Fonctions d'une variable réelle

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition :*

a)	$f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}$
b)	$f(x) = \dfrac{1 + \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{1}{1-x}}$
c)	$f(x) = \sqrt{x+1}$
d)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
e)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$
f)	$f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$
g)	$f(x) = \sqrt{x - x^3}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Réponse :
a) Il faut que $x \neq 0$ (terme $\dfrac{1}{x}$), et que $1 - \dfrac{1}{x} \neq 0$:

$$\left[1 - \frac{1}{x} = 0 \iff 1 = \frac{1}{x} \iff 1 = x\right] \iff \left[1 - \frac{1}{x} \neq 0 \iff x \neq 1\right]$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[}$$

Remarque : si on modifie l'expression de la fonction ainsi :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x-1}$$

on obtient alors une autre expression, donc une autre fonction définie cette fois-ci sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc définie en $x = 0$.
Cette fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ est la fonction obtenue en prolongeant par continuité la fonction f en $x = 0$ (cette notion de prolongement par continuité n'est plus abordée en MAP101).
Ce qui est important est de déterminer le domaine de définition de la fonction à partir de son expression donnée sans la modifier.

`b)` Il faut que $x \neq 0$ (terme $\dfrac{2}{x}$), $x \neq 1$ (terme $\dfrac{1}{x-1}$), et que $1 + \dfrac{1}{1-x} \neq 0$:

$$\left[1 + \frac{1}{1-x} = 0 \iff \frac{1}{1-x} = -1 \iff 1 - x = -1 \iff x = 2\right]$$

$$\iff \left[1 + \frac{1}{1-x} \neq 0 \iff x \neq 2\right]$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\} =]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[}$$

`c)` Il faut que $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f = [-1, +\infty[}$$

`d)` Il faut que $\left\{ x - 1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x-1} \neq 0 \right\}$ donc $x - 1 > 0 \iff x > 1$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]1, +\infty[}$$

`e)` Il faut que $\left\{ x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} - 1 \neq 0 \right\}$ donc $\left\{ x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \right\}$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f = [0,1[\cup]1, +\infty[}$$

`f)` Il faut que $4 - x^2 \neq 0 \iff (2-x)(2+x) \neq 0 \iff \left\{ x \neq -2 \ \text{ et } \ x \neq 2 \right\}$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[}$$

`g)` Il faut que $x - x^3 \geq 0 \iff x(1-x)(1+x) \geq 0$.
On fait un tableau de signe pour avoir le signe du produit $x(1-x)(1+x)$:

x	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$1-x$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-x^3$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \ \cup \ [0, 1]}$$

Exercice 2. *Soient les fonctions* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x - 1$ *et* $h(x) = x^2$.
Pour chacune des fonctions composées suivantes, déterminer son domaine de définition $\mathcal{D}$*, ainsi qu'une expression la plus simple possible.*

a) $f \circ g$	b) $g \circ f$	c) $f \circ g \circ h$	d) $g \circ h \circ f$	e) $f \circ h \circ g$	f) $f \circ g \circ g \circ h$

Réponse :
a) g est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$
Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

b) f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
Pour $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$
$\boxed{\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

c) h est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, $(g \circ h)(x) = g(x^2) = x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathcal{D}_{g \circ h} = \mathbb{R}$, $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f\left(g(x^2)\right) = f(x^2 - 1) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g \circ h} = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}}$

d) f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
Pour $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$, $h(f(x)) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Pour $x \in \mathcal{D}_{h \circ f} = \mathbb{R}^\star$, $(g \circ h \circ f)(x) = g(h(f(x))) = g\left(h\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = g\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2} - 1$
Donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

e) g est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, $h(g(x)) = h(x-1) = (x-1)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
$(f \circ h \circ g)(x) = f(h(g(x))) = f((x-1)^2) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ h \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

f) $(g \circ h)(x) = x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathcal{D}_{g \circ h} = \mathbb{R}$, $(g \circ g \circ h)(x) = g(x^2 - 1) = x^2 - 1 - 1 = x^2 - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathcal{D}_{g \circ g \circ h} = \mathbb{R}$, $(f \circ g \circ g \circ h)(x) = f(x^2 - 2) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$:
il faut que $x^2 - 2 \neq 0 \iff \left(\ x \neq -\sqrt{2}\ \text{ ET }\ x \neq \sqrt{2}\ \right)$
Donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\}}$

