# Nombres complexes

## Cours

Avant d'introduire les nombres complexes, rappelons quelques notations concernant les ensembles classiques de nombres[2].

**N** désigne l'ensemble des entiers naturels, c'est à dire l'ensemble constitué des nombres 0, 1, 2 etc. $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels différents de 0.

**Z** désigne l'ensemble des entiers relatifs, c'est à dire l'ensemble constitué des nombres entiers naturels et de leurs opposés : $0, 1, -1, 2, -2$, etc.

**Q** désigne l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble constitué des quotients de nombres entiers relatifs. C'est l'ensemble constitué de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ des entiers relatifs, $q$ étant supposé non nul.

**R** désigne l'ensemble des nombres réels. De manière informelle, vous les connaissez comme des nombres admettant un développement décimal (fini avant la virgule, fini ou infini après la virgule). La notion de développement décimal infini mérite une introduction rigoureuse, mais ne sera pas traitée dans ce cours[3].

Les ensembles ci-dessus sont rangés du plus petit au plus grand. Par exemple, tout entier naturel est également un entier relatif. On dit que **N** est inclus dans **Z**, ou encore que **Z** contient **N**, et si on souhaite noter cela de manière symbolique, on note $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. De même, **Z** est inclus dans **Q**, et **Q** est inclus dans **R**.

De plus, **Z** n'est pas inclus dans **N**, de même, **Q** n'est pas inclus dans **Z** et **R** n'est pas inclus dans **Q**. En effet, on peut voir par exemple que $-1$ est dans **Z** mais pas dans **N**, que $\frac{1}{2}$ est dans **Q** mais pas dans **Z** et que $\sqrt{3}$ est dans **R** mais pas dans **Q**.

2. Nous reviendrons de manière plus rigoureuse dans le chapitre 2 sur la notion d'ensemble et les constructions associées.

3. Une définition propre des nombres réels peut s'obtenir de différentes manières. Deux constructions très classiques sont la construction à partir des suites de Cauchy de nombres rationnels, et celle à partir des coupures de Dedekind. Ces notions seront accessibles plus tard dans votre cursus.

Dans la suite, on introduit un nouvel ensemble de nombres, noté $\mathbf{C}$ qui contient $\mathbf{R}$ et n'est pas inclus dans $\mathbf{R}$.

**1.1. Définition des nombres complexes. —** Les nombres complexes sont nés de la nécessité de donner un sens à la racine carrée de nombres négatifs, pour résoudre les équations algébriques. Dans l'ensemble des réels, l'équation $x^2 = 1$ a deux solutions, $+1$ et $-1$, mais l'équation $x^2 = -1$ n'en a pas, puisque le carré de tout nombre réel est positif ou nul. Les nombres complexes naissent en ajoutant une solution à l'équation $x^2 = -1$. Le miracle est qu'avec ce seul ajout, tous les polynômes complexes ont alors des racines.

**Définition 1.1**

On définit un nombre $\mathrm{i}$ (imaginaire) qui satisfait l'équation $\mathrm{i}^2 = -1$.

On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme $z = a + \mathrm{i}b$, où $a$ et $b$ sont deux réels quelconques. Le réel $a$ est appelé *partie réelle* de $z$, notée $\mathrm{Re}(z)$, et le réel $b$ est appelé *partie imaginaire* de $z$, notée $\mathrm{Im}(z)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$.

L'addition et la multiplication des réels s'étendent aux nombres complexes sans difficulté particulière[4].

- *addition :* $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$,
- *multiplication :* $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad)$.

Remarquons que la formule donnant l'addition de deux nombres complexes revient à dire que pour deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$,

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\ .$$

On représente ces nombres par les points d'un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'axe horizontal porte les réels (qui sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle). L'axe vertical porte les nombres dits imaginaires purs, ceux dont la partie réelle est nulle. Le point correspondant au nombre $a+\mathrm{i}b$ est placé à la verticale du réel $a$ et à l'horizontale de l'imaginaire pur $\mathrm{i}b$ (figure 1). On dit que le nombre $a+\mathrm{i}b$ est l'*affixe* du point qui le représente. Le point d'affixe 0 est l'*origine*, et on le note $O$.

4. Pour procéder rigoureusement, il faudrait vérifier que nous n'introduisons pas de contradiction avec ces opérations. Nous laissons cela en exercice.

