ĐỒ THỊ EULER
ĐỒ THỊ HAMILTON

Toán rời rạc 2

➢ Nội dung

➢ **Ôn lại: Lý thuyết đồ thị**

Đồ thị vô hướng: đơn; đa; giả

Đồ thị có hướng: đơn; đa

Các định nghĩa: Cạnh; cạnh bội; khuyên

Bậc của đỉnh; tổng bậc của đỉnh; đỉnh treo; đỉnh cô lập

Đường đi => chu trình

➢ **Nội dung chương này**:

- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton

➢ Đồ thị Euler

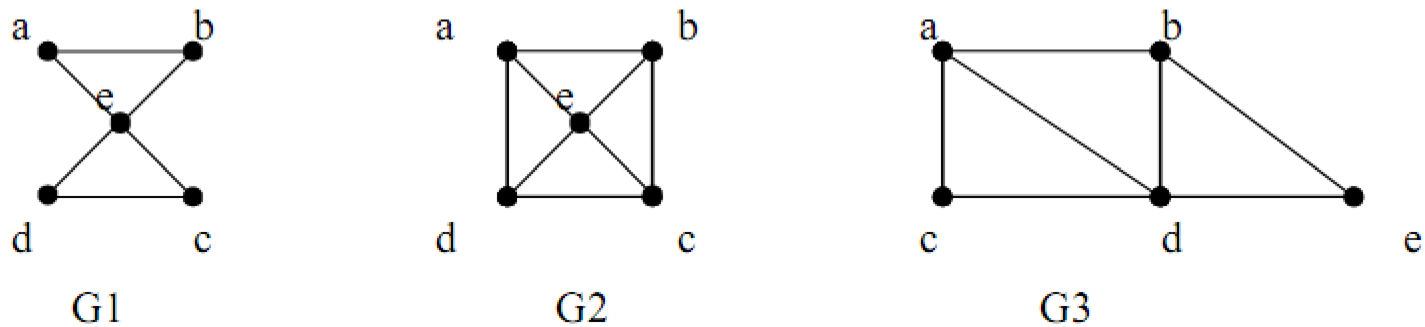
- ❖ Chu trình đơn trong đồ thị G đi **qua tất cả các cạnh**, mỗi **cạnh** của đồ thị **đúng một lần** được gọi là chu trình Euler.
- ❖ Đường đi đơn trong G đi qua tất cả các cạnh, mỗi **cạnh** của nó **đúng một lần** được gọi là đường đi Euler.
- ❖ Đồ thị được gọi là **đồ thị Euler** nếu nó có chu trình Euler.
- ❖ Đồ thị có đường đi Euler được gọi là **nửa** Euler.

➢ Đồ thị Hamilton

- ❖ Đường đi qua tất cả các **đỉnh** của đồ thị, mỗi đỉnh **đúng một lần** được gọi là đường đi Hamilton.
- ❖ Chu trình bắt đầu tại một **đỉnh *v*** nào đó, **qua tất cả các đỉnh** còn lại mỗi đỉnh **đúng một lần**, sau đó quay trở lại *v*, được gọi là chu trình Hamilton.
- ❖ Đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton nếu có chu trình Hamilton.
- ❖ Đồ thị được gọi là đồ thị nửa Hamilton nếu có đường đi Hamilton.

Khái niệm đồ thị Euler (1/2)

- Định nghĩa.
  - Chu trình đơn trong đồ thị G đi qua tất cả các cạnh, mỗi **cạnh** của đồ thị **đúng một lần** được gọi là chu trình Euler.
  - Đường đi đơn trong G đi qua tất cả các cạnh, mỗi **cạnh** của nó **đúng một lần** được gọi là đường đi Euler.
  - Đồ thị được gọi là **đồ thị Euler** nếu nó có chu trình Euler.
  - Đồ thị có đường đi Euler được gọi là **nửa** Euler.
- Ví dụ 1:



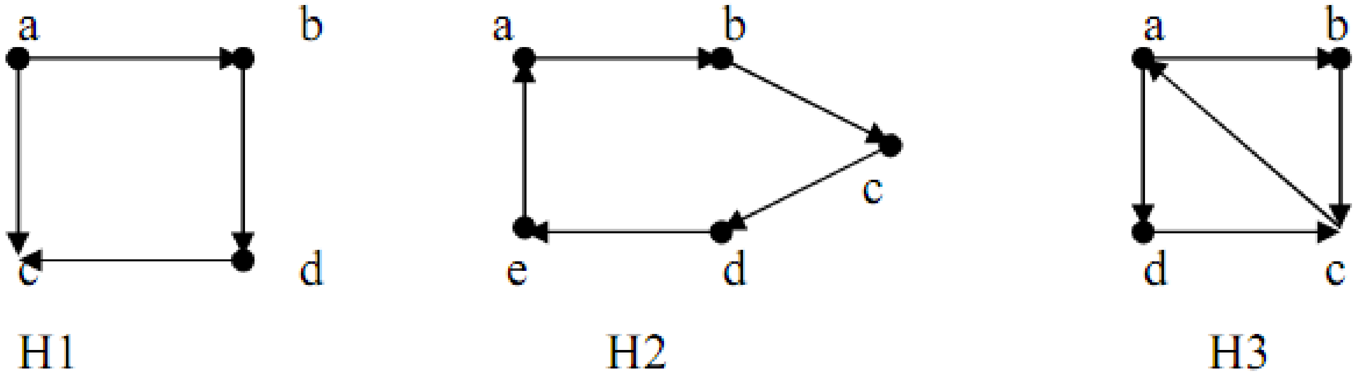
G1: a, b, e, d, c e, a => Chu trình euler

G2: Không có chu trình Euler & Không có đường đi Euler

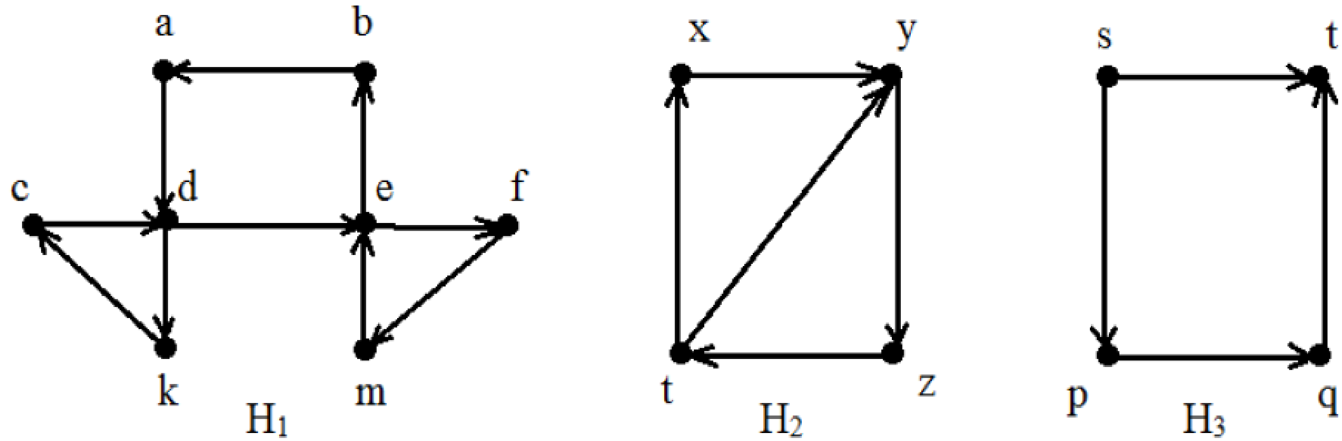
G3: Không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler: (a b e d a c d b)

❖ Khái niệm đồ thị Euler (2/2)

- Ví dụ 2:



- Ví dụ 3:



Đồ thị có hướng H_1 có chu trình Euler là <a; d; k; c; d; e; f; m; e; b; a>. Đồ thị H_2 không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler là <t; x; y; z; t; y>. Đồ thị H_3 không có chu trình Euler và không có cả đường đi Euler.

❖ Nhận biết đồ thị là đồ thị là Euler, nữa Euler

3.1.2. Nhận biết đồ thị Euler, nửa Euler. Thuật toán tìm chu trình Euler, đường đi Euler.

Định lý Euler: Đồ thị vô hướng liên thông *G* là đồ thị Euler khi và chỉ khi *mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn*. Đồ thị có hướng liên thông mạnh *G* là đồ thị Euler khi và chỉ khi *mọi đỉnh của nó có bán bậc vào bằng bán bậc ra (hay mọi đỉnh cân bằng)*.

Hệ quả : Đồ thị vô hướng liên thông *G* là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi *G có đúng hai đỉnh bậc lẻ*. Đồ thị có hướng liên thông mạnh *G* là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi *G có đúng 2 đỉnh x, y thỏa mãn:* $deg^{+}(x) = deg^{-}(x) + 1$ *và* $deg^{-}(y) = deg^{+}(y) + 1$*, đồng thời các đỉnh còn lại của nó thì cân bằng (tức là có bán bậc vào bằng bán bậc ra).*

❖ Điều kiện **cần và đủ** để đồ thị là Euler

- Đồ thị vô hướng
  - Đồ thị vô hướng liên thông G=<V,E> là đồ thị Euler khi và chỉ khi **mọi đỉnh** của G đều có **bậc chẵn**.
- Đồ thị có hướng
  - Đồ thị có hướng liên thông yếu G=<V,E> là đồ thị Euler khi và chỉ khi **tất cả các đỉnh** của nó đều có **bán đỉnh bậc ra** bằng **bán đỉnh bậc vào** (điều này làm cho đồ thị là liên thông mạnh).

❖ Chứng minh đồ thị là Euler

- **Với đồ thị vô hướng:**
  - Kiểm tra đồ thị có liên thông hay không?
    - Kiểm tra **DFS(u) = V hoặc BFS(u) = V** ⇒ liên thông
  - Kiểm tra bậc của tất cả cả đỉnh có phải **số chẵn** hay không?
    - Với ma trận kề, tổng các phần tử của hàng u (cột u) là bậc của đỉnh u.
- **Với đồ thị có hướng:**
  - Kiểm tra đồ thị có liên thông yếu hay không?
    - Kiểm tra đồ thị vô hướng tương ứng là liên thông
    - Hoặc Kiểm tra nếu tồn tại đỉnh u∈V để DFS(u)=V hoặc BFS(u)=V?
  - Kiểm tra tất cả các đỉnh có thỏa mãn **bán bậc ra bằng bán bậc vào** hay không?
    - Với ma trận kề, bán bậc ra của đỉnh u là $deg^+(u)$ là số các số 1 của hàng u, bán bậc vào của đỉnh u là $deg^-(u)$ là số các số 1 của cột u.

