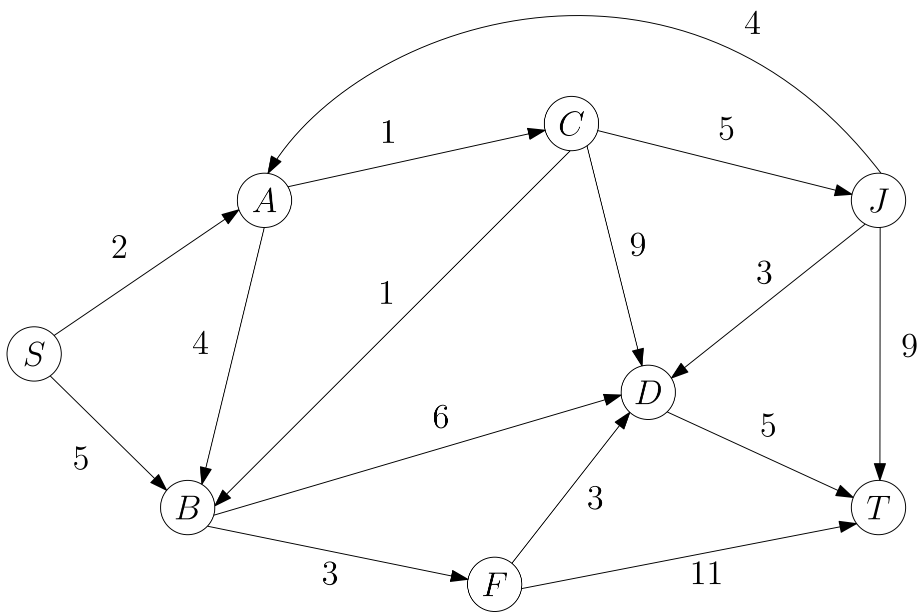
Examen INF303 (2h) - L2 INM 11 janvier 2024

A lire attentivement avant de commencer le sujet :

- **Toutes les réponses doivent être justifiées. Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction.**
- Tous les graphes sont considérés comme simples et sans boucle.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.
- Les appareils électroniques sont interdits.
- Cet énoncé comporte 4 pages et 6 exercices. Il y a aussi 4 pages en annexe qu'il faudra rendre avec votre copie (pensez à y noter votre numéro d'anonymat).

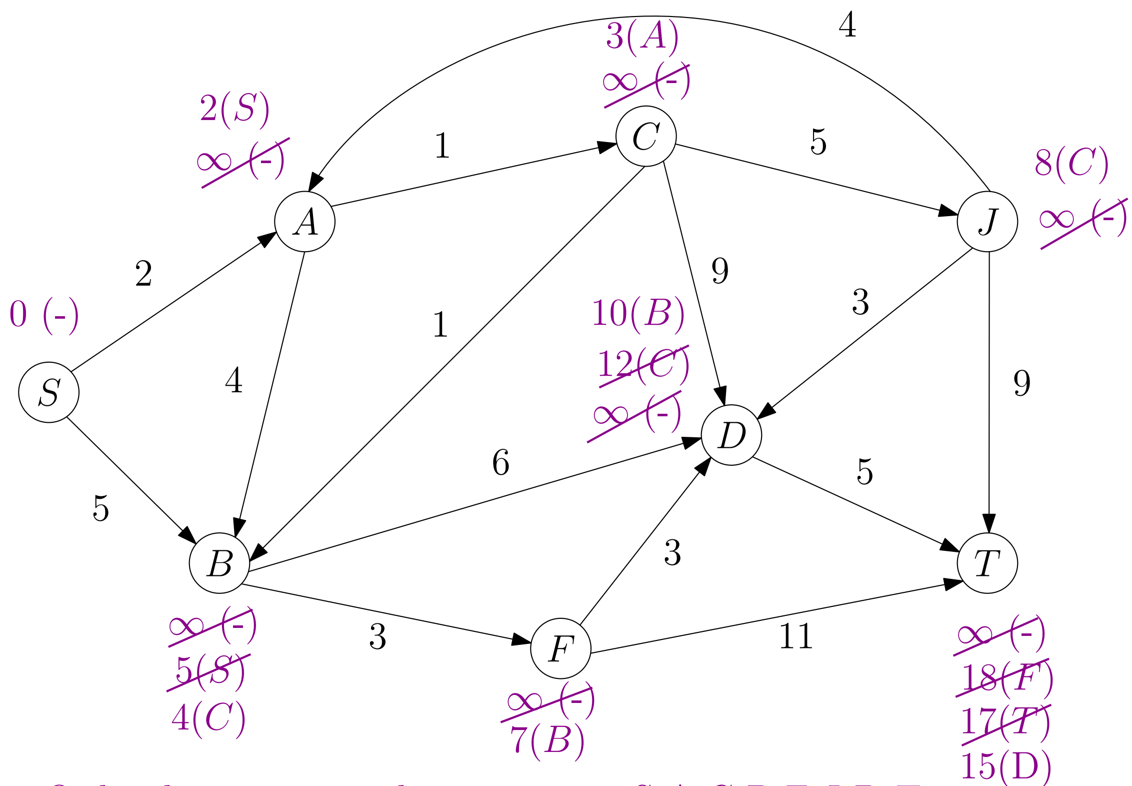
Exercice 1 : **Plus courts chemins** (3 points)



On considère le graphe ci-dessus.

Question 1 – On cherche la longueur des plus courts chemins issus du sommet S vers tous les autres sommets. Quel algorithme utilisez-vous pour cela ? Éxécutez-le en indiquant toutes les étapes de l'algorithme. Vous pouvez donner les traces de ces étapes en les rédigeant sur votre copie ou bien en annotant le graphe de la Figure 1 de la feuille en annexe.

