CHƯƠNG VI: MẠNG VÀ LUỒNG

Nội dung

- Các định nghĩa
- Bài toán luồng cực đại
- Thuật toán Ford – Fulkerson tìm luồng cực đại

Các định nghĩa

➢ Các định nghĩa: Mạng

- **Định nghĩa 1:** Mạng là một đồ thị có hướng G = (X,U); *không có khuyên*, trong đó:

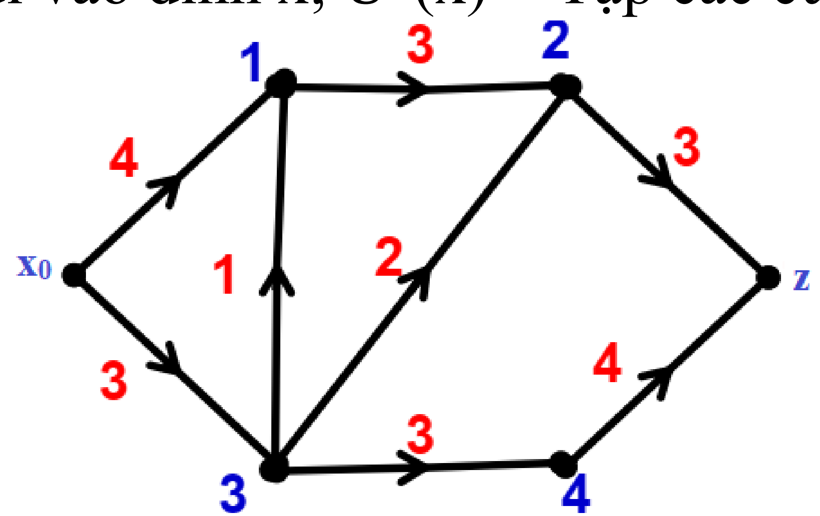
  (1) Có *duy nhất* một đỉnh không có cung đi vào(chỉ có cung đi ra), gọi là đỉnh phát, kí hiệu x_0.

  (2) Có *duy nhất* một đỉnh không có cung đi ra (chỉ có cung vào), gọi là đỉnh thu, kí hiệu z.

  (3) Mỗi cung $u \in U$, được gán một trọng số không âm, kí hiệu $c(u) \geq 0$, gọi là khả năng thông qua (băng thông) của cung đó.

Kí hiệu: $U^-(x)$ = Tập các cung đi vào đỉnh x; $U^+(x)$ = Tập các cung đi ra từ đỉnh x.

– Ta có: $U^-(x_0) = \varnothing$; $U^+(z) = \varnothing$.



➢ Các định nghĩa: Luồng

- **Định nghĩa 2:** Cho mạng G = (X,U) có *đỉnh phát* $\mathbf{x_0}$, *đỉnh thu* **z**, và khả năng thông qua **c(u)**, $u \in U$:
  - (1) Một luồng Φ trên mạng G là một hàm số không âm xác định trên U vào R^+, tức là $\Phi: U \to R^+$, $u \to \Phi(u)$

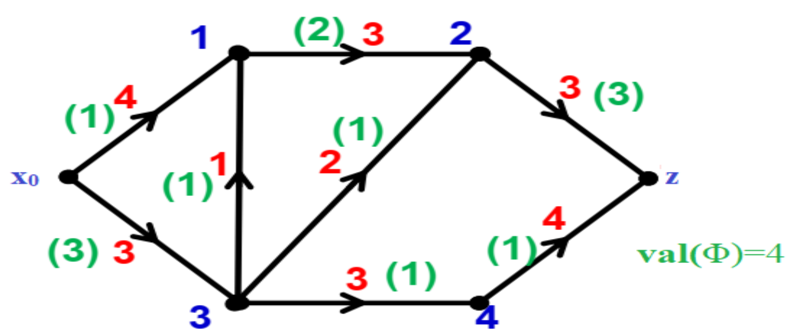
  Φ(u) gọi là *giá trị (không phải là trọng số) luồng Φ trên cung u*, thỏa mãn các điều kiện:

    - **Điều kiện *trên cung*:** Giá trị Luồng Φ(u) trên mỗi cung không vượt quá khả năng thông qua trên cung: $0 \le \Phi(u) \le c(u)$, $\forall u \in U$
    - **Điều kiện cân bằng trên *mỗi đỉnh*:** Tổng giá trị của luồng trên các cung đi vào mỗi đỉnh (*trừ đỉnh phát* x_0 *và đỉnh thu z*) = Tổng giá trị của luồng trên các cung đi ra *đỉnh đó*:

$$\sum_{u \in U^-(x)} \Phi(u) = \sum_{v \in U^+(x)} \Phi(v), \quad \forall x \in X \setminus \{x_0, z\}$$

  - (2) **Giá trị của luồng** Φ trên G, kí hiệu là Val(Φ), được xác định:

$$Val(\Phi) = \sum_{u \in U^+(x_0)} \Phi(u) \quad \text{hay} \quad Val(\Phi) = \sum_{v \in U^-(z)} \Phi(v)$$



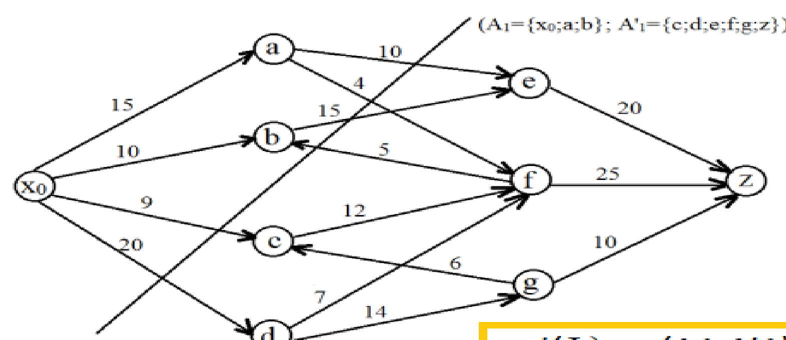
(Với X_0 là đỉnh phát; z là đỉnh thu)

➢ Các định nghĩa: Lát cắt

- **Định nghĩa 3:** *Một lát cắt (A, A')* là một cách phân hoạch tập đỉnh X=A∪A' sao cho A∩A'=∅ và A chứa x_0, A' chứa z
  - *Khả năng thông qua của lát cắt (A, A')*, kí hiệu ***c(A, A')***:

$$c(A,A') = \sum_{u=(x,y),x\in A,y\in A'} c(u)$$

  - Lát cắt có khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là ***lát cắt hẹp nhất***.
- **Định lý 1**: Giá trị của mọi luồng Φ trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (A, A') bất kỳ trong mạng: $val(\Phi) \le c(A, A')$
  - **Hệ quả**: Giá trị của luồng **cực đại** trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt **hẹp nhất** trong mạng.

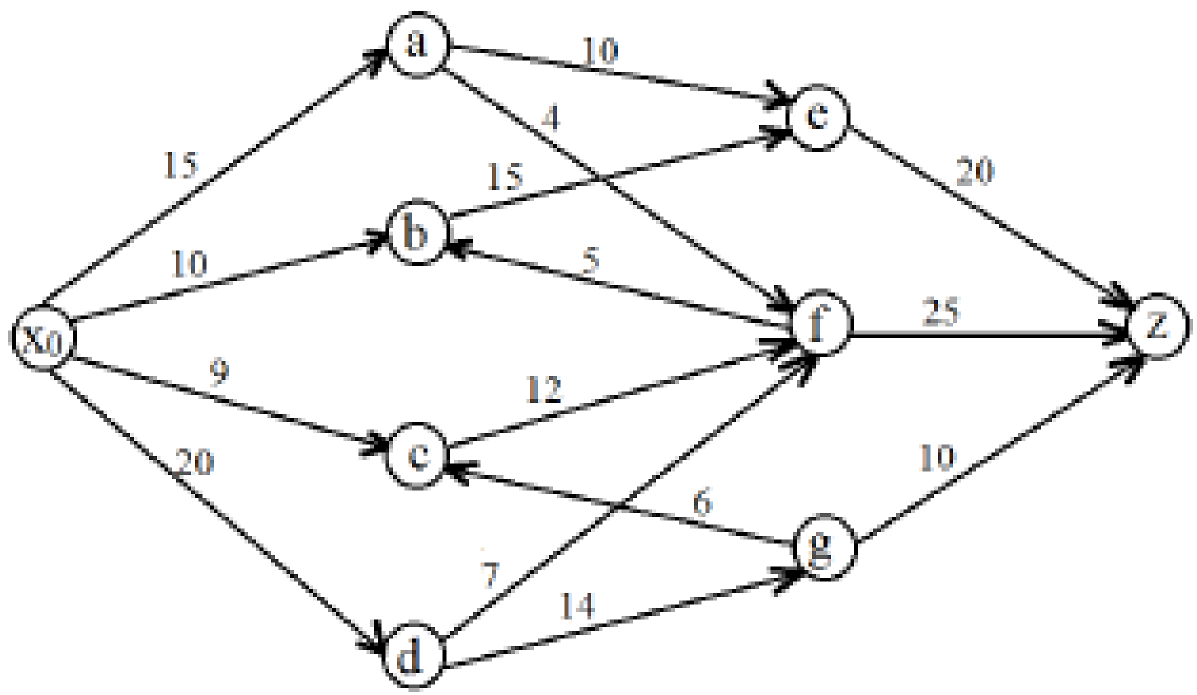


Lát cắt *(A₁;A'₁)* trên mạng *G*.

