50
2. Cho biết các đỉnh của đồ thị có bậc lần lượt là: 4, 3, 3, 2, 2. Số cạnh của đồ thị này là:
 - a) 5
 - b) 6
 - c) 7
 - d) 8
3. Cho danh sách bậc các đỉnh của các đồ thị sau, đồ thị nào không tồn tại?
 - a) 3, 3, 3, 3, 2
 - b) 1, 2, 3, 4, 5
 - c) 0, 1, 2, 2, 3
 - d) 1, 1, 1, 1

III. Các thuật ngữ cơ bản

- ❖ Bài tập
- 4. Có thể tồn tại đồ thị đơn 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 hay không?
- 5. Trong một giải thi đấu có n đội tham dự và đã có $n+1$ trận đấu được tiến hành. CMR có 1 đội đã thi đấu ít nhất 3 trận.

Nội dung

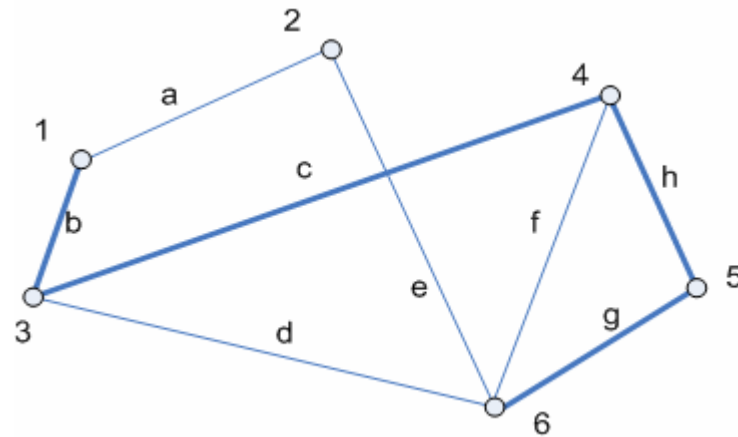
- I. Định nghĩa đồ thị
- II. Các loại đồ thị
- III. Các thuật ngữ cơ bản trong đồ thị
- IV. Đường đi, chu trình**
- V. Đồ thị liên thông
- VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

IV. Đường đi, chu trình

- ❖ Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị vô hướng $G=(V,E)$ là dãy(theo đỉnh): $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$.
Trong đó:
 - + $u = x_0$
 - + $v = x_n$
 - + $(x_i, x_{i+1}) \in E$
- ❖ Hay theo cạnh: $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$.
- ❖ Khi đó: u gọi là đỉnh đầu, v gọi là đỉnh cuối của đường đi.

Theo đỉnh: (1, 3, 4, 5, 6)

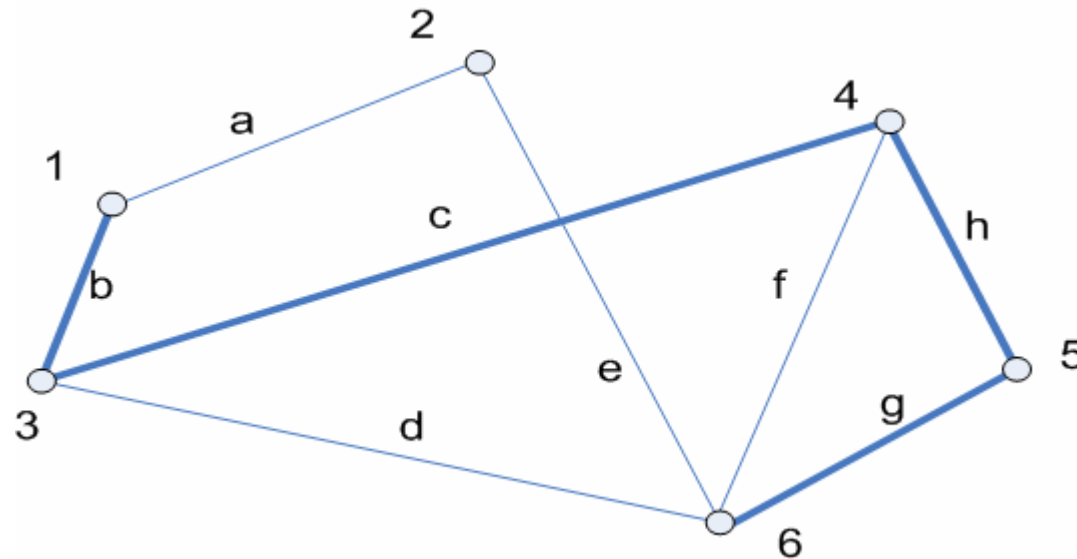
Theo cạnh: (b, c, h, g)



IV. Đường đi, chu trình

❖ Đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau gọi là chu trình (Đường đi khép kín)

- Đường đi (hay chu trình) được gọi là đơn nếu nó không đi qua một cạnh nào quá một lần.



Chu trình đơn: (1, 2, 6, 3, 1)

Chu trình không phải chu trình đơn: (2, 6, 4, 3, 6, 2)

IV. Đường đi, chu trình

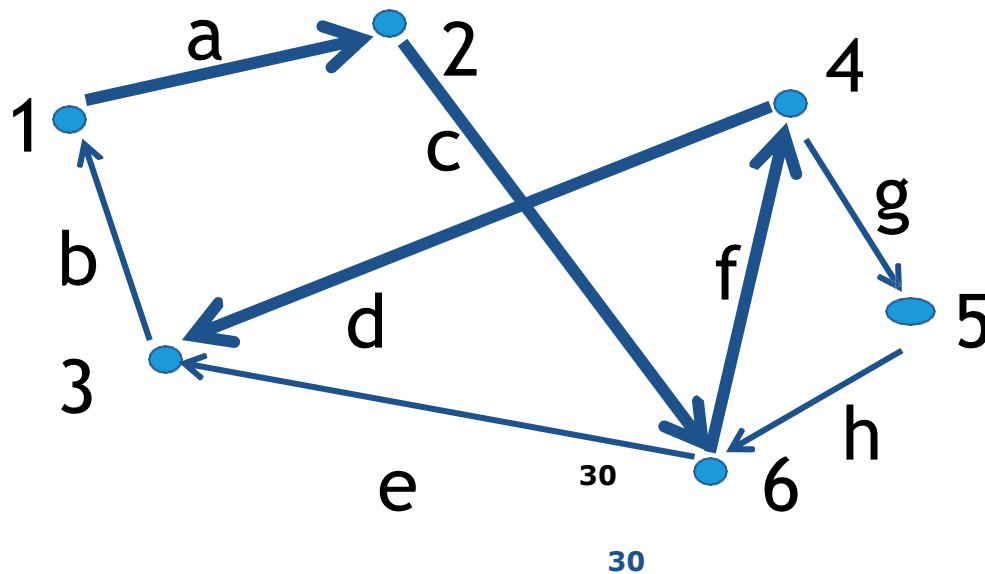
❖ Đường đi và chu trình trong đồ thị có hướng

Đường đi độ dài n ($n \in \mathbb{N}^+$) từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị **có hướng** $G=(V,E)$ là dãy:

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n.$$

Trong đó $u = x_0, v = x_n, (x_i, x_{i+1}) \in E$

Hay theo các **cung**: $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$.



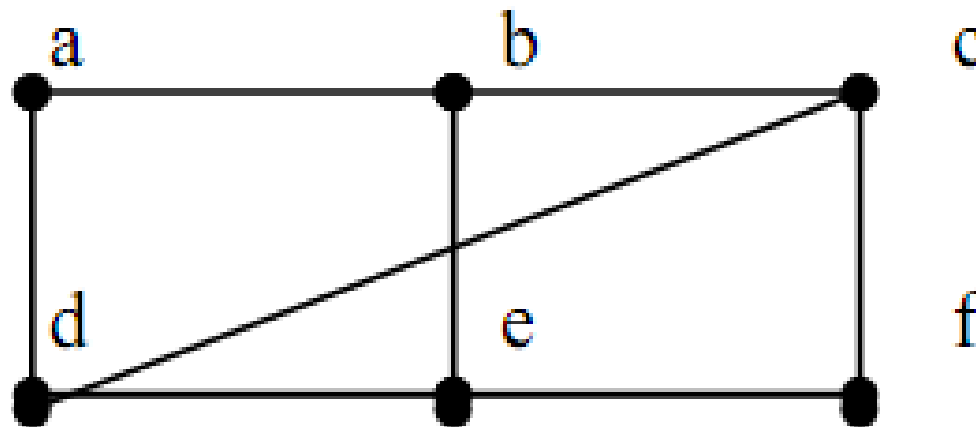
(1, 2, 6, 4, 3)

(a, c, f, d)

(1, 3, 4, 5, 6)

IV. Đường đi, chu trình: Ví dụ

- a, d, c, f, e là **đường đi đơn** độ dài 4 (Không khép kín)
- d, e, c, a **không là đường đi** vì (e,c) không phải là cạnh của đồ thị.
- Dãy b, c, f, e, b là **chu trình** (Điểm xuất phát và kết thúc tại b) độ dài 4.
- Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài 5 **không phải là đường đi đơn** vì cạnh (a,b) có mặt hai lần.



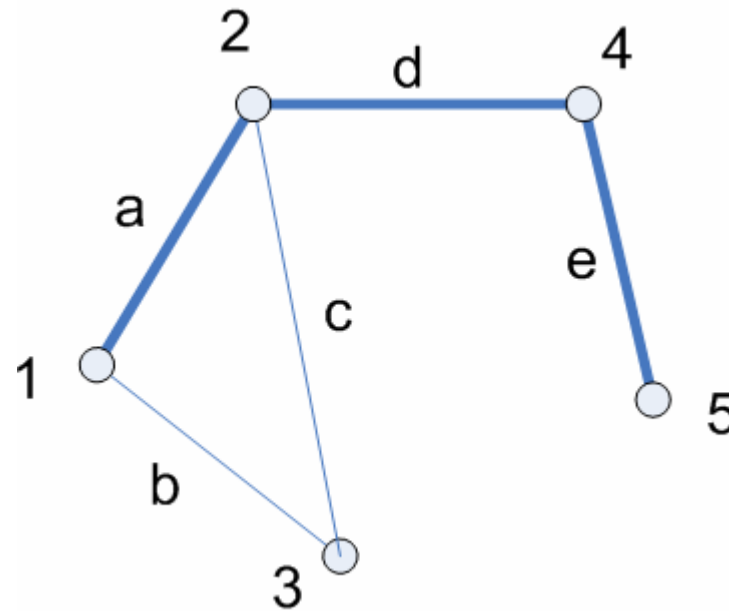
Nội dung

- I.** Định nghĩa đồ thị
- II.** Các loại đồ thị
- III.** Các thuật ngữ cơ bản trong đồ thị
- IV.** Đường đi, chu trình
- V.** Đồ thị liên thông
- VI.** Một số dạng đồ thị đặc biệt

V. Đồ thị liên thông (xét cho vô hướng)

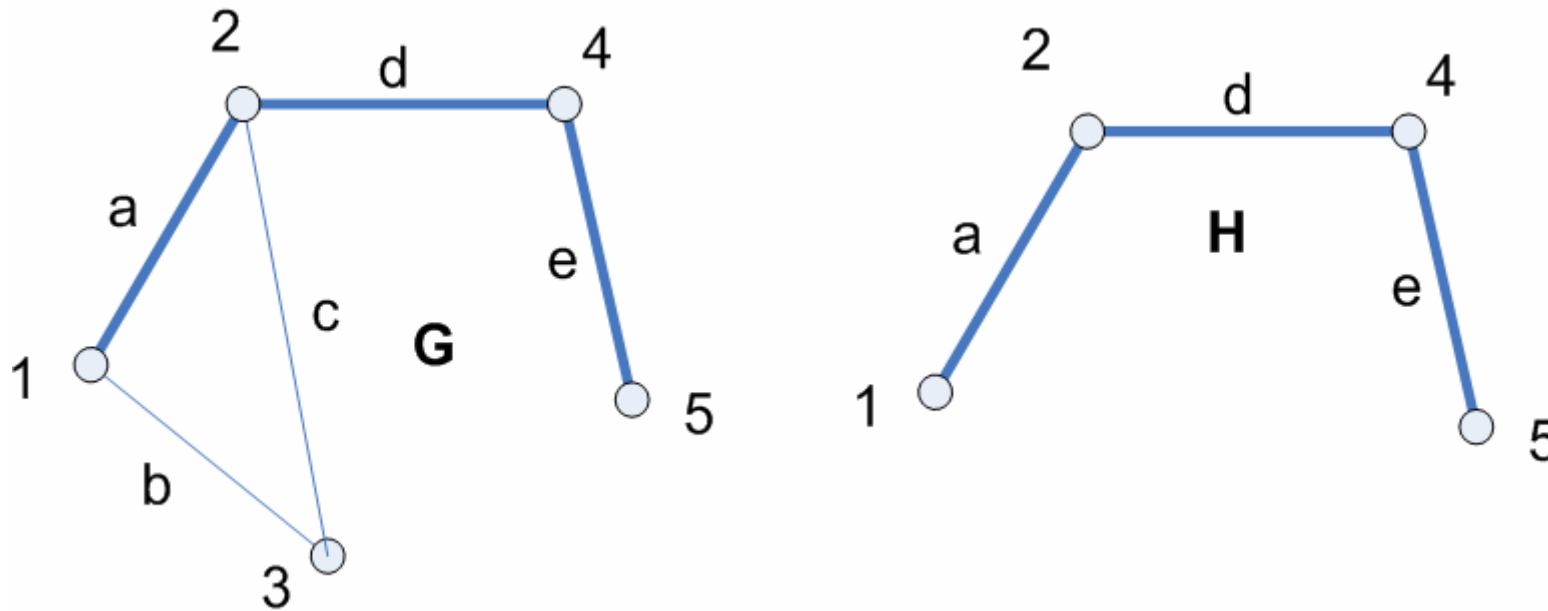
- ❖ Đồ thị vô hướng $G=(V,E)$ được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ của nó.

Đường đi: 1, 3, 2, 4, 5



V. Đồ thị liên thông

- ❖ Đồ thị $H=(W,F)$ được gọi là **đồ thị con** của đồ thị $G=(V,E)$ nếu : $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$

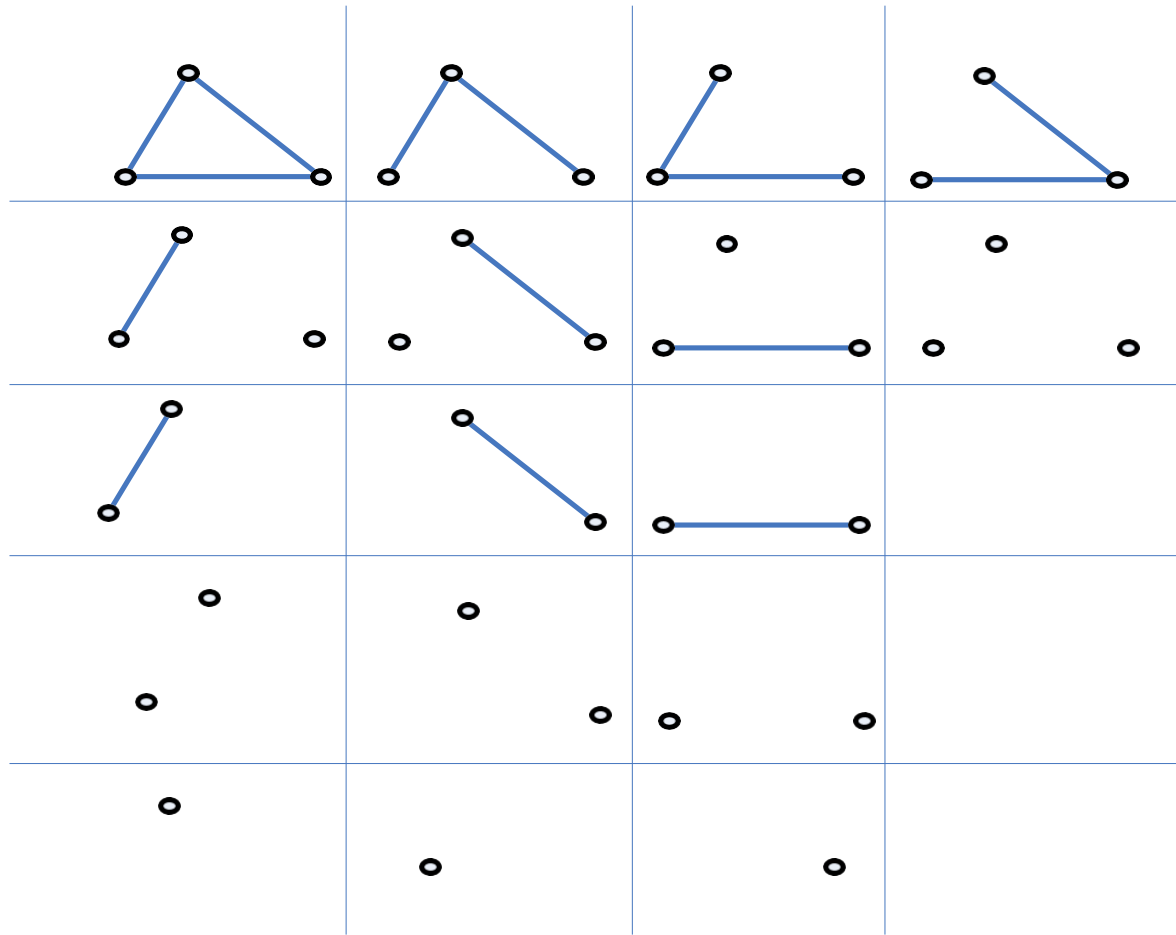


$$\begin{array}{ll} V=\{1, 2, 3, 4, 5\} & W=\{1, 2, 4, 5\} \\ E=\{a, b, c, d, e\} & F=\{a, d, e\} \end{array}$$