Pour trouver les plus courts chemins dans un graphe avec poids positifs, on utilise l'algorithme de Dijkstra.
Exécution de l'algorithme avec rédaction par annotation :

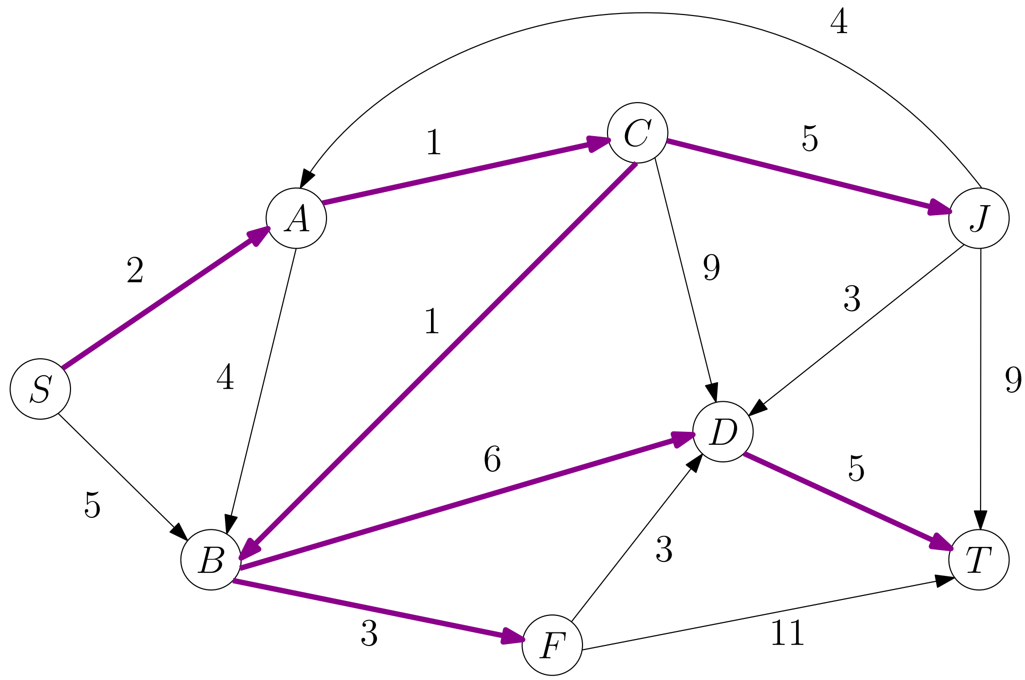


Ordre de traitement des sommets : S A C B F J D T

Exécution de l'algorithme avec rédaction par tableau :

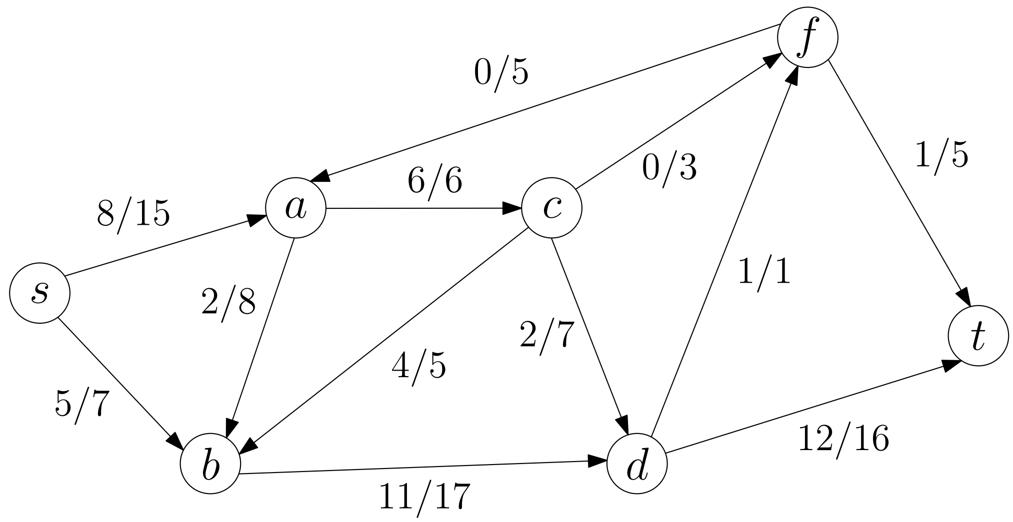
S	A	B	C	D	F	J	T
$0(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$
0(-)	$2(S)$	$5(S)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$
	2(S)	$5(S)$	$3(A)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$
		$4(C)$	**3(A)**	$12(C)$	$\infty(-)$	$8(C)$	$\infty(-)$
		4(C)		$10(B)$	$7(B)$	$8(C)$	$\infty(-)$
				$10(B)$	**7(B)**	$8(C)$	$18(F)$
				$10(B)$		**8(C)**	$17(T)$
				10(B)			$15(D)$
							15(D)
0(-)	**2(S)**	**4(C)**	**3(A)**	**10(B)**	**7(B)**	**8(C)**	**15(D)**

Question 2 – Indiquer l'arborescence des plus courts chemins issus du sommet S sur la Figure 2 de la feuille en annexe.

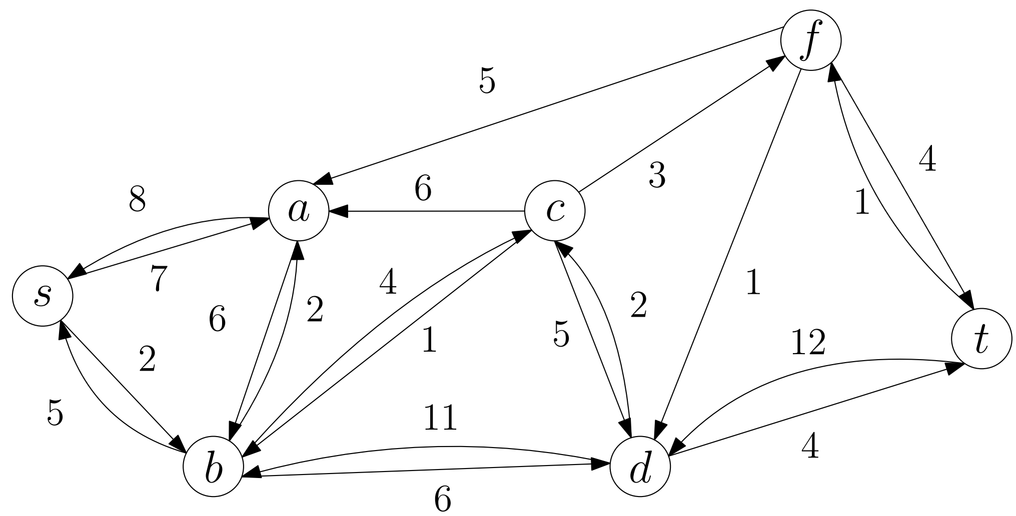

4
C
1
5
A
J
2
9
3
1
S
4
9
D
6
5
5
B
3
T
3
F
11

<u>Exercice 2</u> : Flot (4 points)

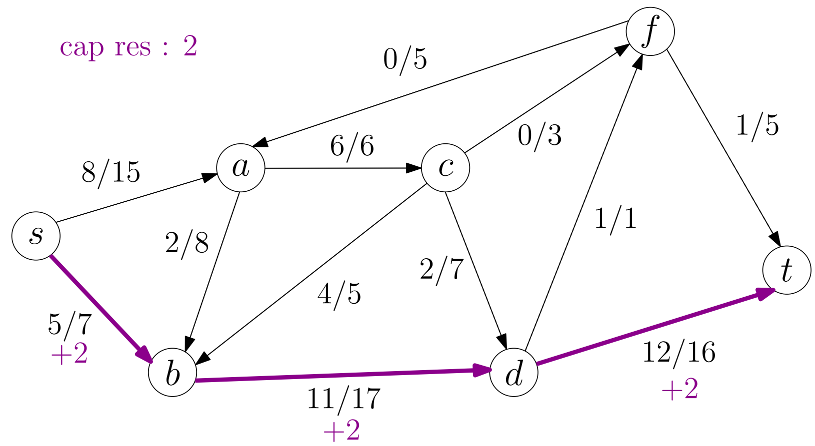
Sur le graphe G ci-dessous, on considère un réseau dans lequel on fait passer un flot entre les sommets s et t. Sur chaque arc sont indiqués la valeur du flot courant / la capacité de l'arc.