Exercice 3.

a) *Déterminer les constantes a, b et c telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x+a)\,(b\,x-1) = 2 - c\,x^2$$

b) *Déterminer les constantes a et b telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Réponse :

a) Pour tout x réel :

$$(x+a)\,(b\,x-1) = 2 - c\,x^2$$

$$\iff b\,x^2 + a\,b\,x - x - a = -c\,x^2 + 2 \iff b\,x^2 + (a\,b-1)\,x - a = -c\,x^2 + 0\,x + 2$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} b & = & -c \\ a\,b-1 & = & 0 \\ -a & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ a\,b-1 = -2\,b-1 & = & 0 \\ c & = & -b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b & = & -1/2 \\ c & = & 1/2 \end{array}}$$

b)

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a\,(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{b\,(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{a\,(x+1)+b\,(x-1)}{x^2-1}$$

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1} \Rightarrow a\,(x+1) + b\,(x-1) = x+3$$

$$\iff (a+b)\,x + (a-b) = x+3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a-b & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & -1 \end{array}}$$

Exercice 4. *Simplifier les expressions suivantes :*

a) $\exp\Big(2\,\ln|x| - 3\,\ln(y)\Big) - \exp\Big(-\ln(y)\Big)$	b) $\log_2\Big(4^x\,2^{x+y}\Big) + \log_4\left(\dfrac{8^{y-x}}{2^x}\right)$

Réponse :

a)

$$\exp\Big(2\,\ln|x| - 3\,\ln(y)\Big) - \exp\Big(-\ln(y)\Big) = \exp(\ln|x| \times 2)\exp(-\ln(y)\times 3) - \frac{1}{\exp(\ln(y))}$$

$$= \exp(\ln|x|)^2\,\frac{1}{\exp(\ln(y)\times 3)} - \frac{1}{y} = \frac{|x|^2}{y^3} - \frac{1}{y} = \boxed{\frac{x^2}{y^3} - \frac{y^2}{y^3}} = \boxed{\frac{x^2 - y^2}{y^3}}$$

b)

$$\log_2\Big(4^x\,2^{x+y}\Big) + \log_4\left(\frac{8^{y-x}}{2^x}\right) = \log_2(4^x) + \log_2(2^{x+y}) + \log_4(8^{y-x}) - \log_4(2^x)$$

$$= x\,\log_2(4) + (x+y)\log_2(2) + (y-x)\,\log_4(8) - x\,\log_4(2)$$

$$= x\,\log_2(2^2) + (x+y)\log_2(2) + (y-x)\,\log_4(4^{3/2}) - x\,\log_4(4^{1/2})$$

$$= 2\,x\,\log_2(2) + (x+y)\log_2(2) + \frac{3}{2}\,(y-x)\,\log_4(4) - \frac{1}{2}\,x\,\log_4(4)$$

$$= 2\,x + (x+y) + \frac{3}{2}\,(y-x) - \frac{1}{2}\,x = \boxed{x + \frac{5}{2}\,y}$$

Exercice 5. *Déterminer le (ou les réels) x strictement positif(s) solution(s) de chaque équation :*

a) $2(4^x) = 8(2^x)$	b) $x^x = (2\,x)^{2\,x}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 12

Réponse :

a)

$$2(4^x) = 8(2^x) \Rightarrow \ln\Big(2(4^x)\Big) = \ln\Big(8(2^x)\Big) \iff \ln(2) + \ln(4^x) = \ln(8) + \ln(2^x)$$

$$\iff \ln(2) + x\ \ln(4) = \ln(8) + x\ \ln(2)$$

$$\iff x\Big(\ln(4) - \ln(2)\Big) = \ln(8) - \ln(2) \iff x\Big(\ln(2^2) - \ln(2)\Big) = \ln(2^3) - \ln(2)$$

$$\iff x\Big(2\ln(2) - \ln(2)\Big) = 3\ln(2) - \ln(2) \iff x\ \ln(2) = 2\ln(2) \iff x = 2$$

