Corrigé partiel 2019

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application.

1. Écrire une définition de l'ensemble $f(]-1,1[)$.
2. Écrire une assertion mathématique correspondant à la phrase "f a pour limite 1 en 0."

Solution de l'exercice 1. 1. (1 point) Voici deux définitions possibles :

$$f(]-1,1[) = \{y \in \mathbf{R} \mid \exists x \in]-1,1[, f(x) = y\} = \{f(x), x \in]-1,1[\}.$$

2. (1 point) $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}_+^*, |x| < \eta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$

Exercice 2. Soit $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux applications. Soit P l'assertion

$$\forall y \in \mathbf{R}, \forall i \in \{1,2\}, ((f_i(y) < 0) \implies (\exists j \in \{1,2\}, f_j(y) > 0)).$$

1. Écrire la négation de l'assertion P.
2. Que signifie P (en français) ?
3. Donner un exemple de deux fonctions f_1, f_2, qui satisfont P.
4. Donner un exemple de deux fonctions f_1, f_2, qui ne satisfont pas P.

Solution de l'exercice 2. 1. (1 point) $\exists y \in \mathbf{R}, \exists i \in \{1,2\}, ((f_i(y) < 0) \wedge (\forall j \in \{1,2\}, f_j(y) \leq 0))$.

2. (1 point) En tout point y de $\mathbf{R}$, si l'une des deux fonctions f_1, f_2 est strictement négative en y, alors l'une des deux fonctions est strictement positive en y (et donc c'est l'autre fonction qui est strictement positive).

   Autrement dit : les deux fonctions ne peuvent être simultanément négatives.
3. (1 point) Deux fonctions constantes $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = 1$ marchent : elles ne sont jamais négatives, donc il n'y a rien à vérifier. Elles satisfont donc P trivialement.

   Un exemple moins trivial : $f_1(x) = \sin x$ et $f_2(x) = -\sin x$. Lorsqu'une des deux fonctions est négative, l'autre est positive, donc elles satisfont P.
4. (1 point) Deux fonctions constantes $f_1(x) = -1$ et $f_2(x) = -1$ marchent : lorsque f_1 est négative, f_2 l'est aussi.

Exercice 3. Pour chaque assertion suivante, dire si elle est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^2 > y^2$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^3 > y^3$

3. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \{-1, 0, +1\}, |x| = xy$
4. $\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \exists s \in \{-1, +1\}, |x - y| = s \times (|x| - |y|)$

Solution de l'exercice 3. 1. (1 point) L'assertion est fausse. En effet sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x^2 \leq y^2$. Il suffit alors de choisir $x = 0$ pour que la négation soit vraie : pour tout y réel, on a bien $0 \leq y^2$.

2. (1 point) L'assertion est vraie. En effet la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, donc pour x fixé, on peut poser (1 point) $y = x - 1$, et on a alors $x^3 > (x - 1)^3 = y^3$.
3. (1 point) L'assertion est vraie. Démontrons-le. Soit x un réel quelconque. Séparons deux cas.
Cas 1 : $x \geq 0$. Alors on a $|x| = x$, et donc en posant $y = +1$, on a $|x| = x = xy$.
Cas 2 : $x < 0$. Alors on a $|x| = -x$, et donc en posant $y = -1$, on a $|x| = -x = xy$.
4. (1 point) L'assertion est vraie. En effet comme x et y sont positifs, on a $|x| - |y| = x - y$ d'une part, et d'autre part, si $x - y$ est positifs on a $|x - y| = x - y = 1 \times (|x| - |y|)$ et si $x - y$ est négatif on a $|x - y| = -x + y = (-1) \times (|x| - |y|)$. Dans tous les cas on trouve un $s \in \{-1, +1\}$ tel que $|x - y| = s \times (|x| - |y|)$.

Exercice 4. Décrire les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ ci-dessous comme intervalles ou réunions d'intervalles.

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < 0\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 3| \geq 5\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x < 0\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x + 1| \geq |3x - 1|\}$.

Solution de l'exercice 4. 1. (1 point) Comme la valeur absolue est une fonction qui prend ses valeurs de $\mathbf{R}_+$, elle n'est jamais strictement négative, par conséquent on a $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < 0\} = \emptyset$.

2. (2 points) Séparons deux cas.
Cas 1 : si $x - 3 \geq 0$, alors on a
$$|x - 3| \geq 5 \iff x - 3 \geq 5 \iff x \geq 8,$$
donc on trouve l'intervalle $[8, +\infty[$, dont les points satisfont bien $x - 3 \geq 0$.
Cas 2 : si $x - 3 < 0$, alors on a
$$|x - 3| \geq 5 \iff -x + 3 \geq 5 \iff x \leq 2,$$
donc on trouve l'intervalle $]-\infty, 2]$, dont les points satisfont bien $x - 3 < 0$.
En conclusion, on a $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 3| \geq 5\} =]-\infty, 2] \cup [8, +\infty[$.

3. (1 point) On a $x^2 - 3x = x(x-3)$. On peut donc faire un tableau de signes :

x		0		3	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

.

   On voit alors que $x(x-3) < 0$ est équivalent à $x \in]0,3[$.

4. (3 points) Là encore on commence par un tableau de signes :

x		-1		$\frac{1}{3}$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

.

   On sépare alors trois cas.
   Cas 1 : $x \in]-\infty, -1[$. Alors on a $|x+1| = -x-1$ et $|3x-1| = -3x+1$. On a alors

$$|x+1| \geq |3x-1| \iff -x-1 \geq -3x+1 \iff 2x \geq 2 \iff x \geq 1.$$

   L'ensemble des solutions dans ce cas est donc $]-\infty, -1[\cap[1, +\infty[= \emptyset$.
   Cas 2 : $x \in [-1, \frac{1}{3}[$. Alors on a $|x+1| = x+1$ et $|3x-1| = -3x+1$, d'où

$$|x+1| \geq |3x-1| \iff x+1 \geq -3x+1 \iff 4x \geq 0 \iff x \geq 0.$$

   L'ensemble des solutions dans ce cas est donc $[-1, \frac{1}{3}[\cap\mathbf{R}_+ = [0, \frac{1}{3}[$.
   Cas 3 : $x \in [\frac{1}{3}, +\infty[$. Alors on a $|x+1| = x+1$ et $|3x-1| = 3x-1$, d'où

$$|x+1| \geq |3x-1| \iff x+1 \geq 3x-1 \iff 2 \geq 2x \iff x \leq 1.$$

   L'ensemble des solutions dans ce cas est donc $[\frac{1}{3}, +\infty[\cap]-\infty, 1] = [\frac{1}{3}, 1]$..
   En conclusion, l'ensemble des solutions est donc $\emptyset \cup [0, \frac{1}{3}[\cup[\frac{1}{3}, 1] = [0, 1]$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application $x \mapsto x^2$. Pour chaque assertion suivante, dire si elle est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, |x-2| < 10^{-1} \implies |f(x) - f(2)| < 10^{-2}$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, |x-2| < 10^{-2} \implies |f(x) - f(2)| < 10^{-1}$
3. $\forall x \in \mathbf{R}, |f(x) - f(2)| < 10^{-1} \implies |x-2| < 10^{-2}$

Solution de l'exercice 5. 1. (1 point) Au voisinage du nombre 2, la fonction carré a tendance a multiplier les imprécisions par 4. Cette assertion semble donc fausse. Voici un contre-exemple : prenons $x = 2,05$, alors on a bien $|x-2| = |2,05-2| = 0,05 < 10^{-1}$. D'autre part on a $f(x) = (2+0,05)^2 = 4 + 0,1 + 0,0025 = 4,1025$.

En particulier on a $|f(x) - f(2)| = 0,1025 > 10^{-2}$. Par conséquent l'assertion est fausse.

2. (2 points) On a remarqué dans la question précédente que la fonction f multiplie les imprécisions par enviton 4 au voisinage de 2, comme $4 \times 10^{-2} < 10^{-1}$, on s'attend à ce que l'assertion soit vraie. Démontrons-la.

   Soit x réel tel que $|x - 2| < 10^{-2}$. Alors on a $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 2^2| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \times |x-2|$. Or comme on a $x \in [2 - 10^{-2}, 2 + 10^{-2}]$, on a $x+2 \in [4 - 10^{-2}, 4 + 10^{-2}]$, et donc en particulier $|x+2| < 5 < 10$. Par conséquent on a $|f(x) - f(2)| = |x+2| \times |x-2| < 10 \times |x-2| < 10 \times 10^{-2} = 10^{-1}$. L'assertion est donc vraie.

3. (1 point) L'assertion est fausse. Il suffit de prendre $x = -2$ pour avoir $|f(x) - f(2)| = |4 - 4| = 0 < 10^{-1}$, mais on a aussi $|-2-2| = 4 \leq 10^{-2}$, ce qui prouve que l'implication est fausse.

Exercice 6. 1. Calculer $\sum_{j=1}^{3} \big(\sum_{k=j}^{3} (j \times k) \big)$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Solution de l'exercice 6. 1. (1 point) On peut développer :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{k=j}^{3} (j \times k) \Big) &= \Big(\sum_{k=1}^{3} (1 \times k) \Big) + \Big(\sum_{k=2}^{3} (2 \times k) \Big) + \Big(\sum_{k=3}^{3} (3 \times k) \Big) \\
&= \big((1 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3) \big) + \big((2 \times 2) + (2 \times 3) \big) + \big((3 \times 3) \big) \\
&= (1 + 2 + 3) + (4 + 6) + (9) \\
&= 6 + 10 + 9 \\
&= 25.
\end{aligned}$$

2. (2 points) Faisons une preuve par récurrence. Pour l'initialisation, on a d'une part $\sum_{i=0}^{0} i(i+1) = 0 \times (0+1) = 0$, et d'autre part $\frac{0(0+1)(0+2)}{3} = 0$.

Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons qu'on a $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Alors on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i(i+1) &= \Big(\sum_{i=0}^{n} i(i+1)\Big) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3},
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ l'application $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Pour $x, y \in \mathbf{R}_+$, simplifier l'expression $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.
2. En déduire une constante réelle C telle que, pour tous $x, y \in [1, 10]$, on ait
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|.$$
3. En déduire que la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, 10]$ est continue.
4. En utilisant la question 2, dire si l'estimation $e = 2.718\ldots$ permet de connaître la valeur de $\sqrt{e}$ avec une précision de 10^{-4}.
5. Montrer que f est continue.

Solution de l'exercice 7.

1. (1 point) On a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = |x| - |y|$. Comme x et y sont positifs, on peut simplifier cette dernière expression en $x - y$.
2. (2 points) Par définition cela revient à montrer que pour tout $a \in [1, 10]$ on a $f|_{[1,10]}(x) \xrightarrow{x \to a} f(a)$, ce qui se traduit par l'assertion

$$\forall a \in [1, 10], \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in [1, 10], (|x - a| < \eta) \implies (f(x) - f(a) < \varepsilon).$$

Démontrons cette dernière assertion. Soit $a \in [1, 10]$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = 2\varepsilon$ (nous verrons plus bas pourquoi le 2 est ce qu'il nous faut ici). Soit $x \in [1, 10]$, et supposons que x vérifie $|x - a| < \eta$. Alors d'après la question 2, on a $|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|x - a| < \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}2\varepsilon = \varepsilon$, ce qui prouve l'assertion.

3. (1 point) L'estimation $e = 2,718\ldots$ est précise à 10^{-3} près, c'est-à-dire qu'on a $|2,718 - e| < 10^{-3}$. Or d'après la question 2, on a alors $|\sqrt{2,718} - \sqrt{e}| \leq \frac{1}{2}|2,718 - e| < 10^{-3}/2$. Ce dernier nombre n'est pas inférieur ou égal à 10^{-4}, donc l'estimation n'est ici pas suffisante pour avoir une précision de 10^{-4}.

4. (3 points) Pour montrer la continuité de f sur $\mathbf{R}_+$, il faut montrer l'assertion

$$\forall a \in \mathbf{R}_+, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}_+, (|x - a| < \eta) \implies (|f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Le schéma est le même qu'à la question 3, mais la constante C ne marche pas partout. Le raisonnement de la question 2 montre que si a est strictement positif, alors pour tout $a \in [\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}]$, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\frac{|x|-|a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a/2}+\sqrt{a/2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}|x - a|$.

On peut alors démontrer l'assertion. Soit $a \in \mathbf{R}_+$. On sépare deux cas :
Cas 1 : $a > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose alors $\eta = \sqrt{2a}\varepsilon$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x - a| < \eta$. On a alors $|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}|x - a| < \frac{1}{\sqrt{2a}}\eta = \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{2a}\varepsilon = \varepsilon$, ce qui prouve l'assertion dans ce cas.
Cas 2 : $a = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose $\eta = \varepsilon^2$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x| < \eta$. Alors on a $|f(x) - f(a)| = \sqrt{x} < \sqrt{\eta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$, ce qui conclut dans ce cas.

Comme on a épuisé tous les cas pour a, l'assertion est bien montrée pour tout $a \in \mathbf{R}_+$.

Exercice 8. Soit x un nombre réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est dans $\mathbf{Z}$.

1. Démontrer que le nombre $x^2 + \frac{1}{x^2}$ est aussi dans $\mathbf{Z}$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ le nombre $x^n + \frac{1}{x^n}$ est dans $\mathbf{Z}$.
(Indication : Démontrer le résultat par récurrence en considérant l'assertion $P(n)$: “Les nombres $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont dans $\mathbf{Z}$”.)

Solution de l'exercice 8. 1. (1 point) On a $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. On a alors $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$. Or par hypothèse $(x + \frac{1}{x})^2$ est un entier, et 2 aussi, donc leur différence $x^2 + \frac{1}{x^2}$ aussi.

2. (2 points) On considère l'assertion $P(n)$: “Les nombres $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont dans $\mathbf{Z}$”, que l'on va démontrer par récurrence sur n, en partant de $n = 0$.

Pour $n = 0$, l'assertion revient à dire que $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ et $x + \frac{1}{x}$ sont entiers, ce qui est vrai par hypothèse.

Supposons maintenant qu'on a démontré $P(n)$. Développons $(x^n+\frac{1}{x^n})(x+\frac{1}{x}) = x^{n+1}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^{n+1}} = (x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}})+(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}})$. Par conséquent on a

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}} = (x^n+\frac{1}{x^n})(x+\frac{1}{x}) - (x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}).$$

Par hypothèse de récurrence, le membre de droite dans l'équation précédente est un entier, par conséquent $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}$ est aussi entier. Comme $x^n+\frac{1}{x^n}$ est supposé entier, on a bien démontré $P(n+1)$, ce qui achève la récurrence (et ce corrigé).