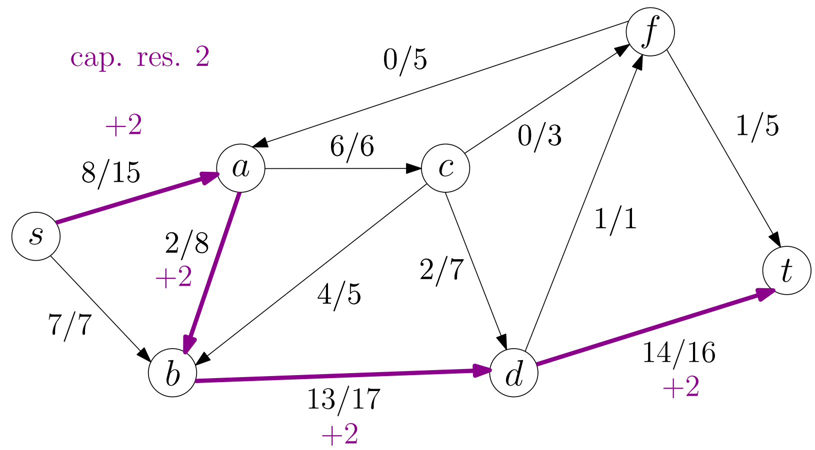


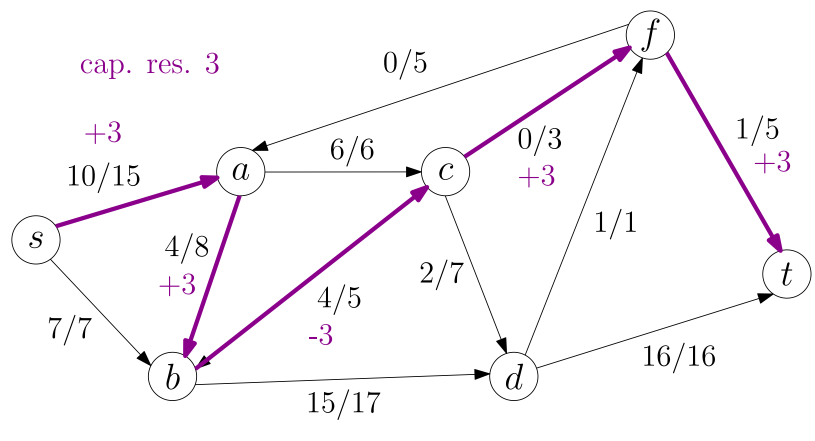
Question 1 – Dessiner, sur la feuille en annexe, le graphe résiduel de G correspondant au flot fourni ci-dessus.

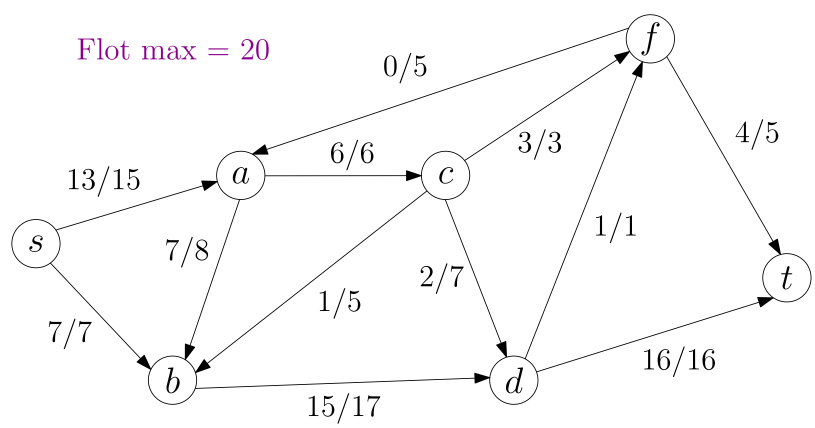


Question 2 – En prenant le flot fourni comme flot initial, appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour déterminer la valeur maximum d'un st-flot dans le graphe G ci-dessus. Vous donnerez les étapes de l'algorithme sur la feuille en annexe et vous préciserez la valeur du flot obtenu (il peut y avoir plus de figures que nécessaire). Vous préciserez la valeur finale du flot obtenu sur chaque arc ainsi que la valeur totale du flot

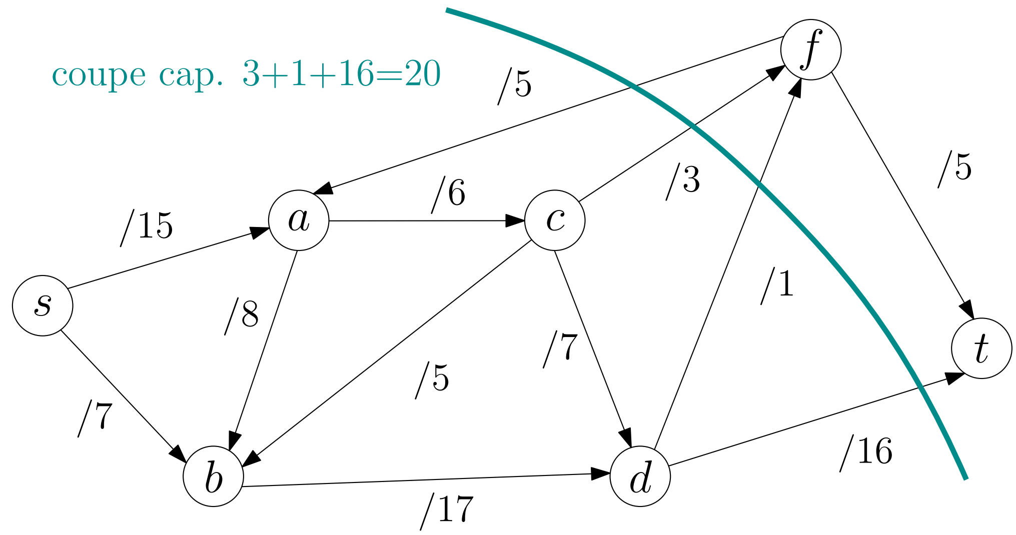








Question 3 – Donnez un certificat d'optimalité du flot que vous avez obtenu à la question précédente. Vous pourrez pour cela utiliser la Figure 3 sur la feuille en annexe.