$\boxed{val(\Phi) < c(A1;A'1)\ ?}$

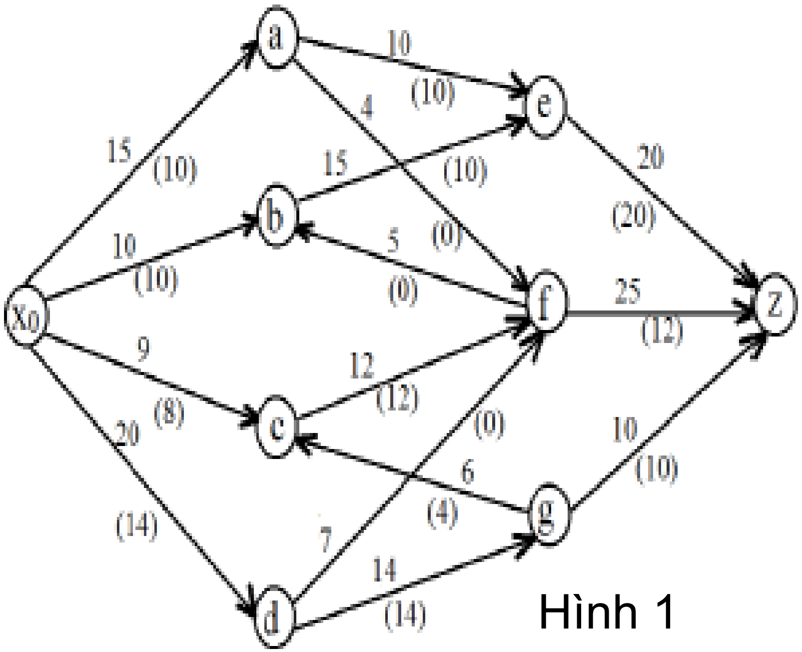
❖ Lát cắt

Ví dụ 1: Cho đồ thị có hướng G, Là mạng với đỉnh phát X_0 và đỉnh thu z, khả năng thông qua là trọng số ghi trên từng khung

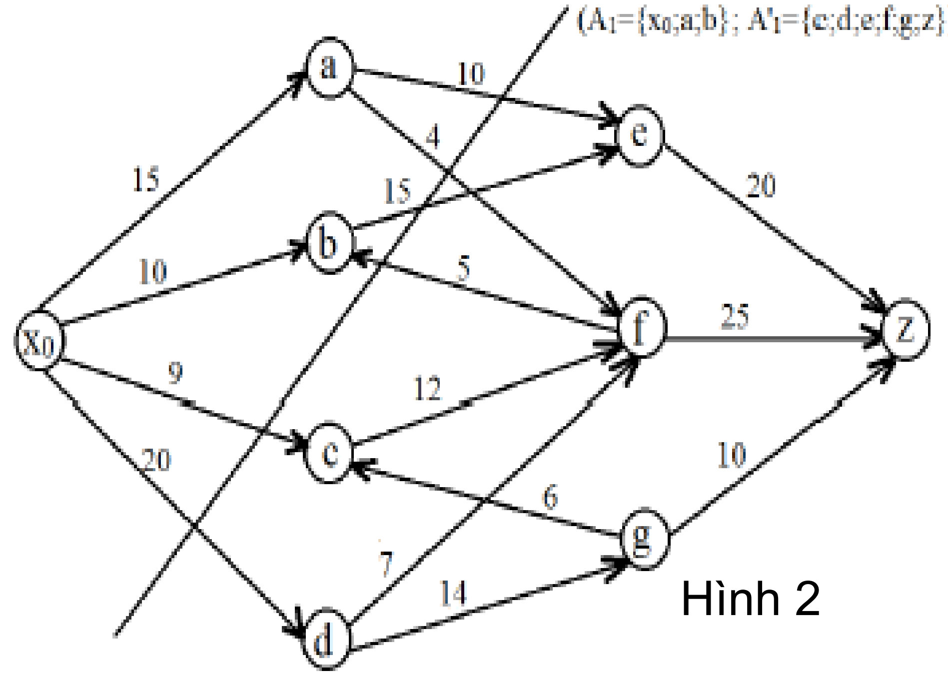


❖ Lát cắt

Ví dụ 2: Cho đồ thị có hướng G, Là mạng với đỉnh phát X_0 và đỉnh thu z, khả năng thông qua là trọng số ghi trên từng khung



Hình 1



Hình 2

Dê dàng kiêm tra thây luông Φ *(giá trị luông trên từng cung là sô cho trong ngoặc đơn bên dưới mỗi cung) thỏa mãn điều kiện trên từng cung, chẳng hạn,* $0 < \Phi(f,z) = 12 < c(f,z) = 25$. *Và thỏa mãn điều kiện cân bằng tại mỗi đỉnh, chẳng hạn, xét tại đỉnh f:* $\sum_{u\in U^-(f)} \Phi(u) = \sum_{v\in U^+(f)} \Phi(v)$ *(vì* $\sum_{u\in U^-(f)} \Phi(u) = \Phi(a,f) + \Phi(c,f) + \Phi(d,f) = 0+12+0 = 12$; $\sum_{v\in U^+(f)} \Phi(v) = \Phi(f,b) + \Phi(f,z) = 0+12 = 12$.

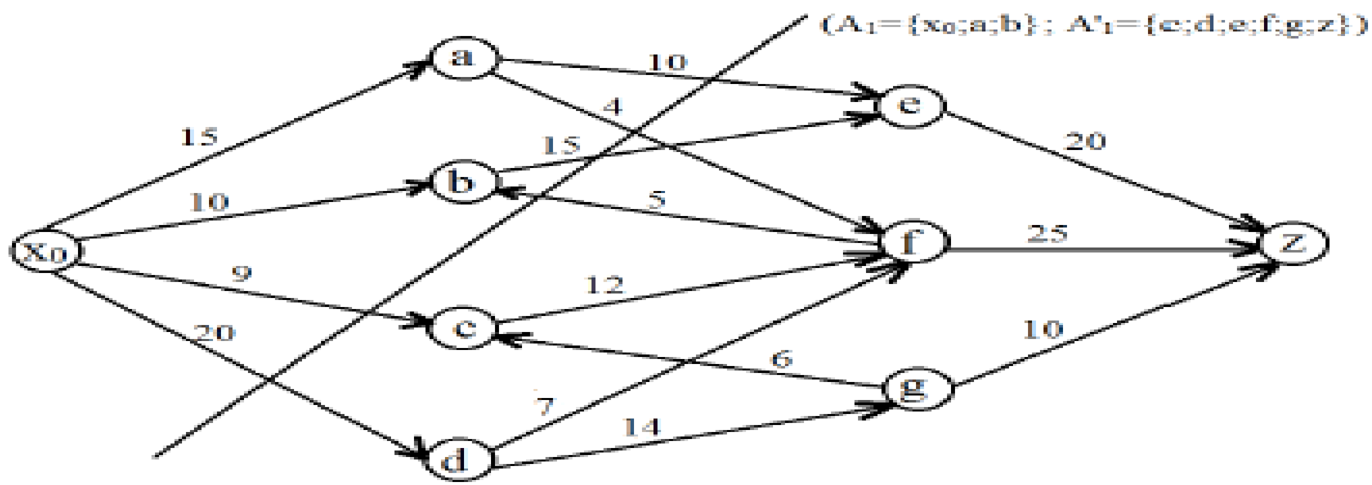
❖ Lát cắt

Giá trị của luồng Φ *trên* Hình 1 *là* $Val(\Phi) = \sum_{u \in U^+(x_0)} \Phi(u) = \Phi(x_0, a) + \Phi(x_0, b) + \Phi(x_0, c) + \Phi(x_0, d) = 10+10+8+14 = 42.$

Trên Hình 2 *phân hoạch* $(A_1;A'_1)$ *là một lát cắt của mạng G, với* $A_1 = \{x_0;a;b\}$ *và* $A'_1 = X \backslash A_1 = \{c;d;e;f;g;z\}$. *Khả năng thông qua của lát cắt này là:* $c(A_1;A'_1) = c(a,e) + c(a,f) + c(b,e) + c(x_0,c) + c(x_0,d) = 10 + 4 + 15 + 9 + 20 = 58.$

Rõ ràng: $Val(\Phi) < c(A_1;A'_1)$.

Hình 2



Bài toán luồng cực đại

➢ Bài toán luồng cực đại

- ***Bài toán:*** Cho mạng $G=(X,U)$. Hãy tìm luồng Φ^* trên mạng G sao cho giá trị $Val(\Phi^*)$ là *lớn nhất*.

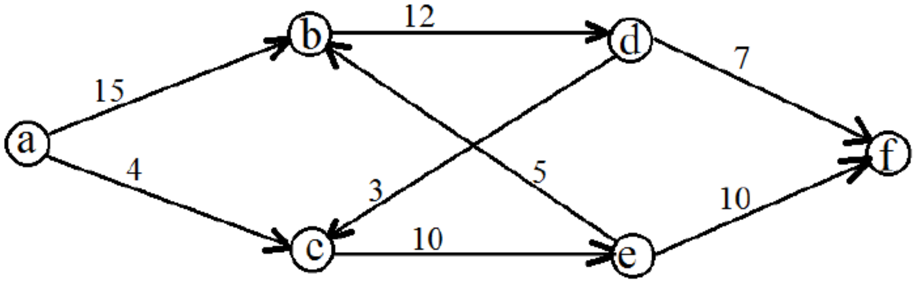
  Lưu ý: $Val(\Phi) \le c(A,A'), \forall (A,A')$ và $\forall \Phi$. Suy ra: $Val(\Phi)_{max} = c(A, A')_{min}$

  Để tìm giá trị luồng cực đại:

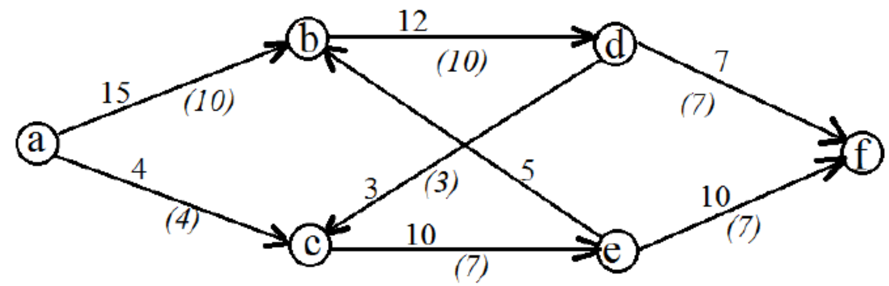
  1) Cách 1: Liệt kê tất cả các lát cắt trên mạng *G* và tính khả năng thông qua của các lát cắt này để tìm lát cắt hẹp nhất *(chính là giá trị luồng cực đại)*.
  2) Cách 2: Nếu biết luồng cực đại trên *G,* ta có thể xác định lát cắt hẹp nhất từ *Thuật toán Ford –Fulkerson.*

- **Ứng dụng thực tế:**
  – Xét đồ thị có hướng tương ứng với hệ thống đường ống dẫn dầu
  – Các ống dẫn dầu tương ứng với các *cung của đồ thị*
  – *Điểm phát* là tàu chở dầu, *điểm thu* là bể chứa dầu
  – *Điểm nối* giữa các ống tương ứng với *các đỉnh của đồ thị*
  – *Khả năng thông qua* của các cung tương ứng với *tiết diện các ống*
  – Cần tìm luồng dẫn dầu lớn nhất có thể bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa?

➢ Ví dụ về Bài toán luồng cực đại



Mạng *G*.



Luồng cực đại trên mạng *G*.