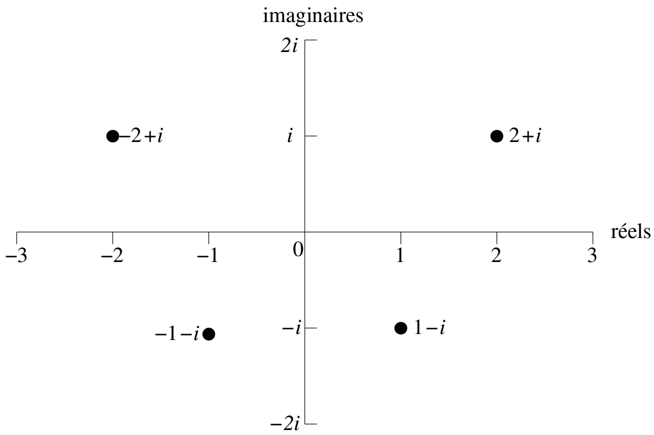


FIGURE 1. Le plan complexe.

Pour définir l'argument d'un nombre complexe, on admet l'existence des deux fonctions *sinus* et *cosinus*, définies de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $2\pi$-périodiques, sin étant impaire et cos paire, satisfaisant $\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$, et satisfaisant la règle usuelle de géométrie : si $ABC$ est un triangle rectangle en $B$ tel que l'angle en $A$ mesuré en radians vaut $\theta \in [0, \pi/2]$, alors on a $AB = AC \times \cos(\theta)$ et $BC = AC \times \sin(\theta)$.

**Définition 1.2**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle

1. *module de $z$* le nombre réel positif ou nul $\sqrt{a^2+b^2}$. On le note $|z|$.
2. *argument de $z$ si $z$ est non nul* tout réel $\theta$ tel que $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$. On le note $\arg(z)$. Il est donc défini à $2\pi$ près.
3. *conjugué de $z$* le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note $\overline{z}$.

$$\overline{z} = a - ib\ .$$

Dans le plan complexe, le module est la longueur du segment joignant l'origine au point représentant $z$. Un argument est une mesure de l'angle entre l'axe des réels et ce segment, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le sens trigonométrique). Le conjugué est le symétrique par rapport à l'axe horizontal des réels (figure 2).

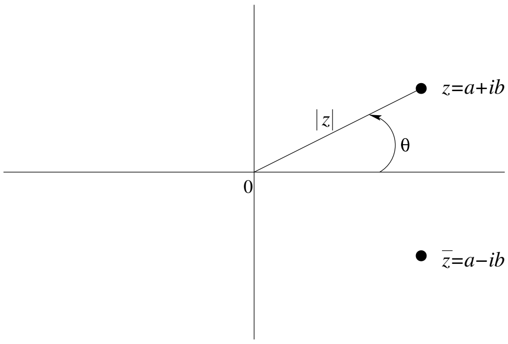


FIGURE 2. Module, argument et conjugué d'un nombre complexe.

Observez qu'un nombre et son conjugué ont le même module et que leur produit est le carré de ce module.

$$z\,\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2 .$$

Il est fréquent dans les calculs d'utiliser un conjugué pour simplifier le résultat et le mettre sous la forme $a + ib$. Si $z_1$ et $z_2$ sont deux complexes, leur quotient s'écrit :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2} .$$

Voici un exemple.

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3+\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} .$$

Le conjugué et le module vérifient des relations remarquables.

**Proposition 1.3**

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes. Alors :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
3. $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$

*Démonstration.* — Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes. On note $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ et $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$ avec $a_1$, $a_2$, $b_1$ et $b_2$ des réels.

1. On a :
$$z_1 + z_2 = a_1 + \mathrm{i}b_1 + a_2 + \mathrm{i}b_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2) \ .$$
Donc la partie imaginaire de $z_1 + z_2$ est $b_1 + b_2$ et sa partie réelle est $a_1 + a_2$ (Cela avait déjà été remarqué plus haut dans le cours). Donc par définition du conjugué,
$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \mathrm{Re}(z_1 + z_2) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1 + z_2)\\ &= (a_1 + a_2) - \mathrm{i}(b_1 + b_2)\\ &= (a_1 - \mathrm{i}b_1) + (a_2 - \mathrm{i}b_2)\\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$
2. On a :
$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
Donc $z_1 z_2$ a pour partie réelle $a_1 a_2 - b_1 b_2$ et pour partie imaginaire $a_1 b_2 + a_2 b_1$. Donc par définition du conjugué,
$$\overline{z_1 z_2} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
De plus,
$$\begin{aligned}\overline{z_1}.\overline{z_2} &= (a_1 - \mathrm{i}b_1)(a_2 - \mathrm{i}b_2)\\ &= a_1 a_2 - \mathrm{i}b_1 a_2 - \mathrm{i}a_1 b_2 - b_1 b_2\\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)\end{aligned}$$
Donc $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$.
3. On a vu que
$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
Donc
$$\begin{aligned}|z_1 z_2|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2\\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2\\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2\end{aligned}$$
Et d'un autre côté,
$$\begin{aligned}(|z_1|.|z_2|)^2 &= |z_1|^2.|z_2|^2\\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)\\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2\end{aligned}$$