On trouve une coupe de capacité 20, ce qui prouve que notre flot de valeur 20 est optimal car ils sont égaux.

Exercice 3 : **Vrai ou Faux ?** (4 points)

Pour les affirmations 1 ou 2 ci-dessous, indiquez si elle est vraie ou fausse. Pour la dernière question, vous indiquerez votre réponse à Bob, à Charlotte et à David, prise à chaque fois parmi les 4 propositions. Dans tous les cas, votre réponse doit être justifiée.

1. Pour tout $n \geq 6$, il existe un graphe connexe à n sommets et n arêtes.

   C'est vrai, le cycle à n sommets C_n est connexe et possède n sommets et n arêtes.

2. Pour tout $n \geq 6$, il existe un graphe non-connexe à n sommets et n arêtes.

   C'est vrai, le graphe obtenu par l'union disjointe entre un triangle C_3 et un cycle C_{n-3} de longueur $n-3 \geq 3$ n'est pas connexe, mais il possède bien n sommets et n arêtes.

3. Dans un graphe G, vous avez trouvé un transversal de taille 5, et Bob, Charlotte et David ont respectivement trouvé un couplage de taille 4, 5, 6. En utilisant ces informations, vous devez répondre à chacun l'une des phrases suivantes :

   (a) Ton couplage ne peut pas exister, tu t'es trompé·e.

   (b) Ton couplage peut exister, il peut être maximum ou non.

   (c) Ton couplage peut exister, mais il ne peut pas être maximum.

   (d) Ton couplage peut exister, dans ce cas il est nécessairement maximum.

   Pour tout graphe G, tout transversal T de G et tout couplage M de G, on a la relation suivante : $|M| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |T|$, où $\nu(G)$ est la taille d'un couplage maximum et $\tau(G)$ est la taille d'un transversal minimum. Si le graphe n'est pas biparti, il peut arriver que $\nu(G) < \tau(G)$. Ici on a un transversal T de taille 5. On répond donc :

   — à Bob la réponse (b) : son couplage de taille 4 peut exister, il peut être maximum ou non.

   — à Charlotte la réponse (d) : ton couplage peut exister, dans ce cas il est nécessairement maximum.

   — à David la réponse (a) : ton couplage ne peut pas exister, tu t'es trompé.

Exercice 4 : **Transport de chats** (3 points)

Pierre souhaite partir en vacances avec ses huits chats : Berlioz, Choupette, Lucette, Moustache, Pépère, Quichou, Roucky et Tchoupie. Il doit acheter des cages de transport, qui peuvent contenir plusieurs chats, mais il ne doit pas mettre dans la même cage deux chats qui ne s'entendent pas. Son but est de minimiser le nombre de cages qu'il doit acheter pour transporter tous ses chats en même temps.

— Berlioz s'entend avec Moustache, Pépère, Quichou et Tchoupie

— Choupette s'entend avec Quichou

— Lucette s'entend avec Roucky

— Moustache s'entend avec Berlioz et Pépère

— Pépère s'entend avec Berlioz, Moustache et Roucky

— Quichou s'entend avec tous les autres sauf Lucette, Moustache et Pépère

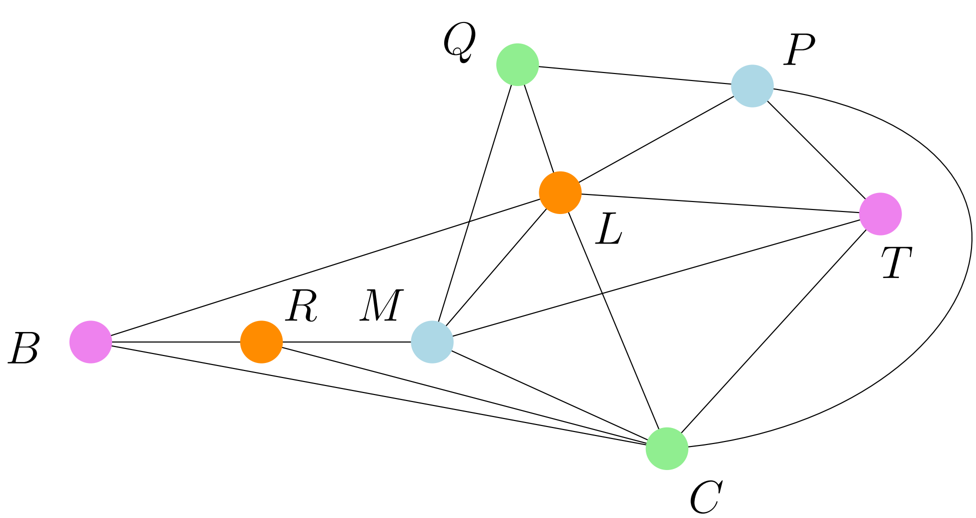
— Roucky s'entend avec tous les autres sauf Berlioz, Choupette et Moustache

— Tchoupie s'entend avec Berlioz, Quichou et Roucky

Question 1 – Modélisez ce problème en termes de théorie des graphes : vous décrirez clairement le graphe considéré et le problème de graphes à résoudre.

> Soit G le graphe des conflits entre les chats, c'est-à-dire que :
>
> — les sommets sont les chats
>
> — on relie deux sommets par une arête si les chats correspondant ne s'entendent pas (au moins l'un ne s'entend pas avec l'autre, mais ici les listes sont symétriques de toute façon).
>
> On cherche à former un nombre minimum de cages, c'est-à-dire d'ensembles de chats sans conflits (stables dans le graphe), on cherche donc à colorer optimalement le graphe des conflits.

Question 2 – Résoudre le problème de graphes indiqué à la question précédente et en déduire le nombre de cages que Pierre doit acheter.

> On dessine le graphe choisi à la question précédente et on trouve une 4-coloration :
>
> 
>
>
> Ainsi $\chi(G) \leq 4$. Par ailleurs, G contient une clique de taille 4 (C, M, L, T ou encore C, L, P, T) donc $\chi(G) \geq 4$. Au total $\chi(G) = 4$ donc Pierre doit acheter 4 cages (les chats d'une même couleur ci-dessus peuvent être mis dans une cage, cela donne une affectation).

