
TABLE DES MATIÈRES

1

Chapitre 1

Introduction générale et exemples

- 1.1 Origine 2
- 1.2 Bases de modélisation 4
 - 1.2.1 Modélisation en dynamique des populations 4
 - 1.2.2 Comment calculer numériquement une solution ? 10
 - 1.2.3 Comportement qualitatif des solutions 14
- 1.3 Étude du système de Lotka-Volterra 17
- 1.4 Quelques éléments de théorie 21
 - 1.4.1 Existence et unicité des solutions en 1D 22
 - 1.4.2 Calcul de solutions explicites 23
 - 1.4.3 Existence et unicité dans le cas vectoriel, et à l'ordre 2 25
- 1.5 Points d'équilibre : stabilité, instabilité 26
 - 1.5.1 Cas unidimensionnel 26
 - 1.5.2 Cas bidimensionnel 31
- 1.6 Simulation numériques : autres méthodes 33

INTRODUCTION GÉNÉRALE ET EXEMPLES

1.1

Origine

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une **fonction** d'une variable, qui s'exprime comme une relation entre les dérivées successives de la fonction inconnue. Dans ce cours nous étudierons principalement des fonctions d'une variable $t \in \mathbb{R}$ qui représente le temps, et les fonctions inconnues seront notées $x(t), y(t)$ (ou de manière plus brève, x, y). On notera \dot{x} et \ddot{x} les dérivées premières et secondes de x , qui peuvent aussi être notées (selon les préférences)

$$\dot{x} = x' = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Nous nous restreindrons principalement à des équations différentielles faisant intervenir seulement des dérivées premières et secondes.

L'introduction des équations différentielles est attribué à Newton dans le développement de la mécanique céleste, c'est-à-dire dans la description du mouvement des astres par le problème à N corps. Il s'agit, étant donnés N astres numérotés de 1 à N , de masses respectives m_1, \dots, m_N , de positions $x_1(t), \dots, x_N(t) \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t , de décrire l'évolution des positions $x_i(t)$ selon le temps t en se basant sur l'information donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$\text{Pour tout } i = 1, \dots, N, \quad m_i \ddot{x}_i(t) = \sum_{j=1 \dots N, j \neq i} G m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}$$

où $G > 0$ est la constante gravitationnelle. Newton a donné une description complète de la dynamique de deux corps avec les lois de Kepler, mais le cas $N \geq 3$ présente des comportements bien plus riches.

Voici quelques exemples - qui ne sont pas à connaître - d'équations différentielles qui pourront nous occuper dans ce cours. Celle-ci peuvent aussi vous servir d'exemple pertinents pour vos simulations.

- 1 Équations issues de la mécanique. Plutôt que d'étudier les problèmes de haute dimension tel que le problème à N corps, nous nous focaliserons sur l'oscillateur harmonique et ses variantes. En voici un aperçu :

- Oscillateur harmonique standard, de pulsation $\omega > 0$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

- Oscillateur harmonique amorti, où $\lambda > 0$ est un paramètre d'amortissement :

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

- Pendule de longueur $l > 0$, où $g > 0$ est l'intensité de la pesanteur, et $x = x(t)$ représente l'angle entre le pendule et la verticale (pointant vers le bas) :

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin(x) = 0$$

- Pendule de Kapitza, qui représente un pendule dont le point d'attache est soumis à un mouvement vertical rapide, où $\kappa > 0$ est un paramètre du problème :

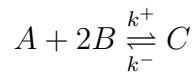
$$\ddot{x} + (1 + \kappa \cos(x)) \sin(x) = 0$$

- Equation de Mathieu, issue du mouvement d'une masse fixée à deux ressorts fixés en des points différents, où $a, q \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

$$\ddot{x} + (a - 2q \cos(2t))x = 0$$

2 Des équations d'évolution issues de réactions chimiques.

- Étant donné des réactifs chimiques A, B, C , la réaction élémentaire théorique



où $k^+, k^- > 0$ sont des constantes de vitesse, donne lieu à l'évolution des concentrations $[A](t), [B](t), [C](t)$ par la loi d'action de masse :

$$\begin{cases} \dot{[A]} &= -k^+[A][B]^2 + k^-[C] \\ \dot{[B]} &= -2k^+[A][B]^2 + 2k^-[C] \\ \dot{[C]} &= k^+[A][B]^2 - k^-[C] \end{cases}$$

- La présence de certains réactifs ou produits en surabondance ou une réaction qui se produit des ordres de grandeur plus vite qu'une autre peut mener lieu à diverses simplifications des équations. Par exemple la réaction CDIMA (Chlorine Dioxide - Iodine - Malonic Acid) peut se modéliser avec une équation simplifiée :

$$\begin{cases} \dot{x} = a - x - \frac{4xy}{1+x^2} \\ \dot{y} = bx \left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right) \end{cases}$$

où x, y représente les concentrations adimensionnées de I^- et de ClO_2^- , et $a, b > 0$ sont des paramètres de la réaction trouvés empiriquement.

3 Des équations d'évolution de populations. Contrairement aux deux catégories précédentes, ces modèles issus de la biologie sont « moins rigoureux » au sens où ceux-ci viennent d'une modélisation très simplifiée de phénomènes complexes sur lesquels on ne dispose que d'informations partielles. Autrement dit, ceux-ci sont plutôt étudiés sous un angle **qualitatif** : on s'intéresse aux propriétés du système ne dépendant pas du choix de modélisation de manière trop sensible.

- Le modèle de croissance de population exponentiel, parfois appelé modèle de Malthus/Malthusien.

$$\dot{x} = rx$$

r est un paramètre réel qui correspond au taux de croissance de la population x .

- Équation logistique, qui modélise l'évolution d'une population de taux de croissance « à vide » (associé à une population nulle) $r_0 > 0$, avec une population maximale $M > 0$.

$$\dot{x} = r_0 x \times \left(1 - \frac{x}{M}\right)$$

- Compétition de ressources entre deux espèces de populations respectives $x(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(1 - b_1x - b_2y) \\ \dot{y} = cy(1 - d_1x - d_2y) \end{cases}$$

- Modèle d'évolution de population de proies (x) et de prédateurs (y) de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

et sa version dite « amortie » :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - \lambda x^2 \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

- Modèle d'épidémie de Kermack–McKendrick (aussi appelé modèle SIR dans d'autres contextes)

$$\begin{cases} \dot{x} = -kxy \\ \dot{y} = kxy - ly \\ \dot{z} = ly \end{cases}$$

où x, y, z représentent respectivement le nombre d'individus sains, le nombre d'individus infectés, et le nombre d'individus guéris/décédés. $k, l > 0$ sont des paramètres de l'épidémie qui représentent respectivement un taux de contagion de la maladie, et un taux de surmortalité lié à la maladie.

1.2 Bases de modélisation

1.2.1 Modélisation en dynamique des populations

On souhaite modéliser l'évolution du nombre d'individus dans une population de micro organismes : il y a un grand nombre d'individu qui se reproduisent à une vitesse constante.

On appelle $N(t)$ le nombre d'individus à l'instant t . C'est un nombre entier a priori très grand. Plutôt que de manipuler directement ce nombre on considère $N \in \mathbb{N}^*$ un nombre « grand » qui est le nombre typique d'individus dans une colonie de micro organismes, et on note

$$x(t) = \frac{N(t)}{N}$$

la population totale **normalisée**. On considère maintenant que cette population a un taux de natalité n , et un taux de décès d , c'est-à-dire qu'entre un instant t et un instant $t + \Delta t$ - où $\Delta t > 0$ est très petit - alors chaque micro organisme a une probabilité $n\Delta t$ de se reproduire (créant une copie de lui-même) et $d\Delta t$ de mourir.

Comme la population est supposée très grande, on peut remplacer ce modèle probabiliste par une approximation déterministe : on suppose qu'entre les temps t et $t + \Delta t$ parmi la population de $N(t)$ micro organismes, il y a environ $nN(t)\Delta t$ individus qui se multiplient et donnent donc naissance à $nN(t)\Delta t$ individus, et environ $dN(t)\Delta t$ individus qui meurent. Cela signifie que

$$N(t + \Delta t) \approx N(t) + (n - d)N(t)\Delta t$$

On notera $r := n - d$ le **taux de croissance** de la population, qui fait la somme des différents effets. Après division par N on obtient

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + rx(t)\Delta t$$

après réarrangement et division par Δt , cela donne :

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx rx(t)$$

On fait alors tendre Δt vers 0 : on obtient par définition de $\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$, que

$$\dot{x} = rx$$

Et la solution est donnée par :

$$x(t) = x(0)e^{rt}$$

Notons que la solution n'est pas unique : elle dépend de la population initiale $x(0)$ au temps $t = 0$, et n'importe quelle valeur x_0 en $t = 0$ donne lieu à une solution différente $t \mapsto x_0 e^{rt}$.

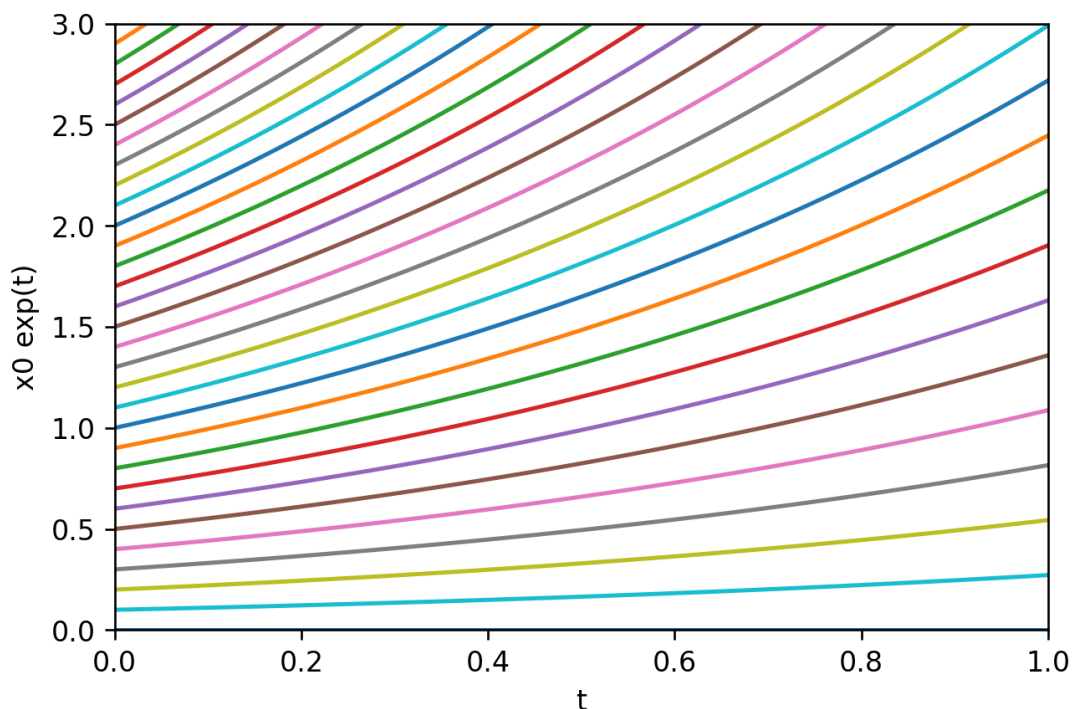


FIGURE 1.1 – Graphe de $t \mapsto x_0 e^t$ pour différentes valeurs de x_0 : chaque condition initiale x_0 donne une évolution de population distincte.

Dans l'écriture du modèle, il est fréquent d'écrire directement le taux de variation de x en fonction du temps de la manière suivante :

$$dx = rx \, dt$$

qui peut être compris au sens suivant : « lorsque le temps varie d'une quantité infinitésimale dt , la population varie de $dx(= rxd t)$ ». Cela revient, avec un léger abus de notations, à écrire la dérivée $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = rx$.

Le modèle précédent - typiquement appelé modèle **Malthusien** dans le cadre de l'étude des populations - est un modèle « grossier » qui ramène l'évolution de la population au seul taux de croissance r . On rappelle que $t \mapsto x(0)e^{rt}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ pour $r > 0$, constante pour $r = 0$ et strictement décroissante vers 0 pour $r < 0$.