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

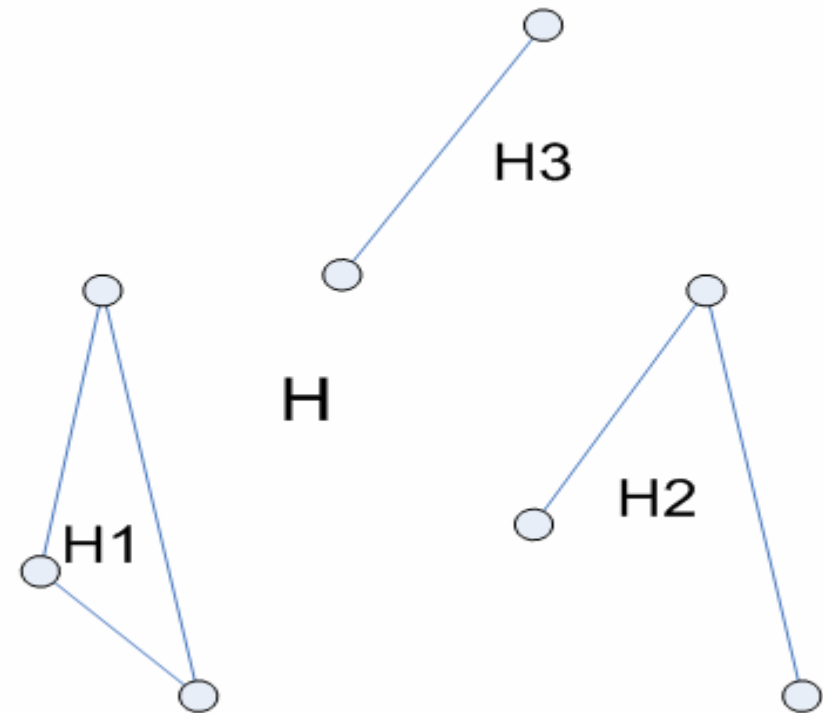
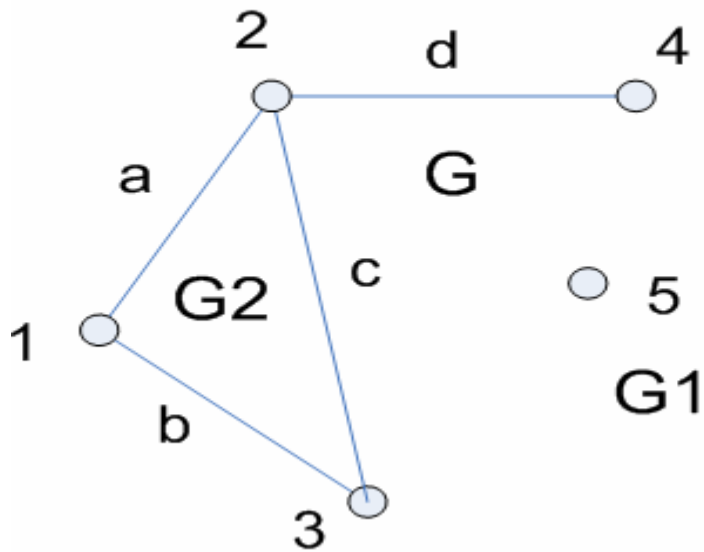
❖ Bài tập

1. Đồ thị K_3 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh ?



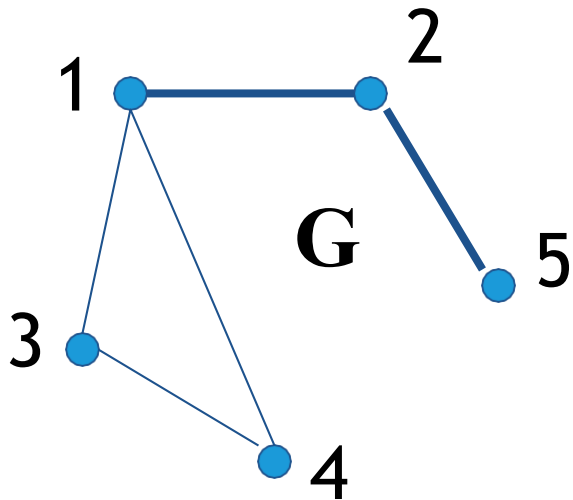
V. Đồ thị liên thông

- ❖ Một đồ thị không liên thông sẽ được phân rã thành các thành phần liên thông, và mỗi thành phần liên thông này là một đồ thị con của đồ thị ban đầu.



V. Đồ thị liên thông: cạnh cầu, đỉnh trụ

- Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh (trụ) nếu việc loại bỏ v cùng các cạnh liên thuộc với nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị
- Cạnh e được gọi là cạnh cầu nếu việc loại bỏ nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị



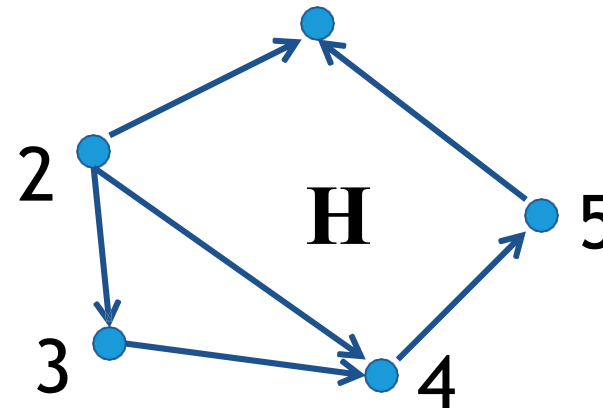
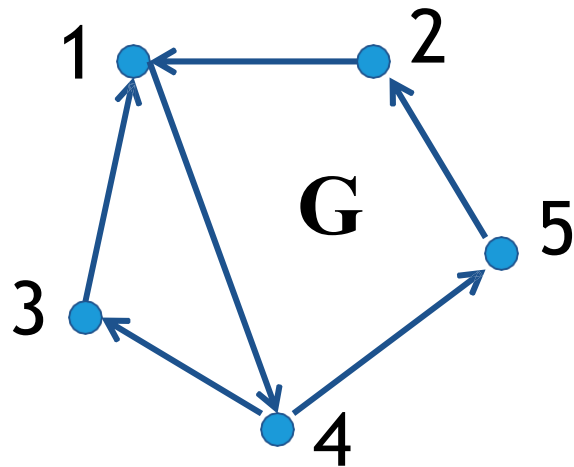
Các đỉnh rẽ nhánh? (1)?

Các cạnh là cầu? (1,2)?

V. Đồ thị liên thông

- Đồ thị có hướng $G=(V,E)$ được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi từ 1 đỉnh bất kỳ đến một đỉnh bất kỳ khác của nó.
- Đồ thị có hướng $G=(V,E)$ được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là đồ thị vô hướng liên thông.

1









V. Đồ thị liên thông

❖ Bài tập

1. Trong 1 đồ thị G có chứa đúng 2 đỉnh bậc lẻ (các đỉnh còn lại nếu có đều bậc chẵn). CM có 1 đường đi nối 2 đỉnh bậc lẻ đó với nhau.

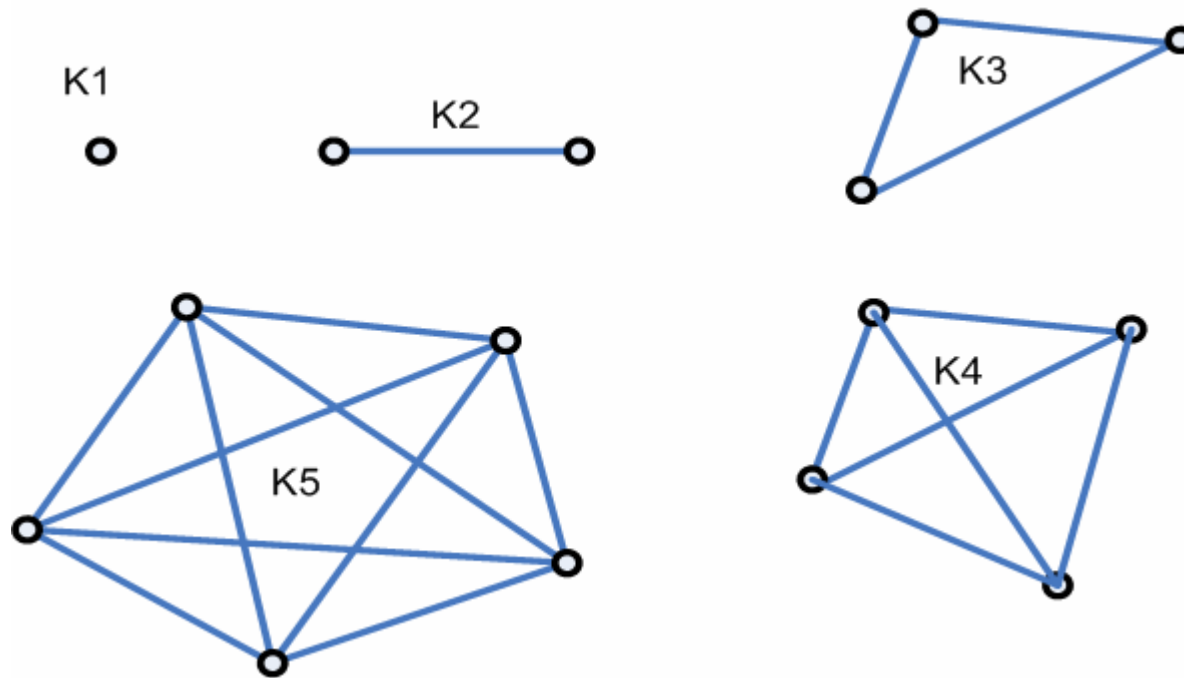
Nội dung

-  **I. Định nghĩa đồ thị**
-  **II. Các loại đồ thị**
-  **III. Các thuật ngữ cơ bản trong đồ thị**
-  **IV. Đường đi, chu trình**
-  **V. Đồ thị liên thông**
-  **VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt**

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- ❖ **Đồ thị đầy đủ**: Một đồ thị đơn vô hướng **n đỉnh** được gọi là đồ thị đầy đủ nếu hai đỉnh bất kỳ đều được nối với nhau bằng 1 cạnh.
- ❖ **Ký hiệu**: **K_n**

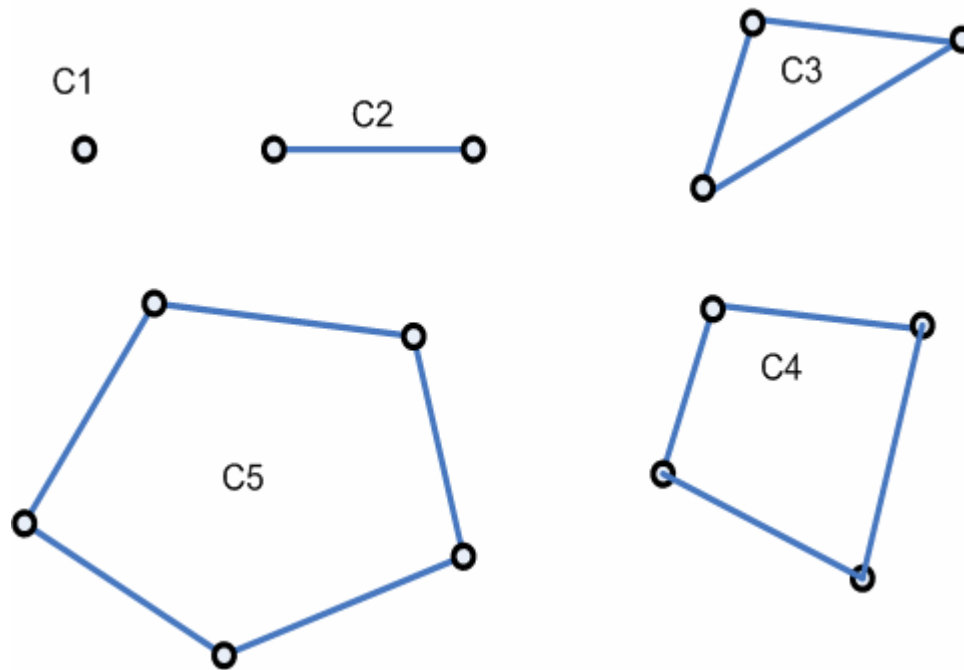
Số cạnh của
Đồ thị đầy đủ ?



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- ❖ **Đồ thị vòng**: Một đồ thị đơn vô hướng n đỉnh được gọi là đồ thị vòng nếu nó có duy nhất một chu trình đơn đi qua tất cả các đỉnh.
- ❖ **Ký hiệu**: C_n

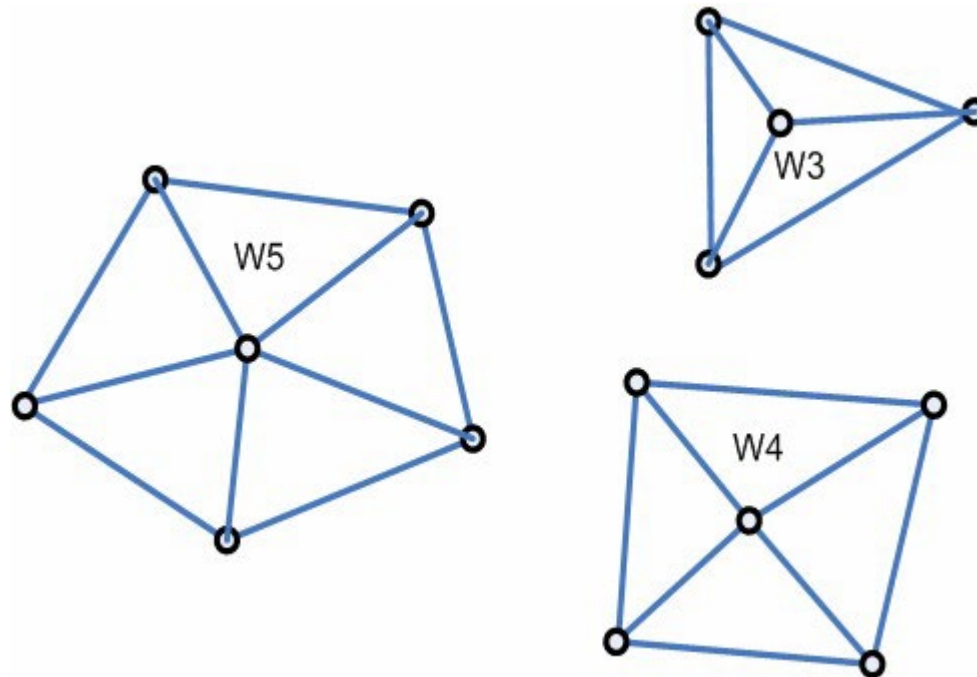
Số cạnh, số đỉnh của
Đồ thị vòng ?



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- ❖ **Đồ thị bánh xe** với $n \geq 3$ đỉnh là đồ thị thu được từ đồ thị C_n bằng cách bổ xung thêm một đỉnh mới nối với tất cả các đỉnh của C_n .
- ❖ **Ký hiệu**: W_n

Số cạnh, số đỉnh của
Đồ thị bánh xe ?



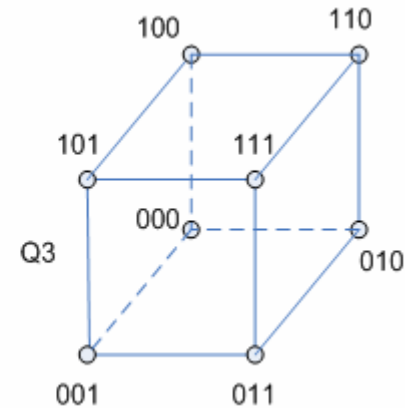
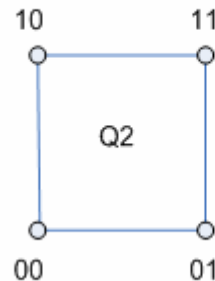
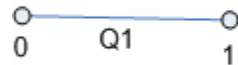
VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Đồ thị siêu khối

Đồ thị siêu khối $k=2^n$ đỉnh là đồ thị có các đỉnh được đánh số bằng các chuỗi nhị phân độ dài n .

❖ Ký hiệu: Q_n

❖ Hai đỉnh kề nhau nếu 2 chuỗi nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.