Exercice 5 : **Peluches à l'hôpital** (4 points)

Dans le service pédiatrie d'un hôpital, une association propose de distribuer des peluches d'animaux aux enfants malades. L'association dispose de 2 Babar, 2 crocodiles, un dauphin, un lapin, une Minnie, un ourson, un Simba[1]. Chaque enfant a pu faire une liste des animaux qu'il aimait pour avoir une peluche qui lui plaît. L'association se pose la question suivante : peut-elle donner à chaque enfant une peluche qui lui plaît ?

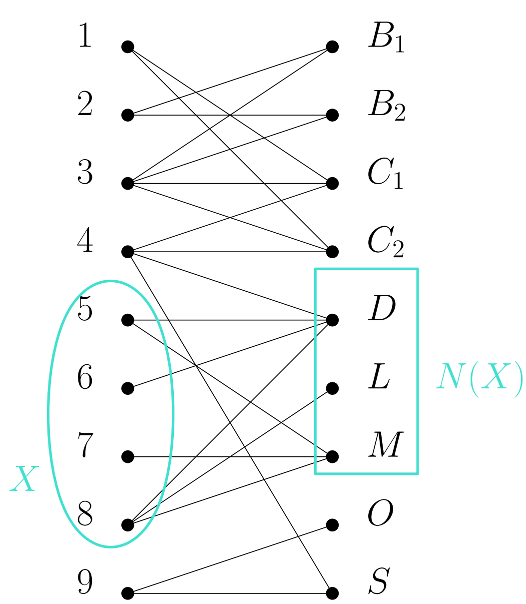
1. L'enfant de la chambre 1 aime les crocodiles.
2. L'enfant de la chambre 2 aime Babar.
3. L'enfant de la chambre 3 aime Babar et les crocodiles.
4. L'enfant de la chambre 4 aime les crocodiles, les dauphins et Simba.
5. L'enfant de la chambre 5 aime les dauphins et Minnie.
6. L'enfant de la chambre 6 aime les dauphins.
7. L'enfant de la chambre 7 aime Minnie.
8. L'enfant de la chambre 8 aime les dauphins, le lapin et Minnie.
9. L'enfant de la chambre 9 aime les oursons et Simba.

Question 1 – Modéliser le problème en termes de théorie des graphes (sur un graphe que vous définirez correctement, et en précisant le problème de graphes associé).

> On crée un graphe biparti G contenant :
>
> — un sommet pour chaque enfant (numéro de chambre 1 à 9) et un sommet pour chaque peluche (on abrège son nom par son initiale) : $\{B_1, B_2, C_1, C_2, D, L, M, O, S\}$, où B_1, B_2 sont les deux Babar, et C_1 et C_2 sont les deux crocodiles.
>
> — on relie par une arête le sommet de l'enfant x à la peluche y si la peluche y plaît à l'enfant x.
>
> (Le graphe pour ce cas particulier est dessiné à la question suivante.)
>
> Toute solution d'affectation d'exactement une peluche à chaque enfant en respectant leur goûts correspond alors à un couplage parfait dans G.

Question 2 – Répondre à la question de l'association en utilisant des outils de théorie des graphes relatifs au problème de graphes choisi à la question précédente.

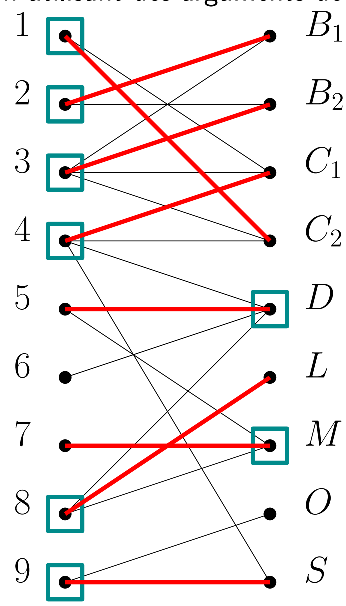
> On dessine le graphe G et on se rend compte qu'il existe un ensemble X (entouré sur le dessin, par exemple : $\{5, 6, 7, 8\}$) contenu dans un côté du biparti tel que $|N(X)| < |X|$. Par le théorème de Hall, il n'existe pas de couplage parfait dans G, donc l'association ne peut pas donner à chaque enfant une peluche qui lui plaît.



Question 3 – Si vous avez répondu *oui* à la question précédente : indiquer pour chaque enfant la peluche qu'il ou elle doit recevoir.

1. Babar est un éléphant, Minnie est une souris, et Simba est un lion mais peu importe.

Si vous avez répondu *non* à la question précédente : combien d'enfants au maximum peuvent recevoir simultanément une peluche qui leur plaît ? Vous préciserez le problème de graphes modélisant ce nouveau problème et donnerez un certificat d'optimalité de votre solution, en utilisant des arguments de théorie des graphes.



On trouve un couplage de taille 8 et un transversal de même taille, donc le couplage proposé est maximum.

Exercice 6 : **Preuve sur la coloration** (4 points)

Un graphe G est dit *cordal* si tout cycle élémentaire dans G de longueur ≥ 4 possède une corde (c'est-à-dire une arête entre deux sommets non-consécutifs sur le cycle). Dans cet exercice, on n'utilisera pas vraiment la définition d'un graphe cordal mais plutôt les deux propriétés ci-dessous, qu'on admettra :

Théorème 1. *Soit G un graphe cordal. Alors :*

1. *pour tout $x \in V(G)$, le graphe $G \setminus \{x\}$ obtenu à partir de G en supprimant x est aussi cordal.*
2. *il existe un sommet v dont le voisinage est une clique, autrement dit $N(v)$ est une clique (et donc $N(v) \cup \{v\}$ est aussi une clique). Ce sommet v est dit* simplicial.

Question 1 – Montrer par récurrence sur n la propriété suivante : si G est un graphe cordal à n sommets, alors $\chi(G) \leq \omega(G)$.
Indice : quelle peut être la taille du voisinage d'un sommet simplicial ?

Initialisation pour n=1 : pour un graphe à un seul sommet, on a $\omega(G) = 1$ et $\chi(G) = 1$ donc $\chi(G) \leq \omega(G)$.
Hérédité : On suppose que la propriété est vraie au rang n, montrons-la au rang $n+1$.

1. Soit G un graphe cordal à $n+1$ sommets.
2. Soit v un sommet simplicial comme indiqué par le Théorème.
3. On pose $G' = G \setminus \{v\}$.
4. Comme indiqué par le théorème, G' est cordal, à n sommets, donc on applique l'hypothèse de récurrence sur G' : on peut colorer G' avec $\omega(G')$ couleurs. Remarquons que $\omega(G') \leq \omega(G)$.
5. Comme indiqué dans le théorème, $N(v) \cup \{v\}$ est une clique, donc de taille $\leq \omega(G)$, donc $|N(v)| \leq \omega(G) - 1$.
6. Parmi les $\omega(G)$ couleurs, au moins une n'est donc pas utilisée sur $N(v)$: on l'attribue à v et on obtient ainsi une $\omega(G)$-coloration de G, ce qui prouve que $\chi(G) \leq \omega(G)$.

