Université Grenoble Alpes **Frédérique Leblanc**
L2/STA351 –

Examen Terminal 2017-2018

Durée : 2h.

Documents autorisés : 2 pages manuscrites recto-verso, tables statistiques (8 pages), calculatrice programmable (celle du Bac).

Recommandations : soin dans la rédaction et l'orthographe ; inutile de recopier les notes de cours au hasard ; indiquer lorsque c'est explicitement demandé l'expression formelle des statistiques utilisées pour produire les valeurs numériques obtenues ; répondre dans les champs grisés et directement sur le sujet.

Barême : Il est seulement indicatif et proposé ici sur 40 points.

Exercice 1 (15 points) :

Un laboratoire utilise un appareil de mesure optique destiné à mesurer la concentration des solutions de fluoresceïne. Les résultats des mesures sont modélisés par une variable aléatoire normale dont l'espérance μ est égale à la concentration réelle de la solution, et l'écart-type, garanti par le constructeur, est connu et vaut $\sigma = 0.05$.

1. (3 points) On effectue 9 mesures à partir d'une solution donnée. La moyenne empirique des 9 mesures est 4.38 mg/l. Donner un intervalle de confiance pour la concentration réelle de la solution, au niveau de confiance 0.99.

Solution:

— l'expression formelle de l'intervalle utilisé est :

$$I(\quad ;\alpha) = \Big[\qquad\qquad ; \qquad\qquad \Big]$$

— **A.N.** : pour $\bar{x} =$; $n =$; $\alpha =$; ... on obtient :

$$I_{calc}(\quad ; \quad) = [\qquad ; \qquad]$$

2. (2 points) Pour le même échantillon, quel est le niveau de confiance de l'intervalle $[4.36; 4.40]$?

Solution:

3. (2 points) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour connaître la concentration réelle de la solution, au niveau de confiance 0.99 avec une précision de $\pm 0.01 mg/l$?

Solution:

4. (4 points) Sur le même échantillon de 9 mesures, on a observé un écart-type empirique de 0.08mg/l. Donner un intervalle de confiance pour **l'écart-type réel**, de niveau de confiance 0.99. Que pensez-vous de la garantie du constructeur ?

Solution:
Dans ce cas l'intervalle de confiance pour ... est donné par :

$$I(\quad ; \alpha) = \left[\quad ; \quad \right]$$

et pour l'échantillon observé on a :
A.N. : $\alpha =$, $n =$, ... d'où :

$$I_{calc}(\quad ; \quad) = [\quad ; \quad]$$

et on en déduit l'intervalle de confiance sur σ : ...

$$I_{calc}(\quad ; \quad) = [\quad ; \quad]$$

Commentaire :

5. (3 points) Reprendre la première question, en supposant cette fois que l'écart-type de la loi des mesures est inconnu, et estimé.

Solution:
- L'estimation sans biais de σ est $\hat{\sigma} =$ ...
- Dans ce cas l'intervalle de confiance pour ... est donné par :

  $$I(\quad ; \alpha) = \left[\quad ; \quad \right]$$

  et pour l'échantillon observé on a :
  A.N. : $\alpha =$, $n =$, ... d'où :

  $$I_{calc}(\quad ; \quad) = [\quad ; \quad]$$

6. (1 point) Comparer les intervalles obtenus dans la première et la dernière question et commenter :

Solution:

Exercice 2 (6 points) :

Une clinique a proposé une nouvelle opération chirurgicale, et a connu 160 réussites, sur 200 tentatives. On note p le pourcentage de réussite de cette nouvelle opération.

1. (1 point) Quelle estimation de p proposez-vous ?

Solution:

$$\hat{p} = \qquad\qquad =$$

2. (3 points) En utilisant l'approximation normale, donner un intervalle de confiance pour p de niveau de confiance approximatif 0.95 :

Solution:
L'expression formelle de l'intervalle utilisé est donné par :

$$I(\quad ; \alpha) = \Big[\qquad\qquad\qquad ; \qquad\qquad\qquad \Big]$$

A.N. : pour $\hat{p} =$ $\quad ; n =$ $\quad ; \alpha =$ $\quad ; \ldots$ on obtient :

$$I_{calc}(\quad ; \quad) = [\qquad\qquad ; \qquad\qquad]$$

3. (2 points) Combien d'opérations la clinique devrait-elle réaliser pour connaître le pourcentage de réussite avec une précision de plus ou moins 1%, au niveau de confiance 0.95 (on supposera que $\hat{p}$ est celui obtenu précédemment) ?