La solution est $\boxed{x = 2}$.

b)

$$x^x = (2\,x)^{2\,x} \Rightarrow \ln\Big(x^x\Big) = \ln\Big((2\,x)^{2\,x}\Big) \iff x\ \ln(x) = 2\,x\ \ln(2\,x)$$

$$\underbrace{\iff}_{\text{car } x\neq 0} \ln(x) = 2\ln(2x) \iff \ln(x) = \ln((2x)^2) \iff x = 4x^2 \iff 1 = 4x \iff x = 1/4$$

La solution est $\boxed{x = 1/4}$.

Exercice 6. *En utilisant les formules du cours :*

$$(1) \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$(2) \quad \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

$$(3) \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad (4) \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$(5) \quad \cos(-x) = \cos(x) \qquad (6) \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

démontrer les formules de trigonométrie ci-dessous.
Une fois qu'une formule est démontrée, on peut l'utiliser pour démontrer les formules suivantes.

$\cos(2\,a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\,\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\,\sin^2(a)$	$\sin(2\,a) = 2\,\sin(a)\cos(a)$

$\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2\,a)}{2}$	$\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2\,a)}{2}$	$\tan^2(a) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(2\,a) = \dfrac{2\,\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 13

Réponse :

$$\cos(2\,a) = \cos(a+a) \overset{(1)}{=} \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \boxed{\cos^2(a) - \sin^2(a)} \tag{7}$$

$$\cos^2(a) - \sin^2(a) \overset{(3)}{=} \cos^2(a) - 1 + \cos^2(a) = \boxed{2\,\cos^2(a) - 1} \tag{8}$$

$$\cos^2(a) - \sin^2(a) \overset{(3)}{=} 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = \boxed{1 - 2\,\sin^2(a)} \tag{9}$$

$$\sin(2\,a) = \sin(a+a) \overset{(2)}{=} \cos(a)\sin(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\,\sin(a)\cos(a) \tag{10}$$

$$(8)\ :\ 2\,\cos^2(a) - 1 = \cos(2\,a) \iff \boxed{\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2\,a)}{2}} \tag{11}$$

$$(9)\ :\ 1 - 2\,\sin^2(a) = \cos(2\,a) \iff \boxed{\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2\,a)}{2}} \tag{12}$$

$$\tan^2(a) + 1 = \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} + \frac{\cos^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\sin^2(a)+\cos^2(a)}{\cos^2(a)} \overset{(3)}{=} \frac{1}{\cos^2(a)} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&\overset{(1)(2)}{=} \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\dfrac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

$$
\tan(2\,a) = \tan(a+a) \overset{(14)}{=} \frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(a)} = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} \qquad (15)
$$

Exercice 7. *Simplifier les expressions suivantes :*

a) $\cosh(x) + \sinh(x)$	b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 14

Réponse :

a) $\cosh(x) + \sinh(x)$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2\,e^x}{2} = \boxed{e^x}$$

b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^x)^2 + 2\,e^x\,e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2\,e^x\,e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{e^{2\,x} + 2 + e^{-2\,x}}{4} - \frac{e^{2\,x} - 2 + e^{-2\,x}}{4} \\
&= \frac{e^{2\,x} + 2 + e^{-2\,x} - e^{2\,x} + 2 - e^{-2\,x}}{4} = \frac{4}{4} = \boxed{1}
\end{aligned}$$

Exercice 8. *Dans cet exercice a, b désignent deux réels.*
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln|x| & si\ x \leq -1 \\ a\,x + b & si\ -1 < x < 1 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Déterminer a et b afin que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse :

1. La fonction $f(x)$ est continue en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
2. La fonction est continue en $x = -1$ si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(1)$:
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 1 + \ln|x| = 1 + \ln(1) = 1 = f(-1)$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} a\,x + b = -a + b = 1$$
donc il faut que $-a + b = 1$.
3. La fonction est continue en $x = 1$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$:
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} a\,x + b = a + b = f(1) = 5$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 6 - x^2 = 6 - 1 = 5 = f(1)$$
donc il faut que $a + b = 5$.
4. Donc $\left\{ \begin{array}{rcrcl} -a & + & b & = & 1 \\ a & + & b & = & 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

Exercice 9. *Dans cet exercice a, b et c désignent trois réels.*
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) & si\ x \leq 0 \\ a\,x^2 + b\,x + c & si\ 0 < x < 2 \\ x+1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer a, b et c afin que f soit continue sur $\mathbb{R}$, et vérifie $f(1) = 0$.

Réponse :

1. la fonction est prolongeable par continuité en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \iff \lim_{x\to 0^-} \exp(x) = \lim_{x\to 0^+} a\,x^2 + b\,x + c \iff 1 = c$$

2. la fonction est prolongeable par continuité en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \iff \lim_{x\to 2^-} a\,x^2 + b\,x + c = \lim_{x\to 2^+} x + 1 \iff 4\,a + 2\,b + c = 3$$

3. $f(1) = 0 \iff a + b + c = 0$

On a donc un système de 3 équations (linéaires) à 3 inconnues (a, b, c) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & c & = & 1 \\ 4\,a & + & 2\,b & + & c & = & 3 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \end{array}\right\} \iff \boxed{\begin{array}{ccc} a & = & 2 \\ b & = & -3 \\ c & = & 1 \end{array}}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 10. *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition :*

a)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$
b)	$f(x) = \sqrt{x^2 - \lvert x\rvert - 2}$
c)	$f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{8}{x}}$

Réponse : a) Il faut que $2 + x - x^2 > 0 \iff (2-x)(1+x) > 0$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-1, 2[}$$

b) Il faut que $x^2 - |x| - 2 \geq 0$.

— si $x \leq 0$: $x^2 - |x| - 2 = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \geq 0 \iff \left\{ x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1 \right\}$ donc $x \leq -2$

— si $x \geq 0$: $x^2 - |x| - 2 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \geq 0 \iff \left\{ x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \right\}$ donc $x \geq 2$

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[}$$

c) Il faut que $x - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, $x \neq 0$ et $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{8}{x} \geq 0$.

$$g(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{8}{x} = \frac{3(x+1)x + 3(x-1)x - 8(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)x}$$

$$= \frac{3x^2 + 3x + 3x^2 - 3x - 8x^2 + 8}{(x-1)(x+1)x} = \frac{-2x^2+8}{(x-1)(x+1)x} = \frac{2(2-x)(2+x)}{(x-1)(x+1)x}$$

$g(x)$ a le même signe que le produit $(2-x)(2+x)(x-1)(x+1)x$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
x		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x+1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Donc $f(x) = \sqrt{g(x)}$ a pour domaine de définition $\boxed{\mathcal{D}_f = \,]-\infty, -2\,] \cup \,]-1, 0\,[\, \cup \,]1, 2\,]}$.

Exercice 11.
a) *Déterminer les constantes a, b, c et d telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = a\,x + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

b) *Déterminer les constantes a, b, c, d, α et β telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = a + \frac{b}{x+\alpha} + \frac{c}{x+\beta} + \frac{d}{(x+\beta)^2} = \frac{x^3 + 2\,x - 3}{x^3 - 3\,x - 2}$$

Réponse :
a)

$$a\,x + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{(a\,x+b)\,(x-1)^2 + c\,(x-1) + d}{(x-1)^2}$$

$$a\,x + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (a\,x+b)\,(x-1)^2 + c\,(x-1) + d = x^3$$

$$\iff a\,x^3 + (-2\,a+b)\,x^2 + (a-2\,b+c)\,x + b - c + d = x^3 + 0\,x^2 + 0\,x + 0$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ -2\,a + b & = & 0 \\ a - 2\,b + c & = & 0 \\ b - c + d & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 2 \\ c & = & 3 \\ d & = & 1 \end{array}}$$

b) Pour cet exercice, il faut déterminer en premier α et β en factorisant le dénominateur $(x-\alpha)\,(x+\beta)^2 = x^3 - 3\,x - 2$:

$$(x+\alpha)\,(x+\beta)^2 = (x+\alpha)\,(x^2+2\,\beta\,x+\beta^2) = x^3+(\alpha+2\,\beta)\,x^2+(\beta^2+2\,\alpha\,\beta)\,x+\alpha\,\beta^2 = x^3+0\,x^2+3\,x-2$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \alpha + 2\,\beta & = & 0 & (1) \\ \beta^2 + 2\,\alpha\,\beta & = & -3 & (2) \\ \alpha\,\beta^2 & = & -2 & (3) \end{array}\right.$$

$$(1) \Rightarrow \alpha = -2\,\beta \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} (2) & : & -3\,\beta^2 & = & -3 \\ (3) & : & -2\,\beta^3 & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = 1 \text{ et } \alpha = -2$$