Grâce à l'initiation et l'hérédité, on a prouvé par récurrence que pour tout graphe cordal G, $\chi(G) \leq \omega(G)$.

Question 2 – Peut-on en déduire, pour tout graphe cordal G, une égalité entre $\chi(G)$ et un/des autre(s) paramètre(s) du graphe ? Justifier.

Pour tout graphe G, on a $\omega(G) \leq \chi(G)$ et on a prouvé que pour tout graphe cordal, $\chi(G) \leq \omega(G)$ donc on en conclut que $\chi(G) = \omega(G)$.

Examen INF303 - L2 INM **11 janvier 2024**

Feuille à rendre avec la copie *n° d'anonymat :*

Exercice 1 :

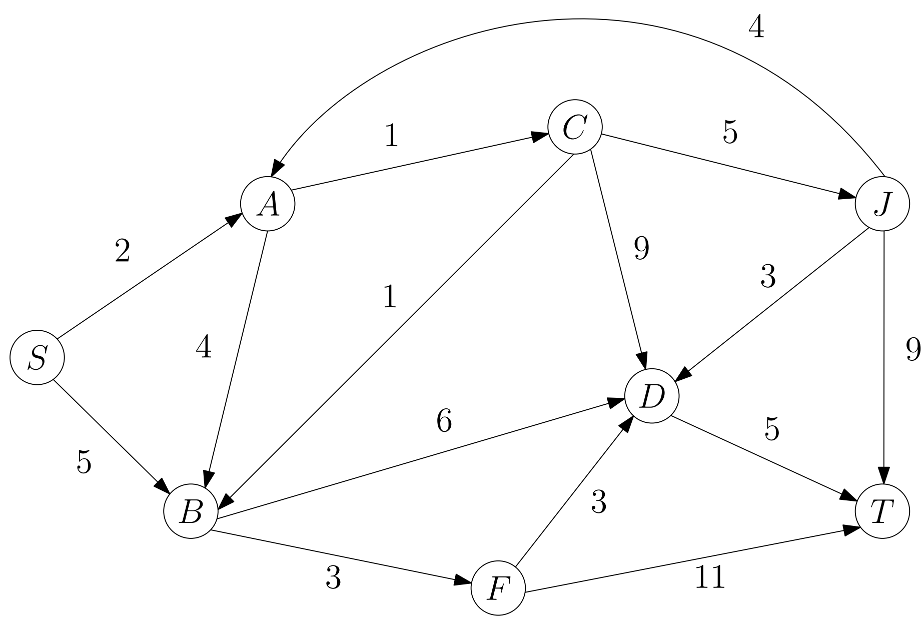


FIGURE 1 – Algorithme des plus courts chemins

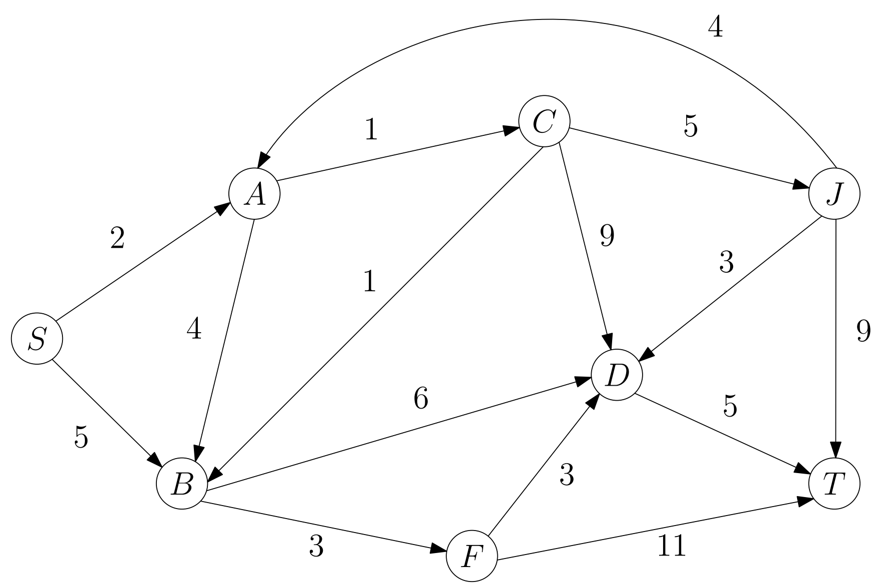
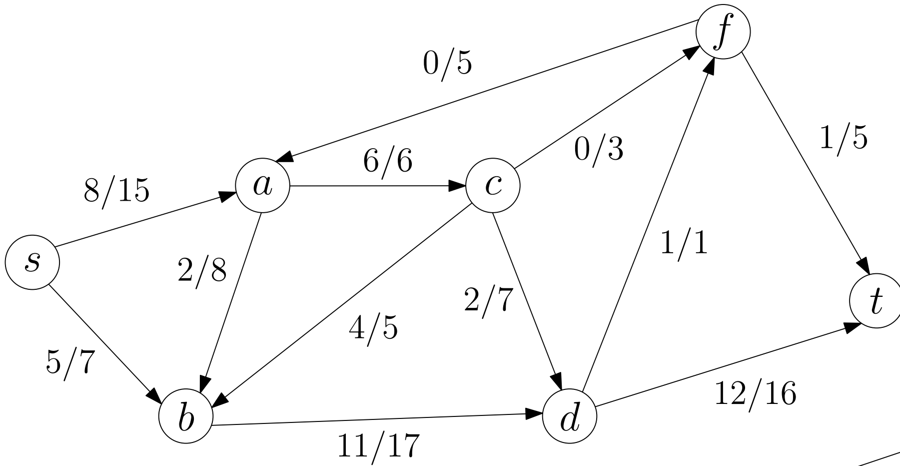
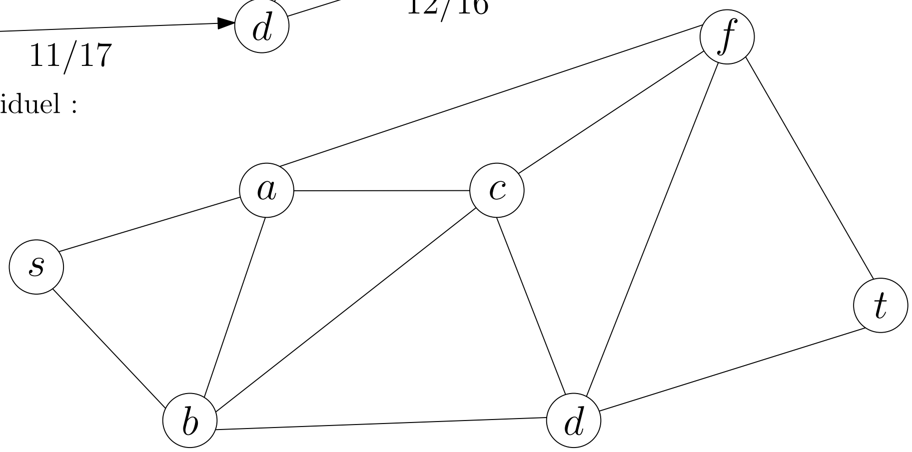