❖ Ví dụ với đồ thị vô hướng

- Cho đồ thị vô hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị Euler .

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

- Vì BFS(1) = {1, 2, 6, 3, 5, 7, 4, 11, 8, 10, 12, 9, 13} = V. Do vậy, G liên thông.
- Ta lại có:
  - deg(1) = deg(13) = 2.
  - deg (2) = deg(3) = 4
  - deg(4) = deg(5) = 4
  - deg(6) = deg(7) = 4
  - deg(8) = deg(9) = 4
  - deg(10) = deg(11) =
  - deg(12) = 4

❖ Ví dụ với đồ thị có hướng

- Cho đồ thị có hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị Euler .

+ Vì BFS(1) = { 1, 2, 3, 5, 4, 11, 6, 7, 10, 12, 8, 9, 13} = V. Do vậy, G liên thông yếu.

+ Ta lại có:

$deg^+(2)= deg^-(2)=deg^+(3)= eg^-(3) =2$

$deg^+(4)=deg^-(4)=deg^+(5)=deg^-(5) =2$

$deg^+(6)=deg^-(6)=deg^+(7)=deg^-(7) =2$

$deg^+(8)=deg^-(8)=deg^+(9)=deg^-(9) =2$

$deg^+(10) = deg^-(10) = 2$

$deg^+(11) = deg^-(11) =2$

$deg^+(12) = deg^-(12) =2$

$deg^+(1)=deg^-(1)=deg^-(13)=deg^+(13) =1$

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

Thuật toán tìm chu trình Euler:

(1) **:** Kiểm tra tính liên thông, xác định bậc của các đỉnh để khẳng định *G* có chu trình (hay đường đi) Euler.

(2) **:** Từ một đỉnh bất kì của *G,* đi theo các cạnh (cung) để tìm một chu trình đơn, đồng thời đánh dấu để xóa bỏ cạnh (cung) đã đi qua, không đi qua cầu (cạnh cắt), trừ khi không còn cách nào khác.

(3) **:** Thuật toán dừng nếu chu trình đơn tìm được đã đi qua tất cả các cạnh (cung). Trái lại, đi tiếp lặp lại (2) cho đến khi tất cả các cạnh (cung) đã đi qua.

Thuật toán tìm đường đi Euler: Tương tự như tìm chu trình Euler, nhưng đường đi Euler trong đồ thị vô hướng bao giờ cũng xuất phát từ đỉnh bậc lẻ này và kết thúc ở đỉnh bậc lẻ kia ; còn trong đồ thị có hướng thì đường đi Euler bao giờ cũng đi từ đỉnh có số cung đi ra nhiều hơn và kết thúc ở đỉnh có số cung đi vào ít hơn.

❖ Giải Thuật tìm chu trình Euler

<u>Thuật toán Euler-Cycle(u):</u>

Bước 1 (Khởi tạo) :

```
stack = ∅ ;     //Khởi tạo một stack bắt đầu là ∅
CE = ∅ ;        //Khởi tạo mảng CE bắt đầu là ∅
Push (stack, u) ; //Đưa đỉnh u vào ngăn xếp
```

Bước 2 (Lặp):

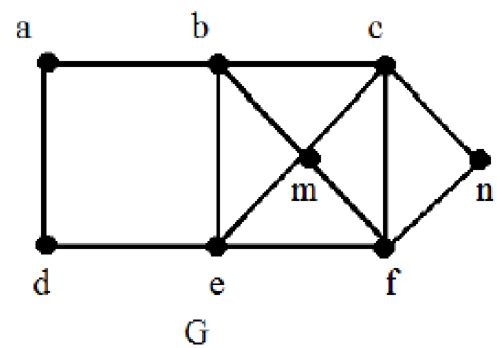
```
while (stack≠∅ ) do { //Lặp cho đến khi stack rỗng
        s = get(stack); //Lấy đỉnh ở đầu ngăn xếp
        if ( Ke(s) ≠ ∅ ) then { // Nếu danh sách Ke(s) chưa rỗng
                t =< Đỉnh đầu tiên trong Ke(s)>;
                Push(stack, t); //Đưa t vào stack;
                E = E \ (s,t); // Loại bỏ cạnh (s,t);
        }
        else { //Trường hợp Ke(s)=∅
                s = Pop(stack);// Đưa s ra khỏi ngăn xếp
                s ⇒CE; //Đưa s sang CE
        }
}
```

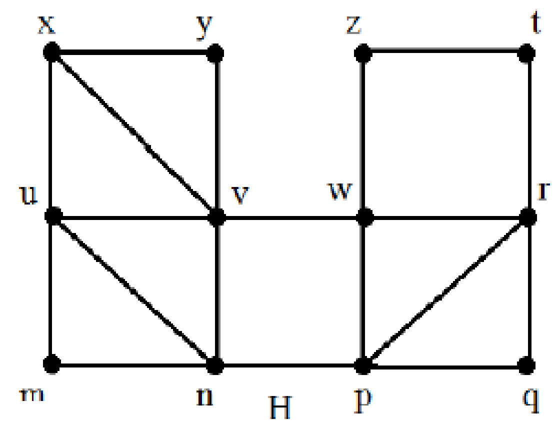
Bước 3 (Trả lại kết quả) :

```
<Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được chu trình Euler> ;
```

❖ Giải Thuật tìm chu trình Euler

<u>Ví dụ 1:</u> Đồ thị sau có phải đồ thị Euler (nửa Euler) không? Tìm chu trình (đường đi) Euler nếu có?





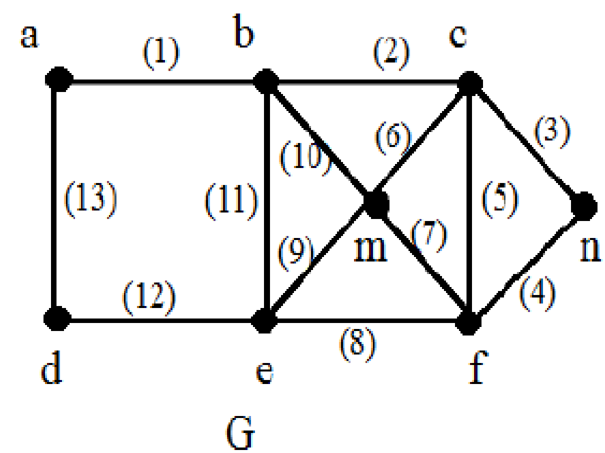
Đồ thị *G* và đồ thị *H*.

a) Bậc của các đỉnh của G:

Đỉnh	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*m*	*n*
Bậc	*2*	*4*	*4*	*2*	*4*	*4*	*4*	*2*

G là đồ thị vô hướng liên thông và mọi đỉnh đều có bậc chẵn nên G là đồ thị Euler.

Một chu trình Euler của G được tìm như ***Hình 3.5a****. Chu trình đó là : <a; b; c; n; f ; c ; m ; f; e; m; b; e; d; a> .*



Hình 3.5a. Chu trình Euler của *G*.

(Lưu ý : Sau khi chọn cạnh (1) thì cạnh (12) và (13) là cầu.)

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

b) Bậc của các đỉnh của H:

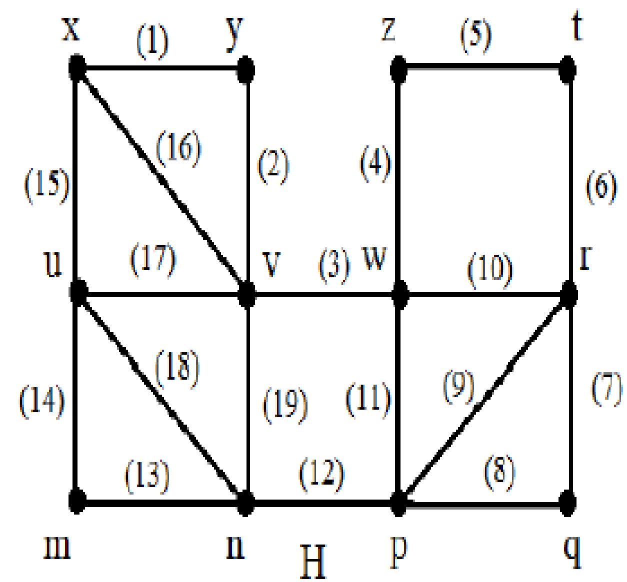
Đỉnh	x	Y	z	t	u	v	w	r	m	n	p	q
Bậc	3	2	2	2	4	5	4	4	2	4	4	2

H là đồ thị vô hướng liên thông và có đúng hai đỉnh bậc lẻ nên H là đồ thị nửa Euler.

Số cạnh của H là $m = \frac{1}{2}\sum_{x \in X} \deg(x) = \frac{38}{2} = 19$ *(cạnh)*

Một đường đi Euler của H đi từ đỉnh bậc lẻ x và kết thúc ở đỉnh bậc lẻ v là như ***Hình 3.5b****. (Lưu ý: sau khi chọn cạnh (3) thì cạnh (12) là cầu).*

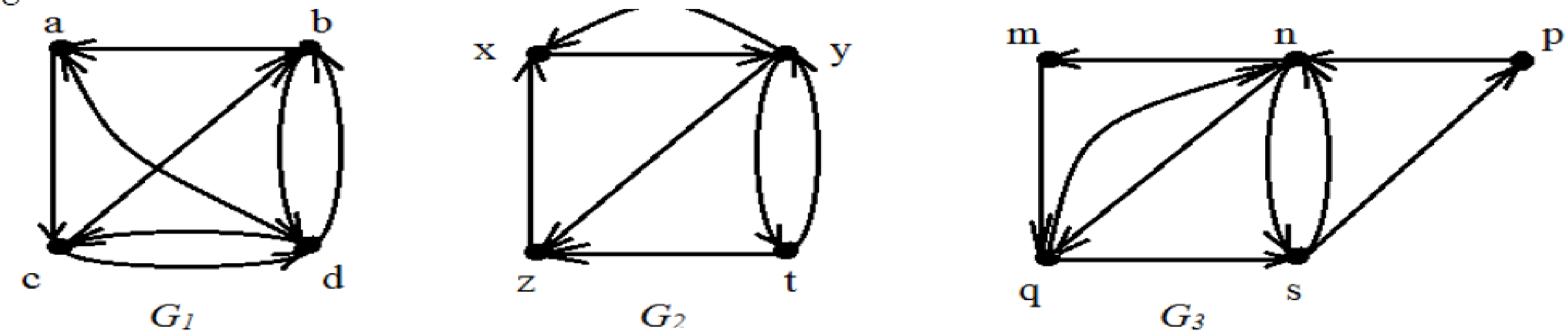
Đó là đường đi : <x; y; v; w; z ; t ; r ; q; p; r; w; p; n; m; u; x; v; u; n; v>.



