Travaux dirigés 3 - MAP201, thème équation différentielles

Exercice 1 - Chute libre

Lorsqu'un parachutiste est en chute libre, sa vitesse $v(t)$ suit l'équation

$$\begin{cases} m\dot{v}(t) = mg - kv(t)^2, \text{ pour tout } t \geq 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

où $m > 0$ est sa masse, $g > 0$ est l'intensité de la pesanteur, et $k > 0$ un coefficient de résistance de l'air.

1) Donner le sens de variation et la limite (quand $t \to +\infty$) de la solution $v(t)$, par une lecture graphique.

Un parachutiste de $118.4kg$ (équipement compris) est lâché à une hauteur de $9570m$, il est en chute libre pendant $116s$ jusqu'à ce qu'il ouvre son parachute à $640m$.

2) Quelle est sa vitesse moyenne pendant la chute libre ?

La quantité k est inconnue, pour la comprendre on va simuler la chute libre par une méthode d'euler avec un paramètre k à faire varier, calculer la distance parcourue en $116s$, et adapter k pour la faire correspondre à la distance mesurée.

3) Écrire un code qui prend en entrée un nombre de pas N, et un paramètre $k > 0$, et renvoie la distance parcourue par le parachutiste. En déduire une estimation numérique de la valeur de k, et de la vitesse terminale du parachutiste.

Exercice 2 - Modèle de Lotka-Volterra avec croissance limitée

On considère ici le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra, en ajoutant dans le modèle un terme supplémentaire qui limite la croissance de proies à l'instar du modèle logistique.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y - \lambda x) \\ \dot{y} = cy(x - 1) \end{cases}$$

1) Donner une interprétation du nouveau terme.
2) Afficher le champs de vecteur associé pour $c = 1$ et plusieurs valeurs de λ, sur un domaine $[0, L] \times [0, L]$ où on choisira L assez grand pour observer tout le comportement du champs de vecteurs. En particulier on affichera un cas où $\lambda < 1$, un cas où $\lambda > 1$, et un cas où $\lambda \approx 1$: quel changement observe-t-on sur le champs de vecteurs ?

On pourra utiliser le code donné en exemple au début du TP, qui affiche le champs de vecteur associé à une fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

4) Calculer les points d'équilibres du système correspondant à des population positives (c'est-à-dire $x \geq 0$ et $y \geq 0$), et dire à quoi chacun correspond (en terme de dynamique de population).
5) Simuler et commenter les solutions du système pour un choix de paramètre $c > 0$ fixé (on pourra prendre $c = 1$) et pour plusieurs valeurs positives de λ. Quel est le comportement observé des populations en temps grand, selon la valeur de λ ? On différenciera des situations de **coexistence** des deux espèces et d'**extinction** d'une (ou deux) des espèces.

On affichera la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ dans le plan de phase.

Pour l'exercice suivant, on va avoir besoin d'afficher les solutions d'un système à 3 composantes, en trois dimensions. On fournit pour cela le code suivant, d'un fonction prenant en entrée trois tableaux $X = [x_0, x_1, \ldots]$, $Y = [y_0, y_1, \ldots]$, $Z = [z_0, z_1, \ldots]$ de même taille, et affiche la courbe 3D obtenue en reliant les points (x_i, y_i, z_i).

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['figure.dpi'] = 120
plt.rcParams['savefig.dpi'] = 240

def affichage3d(X,Y,Z):
    ax = plt.axes(projection='3d')
    ax.plot3D (X,Y,Z)
    ax.set_title('Titre')
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('y')
    ax.set_zlabel('z')
    plt.show()

t=np.linspace(0,20,2000)
affichage3d(np.cos(t),np.sin(t),t)#Appelle la fonction ci-dessus
```

Listing 1 – Affichage de champs

Exercice 3 - Système de Lorenz

Tous les systèmes que l'on a vu précédemment adoptent un des comportement asymptotique suivant : ils tendent vers un point d'équilibre, ou vers l'infini, ou vers une trajectoire périodique. Il est possible de montrer que pour les équations différentielles à deux composantes, ce sont les seuls comportement possibles, mais ce n'est pas le cas pour les équations à trois composantes. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \tag{1}$$

Ce modèle à été proposé par Lorenz en 1963 comme modèle simplifié de la convection de Rayleigh-Benard :

- x représente l'intensité du mouvement de convection.
- y la différence de température entre courant ascendant et descendant.
- z l'écart du profil vertical de température par rapport à un profil linéaire.

Pour les choix de paramètres, on prendra

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3 \tag{2}$$

1) Quels sont les points d'équilibre du système ?
2) Écrire une fonction qui prend en entrée une condition initiale (x_0, y_0, z_0), un temps final $T^{fin} > 0$, et un nombre de pas $N \in \mathbb{N}^*$, et calcule la solution approchée associée.

En pratique on prendra une condition initiale différente des points critiques.

3) Afficher, pour différentes conditions initiales, les graphes (t, x), (t, y), (t, z), et le graphe (x, z), pour un temps final $T^{fin} = 50$. Décrire le comportement de la courbe (convergence, divergence, oscillation...).

*En écrivant x0,y0,z0=40*np.random.random(3)-20, on initialise x0,y0,z0 choisis aléatoirement dans* $[-20, 20]^3$.

4) Faire de même en affichant la solution en 3 dimension, grâce au code d'exemple ci-dessus.
5) On résout l'équation (1) pour deux conditions initiales différentes ; une condition initiale quelconque (x_0, y_0, z_0) prise aléatoirement dans $[-20, 20]^3$, et la condition $(x_0 + \epsilon, y_0, z_0)$ où $\epsilon = 0.01$. Cela donne deux solutions $(x(t), y(t), z(t))$ et $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$. Afficher sur une même figure les graphes $(t, x(t))$ et $(t, \tilde{x}(t))$.

Paramètres suggérés : $T^{fin} = 20,\ N = 10^5$

On fera ensuite de même avec $\epsilon = 0.001$, $\epsilon = 0.0001$. Que constate-t-on sur l'écart entre les deux solutions ?

6) Tracer l'évolution de l'écart

$$t \mapsto \log_{10}(|x(t) - \tilde{x}(t)| + |y(t) - \tilde{y}(t)| + |z(t) - \tilde{z}(t)|)$$

en fonction de t, sur un temps suffisamment grand, pour ϵ comme ci-dessus : comment évolue l'écart entre les deux solutions ?