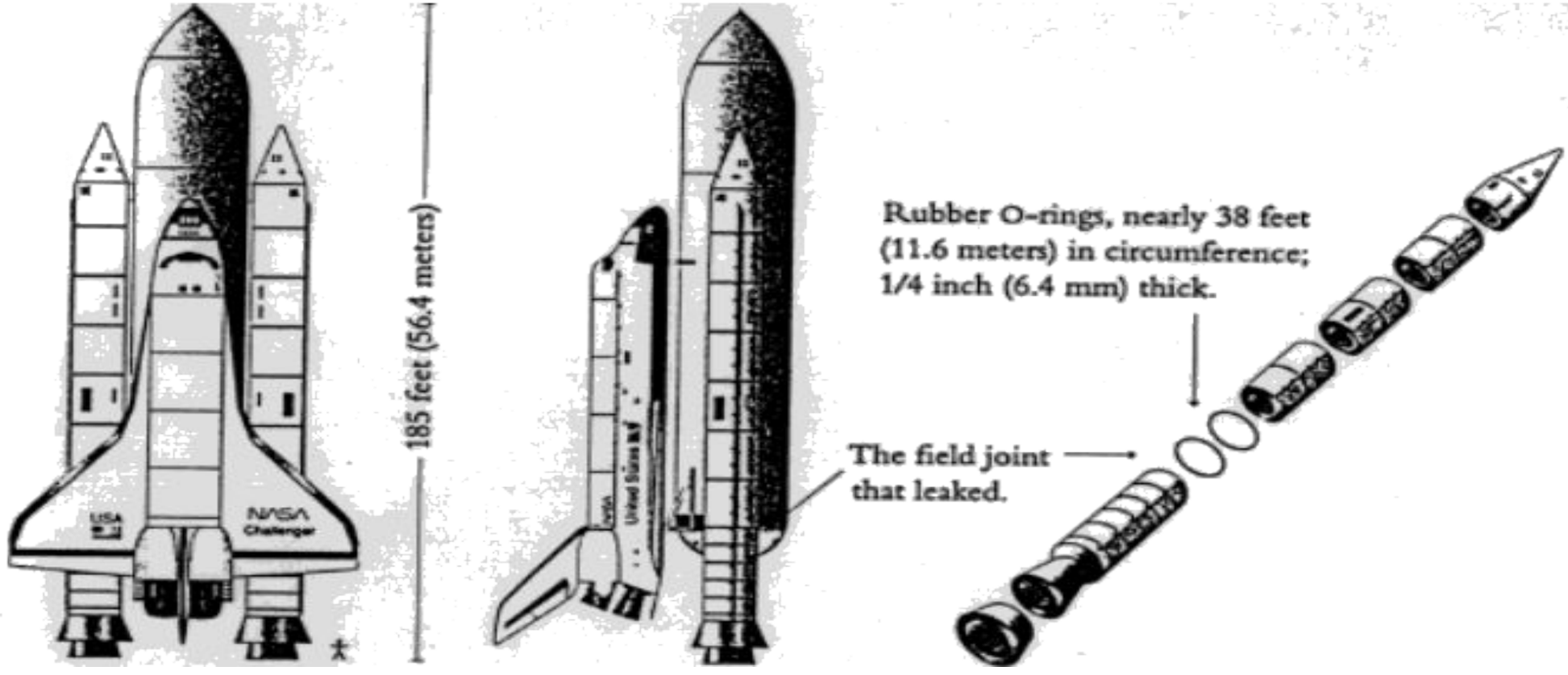
Mô hình hồi quy logistic

TS. Lưu Phúc Lợi
Trưởng phòng Nghiên cứu khoa học
Viện ARiHA

Challenger O-Rings



The challenger shuttle disaster

Flight	Temp	Damage
STS-1	66	0
STS-2	70	1
STS-3	69	0
STS-4	80	.
STS-5	68	0
STS-6	67	0
STS-7	72	0
STS-8	73	0
STS-9	70	0
STS 41B	57	1
STS 41C	63	1
STS 41D	70	1
STS 41G	78	0
STS 51A	67	0
STS 51C	53	1
STS 51D	67	0

Flight	Temp	Damage
STS 51B	75	0
STS 51G	70	0
STS 51F	81	0
STS 51I	76	0
STS 51J	79	0
STS 61A	75	1
STS 61B	76	0
STS 61C	58	1

```
Temp = c(66, 70, 69, 80, 68, 67,
72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 67,
53, 67, 75, 70, 81, 76, 79, 75,
76, 58)

Damage = c(0, 1, 0, ., 0, 0, 0,
0,0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
0,0, 0, 1, 0, 1)
```

Đặc tính nghiên cứu

- **Outcome (dependent) variable**: biến nhị phân (binary variable), chỉ có 2 giá trị
- **Predictor (independent) variables**: đa dạng (nhị phân, biến liên tục)

Không thể dùng mô hình hồi qui tuyến tính!