FIGURE 2 – Arborescence obtenue

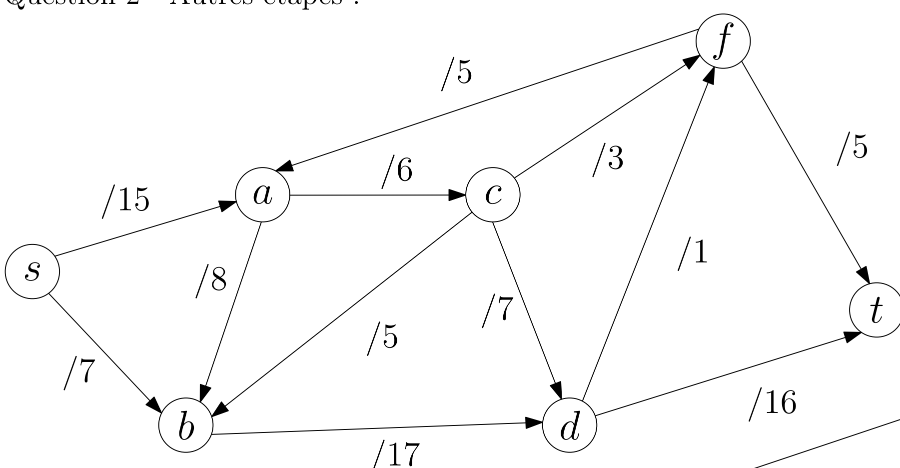
Exercice 2 :

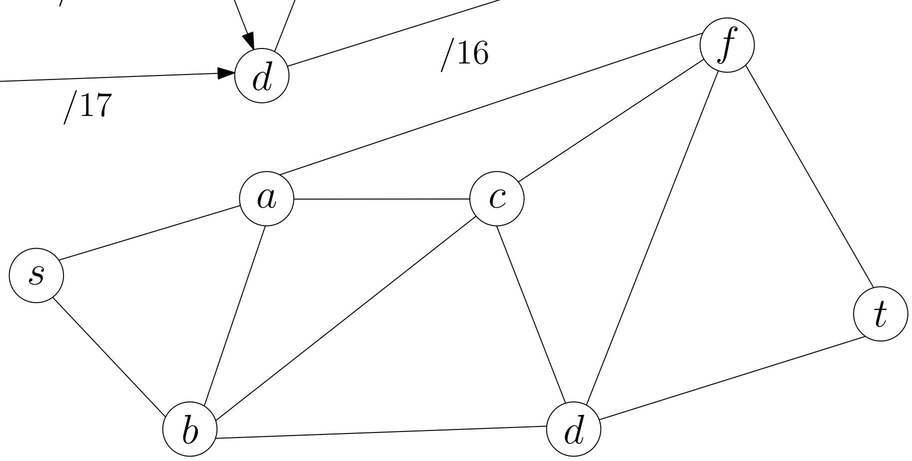


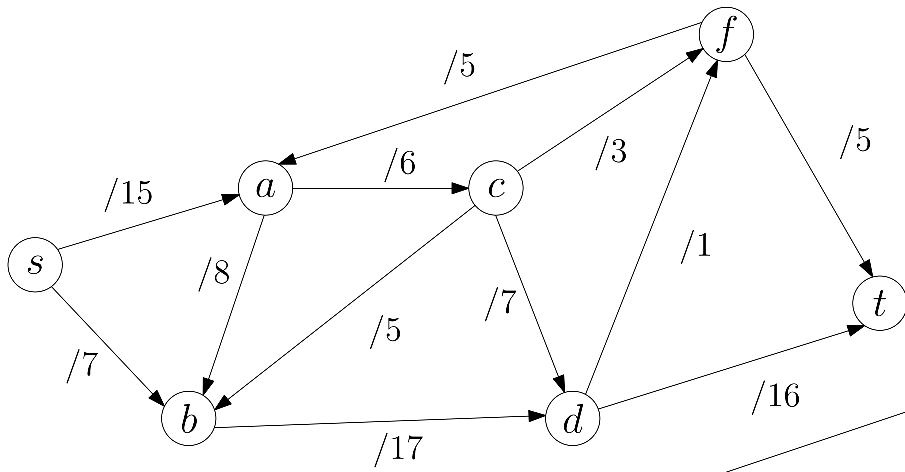
Question 1 - Graphe résiduel :