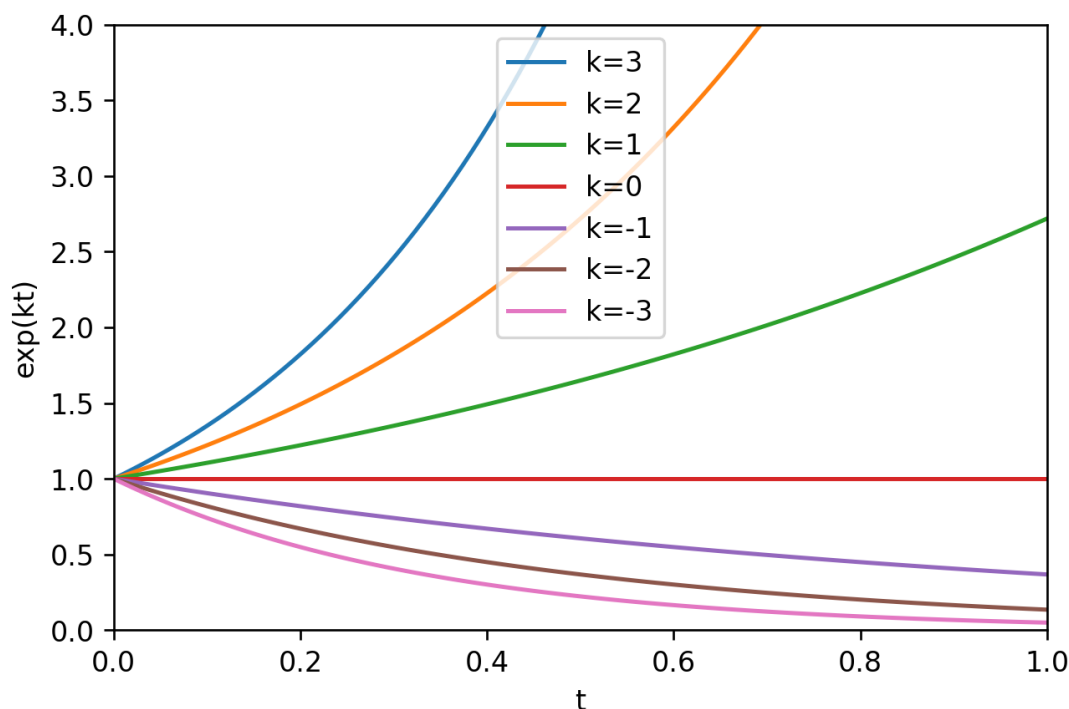


FIGURE 1.2 – Graphe de $t \mapsto e^{kt}$ pour différentes valeurs de k .

De plus, l'inverse du taux de croissance $1/r$ a l'homogénéité d'un temps : c'est le temps typique sur lequel varie la fonction $x : t \mapsto x(0)e^{rt}$:

$$\frac{x(t + 1/r)}{x(t)} = e^1 \approx 2.72.$$

Ce modèle permet certaines situations que l'on peut juger, dans certain contextes, impossibles : il suppose par exemple la possibilité d'une croissance infinie à taux constant même pour une population qui tend vers l'infini, et le taux de croissance est le même peu importe la population totale.

On peut élaborer un modèle plus complexe qui prend en compte des effets limitant cela. En reprenant les notations précédentes, on suppose cette fois que N représente un maximum absolu de population, par exemple dû à une saturation : lorsque la population $N(t)$ approche N , son taux de croissance r diminue jusqu'à valoir 0 lorsque $N(t) \rightarrow N$, ce qui empêche la population de dépasser ce seuil. On va en fait supposer que r est une fonction de la population normalisée $x(t) = \frac{N(t)}{N}$. On propose le modèle suivant pour r :

$$r(x) = r_0 \times (1 - x)$$

Ici r_0 est un nombre positif qui représente un taux de croissance « à vide », c'est-à-dire pour une population proche de 0, et la fonction r est choisie de sorte que $r(1) = 0$: si la population est saturée, alors son taux de croissance est nul.

Il n'y a rien dans ce contexte qui permet de choisir une fonction r de cette forme plutôt que n'importe quelle autre fonction ayant la même allure (c'est-à-dire que $x \mapsto r(x)$ est strictement

décroissante, avec $r(1) = 0$), mais on se tient pour l'instant à ce choix qui est commun en modélisation par sa simplicité.

L'évolution de population entre un temps t et $t + \Delta t$ est donc

$$N(t + \Delta t) \approx N(t) + r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{N}\right) N(t) \Delta t$$

Comme précédemment on commence par diviser par N :

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + r_0 (1 - x(t)) x(t) \Delta t$$

Puis on soustrait $x(t)$ de chaque coté et on divise par Δt :

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx r_0 (1 - x(t)) x(t)$$

puis on fait tendre Δt vers 0 :

$$\dot{x}(t) = r_0 (1 - x(t)) x(t)$$

Il s'agit de l'**équation logistique**, dont le comportement sera étudié plus loin et en TP. Voici un graphe de la solution pour plusieurs conditions initiales.

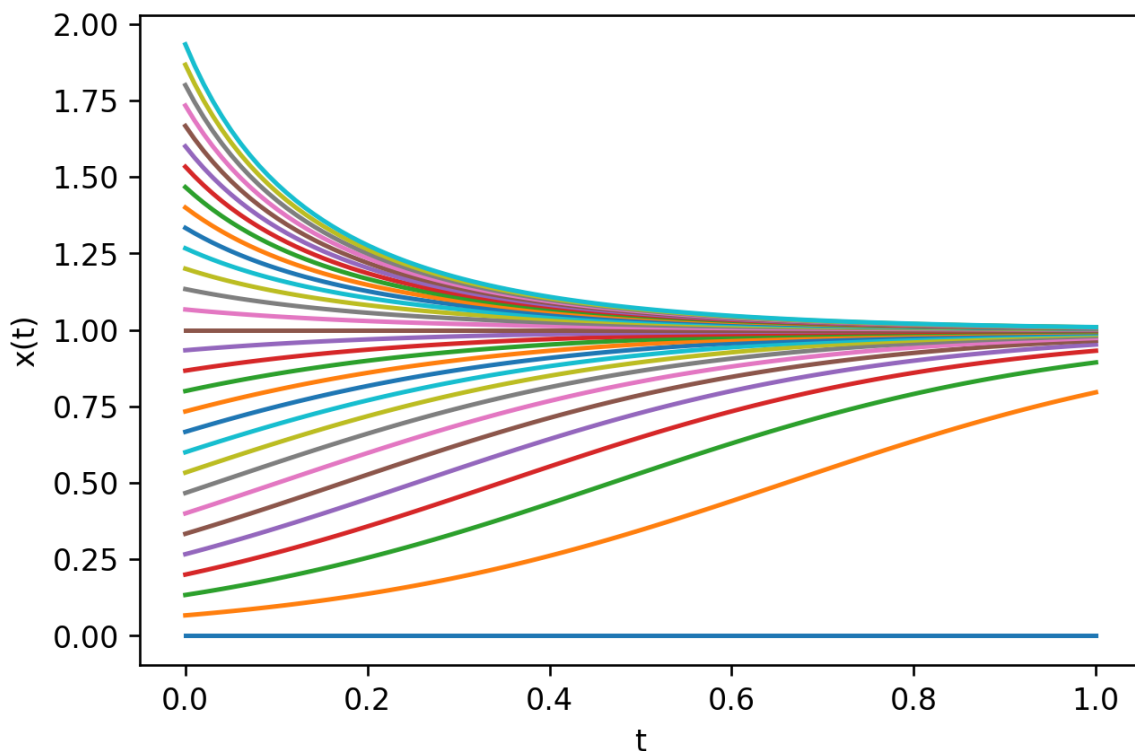


FIGURE 1.3 – Graphes de solutions de l'équations $\dot{x} = 5x(1 - x)$ pour différentes conditions initiales positives. Elles tendent toutes vers 1, sauf celle correspondant à $x(0) = 0$.

On pourrait imaginer prendre en compte d'autres types de phénomènes : par exemple un seuil critique de population $c \in (0, 1)$ en dessous duquel le taux de natalité est inférieur au taux de décès, ce qui peut être représenté par un taux de croissance $r(x) = r_0(x - c)(1 - x)$ qui est négatif sur $[0, c[$, positif sur $]c, 1]$ (et toujours nul en 1, et négatif au delà, pour signifier que c'est la population maximale). On appelle cela l'**effet Allee**, qui peut trouver différentes origines biologiques complexes, et l'équation différentielle associée prend la forme

$$\dot{x} = r_0 x(x - c)(1 - x)$$

Dans les cas précédents la population peut évoluer de deux manières dans le temps : soit croître à l'infini, soit tendre vers une valeur limite qu'on appelle un état d'équilibre, où le taux de croissance de la population est exactement 0.

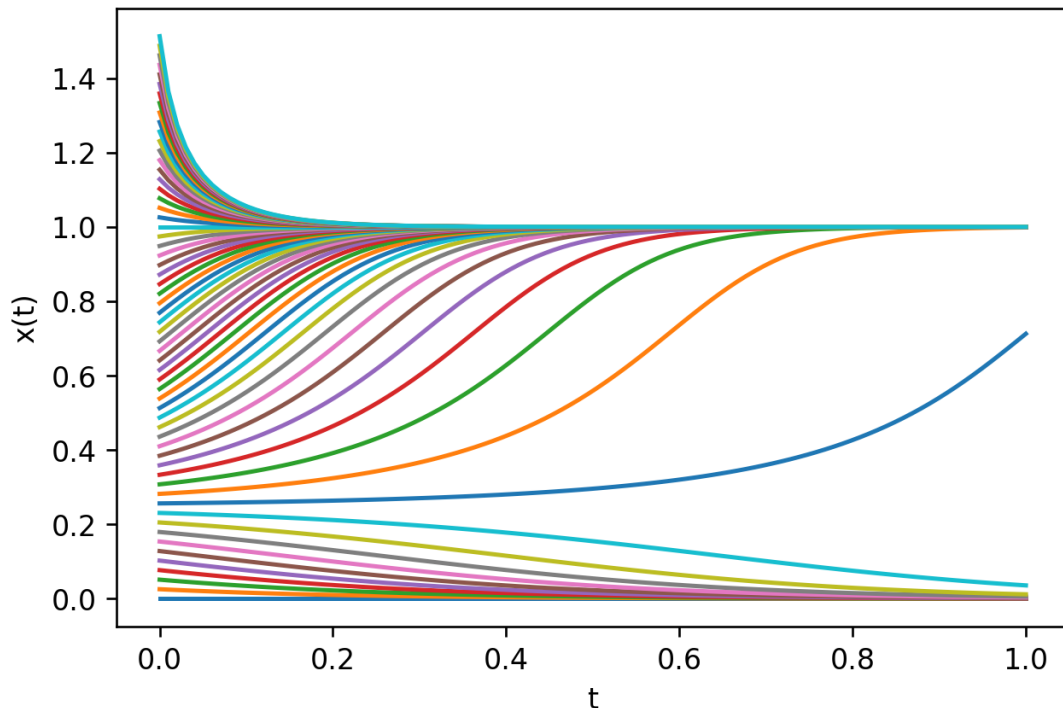


FIGURE 1.4 – Graphe de solutions de $\dot{x} = 20x(1 - x)(x - 0.25)$ pour différentes conditions initiales : la population décroît et tend vers 0 lorsqu'elle est dans $[0, 0.25[$, croît dans $]0.25, 1]$, décroît dans $[1, +\infty)$.

Donnons maintenant un modèle plus complexe présentant un comportement **oscillant**.

Il s'agit d'un modèle de type proie-prédateur, souvent appelé modèle de *Lotka-Volterra* dans la littérature. Ici $x(t), y(t)$ représentent toujours des populations (normalisées) à l'instant t , où x est une population de **proies** et y de **prédateurs**, et on suppose que ces populations ont des taux de croissance $r^{proie}(x, y), r^{pred}(x, y)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = r^{proie}(x, y)x \\ \dot{y} = r^{pred}(x, y)y \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivante :

- En l'absence de prédateur, la population de proie augmente : $r^{proie}(x, 0) > 0$.
- En l'absence de proies, la population de prédateurs diminue (sous entendu : ceux-ci n'ont pas d'autres sources d'alimentation suffisante pour supporter une population) : $r^{pred}(0, y) < 0$.
- Plus il y a de prédateur, plus le taux de croissance des proies est faible, jusqu'à devenir négatif lorsqu'il y a trop de prédateurs : $y \mapsto r^{proie}(x, y)$ est décroissant pour tout x et $r^{proie}(x, y) < 0$ pour y assez grand.
- Plus il y a de proies, plus le taux de croissance des prédateurs est grand, jusqu'à devenir positif lorsqu'il y a suffisamment de proies : $x \mapsto r^{pred}(x, y)$ est croissant pour tout y et $r^{pred}(x, y) > 0$ pour x assez grand.

Lotka et Volterra ont proposé le modèle suivant :

$$r^{proie}(x, y) = a - by, \quad r^{pred}(x, y) = -c + dx$$

où (a, b, c, d) sont des paramètres positifs : on a bien

$$r^{proie}(x, 0) = a > 0, \quad r^{pred}(0, y) = -c < 0,$$

$$r^{proie}(x, y) \leq 0 \text{ pour } y \geq a/b$$

$$r^{pred}(x, y) \geq 0 \text{ pour } x \geq c/d$$

Le modèle devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

Une solution est toujours déterminée par une condition initiale sur $(x(t), y(t))$: la condition initiale prend la forme

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

où x_0, y_0 sont des réel : dans notre contexte de dynamique des populations, on prend x_0 et y_0 positifs.