$A_1 = \{a\}, A'_1 = \{b,c,d,e,f\}$ => $c(A_1;A'_1) = 15+4 = 19$

$A_2 = \{a,b\}, A'_2 = \{c,d,e,f\}$ => $c(A_2;A'_2) = 12+4 = 16$

$A_3 = \{a,c\}, A'_3 = \{b,d,e,f\}$ => $c(A_3;A'_3) = 15+10 = 15$

$A_4 = \{a,d\}, A'_4 = \{b,c,e,f\}$ => $c(A_4;A'_4) = 15+4+3+7 = 29$

$A_5 = \{a,e\}, A'_5 = \{b,c,d,f\}$ => $c(A_5;A'_5) = 15+4+5+10= 34$

$A_6 = \{a,b,c\}, A'_6 = \{d,e,f\}$ => $c(A_6;A'_6) = 12+10 = 22$

$A_7 = \{a,b,d\}, A'_7 = \{c,e,f\}$ => $c(A_7;A'_7) = 4+3+7 = 14$

$A_8 = \{a,b,e\}, A'_8 = \{c,d,f\}$ => $c(A_8;A'_8) = 4+12+10 = 26$

$A_9 = \{a,c,d\}, A'_9 = \{b,e,f\}$ => $c(A_9;A'_9) = 15+10+7 = 32$

$A_{10} = \{a,c,e\}, A'_{11} = \{b,d,f\}$ => $c(A_{10};A'_{10}) = 15+5+10 = 30$

$A_{11} = \{a,d,e\}, A'_{11} = \{b,c,f\}$ => $c(A_{11};A'_{11}) = 15+4+3+7+5+10 = 45$

$A_{12} = \{a,b,c,d\}, A'_{12} = \{e,f\}$ => $c(A_{12};A'_{12}) = 10+7 = 17$

$A_{13} = \{a,b,c,e\}, A'_{13} = \{d,f\}$ => $c(A_{13};A'_{13}) = 12+10 = 22$

$A_{14} = \{a,b,e,d\}, A'_{14} = \{c,f\}$ => $c(A_{14};A'_{14}) = 4+3+7+10 = 24$

$A_{15} = \{a,c,d,e\}, A'_{15} = \{b,f\}$ => $c(A_{15};A'_{16}) = 15+7+10 = 32$

$A_{16} = \{a,b,c,d,e\}, A'_{16} = \{f\}$ => $c(A_{16};A'_{16}) = 7+10 = 17$

$$Vậy : Val(\Phi)_{max} = c(A_i, A'_i)_{min} = c(A_7;A'_7) = 14.$$

Thuật toán Ford – Fulkerson tìm luồng cực đại

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng

Định nghĩa 1: Cho mạng *G* và luồng Φ trên mạng *G*.

(1) Cung $u \in U$ gọi là một *cung bão hòa (cung đầy)* nếu $\Phi(u) = c(u)$.

(2) Luồng Φ gọi là *luồng đầy* nếu mọi đường đi từ đỉnh phát x_0 đến đỉnh thu *z* đều chứa ít nhất một cung bão hòa.

(3) Đường đi đơn $\alpha(x_0, z)$ từ đỉnh phát x_0 đến đỉnh thu *z* gọi là *đường tăng luồng* nếu trên α không có cung bão hòa.

(1) Nếu Φ chưa đầy thì trên *G* có ít nhất một đường tăng luồng α. Khi đó, ta có thể tăng luồng Φ thành Φ_1 với $Val(\Phi_1) = Val(\Phi) + \rho$ như sau:

(1a) : Xác định lượng vật chất tăng $\rho = \min_{u\in\alpha}\{c(u) - \Phi(u)\}$.

(1b) : Tăng luồng: Giá trị luồng Φ_1 trên các cung được xác định như sau:

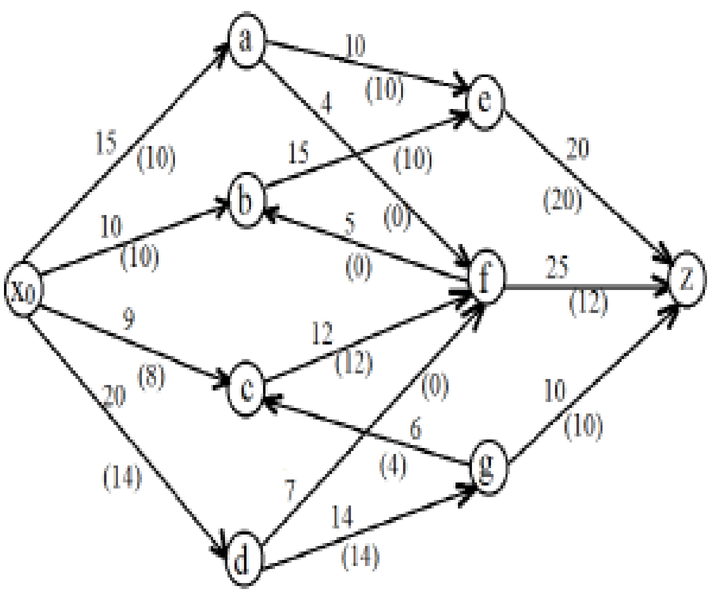
$$\Phi_1(u) = \begin{cases} \Phi(u) & \text{nếu } u \notin \alpha \\ \Phi(u) + \delta & \text{nếu } u \in \alpha \end{cases}.$$

(2) Luồng Φ trong *G* là luồng cực đại thì Φ là luồng đầy. Ngược lại không đúng, tức là một luồng đầy chưa chắc đã là luồng cực đại.

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng: Ví dụ

Đường đi $<x_0, a, f, z>$ chính là một đường tăng luồng. Lượng vật chất tăng trên đường tăng luồng này là $\rho_1 = \min_{u\in\alpha}\{15-10; 4-0; 25-12)\} = 4$. *Có :* $Val(\Phi_1) = Val(\Phi) + \rho = 42 + 4 = 46.$

Tăng luồng Φ thành Φ_1. Trên luồng Φ_1, đường đi $<x_0, d, f, z>$ cũng là một đường tăng luồng. Lượng vật chất tăng trên đường tăng luồng này là $\rho_2 = \min_{u\in\alpha}\{20-14; 7-0; 25-12-4)\} = 6$.

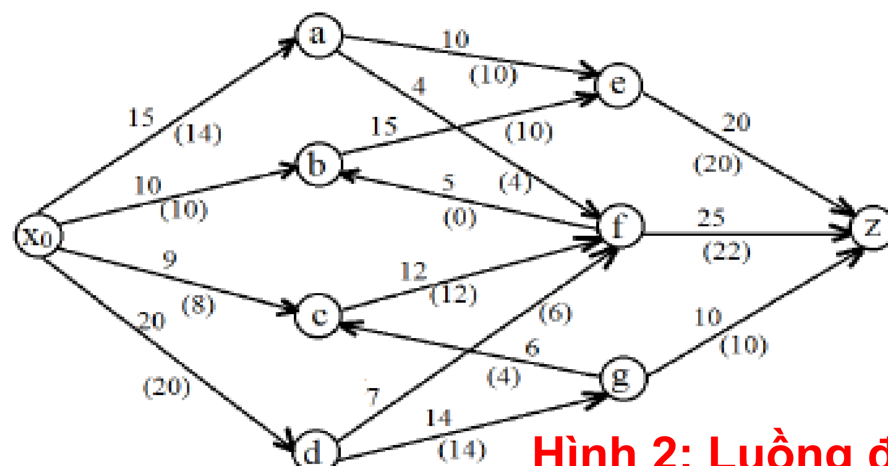


Hình 1

Tăng luồng Φ_1 thành luồng Φ_2.

Lúc này luồng Φ_2 trên mạng G là luồng đầy

Có: $Val(\Phi_2) = Val(\Phi_1) + \rho_2 = 46 + 6 = 52.$



Hình 2: Luồng đầy

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng

Định nghĩa 2: Cho mạng G và luồng Φ trên mạng G.

(1) Một đường đi đơn $a(x_0, z)$ từ x_0 đến z trong *đồ thị vô hướng tương ứng* với đồ thị có hướng G được gọi là *một xích* trong G.

(2) Trên xích $a(x_0, z)$ ta gọi cung cùng chiều với đường đi từ x_0 đến z là *cung thuận*, cung ngược chiều là *cung nghịch*.

(3) Xích $a(x_0, z)$ gọi là *xích tăng luồng (XTL)* nếu luồng trên cung thuận chưa đầy, luồng trên cung nghịch dương.

Tức là: $a(x_0, z)$ *là xích tăng luồng* $\Leftrightarrow \forall u \in \alpha$ thì $\begin{cases} \Phi(u) < c(u) \text{ nếu } u \text{ là cung thuận} \\ \Phi(u) > 0 \text{ nếu } u \text{ là cung nghịch} \end{cases}$.

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng: Định nghĩa

Nhận xét 2:

(1) Đường tăng luồng cũng là một xích tăng luồng, gồm toàn các cung thuận.

(2) Trên mỗi xích $\alpha(x_0, z)$, ta đánh nhãn cho các đỉnh của nó như sau:

(2a) : Đỉnh xuất phát x_0 có nhãn là *0*.

(2b) : Giả sử x_k là đỉnh đã có nhãn và y là đỉnh chưa có nhãn kề với x_k trên xích $\alpha(x_0, z)$.

Khi đó đỉnh y có nhãn là:

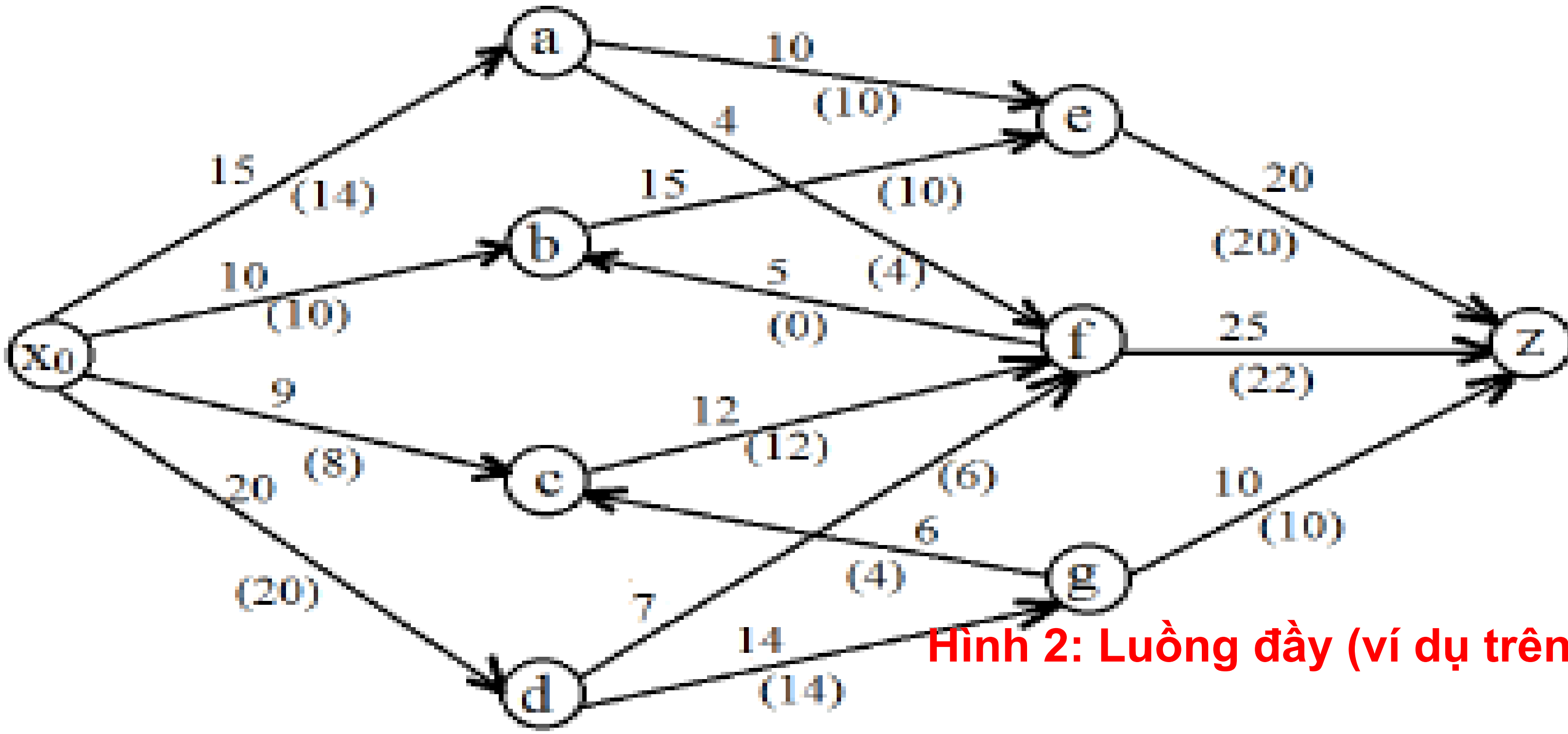
$$\begin{cases} y^+ \text{ nếu } (x_k, y) \text{ là cung thuận chưa đầy, tức là } \Phi(x_k, y) < c(x_k, y) \\ y^- \text{ nếu } (y, x_k) \text{ là cung nghịch và luồng trên cung này dương, tức là } \Phi(y, x_k) > 0. \end{cases}$$

