Examen partiel - 13 novembre 2020

Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices ainsi que tous les dispositifs électroniques sont strictement interdits. Toutes les réponses doivent être rédigées et justifiées.

Exercice 1. Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des assertions mathématiques données.

1. P et (non Q),
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y^2$,
3. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$,
4. P ou (Q et R),
5. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^3$,
6. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Exercice 2. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme algébrique $a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}, \frac{1}{(1+2i)(3-i)}.$$

Exercice 3. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme exponentielle (polaire)

$$1 + i, -1 - i\sqrt{3}.$$

Exercice 4. Calculer les solutions de l'équation $z^2 = a$ pour $a = 3 + 4i$ et $a = 7 - 24i$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ;$$

$$z^2 + (-3+i)z + 8 + i = 0 \ .$$

Exercice 6. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Déterminer $f([1, 2])$ et $f^{-1}(]4, 6])$.
2. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? On justifiera chaque réponse avec soin.

Exercice 7. Soit x un nombre entier non nul.

1. Montrer qu'on a $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.
2. Soit n un entier satisfaisant $n \geqslant 1$. Calculer
$$\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k(k+1)}.$$
3. Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 3$. Montrer l'égalité
$$\prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1).(n-1)!}{3}.$$

Exercice 8. Pour chacun des énoncés suivants, dire si en complétant par $\forall$ et $\exists$ ceux-ci sont vrais (il y a donc deux énoncés possibles pour le premier, deux pour le second et quatre pour le troisième). Lorsque l'énoncé obtenu est vrai, on le démontrera.

1. ... $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$;
2. ... $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3x - 3 = 0$;
3. ... $x \in \mathbb{R}$, ... $y \in \mathbb{R}$, $y > x^2$.

Exercice 9. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre entier $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 . (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$).

Exercice 10. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une fonction. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes (indication : on pourra, par exemple, montrer que les implications $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$ sont vraies) :

i. f est injective ;
ii. $\forall A, B \subset X \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
iii. $\forall A, B \subset X \ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.