Hình 3.5b. Đường đi Euler của *H*.

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

Ví dụ 2: Trong các đồ thị có hướng sau, đồ thị nào là đồ thị Euler, đồ thị nửa Euler? Tìm chu trình, đường đi Euler nếu có?



Hình 3.6. Đồ thị có hướng G_1 , G_2 , G_3 .

a) Bán bậc ra và bán bậc vào của các đỉnh trong G_1 là:

Đỉnh x_i	a	b	c	d
$Deg^+(x_i)$	1	2	2	3
$Deg^-(x_i)$	2	2	2	2

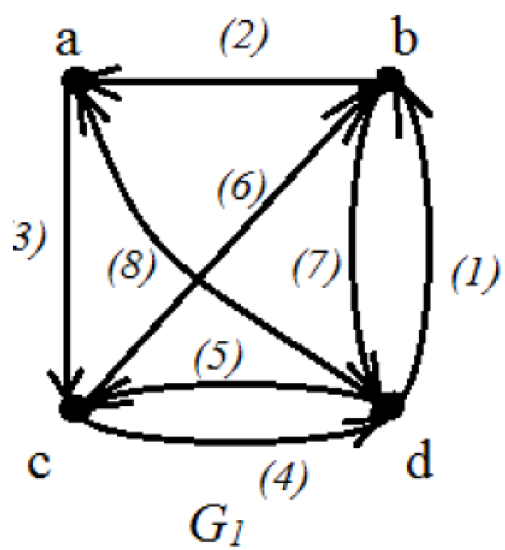
Suy ra G_1 là đồ thị nửa Euler.

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

Số cung của G_1 *là* $m = \sum_{x \in X} \deg^+(x) = 8$ *(cung)*

Một đường đi Euler của G_1 *đi ra từ d và kết thúc ở đỉnh a là như* ***Hình 3.6a****. (Lưu ý : sau khi chọn cung (3) thì cung (8) trở thành cầu).*

Đường đi đó là : <d ;b ;a ;c ;d ;c ;b ;d ;a>.



Hình 3.6a. Đường đi Euler của G_1

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

b) Bán bậc ra và bán bậc vào của các đỉnh trong G_2 là:

Đỉnh x_i	x	y	z	t
$Deg^+(x_i)$	1	3	1	2
$Deg^-(x_i)$	2	2	2	1

Đồ thị G_2 có hai đỉnh y, t có bán bậc ra hơn bán bậc vào 1 nên G_2 không phải là đồ thị nửa Euler.

c) Bán bậc ra và bán bậc vào của các đỉnh trong G_3 là:

Đỉnh x_i	m	n	p	q	s
$Deg^+(x_i)$	1	3	1	2	2
$Deg^-(x_i)$	1	3	1	2	2

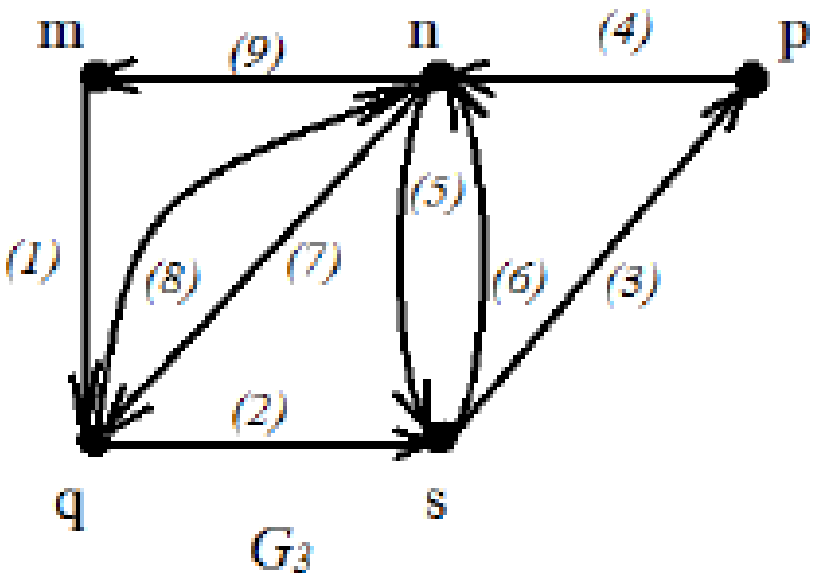
Đồ thị G_3 có bậc tại mỗi đỉnh cân bằng nên G_3 là một đồ thị Euler.

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

Số cung của G_3 *là* $m = \sum_{x \in X} \deg^+(x) = 9$ *(cung)*

Một chu trình Euler của G_3 *được tìm như hình bên. (Lưu ý : sau khi chọn cung (1) thì cung (9) là cầu).*

Chu trình đó là <m ;q ;s ;p ;n ;s ;n ;q ;n ;m>.



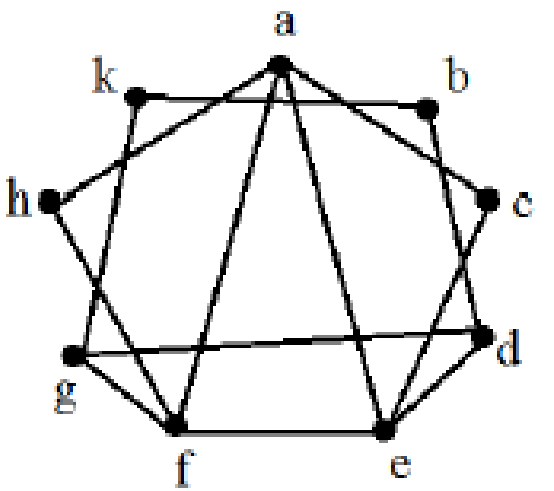
Hình 3.6b. Chu trình Euler của G_3

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

*__Ví dụ 3:__ Bức hình trong **Hình 3.7** có vẽ được bằng một nét bút (không nhấc bút ra khỏi mặt giấy) mà không có phần nào của bức hình được vẽ lại hai lần không?*

*Đồ thị trên **Hình** 3.7 có đúng 2 đỉnh bậc lẻ g và d nên nó có đường đi Euler. Vì vậy ta có thể vẽ bức hình này bằng một nét mà không nâng bút khỏi mặt giấy hoặc vẽ lại một phần của bức vẽ.*

Cụ thể ta vẽ theo đường đi Euler bắt đầu từ đỉnh g và kết thúc ở đỉnh d như sau: <g; k; b; d; g; f; a; e; f; h; a; c; e; d>.



Hình 3.7. Vẽ hình một nét

❖ Chu trình Euler: Bài toán người đưa thư

Bài toán: Một bưu tá nhận thư ở bưu điện và phải đi qua một số phố để phát thư rồi quay về bưu điện. Bưu tá đó phải đi theo hành trình như thế nào để đường đi là ngắn nhất (giả thiết rằng mọi con phố có độ dài như nhau).

Giải. Đồ thị mô hình biểu diễn sơ đồ đi của bưu tá như sau: Coi mỗi con phố là một cạnh của đồ thị, các điểm giao cắt (ngã ba, ngã tư…) giữa các con phố là các đỉnh của đồ thị.

Bài toán trên được phát biểu lại là: Cho đơn đồ thị vô hướng liên thông $G = (X, U)$. Hãy tìm một chu trình T_0 ngắn nhất đi qua tất cả các cạnh của G.

❖ Chu trình Euler: Bài toán người đưa thư

Có hai trường hợp xảy ra:

(1) : Nếu *G* là đồ thị Euler thì chu trình ngắn nhất T_0 cần tìm chính là một chu trình Euler của *G*, và có độ dài bằng *N(U)*.

(2) : Nếu *G* không là đồ thị Euler thì *G* có chứa đỉnh bậc lẻ và không có chu trình Euler. Mọi chu trình đi qua tất cả các cạnh của *G* sẽ đi qua một số cạnh nào đó ít nhất hai lần. Do T_0 là chu trình ngắn nhất nên T_0 chỉ *đi qua mỗi cạnh nhiều nhất hai lần*.

Để ý rằng, bằng cách vẽ thêm một số cạnh song song với các cạnh mà T_0 đi qua hai lần thì *G* sẽ trở thành một đồ thị Euler G_E và T_0 chính là một chu trình Euler trong G_E.

❖ Chu trình Euler: Bài toán người đưa thư

Gọi số cạnh mà T_0 đi qua hai lần là $m(G)$. Số cạnh $m(G)$ xác định theo thuật toán sau:

(1) : Xác định tập các đỉnh bậc lẻ $X_0(G) = \{x \in X \mid \deg(x) \text{ lẻ}\}$. Gọi số đỉnh bậc lẻ của G là $2k$.

(2) : Phân hoạch X_0 thành k cặp. Gọi $P = \{P_1, P_2, ..., P_j\}$ là tập hợp tất cả các phân hoạch có thể có của X_0. Với mỗi phân hoạch P_i, ta xác định độ dài của phân hoạch P_i như sau: $d(P_i) = \sum_{(x,y) \in P_i} d(x,y)$, trong đó $d(x,y)$ = độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh y.

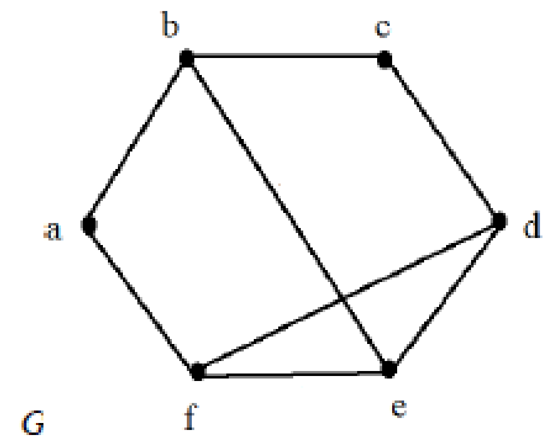
(3) : Khi đó $m(G) = \min_{P_i \in P} d(P_i)$.

Kết luận, chu trình ngắn nhất T_0 đi qua tất cả các cạnh của G có độ dài là $N(U) + m(G)$. Chu trình đó chính là chu trình Euler trong đồ thị G_E.