Solution:

Exercice 3 (6 points) :

Neuf malades présentant des symptômes d'anxiété reçoivent un tranquillisant. On évalue l'état du malade avant et après traitement par un indice que le médecin traitant calcule d'après les réponses à une série de questions. Si le traitement est efficace, l'indice doit diminuer. Les valeurs observées de cet indice sur les 9 patients sont les suivantes :

Avant	1.83	0.5	1.62	2.48	1.68	1.88	1.55	3.06	1.3
Après	0.88	0.65	0.59	2.05	1.06	1.29	1.06	3.14	1.29

1. (1 point) Les échantillons sont-ils appariés ou indépendants ?

Solution:

2. (1 point) Préciser les hypothèses de modélisation :

Solution:

3. (4 points) Mettre en oeuvre le test au niveau 5%.

Solution:

— Poser les hypothèses du test :

$$\mathcal{H}_0 : \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{H}_1 :$$

— La statistique de test et la région de rejet sont données par :

$$T = \qquad\qquad \text{et} \qquad W_\alpha = \{ \qquad\qquad \}$$

— **A.N. :** $n =$, $\alpha =$, ...

$$T_{calc} = \qquad\qquad \text{et} \qquad W_{0.05} = \{ \qquad\qquad \}$$

— **Conclusion littérale :**

Exercice 4 (9 points)

Pour déterminer le poids moyen d'un épi de blé appartenant à deux variétés, on procède à 9 pesées pour chaque variété. On donne les moyennes et variances empiriques des deux échantillons :

$$\bar{x} = 170; \quad \bar{y} = 168; \quad s_x^2 = 432; \quad s_y^2 = 182.$$

On notera X le poids d'un épi de la première variété et Y celui de la seconde, μ_x, μ_y leurs espérances respectives, σ_x^2, σ_y^2 leurs variances respectives et n_x, n_y les tailles des échantillons.

1. (1 point) Préciser les hypothèses de modélisation.

Solution:

2. (4 points) Tester l'égalité des variances au niveau $\alpha = 5\%$:

Solution:

— Poser les hypothèses du test :

$$\mathcal{H}_0 : \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{H}_1 :$$

— La statistique de test et la région de rejet sont données par :

$$T = \qquad\qquad \text{et} \qquad W_\alpha = \{T... \qquad \text{ou} \quad T... \qquad \}$$

— **A.N. :** $n_x = n_y =$, ...

$$T_{calc} = \qquad\qquad \text{et} \qquad W_{0.05} = \{T... \qquad \text{ou} \quad T... \qquad \}$$

— Comme T_{calc} ... $W_{0.05}$ dans un test de niveau 5% on concluera ...

3. (4 points) Compte tenu du résultat précédent, indiquer l'hypothèse supplémentaire à faire sur le modèle pour pouvoir comparer les espérances de X et Y et mettre en oeuvre le test permettant de savoir si les deux espèces sont en moyenne significativement différentes :

Solution:

— Hypothèse à rajouter sur le modèle :

— Hypothèses du test :

$\mathcal{H}_0$: $\mathcal{H}_1$:

— Statistique de test et région de rejet :

$T =$ - avec $\Sigma^2 =$ et $W_\alpha = \{ \quad \}$

— Calcul de T et de la p-valeur :

$T_{calc} =$; $p - valeur =$

— **Conclusion littérale :**

Exercice 5 (4 points) :

On souhaite savoir si un dé à six faces déclaré non pipé l'est réellement. On fait 120 tirages de ce dé et on relève les données suivantes :

Face obtenue	1	2	3	4	5	6
Effectifs obs.	15	15	25	25	26	14

1. (4 points) Proposer un test statistique pour répondre à cette question. Indiquer les hypothèses testées, le test (statistique de test et région de rejet au niveau α) et les conditions à vérifier avant sa mise en oeuvre. Calculer la statistique de test et la p-valeur du test, puis donner une conclusion littérale.

Solution: