Probabilités et Variables aléatoires

Chap. 1&2&3 du polycopié

Chargés de cours
V. Léger &
F. Leblanc (resp. UE)

Loi de probabilité

Soit P une loi de probabilité sur Ω, $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ On définit P comme la fonction définie sur l'ensemble de toutes les parties de Ω (noté $\mathcal{P}(\Omega)$) telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \;\; 0 \leq P(A) \leq 1$
3. pour une famille dénombrable d'ensembles $(A_i)_i$ deux à deux disjoints (t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$) $P(A_1 \cup A_2 ... \cup A_i ...) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Quelques notations :

- A décrit un évènement (par ex dans EX3 "la durée de vie d'une ampoule dépasse 10h")
- $\bar{A}$ le complémentaire de A dans Ω décrit l'évènement contraire
- $\emptyset$ l'évènement impossible (complémentaire de Ω dans Ω)
- Ω l'évènement certain
- $A \backslash B$ (noté aussi $A - B$ ou $A \Delta B$) l'évènement A réalisé et B non réalisé défini par $A \backslash B = A \cap \bar{B}$

Propriétés d'une probabilité :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{si} \quad A \cap B = \emptyset$
4. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. $P(A \backslash B) = P(A) - P(B \cap A)$
7. Si $B \subset A$ $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$

Loi de probabilité conditionnelle

On définit la loi de probabilité conditionnelle à B t.q. $P(B) \neq 0$ par :

$$P^B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \forall A \subset \Omega$$

Evènements indépendants :
A et B seront dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

et si $P(B) \neq 0$ on aura $P^B(A) = P(A|B) = P(A)$
que B soit réalisé ou non ne conditionne pas que A le soit.
Incompatibilité : A et B sont dits incompatibles si
$P(A \cap B) = 0$

Formule des probabilités totale :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

Formule de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

et on établit que pour tout a et b réels on a toujours

$$P(X \in]a, b]) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Preuve : $\{X \leq b\} = A$ et $\{X \leq a\} = B$ alors $B \subset A$ et on applique la propriété 7.

Ensuite selon que X est discrète ou continue on définit

- si **X discrète** et à valeur dans $\mathcal{X} = \{m_1, ..., m_q\}$ **sa loi de probabilité** donnée par $\{p_k, 1 \leq k \leq q\}$ où

$$p_k = P(X = m_k) = P(X \in]m_{k-1}, m_k]) = F(m_k) - F(m_{k-1})$$

On a évidemment $p_k \in [0, 1]$ et $\sum_k p_k = 1$.
chaque p_k est l'accr. de la FdR entre m_{k-1} et m_k et

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \sum_{m_k \leq x} P(X = m_k).$$

Attention ici $P(X = m_k) \neq 0$

- si **X est continue** et que sa FdR est dérivable sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = F_X'(x) \approx P(X \in [x, x+\delta])/\delta \text{ si } \delta \text{ petit.}$$

On a f_X positive et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$ de plus

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Rem.: $P(X = x) = 0$ d'où $P(X < x) = P(X \leq x)$

Ex :

- Soit X le résultat d'un dé equilibré à six faces. Donner sa loi de prob. sa Fdr et $P(X \in [0.5, 1])$
- Soit X une variable de densité $f_X(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et 0 sinon. Calculer sa FdR et $P(X \in [0.5, 1])$.

Espérance

- **cas discret**

$$E(X) = \sum_{m_k \in \mathcal{X}} m_k \, P(X = m_k) = \mu.$$

- **cas continu**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \mu.$$

Ex de l'espérance du tirage d'un dé équilibré

Variance $E[(X - E(X))^2]$

- **cas discret**

$$V(X) = \sum_{m_k \in \mathcal{X}} (m_k - \mu)^2 P(X = m_k) = \sigma^2.$$

- **cas continu**

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx = \sigma^2.$$

Ecart type (continu et discret) $\sigma = \sqrt{V(X)}$.
Propriétés :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ et en part. $E(b) = b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et en part. $V(b) = 0$
- si de plus X et Y tq
  $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$ elles sont dites indépendantes et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exercice : On tire ensemble deux dés un rouge (X) et un noir (Y) indépendants

1. Calculer $E(X), E(Y)$ et $E(X+Y)$.
2. Dans un jeu on lance les deux dés et le gain est $2X+Y$. Calculer l'espérance et l'écart-type du gain.