Ứng dụng của mô hình hồi quy logistic

- Mô tả mối liên quan giữa biến outcome và biến tiên lượng
- Kiểm soát các biến nhiễu (Controlling for confounders)
- Phát triển mô hình tiên lượng (Developing prognostic models)

Khi nào cần dùng mô hình hồi quy logistic

- Logistic regression:
  - outcome là biến phân loại (thường có 2 giá trị yes/no)
  - biến tiên lượng có thể là biến phân loại hay liên tục
- Mô hình hồi qui tuyến tính (Linear regression)
  - biến outcome là biến liên tục
  - biến tiên lượng có thể là biến phân loại hay liên tục

Khái niệm cơ bản: odds và logit

Risk và Odds

- Risk: probability (P) of an event [during a period] – xác suất của một biến cố trong một thời gian
- Odds: xác suất biến cố xảy ra chia cho xác suất biến cố không xảy ra:

$$Odds = \frac{P}{1-P}$$

n = 5 bệnh nhân, 1 bệnh nhân bị đột quị:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$Odds = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

Tỉ số Odds

- Odds là khái niệm tương đối mới (từ J Cornfield, Johns Hopkins University, Chủ tịch American Statistical Association (1974)
- Odds là tỉ số 2 xác suất
- Odds ratio (OR hay tỉ số odds) là tỉ số 2 odds
- Khái niệm OR có thể áp dụng để so sánh tỉ lệ giữa 2 nhóm

Jerome Cornfield
(1912 – 1979)

Xác suất, odds, logit

- Xác suất: từ 0 đến 1
- Odds: biến liên tục

  Khi P = 0.5, odds = 1
- Logit = log odds

$$logit\,(P) = log\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

Mô hình hồi quy logistic dựa trên logit

- Gọi *X* là biến tiên lượng
- Gọi *P* là xác suất của một biến cố (outcome)
- Mô hình hồi qui logistic phát biểu rằng:

$$logit(P) = \alpha + \beta X$$

hay

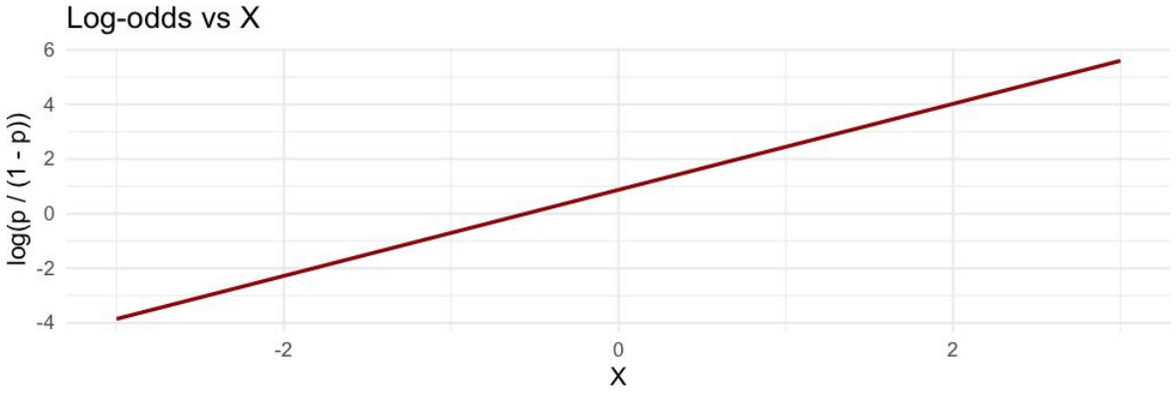
$$log\left(\frac{P}{1-P}\right) = \alpha + \beta X$$

