Partiel – MAT 101 – 2023/2024

Durée : 2 heure

Mercredi 25 octobre 2023

Les calculatrices, téléphones portables et tout document sont interdits.

Exercice 1 *Question de cours*

______/2 p.

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, tels que $a \neq 0$. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Montrer que les solutions $z \in \mathbb{C}$ de

$$az^2 + bz + c = 0$$

sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Solution 1

2 p.

Voir cours.

Exercice 2

______/5 p.

Soit

$$z_1 = \frac{-2}{1-i\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}.$$

1. *(1 point pour chaque nombre)* Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. *(1 point pour chaque nombre)* Mettre z_1 et z_2 sous forme polaire.
3. *(1 point)* En utilisant la question précédente, déterminer l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Solution 2

5 p.

1. On a

$$z_1 = \frac{-2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et

$$z_2 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{5+5i} = \frac{1}{5}\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{10} - \frac{i}{10}.$$

2. On a $|z_1| = 1$ et

$$\frac{z_1}{|z_1|} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

D'où

$$z_1 = \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

On a $|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{10}$ et

$$\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

D'où

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{10}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

3. En utilisant la question précédente, on a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{\sqrt{2}}e^{-\frac{2i\pi}{3}}e^{+i\frac{\pi}{4}} = \frac{10}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5i\pi}{12}}.$$

Donc l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est $-\frac{5\pi}{12}$ modulo 2π, et on a $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi = \frac{19\pi}{12} \in [0, 2\pi[$, donc l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$ dans $[0, 2\pi[$ est $\frac{19\pi}{12}$.

Exercice 3

______/2 p.

On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - n - 1.$$

Solution 3

2 p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{H}_n$ l'assertion

$$"u_n = 2^n - n - 1".$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ⋄ **Initialisation :** Par définition $u_0 = 0 = 2^0 - 0 - 1$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- ⋄ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Par définition de u_{n+1} et en utilisant $\mathcal{H}_n$, on a

  $$u_{n+1} = 2u_n + n = 2\left(2^n - n - 1\right) + n = 2^{n+1} - n - 2 = 2^{n+1} - (n+1) - 1.$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- ⋄ **Conclusion :** Par récurrence, on a

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - n - 1.$$

Exercice 4

______/2 p.

(0,5 par ensemble) Simplifier sans donner de justification les ensembles ci-dessous

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x \geq 0\right\}, \qquad B = \{2x + 1\ ;\ x \in [0, 1[\},$$
$$C = 2\mathbb{Z} \cap [1, 6], \qquad D = C \cup]2, 4[.$$

Solution 4

2 p.

$$\begin{aligned}
A &=]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[, \\
B &= [1, 3[, \\
C &= \{2, 4, 6\}, \\
D &= [2, 4] \cup \{6\}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

______/3 p.

Soit $\alpha \in [0, 1]$. En raisonnant par disjonction de cas, déterminer les x réels tels que

$$|x| + |x-1| \leq \alpha.$$

Solution 5

3 p.

Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}$.

- **Cas 1: $x < 0$.** Comme $x < 0$, on a $x - 1 < -1 < 0$, et $|x| + |x-1| = -x - (x-1) = 1 - 2x$. Donc

  $$|x| + |x-1| \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - 2x \leq \alpha \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{2} \leq x \implies 0 \leq x,$$

  car $\alpha \leq 1$. Cela contredit l'hypothèse sur x, donc il n'y a pas de solutions $x < 0$.

- **Cas 2: $x > 1$.** On a $|x| + |x-1| = x + (x-1) = 2x - 1$. Donc

  $$|x| + |x-1| \leq \alpha \Leftrightarrow 2x - 1 \leq \alpha \Leftrightarrow x \leq \frac{1+\alpha}{2} \implies x \leq 1,$$

  car $\alpha \leq 1$. Cela contredit l'hypothèse sur x, donc il n'y a pas de solutions $x > 1$.

- **Cas 3: $0 \leq x \leq 1$.** Comme $x \leq 1$, on a $1 - x \leq 0$, et $|x| + |x-1| = x - (x-1) = 1$. Donc

  $$|x| + |x-1| \leq \alpha \Leftrightarrow 1 \leq \alpha,$$

  ce qui est vrai lorsque $\alpha = 1$ et faux si $\alpha \in [0, 1[$.