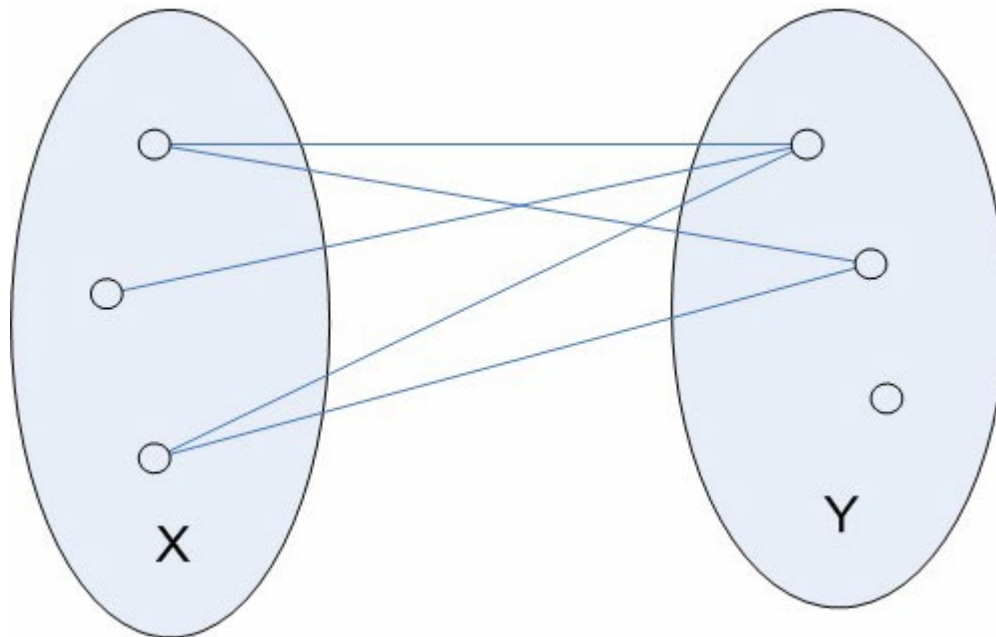
Số cạnh của
đồ thị siêu khối là: $n \cdot 2^{n-1}$

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Đồ thị hai phía

Đơn đồ thị $G=(V, E)$ gọi là đồ thị hai phía nếu:

- $V = X \cup Y$, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$
- **Mỗi cạnh E của G sẽ có một đỉnh thuộc X và một đỉnh thuộc Y .**

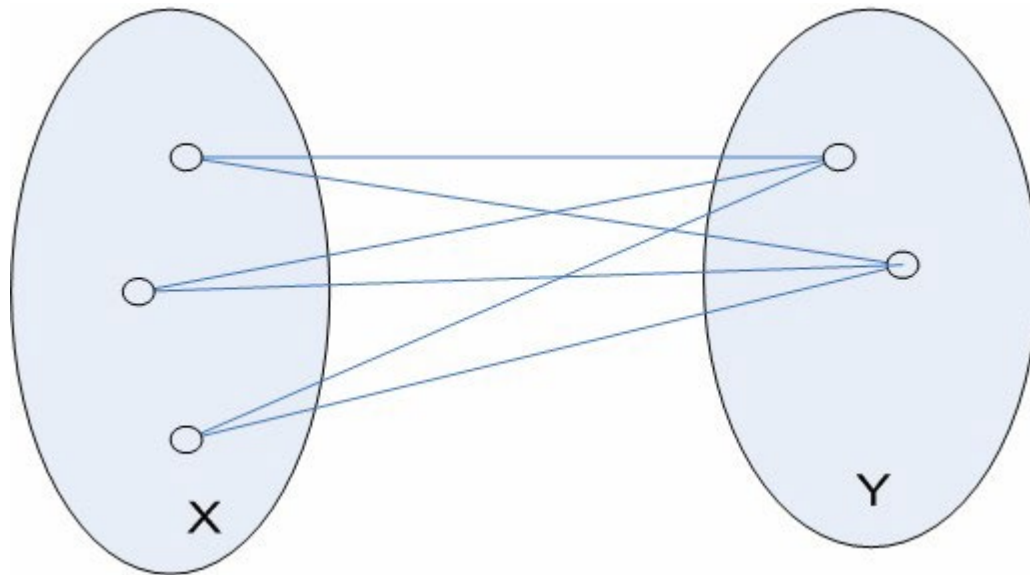


VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Đồ thị hai phía đầy đủ

Đơn đồ thị $G = (X \cup Y, E)$ được gọi là đồ thị hai phía đầy đủ nếu: Mỗi đỉnh thuộc X sẽ được nối với mỗi đỉnh thuộc Y . Nếu $|X| = m$ và $|Y| = n$ thì ta sẽ ký hiệu là: $K_{m,n}$

Số cạnh của Đồ thị hai phía đầy đủ ?



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Định lý:

Đơn đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị hai phía khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

❖ Chứng minh:

\forall Đồ thị hai phía

\Rightarrow Không chứa chu trình độ dài lẻ

\forall Đồ thị, không chứa chu trình độ dài lẻ

\Rightarrow hai phía

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Thuật toán kiểm tra đồ thị hai phía

1. Chọn v là đỉnh bất kỳ. Đặt $X = \{v\}$
2. $Y = \{u \mid u \text{ kề với } v, \forall v \in X\}$
3. Nếu $X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow G$ không là đồ thị hai phía
4. Ngược lại, đặt $X := Y$ Quay trở lại 2.
5. Nếu tất cả các đỉnh được xét hết mà không xảy ra 3. thì G là đồ thị hai phía. Ngược lại G không là đồ thị hai phía.

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Ví dụ:

$$X = \{1\}$$

$$Y = \{5\}, X \cap Y = \emptyset, \Rightarrow X := Y$$

$$Y = \{1, 2\}, X \cap Y = \emptyset, \Rightarrow X := Y$$

$$Y = \{5, 6, 7\}, X \cap Y = \emptyset, \Rightarrow X := Y$$

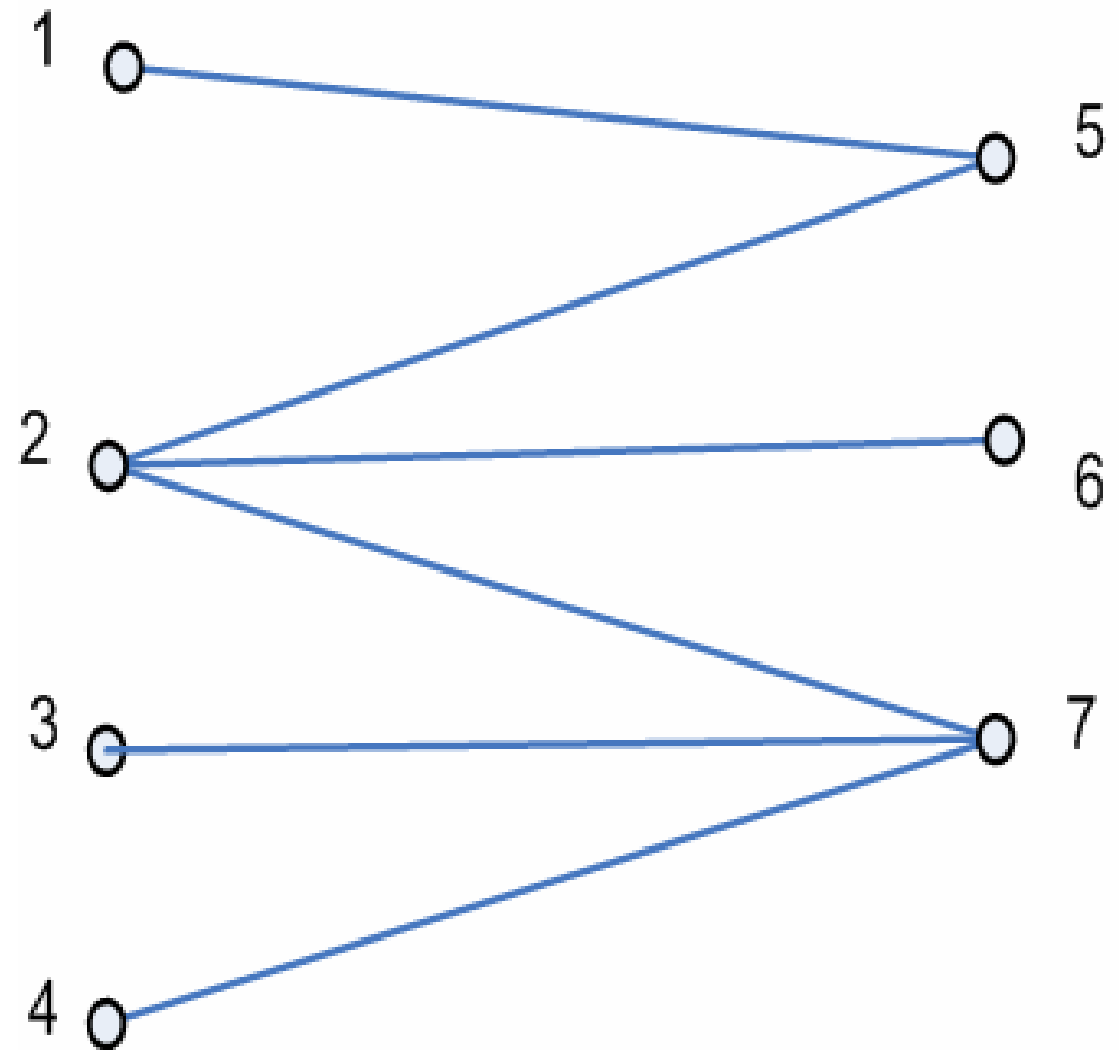
$$Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

DỪNG

Khi đó đồ thị là hai phía:

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

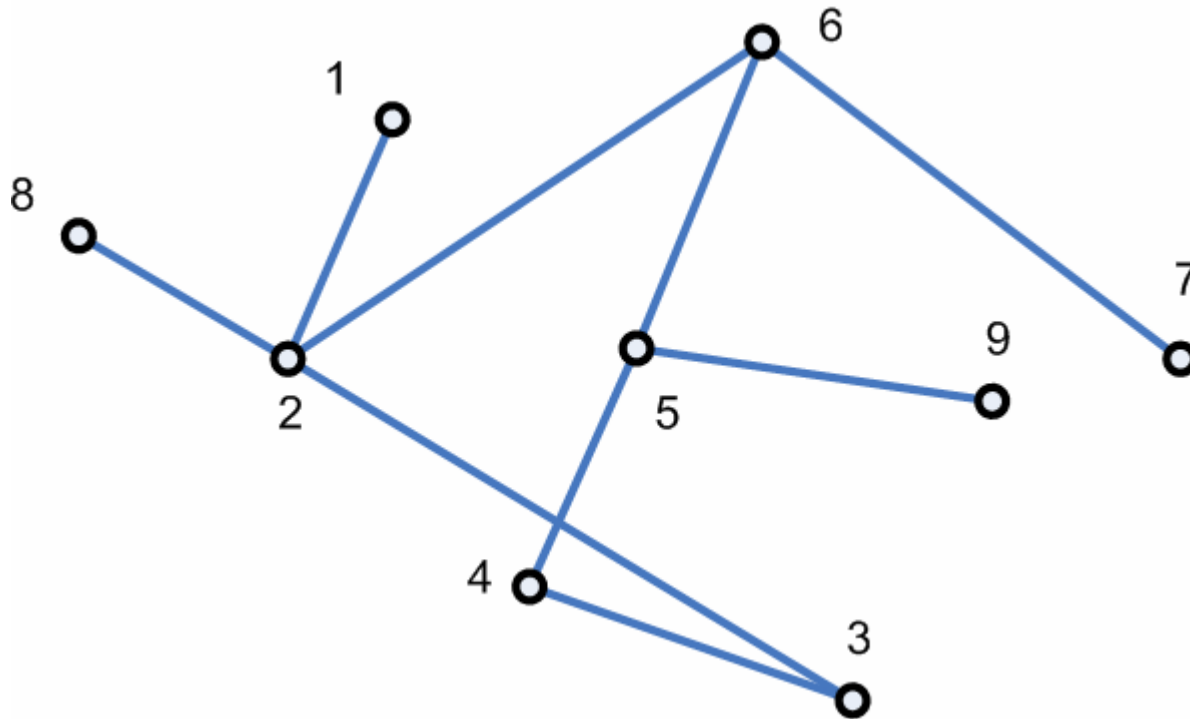
$$Y = \{5, 6, 7\}$$



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

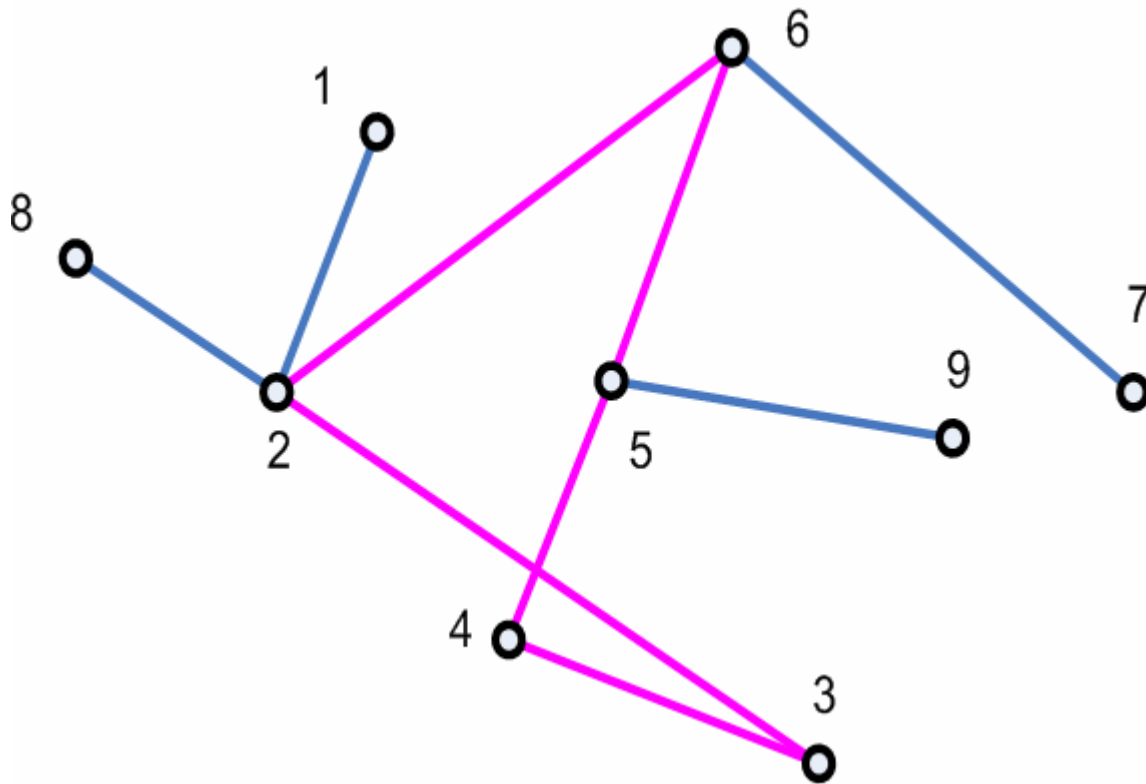
❖ Bài tập:

Kiểm tra đồ thị sau có phải là đồ thị hai phía hay không?



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

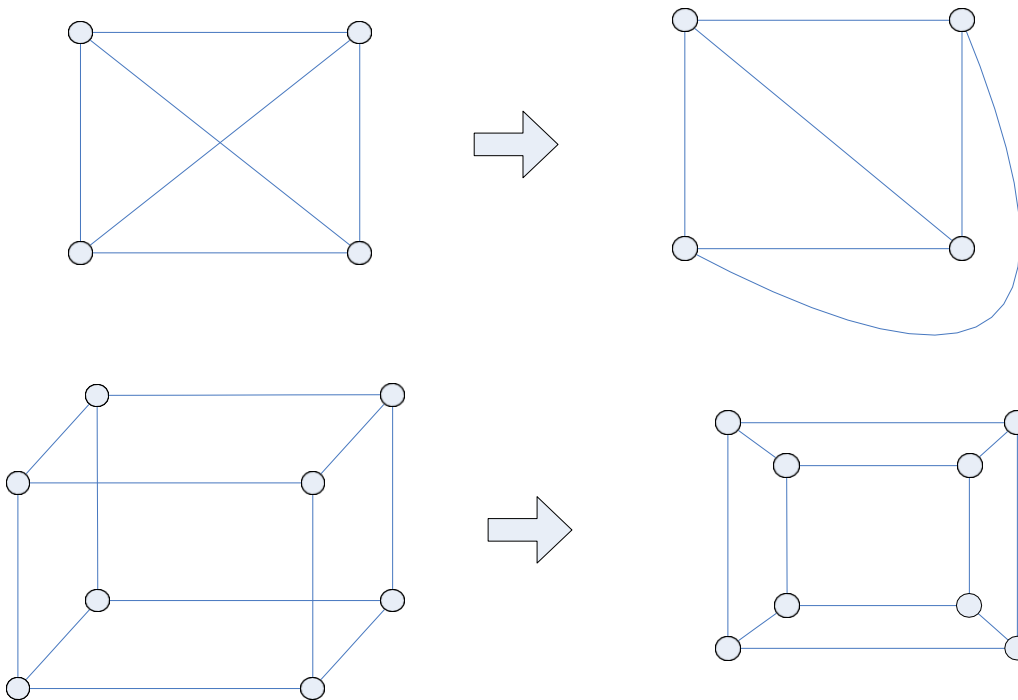
- ❖ Bài tập:
Không phải là đồ thị hai phía



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Đồ thị phẳng

Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên một mặt phẳng mà các cạnh không giao nhau.



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

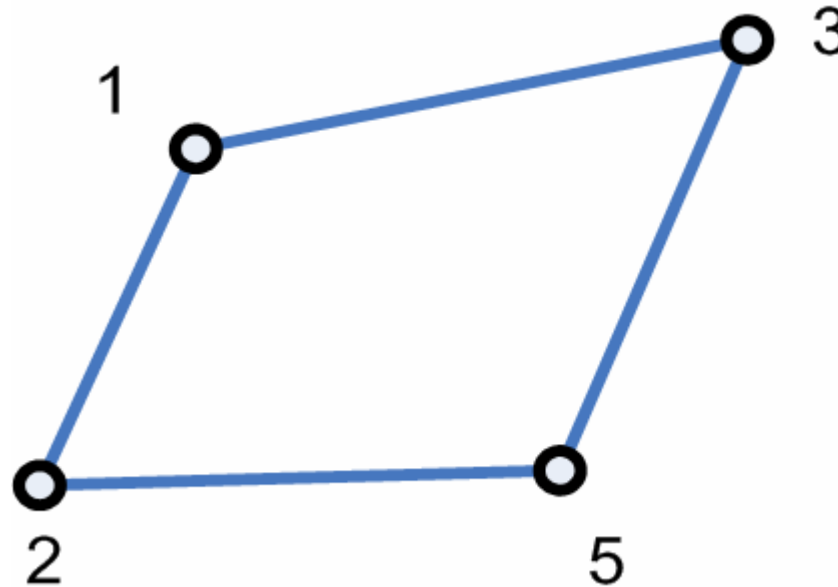
❖ Định lý Euler

Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị phẳng, liên thông với e cạnh và v đỉnh. Gọi f là số mặt của đồ thị. Khi đó: $f = e - v + 2$.

Số cạnh: $e = 4$

Số đỉnh: $v = 4$

Số mặt: $f = 4 - 4 + 2 = 2$



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Định lý Euler

Chứng minh: Bằng PP Quy nạp

- ❖ Gọi f_n , e_n , v_n lần lượt là số mặt, số cạnh, số đỉnh của đồ thị phẳng G_n do biểu diễn phẳng của đồ thị G với n cạnh sinh ra

+ Trường hợp: $e_1=1$, $v_1=2$ thì $f_1 = 1 - 2 + 2 = 1$



+ Giả sử đồ thị G_n (n cạnh) thỏa đẳng thức: $f_n = e_n - v_n + 2$.