Donc $|z_1 z_2|^2 = (|z_1|.|z_2|)^2$. Comme $|z_1 z_2|$ et $|z_1|.|z_2|$ sont tous les deux positifs ou nuls, et que leurs carrés sont égaux, $|z_1 z_2|$ et $|z_1|.|z_2|$ sont égaux.

□

***Remarque 1.4.*** — Remarquons qu'un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul. Le point 3 de la proposition précédente implique alors que le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un des termes du produit est nul.

**1.2. Formes trigonométrique et exponentielle.** — Dans la définition suivante, on utilise la fonction exponentielle exp dont l'existence a été admise au lycée : c'est l'unique fonction dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ qui vaut 1 en 0 et est égale à sa dérivée. De plus, elle satisfait, pour tous les réels $x$ et $x'$,

$$\exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x') \ .$$

**Définition 1.5**

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe. On appelle *exponentielle complexe de $z$* et on note $\mathrm{e}^z$ (ou $\exp(z)$) le nombre complexe :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\big) \ ,$$

où $\mathrm{e}^a$ est l'exponentielle réelle de $a$.

Observez que l'exponentielle complexe coïncide avec l'exponentielle réelle si la partie imaginaire est nulle. Si la partie réelle $a$ est nulle, le nombre $e^{ib} = \cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)$ est un nombre complexe de module 1 (car $\cos^2(b) + \sin^2(b) = 1$). Observez que le conjugué d'un nombre complexe $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est : $\overline{z} = \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, et un argument de $\overline{z}$ est $-\theta$.

Dans le cas général, le module de $\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b}$ est $\mathrm{e}^a$ et $b$ est un argument (les autres étant les nombres de la forme $b + 2k\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$).

La périodicité modulo $2\pi$ des fonctions sinus et cosinus induit la périodicité modulo $2\mathrm{i}\pi$ de l'exponentielle complexe : pour tout réel $b$ et pour tout entier $k$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+2k\pi)}$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}} = 1 \ , \quad \mathrm{e}^{(2k+1)\pi \mathrm{i}} = -1 \ , \quad \mathrm{e}^{(\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}} = \mathrm{i} \ , \quad \mathrm{e}^{(-\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}} = -\mathrm{i} \ .$$

Remarquons que si $z$ est un nombre complexe non nul, que $\rho = [z|$ et $\theta$ est un argumetn de $z$, alors d'après la définition de l'argument, $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et donc

$z = \rho e^{i\theta}$. La première écriture est appelée forme polaire (ou trigonométrique) et la seconde est appelée forme exponentielle[5].

**Définition 1.6**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On note $\rho$ le module de $z$ et $\theta$ un argument de $z$. On appelle *forme exponentielle de $z$* l'écriture de $z$ sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta} \ .$$

On appelle *forme polaire (ou trigonométrique) de $z$* l'écriture de $z$ sous la forme

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \ .$$

Voici quelques exemples.

| nombre | module | argument | forme exponentielle | conjugué |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{i}$ | $1$ | $\pi/2$ | $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ | $-\mathrm{i}$ |
| $1+\mathrm{i}$ | $\sqrt{2}$ | $\pi/4$ | $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ | $1-\mathrm{i}$ |
| $-1+\mathrm{i}$ | $\sqrt{2}$ | $3\pi/4$ | $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/4}$ | $-1-\mathrm{i}$ |
| $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ | $2$ | $\pi/3$ | $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ | $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ |
| $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ | $2$ | $11\pi/6$ | $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,11\pi/6}$ | $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ |
| $-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$ | $2\sqrt{2}$ | $2\pi/3$ | $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$ | $-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6}$ |

L'exponentielle complexe conserve la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle qui est de transformer les sommes en produits.