On détermine ensuite les quatre constantes a, b, c et d telles que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 2\,x - 3}{x^3 - 3\,x - 2}$$

$$a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{a\,(x-2)\,(x+1)^2 + b\,(x+1)^2 + c\,(x-2)\,(x+1) + d\,(x-2)}{(x-2)\,(x+1)^2}$$

$$= \frac{a\,(x^3-3\,x-2) + b\,(x^2+2\,x+1) + c\,(x^2-x-2) + d\,(x-2)}{x^3 - 3\,x - 2} = \frac{x^3 + 2\,x - 3}{x^3 - 3\,x - 2}$$

On identifie les numérateurs :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ a\,(x^3-3\,x-2) + b\,(x^2+2\,x+1) + c\,(x^2-x-2) + d\,(x-2) = x^3 + 2\,x - 3$$

$$\iff a\,x^3 + (b+c)\,x^2 + (-3\,a + 2\,b - c + d)\,x + (-2\,a + b - 2\,c - 2\,d) = x^3 + 0\,x^2 + 2\,x - 3$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a & = & 1 & \quad (1) \\ b + c & = & 0 & \quad (2) \\ -3\,a + 2\,b - c + d & = & 2 & \quad (3) \\ -2\,a + b - 2\,c - 2\,d & = & -3 & \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (1) & : & a & = & 1 \\ (2) & : & c & = & -b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} (3) & : & 3\,b + d & = & 5 & (5) \\ (4) & : & 3\,b - 2\,d & = & -1 & (6) \end{array} \right\}$$

$$(5) \quad - \quad (6) \;:\; 3\,d = 6 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} d & = & 2 \\ b & = & 1 \\ c & = & -1 \\ a & = & 1 \end{array} \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \; \boxed{1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 2\,x - 3}{x^3 - 3\,x - 2}}$$

Exercice 12. *Déterminer le (ou les réels) x strictement positif(s) solution(s) de chaque équation :*

a) $\sqrt{x}\ \ln(x) = x\ \ln(\sqrt{x})$	b) $\log_2(x) + \log_x(2) = 5/2$

Réponse :
a)

$$\sqrt{x}\ \ln(x) = x\ \ln(\sqrt{x}) \iff \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x\ln(x) \iff \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right)\ln(x) = 0$$

$$\iff \left\{\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0 \underbrace{\iff}_{\text{car } x\neq 0} 1 = \frac{1}{2}\sqrt{x} \iff x = 4\right\} \text{ ou } \left\{\ln x = 0 \iff x = 1\right\}$$

Les solutions sont $\boxed{x = 1}$ ou $\boxed{x = 4}$.

b)

$$\log_2(x) + \log_x(2) = 5/2 \iff \frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{5}{2}$$

Il faut $\ln(x) \neq 0 \iff x \neq 1$. Posons $X = \ln(x)$:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{5}{2} \iff \frac{X}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{X} = \frac{5}{2}$$

on multiplie chaque terme de l'équation par $X\ \ln(2)$:

$$X^2 - \frac{5}{2}\ \ln(2)\ X + \ln(2)^2 = 0 \qquad \Delta = \left(\frac{5}{2}\ \ln(2)\right)^2 - 4\ \ln(2)^2 = \frac{9}{4}\ \ln(2)^2 = \left(\frac{3}{2}\ \ln(2)\right)^2$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} X_1 = \dfrac{\frac{5}{2}\ \ln(2) - \frac{3}{2}\ \ln(2)}{2} = \dfrac{\ln(2)}{2} = \ln\left(\sqrt{2}\right) & \iff & x_1 = \exp(X_1) = \sqrt{2} \\ X_2 = \dfrac{\frac{5}{2}\ \ln(2) + \frac{3}{2}\ \ln(2)}{2} = 2\ \ln(2) = \ln(4) & \iff & x_2 = \exp(X_2) = 4 \end{array}\right\}$$

Les solutions sont $\boxed{x = \sqrt{2}}$ ou $\boxed{x = 4}$.