(3) Xích $\alpha(x_0, z)$ là một xích tăng luồng khi và chỉ khi *mọi đỉnh trên xích này đều có nhãn* (hay *đánh nhãn được cho đỉnh z*).

(4) Trên luồng cực đại tìm được của G. Gọi A_0 *là tập tất cả các đỉnh có thể đánh nhãn,* $A'_0 = X \setminus A_0$. Khi đó lát cắt (A_0, A'_0) *là một lát cắt hẹp nhất* của G.

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng: Ví dụ

Xét luồng đầy Φ_2 trên mạng G thì xích $<x_0, c, g, d, f, z>$ là một xích tăng luồng.



Hình 2: Luồng đầy (ví dụ trên)

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng

Thuật toán Ford – Fulkerson tìm luồng cực đại gồm các bước mô tả như sau :

(1) : Đánh nhãn cho các đỉnh để tìm xích tăng luồng *α*, xác định lượng vật chất tăng:

$\rho = \min_{u\in\alpha}\{m(u)\}$, với *m(u)* xác định như sau:

$$m(u) = \begin{cases} c(u) - \Phi(u) & \text{nếu } u \text{ là cung thuận} \\ \Phi(u) & \text{nếu } u \text{ là cung nghịch} \end{cases}$$

(2) : Tăng luồng Φ thành Φ_1 với $Val(\Phi_1) = Val(\Phi) + \rho$ như sau:

$$\Phi_1(u) = \begin{cases} \Phi(u) & \text{nếu cung } u \notin \alpha \\ \Phi(u) + \rho & \text{nếu } u \in \alpha \text{ và } u \text{ là cung thuận} \\ \Phi(u) - \rho & \text{nếu } u \in \alpha \text{ và } u \text{ là cung nghịch} \end{cases}$$

Lặp lại (1) + (2) . Thuật toán dừng khi không tìm thấy xích tăng luồng (Hay không đánh nhãn được cho đỉnh thu *z*).

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng: ví dụ

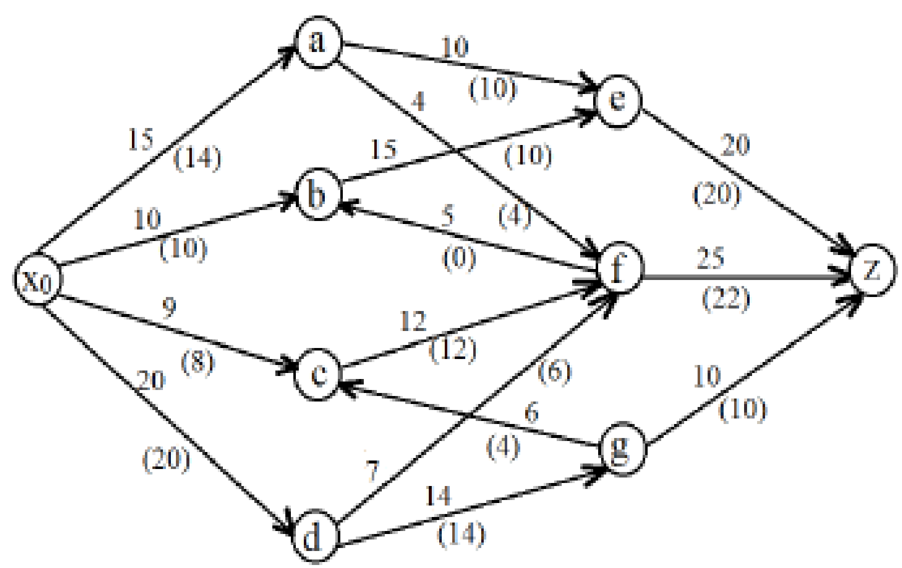
Áp dụng thuật toán Ford-Fulkerson, có thể tăng luồng Φ_2 (với xích tăng luồng $<x_0, c, g, d, f, z>$, thêm một lượng $\rho_3 = \min\{9-8; 4; 14; 7-6; 25-22\} = 1$.

Không tìm thấy xích tăng luồng, ta có luồng cực đại Φ_3

Có: $Val(\Phi_3) = Val(\Phi_3) + \rho_3 = 52+1 = 53$.

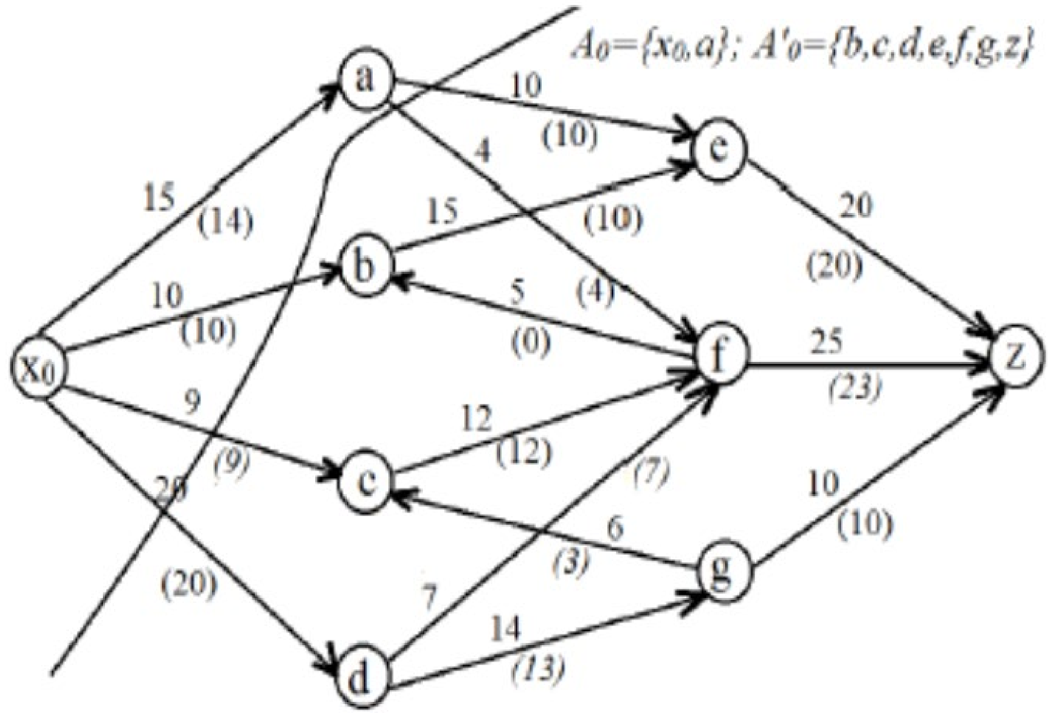
Theo Nhận xét (4), ta suy ra phân hoạch ($A_0=\{x_0,a\}$ và $A'_0=\{b,c,d,e,f,g,z\}$ là một lát cắt hẹp nhất trên mạng G này.

Có: $c(A_0,A'_0) = 53 = Val(\Phi_3)$.



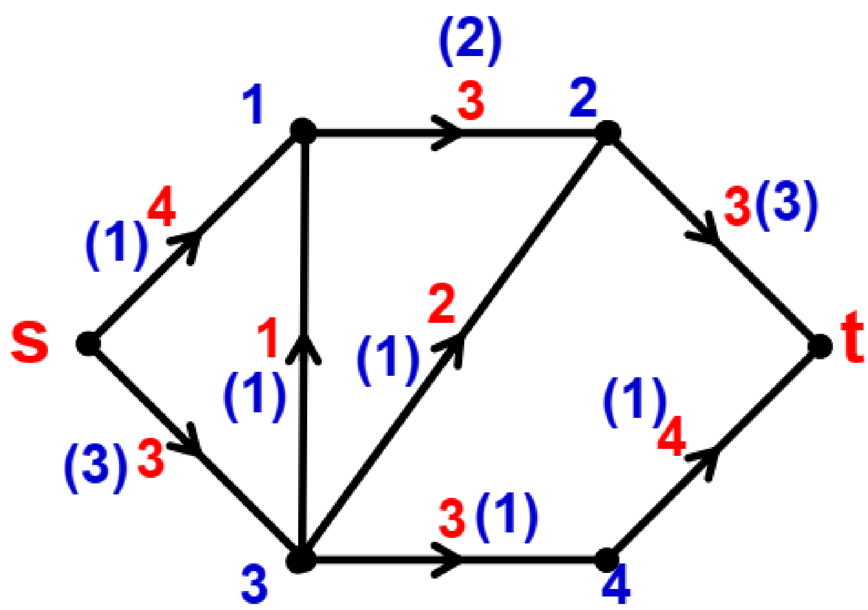
. **Luồng đầy Φ_2 trên mạng *G*.**

➢ Đồ thị tăng luồng, đường tăng luồng: ví dụ

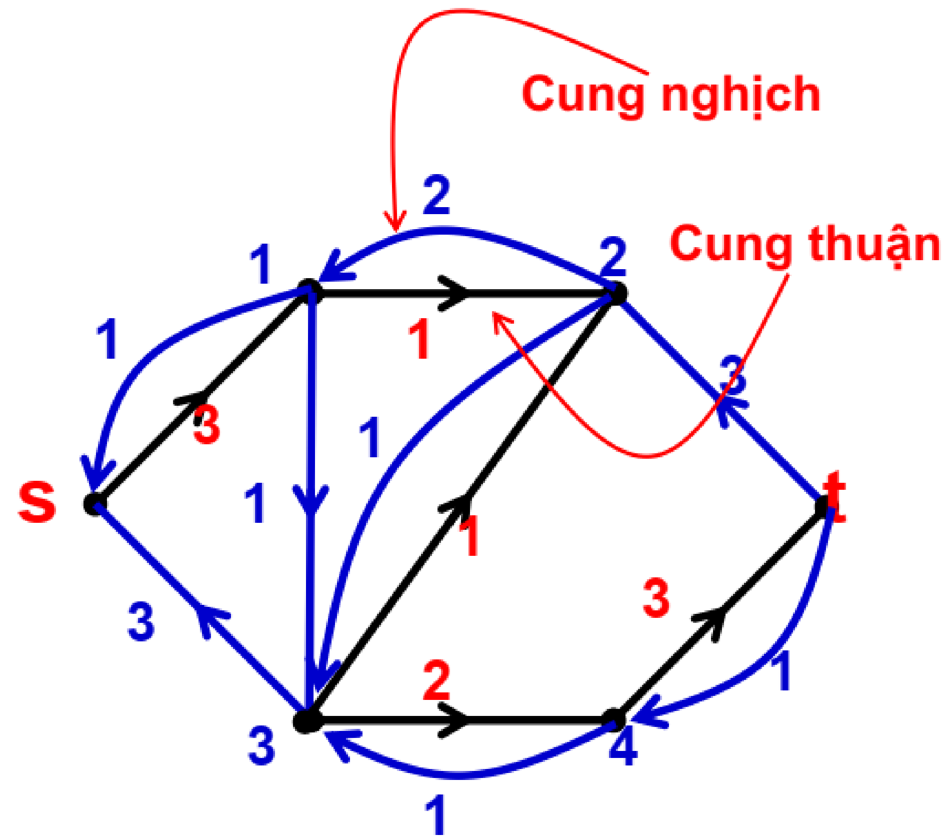


Không tìm thấy xích tăng luồng, ta có luồng cực đại Φ_3

➢ Ví dụ: Đồ thị tăng luồng

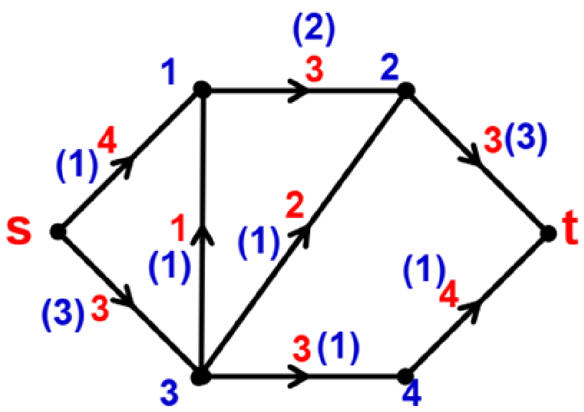


Mạng G và luồng f

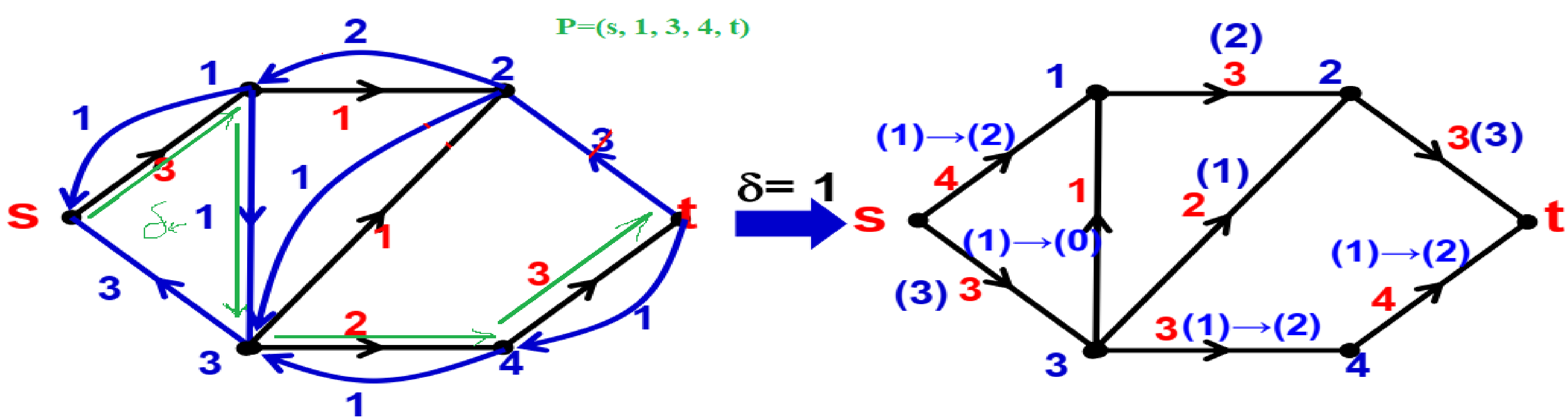


Đồ thị tăng luồng G_f

➢ Ví dụ: Tăng luồng theo đường đi



Mạng G và luồng f



Đồ thị tăng luồng G_f

Mạng G và luồng mới f'

$Val(f') = 5$

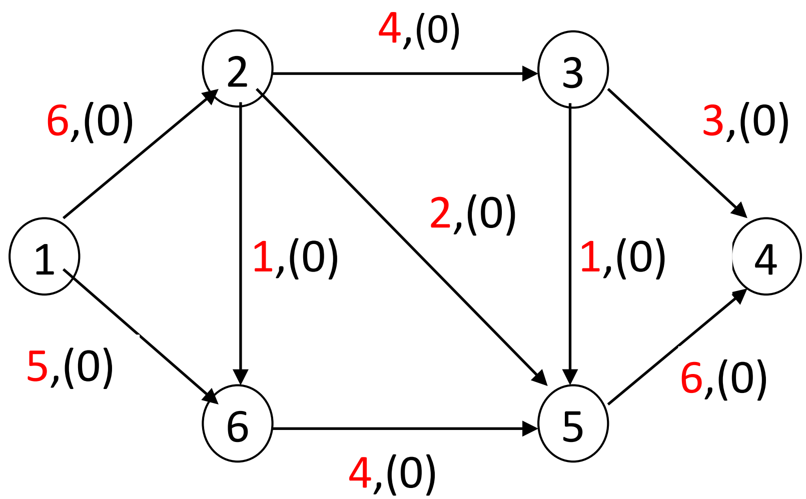
➢ Thuật toán Ford-Fulkerson (vertion 2)

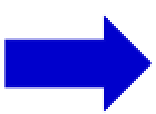
1. Bắt đầu từ một luồng f bất kỳ - có thể là luồng 0
2. Xây dựng đồ thị tăng luồng
3. Từ G, tìm đường tăng luồng P
   a) Nếu không có đường tăng luồng nào thì kết thúc.
   b) Nếu có đường tăng luồng P thì xây dựng luồng mới f'
4. Lặp lại quá trình trên cho đến khi ***không tìm thêm được đường tăng luồng mới***.

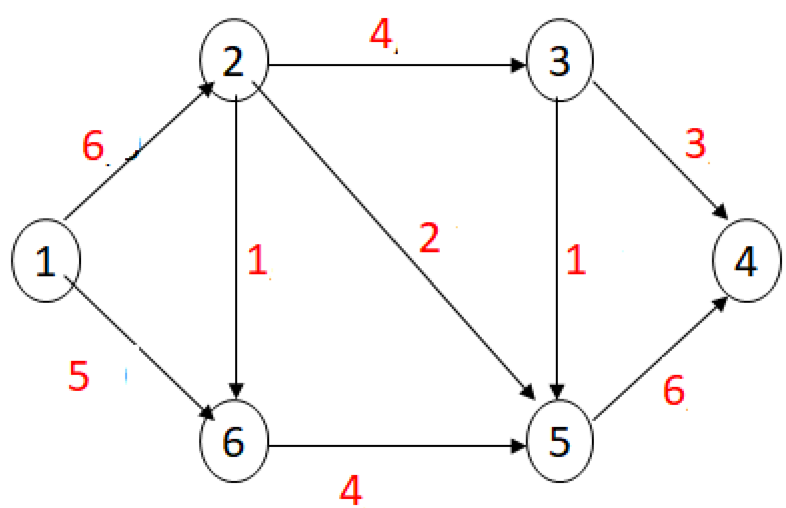
- Lát cắt hẹp nhất là (VT, V\VT) với VT là các đỉnh đã thăm trong lần tìm đường tăng luồng cuối cùng mà không thành công và khi đó f là luồng cực đại.

➢ Thuật toán Ford-Fulkerson

- **Ví dụ:** Tìm luồng cực đại trong mạng G sau (s=1, t=4):



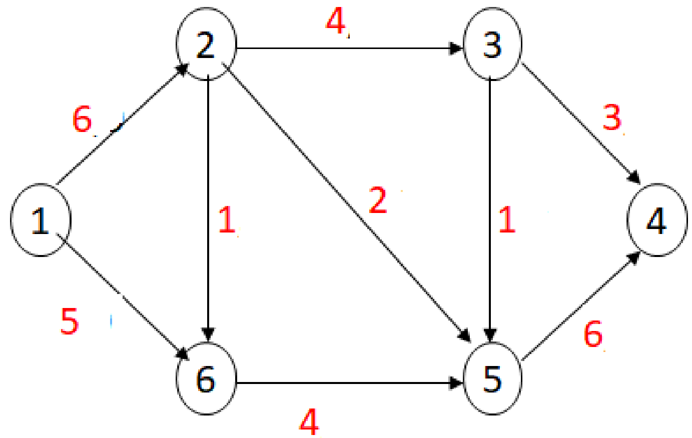




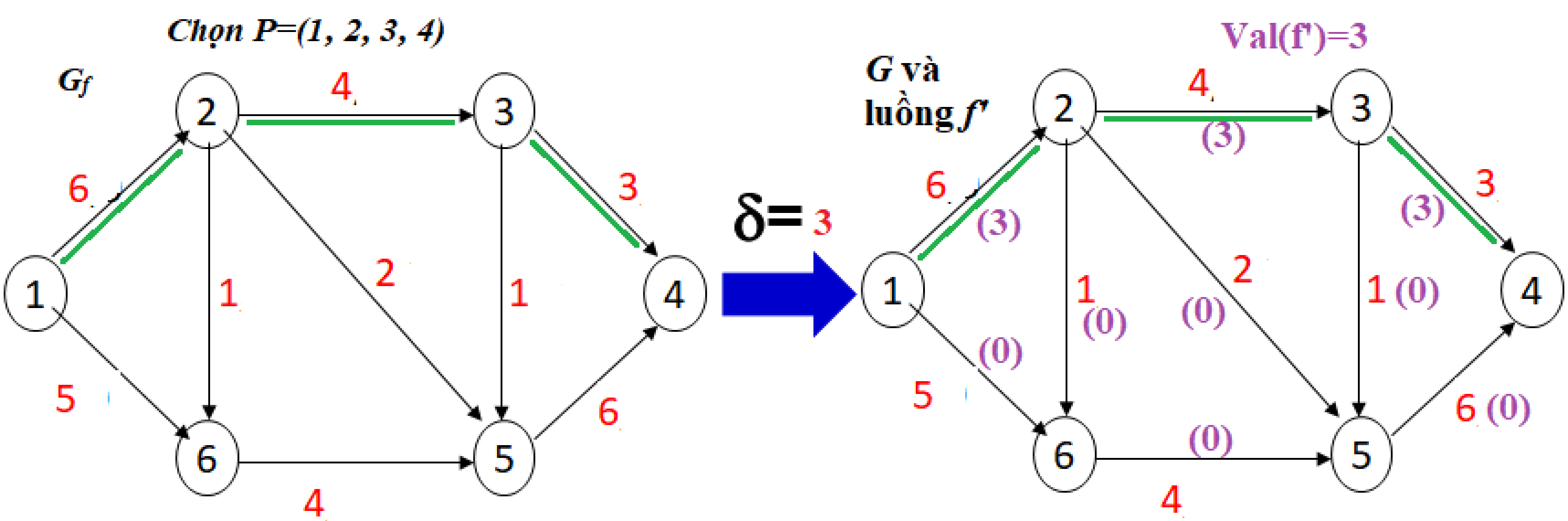
Đồ thị tăng luồng G_f với luồng 0

➢ Thuật toán Ford-Fulkerson

- **Ví dụ:** Tìm luồng cực đại trong mạng sau (s=1,t=4): (tt)