**Théorème 1.7** (multiplicativité de l'exponentielle complexe)

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. On a

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'} \ .$$

*Démonstration.* — Posons $z = a + ib$ et $z' = c + \mathrm{i}d$. Par définition de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)} = \mathrm{e}^{a+c}\big(\cos(b+d) + \mathrm{i}\sin(b+d)\big) \ .$$

5. Parfois, on appelle également forme polaire la forme exponentielle.

D'autre part,

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= \Big(e^a\big(\cos(b)+i\sin(b)\big)\Big)\Big(e^c\big(\cos(d)+i\sin(d)\big)\Big) \\ &= e^{a+c}\big(\cos(b)+i\sin(b)\big)\big(\cos(d)+i\sin(d)\big)\ , \end{aligned}$$

car $e^a e^c = e^{a+c}$ (propriété de l'exponentielle réelle). Les formules trigonométriques suivantes sont supposées connues :

$$\cos(b+d)=\cos(b)\cos(d)-\sin(b)\sin(d) \quad \text{et} \quad \sin(b+d)=\sin(b)\cos(d)+\cos(b)\sin(d)\ .$$

On en déduit immédiatement que :

$$\big(\cos(b)+i\sin(b)\big)\big(\cos(d)+i\sin(d)\big)=\cos(b+d)+i\sin(b+d)\ .$$

$\square$

Le fait que $e^{inx}=\cos(nx)+i\sin(nx)$ conduit à la *formule de Moivre* (ou de "De Moivre") :

**Corollaire 1.8** (Formule de Moivre)

Pour tout $x$ dans $\mathbf{R}$ et $n$ dans $\mathbf{N}$, on a

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

Cette formule est utile pour exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$. Voici un exemple.

$$\begin{aligned} \cos(2x)+i\sin(2x) &= (\cos(x)+i\sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x)+2i\cos(x)\sin(x)+i^2\sin^2(x) \\ &= \cos^2(x)-\sin^2(x)+i2\cos(x)\sin(x) \\ &= (2\cos^2(x)-1)+i(2\cos(x)\sin(x)) \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1 \quad \text{et} \quad \sin(2x)=2\cos(x)\sin(x).$$

Les fonctions sinus et cosinus s'expriment à l'aide de l'exponentielle complexe par les *formules d'Euler*. Celles-ci découlent simplement de la définition $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

**Proposition 1.9** (formules d'Euler)

Soit $\theta$ un nombre réel. Alors on a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \,, \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2i} \,.$$

On les utilise pour *linéariser* des puissances de sinus et cosinus, afin de calculer leurs primitives. Voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\sin^4(x)\cos^6(x) &= \frac{1}{2^{10}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^6 \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{10\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x} \\
&\qquad\quad +2\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x} - 8\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 12 - 8\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x} \\
&\qquad\quad +\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-10\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{512}\big(6 + 2\cos(2x) - 8\cos(4x) - 3\cos(6x) + 2\cos(8x) + \cos(10x)\big)
\end{aligned}$$

D'où une primitive de $\sin^4(x)\cos^6(x)$ :

$$\frac{3x}{256} + \frac{\sin(2x)}{512} - \frac{\sin(4x)}{256} - \frac{\sin(6x)}{1024} + \frac{\sin(8x)}{2048} + \frac{\sin(10x)}{5120} \,.$$

L'observation de la parité permet de prévoir a priori que la linéarisation ne contiendra que des $\cos(kx)$. En effet, $\sin(x)$ est une fonction impaire et $\cos(x)$ une fonction paire. Donc si on remplace $x$ par $-x$, $\sin^n(x)\cos^m(x)$ sera inchangé si $n$ est pair, changé en son opposé si $n$ est impair. Dans le premier cas, la linéarisation ne contiendra que des cosinus, dans le second cas, elle ne contiendra que des sinus.

**1.3. Polynômes.** — Les fonctions affines

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & az + b \end{array} \right.$$

où $a$ et $b$ sont des nombres complexes fixés, sont les exemples les plus simples de fonctions de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.[6]

6. Nous reviendrons plus en détail sur la notion de fonction dans le chapitre 3.

En ajoutant et multipliant un nombre fini de fonctions affines, on obtient les fonctions polynômes.

**Définition 1.10**

Une fonction $P$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ est appelée *fonction polynôme à coefficients dans* $\mathbf{C}$ s'il existe un entier naturel $d$ et des éléments $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbf{C}$ tels que pour tout $z$ complexe,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_d z^d \ .$$

Par un léger abus, on dit dans ce cas que $P(z)$ est un polynôme en $z$. [a]

Lorsque $a_d$ est différent de 0, le nombre $d$ est appelé *degré* du polynôme $P$, noté $\deg(P)$. Dans ce cas, le nombre $a_d$ est appelé *coefficient dominant* de $P$.

Si tous les coefficients sont nuls, alors $P$ est appelé *polynôme nul*. Par convention il est de degré $-\infty$.