Exercice 13. *(suite de l'exercice 6)*
Demontrer les formules de trigonométrie ci-dessous.

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)+\cos(a+b)\Big)$	$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)$

$$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)}$$

$\cos(a)+\cos(b) = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin(a)+\sin(b) = 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

en posant $t=\tan(x/2)$:

$\sin(x) = \dfrac{2\,t}{1+t^2}$	$\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan(x) = \dfrac{2\,t}{1-t^2}$

Réponse :

$$\begin{cases} \cos(a+b) & \overset{(1)}{=} \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) \overset{(1)}{=} \cos(a)\cos(-b)-\sin(a)\sin(-b) & \overset{(5)(6)}{=} \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \end{cases} \tag{16}$$

$$(16.1) \Rightarrow \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)+\cos(a+b)\Big) = \cos(a)\cos(b) \tag{17}$$

$$(16.2) \Rightarrow \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big) = \sin(a)\sin(b) \tag{18}$$

- $\begin{cases} \sin(a+b) & \overset{(2)}{=} \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) \overset{(2)}{=} \sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b) & \overset{(5)(6)}{=} \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big) = \sin(a)\cos(b) \tag{19}$$

(17) $\Rightarrow \cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\,\cos(x)\cos(y)$.
En posant $x=\dfrac{a+b}{2}$ et $y=\dfrac{a-b}{2}$, alors $x+y=a$ et $x-y=b$, et on obtient :

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \tag{20}$$

(19) $\Rightarrow \sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\,\sin(x)\cos(y)$.
En posant $x=\dfrac{a+b}{2}$ et $y=\dfrac{a-b}{2}$, alors $x+y=a$ et $x-y=b$, et on obtient :

$$\sin(a)+\sin(b) = 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &\overset{(10)}{=} 2\,\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\,\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cos^2(x/2) \\ &= 2\,\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cos^2(x/2) \overset{(4)(13)}{=} 2\,t\,\frac{1}{1+t^2} = \frac{2\,t}{1+t^2} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\cos(x) &\overset{(7)}{=} \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} \cos^2(x/2) \\ &= \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} \cos^2(x/2) \overset{(13)}{=} \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} \frac{1}{1+t^2} \\ &= \left(\frac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} - \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right) \frac{1}{1+t^2} = (1-t^2)\frac{1}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\tan(x) \overset{(4)}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \overset{(22)(23)}{=} \frac{\dfrac{2\,t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2\,t}{1-t^2} \tag{24}$$

Exercice 14. *Simplifier les expressions suivantes :*

a)	$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) - \cosh(2\,x)$	b)	$\dfrac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)}$

Réponse :

a) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) - \cosh(2\,x)$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2\,x} + e^{-2\,x}}{2}$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2\,e^x\,e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x)^2 - 2\,e^x\,e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{e^{2\,x} + e^{-2\,x}}{2}$$

$$= \frac{e^{2\,x} + 2 + e^{-2\,x} + e^{2\,x} - 2 + e^{-2\,x}}{4} - \frac{e^{2\,x} + e^{-2\,x}}{2}$$

$$= \frac{e^{2\,x} + 2 + e^{-2\,x} + e^{2\,x} - 2 + e^{-2\,x}}{4} - \frac{e^{2\,x} + e^{-2\,x}}{2}$$

$$= \frac{2\,e^{2\,x} + 2\,e^{-2\,x}}{4} - \frac{e^{2\,x} + e^{-2\,x}}{2} = \frac{e^{2\,x} + e^{-2\,x}}{2} - \frac{e^{2\,x} + e^{-2\,x}}{2} = \boxed{0}$$

b) $\dfrac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)}$

$$= \frac{1 + \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{\dfrac{(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}}}{\dfrac{(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}}}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}} = \frac{2\,e^x}{2\,e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^x\,e^x = \boxed{e^{2\,x}}$$