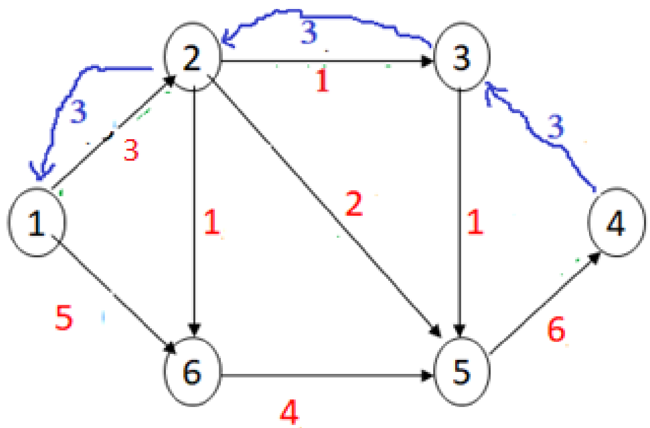


Đồ thị tăng luồng G_f với luồng 0

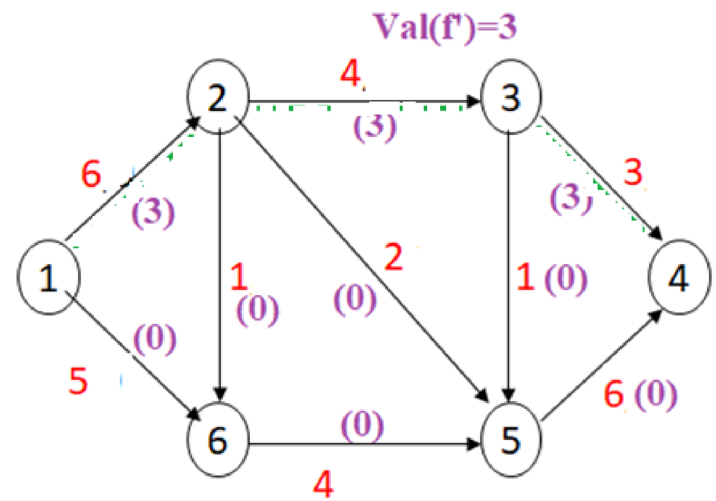


➢ Thuật toán Ford-Fulkerson

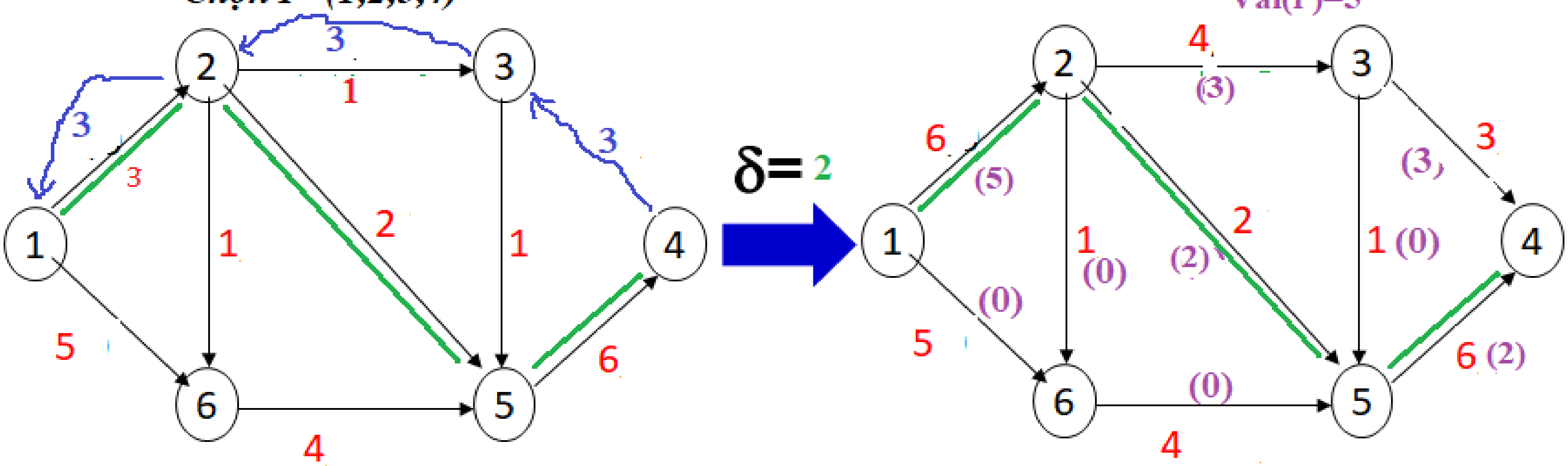
- **Ví dụ:** Tìm luồng cực đại trong mạng sau (s=1,t=4): (tt)



Đồ thị tăng luồng G_f với luồng f' trước đó



Chọn P=(1,2,5,4)

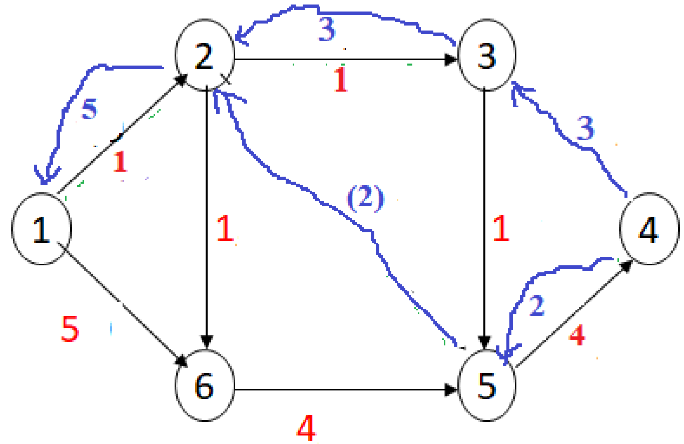


Đồ thị tăng luồng G_f với luồng f' trước đó

Mạng G và luồng f' mới

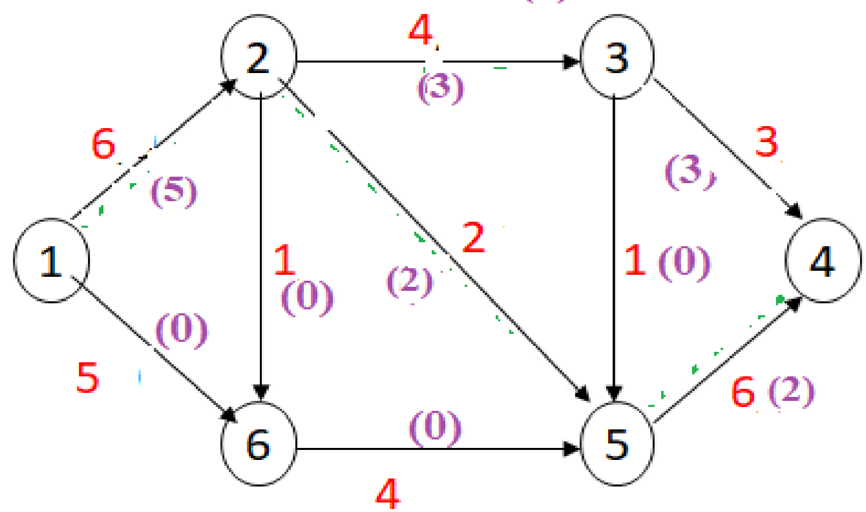
➢ Thuật toán Ford-Fulkerson

- **Ví dụ:** Tìm luồng cực đại trong mạng sau (s=1,t=4): (tt)

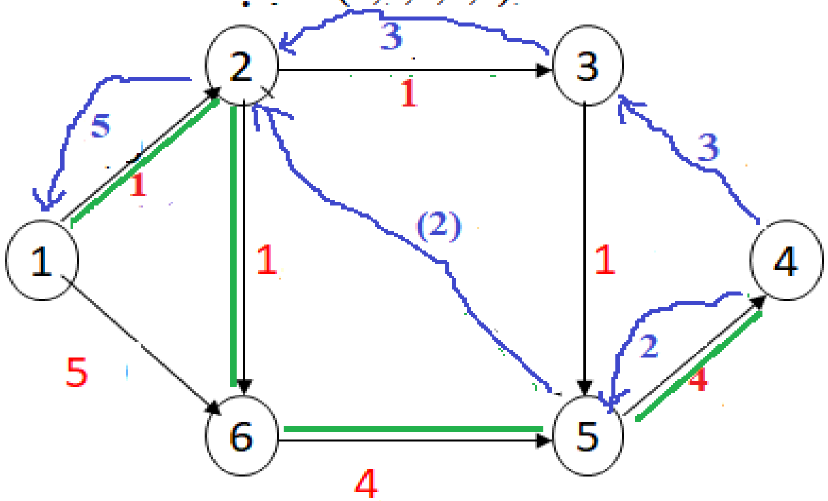


Đồ thị tăng luồng G_f với luồng f' trước đó

Val(f')=5

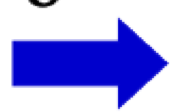


Chọn P=(1,2,6,5,4)