Hồi quy logistic

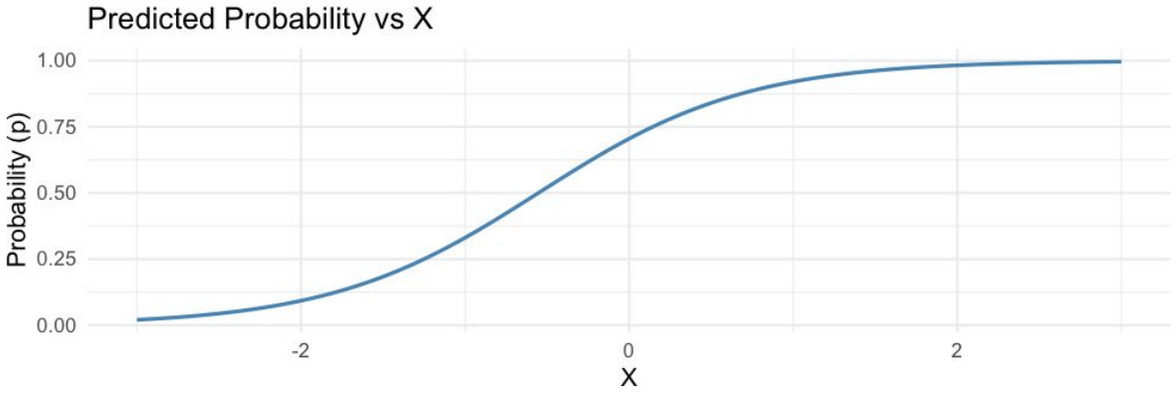
$$log\left(\frac{P}{1-P}\right) = \alpha + \beta X$$

Điều này cũng có nghĩa là:

$$P = \frac{exp\quad(\alpha + \beta X)}{1 + exp\,(\alpha + \beta X)}$$



$$logit\left(\frac{P}{1-P}\right) = \alpha + \beta X$$



$$P = \frac{exp\quad(\alpha + \beta X)}{1 + exp(\alpha + \beta X)}$$

Ý nghĩa tham số

$$log\left(\frac{P}{1-P}\right) = \alpha + \beta X$$

- α là log odds của biến outcome khi X = 0
- β là log odds ratio (tỉ số) liên quan với một đơn vị tăng của X
- Odds ratio = e^{β}

Ưu điểm của mô hình hồi quy logistic

- Xác suất của outcome có thể thay đổi với giá trị của biến tiên lượng
- Hệ số có thể diễn giải như là log odds ratio
- Có thể áp dụng cho nhiều mô hình nghiên cứu
- Nhiều software có thể dùng để ước tính tham số

Ước tính tham số

Triển khai trong hàm R “`glm`” và “`lrm`” (trong package `rms`)

Hàm glm trong baseR

- Công thức chung:

```
m = glm(outcome ~ riskfactor, family = binomial)
```

outcome có giá trị (0, 1)

riskfactor – bất cứ biến nào

- Có có khoảng tin cậy 95% OR:

```
library(epiDisplay)

logistic.display(m)
```

Hàm `glm` trong `package rms`

- **`Package rms`** – Frank Harrell (regression modeling strategies)
- **`Hàm lrm`** – logistic regression model

```
lrm(outcome ~ factor1 + factor2 + ...)
```

Hàm `logit` trong `package lessR`

`Package lessR` cũng có thể dùng để ước tính tham số mô hình hồi qui logistic qua hàm `Logit`

```
library(lessR)

Logit(outcome ~ factor1 + factor2 + ...)
```

Phân tích với package

`lessR`

Ví dụ: Nghiên cứu đột quỵ có khác biệt giữa nam & nữ?

- **Câu hỏi nghiên cứu**: nguy cơ đột quỵ có khác biệt giữa nam và nữ?
- **Mô hình hồi qui logistic:** gọi *p* là xác suất bị đột quỵ, và gender là yếu tố nguy cơ, mô hình là

$$log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \alpha + \beta \times gender$$

```
df = read.csv("content/Stroke_Data.csv")
```

```
> head(df)
   id gender age hypertension heart.disease ever.married work.type Residence.type glucose.level  bmi         smoking stroke
1  67 Female  17            0             0           No   Private          Urban         92.97   NA formerly smoked      0
2  77 Female  13            0             0           No  children          Rural         85.81 18.6         Unknown      0
3  84   Male  55            0             0          Yes   Private          Urban         89.17 31.5    never smoked      0
4  91 Female  42            0             0           No   Private          Urban         98.53 18.5    never smoked      0
5  99 Female  31            0             0           No   Private          Urban        108.89 52.3         Unknown      0
6 121 Female  38            0             0          Yes   Private          Urban         91.44   NA         Unknown      0
```

```
install.packages("lessR")

df = read.csv("/content/Stroke_Data.csv")


library(lessR)


fit = Logit(stroke ~ gender, brief=T, data=df)
```