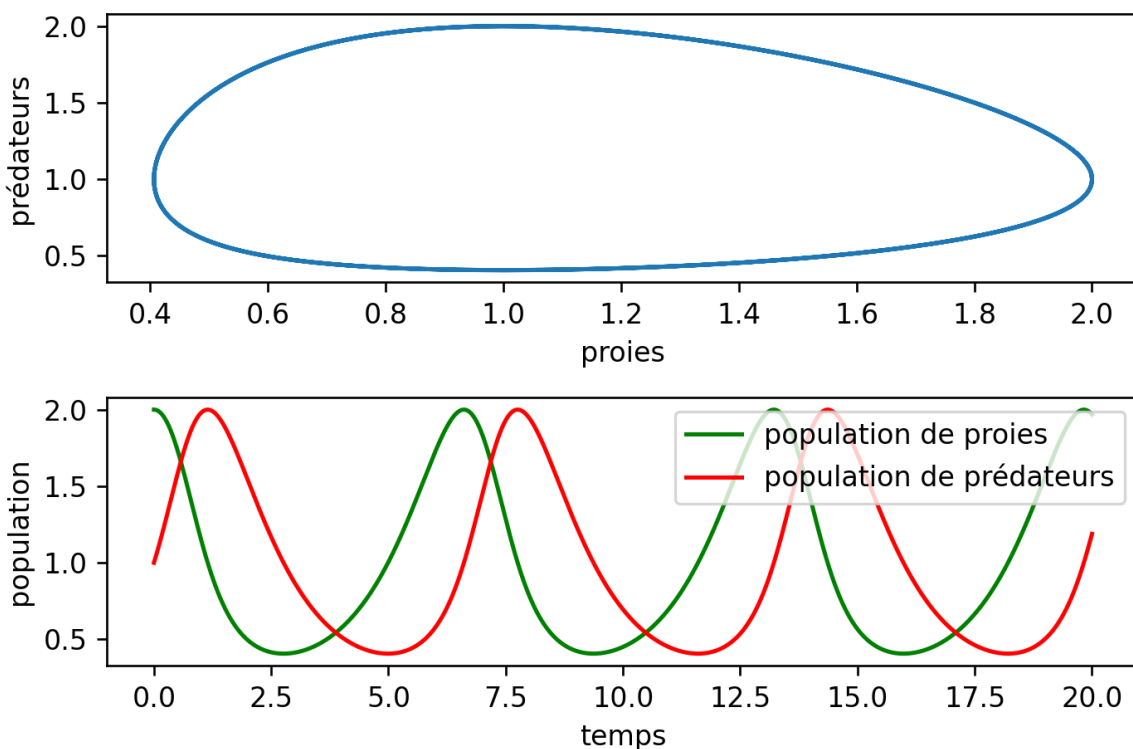


FIGURE 1.5 – Au dessus : graphe d’une solution où l’on affiche la population de prédateurs (y) en fonction de la population de proie (x). En dessous : graphe de cette même solution où x, y sont affichés en fonction du temps t . Les conditions initiales sont $x(0) = 1, y(0) = 2$.

Ce modèle a un comportement qui n’était pas prévisible en regardant simplement l’équation : les solutions sont périodiques, c’est-à-dire que pour toute solution $(x(t), y(t))$, il existe $T > 0$ tel que

$$\forall t, (x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t))$$

de la même manière que les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques. Autrement dit, la population de proies et de prédateurs se répète à intervalles fixé dans le temps, indépendamment de toute

conditions extérieures (comme influence des saisons, que l'on pourrait intégrer au modèle...). On peut constater cela sur la figure 1.5 ci-dessus : en bas on représente les graphes $t \mapsto x(t)$ (les proies) et $t \mapsto y(t)$ (les prédateurs), qui semblent se répéter à intervalles réguliers.

Dans la représentation du haut, on trace la trajectoire dans le **plan de phase** : on représente en abscisse la population de proies, et en ordonnée la population d'individu, et la courbe bleue est l'ensemble des points $(x(t), y(t))$ pour t pris dans un intervalle de temps (ici $[0, 20]$). On perd une partie de l'information en faisant cela : avec seulement l'image du haut on ne peut pas suivre l'évolution temporelle des populations (on ne sait pas a priori dans quel sens et à quelle vitesse la courbe est parcourue : celle-ci est parcourue dans le sens antihoraire, comme nous le verrons plus loin). Cependant cela fait nettement apparaître l'aspect périodique du système : la courbe se referme, et retourne à la condition initiale $(x, y) = (1, 2)$ après un certain temps.

Bien qu'il soit une illustration marquante des phénomènes de compétitions et qu'il apparaisse dans d'autres cadres que la biologie, ce modèle illustre aussi les limites de nos choix de modélisations trop simples : nous verrons en TP qu'une perturbation même légère des profils de $r^{proie}(x, y)$, $r^{pred}(x, y)$ peut radicalement changer le comportement du système et faire que toutes les trajectoires convergent vers un unique point d'équilibre. Un changement même infime de la modélisation change du tout au tout le comportement du système, ce qui n'est généralement pas désirable si on veut un modèle robuste.

De manière plus terre-à-terre on peut critiquer certains choix de modélisation qui ignorent beaucoup de facteurs pas forcément négligeables :

- Le taux de croissance des prédateurs $s(x, y)$ ne dépend pas du nombre de prédateur. Autrement dit, pour un nombre fixé de proies à un instant t , les prédateurs sont aussi bien nourris peu importe la population de prédateurs.
- De même le taux de croissance des proies $r(x, y)$ est le même peu importe le nombre de proies

On peut donc imaginer des corrections du système prenant en compte ces effets.

1.2.2 Comment calculer numériquement une solution ?

Les équations différentielles n'admettent généralement pas de solutions explicites en terme de fonctions usuelles. Néanmoins, il existe plusieurs algorithmes pour approcher les solutions (appelé **schémas numériques**), et on présente ici le plus simple d'entre eux : d'autres seront présentés plus tard dans le cours.

Commençons par le cas d'une équation unidimensionnelle avec condition initiale au temps 0

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x^{\text{init}} \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x^{\text{init}} \in \mathbb{R}$ est la condition initiale. On souhaite calculer avec précision la valeur de la solution $x(t)$ pour $t \in [0, T]$, où $T > 0$ est un temps final fixé à l'avance.

- **Échantillonnage.** On ne cherche pas à calculer $x(t)$ pour **tout** $t \in [0, T]$, mais seulement pour un nombre fini de points : fixons $N \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier « grand », on échantillonne l'intervalle $[0, T]$ avec $(N + 1)$ points

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T.$$

On choisira simplement

$$t_i = \frac{iT}{N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

On note $\Delta t = \frac{T}{N}$ l'écartement entre deux points successifs, tels que $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Le but est maintenant de calculer les valeurs successives $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^{N+1}$ telles que x_i soit une « bonne » approximation de $x(t_i)$, où $x(t)$ est la vraie solution du problème.

- **Condition initiale.** Pour que x_i approche $x(t_i)$, il est naturel de fixer

$$x_0 = x^{\text{init}}$$

pour la condition initiale.

- **Approximation locale.** Supposons que x_i soit une bonne approximation de $x(t_i)$, comment en déduire une bonne approximation de $x(t_{i+1})$?
Pour cela on fait le chemin inverse de la modélisation vue précédemment : l'équation différentielle au temps t_i est

$$\dot{x}(t_i) = f(t_i, x(t_i))$$

Lorsque $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ est assez petit (c'est-à-dire que N est assez grand), on a donc une égalité approchée

$$\frac{x(\overbrace{t_{i+1}}^{t_i + \Delta t}) - x(t_i)}{\Delta t} \approx f(t_i, x(t_i))$$

En considérant que x_i doit être une bonne approximation de $x(t_i)$, cela nous amène donc à définir x_{i+1} en fonction de x_i de manière à vérifier exactement l'égalité précédente :

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = f(t_i, x_i)$$

Ou, écrit de manière plus explicite, en isolant x_{i+1} :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t f(t_i, x_i).$$

Résumé : on répartit sur l'intervalle $[0, T]$ des points

$$t_i = \frac{iT}{N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ est un paramètre d'échantillonnage choisi « grand ». Le pas entre deux temps successifs est $\Delta t = \frac{T}{N}$. On définit la suite $(x_i)_{i=0, \dots, N}$ par récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = x^{\text{init}} \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t f(t_i, x_i) \end{cases} \quad (1.1)$$

dans l'idée que x_i est une bonne approximation (cela reste à vérifier) de $x(t_i)$.

On en déduit ensuite une fonction approchée x^N , définie de la manière suivante :

$$\forall i = 0, \dots, N : x^N(t_i) = x_i \text{ et } x^N \text{ est affine sur } [t_i, t_{i+1}]$$

Autrement dit :

$$x^N(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} x_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} x_{i+1} \text{ pour } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Cette méthode d'approximation - particulièrement la formule (1.1) - est appelée **méthode d'Euler explicite**. C'est la méthode d'approximation la plus simple et elle donne déjà une convergence satisfaisante dans de nombreux cas, en effet on peut montrer que

$$\text{pour tout } i = 0, \dots, N, \quad |x(t_i) - x^N(t_i)| \leq \frac{C}{N}$$

où $C > 0$ est une constante qui dépend de T, f et de la solution x mais **pas** du paramètre N .

La méthode d'Euler explicite peut s'adapter aux équation différentielles avec plusieurs composante ou d'ordre supérieur : supposons que l'on veuille résoudre l'équation

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \\ x(0) = x^{init}, y(0) = y^{init} \end{cases}$$

où f, g sont deux fonctions et x, y sont les inconnues. On préserve les même notations (pour $N, t_i, \Delta t$), et on va alors définir par récurrence les suites x_i, y_i de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 = x^{init}, y_0 = y^{init} \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t g(t_i, x_i, y_i) \end{cases}$$

Alors (x_i, y_i) va être (lorsque N est assez grand) une bonne approximation de $(x(t_i), y(t_i))$, avec l'estimation

$$|x_i - x(t_i)| + |y_i - y(t_i)| \leq \frac{C}{N}$$

où $C > 0$ ne dépend pas de N .

De même, supposons que l'on veuille résoudre l'équation d'ordre 2

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \\ x(0) = x^{init}, \dot{x}(0) = y^{init}, \end{cases}$$

en notant $y = \dot{x}$, cela est équivalent à la résolution de

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(t, x, y) \\ x(0) = x^{init}, y(0) = y^{init} \end{cases}.$$

En effet, si $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, alors en posant $y = \dot{x}$, on a bien $\dot{y} = \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) = f(t, x, y)$. Réciproquement, si (x, y) est solution du système ci-dessus alors

$$\ddot{x} = \dot{y} = f(t, x, y) = f(t, x, \dot{x}).$$

On peut alors appliquer la méthode précédente.

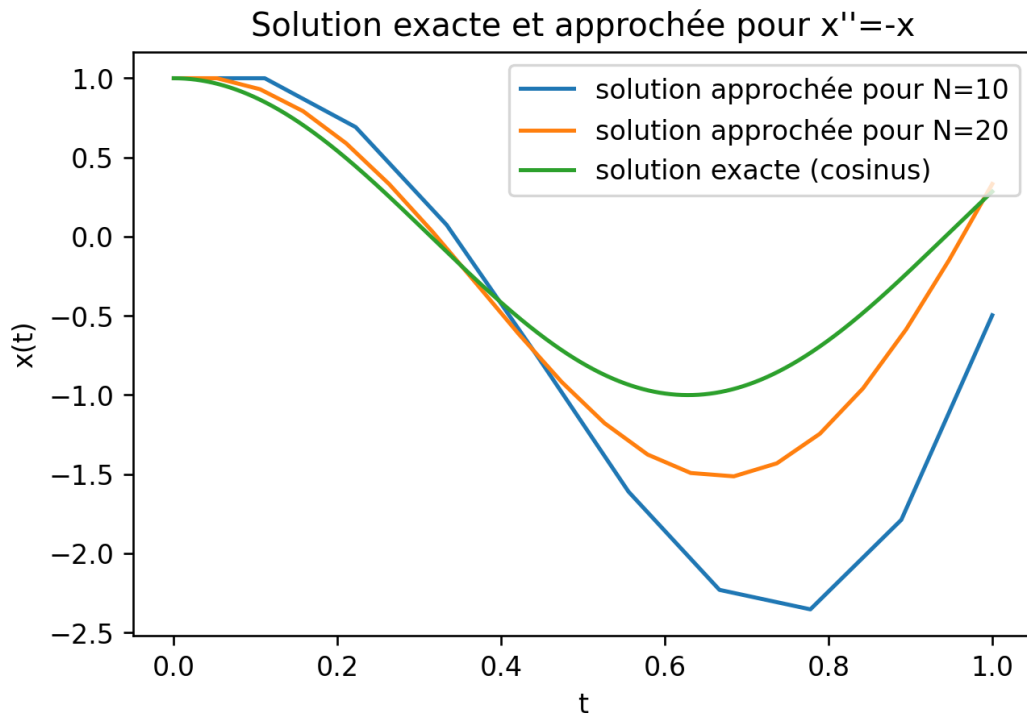


FIGURE 1.6 – Application de la méthode d'Euler explicite à l'équation $\ddot{x} = -x$, avec $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Exemple. Fonction exponentielle

On considère l'équation différentielle $\dot{x} = rx$ - par exemple un modèle Malthusien de croissance de population où $r \in \mathbb{R}$ est le taux de croissance - avec la condition initiale $x(0) = x^{init} > 0$, et un temps final $T > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de pas, la suite $(x_i)_{i=0,\dots,N}$ est donc définie par récurrence comme

$$\begin{cases} x_0 = x^{init} \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t r x_i = \left(1 + \frac{Tr}{N}\right) x_i \end{cases}$$

car $\Delta t = \frac{T}{N}$. C'est une suite géométrique : on a directement

$$x_i = \left(1 + \frac{Tr}{N}\right)^i x^{init}$$

En particulier, l'approximation de $x(T)$ est le N -ième terme de cette suite

$$x_N = \left(1 + \frac{rT}{N}\right)^N x^{init}$$

On connaît la solution explicite $x(t) = e^{rt} x^{init}$, la convergence de notre méthode d'approximation donne donc la limite

$$\left(1 + \frac{rT}{N}\right)^N x^{init} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{rT} x^{init}$$

On peut remonter cette convergence à la main :

$$\left(1 + \frac{rT}{N}\right)^N = e^{N \log\left(1 + \frac{rT}{N}\right)}$$

On rappelle que $\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log(1+x) - \log(1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log'(1) = 1$, donc

$$N \log \left(1 + \frac{rT}{N} \right) = rT \frac{\log \left(1 + \frac{rT}{N} \right)}{rT/N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} rT$$

Et donc $x_N = \left(1 + \frac{rT}{N} \right)^N x^{init} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{rT} x^{init} = x(T)$.

