Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen werden definiert als die Summe aus einer reellen Zahl a und dem Produkt einer weiteren reellen Zahl b mit der imaginären Zahl i.

$$c := a + b \cdot i$$

$$a, b \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{C}$$

Beispiel: $1 + 2i$

$$-1.5 + 1i$$

$$1 - 1.5i$$

Imaginäre Zahlen

Imaginäre Zahlen wurden in der Mathematik definiert, um folgende Gleichung lösen zu können:

$$x^2 + 1 = 0$$

Umformung:

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 = 0 && \mid -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = -1 && \mid \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1/2} = \pm\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Imaginäre Zahlen

Problem:

Das Quadrat egal welcher (reellen) Zahl (negativ oder positiv) ergibt immer eine positive Zahl:

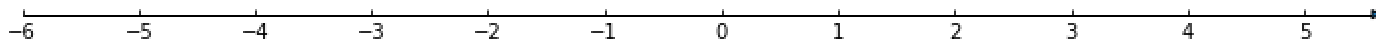
$(-a)^2 = a^2$

$a^2 = a^2$

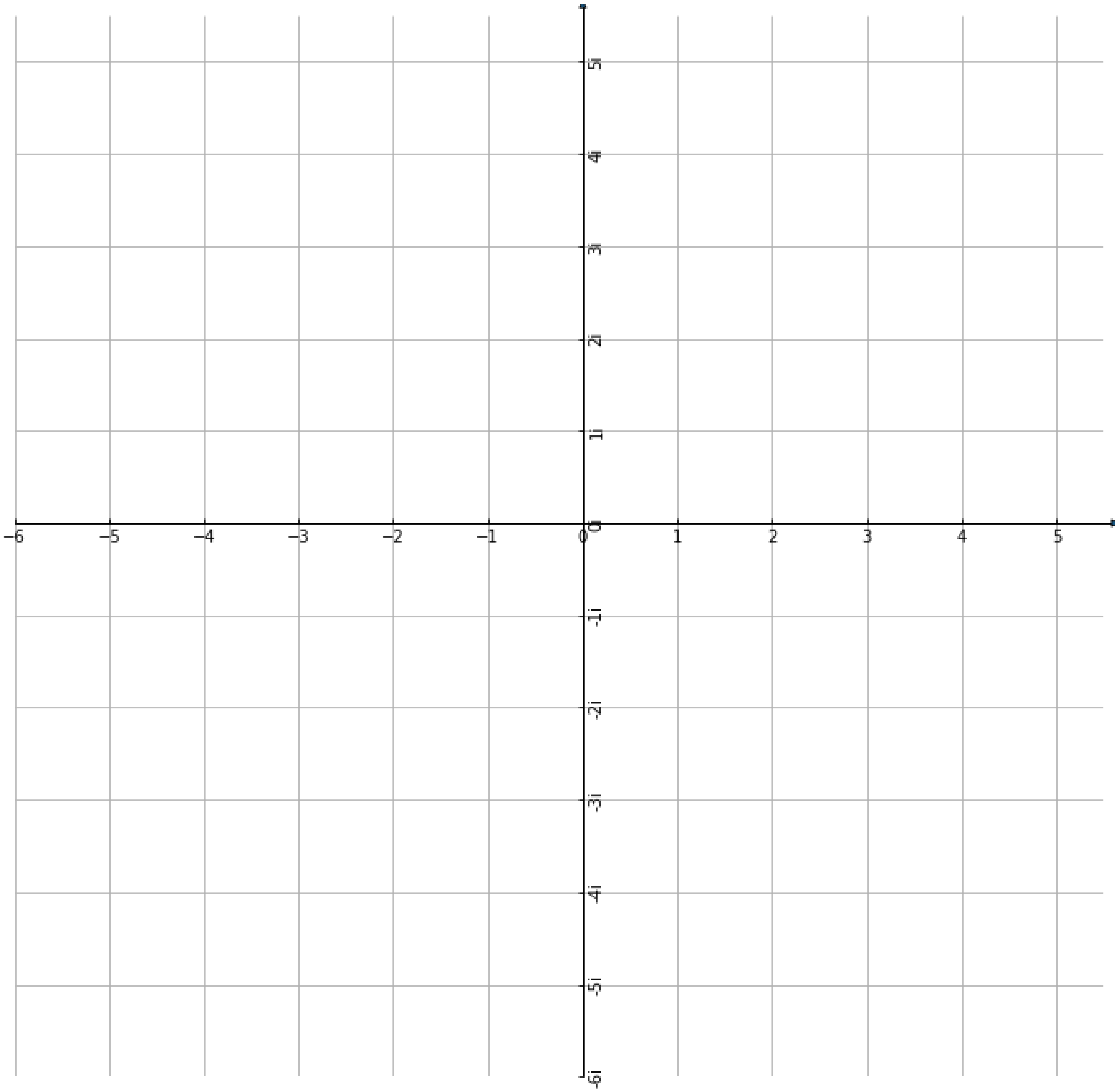
Deshalb wird die imaginäre Zahl i definiert:

$i = \sqrt{-1}$ oder $i^2 = -1$

Reelle Zahlen


−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

Komplexe Zahlen



5i
4i
3i
2i
1i
0i
-1i
-2i
-3i
-4i
-5i
-6i
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

Operationen mit komplexen Zahlen

Operationen mit komplexen Zahlen

$c = a + b \cdot i$

Addition:

$a + b = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$

Operationen mit komplexen Zahlen

Multiplikation:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= (x + yi) \cdot (u + vi) \\
&= x(u + vi) + yi(u + vi) \\
&= xu + xvi + yiu + yivi \\
&= xu + yivi + xvi + yiu \\
&= xu + yvi^2 + xvi + yui \\
&= (xu + yvi^2) + (xvi + yui) \\
&= (xu - yv) + (xvi + yui) \\
&= (xu - yv) + (xv + yu)i
\end{aligned}
$$