❖ Chu trình Euler: Bài toán người đưa thư

Ví dụ cụ thể: Tìm đường đi ngắn nhất của bài toán người bưu tá phát thư

Đỉnh	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*e*
Bậc	*2*	*3*	*2*	*3*	*3*	*3*



Số cạnh của G là $m = \frac{1}{2}\sum_{x \in X} \deg(x) = 8$ *(cạnh).*

Tập các đỉnh bậc lẻ của G là $X_0 = \{b; d; e; f\}$*. Ta có 3 phân hoạch của* X_0 *là :*

$P_1 = \{(b,d)\ ;\ (e,f)\}$ => $d(P_1) = d(b,d) + d(e,f) = 2 + 1 = 3.$

$P_2 = \{(b,e)\ ;\ (d,f)\}$ => $d(P_2) = d(b,e) + d(d,f) = 1 + 1 = 2.$

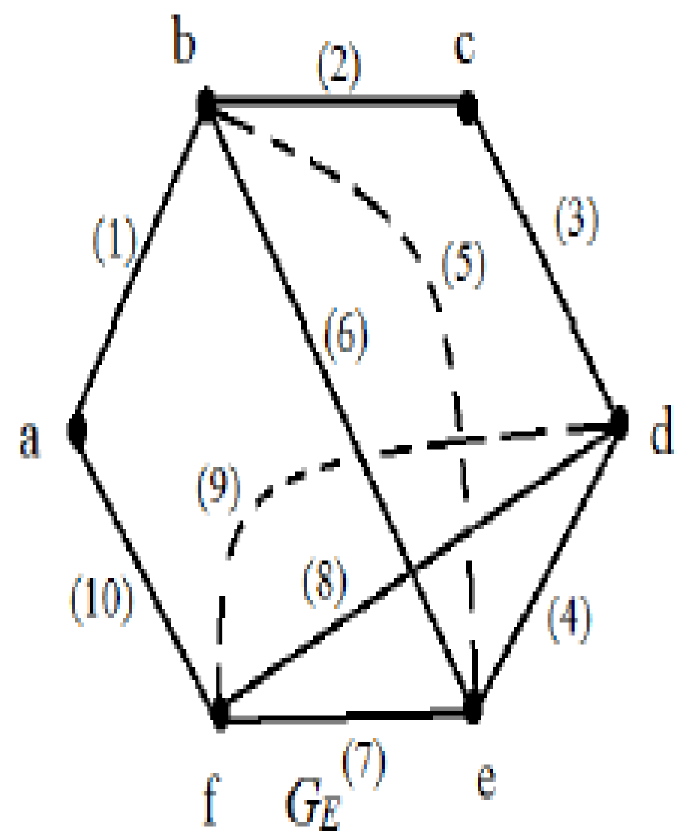
$P_3 = \{(b,f)\ ;\ (d,e)\}$ => $d(P_1) = d(b,f) + d(d,e) = 2 + 1 = 3.$

Vậy $m(G) = 2$*. Chu trình ngắn nhất* T_0 *cần tìm có độ dài là* $m + m(G) = 10$ *(cạnh).*

❖ Chu trình Euler: Bài toán người đưa thư

Bằng cách vẽ thêm 2 cạnh (b, e) và (d, f) ta được đồ thị Euler G_E.

Vậy một chu trình ngắn nhất T_0 đi qua tất cả các cạnh của đồ thị G đã cho là: <a; b; c; d; e; b; e; f; d; f; a>.



Hình 3.7b. Đồ thị Euler G_E.

❖ Điều kiện cần và đủ để đồ thị là nửa Euler

- Với đồ thị **vô hướng**
  - Đồ thị vô hướng liên thông G=<V,E> là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi G có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ
    - G có 2 đỉnh bậc lẻ: đường đi Euler xuất phát tại một đỉnh bậc lẻ và kết thúc tại đỉnh bậc lẻ còn lại.
    - G có 0 đỉnh bậc lẻ: G chính là đồ thị Euler.
- Đồ thị **có hướng**
  - Đồ thị có hướng liên thông yếu G =<V,E> là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi:
    - Tồn tại đúng 2 đỉnh u, v $\in$ V sao cho

      $deg^+(u) - deg^-(u)= deg^-(v) - deg^+(v)=1.$
    - Các đỉnh s$\neq$ u, s$\neq$ v còn lại có $deg^+(s)=deg^-(s)$.
    - Đường đi Euler sẽ xuất phát tại đỉnh *u* và kết thúc tại đỉnh *v*.

❖ Chứng minh đồ thị là nửa Euler

- Với đồ thị vô hướng:
  - Chứng tỏ đồ thị đã cho liên thông
    - Sử dụng hai thủ tục DFS() hoặc BFS()
  - Có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ
    - Sử dụng tính chất của các phương pháp biểu diễn đồ thị để tìm ra bậc của mỗi đỉnh.
- Với đồ thị có hướng:
  - Chứng tỏ đồ thị đã cho liên thông yếu
    - Sử dụng hai thủ tục DFS() hoặc BFS()
  - Có hai đỉnh $u,v \in V$ thỏa mãn

    $deg^{+}(u) - deg^{-}(u) = deg^{-}(v) - deg^{+}(v) = 1$
  - Các đỉnh $s \neq u$, $s \neq v$ còn lại có $deg^{+}(s) = deg^{-}(s)$.

❖ Ví dụ với đồ thị vô hướng

- Cho đồ thị vô hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị nửa Euler .
- Theo tính chất của ma trận kề, tổng các phần tử hàng u là bậc của đỉnh u. Vậy ta có:
  - deg(1) = deg(13) = 3
  - deg (2) = deg(3) = deg(11) = 4
  - deg(12) = deg(6) = deg(7) = 4
  - deg(8) = deg(9) = 4
  - deg(5) = deg(4) = deg(10) = 6
- G liên thông và có 2 đỉnh bậc lẻ u=1 và u=13 nên G là nửa Euler.

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

❖ Ví dụ với đồ thị có hướng

- Cho đồ thị có hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị nửa Euler .

Chứng minh. Theo tính chất của ma trận kề, $deg^+(u)$ là tổng các phần tử hàng u, $deg^-(u)$ là tổng các phần tử cột u. Vì vậy ta có:

$deg^+(2) = deg^-(2) = deg^+(3) = deg^-(3) =2$

$deg^+(6) = deg^-(6) = deg^+(7) = deg^-(7) =2$

$deg^+(8) = deg^-(8) = deg^+(9) = deg^-(9) =2$

$deg^+(11) = deg^-(11) = deg^+(12) = deg^-(12) =2$

$deg^+(5) =deg^-(5)= deg^+(4) = deg^-(4) =$
$deg^+(10) = deg^-(10)=3$

$deg^+(1) - deg^-(1) = deg^-(13) – deg^+(13) =1$

G liên thông yếu và có 2 đỉnh u=1 và u=13 thỏa mãn điều kiện nên G là nửa Euler.

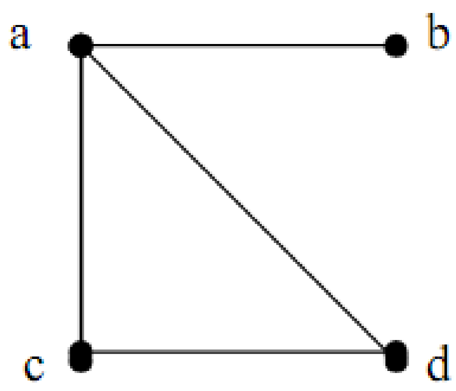
$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

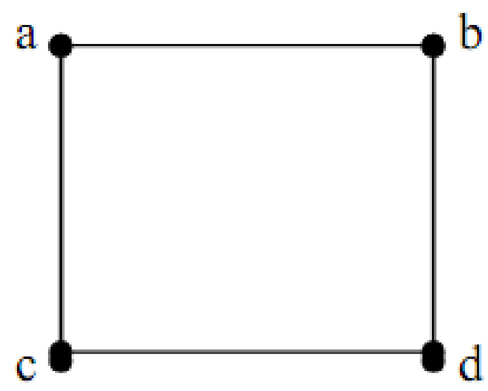
Đồ thị Hamilton

➢ Định nghĩa đồ thị Hamilton

Cho đồ thị $G = (X, U)$.

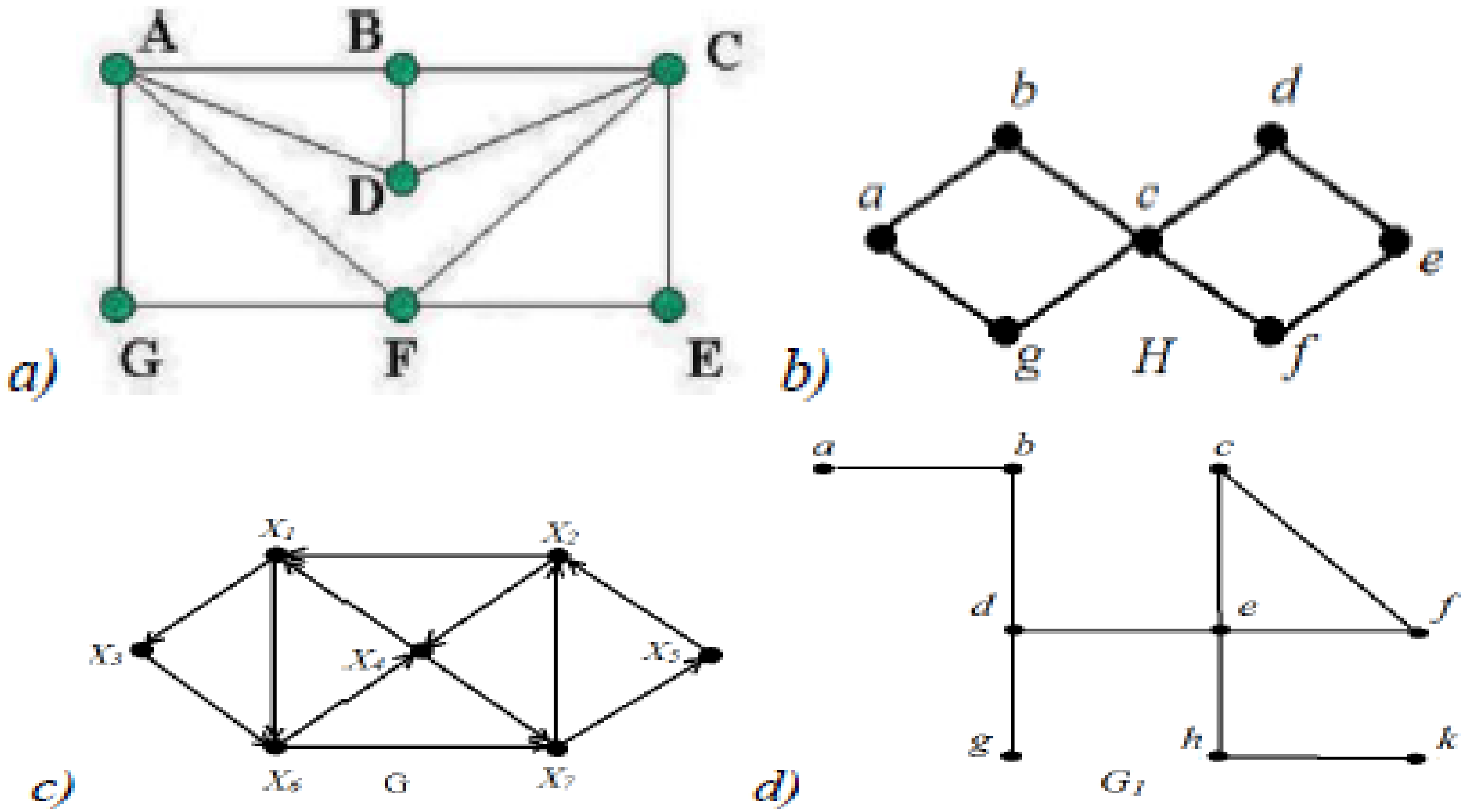
- Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh **đúng một lần** được gọi là đường đi Hamilton.
- Chu trình bắt đầu tại một đỉnh *v* nào đó, **qua tất cả các đỉnh** còn lại mỗi đỉnh **đúng một lần**, sau đó quay trở lại *v*, được gọi là chu trình Hamilton.
- Đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton nếu có chu trình Hamilton.
- Đồ thị được gọi là đồ thị nửa Hamilton nếu có đường đi Hamilton.