1.2.3 Comportement qualitatif des solutions

Les modèles d'évolution les plus simples décrits précédemment sont de la forme

$$\dot{x} = f(x)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On sait directement donner une description qualitative des solutions, à partir de l'allure du graphe de f (il suffit d'avoir son tableau de signes).

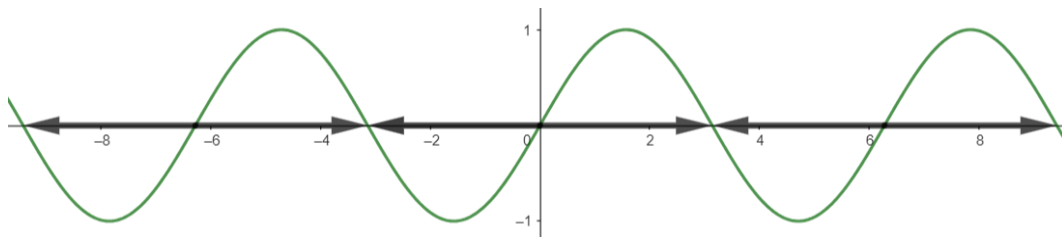


FIGURE 1.7 – Représentation avec le graphe $f(x) = \sin(x)$

Lorsque $x(t)$ est dans la zone où $f > 0$, la population augmente ($\dot{x}(t) = f(x(t)) > 0$), tandis que dans la zone où $f < 0$, la population diminue ($\dot{x}(t) < 0$) : on peut imaginer que x suit un « flot » de particules dont la vitesse est donnée par $f(x)$, allant vers la droite quand $f(x) > 0$ et vers la gauche quand $f(x) < 0$. De plus la population est fixe exactement lorsque $f = 0$.

Solutions pour $f(x)=\sin(x)$

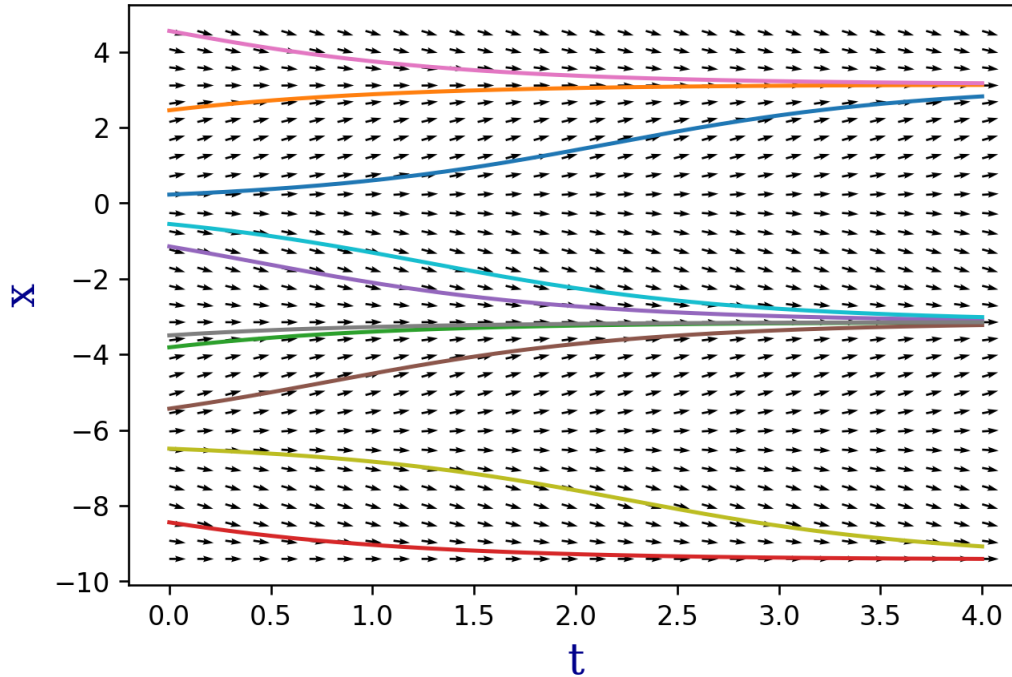


FIGURE 1.8 – Représentation du graphe de différentes solutions $x(t)$. On voit que les différentes solutions tendent respectivement vers -3π , $-\pi$, π .

Théorème 1.2.1 Caractérisations des solutions 1D

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée bornée, et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution à $\dot{x} = f(x)$. Alors les solutions sont données par trois cas de figure :

- $f(x(0)) = 0$: alors $x(t) = x(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- $f(x(0)) > 0$: alors $t \mapsto x(t)$ est strictement croissante. Sa limite est soit $+\infty$ (si $f > 0$ sur $[x(0), +\infty[$), soit x^{eq} où x^{eq} est la plus petite valeur de l'intervalle $[x(0), +\infty[$ telle que $f(x^{eq}) = 0$.
- $f(x(0)) < 0$: alors $t \mapsto x(t)$ est strictement décroissante. Sa limite est soit $-\infty$ (si $f < 0$ sur $] -\infty, x(0)]$), soit x^{eq} où x^{eq} est la plus grande valeur de l'intervalle $] -\infty, x(0)]$ telle que $f(x^{eq}) = 0$.

Ce résultat est admis : l'hypothèse que f soit dérivable de dérivée bornée est bien nécessaire. Les trois cas sont illustrés dans la figure ci-dessus.

Ce résultat nous dit en particulier qu'en 1D, les solutions vont soit tendre vers $\pm\infty$, soit converger vers un **point d'équilibre**, c'est-à-dire un point $x^{eq} \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x^{eq}) = 0.$$

Exemple. Évolution de population avec effet Allee

On s'intéresse à l'équation $\dot{x} = rx(1-x)(x-c)$ où $r > 0$, et $c \in (0, 1)$ est une taille de population critique. On considère une population initiale $x(0) =: x_0$ dans $[0, +\infty[$. Le signe de $f(x) := rx(1-x)(x-c)$ donné dans le tableau ci-dessous :

x	0	c	1	$+\infty$		
$f(x)$	0	−	0	+	0	−

- N'importe quel population démarrant à $x_0 = 0, c$ ou 1 est constante, car $f(0, c \text{ ou } 1) = 0$: ce sont les points d'équilibre.
- N'importe quel population démarrant dans $]0, c[$ décroît strictement vers la limite 0.
- N'importe quel population démarrant dans $]c, 1[$ est strictement croissante, de limite 1.
- N'importe quel population démarrant dans $]1, +\infty[$ est strictement décroissante, de limite 1.

C'est ce qui est illustré dans la figure 1.4. On ne s'intéresse ici pas à ce qui se passe sous 0, car cela sort de notre modèle.

Pour les système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

la classification des solutions n'est pas si simple, il y a néanmoins une interprétation graphique claire : si on trace la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ dans le plan de phase \mathbb{R}^2 alors sa dérivée - c'est-à-dire son vecteur directeur en chaque point - est donnée par

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))).$$

Ainsi, il suffit de tracer le champs de vecteur

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

et les solutions sont alors des courbes qui sont en chaque point tangentes à ce champs de vecteur. En voici quelques exemples :

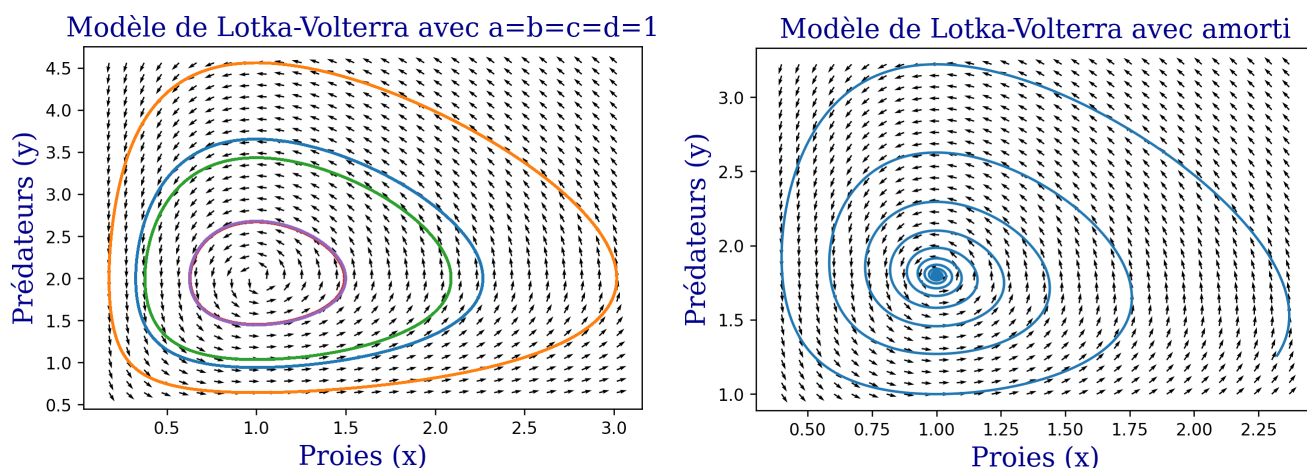


FIGURE 1.9 – Le système de Lotka-Volterra mentionné ci-dessus et une variante : chaque courbe de couleur différente représente une solution différente qui suit le champs de vecteur. A gauche les solutions sont périodiques, tandis que celle de droite converge vers un point d'équilibre.

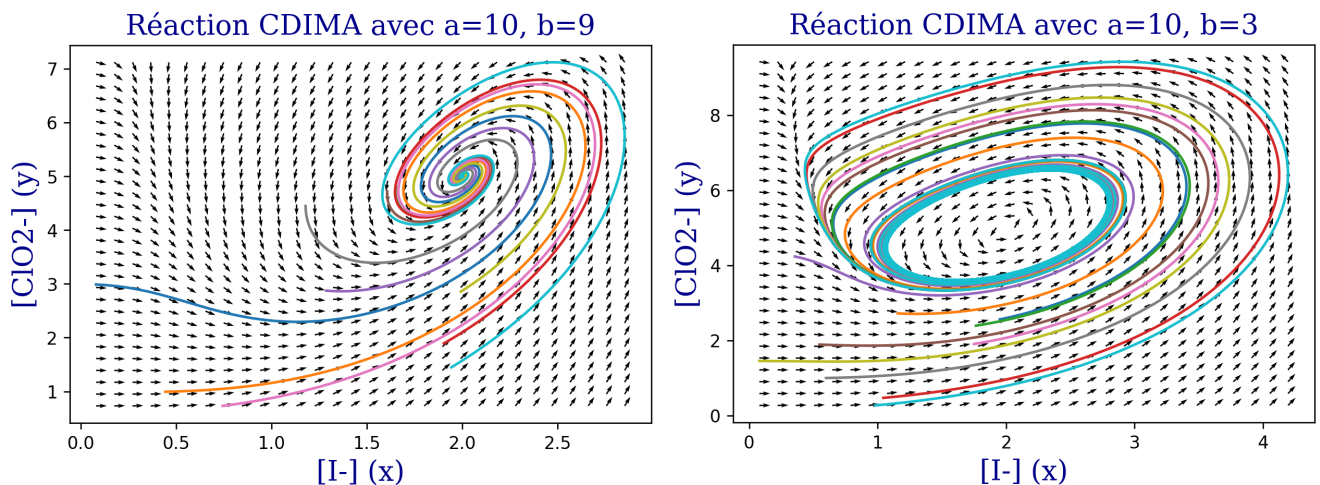


FIGURE 1.10 – La réaction CDIMA mentionnée dans l'introduction, pour différents paramètres. Celles de droite tendent vers un cycle limite : même si les trajectoires semblent se confondre, ce n'est pas le cas !

On voit dans ces deux figures trois comportements différents : l'oscillation, la convergence vers un point d'équilibre, la convergence vers un cycle limite. Ce ne sont pas les seuls comportements possibles, et on se concentrera dans ce cours sur les deux premiers.