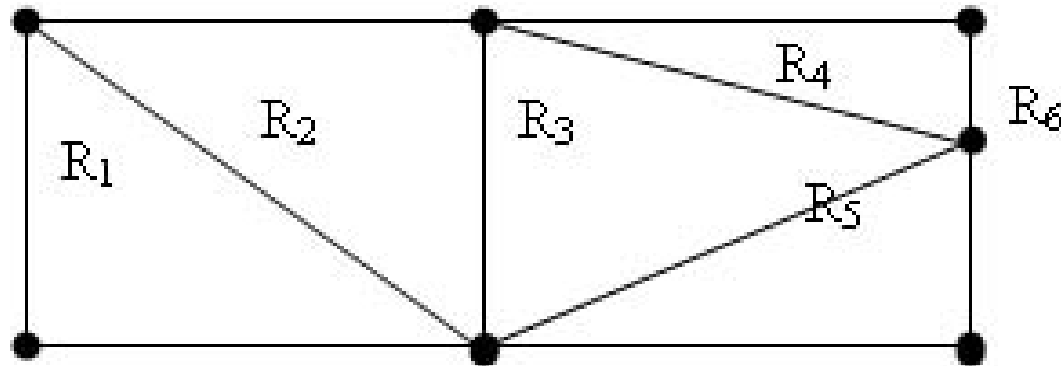
Thêm vào đồ thị G_n một cạnh (a_{n+1}, b_{n+1}) để được đồ thị G_{n+1} .

Ta phải chứng minh: $f_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$

Xảy ra hai trường hợp

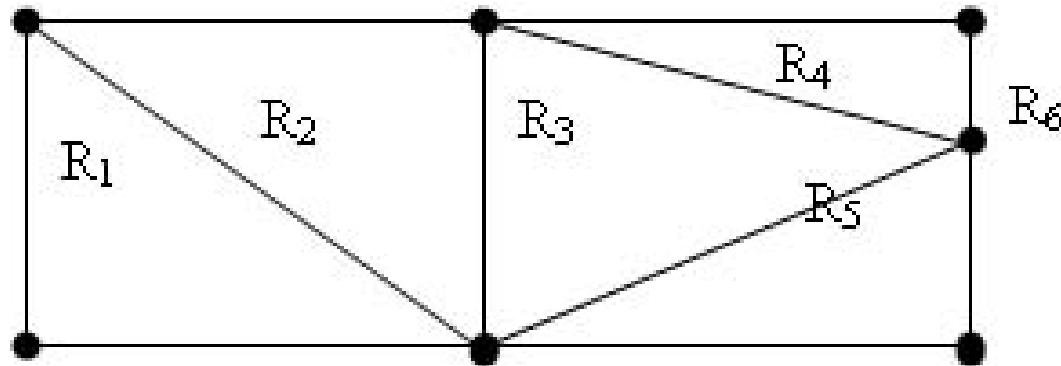
VI: Đồ thị phẳng: Công thức Euler

- G là đồ thị phẳng liên thông, G có n đỉnh, m cạnh, r là **số miền** của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G. Ta có: $r = m - n + 2$
- Ví dụ: $m=11$, $n=7$ số miền $r = m - n + 2 = 6$



VI: Đồ thị phẳng: Công thức Euler

- G là đồ thị phẳng liên thông, G có n đỉnh, m cạnh, r là **số miền** của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G. Ta có: $r = m - n + 2$
- Ví dụ: $m=11$, $n=7$ số miền $r = m - n + 2 = 6$



Nhận biết đồ thị phẳng

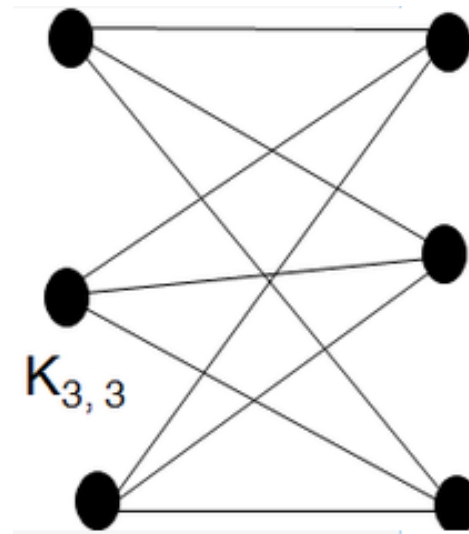
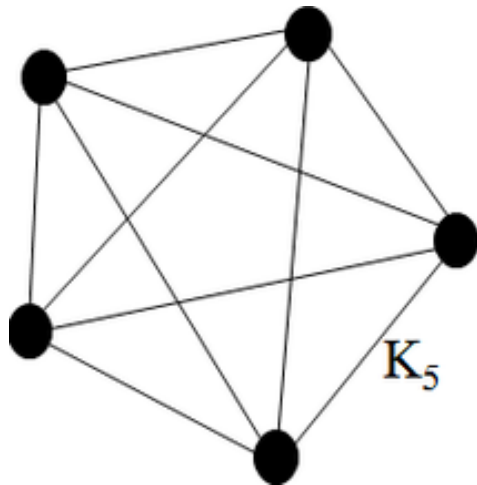
- **Hệ quả 1:** Nếu G là đơn đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, m cạnh thì $m \leq 3n - 6$.
- **Hệ quả 2:** Nếu G là đơn đồ thị liên thông phẳng có n đỉnh, m cạnh và không có chu trình có độ dài 3 thì $m \leq 2n - 4$.
- **Hệ quả 3:** Trong đơn đồ thị phẳng liên thông, luôn tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc < 5 .
- **Ví dụ:**
 - Xét đồ thị $K_{3,3}$ có $n = 6$; $m = 9$. Ta có $K_{3,3}$ là đơn đồ thị liên thông không có chu trình độ dài 3 nhưng không thỏa mãn tính chất của đồ thị phẳng trong **Hệ quả 2** ($m = 9 > 2n - 4 = 8$). Do vậy **$K_{3,3}$ không phải là đồ thị phẳng.**
 - Xét tương tự với K_5 có $n = 5$; $m = 10$. Ta có K_5 là đơn đồ thị liên thông nhưng không thỏa mãn tính chất của đồ thị phẳng trong **Hệ quả 1** ($m = 10 > 3n - 6 = 9$). Vậy **K_5 không phải là đồ thị phẳng.**

Nhận biết đồ thị phẳng

- **Dấu hiệu 1:** Nếu đồ thị G chứa một **đồ thị con không phẳng** thì G **không phải là đồ thị phẳng**.
- **Dấu hiệu 2:** Đồ thị G **không thỏa mãn** kết luận của **Hệ quả 1**, **Hệ quả 2** là đồ thị **không phẳng**.
- **Dấu hiệu 3 (Định lý Kuratowski):** Đồ thị G không phẳng khi và chỉ khi G chứa một **đồ thị con đồng phân** với $K_{3,3}$ hoặc K_5 .
- **Định nghĩa:** Ta nói đồ thị G' sinh ra từ G bởi phép chia theo cạnh (x, y) nếu G' có được từ G bằng cách bỏ đi cạnh (x, y) đồng thời thêm đỉnh z và hai cạnh (x, z) , (z, y) .
 - Các đồ thị G_1 và G_2 được gọi là **đồng phân** với nhau nếu chúng sinh ra từ cùng một đồ thị G bằng một dãy các phép chia cạnh.

Nhận biết đồ thị phẳng

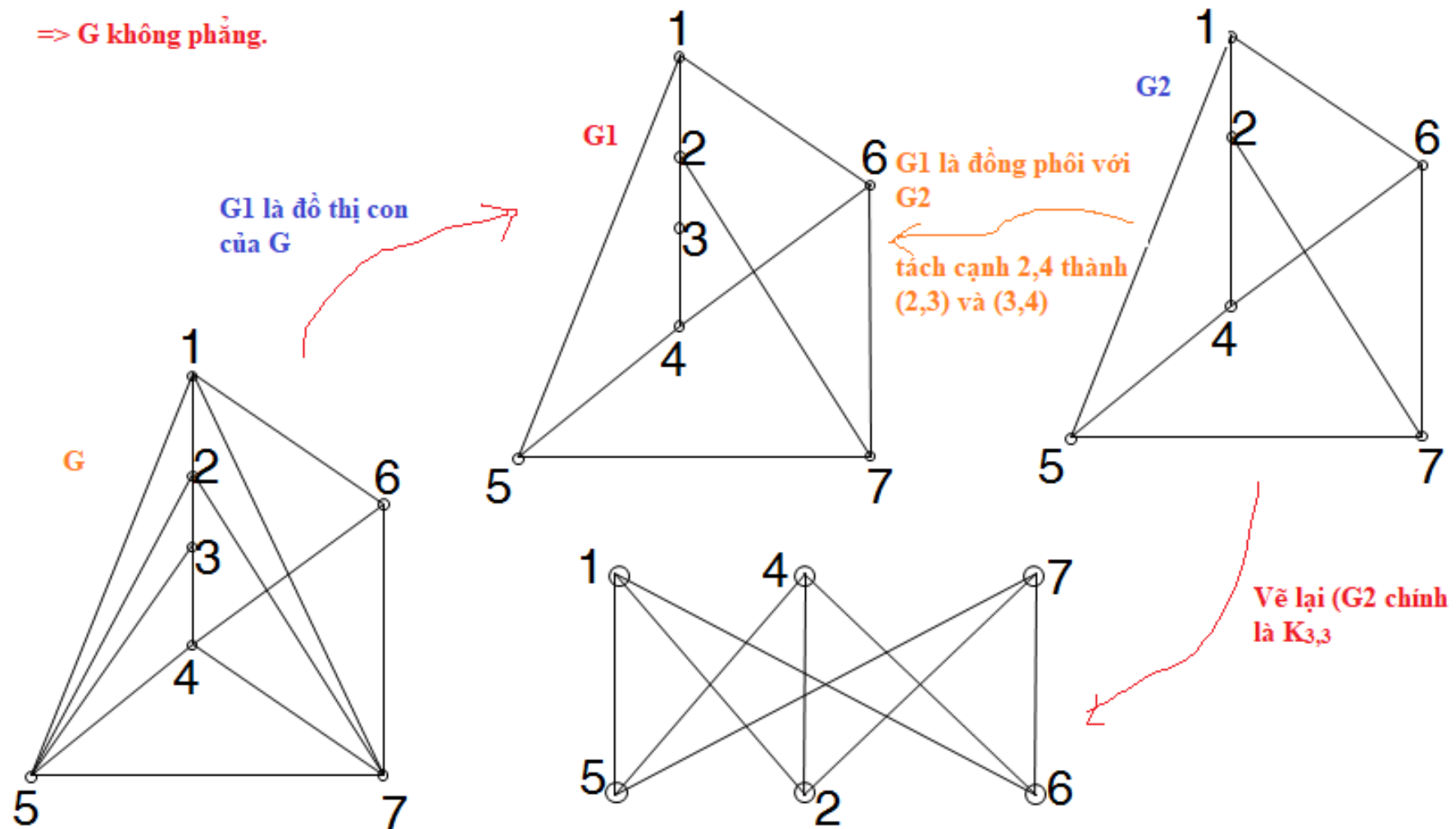
- **Nhận xét:** Hai đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất với các tính chất sau:
 - Nếu xóa đi 1 đỉnh hay 1 cạnh của 2 đồ thị trên thì chúng ta sẽ có được đồ thị phẳng.
 - Đồ thị K_5 là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất.
 - Đồ thị $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất.



Nhận biết đồ thị phẳng

- **Ví dụ:** Kiểm tra đồ thị G có phẳng không?
 - Dùng định lý Kuratowski.

$\Rightarrow G$ không phẳng.



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Định lý Euler (Chứng minh)

+ Cả 2 đỉnh a_{n+1} , b_{n+1} thuộc G_n :

$$f_{n+1} = f_n + 1$$

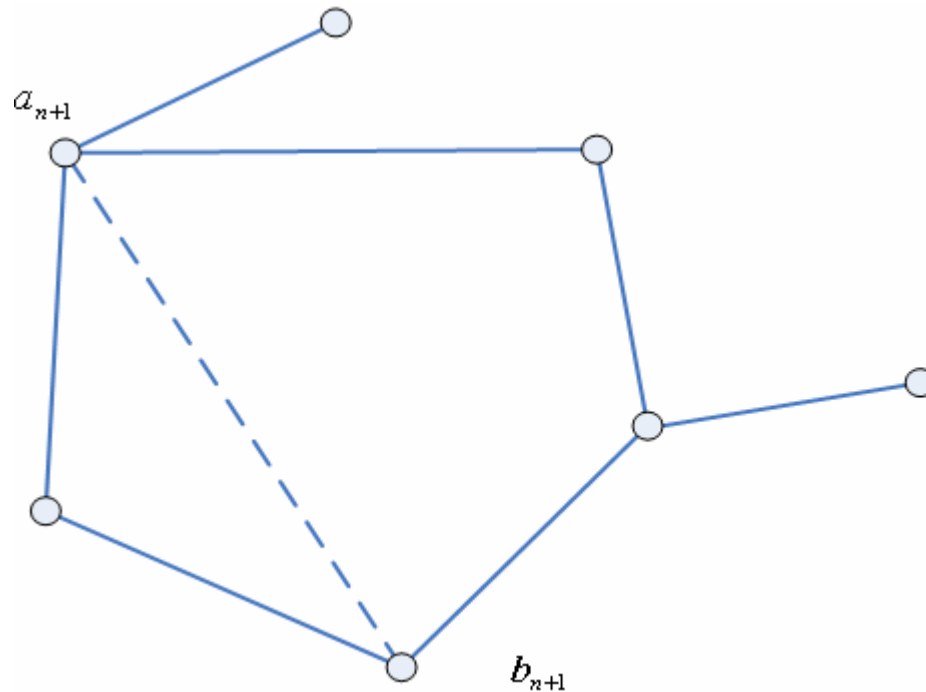
$$e_{n+1} = e_n + 1$$

$$v_{n+1} = v_n$$

$$\implies f_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$$

$$f_n + 1 = e_n + 1 - v_n + 2$$

$$f_n = e_n - v_n + 2$$



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Định lý Euler (Chứng minh)

+ Cả 2 đỉnh a_{n+1} , b_{n+1} thuộc

G_n :

$$f_{n+1} = f_n$$

$$e_{n+1} = e_n + 1$$

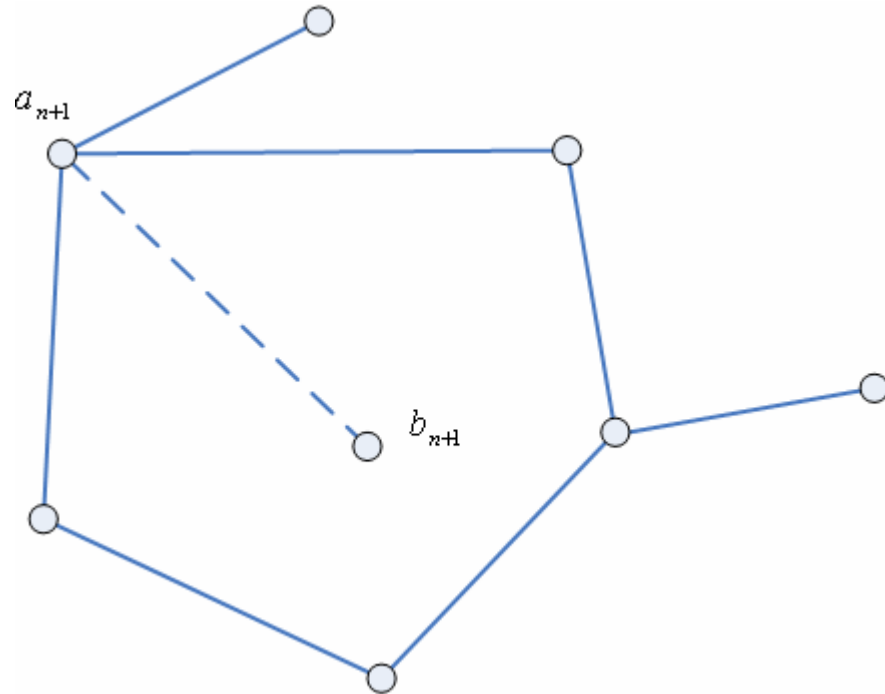
$$v_{n+1} = v_n + 1$$

Suy ra: $f_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$

$$f_n = e_n + 1 - v_n + 1 + 2$$

$$f_n = e_n - v_n + 2$$

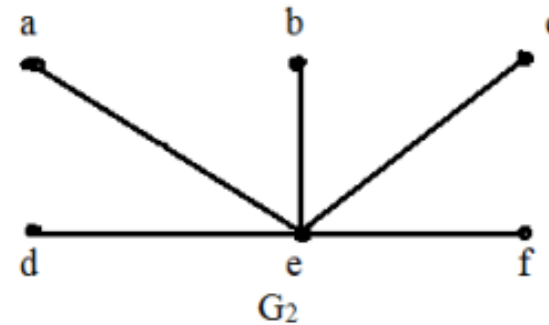
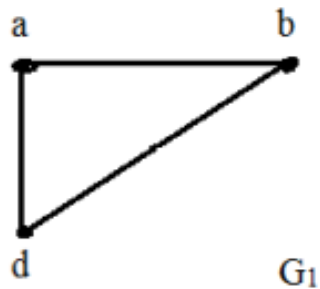
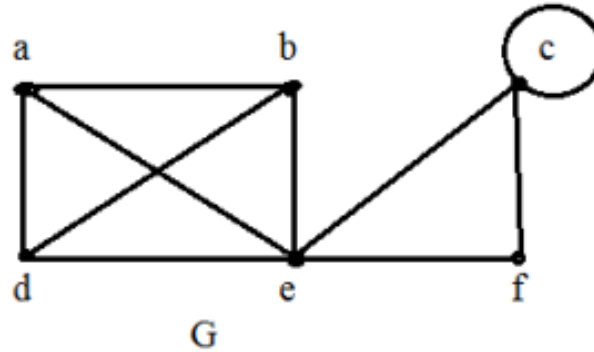
Nên đây: ĐPCM



Đồ thị con và đồ thị riêng

- Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị.
 - Đồ thị $G' = (V', E')$ được gọi là đồ thị con của đồ thị G nếu $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$.
 - Đồ thị $G'' = (V, E'')$ với $E'' \subseteq E$, được gọi là đồ thị riêng của đồ thị G .
- Nhận xét:
 - Mỗi tập con các đỉnh V' của đồ thị G tương ứng duy nhất với một đồ thị con.
 - Để xác định một đồ thị con ta chỉ cần nêu tập đỉnh của nó.
 - Đồ thị riêng là đồ thị giữ nguyên tập đỉnh và bỏ bớt một số cạnh.