❖ Định nghĩa đồ thị Hamilton

<u>*Ví dụ :*</u> *Đồ thị trong **Hình 3.9a, Hình 3.9b** là đồ thị Hamilton, với các chu trình Hamilton là <G; A; B; D; C; E; F; G > và <x_3; x_6; x_7; x_5; x_2; x_4; x_1; x_3>. Đồ thị H trong **Hình 3.9c** không có chu trình Hamilton, chỉ có đường đi Hamilton là <g; a; b; c; d; e; f>. Đồ thị trong **Hình 3.9d** không có chu trình Hamilton và không có đường đi Hamilton.*

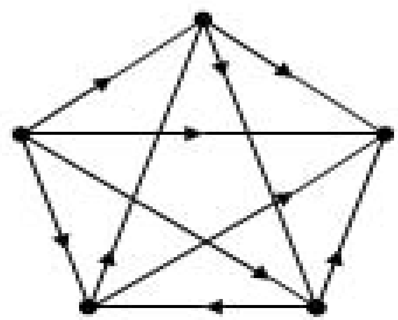


➢ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

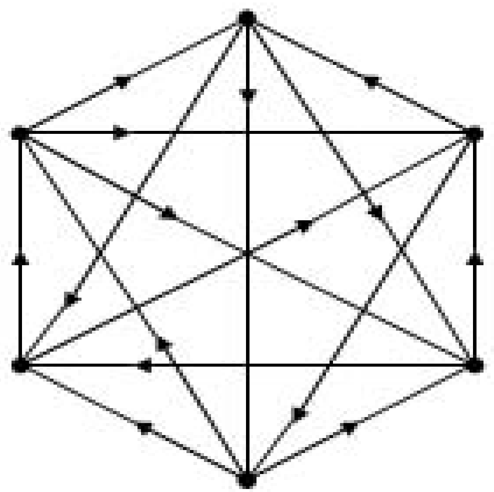
- **Định lý 1**: Cho đơn đồ thị vô hướng liên thông $G = (X,U)$ có n đỉnh. Khi đó, G là đồ thị Hamilton khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau xảy ra:
  - (1) $\forall x,y \in X$, $deg(x)+deg(y) \geq n$.
  - (2) $\forall x \in X$, $deg(x) \geq n/2$.
- **Hệ quả**:
  - (1) Đơn đồ thị vô hướng liên thông $G = (X,U)$ có n đỉnh mà $\forall x \in X$, $deg(x) \geq (n-1)/2$ thì G là đồ thị nửa Hamilton.
  - (2) Đơn đồ thị có hướng liên thông mạnh G mà , $deg^+(x) \geq n/2$ và $deg^-(x) \geq n/2$ thì G là đồ thị Hamilton.
- **Định lý 2:** Nếu xóa đi k đỉnh cùng các cạnh liên thuộc của một đơn đồ thị G liên thông mà được đồ thị con có nhiều hơn k thành phần liên thông thì G không phải là đồ thị Hamilton.

❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

- **Định lý 3:** *Đồ thị đấu loại* – là đồ thị có hướng trong đó hai đỉnh bất kì của nó được nối với nhau bởi đúng một cung, là đồ thị nửa Hamilton.
- **Hệ quả:**
  - Mọi đồ thị đấu loại liên thông mạnh là Hamilton.
- **Ví dụ:** Đồ thị đấu loại D_5, D_6 (liên thông mạnh)



D_5



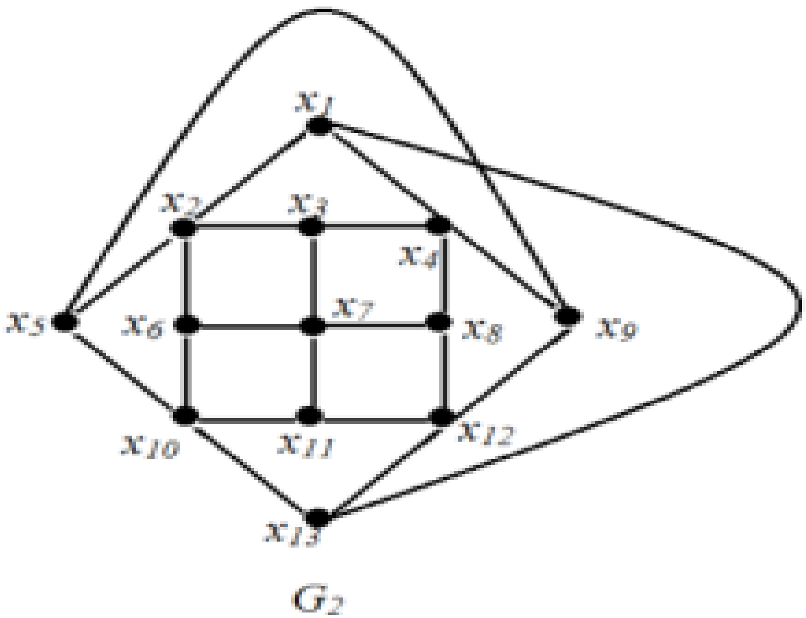
D_6

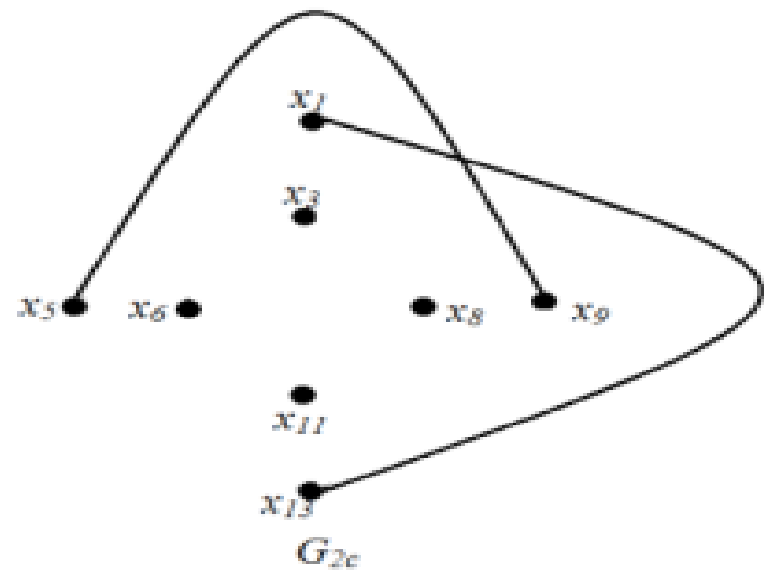
❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

- **Một số quy tắc tìm chu trình (đường đi) Hamilton**
  - (1) Nếu G có một đỉnh bậc bé hơn 2 (tức G có đỉnh treo hoặc cô lập) thì G không phải là đồ thị Hamilton.
  - (2) Nếu một đỉnh x có bậc bằng 2 thì cả hai cạnh kề với đỉnh đó đều thuộc chu trình (đường đi) Hamilton cần tìm.
  - (3) Trong khi xây dựng chu trình Hamilton, sau khi lấy hai cạnh kề với một đỉnh nào đó thì phải loại bỏ mọi cạnh kề còn lại với đỉnh đó.
  - (4) Chu trình Hamilton không được chứa bất kì chu trình con nào.
    - Do vậy mọi đồ thị có một đỉnh kề với ba đỉnh bậc 2 thì không phải là đồ thị Hamilton.

❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

- **Ví dụ 1**: Chứng tỏ rằng đồ thị G_2 không có chu trình Hamilton nhưng có đường đi Hamilton?





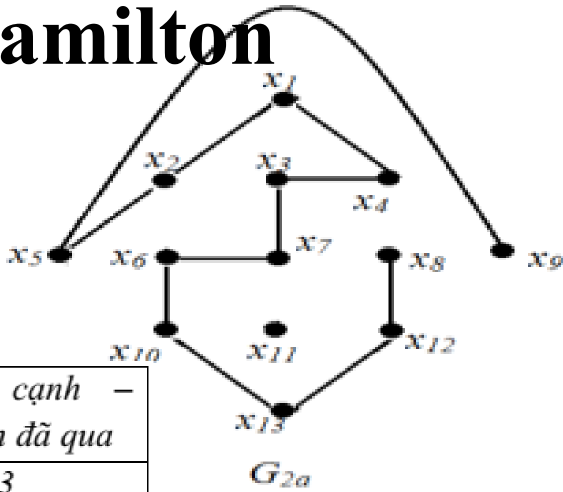
Đỉnh	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
Bậc	3	4	3	4	3	3	4	3	3	4	3	4	3

Số cạnh $N(U) = \frac{1}{2}\sum_{x\in X}\deg(x) = 22$ *(cạnh).*

- *Áp dụng định lý 2*, khi xóa đi 5 đỉnh x2, x4, x7, x10, x12 ta được đồ thị con có 6 thành phần liên thông (G_{2c}) nên G không phải là đồ thị Hamilton.

❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

- **Ví dụ 1**: (tt) *tìm đường đi Hamilton:*

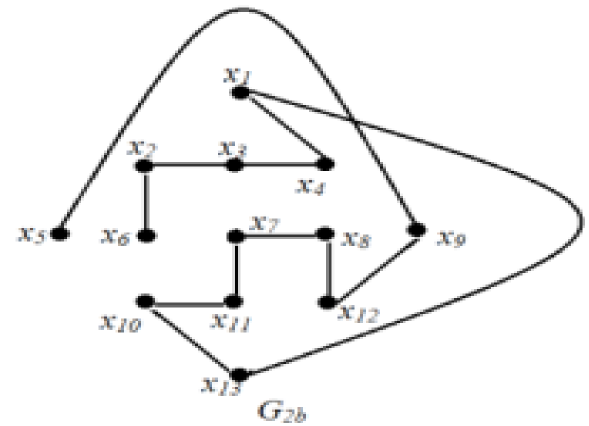


Bước	*Cạnh chọn*	*Cạnh xóa*	*Đỉnh thăm*	*Số cạnh – đỉnh đã qua*
1	*(x_1, x_2); (x_1, x_4)*	*(x_1, x_{13}), do đã chọn đủ 2 cạnh kề với x_1.*	*x_1, x_2, x_4*	*2 – 3*
2	*(x_{13}, x_{10}); (x_{13}, x_{12}), do x_{13} có bậc 2.* *(x_2, x_5)*	*(x_2, x_3); (x_2, x_6), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_2.*	*x_{13}, x_{10}, x_{12}* *x_5*	*5 – 7*
3	*(x_3, x_4); (x_3, x_7), do x_3 có bậc 2.* *(x_6, x_7); (x_6, x_{10}), do x_6 có bậc 2.*	*(x_4, x_8); (x_4, x_9), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_4.* *(x_7, x_8); (x_7, x_{11}), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_7.* *(x_{10}, x_{11}); (x_{10}, x_5), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_{10}.*	*x_3, x_7* *x_6*	*9 – 10*
4	*(x_5, x_9)* *(x_8, x_{12})*	*(x_{12}, x_9) do tạo thành chu trình.* *(x_{12}, x_{11}) do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_{12}.*	*x_9* *x_8*	*11 – 12*

- Chỉ chọn được 11 cạnh và chỉ qua được 12 đỉnh nên cách chọn này không tìm được đường đi Hamilton (G_{2a}).

❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

- **Ví dụ 1**: (tt) *tìm đường đi Hamilton (cách chọn khác):*



Bước	Cạnh chọn	Cạnh xóa	Đỉnh thăm	Số cạnh – đỉnh đã qua
1	(x_1, x_4); (x_1, x_{13})	(x_1, x_2)	x_1, x_4, x_{13}	2 – 3
2	(x_{13}, x_{10}) (x_4, x_3)	(x_{13}, x_{12}) (x_4, x_8); (x_4, x_9)	x_{10} x_3	4 – 5
3	(x_8, x_7); (x_8, x_{12}) (x_9, x_5); (x_9, x_{12})	(x_{12}, x_{11})	x_8, x_7, x_{12} x_9, x_5	8 – 10
4	(x_{11}, x_7) (x_{11}, x_{10})	(x_7, x_3); (x_7, x_6) (x_{10}, x_6); (x_{10}, x_5)	x_{11}	10 – 11
5	(x_3, x_2); (x_6, x_2)	(x_2, x_5)	x_2, x_6	12 – 13

- Chọn được 12 cạnh và đi qua 13 đỉnh, có đường đi Hamilton là <x6, x2, x3, x4, x1, x13, x10, x11, x7, x8, x12, x9, x5> (13 đỉnh, G_{2b}).

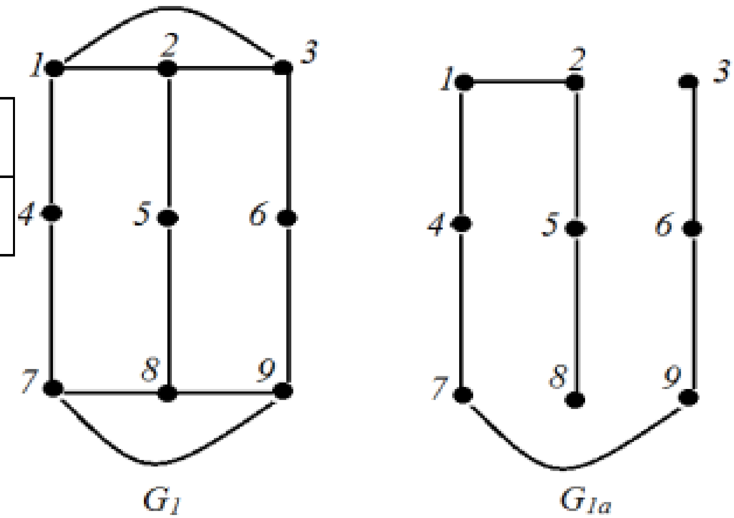
❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

- **Ví dụ 2**: Xét xem G_1 có phải là đồ thị Hamilton, nửa Hamilton không? Tại sao?

Đỉnh	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Bậc	*3*	*3*	*3*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*

Số cạnh $N(U) = \frac{1}{2}\sum_{x\in X} \deg(x) = 9$ *(cạnh).*

Ta có một cách chọn các cạnh như sau:

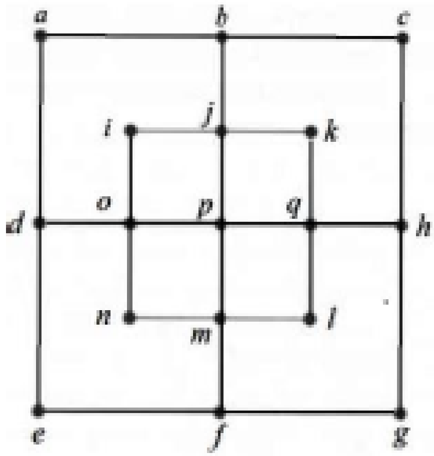


Bước	*Cạnh chọn*	*Cạnh xóa*	*Đỉnh thăm*	*Số cạnh – đỉnh đã qua*
1	*(1, 4); (4, 7)*		*1, 4, 7*	*2 – 3*
2	*(2, 5); (5, 8)*		*2, 5, 8*	*4 – 6*
3	*(3, 6); (6, 9)*		*3, 6, 9*	*6 – 9*
4	*(1, 2)*	*(1, 3); (2, 3); (7, 8)*		*7 – 9*
5	*(7,9)*	*(8, 9)*		*8 – 9*

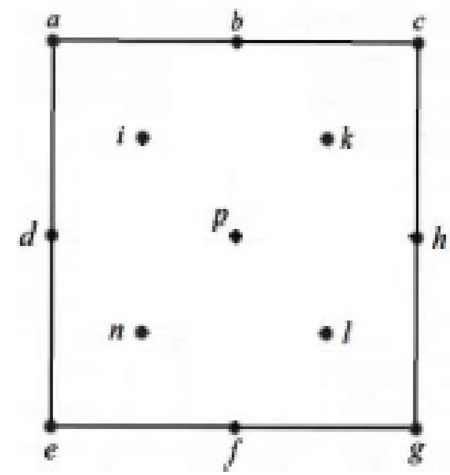
- Chọn được 8 cạnh và đi qua 9 đỉnh, có đường đi Hamilton là <3, 6, 9, 7, 4, 1, 2, 5, 8> (G_{1a}).

❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

<u>Ví dụ 3.</u> Đồ thị sau có phải đồ thị Hamilton, nửa Hamilton không? Tìm chu trình, đường đi Hamilton nếu có?



Hình 3.12. Đồ thị *G*.



Hình 3.13. Đồ thị con của *G*.

Đỉnh	a	b	c	h	g	f	e	d	o	i	j	k	q	t	m	n	p
Bậc	2	3	2	3	2	3	2	3	4	2	4	2	4	2	4	2	4

Số cạnh $N(U) = \sum_{x \in X} \deg(x) = 24$ (cạnh)

*Để ý rằng xóa đi 4 đỉnh o, j, q, m và các cạnh kề với chúng ta thu được đồ thị con có 6 thành phần liên thông nên G không phải là đồ thị Hamilton. (**Hình 3.13**)*

❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

Ta tìm đường đi Hamilton như sau

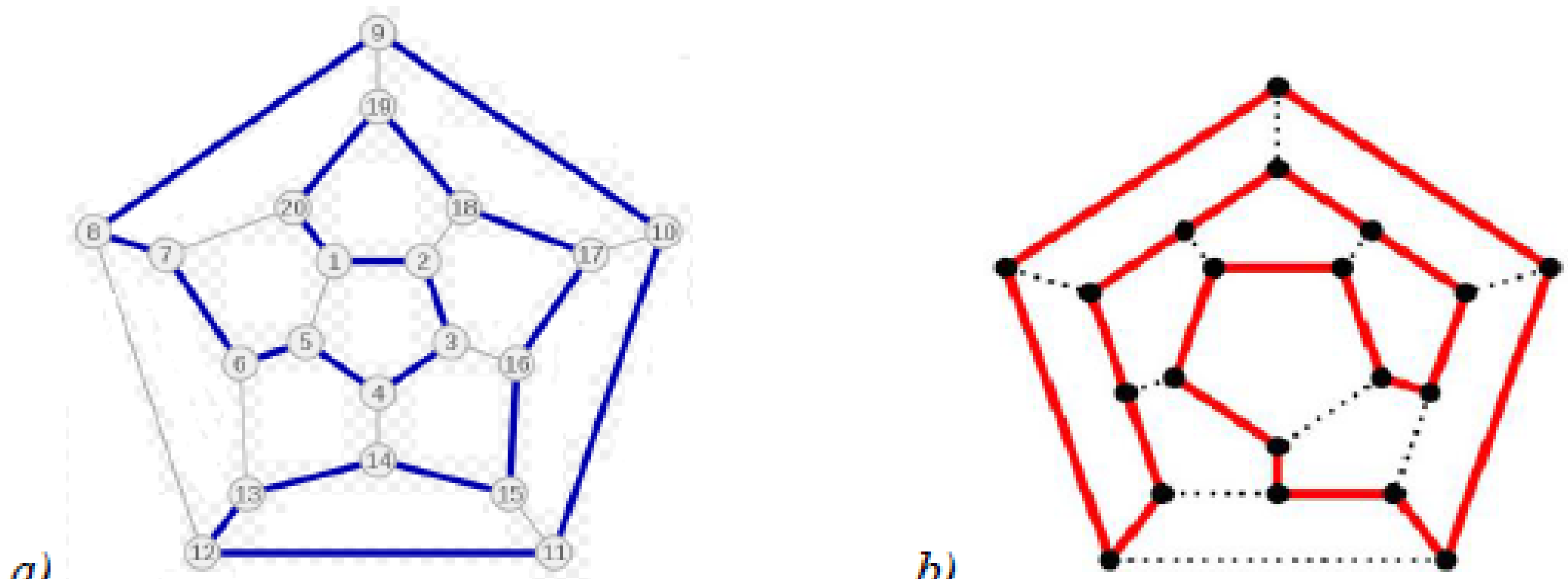
Bước	Cạnh chọn	Cạnh xóa	Đỉnh thăm	Số cạnh – đỉnh đã qua
1	*(a,b); (a,d)*		*a, b, d*	*2 – 3*
2	*(e,d); (e,f)*	*(d,o)*	*e, f*	*4 – 5*
3	*(g,f); (g,h)*	*(f, m)*	*g, h*	*6 – 7*
4	*(c,b); (c,h)*	*(b, j); (h,q)*	*c*	*8 – 8*