1.3 Étude du système de Lotka-Volterra

On s'intéresse ici à l'équation de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y) \\ \dot{y} = cy(x - 1) \end{cases}$$

où on a fixé certains des paramètres (a, b, c, d) pour alléger les notations. On pourra se référer à la figure 1.5 et au graphe de gauche de la figure 1.9 pour l'allure des solutions, que l'on va chercher à décrire. La caractéristique principale du système de Lotka-Volterra est que les solutions sont périodiques, c'est-à-dire que pour toute solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ il existe un nombre $T > 0$ - appelé la **période** - tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t + T) = x(t), y(t + T) = y(t)$$

à la manière de \cos , \sin pour la période $T = 2\pi$. Nous n'expliquerons pas ce comportement immédiatement : on commence par faire une description plus grossière du mouvement "en spirale" des solutions autour d'un point d'équilibre. Pour cela, il faut comprendre l'allure du champ de vecteur

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(1 - y) \\ cy(x - 1) \end{pmatrix}$$

- On commence par repérer les points d'équilibres $(x^{eq}, y^{eq}) \in \mathbb{R}^2$, en résolvant le système

$$\begin{cases} f(x^{eq}, y^{eq}) = 0 \\ g(x^{eq}, y^{eq}) = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} x^{eq}(1 - y^{eq}) = 0 \\ cy^{eq}(x^{eq} - 1) = 0 \end{cases}$$

Ce qui se simplifie encore en

$$\begin{cases} x^{eq} = 0 \text{ ou } y^{eq} = 1 \\ \text{et} \\ x^{eq} = 1 \text{ ou } y^{eq} = 0 \end{cases}$$

On obtient que $(0, 0)$ et $(1, 1)$ sont des points d'équilibre, car ils vérifient les deux conditions du système. Réciproquement, si $x^{eq} = 0$, alors la deuxième condition implique nécessairement que $y^{eq} = 0$. De même, si $y^{eq} = 1$ alors la seconde condition implique nécessairement que $x^{eq} = 1$: Il n'y a donc pas d'autres points d'équilibre que $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Le point d'équilibre $(0, 0)$ correspond simplement à une absence de toute population. Le point d'équilibre $(1, 1)$ correspond lui à une cohabitation des deux populations où le taux de croissance de chacun est exactement compensé par le terme de prédation.

- On trace maintenant les courbes **isoclines** du champs de vecteur, c'est à dire la courbe $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ et la courbe $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$. Les points de I correspondent exactement aux points où le champs de vecteur (et donc la trajectoire des solutions) est verticale, et les points de J correspondent aux points où le champs de vecteur est horizontal. A l'intersection des deux courbes isoclines, on retrouve exactement les points d'équilibres

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = g(x, y) = 0\}.$$

Pour écrire explicitement I , on résout l'équation $f(x, y) = 0$. On rappelle que $f(x, y) = x(1 - y)$ est nul exactement lorsqu'un de ses deux facteurs est nul, donc :

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } y = 1\}$$

Dans ce système, l'isocline I est donc l'union de deux droites. De même, en écrivant $g(x, y) = cy(x - 1)$, on a

$$J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ ou } x = 1\}$$

- Pour enrichir la figure, on suit le signe de $f(x, y)$ et $g(x, y)$ de chaque coté des isoclines : cela donne une direction générale du champs de vecteur. On obtient la figure suivante

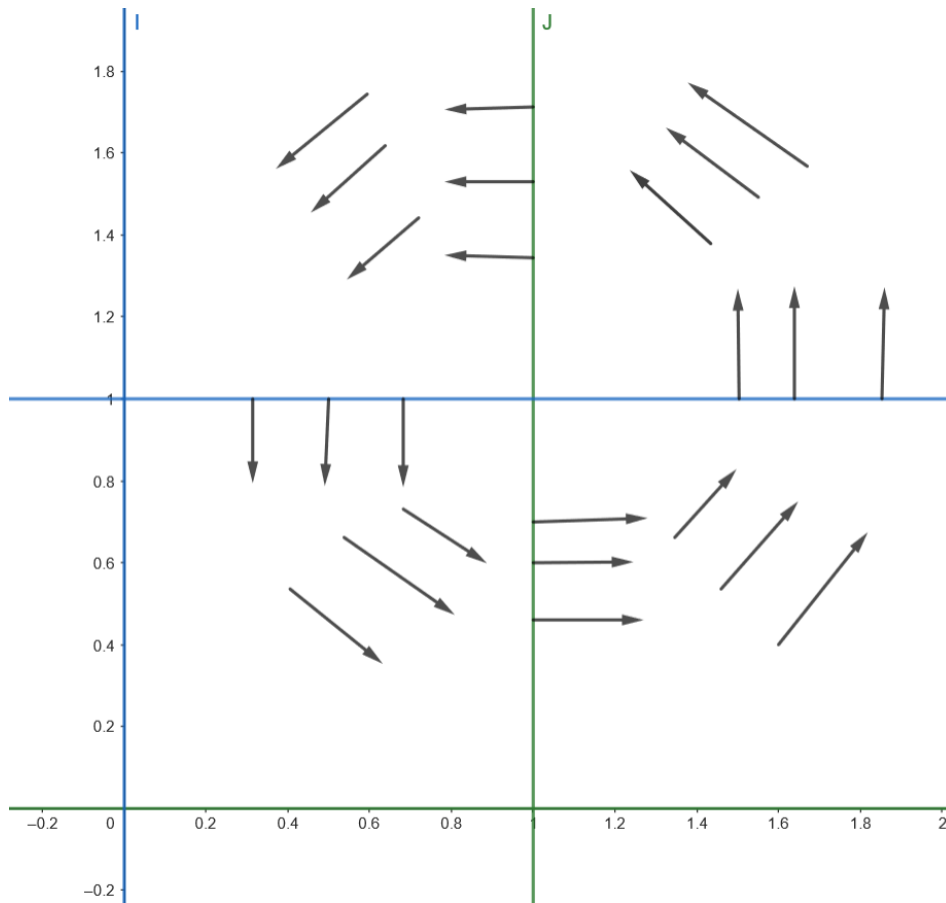


FIGURE 1.11 – Isoclines et allure générale du champs de vecteur : I est en bleu, J en vert : à leur intersections on retrouve les deux points d'équilibre $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

on y devine déjà un mouvement en spirale. Cependant il y a encore de nombreux comportements possibles pour les solutions : les solutions pourraient exploser (tendre vers l'infini), tendre vers un point fixe, etc..

- On définit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2$, la quantité

$$E(x, y) = x - \log(x) + \frac{1}{c} (y - \log(y))$$

Pour étudier la fonction E on commence par étudier la fonction

$$e : x \in \mathbb{R}_{>0} \mapsto x - \log(x)$$

e est dérivable et on a

$$e'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

e' est négative sur $]0, 1[$, positive sur $]1, +\infty[$, et nulle en 1. Ses limites aux extrémités du domaine de définition sont

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \log(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \log(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\log(x)}{x} \right) = +\infty \end{aligned}$$

où la deuxième limite est obtenue par croissance comparée, car $\frac{\log(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Enfin on a $e(1) = 1 - \log(1) = 1$. On peut donc tracer son tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$e'(x)$	-	0	+
$e(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Comme

$$E(x, y) = e(x) + \frac{1}{c}e(y),$$

Cela signifie que la fonction E est minimale en exactement $(x, y) = (1, 1)$.

On prend maintenant $t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de Lotka-Volterra avec comme condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et on étudie l'évolution de $t \mapsto E(x(t), y(t))$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}e(x(t)) + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}e(y(t)) \\
&= \dot{x}e'(x) + \frac{1}{c}\dot{y}e'(y) \text{ (on omet la dépendance en } t \text{ pour alléger les notations)} \\
&= x(1-y)\frac{x-1}{x} + \frac{1}{c}cy(x-1)\frac{y-1}{y} \\
&= (1-y)(x-1) + (x-1)(y-1) = 0
\end{aligned}$$

Autrement dit la quantité $E(x(t), y(t))$ est constante en t le long de la solution : pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$E(x(t), y(t)) = E(x_0, y_0)$$

Cela nous permet de donner une description légèrement plus précise de la solutions.

- Non-extinction/explosion des proies : soit $t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution pour une condition initiale (x_0, y_0) , alors pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
E(x_0, y_0) &= E(x(t), y(t)) \\
&= e(x(t)) + \frac{1}{c}e(y(t)) \\
&\geq e(x(t)) + \frac{1}{c}
\end{aligned}$$

car e est minimale en 1. Cela signifie que $e(x(t)) \leq E(x_0, y_0) - \frac{1}{c}$ pour tout $t \geq 0$. La fonction e tend vers $+\infty$ en 0 et $+\infty$: cela signifie qu'il existe deux nombres $0 < x^{\min} < x^{\max} < +\infty$ tels que pour tout $x < x^{\min}$ ou $x > x^{\max}$, on ait $e(x) > E(x_0, y_0) - \frac{1}{c}$. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$ on a

$$x^{\min} \leq x(t) \leq x^{\max}$$

La population de proies ne va pas exploser, ni s'éteindre.

- Non-extinction/explosion des prédateurs. Le raisonnement est exactement le même : pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
E(x_0, y_0) &= E(x(t), y(t)) \\
&= e(x(t)) + \frac{1}{c}e(y(t)) \\
&\geq 1 + \frac{1}{c}e(y(t))
\end{aligned}$$

car e est minimale en 1. Cela signifie que $e(y(t)) \leq c(E(x_0, y_0) - 1)$ pour tout $t \geq 0$. Par le même argument il existe donc deux nombres $0 < y^{\min} < y^{\max} < +\infty$ tels que pour tout $t \geq 0$ on a

$$y^{\min} \leq y(t) \leq y^{\max}$$

La population de prédateur ne va ni exploser, ni s'éteindre.

- Non-équilibre de la population : on considère toujours une solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ de condition initiale (x_0, y_0) , et on suppose que $(x_0, y_0) \neq (1, 1)$ (la population initiale n'est pas à l'équilibre). Comme e est strictement décroissant sur $]0, 1[$, strictement croissant sur $]1, +\infty[$, cela signifie que

$$E(x_0, y_0) = e(x_0) + \frac{1}{c}e(y_0) > e(1) + \frac{1}{c}e(1) = E(1, 1)$$

Car on a $x_0 \neq 1$ ou $y_0 \neq 1$. On appelle $\epsilon = E(x_0, y_0) - E(1, 1)$: c'est un nombre strictement positif. La fonction E est continue, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ assez proche de $(1, 1)$, on a

$$|E(x, y) - E(1, 1)| < \epsilon$$

Ici, « assez proche de $(1, 1)$ » est pris au sens « $|x - 1| + |y - 1| < \delta$ » où $\delta > 0$ est un petit nombre positif.

Comme $E(x(t), y(t)) = E(x_0, y_0)$ pour tout t , cela signifie que pour tout t on a

$$|x(t) - 1| + |y(t) - 1| \geq \delta$$

Autrement dit, **la population de proies/prédateurs ne s'approche jamais de l'équilibre.**

On pourrait montrer grâce à l'énergie E que les solutions sont effectivement périodiques, mais on se contente de l'admettre pour l'instant.

1.4

Quelques éléments de théorie

Commençons par fixer quelques éléments de vocabulaire.

Définition 1.4.1 Quelques terminologies

Considérons une équation différentielle du type

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse, et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue. On dit que c'est une équation

- **d'ordre k** . Par exemple,

$$\dot{x} = tx + 1 \text{ est d'ordre } 1, \quad \ddot{x} + 4x = 0 \text{ est d'ordre } 2$$

- **autonome** si f ne dépend pas de la variable t .

$$\ddot{x} = 5x - 1 \text{ est autonome, } \ddot{x} = \sin(t)x \text{ ne l'est pas}$$

1.4.1 Existence et unicité des solutions en 1D

Théorème 1.4.1 Existence de solution : cas 1D

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable de dérivées bornées, et $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique fonction dérivable $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) est appelée **problème de Cauchy**, et la condition initiale est généralement donnée au temps $t_0 = 0$. Il est néanmoins utile d'énoncer le théorème pour un temps t_0 quelconque, car la condition d'**unicité** de la solution trouve son importance dans l'interprétation des trajectoires.

Corollaire 1.4.1 Non-intersection des trajectoires

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable de dérivées bornées, et x^1, x^2 deux solutions à $\dot{x} = f(t, x)$. Supposons que x^1 et x^2 ne soient pas confondues, c'est-à-dire qu'il existe t tel que $x^1(t) \neq x^2(t)$, alors

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, x^1(t) \neq x^2(t)$$

Autrement dit, les graphes de deux solutions différentes ne s'intersectent jamais.

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons que $x^1(t_0) = x^2(t_0)$ pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors x^1 et x^2 sont toutes les deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x^1(t_0) \end{cases}$$

Par le théorème précédent, ce problème a une **unique** solution, donc $x^1(t) = x^2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: cela est contraire à l'hypothèse de l'énoncé, que x^1 et x^2 ne sont pas confondues. \square

Quelques commentaires sur les hypothèses du théorème 1.4.1 :

- La condition que f est dérivable (au lieu d'être simplement continue) est nécessaire pour l'unicité. Pour s'en convaincre, on peut prendre la fonction

$$x : t \mapsto t^3$$

Alors la fonction x vérifie $\dot{x}(t) = 3t^2 = 3x(t)^{2/3}$. C'est donc une solution au problème de Cauchy $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$, avec $f(x) = 3x^{2/3}$. La fonction identiquement nulle $t \mapsto 0$ est une autre solution différente du même problème, ce problème admet donc plusieurs solutions distinctes.

