
TD4 : Estimation et Intervalles de confiance

Objectifs : Savoir estimer de façon ponctuelle ou par intervalle le ou les paramètres d'un modèle. On se limite aux modèle normal et de Bernoulli.

Exercice 4.1 :

Une étude sur une variable X de loi Gaussienne a donné les résultats suivants sur 18 individus : 75, 77, 78, 77, 77, 72, 72, 72, 70, 71, 69, 69, 68, 66, 64, 66, 62, 61.

1. Calculer une estimation sans biais de la moyenne et comparer avec la moyenne empirique.
2. Calculer une estimation sans biais de la variance, et comparer avec la variance empirique.
3. Calculer l'intervalle de confiance de la moyenne au niveau de 95%.

Exercice 4.2 :

Le taux de nitrates X a été relevé dans les eaux de robinet d'une grande ville, 20 prélèvements ont été effectués (mesurés en mg/L). On suppose que X suit une loi gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 , tous deux inconnus. Les mesures ont donné : $\sum x_i = 684$ et $\sum x_i^2 = 25395$.

1. Calculer la moyenne empirique, la variance empirique, la moyenne estimée et la variance estimée sans biais de cet échantillon.
2. Donner un intervalle de confiance de niveau 99% pour μ .
3. Donner un intervalle de confiance de niveau 99% pour σ^2 .
4. On suppose dans cette question que la variance est connue et vaut 100.
 - (a) Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour μ .
 - (b) Quelle taille minimum d'échantillon faudrait-il prendre pour que la longueur de l'intervalle ne dépasse pas 4 ?

Exercice 4.3 :

Afin de déterminer la concentration en glucose d'un échantillon sanguin, on effectue des dosages à l'aide d'une technique expérimentale. On considère que la concentration des dosages est une variable aléatoire normale. On effectue 200 dosages (en g/l) indépendants. L'estimation sans biais de la moyenne est de 1,05 g/l et l'écart type estimé sans biais est de 0,1g/l.

1. Quelle loi suit l'estimateur de la concentration moyenne en glucose ?
2. Donner un intervalle de confiance de cette concentration moyenne de niveau de confiance 99%.

Exercice 4.4 :

A l'occasion d'une commande, un laboratoire reçoit des fioles jaugées d'une contenance théorique de 500 mL. Il envisage d'effectuer des mesures de la contenance de ces fioles. Sur 300 fioles, il trouve une moyenne empirique de 499,96 mL et un écart type empirique de 0,01 mL.

1. Calculer un intervalle de confiance du volume moyen de ces fioles au niveau de confiance 95%.
2. Calculer la longueur de l'intervalle de niveau 95%. Quel niveau de confiance faudrait-il prendre pour avoir un intervalle de longueur 0,1 mL ?

Exercice 4.5 :

Dans la fabrication de comprimés effervescent, il est prévu que chaque comprimé contienne 1625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium X pour chacun d'eux et obtenu une moyenne empirique de 1620mg et un écart-type corrigé (s') de 50mg. On suppose que X suit une loi normale.

1. Donner des estimations sans biais de la moyenne et de la variance de la quantité de bicarbonate de sodium contenu dans tous les comprimés.
2. Déterminer un intervalle de confiance de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans les comprimés au niveau de confiance 95 %.
3. Calculer l'amplitude de cet intervalle et interpréter le résultat.
4. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon prélevé pour connaître, au niveau de confiance 95%, la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population à 1 mg près ?

Exercice 4.6 :

Une clinique a proposé une nouvelle opération chirurgicale. Il y a eu 49 échecs sur 400 tentatives. On note p le pourcentage de réussite de cette nouvelle opération.

1. estimer p .
2. En utilisant l'approximation normale, donner un intervalle de confiance pour p de niveau de confiance approximatif 0,95.
3. Combien d'opérations la clinique devrait-elle réaliser pour connaître le pourcentage de réussite avec une précision de plus ou moins 1%, au niveau 95% ?

Exercice 4.7 :

Dans un échantillon de 400 femmes venant d'accoucher et toutes atteintes d'une certaine maladie M, on compte 50 naissances prématurées. On note p le pourcentage de naissances prématurées parmi les femmes atteintes de la maladie M.

1. Donner une estimation du pourcentage de prématurés chez les femmes atteintes de la maladie M.
2. Donner un intervalle de confiance pour p de niveau 99%.
3. Le pourcentage de prématurés dans la population totale est de 6%, que peut-on en conclure ?

Exercice 4.8 :

Afin de ne pas confondre intervalle de fluctuation et intervalle de confiance :

1. (a) Pour faire un intervalle de fluctuation, quels sont les éléments connus ? Que cherche-t-on à savoir ?
(b) Pour faire un intervalle de confiance, quels sont les éléments connus ? Que cherche-t-on à savoir ?
2. (a) Lors d'une élection, on fait un sondage d'intention de votes sur un échantillon de taille $n = 1000$. Les intentions de votes pour le candidat X sont de 51%. Quel intervalle permet d'encadrer le pourcentage de votes obtenu par X au niveau de 95% ?
(b) Suite à une élection, le candidat X a obtenu 51% de votes. On prend un échantillon de taille $n = 1000$. Quel intervalle permet d'encadrer le pourcentage de votes obtenu par X dans l'échantillon au niveau de 95% ?