Chọn được 8 cạnh và đi qua 8 đỉnh nên có chu trình con C_1 = <*a, b, c, h, g, f, e, d, a*>. *Vậy G không có chu trình Hamilton.*

Tiếp tục chọn các cạnh tìm đường đi Hamilton, ta có chu trình C_2 = <*o, i, j, k, q, t, m, n, o*> *và đỉnh cô lập p. Không thể tạo thành đường đi Hamilton từ các chu trình* C_1, C_2 *và đỉnh p. Vậy G không là nửa Hamilton.*

❖ Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton

Ví dụ 4 (Trò chơi "Vòng quanh thế giới":



Hình 3.14. Chu trình Hamilton trong trò chơi "Vòng quanh thế giới".

Giải. Mọi đỉnh của đồ thị đều có bậc bằng 3. Số cạnh = $\frac{1}{2}\sum_{x\in X}\deg(x)$ = *30 (cạnh).*

Chọn được 20 cạnh và đi qua 20 đỉnh, có chu trình Hamilton là <1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20>. (Hình 3.14a)

Một đáp án khác: <1,2,3,16,17,18,19,20,7,6,13,12,8,9,10,11,15,14,4,5,1>. (Hình 3.14b)

❖ Cây liệt kê chu trình Hamilton

Dùng để liệt kê tất cả các chu trình Hamilton trong đồ thị nhờ thuật toán quay lui, bằng việc phát phát triển dãy đỉnh kề. Quy tắc vẽ cây liệt kê chu trình, đường đi Hamilton:

(1) Chọn 1 đỉnh bất kì làm gốc.

(2) Ghép tất cả các cạnh liên thuộc với gốc ta được đỉnh mức 1.

(3) Từ mỗi đỉnh mức 1, ghép tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh này sao cho *không tạo thành chu trình* ta được đỉnh mức 2.

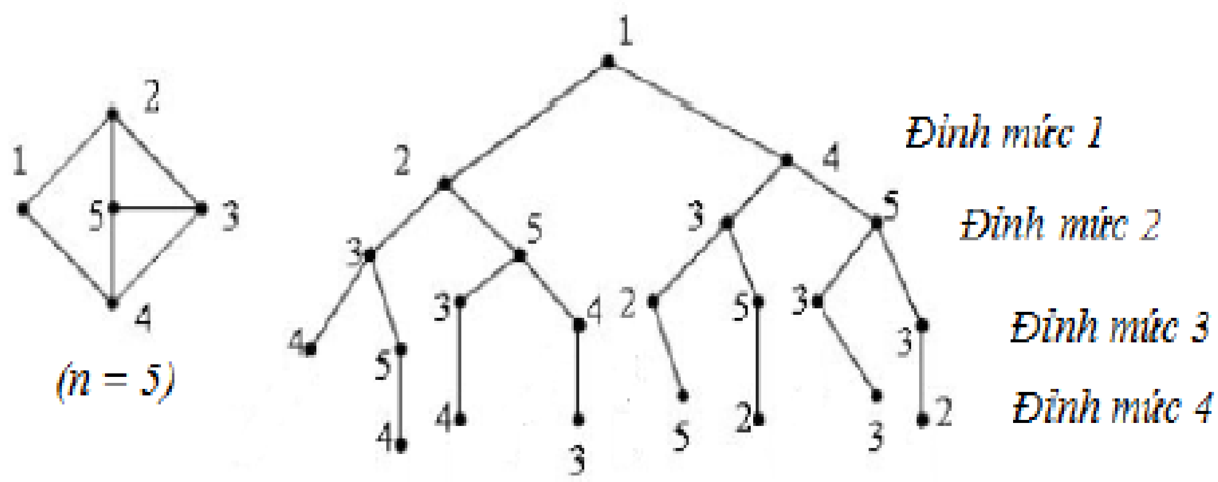
Cứ như vậy cho đến khi không thể ghép thêm được nữa.

Từ các đỉnh mức $n - 1$ nếu có đường đi tới gốc thì có chu trình Hamilton, còn không có đường đi tới gốc thì có đường đi Hamilton.

Trong trường hợp đồ thị không có quá nhiều cạnh, dùng cây liệt kê ta có thể kiểm tra xem đồ thị có phải là Hamilton hay không.

❖ Cây liệt kê chu trình Hamilton

__Ví dụ:__ Chọn đỉnh 1 làm gốc, ghép tất cả các đỉnh kề liên tiếp từ đỉnh này sao cho không tạo thành chu trình ta có cây liệt kê như sau:



Hình 3.15. Cây liệt kê chu trình Hamilton.

Từ các đỉnh 4 và 2 (mức 4) có đường đi tới gốc nên ta có các chu trình Hamilton <1;2;3;5;4;1>; <1;2;5;3;4;1>; <1;4;3;5;2;1> và <1;4;5;3;2;1>.

Vậy đồ thị đã cho là đồ thị Hamilton. (Có hai chu trình Hamilton khác nhau là <1;4;3;5;2;1> và <1;4;5;3;2;1>).

❖ Thuật toán tìm tất cả các chu trình Hamilton (1/2)

Thuật toán **Hamilton(int k)** {

//Liệt kê các chu trình Hamilton của đồ thị bằng cách phát triển dãy đỉnh (X[1], X[2], . . ., X[k-1]) của đồ thị G = (V, E) */

for y∈ Ke(X[k-1]) { *//xuất phát từ k=2 (vì cố định đỉnh đầu X[1])*

if (k==n+1) and (y == v0) then *//đủ đỉnh (X[n]) và cuối (y là kề của đỉnh cuối) trùng với đỉnh đầu (v0)*

Ghinhan(X[1], X[2], . . ., X[n], v0);

else if chuaxet[y] ==true{

X[k]=y; chuaxet[y] = false; *// duyệt tiếp cây tìm kiếm*

Hamilton(k+1);

}

chuaxet[y] = true; *//reinit*

}

}

❖ Thuật toán tìm tất cả các chu trình Hamilton (2/2)

- Khi đó, việc liệt kê chu trình Hamilton được thực hiện như sau:

Begin

*for (v∈V) chuaxet[v] = true; /*thiết lập trạng thái các đỉnh*/*

*X[1] = v0; (*v0 là một đỉnh nào đó của đồ thị*)*

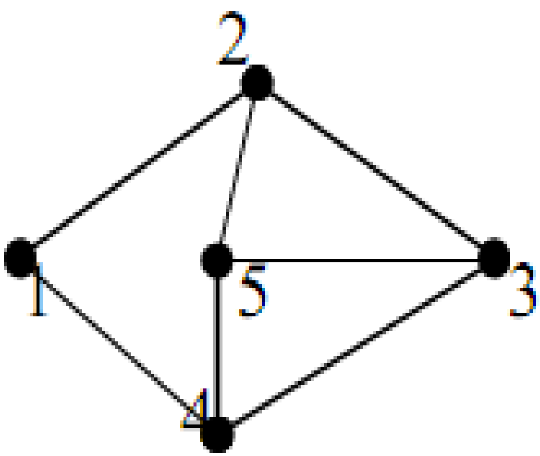
chuaxet[v0] = false;

Hamilton(2);

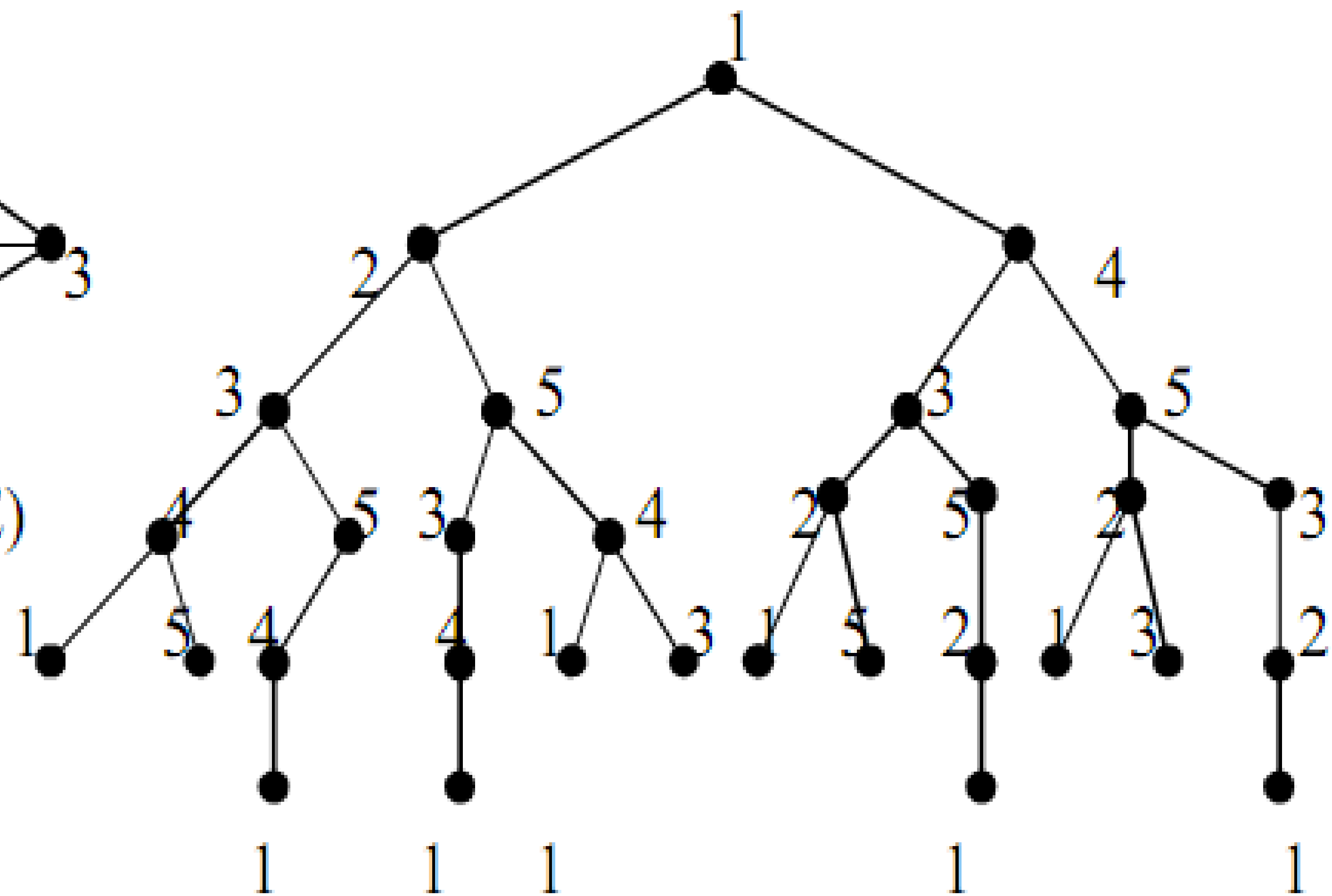
End.

❖ Kiểm nghiệm thuật toán

- Đồ thị G=<V, E> bên trái => *Cây tìm kiếm chu trình Hamilton* bên phải



G=(V,E)

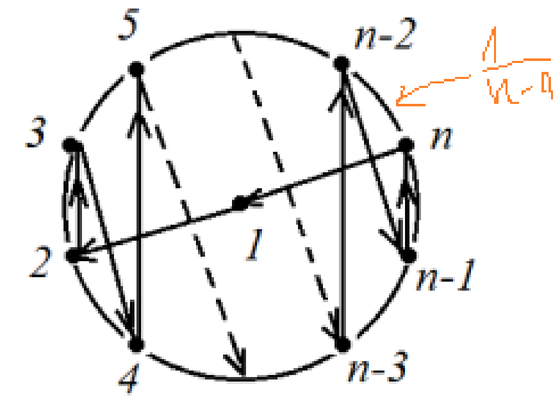


❖ Ứng dụng: Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

- ***Bài toán :*** Có *n* đại biểu từ *n* nước đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi ngày họp một lần ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi phải bố trí bao nhiêu ngày và bố trí như thế nào sao cho trong mỗi ngày, mỗi người có hai người kế bên là bạn mới.
- **Phân tích**: Xét đồ thị gồm *n* đỉnh, mỗi đỉnh ứng với mỗi người dự hội nghị, hai đỉnh kề nhau khi hai đại biểu tương ứng muốn làm quen với nhau.
  - Như vậy, ta có đồ thị đầy đủ *Kn*. Đồ thị này là Hamilton và rõ ràng mỗi chu trình Hamilton là một cách sắp xếp như yêu cầu của bài toán.
  - Bài toán trở thành tìm các *chu trình Hamilton phân biệt* của đồ thị đầy đủ *Kn* (*hai chu trình Hamilton gọi là phân biệt nếu chúng* ***không có cạnh chung***).

❖ Ứng dụng: Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

- ***Định lý:*** Trong *Kn* (với *n* **lẻ**, *n* ≥3) có đúng (n-1)/2 chu trình Hamilton phân biệt.
- **Chứng minh:** *Kn* có n(n-1)/2 cạnh và mỗi chu trình Hamilton có *n* cạnh, nên số chu trình Hamilton phân biệt nhiều nhất là (n-1)/2.



➢Chu trình Hamilton đầu tiên: *<1; 2; ...; n;1>*

➢Các đỉnh được giữ cố định, xoay khung theo chiều kim đồng hồ với các góc quay 1/(n-1) đường tròn ta được (*n – 1)* chu trình Hamilton nhưng chỉ có (n-1)/2 chu trình Hamilton khác nhau.

➢Chu trình Hamilton cuối cùng thứ (n-1)/2 là *<1; n–2; n; n–4; n–1;...;3; 6; 2; 4; 1>*.

❖ Ứng dụng: Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

- **Ví dụ**: Hãy liệt kê các chu trình Hamilton phân biệt (không có cạnh chung) trong đồ thị đầy đủ K_9?
- **Chú ý**: Với n chẵn, mọi chu trình Hamilton của Kn đều có ít nhất một cạnh chung với nhau, do vậy số chu trình Hamilton phân biệt của Kn (n chẵn) là duy nhất.

Bài tập 1

- Cho đồ thị vô hướng liên thông G=<V,E> như hình bên phải. Hãy thực hiện:
  a) Chứng minh đồ thị đã cho là Euler?
  b) Xây dựng thuật toán tìm một chu trình Euler của đồ thị bắt đầu tại đỉnh $u \in V$?
  c) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=1? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  d) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=5? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  e) Viết chương trình tìm một chu trình Euler của đồ thị bắt đầu tại đỉnh u?

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Bài tập 2

- Cho đồ thị vô hướng liên thông G=<V,E> như hình bên phải. Hãy thực hiện:
  a) Chứng minh đồ thị đã cho là nửa Euler?
  b) Xây dựng thuật toán tìm một đường đi Euler của đồ thị?
  c) Tìm một đường đi Euler của đồ thị? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  d) Viết chương trình tìm một đường đi Euler của đồ thị?

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Bài tập 3

- Cho đồ thị có hướng liên thông yếu G=<V,E> như hình bên phải. Hãy thực hiện:
  a) Chứng minh đồ thị đã cho là Euler?
  b) Xây dựng thuật toán tìm một chu trình Euler của đồ thị bắt đầu tại đỉnh $u \in V$?
  c) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=1? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  d) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=5? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  e) Viết chương trình tìm một chu trình Euler của đồ thị bắt đầu tại đỉnh u?

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

Bài tập 4

- Cho đồ thị vô hướng liên thông được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như dưới đây:

  Ke(1) = { 4, 6 }.
  Ke(2) = { 3, 8, 10, 11}.
  Ke(3) = { 2, 9, 10, 13 }.
  Ke(4) = { 1, 6, 8, 12 }.
  Ke(5) = { 7, 9 }.
  Ke(6) = { 1, 4, 10, 12 }.
  Ke(7) = { 5, 9, 11, 13 }.
  Ke(8) = { 2, 4, 11, 12 }.
  Ke(9) = { 3, 5, 7, 13 }.
  Ke(10) = { 2, 3, 6, 12 }.
  Ke(11) = { 2, 7, 8, 13 }.
  Ke(12) = { 4, 6, 8, 10 }.
  Ke(13) = { 3, 7, 9, 11 }.

- Hãy thực hiện:
  a) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=1? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  b) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=5? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  c) Viết chương trình tìm một chu trình Euler của đồ thị bắt đầu tại đỉnh u?

Bài tập 5

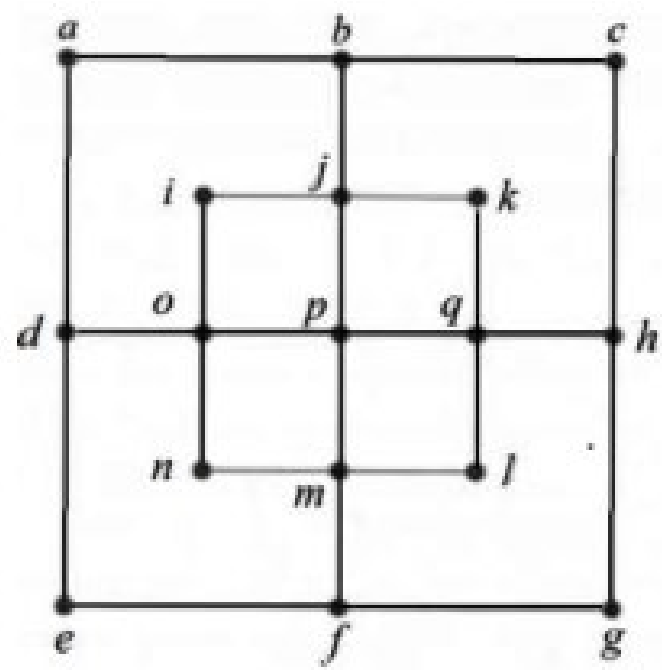
- Cho đồ thị có hướng liên thông yếu được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như dưới đây:

  Ke(1) = { 6 }.
  Ke(2) = { 3, 8}.
  Ke(3) = { 9, 13 }.
  Ke(4) = { 1, 6 }.
  Ke(5) = { 7 }.
  Ke(6) = { 10, 12 }.
  Ke(7) = { 11, 13 }.
  Ke(8) = { 4, 12 }.
  Ke(9) = { 5, 7 }.
  Ke(10) = { 2, 3 }.
  Ke(11) = { 2, 8 }.
  Ke(12) = { 4, 10 }.
  Ke(13) = { 9, 11 }.

- Hãy thực hiện:
  a) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=1? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  b) Tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=7? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?
  c) Viết chương trình tìm một chu trình Euler của đồ thị bắt đầu tại đỉnh u?

Bài tập 6

- Đồ thị sau có phải đồ thị Hamilton, nửa Hamilton không? Tìm chu trình, đường đi Hamilton nếu có?



Bài tập cộng điểm cuối kỳ

- Sử dụng thuật toán tìm chu trình Hamilton, giải bài toán "Người du lịch", in ra lộ trình tối ưu. Biết rằng bảng chi phí lưu trong file văn bản dạng sau:

```
4               //4 thanh pho
0       4       1       3
1       0       -1      2
-1      1       0       4
2       3       5       0
```

- a[i][j]=-1 là không có đường đi trực tiếp từ i đến j.