Output from lessR

```
-- Estimated Model of stroke for the Logit of Reference Group
Membership
              Estimate    Std Err  z-value  p-value   Lower 95%   Upper 95%
(Intercept)   -3.0074     0.0863  -34.862    0.000     -3.1764     -2.8383
 genderMale    0.0846     0.1311    0.645    0.519     -0.1724      0.3416


-- Odds Ratios and Confidence
Intervals
              Odds Ratio   Lower 95%   Upper 95%
(Intercept)       0.0494      0.0417      0.0585
genderMale    1.0883 0.8416 1.4072
```

exp(0.0846) = 1.088

$$log\left(\frac{p}{1-p}\right) = -3.01 + 0.0846 \times gender(male = 1, female = 0)$$

Diễn giải: Odds bị đột quị ở nam giới cao hơn nữ giới 1.09 lần, với khoảng tin cậy 95% dao động từ 0.84 đến 1.41.

Ví dụ: Nghiên cứu đột quỵ có khác biệt giữa tuổi?

- **Câu hỏi nghiên cứu**: nguy cơ đột quị có tăng theo độ tuổi?
- Mô hình hồi qui logistic bây giờ là

$$log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \alpha + \beta \times age$$

```
fit = Logit(stroke ~ age, brief=T, data=df)
```

```
-- Estimated Model of stroke for the Logit of Reference Group Membership

             Estimate   Std Err    z-value    p-value    Lower 95% Upper 95%
(Intercept)   -7.2314    0.3350   -21.588      0.000      -7.8880    -6.5749
        age    0.0747    0.0049    15.181      0.000       0.0651     0.0844


-- Odds Ratios and Confidence
Intervals
             Odds Ratio    Lower 95%    Upper 95%
(Intercept)      0.0007       0.0004       0.0014
        age   1.0776 1.0672 1.0880
```

exp(0.0747) = 1.078

$$log\left(\frac{p}{1-p}\right) = -7.23 + 0.0747 \times age$$

Diễn giải: Mỗi 1 tuổi tăng lên có liên quan đến tăng odds bị đột quị 8% (OR 1.08; khoảng tin cậy 95% dao động từ 1.07 đến 1.09).

Cách viết báo cáo

Variable	Unit	OR (G5% CI)	P-value
Sex	Men vs women	1.09 (0.84 – 1.41)	0.519
Age	+1 yr	1.08 (1.07 – 1.09)	<0.0001

Ứng dụng AI

Prompt: Tôi có hai biến số: biến tiên lượng là age và gender, và biến phụ thuộc stroke trong dataset tên là df. Tôi muốn tìm hiểu sự ảnh hưởng của hai yếu tố này đến stroke qua `package lessR`.

```
fit = Logit(stroke ~ age + gender, data = df)
```

BASIC ANALYSIS

-- Estimated Model of stroke for the Logit of Reference Group Membership

	Estimate	Std Err	z-value	p-value	Lower 95%	Upper 95%
(Intercept)	-7.2834	0.3418	-21.308	0.000	-7.9533	-6.6134
age	0.0748	0.0049	15.167	0.000	0.0651	0.0844
genderMale	0.1153	0.1374	0.839	0.401	-0.1539	0.3845

-- Odds Ratios and Confidence Intervals

	Odds Ratio	Lower 95%	Upper 95%
(Intercept)	0.0007	0.0004	0.0013
age	**1.0776**	**1.0673**	**1.0881**
genderMale	**1.1222**	**0.8573**	**1.4689**

-- Model Fit

Null deviance: 1990.373 on 5109 degrees of freedom
Residual deviance: 1615.595 on 5107 degrees of freedom

AIC: 1621.595

Thông điệp mang về

- Mô hình: $logit\left(\frac{p}{1-p}\right) = \alpha + \beta X$
- Mô hình áp dụng cho biến outcome là nhị phân (yes/no)
- Có thể ứng dụng cho các nghiên cứu cắt ngang, đoàn hệ, bệnh chứng
- Triển khai trong R: hàm glm, hàm Logit trong package lessR