Centrer et réduire

Soit X d'espérance μ et variance σ^2 alors :

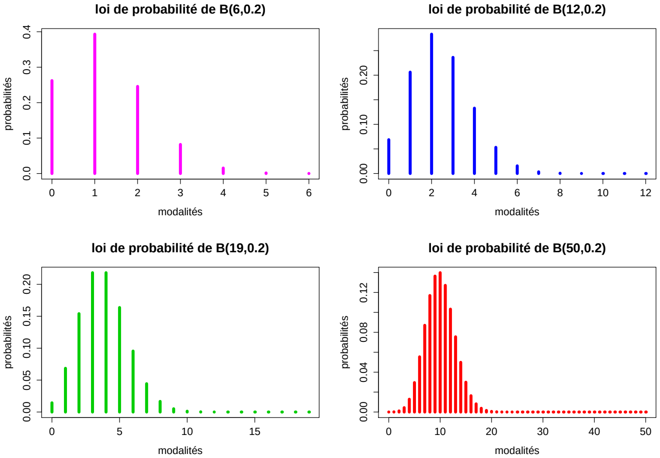
1. $E(X-\mu)=0$ et $X-\mu$ est dite centrée
2. $V(X/\sigma)=1$ et X/σ est dite réduite
3. $(X-\mu)/\sigma$ est la centrée réduite de X en effet :

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=0 \quad \text{et} \quad V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=1$$

Ex : Calculer la variable centrée réduite de $Z=2X+Y$ défini dans le jeu de dé précédent

Cas discret

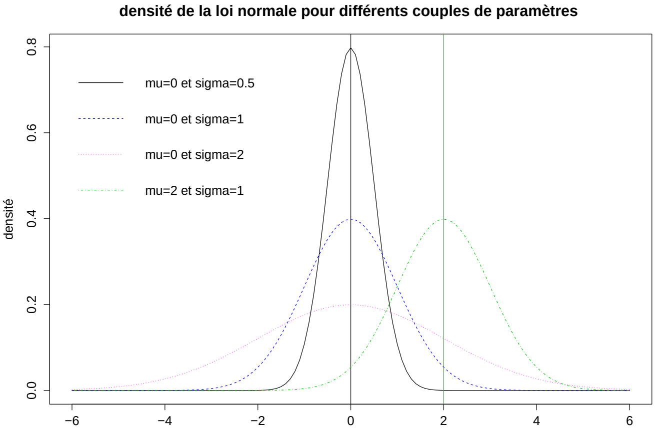
- **Uniforme** sur $\{m_1, ..., m_q\}$ (ex le dé)
  notée $\mathcal{U}(\{m_1, ..., m_q\})$: $\mathcal{X} = \{m_1, ..., m_q\}$
- **Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$
  notée $\mathcal{B}(p)$: $\mathcal{X} = \{0, 1\}$
  $$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p.$$
  variable indicatrice de succès (A réalisé avec proba. p)
- **Binômiale** de paramètres $p \in]0, 1[$ et $n > 0$ et entier
  notée $\mathcal{B}(p, n)$: $\mathcal{X} = \{0, 1, ..., n\}$
  $$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{pour tout} \quad k \in \{0, ..., n\}.$$
  variable donnant le nombre de succès de A après n essais indép.
- Géométrique, Poisson....