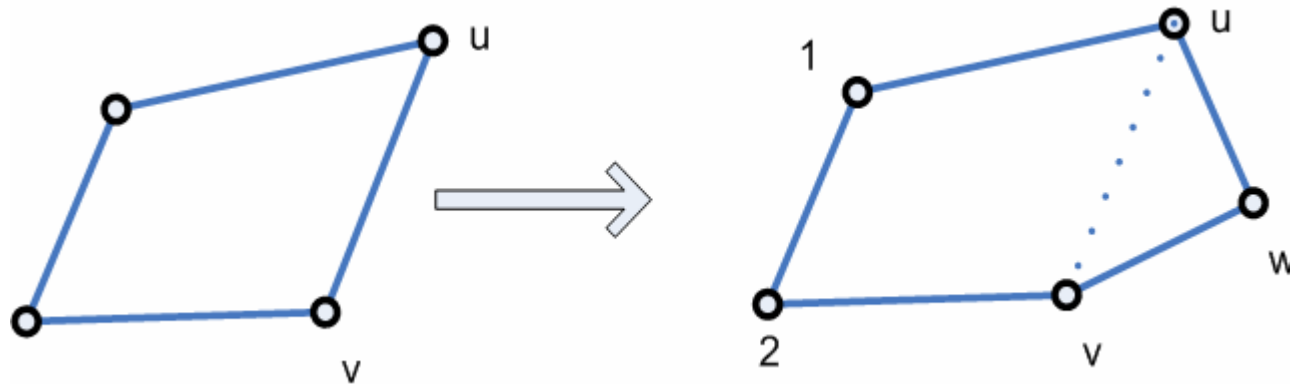
Đồ thị con và đồ thị riêng: Ví dụ



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Định lý Kuratowski (đồ thị đẳng hình (đẳng cấu hoặc đồng cấu))

Phép chia cạnh (u, v) là việc ta bỏ đi cạnh (u, v) và thêm vào một đỉnh mới w cùng với hai cạnh (u, w) , (w, v) .



❖ Định nghĩa đồng cấu

Hai đồ thị được gọi là đồng cấu nếu chúng có thể thu được từ cùng một đồ thị nào đó nhờ các phép chia cạnh.

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Định lý Kuratovski

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là phẳng là đồ thị này không chứa bất kỳ một đồ thị con nào đồng cấu với $K_{3,3}$ và K_5

Sự đẳng hình

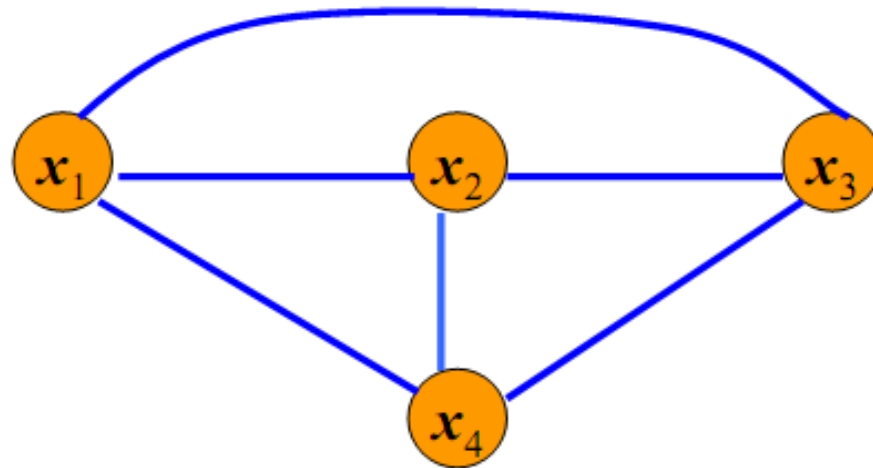
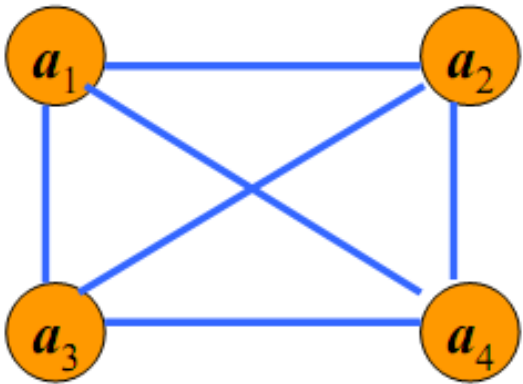
- Hai đồ thị $G1 = (V1, E1)$ và $G2 = (V2, E2)$ được gọi là đẳng hình với nhau nếu **tồn tại một song ánh** S trên các tập đỉnh bảo toàn các cạnh:

$$\forall x, y \in V1: (x, y) \in E1 \Leftrightarrow (S(x), S(y)) \in E2.$$

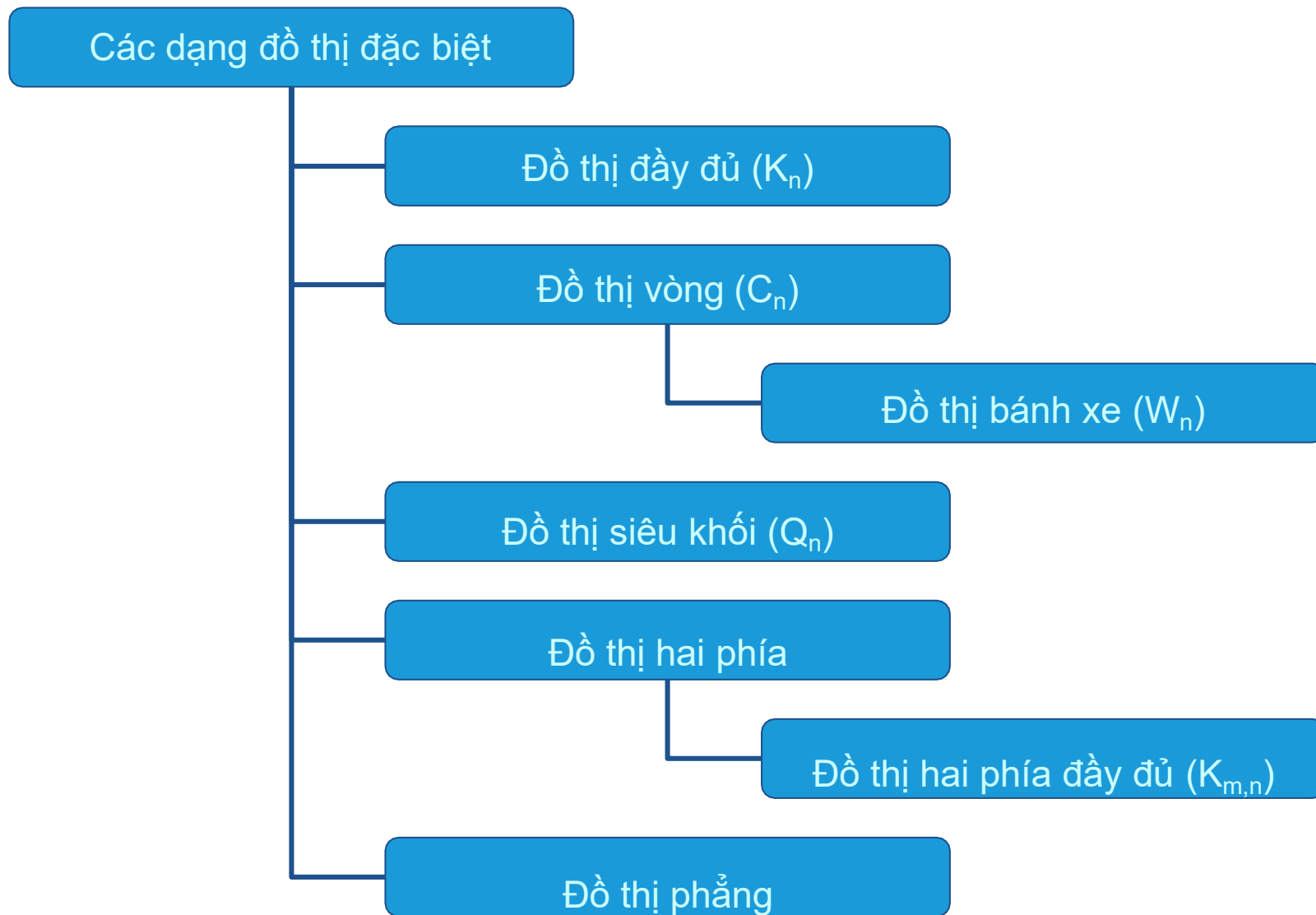
- Hai đồ thị đẳng hình chỉ **khác nhau về tên gọi** của các đỉnh và cách biểu diễn bằng hình vẽ.
 - Do vậy, ta không phân biệt hai đồ thị đẳng hình với nhau.
- Hai đồ thị đẳng hình (đẳng cấu) sẽ có **cùng** số đỉnh, cùng số đỉnh bậc k , cùng số cạnh, cùng số tplt.

Ví dụ về sự đẳng hình

- Hai đồ thị sau là đẳng hình với song ánh:
 $S(a_i) = x_i, i = 1, 2, 3, 4.$



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt



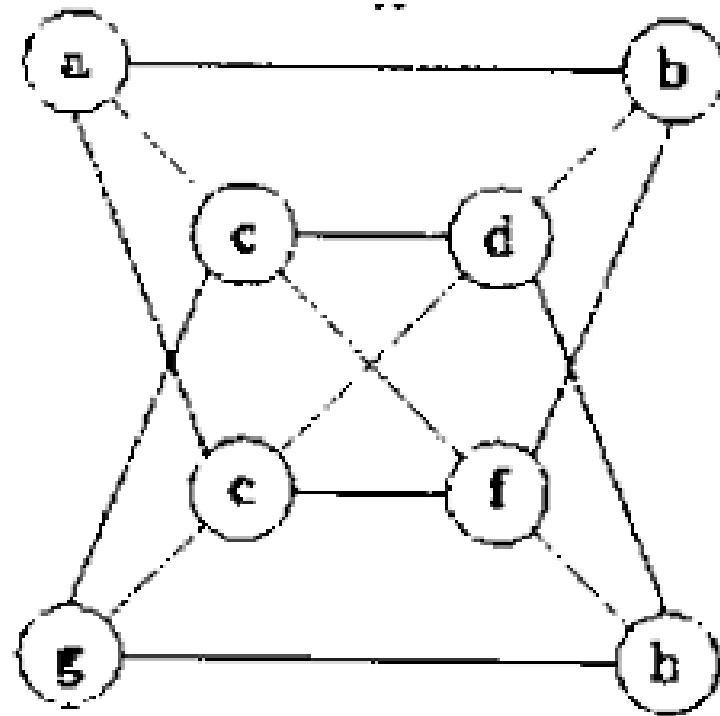
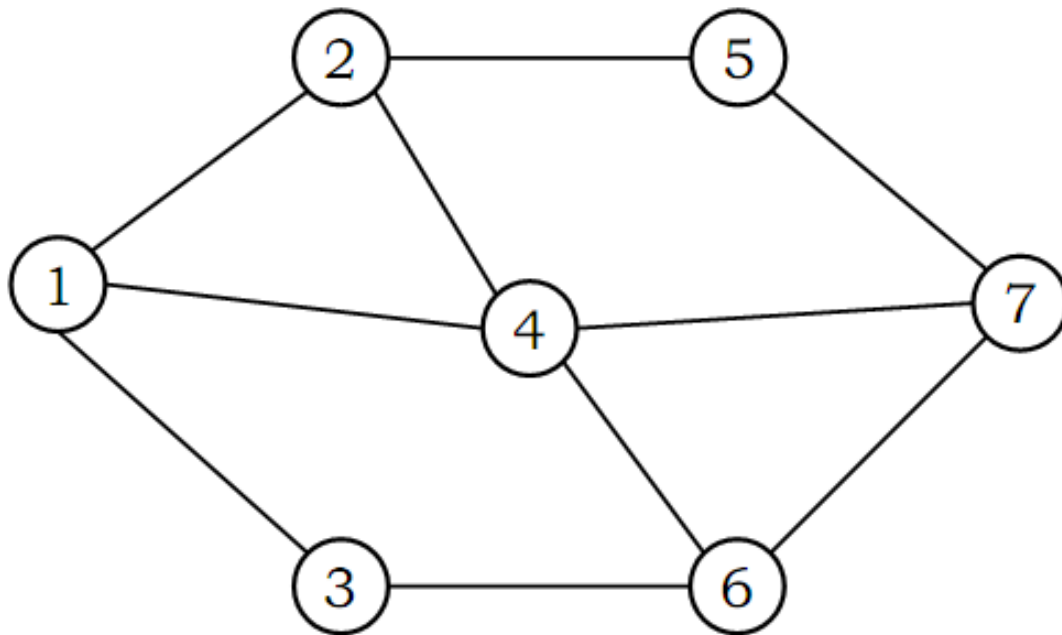
VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Bài tập

1. Số cạnh của đồ thị K_8 ?
2. Số cạnh của đồ thị C_{2007} ?
3. Số cạnh của đồ thị W_{100} ?
4. Cho đồ thị G phẳng, liên thông có 20 đỉnh, bậc của mỗi đỉnh bằng 3. Đồ thị biểu diễn phẳng của G có bao nhiêu mặt?
5. Cho đồ thị phân đôi p đỉnh và q cạnh. CM:
 $q \leq p^2/4$. Dấu = xảy ra khi nào?
6. Cho đồ thị G có n đỉnh, m cạnh với $m \geq n$. Chứng minh G có một chu trình.
7. Có bao nhiêu đồ thị đơn gồm 5 đỉnh và có 4 hoặc 6 cạnh ?

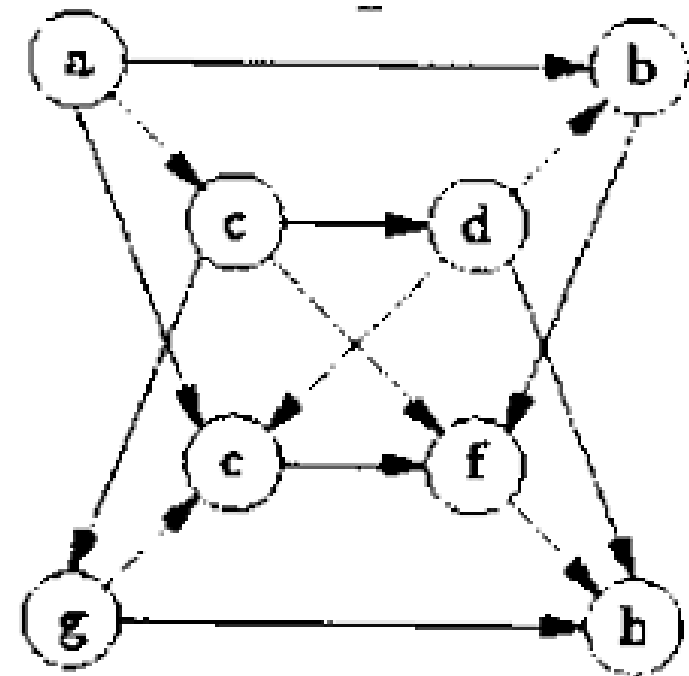
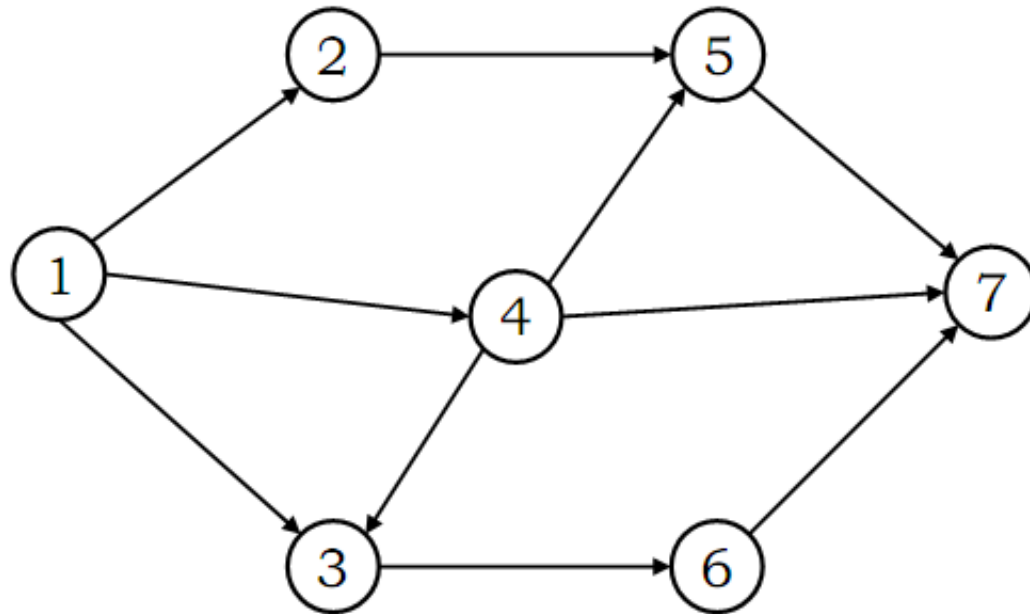
Bài tập 8

- Xác định bậc của mỗi đỉnh.
- Liên thông? Tồn tại đường đi? Chu trình?
- Cạnh cầu? Đỉnh trụ?
- Định chiều?