- La condition que f est de dérivée bornée est nécessaire pour l'existence des solutions. En effet, si on prend $f(x) = 1 + x^2$ (qui n'est pas de dérivée bornée, car $f'(x) = 2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$), avec la condition initiale $x(0) = 0$, alors la seule solution que l'on puisse définir est $x(t) = \tan(t)$, définie pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec pour limites $\pm\infty$ en $\pm\frac{\pi}{2}$: la solution tend vers l'infini en temps fini.

Dans certains systèmes que l'on considère, l'hypothèse de dérivée bornée n'est pas vérifiée. On peut par exemple penser à l'équation de population logistique basique

$$\dot{x} = x(1 - x)$$

Si $x(0) < 0$, on peut montrer que $x(t)$ n'est pas définie pour tout t et tend vers $-\infty$ en temps fini, comme dans l'exemple ci-dessus. Cependant, dans notre cadre où on ne considère que des population positives, la solution est bien définie en tout temps $t \geq 0$. Dans le reste du cours, on ne considère que des exemples où la solution est définie en tout temps $t \geq 0$, même si les hypothèse du théorème d'existence ne sont pas toujours vérifiées.

La preuve du théorème 1.4.1 est admise.

1.4.2 Calcul de solutions explicites

On peut essayer de résoudre « à la main » une équation 1D autonome de la forme

$$\dot{x} = f(x)$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire une équation autonome (sans dépendance de f selon la variable t). Lorsque $f(x(0)) = 0$, la solution est constante égale à $x(0)$. On suppose que $f(x(0))$ est non-nul, alors selon le théorème 1.2.3, $f(x(t))$ est non-nul et du même signe que $f(x(0))$ pour tout $t \geq 0$, et $x(t)$ reste dans un intervalle I du domaine de définition de f dans lequel f ne s'annule pas. On a alors

$$\forall t \geq 0, \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} = 1$$

On intègre cette équation entre les temps 0 et $t > 0$:

$$\forall t \geq 0, \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{f(x(s))} ds = t$$

On reconnaît dans le terme de gauche la formule de changement de variable dans une intégrale

$$x(t) = z, \quad \dot{x}(t)dt = dz$$

Cela donne

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dz}{f(z)} = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{f(x(s))} ds$$

Les bornes de l'intégrale sont obtenues en notant que $z = x(0)$ correspond à $s = 0$ et $z = x(t)$ correspond à $s = t$. Ainsi, on obtient pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dz}{f(z)} = t$$

Supposons maintenant que l'on connaisse une primitive Φ à $\frac{1}{f}$ sur l'intervalle I (l'intervalle parcouru par $x(t)$), c'est à dire une fonction Φ telle que $\Phi'(z) = \frac{1}{f(z)}$ pour tout $z \in I$. Alors l'égalité ci-dessus se réécrit

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \Phi'(z) dz = \Phi(x(t)) - \Phi(x(0))$$

Il suffit ensuite d'isoler $x(t)$ dans cette équation : c'est toujours possible car $\Phi' = 1/f$ ne change pas de signe, donc Φ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Donnons quelques exemples, en re-suivant le cheminement du calcul ci-dessus :

Exemple.

- $\dot{x} = x$ avec $x(0) = x_0 > 0$. Ici $f(x) = x$ est positive en x_0 , donc la solution $x(t)$ est positive pour tout t et

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

se simplifie en

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 1$$

On intègre :

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(t)dt}{x(t)} = t$$

On fait le changement de variable $x(t) = z$, $\dot{x}(t)dt = dz$.

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dz}{z} = t$$

On reconnaît à gauche que $\frac{1}{z} \ln'(z) = \frac{1}{z}$, d'où

$$\ln(x(t)) - \ln(x_0) = t$$

En isolant $x(t)$ on obtient donc

$$x(t) = \exp(t + \ln(x_0)) = x_0 \exp(t)$$

- $\dot{x} = x(1 - x)$, avec $x(0) = x_0 \in]0, 1[$. Alors $x_0(1 - x_0) > 0$, donc $x(t)$ est strictement croissante. De plus, $x(1 - x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$, et vaut 0 en $x = 0$ et 1 : on en déduit que $x(t)$ reste à valeur dans $]0, 1[$ et tend vers 1. Soit $t \geq 0$, par les calculs précédents on arrive à

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dz}{z(1 - z)} = t$$

On peut alors décomposer

$$\frac{1}{z(1 - z)} = \frac{(1 - z) + z}{z(1 - z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} = \Phi'(z)$$

où

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \ln(z) - \ln(1 - z) \\ &= -\ln\left(\frac{1 - z}{z}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{z} - 1\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$-\ln\left(\frac{1}{x(t)} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x(0)} - 1\right) = t$$

On isole $x(t)$, en plusieurs étapes :

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{1}{x(t)} - 1 \right) &= \ln \left(\frac{1}{x(0)} - 1 \right) - t \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{x(t)} - 1 &= \exp \left(\ln \left(\frac{1}{x(0)} - 1 \right) - t \right) \\
 &= \exp \left(\ln \left(\frac{1 - x(0)}{x(0)} \right) \right) \exp(-t) \\
 &= \frac{1 - x(0)}{x(0)} \exp(-t) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{x(t)} &= 1 + \frac{1 - x(0)}{x(0)} \exp(-t)
 \end{aligned}$$

et donc on obtient la solution explicite à l'équation logistique :

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x(0)}{x(0)} \exp(-t)}$$

Comme $e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, on retrouve bien le fait que $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$.

1.4.3 Existence et unicité dans le cas vectoriel, et à l'ordre 2

Théoreme 1.4.2 Existence de solution : cas vectoriel

Soient $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables de dérivées bornées. Alors pour tout $t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple de fonctions dérivables $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = g(t, x(t), y(t)) \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La propriété de non-intersection des solutions devient alors :

Si (x^1, y^1) et (x^2, y^2) sont deux solutions non-confondues du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = g(t, x(t), y(t)) \end{cases},$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(x^1(t), y^1(t)) \neq (x^2(t), y^2(t))$.

Autrement dit, $x^1(t) \neq x^2(t)$ ou $y^1(t) \neq y^2(t)$.

Théoreme 1.4.3 Existence de solution : cas de l'ordre supérieur

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée bornée. Alors pour tout $t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable deux fois telle que

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

La propriété de non-intersection des solutions devient alors :

Si x^1 et x^2 sont deux solutions non-confondues de la même équation $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x^1(t) \neq x^2(t)$ ou $\dot{x}^1(t) \neq \dot{x}^2(t)$.

1.5.1 Cas unidimensionnel

On considère ici des équations de la forme

$$\dot{x} = f(x)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Un point d'équilibre de cette équation est une valeur $x^{eq} \in \mathbb{R}$ telle que $f(x^{eq}) = 0$. La raison de cette terminaison est la suivante : la fonction constante

$$t \in \mathbb{R} \mapsto x^{eq}$$

est alors solution de $\dot{x} = f(x)$, autrement dit le processus démarrant de x^{eq} est à l'équilibre et y reste. Une question centrale de l'étude des équations différentielles est la suivante :

Si $x(t)$ est une trajectoire qui démarre proche d'un point d'équilibre, est-ce que $x(t)$ reste proche de ce point pour $t \rightarrow \infty$?

Définition 1.5.1 Stabilité

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x^{eq} \in \mathbb{R}$ un point d'équilibre, on dit que x^{eq} est **stable** si toute trajectoire solution de $\dot{x} = f(x)$ démarrant suffisamment proche de x^{eq} au temps $t = 0$, reste proche de x^{eq} pour tout temps $t \geq 0$:

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute solution $x = x(t)$,

$$|x(0) - x^{eq}| < \delta \text{ implique que } |x(t) - x^{eq}| < \epsilon \text{ pour tout } t > 0.$$

On dit qu'un point est asymptotiquement stable si en plus d'être stable, toute trajectoire $x = x(t)$ qui démarre suffisamment proche converge vers x^{eq} quand $t \rightarrow +\infty$.

Si un point n'est pas stable, on dit qu'il est instable, ce qui peut se réécrire de la manière suivante :

Il existe $\epsilon_0 > 0$, tel que pour tout $\delta > 0$ on trouve une solution $x = x(t)$ vérifiant

$$|x(0) - x^{eq}| < \delta \text{ et } |x(t) - x^{eq}| > \epsilon_0 \text{ pour un } t > 0 \text{ assez grand.}$$

Autrement dit, un point d'équilibre stable est un point pour lequel toute trajectoire démarrant à proximité, reste proche en tout temps positif, mais on ne demande pas à ce que la trajectoire converge vers le point d'équilibre.

Exemple.

- $f(x) = x(1 - x)$. Ici il y a deux points d'équilibre : 0 et 1. On rappelle que toute solution $x(t)$ avec $x(0) > 0$ vérifie $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$. 0 est donc **instable** et 1 est **asymptotiquement stable**.

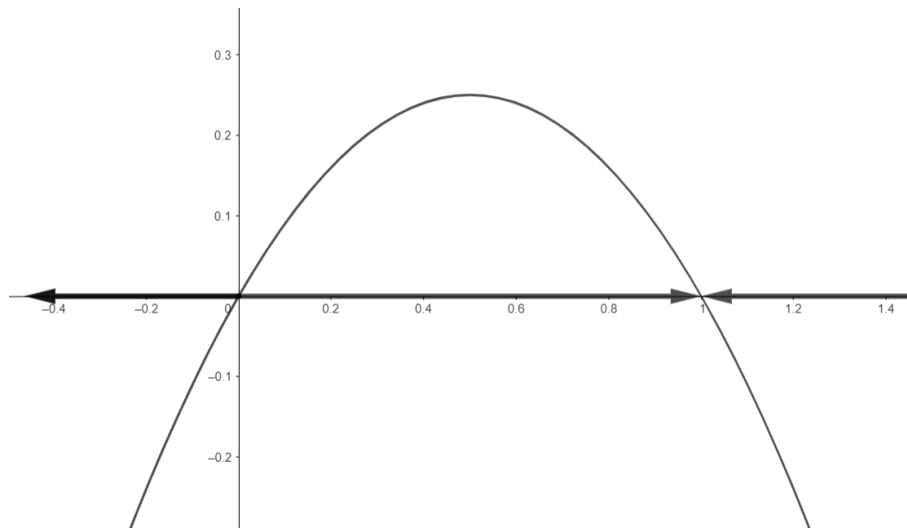


FIGURE 1.12 – Illustration de la stabilité pour l'équation logistique

- $f(x) = \sin(x)^2$. Les points d'équilibres sont les $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour toute solution $x(t)$ on a

$$x(0) \in (k\pi, (k+1)\pi) \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} (k+1)\pi.$$

Tous les points d'équilibres sont donc instables : pour tout k , la solution démarrante de $k\pi + \delta$ pour $\delta > 0$ arbitrairement petit converge vers $k\pi + \pi$. Il est cependant notable que les points d'équilibres soient tous « stables à gauche », c'est à dire que toute solution $t \mapsto x(t)$ telle que $x(0) \approx k\pi$ et $x(0) < k\pi$, converge vers ce point d'équilibre.

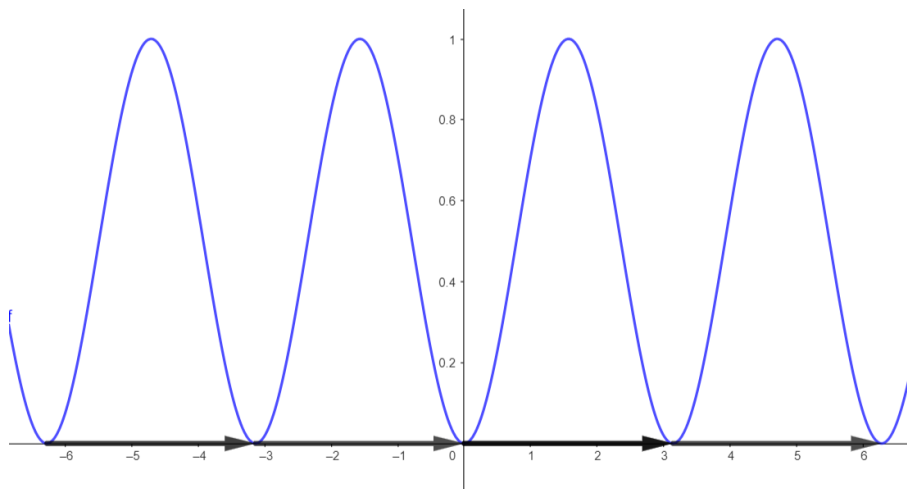


FIGURE 1.13 – Instabilité de tous les points d'équilibre

En une dimension, il y a un critère simple pour dire si un point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Théoreme 1.5.1 Critère de stabilité asymptotique en 1D

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, x^{eq} un point d'équilibre de f , alors x^{eq} est asymptotiquement stable si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que

- $f(x) > 0$ pour tout $x \in]x^{eq} - \epsilon, x^{eq}[$.
- $f(x) < 0$ pour tout $x \in]x^{eq}, x^{eq} + \epsilon[$.