*a*. En fait le polynôme est la somme formelle $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_d z^d$ où $z$ est une *indéterminée*, mais cette distinction est sans importance pour cette année.

Lorsqu'on impose que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_d$ soient réels (*resp.* rationnels, *resp.* entiers relatifs), on dit que le polynôme est à coefficients dans $\mathbf{R}$ (*resp.* $\mathbf{Q}$, *resp.* $\mathbf{Z}$).

Lorsque $P(z)$ est simplement de la forme $a_d z^d$, on dit que $P$ est un *monôme*. Un polynôme est donc une somme d'un nombre fini de monômes.

***Exemples 1.11.*** — Tous les exemples ci-dessous sont des fonctions de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

$x \mapsto x^2 - 1$ est une fonction polynôme, à coefficients entiers, de degré 2.

$y \mapsto y^3 - \pi y + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme, à coefficients réels, de degré 3.

$x \mapsto 5x^4$ est une fonction monôme, à coefficient entier, de degré 4.

Les polynômes de degré 0 ou $-\infty$ sont les fonctions constantes.

Comme nous le rappellerons dans le chapitre 2, que la variable soit $x$, $y$ ou n'importe quelle autre lettre n'a pas d'importance. Ce qui importe c'est qu'un polynôme est une fonction qui prend une variable et rend un nombre, en ne faisant intervenir que des additions et des multiplications.

**Définition 1.12**

Étant donné $P$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$, un nombre $a$ dans $\mathbf{C}$ tel que $P(a) = 0$ est appelé *racine* de $P$.

***Exemple 1.13.*** — $x^2 - 1$ est un polynôme en $x$ qui a deux racines dans $\mathbf{Z}$, à savoir les nombres 1 et $-1$.

$x^2 - 2$ est un polynôme en $x$ qui n'a pas de racine dans $\mathbf{Z}$ ni dans $\mathbf{Q}$, mais qui a deux racines dans $\mathbf{R}$, à savoir les nombres $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

$x^2 + 1$ est un polynôme en $x$ qui n'a aucune racine ni dans $\mathbf{Z}$, ni dans $\mathbf{Q}$, ni dans $\mathbf{R}$.

**1.4. Rappels de logique élémentaire.** — Rappelons un peu de vocabulaire, que vous avez déjà vu au lycée, et qui nous aidera à résoudre rigoureusement les équations polynomiales à coefficients complexes. Nous reviendrons plus en détail sur le langage mathématique dans le chapitre 2.

Une *assertion* est une affirmation mathématique ne mettant en jeu que des objets mathématiques.

Lorsque $P$ et $Q$ sont des assertions, $P \Rightarrow Q$ est une nouvelle assertion, qui signifie « si $P$ est vraie, alors $Q$ est vraie ».

Enfin, $P \Leftrightarrow Q$ signifie $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$, ce qu'on peut également exprimer par « $P$ est vraie si et seulement si $Q$ est vraie ».

Si $A$ est un polynôme à coefficients complexes, la phrase suivante :

« Résoudre une équation du type $A(z) = 0$ en l'inconnue $z$ complexe. »

signifie « Trouver exactement tous les nombres complexes $z$ qui vérifient $A(z) = 0$. »

Ainsi,

— si on montre que

$$A(z) = 0 \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } z = 1 + i) \ ,$$

on peut bien en déduire que 1 et $1 + i$ sont exactement toutes les solutions complexes de l'équation "$A(z) = 0$",

— si on montre que

$$A(z) = 0 \Rightarrow (z = 1 \text{ ou } z = 1 + i) \ ,$$

alors on sait que "si $z$ est une solution, alors cette solution est soit 1 soit $1 + i$". Cela ne montre pas que 1 et $1+i$ sont solutions, mais qu'il ne peut y avoir d'autres solutions que ces nombres-là,

— si on montre que

$$(z = 1 \text{ ou } z = 1 + i) \Rightarrow A(z) = 0 ,$$

alors on sait que 1 et $1 + i$ sont des solutions de l'équation "$A(z) = 0$". Cela ne montre pas que ce sont les seules solutions.

Il est donc extrêmement important, lorsque que vous manipulez une équation, d'expliciter (et de justifier si nécessaire) les liens logiques (implication dans un sens ou dans l'autre, équivalence) entre les différentes assertions que vous écrivez.

**1.5. Équations polynomiales complexes.** — Soient $a, b, c$ trois réels, avec $a \neq 0$. L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions, éventuellement complexes.