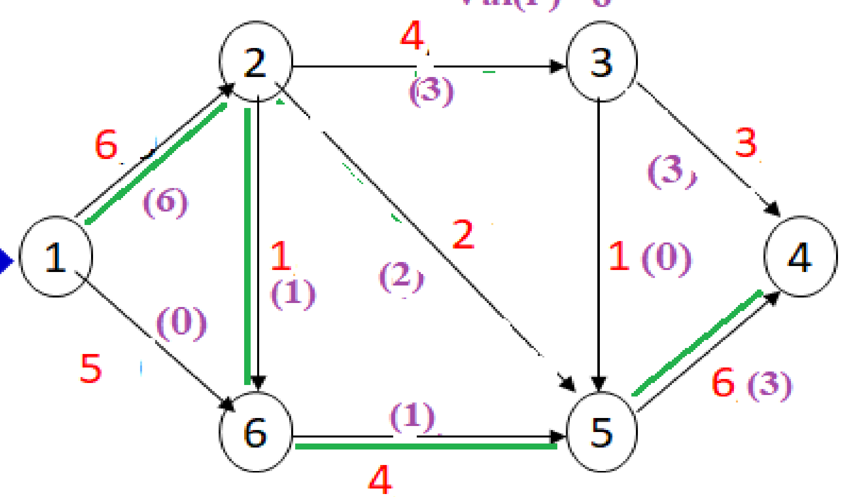


Đồ thị tăng luồng G_f với luồng f' trước đó

$\delta = 1$



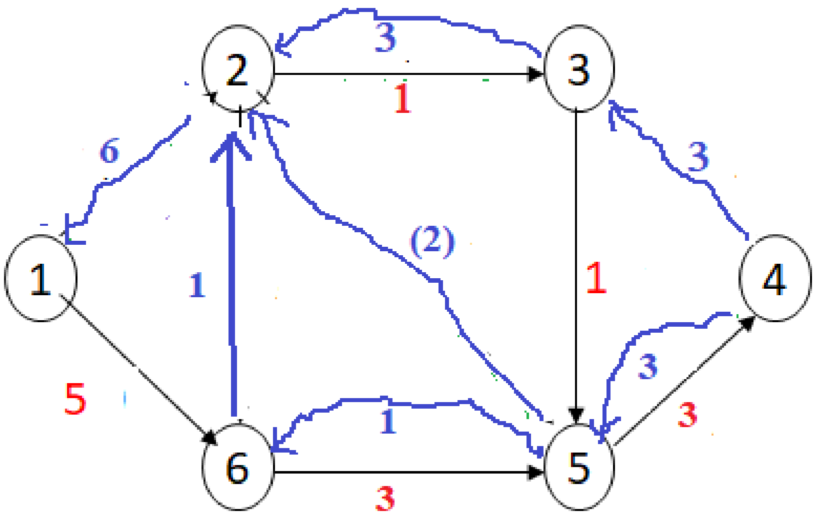
Val(f')= 6



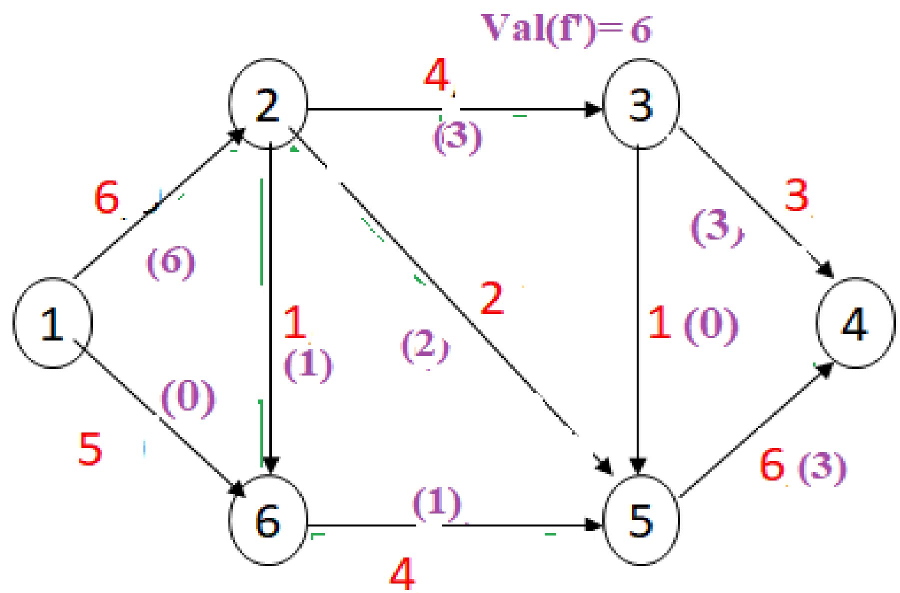
Mạng G và luồng f' mới

➢ Thuật toán Ford-Fulkerson

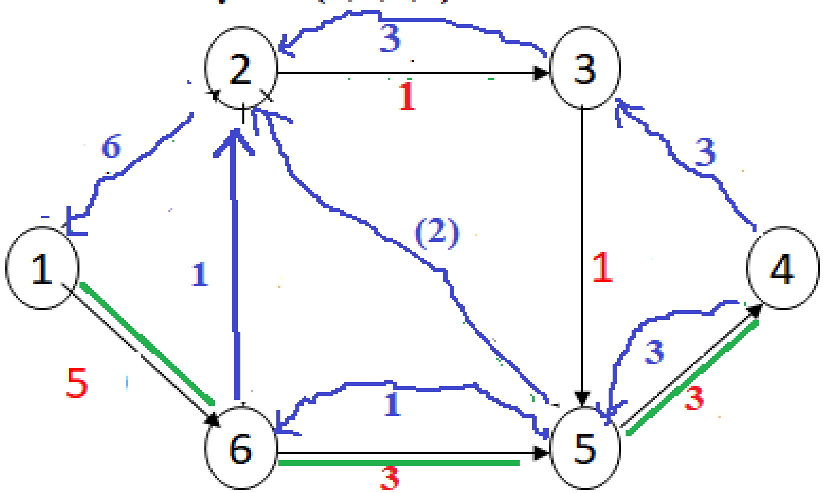
- **Ví dụ:** Tìm luồng cực đại trong mạng sau (s=1,t=4): (tt)



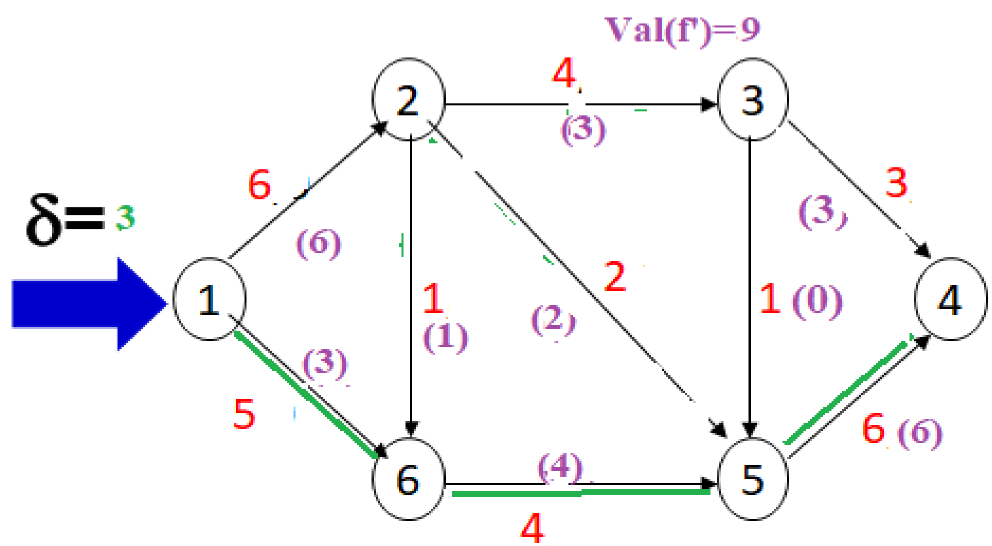
Đồ thị tăng luồng G_f với luồng f' trước đó



Chọn P=(1,6,5,4)



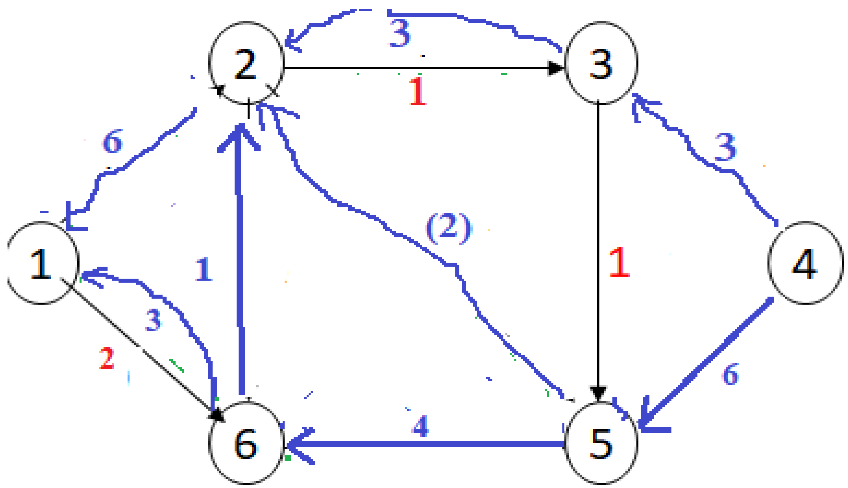
Đồ thị tăng luồng G_f với luồng f' trước đó



Mạng G và luồng f' mới

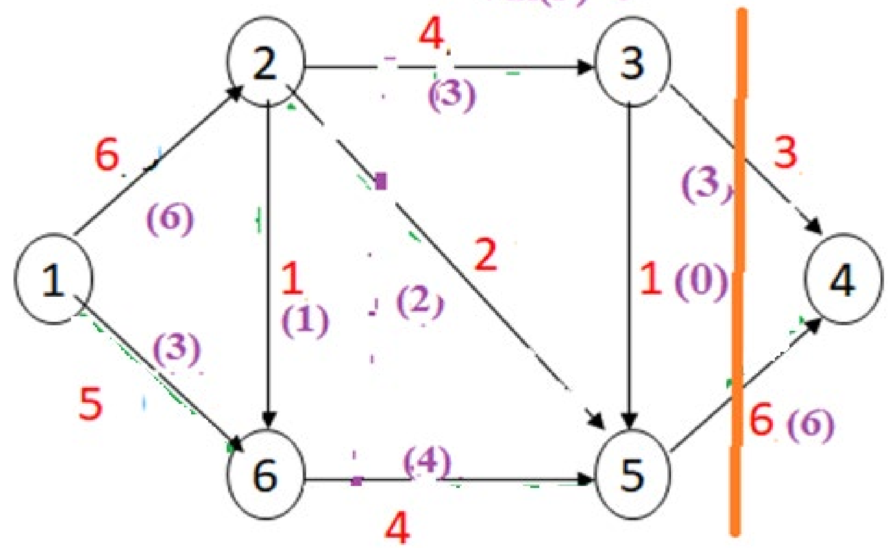
➢ Thuật toán Ford-Fulkerson

- **Ví dụ:** Tìm luồng cực đại trong mạng sau (s=1,t=4): (tt)



Đồ thị tăng luồng G_f với luồng f' trước đó

Không còn đường tăng luồng nào để chọn => Kết thúc.



Lát cắt hẹp nhất trên mạng G.