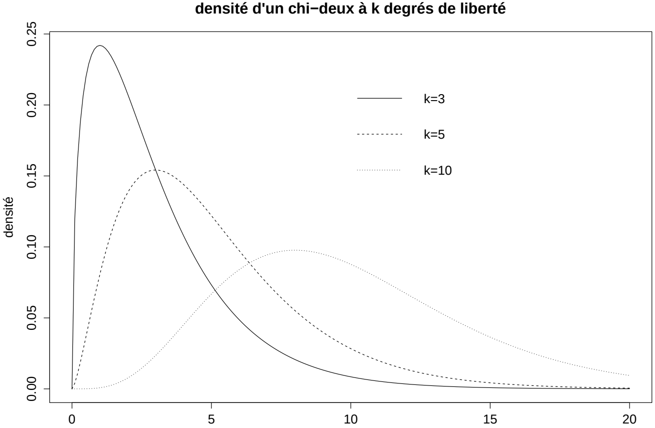

loi de probabilité de B(6,0.2)
probabilités
modalités
loi de probabilité de B(12,0.2)
probabilités
modalités
loi de probabilité de B(19,0.2)
probabilités
modalités
loi de probabilité de B(50,0.2)
probabilités
modalités

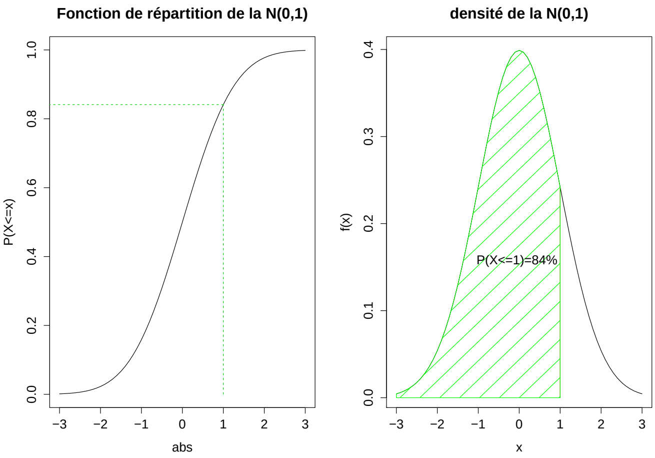
Cas continu

- **Uniforme** sur $[a, b]$ noté $\mathcal{U}([a, b])$
- **Normale** de paramètres $\mu \in]-\infty, \infty[$ et $\sigma^2 \in]0, \infty[$ noté $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- **Chi-deux** de paramètre entier ν noté $\mathcal{X}_\nu$ ou $\mathcal{X}(\nu)$
- **Student** de paramètre entier ν noté $\mathcal{T}_\nu$ ou $\mathcal{T}(\nu)$
- ....

Rem.:
-Pour toutes les variables usuelles on connait l'expression des densités ou loi de proba, FdR, espérance, variance,....(voir tableaux recap. dans poly)
-La $\mathcal{N}(0, 1)$ et la $\mathcal{T}_\nu$ sont symétriques autour de $[0, y)$


densité de la loi normale pour différents couples de paramètres
mu=0 et sigma=0.5
mu=0 et sigma=1
mu=0 et sigma=2
mu=2 et sigma=1
densité
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
−6
−4
−2
0
2
4
6


densité d'un chi−deux à k degrés de liberté
densité
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
5
10
15
20
k=3
k=5
k=10


Fonction de répartition de la N(0,1)
P(X<=x)
abs
densité de la N(0,1)
f(x)
x
P(X<=1)=84%

Savoir utiliser les abaques

- Loi normale (page 1 des tables) : FdR de la $\mathcal{N}(0,1)$, notée Φ, pour $x \geq 0$ et si $x < 0$ on utilise :

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

- Loi normale (page 2) : fonction quantile $\Phi^{-1}(p)$ de la $\mathcal{N}(0,1)$ pour $p \geq 0.5$ et si $p < 0.5$ on utilise :

$$\Phi^{-1}(1-p) = -\Phi^{-1}(p)$$

- Loi de Student (page 3) : fonction quantile de la $\mathcal{T}(\nu)$
- Loi du Chi-deux (page 4) : fonction quantile de $\mathcal{X}(\nu)$
- Loi de Fisher-Snedecor (page 5 à 8) : certains quantiles

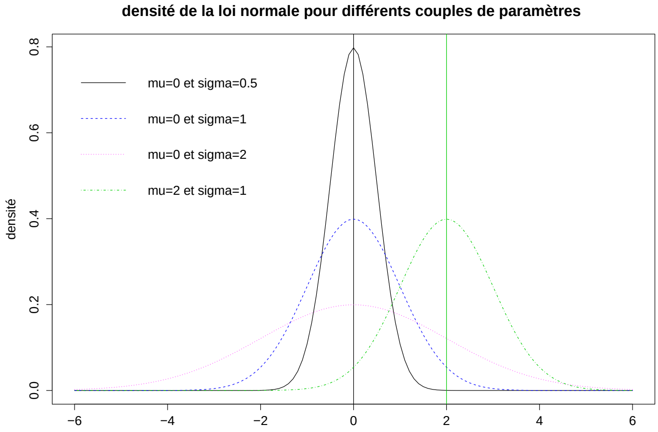
Savoir utiliser les menus de la calculette

Ex :

- Soit X une $\mathcal{N}(2,9)$ calculer $P(1 \leq X \leq 2)$ avec les tables et avec le programme adapté de votre calculette
- Trouver a tel que $P(X \geq a) = 0.05$ avec les deux outils
- Soit T de loi de Student $\mathcal{T}(2)$ calculer $P(T \leq 2.9)$ et comparer avec $\Phi(2.9)$. Le refaire avec une $\mathcal{T}(100)$.
- Soit T de loi de Student $\mathcal{T}(5)$, trouver t tels que $P(|T| \geq t) = 0.05$.
- Soit V de loi $\mathcal{X}(3)$ donner le quantile d'ordre 0.95 lu dans la table et le calculer avec le programme de la calculette

Pourquoi elle ?

- construite par Gauss à l'aide d'observations répétées d'une mesure
- simplicité : nombreuses propriétés simples et remarquables, facile à manipuler dans les calculs
- FdR, densite, quantile disp. dans tous les outils de calc.
- la symétrie autour de la moyenne : $P(X > \mu + a) = P(X < \mu - a)$
- elle a deux paramètres ajustables indépendamment l'un de l'autre : gamme de modèles assez riche et peu coûteuse
- souvent adaptée à des situations variées
- Et si elle ne l'est pas avec de grands échantillons on s'y ramenera avec le Théorème Central Limit


densité de la loi normale pour différents couples de paramètres
mu=0 et sigma=0.5
mu=0 et sigma=1
mu=0 et sigma=2
mu=2 et sigma=1
densité
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
−6
−4
−2
0
2
4
6

Ses propriétés :

1. si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors pour tous a et b réels $Y = aX + b$ suit une loi $\mathcal{N}(E(Y), V(Y))$ où $E(Y) = a\mu + b$ et $Var(Y) = a^2\sigma^2$.
2. U suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $X = \sigma U + \mu$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
3. si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $U = (X - \mu)/\sigma$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
4. X_1 de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et X_2 de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et indépendantes alors $aX_1 + bX_2$ suit la loi $\mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.

Concentration d'une var normale X autour de E(X)
X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La probabilité de dévier de μ pour X d'une distance maximum d est donnée par $P(|X - \mu| \leq d)$.
EX : Montrer que

$$P(|X - \mu| \leq d) = 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - 1$$

Quelles valeurs obtient-t-on pour $d = \sigma, 2\sigma$ ou 3σ ?
Différence ou somme de deux variables normales
Ex : X et Y resp. de loi $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, on pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$, loi de S et de D ?