Exemples :

- $f(x) = -x : x^{eq} = 0$ est stable.
- $f(x) = x(1 - x)^3 : x^{eq} = 1$ est asymptotiquement stable.

Pour vérifier la stabilité ou l'instabilité d'un point, on pourra utiliser dans la plupart des cas le critère simplifié suivant.

Corollaire 1.5.1 Critère de stabilité simplifié

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, x^{eq} un point d'équilibre de f , alors :

- Si $f'(x^{eq}) < 0$, alors x^{eq} est asymptotiquement stable.
- Si $f'(x^{eq}) > 0$, alors x^{eq} est instable.

Ce corollaire ne dit rien dans le cas où $f'(x^{eq}) = 0$: pour cela il faut revenir à une étude plus détaillée du signe de la fonction.

Exemple. Modèle de pêche

On considère une population de poissons x qui suit une équation logistique, avec un terme de réduction de la population lié à la pêche

$$\dot{x} = x(1 - x) - P(x)$$

où P est une fonction de x tel que $P(x(t))\Delta t$ est le nombre de poissons pêchés entre les temps t et $t + \Delta t$, pour $\Delta t \rightarrow 0$. On suppose que P est positive, et on fait les hypothèses suivantes sur P :

- 1 P est une fonction croissante : plus il y a de poissons, plus on en pêche.
- 2 En présence d'une abondance de poissons, les pêcheurs en prélèvent un taux constant h : $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = h$. On suppose de plus que ce seuil est rapidement atteint : $P(x)$ est proche de h pour des petites valeurs de x .
- 3 $P(0) = 0$ (pas de poissons, pas de pêche).

On prend la fonction :

$$P(x) = \frac{hx}{\epsilon + x}$$

où $h > 0$ est la limite de P en l'infini et $\epsilon > 0$ est supposé petit ($\epsilon < 1$). On peut vérifier que cette fonction vérifie les hypothèses attendues : on a $P(0) = 0$,

$$P'(x) = \frac{h(\epsilon + x) - hx}{(\epsilon + x)^2} = \frac{h\epsilon}{(\epsilon + x)^2} > 0$$

ainsi que

$$\frac{hx}{\epsilon + x} = \frac{h}{\frac{\epsilon}{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{h}{1} = h$$

Et lorsque ϵ est petit, la fonction $x \mapsto \frac{hx}{\epsilon + x}$ a l'allure suivante :

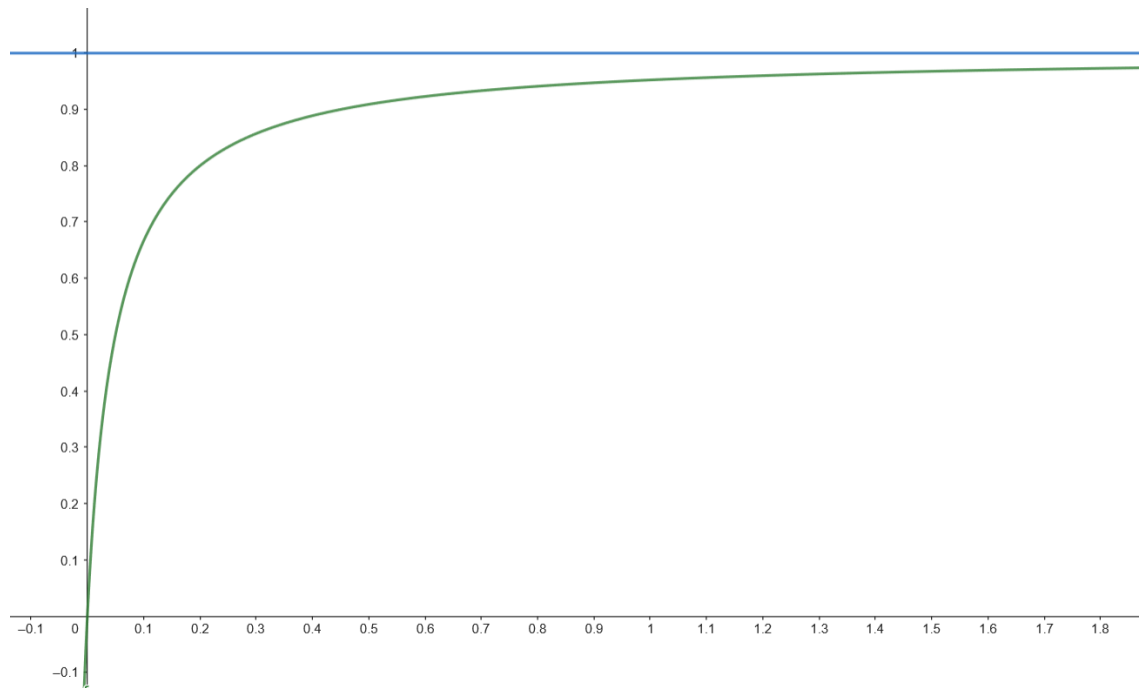


FIGURE 1.14 – affichage de la fonction P (en vert) pour $h = 1$, $\epsilon = 0.05$, et sa droite asymptotique (en bleu).

On note donc que la fonction prend rapidement des valeurs proches de h . On regarde donc l'équation

$$\dot{x} = x(1 - x) - \frac{hx}{\epsilon + x} =: f(x)$$

On remarque directement que $f(0) = 0$, donc 0 (la population nulle) est un point d'équilibre. Dire que 0 est un équilibre asymptotiquement stable revient à dire que toute population initiale proche de 0 entraîne une évolution de population qui tend vers 0 (on parle d'extinction). Au contraire, si $f(x) > 0$ pour $x > 0$ petit, alors toute population initiale positive proche de 0 va croître (et la population va donc survivre). On peut directement trancher cette question en regardant la dérivée de f en 0 :

$$f'(x) = (x(1 - x))' - P'(x) = 1 - 2x - \frac{h\epsilon}{(\epsilon + x)^2}$$

et donc

$$f'(0) = 1 - \frac{h}{\epsilon}$$

- Si $h > \epsilon$, alors $f'(0) < 0$ donc 0 est stable : si la population initiale de poissons est faible, alors celle-ci tend vers 0.
- Si $h < \epsilon$, alors $f'(0) > 0$ donc 0 est instable et $f(x) > 0$ pour x positif proche de 0 : la population survit.

Pour comprendre plus finement les points d'équilibres et le sens de variation des solutions,

on établit le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Pour cela on factorise f :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(1 - x - \frac{h}{\epsilon + x} \right) \\ &= \frac{x((1-x)(\epsilon+x) - h)}{\epsilon + x} \\ &= \frac{x(\epsilon + x - \epsilon x - x^2 - h)}{\epsilon + x} \\ &= \frac{-x(x^2 - (1-\epsilon)x + (h-\epsilon))}{\epsilon + x} \end{aligned}$$

Notons déjà que $\frac{-x}{\epsilon+x}$ est toujours négatif pour $x \geq 0$. Il reste à étudier le signe de $x^2 - (1-\epsilon)x + (h-\epsilon)$. Pour cela on regarde son discriminant

$$\Delta = (1-\epsilon)^2 - 4(h-\epsilon) = 1 - 2\epsilon + \epsilon^2 + 4\epsilon - 4h = (1+\epsilon)^2 - 4h.$$

On différencie alors deux cas :

- $h > \frac{(1+\epsilon)^2}{4}$: dans ce cas, le discriminant est négatif, et cette équation du second degré n'a donc pas de racines réelles. Le tableau de signe de f est donc de la forme suivante

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	-

et **toute** population initiale positive tend vers 0 (la pêche entraîne donc l'extinction dans tous les cas).

- $h < \frac{(1+\epsilon)^2}{4}$: Le discriminant Δ est maintenant positif. Il y a donc deux racines réelles x^\pm données par

$$x^\pm = \frac{1-\epsilon \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Choisies telles que $x^- < x^+$. Pour établir le tableau de signe de f , il faut comparer ces racines à 0. Comme ϵ est petit ($\epsilon < 1$), on a toujours

$$x^+ = \frac{1-\epsilon + \sqrt{(1+\epsilon)^2 - 4h}}{2} > \frac{1-\epsilon}{2} > 0$$

Et pour x^- , on raisonne par équivalence :

$$x^- > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\epsilon - \sqrt{(1+\epsilon)^2 - 4h}}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\epsilon > \sqrt{(1+\epsilon)^2 - 4h}$$

$$\Leftrightarrow (1-\epsilon)^2 > (1+\epsilon)^2 - 4h$$

on a passé au carré de chaque côté : c'est une équivalence car chaque côté est positif

$$\Leftrightarrow 4h > (1+\epsilon)^2 - (1-\epsilon)^2$$

$$\Leftrightarrow h > \frac{(1+\epsilon)^2 - (1-\epsilon)^2}{4} \left(= \frac{1+2\epsilon+\epsilon^2 - 1+2\epsilon-\epsilon^2}{4} = \epsilon \right)$$

Il faut donc différencier selon la condition $h > \epsilon$ ou $h < \epsilon$. A noter que les deux peuvent se produire, car la condition $h < \frac{(1+\epsilon)^2}{4}$ n'entraîne pas $h < \epsilon$, car on a toujours $\epsilon < \frac{(1+\epsilon)^2}{4}$. Cela se voit par le calcul suivant :

$$\frac{(1+\epsilon)^2}{4} - \epsilon = \frac{1+2\epsilon+\epsilon^2-4\epsilon}{4} = \frac{1-2\epsilon+\epsilon^2}{4} = \frac{(1-\epsilon)^2}{4} > 0$$

L'intervalle $[\epsilon, \frac{(1+\epsilon)^2}{4}]$ est donc non-vide, ce qui prouve que cette situation peut se produire. En distinguant ces deux cas on obtient :

- ❶ $\epsilon < h < \frac{(1+\epsilon)^2}{4}$: dans ce cas, on a $0 < x^- < x^+$, et le tableau de signe prend la forme suivante :

x	0	x^-	x^+	$+\infty$		
$f(x)$	0	—	0	+	0	—

On peut l'interpréter de la manière suivante : toute population initiale x_0 trop petite ($0 < x_0 < x^-$) va décroître et tendre vers 0 (qui est donc asymptotiquement stable), et toute population initiale supérieure à x^- va tendre vers la limite x^+ . Les équilibres stables sont 0, x^+ , et x^- est instable. Autrement dit, il existe un seuil critique (x^-) en dessous duquel la pêche mène à l'extinction de la population de poissons, tandis qu'au dessus de ce seuil celle-ci survit et tend vers une population limite $x^+ (> x^-)$.

- ❷ $0 < h < \epsilon$: dans ce cas, on a $x^- < 0 < x^+$, et le tableau de signe prend la forme suivante :

x	0	x^+	$+\infty$	
$f(x)$	0	+	0	-

Dans ce cas, toute population initiale strictement positive tend vers l'équilibre x^+ , qui est asymptotiquement stable. 0 est un équilibre instable. Autrement dit toute population de poisson strictement positive survit (c'est-à-dire, ne tend pas vers 0) et tend vers une population limite $x^+ > 0$.

1.5.2 Cas bidimensionnel

On considère ici des équations de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

où $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Un point d'équilibre de cette équation est un point (x^{eq}, y^{eq}) tel que

$$\begin{cases} f(x^{eq}, y^{eq}) = 0 \\ g(x^{eq}, y^{eq}) = 0 \end{cases}$$

La stabilité est définie de la même manière, mais est plus délicate à manier en général.

Définition 1.5.2 Stabilité

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $(x^{eq}, y^{eq}) \in \mathbb{R}^2$ un point d'équilibre, on dit que (x^{eq}, y^{eq}) est stable lorsque la propriété suivante est vérifiée :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute solution $(x(t), y(t))$,

$$|x(0) - x^{eq}| + |y(0) - y^{eq}| < \delta \text{ implique que } |x(t) - x^{eq}| + |y(t) - y^{eq}| < \epsilon \text{ pour tout } t > 0$$

On dit qu'un point est asymptotiquement stable si en plus d'être stable, toute trajectoire qui démarre suffisamment proche de (x^{eq}, y^{eq}) converge vers (x^{eq}, y^{eq}) quand $t \rightarrow +\infty$.

Si un point n'est pas stable, on dit qu'il est instable.

La notion de stabilité en deux dimensions sera étudiée au chapitre suivant, on se contente ici d'illustrer graphiquement certains points d'équilibres stables/instables, et de la montrer dans un cas particulier : le pendule linéarisé, avec ou non de l'amortissement.