A={1,2,3,5,6}; A'={4}

Khả năng thông qua: 3+6=9

Vậy Val(f)=9 là luồng cực đại.

➢ Thuật toán Ford-Fulkerson: cài đặt

- Thuật toán không cần xây dựng đồ thị tường minh G_f mà vẫn tìm được đường tăng luồng, bằng cách dùng thuật toán BFS (hoặc DFS) và lần lượt gán nhãn [±p(v), d(v)] cho các đỉnh ***v***, với :
  - p(v) là đỉnh ngay trước đỉnh ***v*** trên đường tăng luồng từ *s tới v*.
    - +p(v): cần tăng luồng theo cung (p(v), v)
    - -p(v): cần giảm luồng theo cung (v, p(v))
  - d(v): giá trị lớn nhất có thể tăng luồng trên cung (p(v), v) hoặc giảm luồng trên cung (v, p(v)).

➢ Thuật toán Ford-Fulkerson: cài đặt

Thuật toán tìm đường tăng luồng

```
int Find_Path(){
gán tất cả các đỉnh là chưa thăm ;
queue= ; queue ← s ; p[s]=s ; d[s]=+vc ;tham[s]=true;
while (queue!=ϕ){
u ← queue;
for (v chua tham) {
    if  ( (c[u,v]>0)&&( f[u,v] <c[u,v]) ){ // Gf co cung thuan (u,v)
    p[v]=u; d[v]=min {d[u], c[u,v] – f[u,v]};
    if (v == t)  return 1;
    queue ←; tham[v]=true;
    }
if  ( (c[v,u]>0)&&(f[v,u]>0){ //co cung nghich (u,v)
    p[v]=-u; d[v]=min {d[u], f[v,u]} ;
    If (v == t) return 1;
    queue←v; tham[v]=true;
}
}
}
return 0;
}
```

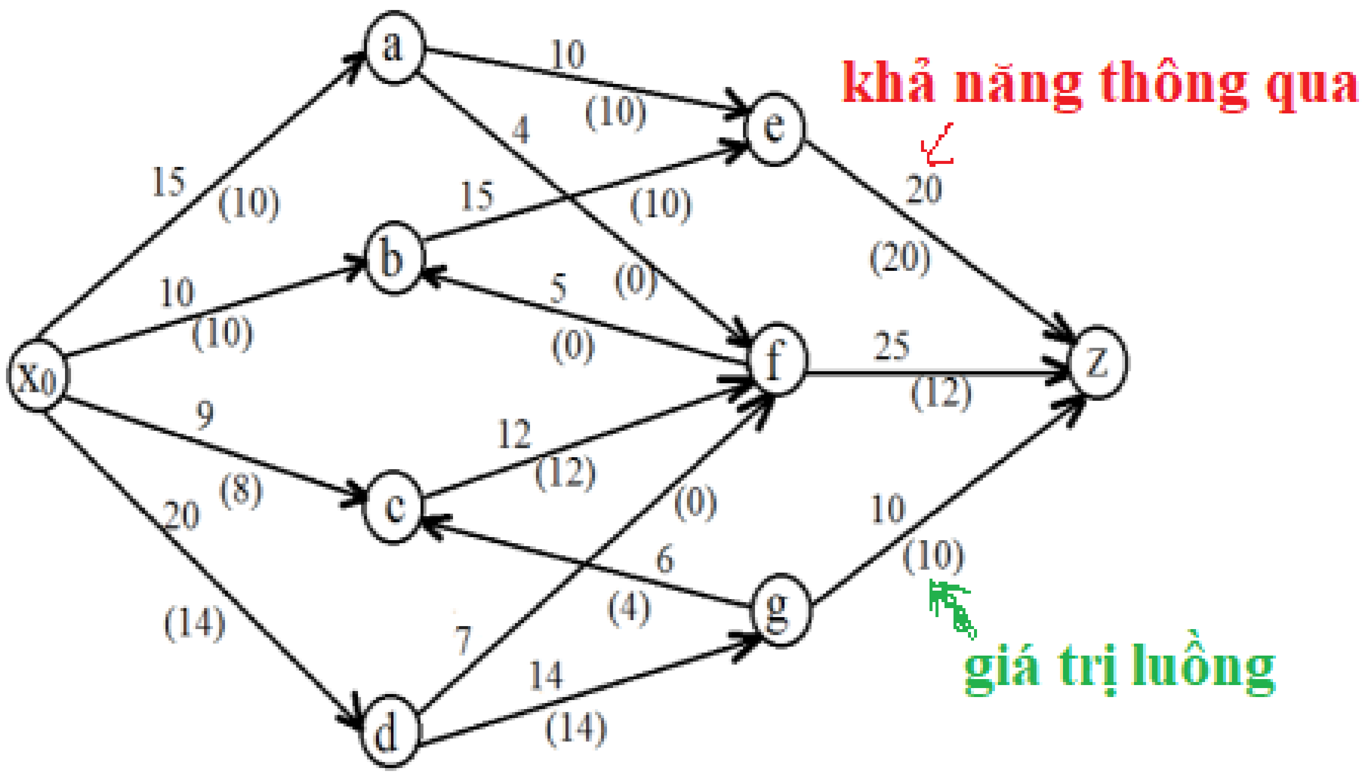
Thuật toán tăng luồng

```
void Inc_Flow(){
v=p[t]; u=t; tang=d[t];
while (u!=s){
if (v>0) f[v,u] = f[v,u] + tang;
else{
v = -v; f[u,v] = f[u,v] - tang;
}
u = v; v = p[u];
}
}
```

Thuật toán tìm luồng cực đại

```
void Max_Flow()
{//luong ban dau la luong khong
for (u ∈V)
for (v ∈ V)  f(u,v)=0;
stop=0;
while (!stop)
if  (Find_Path())  Inc_Flow();
else stop=1;
}
```

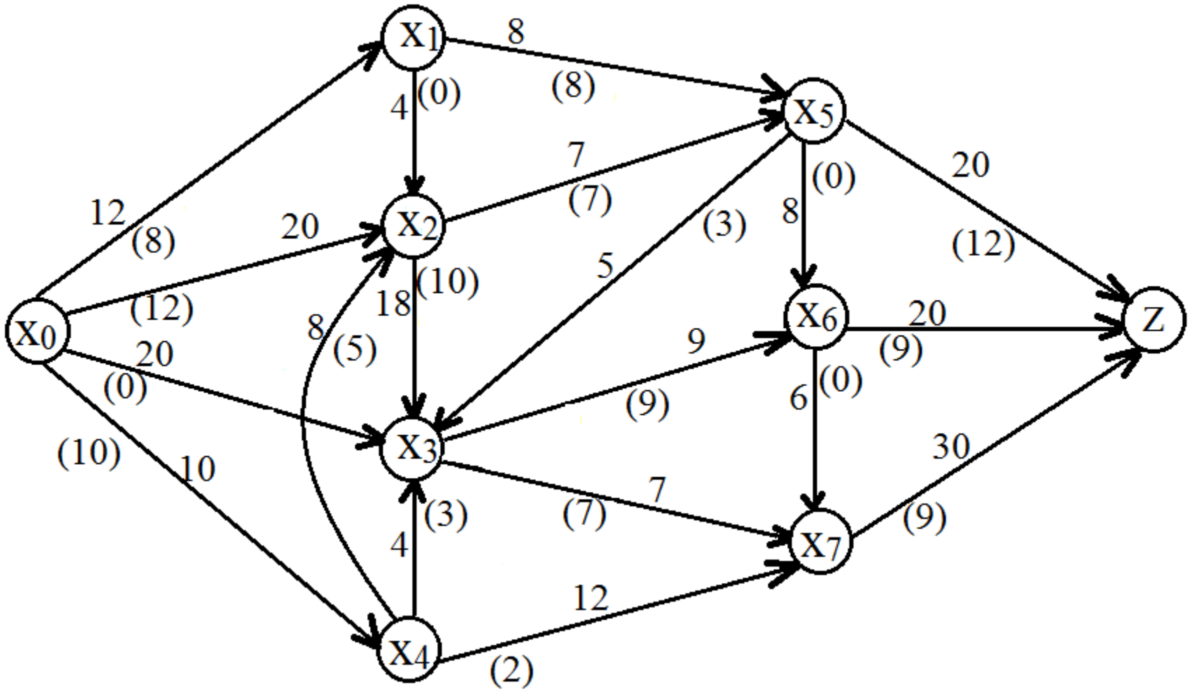
Bài tập 1



1. Cho mạng G và luồng Φ, hãy kiểm tra tính chất của luồng Φ:
   a) Điều kiện trên cung
   b) Điều kiện cân bằng trên mỗi đỉnh
   c) Giá trị luồng Φ (Val(Φ)=?).
2. Xây dựng Đồ thi tăng luồng cho mạng G trên.

Bài tập 2

- *Cho luồng đầy f trên mạng G như sau:*



- *Hãy áp dụng Thuật toán Ford-Fulkerson tìm luồng cực đại f* từ luồng f trên mạng này. Từ đó xác định một lát cắt hẹp nhất của mạng G.*

Bài tập 3

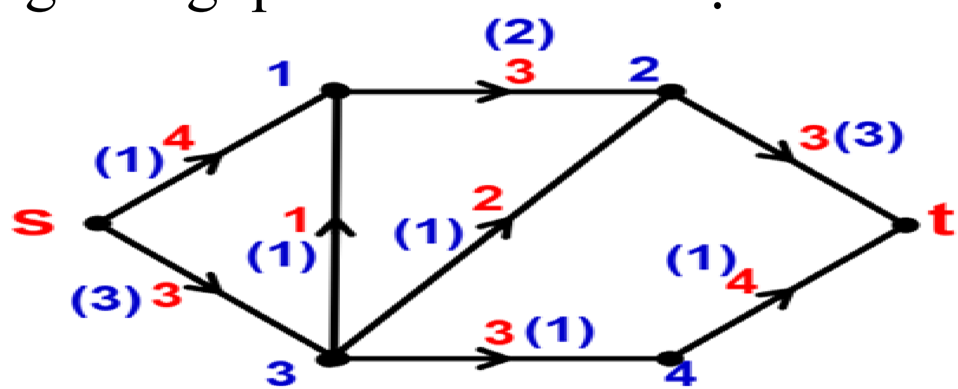
1/ Phân biệt giống và khác nhau giữa đồ thị có chu trình Euler và Chu trình Haminton.

2/Cho đồ thị sau: G (V, U)

a) Đồ thị trên là đồ thị dạng nào (có hướng; vô hướng; có trọng số; không trọng số; mạng; luồng. Tính Deg+ (V) và Deg $^{-}$ (V); cho nhận xét gì về các giá trị đó.

b) Đồ thị trên có thể áp dụng các phương pháp nào để tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trên đồ thị? Tại sao?. Hãy thực hiện một trong các phương pháp đó

c) Cho lát cắt A1 = {S,1}; A2 = V \ A1 = {t,2,3,4}. Tính giá trị của luồng (Val); và khả năng thông qua lát cắt ở đồ thị trên.



Mạng *G* và luồng *f*