Bài tập 9

- Xác định bán bậc vào \deg^- và bán bậc ra \deg^+ của mỗi đỉnh.
- Cạnh cầu? Đỉnh trụ?
- Liên thông yếu? Liên thông mạnh?
- Tồn tại đường đi? Chu trình?



Bài tập 10

- Vẽ đồ thị vô hướng $G=(V,E)$ cho bởi:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

và

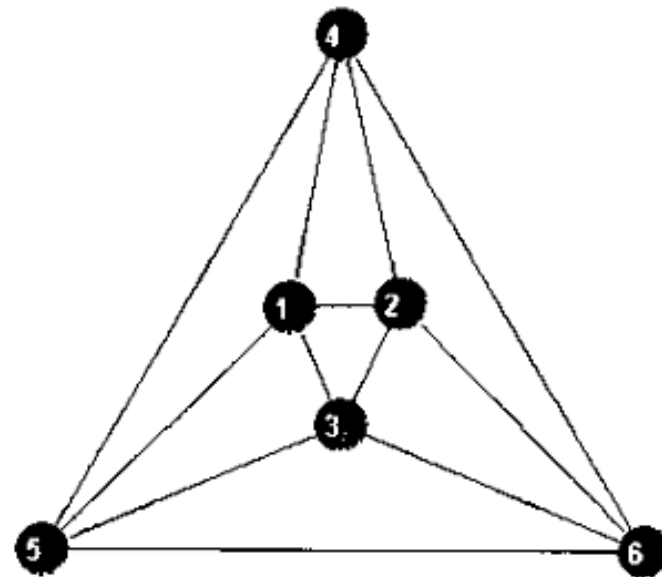
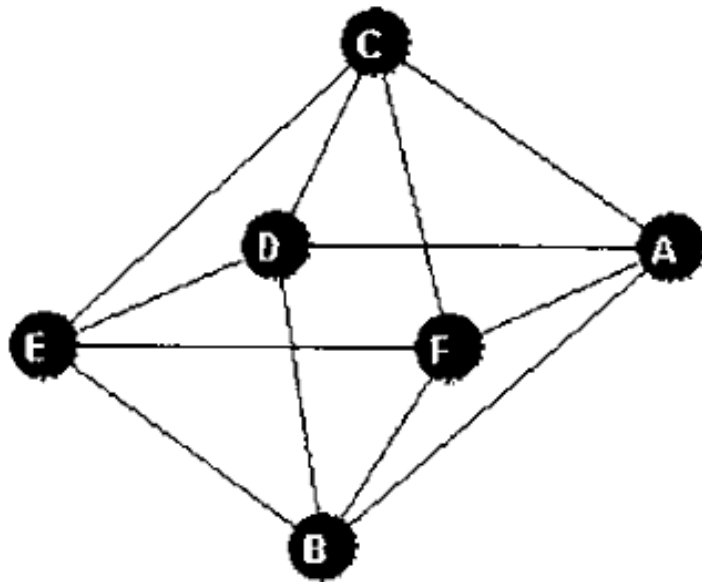
$$E = \{(e,g),(b,f),(d,c),(d,f),(c,f), (a,f),(e,d)\}$$

Bài tập 11

- Cho song ánh f như sau:

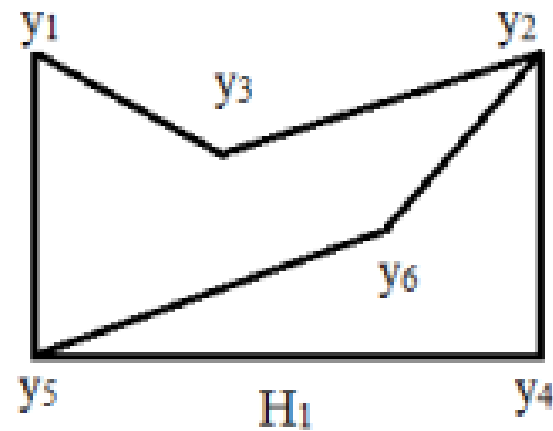
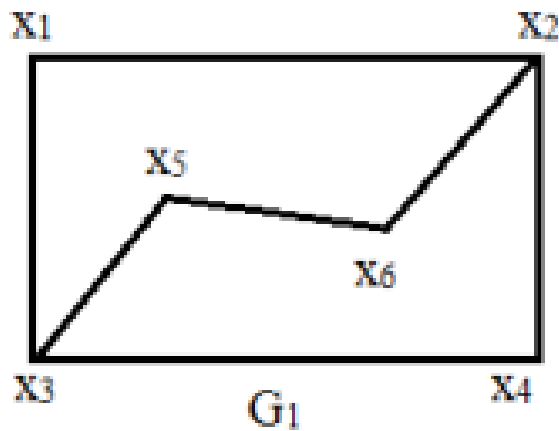
$$f(A)=1, f(B)=2, f(C)=3, f(D)=4, f(E)=5, f(F)=6.$$

- Kiểm tra hai đồ thị sau có đẳng hình hay không?



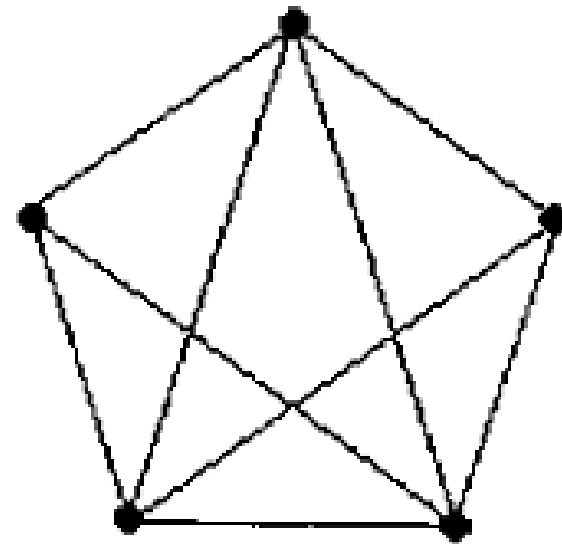
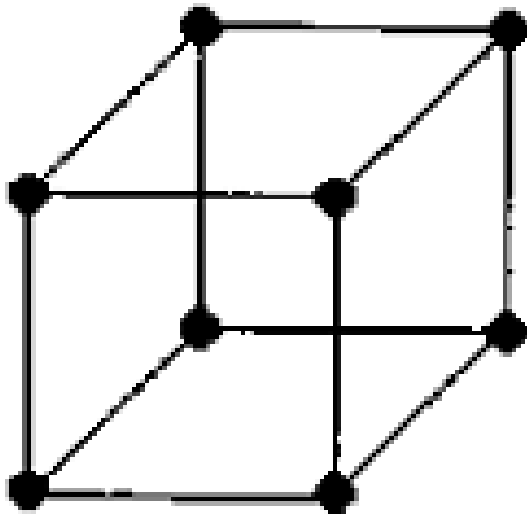
Bài tập 12

- Kiểm tra hai đồ thị sau có đẳng hình hay không?



Bài tập 13

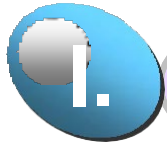
- Với mỗi đồ thị sau, cho biết nó có phải là đồ thị phẳng không? Nếu phải, trình bày cách vẽ.





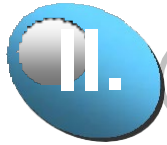
Biểu diễn đồ thị

Nội dung



I.

Các cách biểu diễn đồ thị



II.

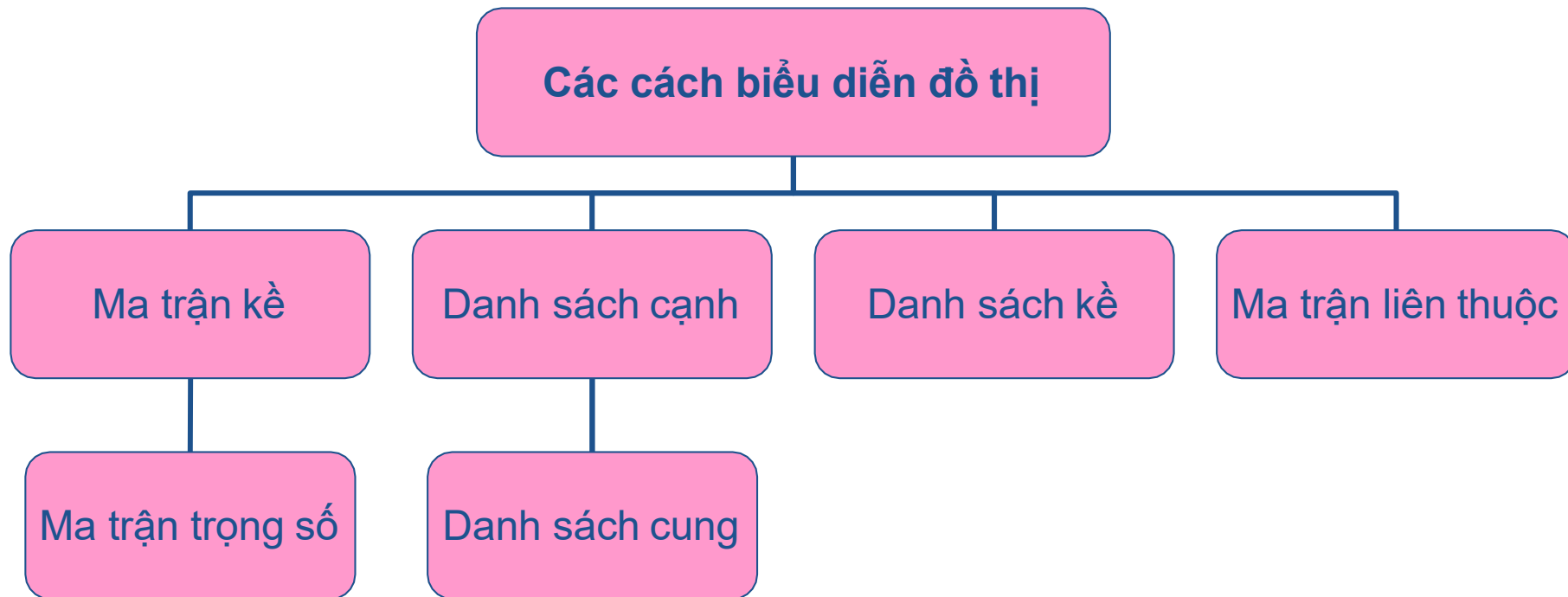
Sự đẳng cấu của các đồ thị



III.

Hướng dẫn cài đặt

I. Các cách biểu diễn đồ thị

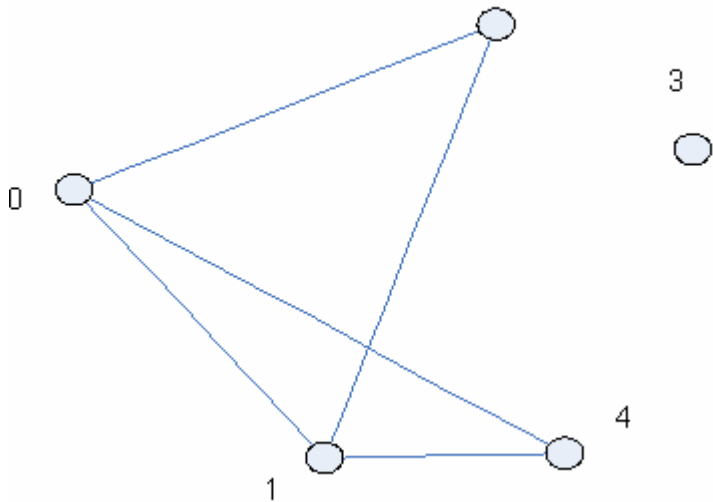


I.1. Ma trận kề (đơn đồ thị vô hướng)

❖ Định nghĩa

- Đơn đồ thị $G = (V, E)$ với tập đỉnh $V = \{0, \dots, n-1\}$, tập cạnh $E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}$. Ta gọi ma trận kề của G là
- $A = \{a_{i,j}, i, j = 0, \dots, n-1\}$, với:

$$a_{i,j} = \begin{cases} \clubsuit 0, & \text{if } (i, j) \notin E \\ \heartsuit 1, & \text{if } (i, j) \in E \end{cases}$$



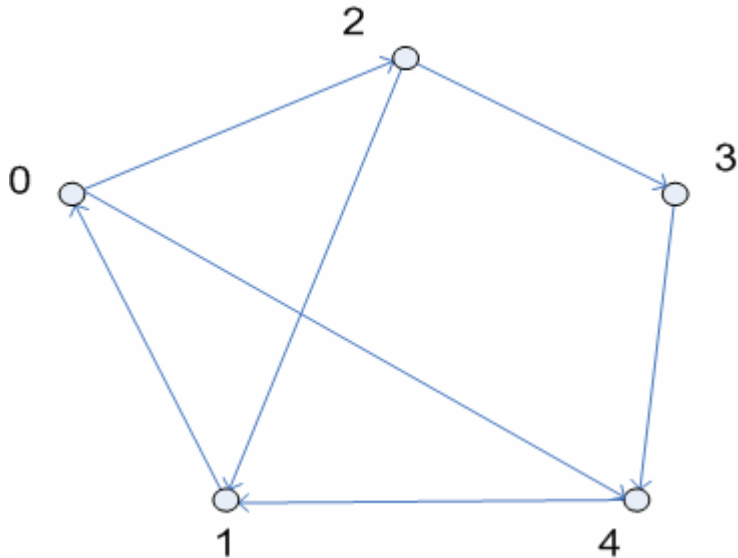
	0	1	2	3	4
0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
2	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0

I.1. Ma trận kề (đơn đồ thị có hướng)

❖ Định nghĩa

- Giống đơn đồ thị có hướng
- E là tập các **cung**

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{if } (i, j) \notin E \\ 1, & \text{if } (i, j) \in E \end{cases}$$

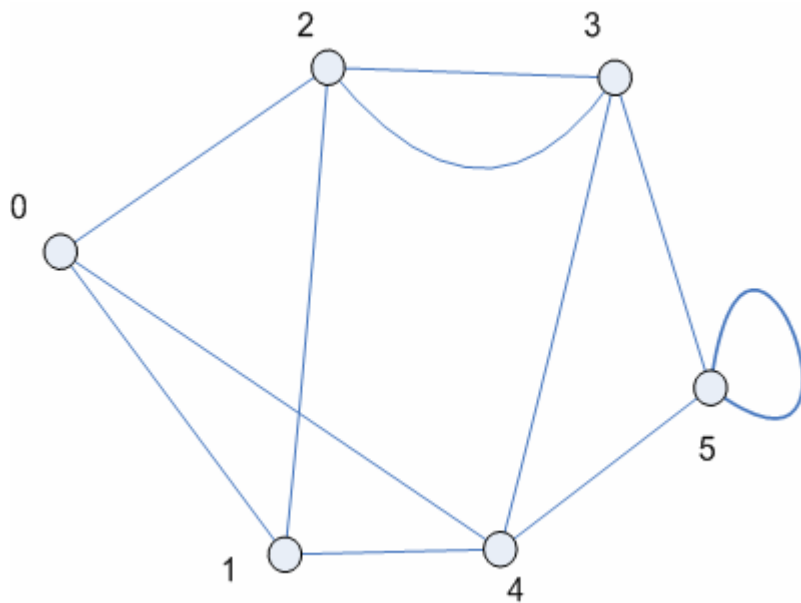


	0	1	2	3	4
0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0
3	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0

I.1. Ma trận kề (**Đa đồ thị**)

❖ Định nghĩa

- E là tập các **cạnh/cung**
- $A_{i,j}$ là **số cạnh** nối đỉnh i và đỉnh j



	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
2	1	1	0	2	0	0
3	0	0	2	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1
5	0	0	0	1	1	1

I.1. Ma trận kề (**Đa đồ thị**)

❖ Một số tính chất của ma trận kề

- Ma trận kề của đồ thị vô hướng là đối xứng
 $a[i,j] = a[j,i]$. Ngược lại, ma trận đối xứng $(0,1)$, có đường chéo chính bằng 0, bậc n sẽ tương ứng với đơn đồ thị vô hướng n đỉnh.
- Nếu đồ thị vô hướng:
Tổng dòng thứ i = Tổng cột thứ i = $\deg(i)$
- Nếu đồ thị có hướng:
Tổng dòng i = $\deg^+(i)$, Tổng cột i = $\deg^-(i)$

Ưu điểm và hạn chế của ma trận kề?