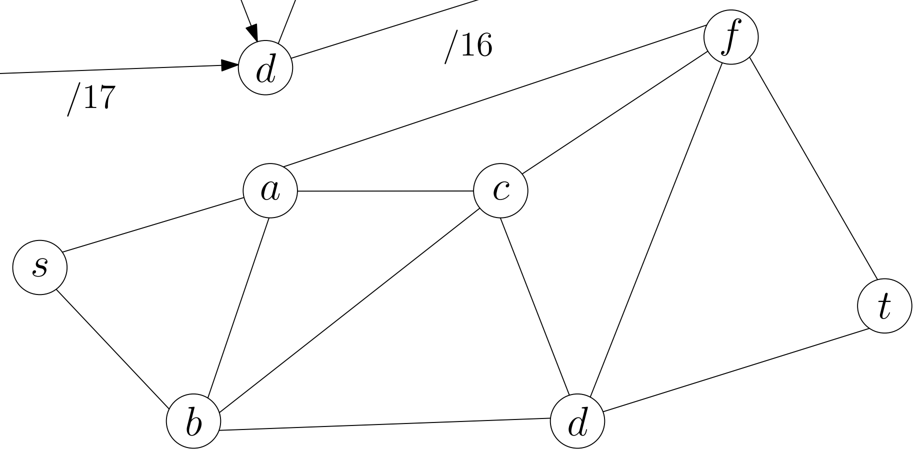


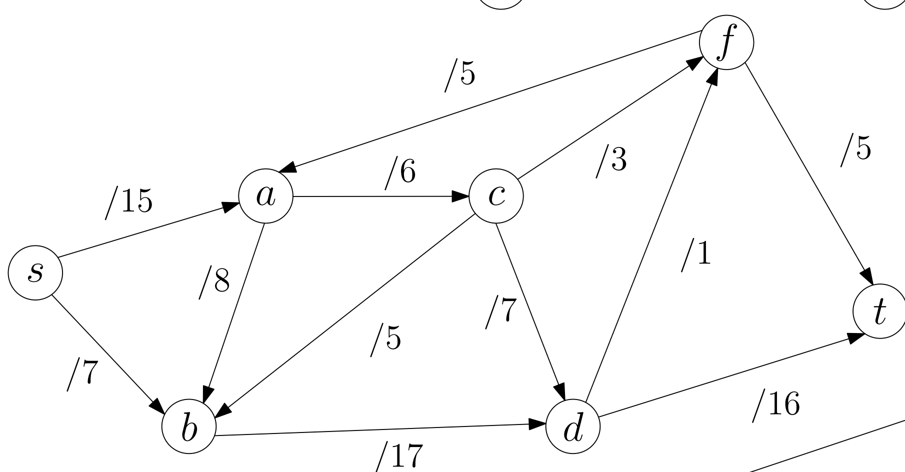
Question 2 - Autres étapes :

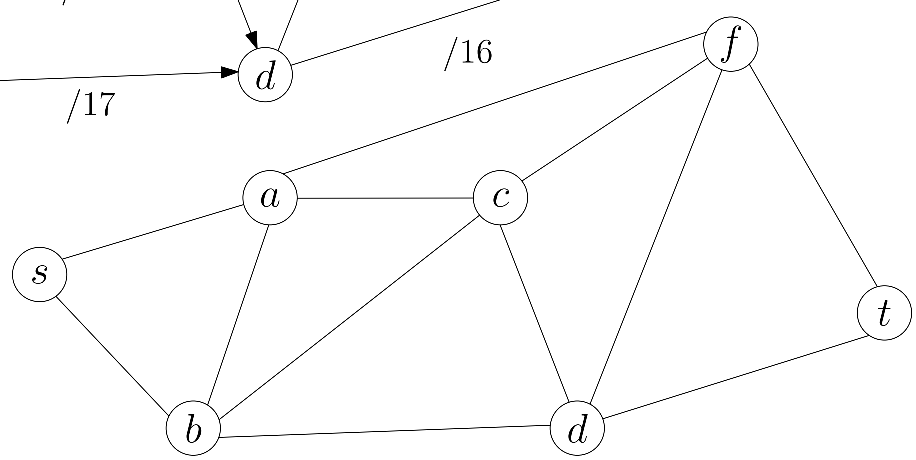





f
/5
/5
/15
a
/6
c
/3
s
/8
/1
t
/7
/5
/7
b
d
/16
/17


f
a
c
s
t
b
d


f
/5
/5
/15
a
/6
c
/3
s
/8
/1
t
/7
/5
/7
b
d
/16
/17


f
a
c
s
t
b
d

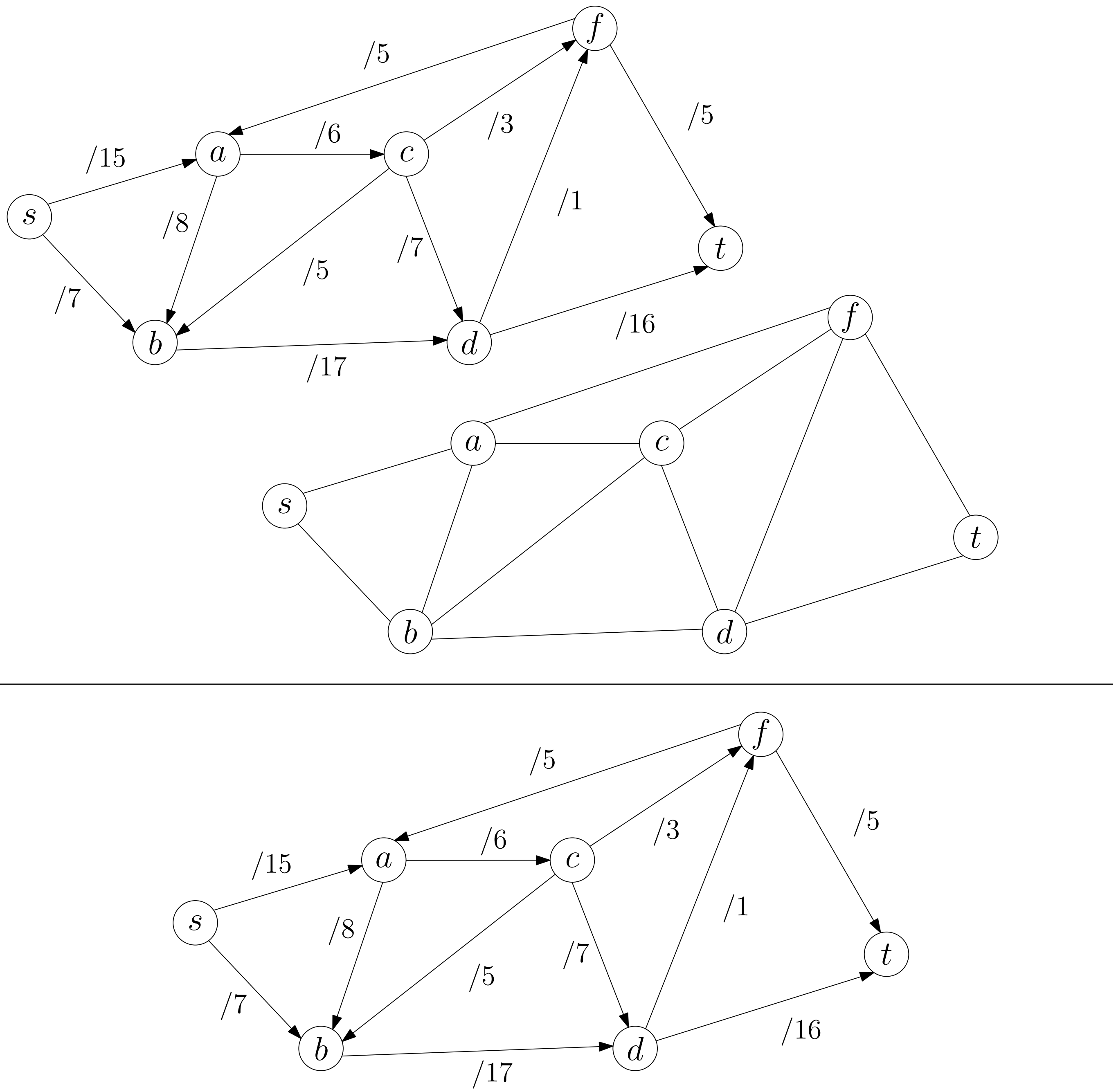


Figure 3 – Certificat d'optimalité