1. si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation admet deux solutions réelles,
$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ ;$$
2. si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation admet une solution réelle « double »,
$$r = \frac{-b}{2a} \ ;$$
3. si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation admet deux solutions complexes,
$$r_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \ .$$

Ce résultat n'est pas étonnant, et vous le connaissez déjà. Le miracle est que les complexes permettent de résoudre non seulement les équations du second degré, mais toutes les équations algébriques quel que soit leur degré. Le théorème suivant a été énoncé par d'Alembert en 1746. Plusieurs preuves ont été par la suite proposées, mais contenaient toutes des trous. Une preuve presque complète a été proposée par Gauss en 1799, mais elle contenait encore un trou, comblé en 1920 par Ostrowki. La première preuve complète est dûe à Argand en 1806. Il est partout connu comme le *théorème fondamental de l'algèbre*.

**Théorème 1.14** (D'Alembert-Gauss)

**(Admis)** Soit $P$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes. Le polynôme $P$ est un produit de $n$ facteurs de degré 1, à coefficients dans $\mathbf{C}$.

De manière équivalente, si $P$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes, il existe un nombre complexe $a$ différent de 0 et $n$ complexes $z_1, \ldots, z_n$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$ :

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) .$$

En d'autres termes, l'équation $P(z) = 0$ a toujours $n$ solutions ; certaines solutions peuvent être multiples, et elles sont comptées avec leur ordre de multiplicité.

***Remarque 1.15.*** — Une conséquence de ce résultat est que si on connait $n$ racines deux à deux distinctes d'un polynôme de degré $n$, alors celui-ci n'a pas d'autre racine.[7]

Concrètement, peut-on trouver les racines d'un polynôme à coefficients complexes ? S'il est de degré 2, 3, ou 4, la réponse est oui. Pour le degré 2, c'est assez simple à voir.

La première chose à remarquer est que si $\Delta$ est un nombre complexe, alors il existe toujours un nombre complexe $\delta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. En effet, si $\Delta = 0$, on peut prendre $\delta = 0$. Et si $\Delta \neq 0$, en écrivant $\Delta$ sous forme polaire, $\Delta = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, on peut prendre $\delta = \sqrt{\rho} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$. On dit que $\delta$ est une racine carrée complexe de $\Delta$. Mais attention, il est important de comprendre que pour un nombre complexe $\Delta$ qui n'est pas un réel positif, il ne faut pas écrire $\sqrt{\Delta}$. En effet, pour un nombre réel positif $x$ , $\sqrt{x}$ est défini comme le nombre positif dont le carré vaut $x$. Mais pour un nombre complexe qui n'est pas un réel positif $\Delta$, aucun nombre positif n'a de carré qui vaut $\Delta$. Il y a bien deux nombres complexes dont le carré fait $\Delta$, mais il n'y a pas de manière suffisamment naturelle de les distinguer. On conservera donc l'idée que le symbole $\sqrt{}$ désigne la fonction racine carrée définie de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, et on ne l'appliquera pas à des nombres qui ne sont pas des nombres complexes.

Maintenant que l'on sait qu'un nombre complexe admet toujours au moins une racine carrée complexe, on peut énoncer le théorème suivant.

**Théorème 1.16**

Soit $a, b, c$ trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Notons $\delta$ un nombre complexe satisfaisant $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Alors le polynôme du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c$ a pour racines

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} .$$

7. Il n'y a pas besoin du théorème de D'Alembert-Gauss pour démontrer cela, c'est une conséquence de la division euclidienne des polynômes.

et a pour factorisation :
$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)\ .$$
Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé *discriminant* du polynôme.

*Démonstration.* — On a, pour tout $z$ complexe :
$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{2b}{2a}z + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(z^2 + \frac{2b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)\\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\\
&= a(z - z_1)(z - z_2)
\end{aligned}$$
On en déduit la factorisation annoncée. De plus, un produit est nul si et seulement si l'un de ses termes est nul. Donc (on rappelle que $a$ est non nul) :
$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow (z - z_1) = 0 \text{ ou } (z - z_2) = 0\\
&\Leftrightarrow z = z_1 \text{ ou } z = z_2
\end{aligned}$$
ce qui donne les racines de $az^2 + bz + c$. □

Il reste une étape à combler pour pouvoir écrire les racines d'un polynôme du second degré, à savoir calculer un nombre $\delta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Nous avons vu que lorsque $\Delta$ est donné sous forme polaire, $\Delta = \rho e^{i\theta}$, on peut prendre $\delta = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Si on souhaite obtenir une écriture algébrique de $\delta$ à partir d'une écriture algébrique de $\Delta$, c'est un peu plus compliqué, la méthode de calcul ci-dessous y répond.

***Remarque 1.17.*** — *Calcul des racines carrées :* Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a$ et $b$ réels. On veut trouver les nombres complexes $\delta = x + iy$ tels que $\delta^2 = z$.

Comme $|\delta|^2 = |z|$, on a :

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

En sommant les deux premières équations, on obtient l'égalité

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2},$$

et en soustrayant les deux premières équations, on obtient

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}\ .$$

Donc :

$$\begin{aligned} \delta^2 = z \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ 2xy = b \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que le signe de $xy$ est donné par celui de $b$. Notons $\varepsilon = 1$ si ce signe est positif et $\varepsilon = -1$ si ce signe est négatif. On a donc :

$$\delta^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ et } y = \varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ et } y = -\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \end{cases} \\ \text{et} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Il y a donc au plus deux solutions pour le couple $(x, y)$, qui sont données par la première ligne du dernier système. Comme le théorème 1.16 nous assure qu'il y a exactement deux racines, on en déduit que la seconde ligne de ce système est automatiquement vérifiée[8]. Donc :

$$\delta^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ et } y = \varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ et } y = -\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \end{cases}$$

Il est plus intéressant de ne pas essayer de se souvenir de ce résultat par cœur, mais de savoir reproduire le raisonnement.

Pour les équations de degré 3 et 4, des méthodes et des formules générales existent, mais elles sont compliquées. À partir du degré 5, il n'y a plus de formule générale, comme l'ont démontré Niels Abel et Évariste Galois au début du XIXe siècle.

Un autre type d'équations complexes peut néanmoins être résolu en général, celles consistant à chercher une racine $n$-ième d'un nombre dont on connaît une forme polaire.

On suppose pour cela qu'on sait extraire une racine $n$-ième dans $\mathbf{R}_+$. En général les fonctions log et exp le permettent, puisque si $\rho$ est un réel strictement positif et $n$ un entier strictement positif, alors la racine $n$-ième de $\rho$ est donnée par $\exp(\ln(\rho)/n)$. Bien sûr, sur des exemples simples, on a parfois des racines $n$-ième plus explicites.

**Théorème 1.18** (Racines $n$-ièmes complexes)

Soit $z_0 = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nulécrit sous forme polaire et $n$ un entier naturel strictement positif. Alors l'équation $z^n = z_0$ admet pour solutions les $n$ nombres $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\theta/n}$, $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2\pi)/n}$, $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+4\pi)/n}, \ldots, \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2(n-1)\pi)/n}$.

*Démonstration.* — On vérifie d'abord que les nombres proposés vérifient bien $z^n = z_0$ : si $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$(\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n})^n = (\sqrt[n]{\rho})^n (e^{i(\theta+2k\pi)/n})^n = \rho e^{i(\theta+2k\pi)} = \rho e^{i\theta} e^{2ik\pi} = \rho e^{i\theta} = z_0 \; .$$

8. On peut également vérifier par le calcul que les deux possibilités pour le couple $(x, y)$ données dans la première ligne impliquent la seconde équation.

Comme $z_0 \neq 0$, ces nombres sont deux à deux distincts. En effet, si $k$ et $j$ sont dans $\{0, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\rho}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{\rho}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2j\pi)/n} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2j\pi)/n} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2(k-j)\pi)/n} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (k-j)/n \in \mathbf{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad k = j
\end{aligned}$$

car $k$ et $j$ sont dans $\{0, \ldots, n-1\}$. On a donc trouvé $n$ racines 2 à 2 distinctes du polynôme $P(z) = z^n - z_0$, qui est de degré $n$, donc ces racines sont les seules racines de $P$. $\square$

En particulier les nombres de la forme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k\pi/n)}\ , \quad \text{pour } k = 0, \ldots, n-1\ ,$$

sont les solutions de $z^n = 1$. On les appelle les *racines $n$-ièmes de l'unité* (figure 3). Elles forment les sommets successifs d'un polygone régulier à $n$ côtés, de centre 0 et ayant 1 pour sommet.