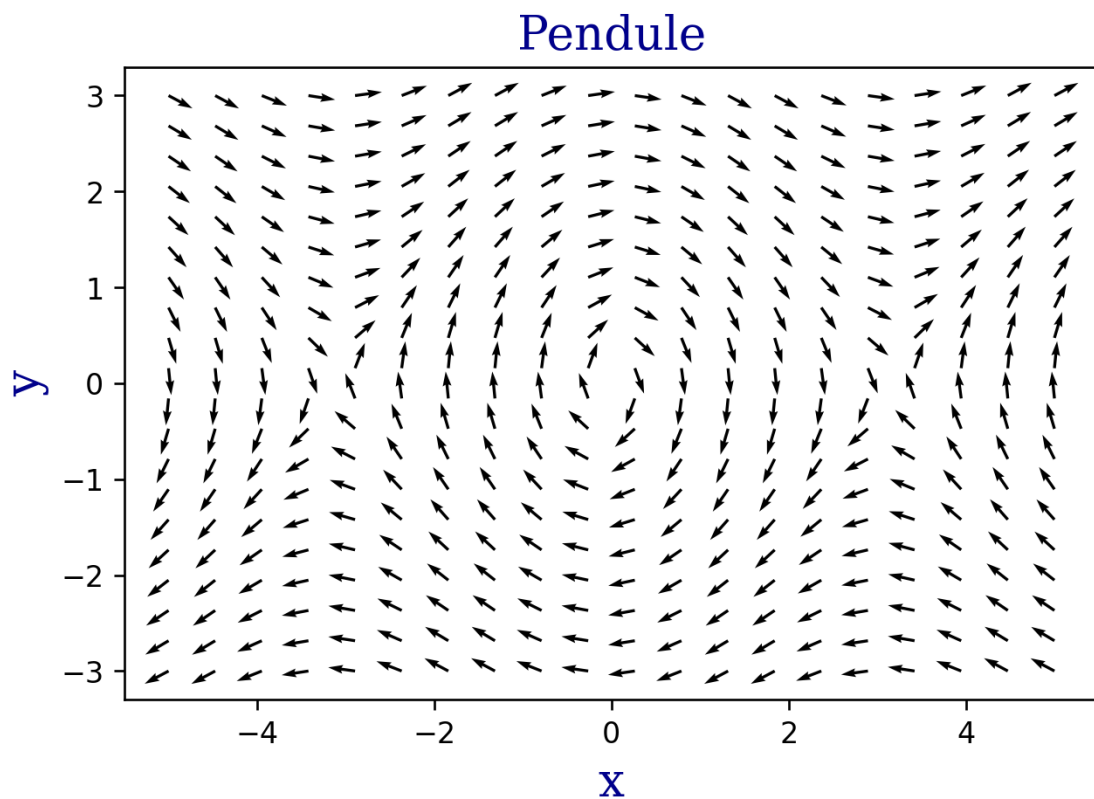


FIGURE 1.15 – Champs de vecteur associée à l'équation du pendule $\ddot{x} + \sin(x) = 0$. On observe au centre un point stable (mais pas asymptotiquement) qui correspond à la position de repos du pendule - les trajectoires oscillent autour - et de chaque côté des points instables, qui correspondent à la position verticale.

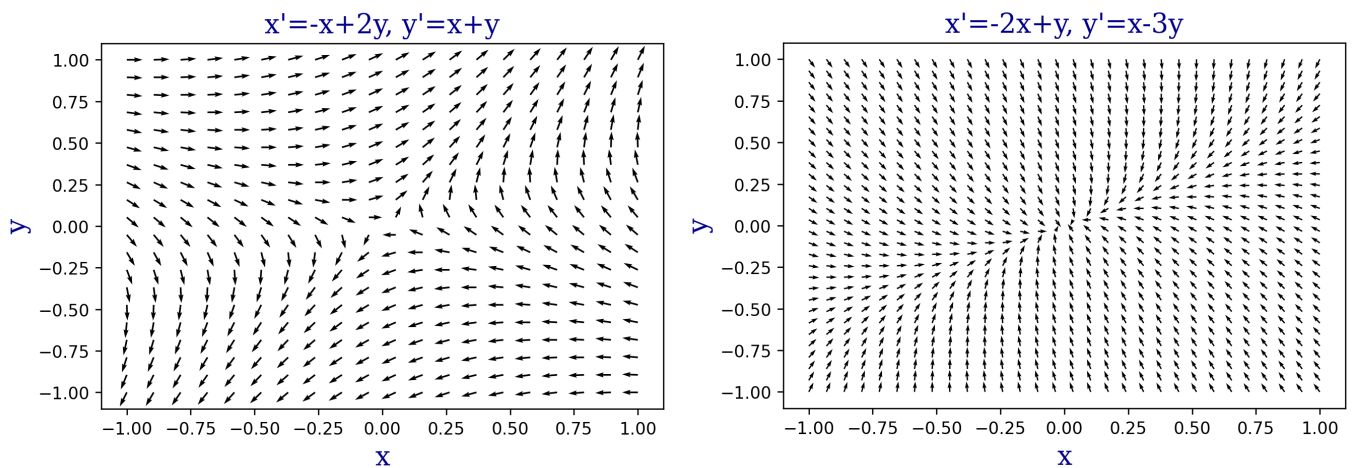


FIGURE 1.16 – Deux champs associés à une équation linéaires : celui de gauche est instable, celui de droite est (asymptotiquement) stable.

1.6

Simulation numériques : autres méthodes

Considérons une équation unidimensionnelle avec condition initiale au temps 0

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x^{\text{init}} \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x^{\text{init}} \in \mathbb{R}$ est la condition initiale. On a vu précédemment une méthode pour approcher numériquement la fonction $x(t)$.

Notons x_{exp}^N la fonction obtenue par la méthode d'Euler explicite, présentée dans la sous-section 1.2.2. On a vu précédemment que x_{exp}^N est une approximation de la solution exacte x à l'ordre $\frac{1}{N}$, c'est-à-dire que

$$\text{pour tout } i = 0, \dots, N, |x(t_i) - x_{\text{exp}}^N(t_i)| \leq \frac{C}{N}$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de N . De manière générale on dit que cette méthode est **d'ordre 1**, où l'ordre est défini au sens suivant :

Définition 1.6.1 Ordre de convergence

Soit $x(t)$ une solution de $\dot{x} = f(x)$, et $x^N(t_i)$ une approximation de $x(t_i)$, pour $i = 0, 1, \dots, N$. On dit que la méthode d'approximation associée est **d'ordre** au moins k lorsqu'il existe une constante $C > 0$ (indépendante de N) telle que

$$\text{pour tout } N \geq 1, i = 0, \dots, N, |x(t_i) - x^N(t_i)| \leq \frac{C}{N^k}.$$

On parle en particulier de convergence **linéaire** lorsque $k = 1$ et de convergence **quadratique** lorsque $k = 2$.

L'intérêt d'un meilleur ordre de convergence est que l'on peut réduire considérablement le nombre d'opération nécessaire (et donc le temps de calcul) pour un résultat de précision équivalente. L'ordre de convergence d'une méthode peut être estimé de la manière suivante : on note

$$E^N = \max_{i=0,\dots,N} |x(t_i) - x^N(t_i)|$$

l'erreur faite au rang N , et alors l'inégalité

$$E^N \leq \frac{C}{N^k}$$

est équivalente à

$$\ln(E^N) \leq \ln(C) - k \ln(N)$$

Autrement dit, lorsque le graphe de $\ln(E^N)$ tracé en fonction de $\ln(N)$ admet une droite asymptote à l'infini, celle-ci est de la forme $y \mapsto -ky + b$ où k est l'**ordre** de la méthode : l'ordre d'une méthode peut être approché par une regression linéaire sur le graphe de $\ln(E^N)$ selon $\ln(N)$, ou plus simplement en notant que

$$\frac{\ln(E^N)}{\ln(N)} \leq \frac{\ln(C)}{\ln(N)} - k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -k$$

et l'ordre de la méthode est donc la limite, **lorsqu'elle existe**, de

$$-\frac{\ln(E^N)}{\ln(N)}$$

On donne maintenant plusieurs méthodes alternatives (qui ne sont pas à connaître par coeur !) à la méthode d'Euler explicite qui peuvent présenter certains avantages par rapport à celle-ci. Dans chaque exemple, on préserve le choix initial de notation : l'intervalle $[0, T]$ est divisé en intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = \frac{iT}{N}$ et on cherche une approximation x_i de $x(t_i)$:

1 Méthode d'Euler implicite.

$$\begin{cases} x_0 = x^{\text{init}} \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t f(t_{i+1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

À noter que cette méthode n'est pas calculable aussi directement que la méthode explicite : x_{i+1} est défini en fonction de lui-même (d'où le nom « implicite ») ! Ainsi pour mettre cette méthode en oeuvre il faut, à chaque rang, résoudre numériquement l'équation

$$x = x_i + \Delta t f(t_{i+1}, x)$$

en $x \in \mathbb{R}$. Pour une fonction générale f il n'y a pas forcément de solution explicite, d'où la nécessité de mettre en oeuvre une résolution numérique (et donc approchée) de cette équation, par des méthodes qui seront explorées en exercice.

La vitesse de convergence de cette méthode est du même ordre que la méthode explicite : en notant x_{imp}^N la fonction approchée obtenue par interpolation, on a

$$\text{pour tout } i = 0, \dots, N, |x(t_i) - x_{imp}^N(t_i)| \leq \frac{C}{N}$$

L'avantage de cette méthode est plus subtil : dans de nombreuses situation (par exemple un système physique avec une préservation d'énergie qui prend une forme « raisonnable ») la méthode explicite tend à faire croître l'énergie, et la méthode implicite à la décroître, ce qui est toujours préférable. Cela se traduit en une meilleure convergence.

2 Méthode de Crank-Nicolson.

$$\begin{cases} x_0 = x^{\text{init}} \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t \frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})}{2} \end{cases}$$

Il s'agit d'un entre-deux par rapport à la méthode précédente : cela demande aussi de résoudre numériquement à chaque étape l'équation

$$x = x_i + \Delta t \frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x)}{2}$$

L'avantage de cette méthode par rapport aux deux précédentes est la vitesse de convergence : c'est une méthode d'ordre 2, c'est-à-dire que la solution approchée x_{cn}^N construite par cette méthode vérifie

$$\text{pour tout } i = 0, \dots, N, |x(t_i) - x_{cn}^N(t_i)| \leq \frac{C}{N^2}$$

3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.

$$\begin{cases} x_0 = x^{\text{init}} \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} f(t_i, x_i)\right) \end{cases}$$

c'est une méthode **explicite** qui ne demande pas de résoudre d'équation à chaque étape, avec une approximation en deux temps du successeur x_{i+1} . On peut l'écrire de manière plus lisible en introduisant le calcul auxiliaire du point $\tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{cases} x_0 = x^{\text{init}} \\ \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{\Delta t}{2} f(t_i, x_i) \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$$

C'est une méthode d'ordre 2, c'est-à-dire que la solution approchée x_{rk2}^N construite par cette méthode vérifie

$$\text{pour tout } i = 0, \dots, N, |x(t_i) - x_{rk2}^N(t_i)| \leq \frac{C}{N^2}$$

4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Cette méthode est plus calculatoire et nécessite l'introduction de variables auxiliaires pour être lisible. D'abord on pose, comme précédemment

$$x_0 = x^{\text{init}}$$

et pour tout $i < N$, on définit

$$\begin{cases} k_{i,1} = f(t_i, x_i) \\ k_{i,2} = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{i,1}\right) \\ k_{i,3} = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{i,2}\right) \\ k_{i,4} = f(t_i + \Delta t, x_i + \Delta t k_{i,3}) \end{cases}$$

et on pose enfin

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \frac{k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4}}{6}$$

Cette méthode est d'ordre 4, c'est à dire que

$$\text{pour tout } i = 0, \dots, N, |x(t_i) - x_{rk4}^N(t_i)| \leq \frac{C}{N^4}$$

Il existe des méthodes d'ordre encore supérieur, mais celles-ci gagnent vite en complexité de calcul à chaque étape et bien que l'erreur soit petite, il peut apparaître des soucis de **stabilité** où les solutions calculées peuvent diverger vers l'infini alors que la solution exacte ne diverge pas. Dans certaines situation on pourra même préférer une méthode moins précise mais plus stable, et en pratique cela est généralement un choix fait en regardant de près les propriétés attendues de la solution exacte :

- si c'est une équation issue de la physique, le schéma préserve-t-il des quantités physiques attendue (énergie mécanique, moment cinétique) ? Dans le cas où il ne les préserve pas, on préférera un schéma qui fait **diminuer** l'énergie plutôt que l'augmenter.
- pour une équation issue de la chimie, le schéma peut-il donner des concentrations de réactif négatives ou autre quantités non-physiques ?
- pour une équation de dynamique des population, le schéma peut-il sortir d'un cadre défini à l'avance, comme le fait d'avoir une population totale positive ?

Les réponses à ces questions permettent de choisir un schéma adapté à la situation.

Tout comme la méthode d'Euler explicite, les méthodes précédentes peuvent s'adapter aux équation vectorielles ou aux équation d'ordre 2. Il y a néanmoins une nouvelle subtilité dans l'utilisation des méthodes implicites, qui demandent maintenant de résoudre tout un système d'équation à chaque pas. On peut par exemple écrire la méthode d'Euler implicite pour l'équation ci-dessus :

$$\begin{cases} x_0 = x^{\text{init}}, y_0 = y^{\text{init}} \\ x_{i+1} = x_i + \Delta t f(t_{i+1}, x_{i+1}, y_{i+1}) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t g(t_{i+1}, x_{i+1}, y_{i+1}). \end{cases}$$

Ainsi, à chaque étape il faut résoudre une équation à **deux** variables.