Les trois cas ci-dessus constituent tous les cas possibles, donc par raisonnement par disjonction de cas, on conclut que si $\alpha \in [0, 1[$, l'inéquation n'admet pas de solutions réelles, et si $\alpha = 1$, l'inéquation admet l'intervalle $[0, 1]$ pour solution.

Exercice 6

______/6 p.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$\mathcal{E}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z-1| = \alpha\}.$$

1. *(1 point)* Montrer que $-1 \in \mathcal{E}(3)$ et que $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathcal{E}(2)$.
2. *(1 point)* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

   $$z \in \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathcal{E}(\alpha).$$

   Quelle interprétation géométrique donner à cette propriété ?
3. *(1 point)* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

   $$\alpha \leq 0 \implies \mathcal{E}(\alpha) = \emptyset.$$

4. *(1 points)* Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sqrt{a} \leq \sqrt{a+b}$ et que $\sqrt{a} = \sqrt{a+b}$ si et seulement si $b = 0$.

5. *(1 point)* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. En utilisant la question précédente, montrer que

$$z \in \mathcal{E}(\alpha) \implies |x| + |x-1| \leq \alpha.$$

6. *(1 point)* En utilisant la question précédente et le résultat de l'exercice 5, montrer que

$$0 \leq \alpha < 1 \implies \mathcal{E}(\alpha) = \emptyset.$$

7. *(1 point)* Déterminer $\mathcal{E}(1)$.

Solution 6

6 p.

1. On a $|-1| + |-1-1| = 1 + 2 = 3$ donc $-1 \in \mathcal{E}(3)$. On a $\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 + 1 = 2$, donc $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathcal{E}(2)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a

$$z \in \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow |z| + |z-1| = \alpha \Leftrightarrow |\bar{z}| + |\overline{z-1}| = \alpha \Leftrightarrow |\bar{z}| + |\bar{z}-1| = \alpha \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathcal{E}(\alpha).$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que $\alpha \leq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{E}(\alpha) &\implies |z| + |z-1| = \alpha \\ &\implies |z| + |z-1| \leq 0 \\ &\implies |z| = 0 \text{ et } |z-1| = 0 && \text{car } |z|, |z-1| \geq 0 \text{ par définition,} \\ &\implies z = 0 \text{ et } z = 1, \end{aligned}$$

ce qui n'est jamais satisfait. Donc $\mathcal{E}(\alpha) = \emptyset$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \leq \sqrt{a+b} &\Leftrightarrow a \leq a + b, && \text{car } \sqrt{a}, \sqrt{a+b} \geq 0, \\ &\Leftrightarrow 0 \leq b, \end{aligned}$$

ce qui est vrai car $b \in \mathbb{R}_+$. En remplacant $\leq$ par $=$ dans la précédente chaîne d'équivalence on obtient le deuxième résultat demandé.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Supposons que $z \in \mathcal{E}(\alpha)$. En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$|x| + |x-1| = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} = |x+iy| + |(x-1)+iy| = \alpha.$$

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons $0 \leq \alpha < 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. On a

$$z \in \mathcal{E}(\alpha) \implies |x| + |x-1| \leq \alpha.$$

Cette inéquation n'a pas de solution d'après l'exercice 5 donc $\mathcal{E}(\alpha) = \emptyset$.

7. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Raisonnons par analyse/synthèse.
   - ◇ **Analyse :** Supposons que $z \in \mathcal{E}(1)$. En utilisant le résultat de la question 4, on a

     $$|x| + |x-1| = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1.$$

     Donc, d'après l'exercice 5, on a $x \in [0,1]$. Or, pour $x \in [0,1]$, on a exactement $|x| + |1-x| = 1$, donc

     $$1 = |x| + |1-x| \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1,$$

     d'où

     $$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

     Or, comme $0 \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $0 \leq \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, on en déduit que

     $$\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

     ce qui, d'après la question 4, nous permet de conclure que $y = 0$.
   - ◇ **Synthèse :** Soit $x \in [0,1]$. On a bien $|x| + |x-1| = 1$, donc $x \in \mathcal{E}(1)$.