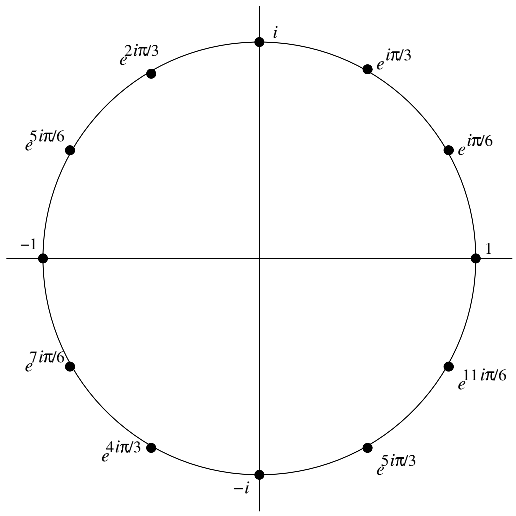


FIGURE 3. Racines douzièmes de l'unité.

**1.6. Géométrie du plan complexe : vecteurs, distances et angles.** — Rappelons la vision géométrique des nombres complexes : on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À tout point de coordonnées $(x, y)$, on associe le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$, appelé *affixe* du point. Si $M$ désigne un point, on note $z_M$ son affixe. L'application qui à $M$ associe $z_M$ est en fait une bijection[9] entre l'ensemble des points du plan et l'ensemble des nombres complexes, et dans la suite il nous arrivera de confondre un point et son affixe.

On remarque que si $A$ et $B$ sont deux points du plan, alors

$$\overrightarrow{OA} = \mathrm{Re}(z_A)\vec{i} + \mathrm{Im}(z_A)\vec{j}$$

donc

$$\overrightarrow{AB} = \mathrm{Re}(z_B - z_A)\vec{i} + \mathrm{Im}(z_B - z_A)\vec{j}$$

Ceci nous amène naturellement à la définition suivante.

**Définition 1.19**

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on définit l'affixe du vecteur $\vec{u}$ par

$$z_{\vec{u}} := x + iy\ .$$

Remarquons que si $A$ et $B$ sont deux points du plan, alors $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$. De plus, $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$, $z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$.

On voit alors facilement, en prenant des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ partant de l'origine $O$, que :

$$\|\vec{u}\| = |z_{\vec{u}}|\ ,$$

et, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, qu'une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est donnée par $Arg(z_v) - Arg(z_u)$, qui est égal à $Arg(\frac{z_v}{z_u})$. On obtient ainsi le résultat suivant concernant les mesures de distances et d'angles.

**Théorème 1.20**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$.

1. La distance entre $A$ et $B$ est le module de $z_B - z_A$.

9. Voir chapitre 3.

2. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égale à l'argument du rapport $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$.

***Remarque 1.21.*** — Rappelons que l'ensemble des points à distance fixée $r$ d'un point $A$ est le cercle de centre $A$ et de rayon $r$. Ainsi, en termes complexes, ce cercle est l'ensemble des nombres $z$ tels que $||z - z_A| = r$. On peut aussi écrire ce cercle comme l'ensemble des points d'affixe $z_A + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta$ décrit $[0, 2\pi[$.

**1.7. Rédaction.** — Quand vous « écrivez des mathématiques », l'objectif est de communiquer des raisonnements mathématiques. Il faut savoir trouver un équilibre entre clarté et rigueur (rigueur de définition des termes mathématiques, de raisonnement, de logique). La clarté permet d'avoir une communication efficace et la rigueur permet d'éviter les erreurs.

En termes de rigueur, on dit parfois qu'il faut convaincre trois personnes : soi-même, un ami et un ennemi. Le terme ennemi étant à prendre au sens d'une personne sceptique, qui essaiera de mettre en doute vos arguments.

Voici quelques règles qui peuvent aider à allier clarté et rigueur.

1. Définir clairement les objets qu'on utilise. Tout caractère ($x$, $A$, $f$, $\varepsilon$ ...) qui désigne un objet mathématique (nombre, élément, ensemble, fonction ou autre) doit impérativement être présenté et clairement défini avant d'être utilisé.
2. Les objets qu'on utilise ont des règles de manipulation précises, imposées par leur définition, et qu'il faut respecter (Exemple : ne pas confondre inégalité au sens strict et au sens large).
3. Le niveau le plus élevé d'une démonstration (notamment le début et la fin) doit être rédigé en langage naturel. Il ne faut utiliser les symboles mathématiques que s'ils apportent un plus indéniable et ne prêtent pas à confusion.[10]

10. À ce propos, le symbole $\Longrightarrow$ n'est pas un synonyme de « donc », c'est un connecteur logique qu'il ne faut manipuler que lorsqu'on souhaite affirmer de manière compacte que « si $P$ est vraie alors $Q$ est vraie » (ce qui se note $P \Longrightarrow Q$), et qui doit toujours être introduit par une expression en langage naturel, comme dans « On en déduit que $P \Longrightarrow Q$ ».