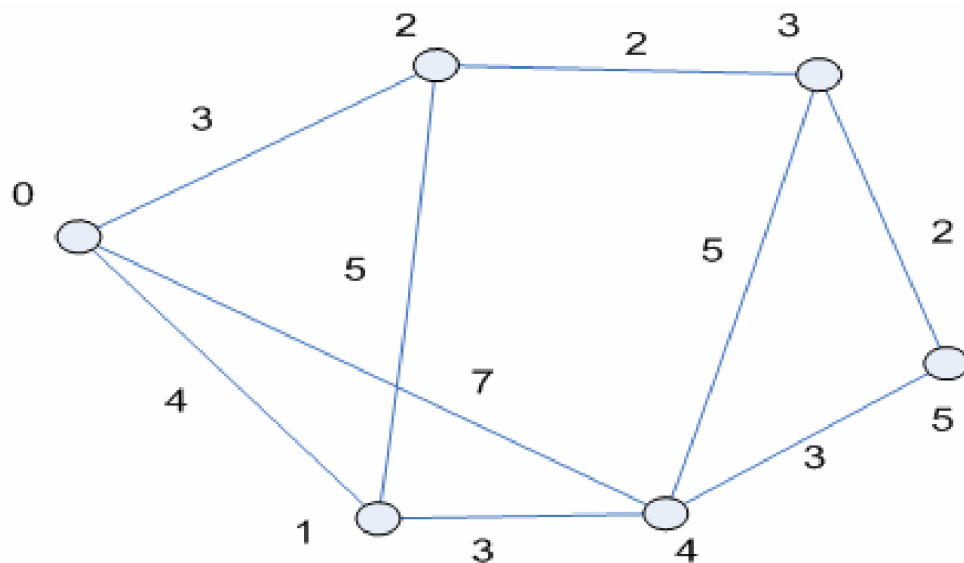
I.2. Ma trận trọng số (đơn đồ thị)

❖ Định nghĩa

- Đơn đồ thị $G = (V, E)$ với tập đỉnh $V = \{0, \dots, n-1\}$, tập cạnh $E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}$.
- Ta gọi **ma trận kề trọng số** của G là
 - $A = \{a_{i,j}, i, j = 0, \dots, n-1\}$, với:

$$a_{i,j} = \begin{cases} b, & \text{if } (i, j) \notin E \\ c_k, & \text{if } (i, j) \in E \end{cases}$$

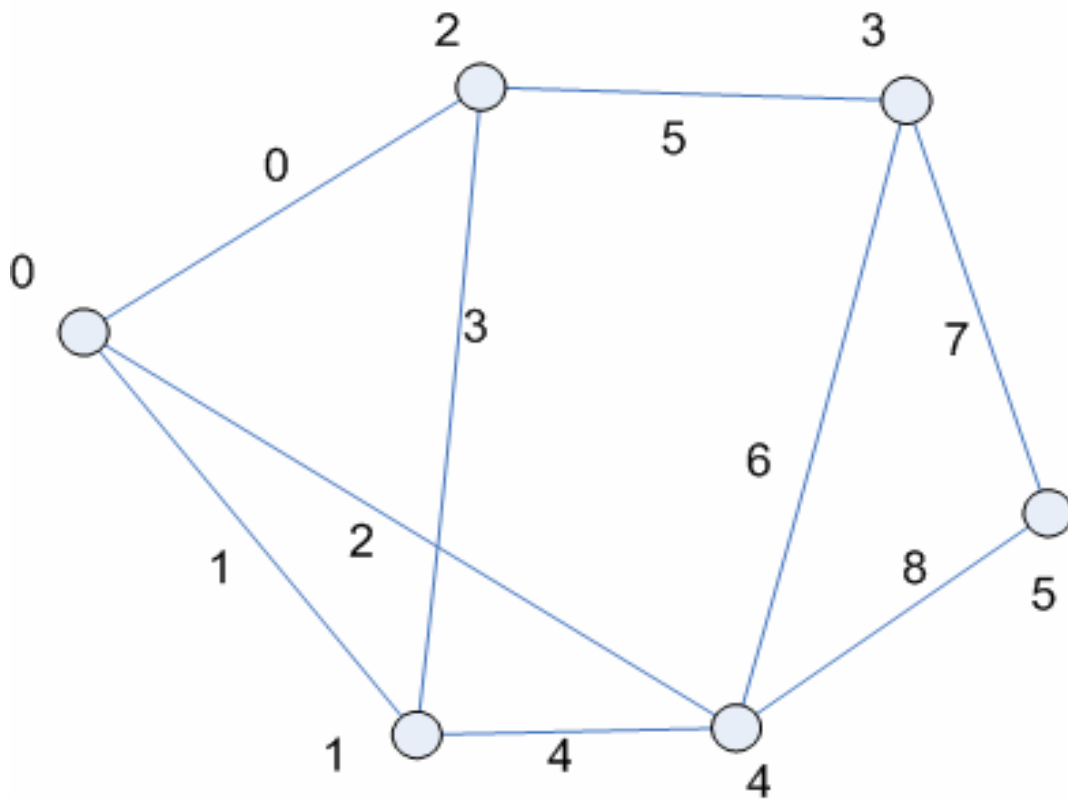
C_k là một giá trị nào đó được quy định trước (0, -1, ∞ , $-\infty$, ..)



	0	1	2	3	4	5
0	0	4	3	0	7	0
1	4	0	5	0	3	0
2	3	5	0	2	0	0
3	0	0	2	0	5	2
4	7	3	0	5	0	3
5	0	0	0	2	3	0

I.3. Danh sách cạnh

- Đối với các đồ thị thưa n đỉnh, m cạnh ($m < 6n$) người ta thường dùng cách biểu diễn danh sách cạnh để tiết kiệm không gian lưu trữ
- Lưu các cạnh $e=(u, v)$ của đồ thị trong một danh sách
- Danh sách có thể được cài đặt bằng **mảng 1 chiều** hoặc **danh sách liên kết**.



Cạnh	Đầu 1	Đầu 2
0	0	2
1	0	1
2	0	4
3	1	2
4	1	4
5	2	3
6	3	4
7	3	5
8	4	5

I.3. Danh sách cạnh

Cài đặt bằng mảng 1 chiều

0	1	2	3	4	5	6	7	8
(0,2)	(0,1)	(0,4)	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(3,4)	(3,5)	(4,5)

Cài đặt bằng danh sách liên kết



```
typde struct tagNode
```

```
{
```

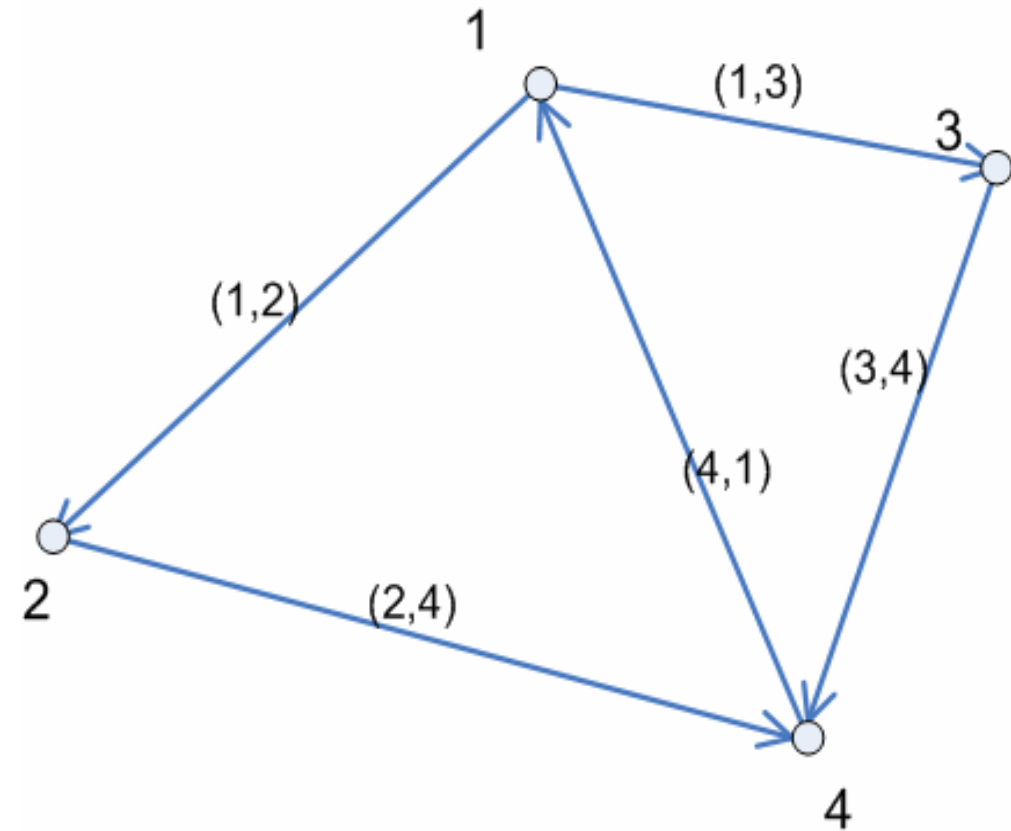
```
    int diemdau1, diemdau2;
```

```
} Canh;
```

Cạnh	Đầu 1	Đầu 2
0	0	2
1	0	1
2	0	4
3	1	2
4	1	4
5	2	3
6	3	4
7	3	5
8	4	5

I.4. Danh sách cung

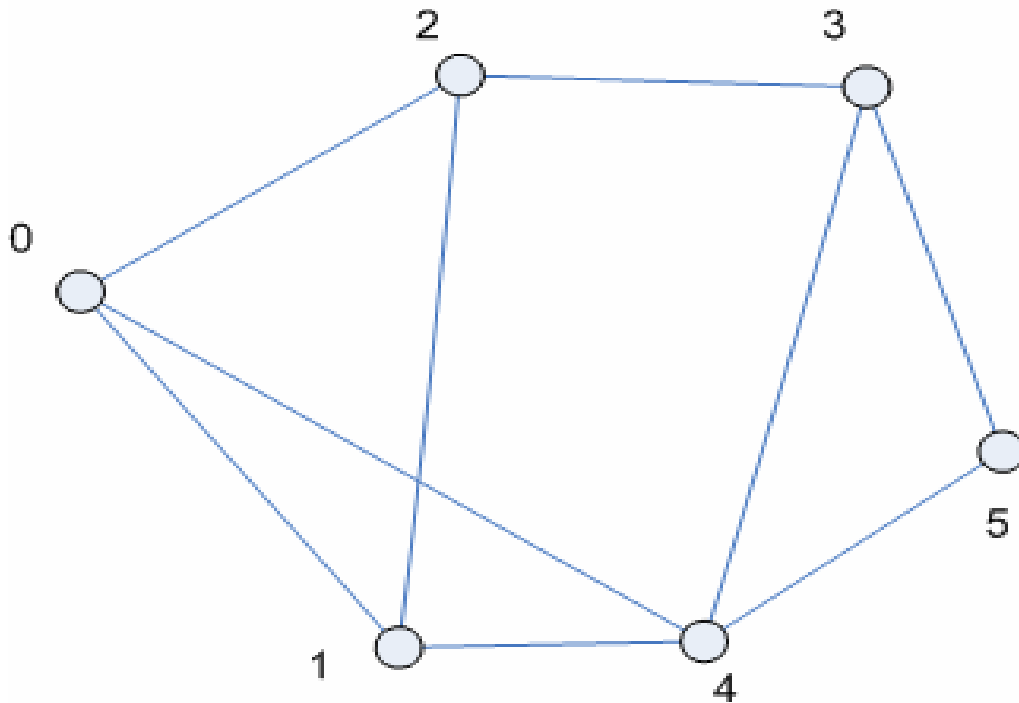
- Trong trường hợp **đồ thị có hướng** thì mỗi phần tử của danh sách (gọi là **danh sách cung**) là một cung $e=(u, v)$. Trong đó u là **đỉnh đầu**, v là **đỉnh cuối** của cung.



Cạnh	Đầu 1	Đầu 2
(1,2)	1	2
(4,1)	4	1
(1,3)	1	3
(2,4)	2	4
(3,4)	3	4

I.4. Danh sách kề

- Tương ứng với mỗi đỉnh v của đồ thị, ta có tương ứng một danh sách để lưu các đỉnh kề với nó.
- Danh sách: mảng 1 chiều, hoặc danh sách liên kết



Đỉnh V	Các cạnh kề
0	1, 2, 4
1	0, 2, 4
2	0, 1, 3
3	2, 4, 5
4	0, 1, 3, 5
5	3, 4

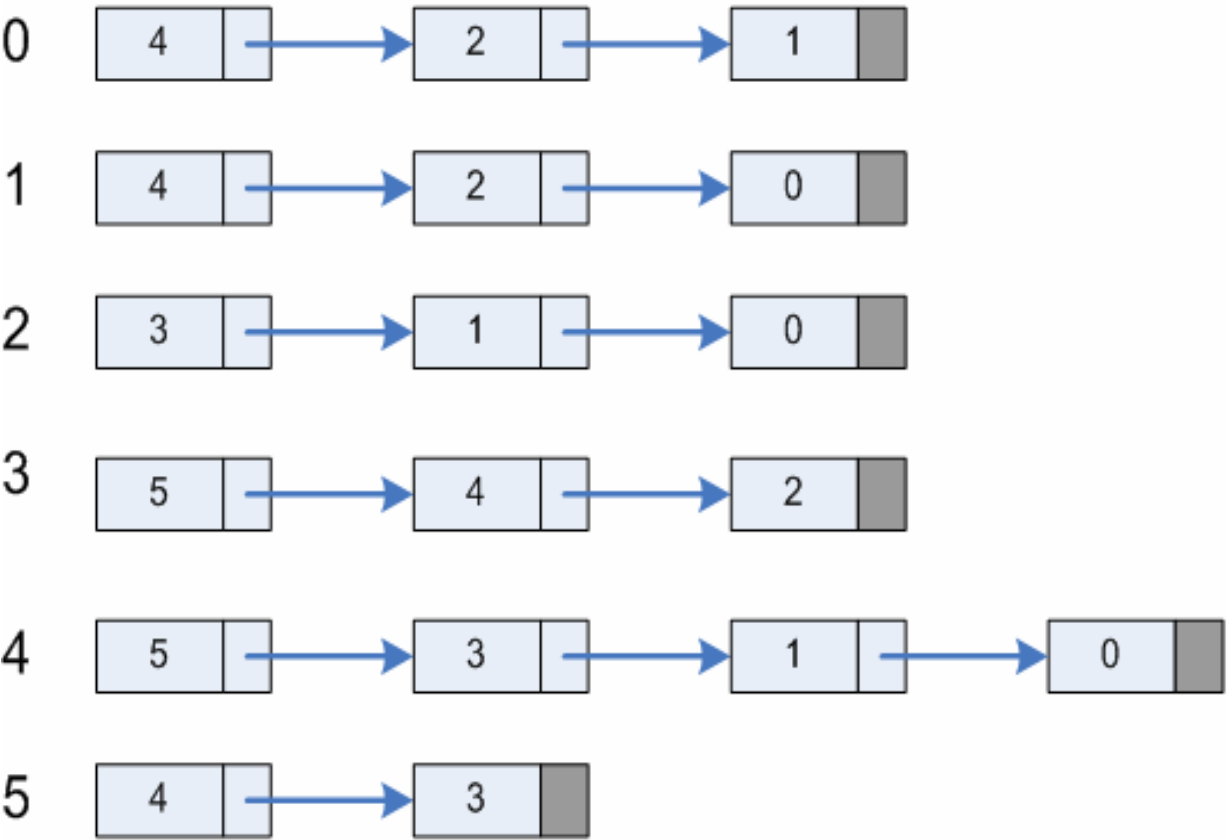
Cài đặt bằng mảng:

$Ke[] = \{1, 2, 4, 0, 2, 4, 0, 1, 3, 2, 4, 5, 0, 1, 3, 5, 3, 4\}$

$ViTri[] = \{0, 3, 6, 9, 12, 16\}$

I.4. Danh sách kề

- Cài đặt bằng danh sách kề liên kết



Đỉnh V	Các cạnh kề
0	1, 2, 4
1	0, 2, 4
2	0, 1, 3
3	2, 4, 5
4	0, 1, 3, 5
5	3, 4

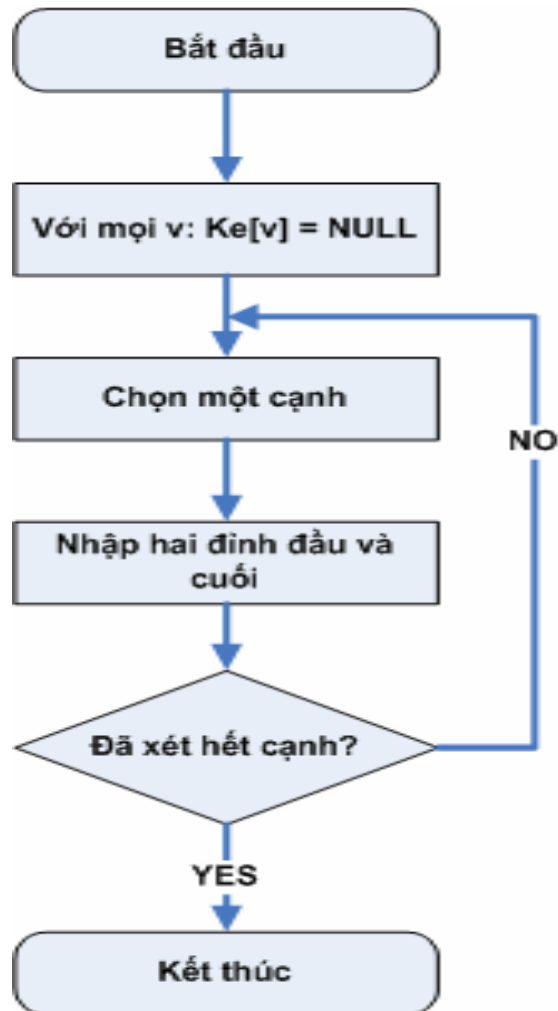
I.4. Danh sách kề

- Thuật toán xây dựng danh sách kề liên kết

```
# include <iostream.h>
# include <stdlib.h>
const maxV = 99;
typedef struct Node {
    int v;
    struct Node*next;
}node;
int j, x, y, m, n, v ;
node *p, *ke[maxV];
```

I.4. Danh sách kề

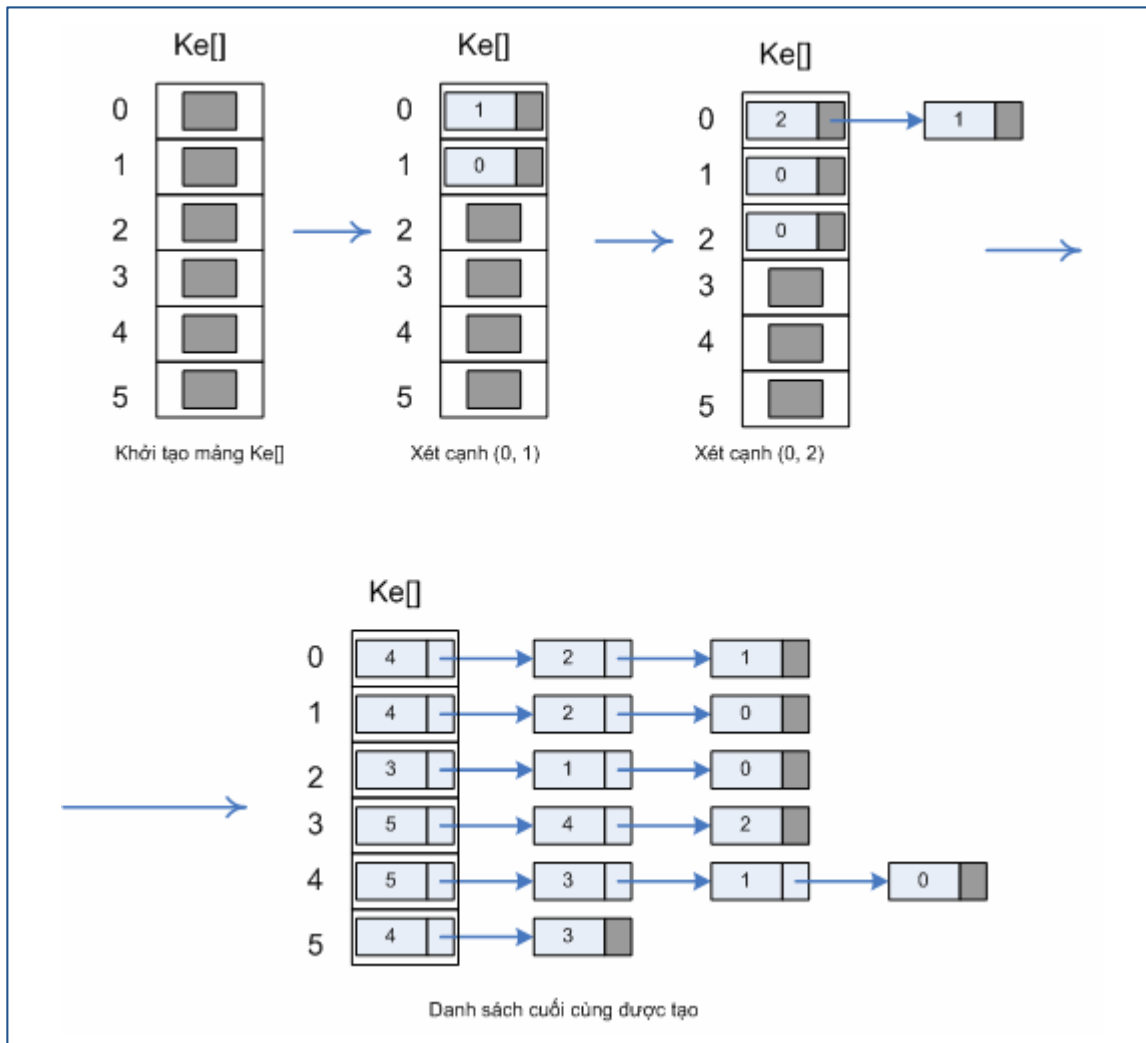
- Thuật toán xây dựng danh sách kề liên kết



```
int main(int argc, char* argv[])
{
    cout<<"Cho so canh va so dinh cua do thi: ";
    cin>>m>>n;
    for(j=0;j<n;j++)
        ke[j]=NULL;
    for(j=1;j<=m;j++)
    {
        cout<<"Cho dinh dau, dinh cuoi cua canh "<<j<<":";
        cin>>x>>y;
        p = (node*)malloc(sizeof(node)); p-
        >v = x;
        p->next = ke[y];
        ke[y]=p;
        p = (node*)malloc(sizeof(node)); p-
        >v = y;
        p->next = ke[x];
        ke[x]=p;
    }
}
```

I.4. Danh sách kề

■ Ví dụ



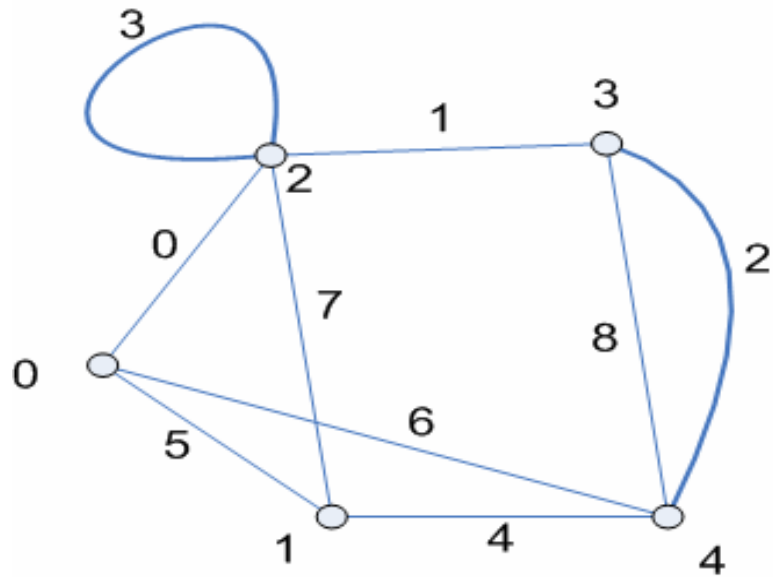
Đỉnh V	Các cạnh kề
0	1, 2, 4
1	0, 2, 4
2	0, 1, 3
3	2, 4, 5
4	0, 1, 3, 5
5	3, 4

I.5. Ma trận liên thuộc (đồ thị vô hướng)

❖ Định nghĩa

- Đồ thị vô hướng $G=(V, E)$. Tập đỉnh $V=\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Tập cạnh $E=\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}$. Ta gọi ma trận liên thuộc của G là $B = \{b_{i,j}, i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1\}$. Trong đó

- $b_{i,j} = 1$ nếu đỉnh i kề cạnh j
- $b_{i,j} = 0$ nếu đỉnh i không kề cạnh j

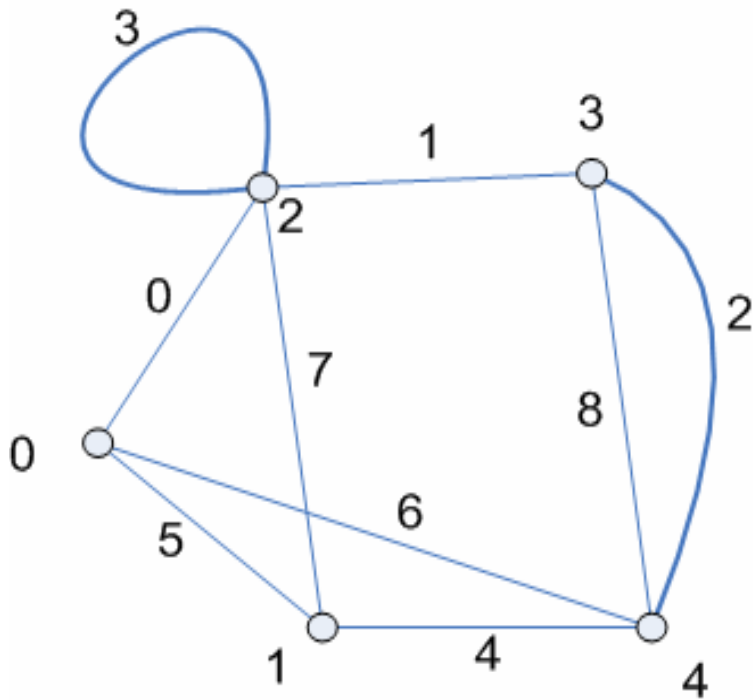


	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
2	1	1	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	1	0	1	0	1

I.5. Ma trận liên thuộc (đồ thị vô hướng)

❖ Tính chất

- Mỗi cột chứa đúng hai số 1 chỉ hai đầu của cạnh tương ứng với đỉnh ứng với cột đó. Cột ứng với khuyên chứa đúng một số 1.
- Các cột ứng với các cạnh lặp thì giống nhau.
- Nếu đồ thị không có khuyên thì tổng hàng i là bậc của đỉnh i .



	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
2	1	1	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	1	0	1	0	1

I.5. Ma trận liên thuộc (đồ thị có hướng)

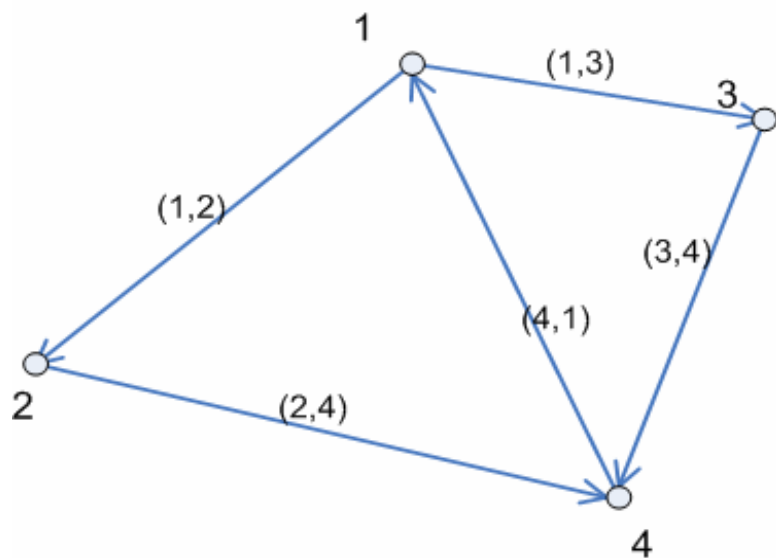
❖ Định nghĩa

- Đơn đồ thị có hướng $G=(V, E)$. Tập đỉnh $V=\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Tập cung $E=\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}$.

Ta gọi ma trận liên thuộc của G là $B = \{b_{i,j}, i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1\}$.

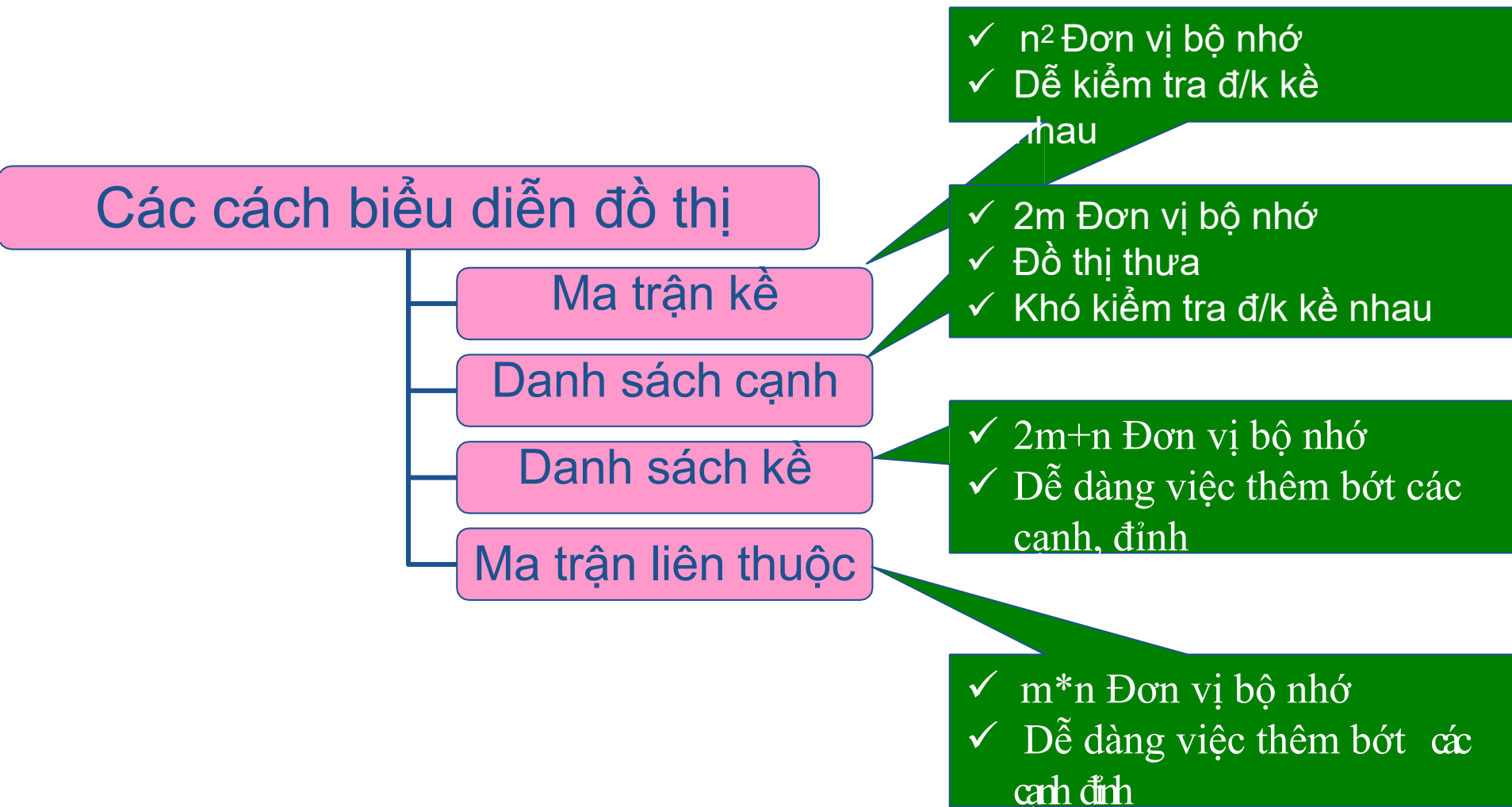
Trong đó

- $b_{i,j} = 1$ nếu đỉnh i là đỉnh đầu của cung j
- $b_{i,j} = -1$ nếu đỉnh i là đỉnh cuối của cung j
- $b_{i,j} = 0$ nếu đỉnh i không là đầu mút của cung j



	(1,2)	(4,1)	(1,3)	(3,4)	(2,4)
1	1	-1	1	0	0
2	-1	0	0	0	1
3	0	0	-1	1	0
4	0	1	0	-1	-1

I. Các cách biểu diễn đồ thị



Nội dung



Các cách biểu diễn đồ thị



Sự đẳng cấu của các đồ thị

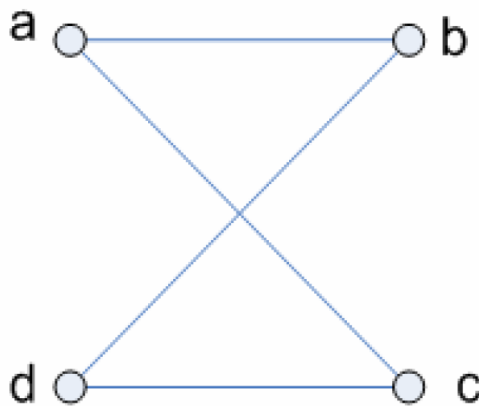
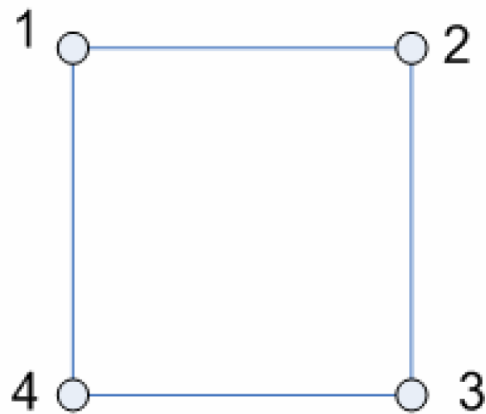
II. Sự đẳng cấu của các đồ thị

❖ Định nghĩa

- Các đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là đẳng cấu nếu có hàm **song ánh** :

$f : V_1 \rightarrow V_2$ sao cho \forall đỉnh a & b kề trong $G_1 \Leftrightarrow f(a)$ & $f(b)$ kề trong G_2 .

- \rightarrow Tồn tại một phép tương ứng một – một giữa các đỉnh của hai đồ thị đồng thời đảm bảo quan hệ liên kề.

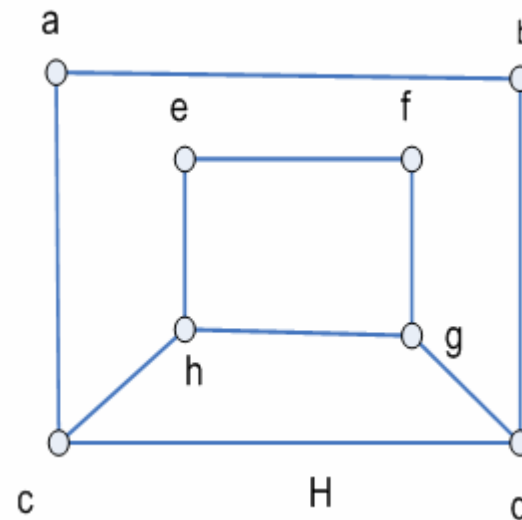
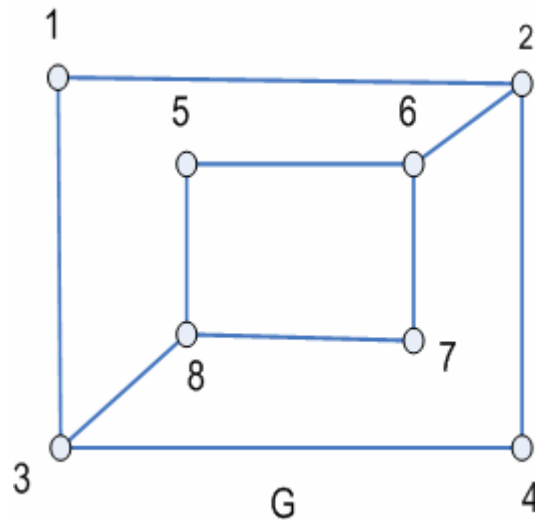


$$\begin{aligned} f(1) &= a, f(2) = b \\ f(3) &= d, f(4) = c \end{aligned}$$

II. Sự đẳng cấu của các đồ thị

❖ Tính bất biến

- Hai đồ thị đẳng cấu bất kỳ có **tính chất giống nhau** (số đỉnh, số cạnh, bậc của một đỉnh,...). Người ta gọi đó là tính bất biến trong các đồ thị đẳng cấu.
- VD: Tìm các hàm song ánh của hai đồ thị trên, kiểm nghiệm lại tính đẳng cấu của nó.



Bài tập kiểm tra

Cho đồ thị sau:

a/ Đồ thị có liên thông hay không?

2/ Xác định các đỉnh nhánh và cạnh trụ đồ thị

3/ Đồ thị trên có thể biểu diễn qua phương pháp nào?

Hãy biểu diễn.