Exercice 15. *Pour chaque fonction :*

— *dire si elle est paire ou impaire, ou ni l'une, ni l'autre,*

— *déterminer son domaine de définition,*

a)	$\dfrac{2\,x}{x^2-1}$	b)	$\dfrac{1}{x^3-1}$	c)	$\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$
d)	$\dfrac{1}{\sinh(x^3-x)}$	e)	$\dfrac{\sin(x)}{x}$	f)	$\dfrac{x^2}{\sin^2(x)}$

Réponse :

a) $f(x) = \dfrac{2\,x}{x^2-1}$

1. f est impaire car $f(-x) = -f(x)$.
2. $x^2 - 1 = 0 \iff (x = -1 \text{ OU } x = 1)$
   $\Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} =]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]-1\,,\,1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$

1. f n'est ni paire, ni impaire, car $f(-2) = -1/9$, $f(2) = 1/7$, et $f(-2)$ n'est égal ni à $f(2)$, ni à $-f(2)$.
2. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$ car il faut $x^3 - 1 \neq 0 \iff x^3 \neq 1 \iff x \neq 1$
   (car la fonction $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

c) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

1. f n'est ni paire, ni impaire car $f(-1) = 3$, $f(1) = 7/3$, et $f(-1)$ n'est égal ni à $f(1)$, ni à $-f(1)$.
2. $x^2 - 4 = 0 \iff (x = -2 \text{ OU } x = 2)$
   $\Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} =]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]-2\,,\,2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sinh(x^3 - x)}$

1. f est impaire car

$$f(-x) = \frac{1}{\sinh(-x^3 + x)} = \frac{1}{\sinh(-(x^3 - x))} = \frac{1}{-\sinh(x^3 - x)} = -f(x)$$

2. La fonction est définie pour x tel que $\sinh(x^3 - x) \neq 0$:

$$\sinh(x^3 - x) = 0 \iff x^3 - x = 0 \text{ (car sinh est bijective)} \iff x\,(x^2 - 1) = x\,(x-1)\,(x+1) = 0$$

$$x = -1 \ \ \textsf{OU} \ \ x = 0 \ \ \textsf{OU} \ \ x = 1$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \}$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

1. f est paire car $f(-x) = f(x)$
2. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^\star$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin^2(x)}$

1. f est paire car $f(-x) = f(x)$
2. La fonction est définie pour les valeurs x telles que $\sin(x) \neq 0$

$$\sin(x) = 0 \iff x = k\,\pi \ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi \ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 16. *Le but de cet exercice est de déterminer, pour chaque fonction hyperbolique $y = f(x)$, l'expression de sa fonction réciproque $x = f^{-1}(y)$.*
Pour chaque fonction, le but est de déterminer l'expression de x en fonction de y.

a)	*(réciproque de* sinh*)*	$y = \sinh(x)$, *bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$
b)	*(réciproque de* cosh*)*	$y = \cosh(x)$, *bijective de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[\,1\,;+\infty\,[$
c)	*(réciproque de* tanh*)*	$y = \tanh(x)$, *bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1\,;1\,[$

Indication : utiliser $X = \mathrm{e}^x > 0$, ainsi que les ensembles de départ et d'arrivée de chaque fonction bijective.

Réponse : Le principe est de poser $X = \mathrm{e}^x$, et en notant que X est strictement positif.

a) $y = \sinh(x)$

$$y = \frac{\mathrm{e}^x - 1/\mathrm{e}^x}{2} = \frac{X - 1/X}{2} = \frac{X^2-1}{2X}$$
$$\iff 2\,y\,X = X^2 - 1 \iff X^2 - 2\,y\,X - 1 = 0$$

On résout l'équation du second degré en X :

$$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 4y^2 > 0$$

Les deux racines sont

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+1} > |y| \geq y & \Rightarrow \quad y - \sqrt{y^2+1} < 0 \\ \sqrt{y^2+1} > |y| \geq -y & \Rightarrow \quad y + \sqrt{y^2+1} > 0 \end{cases}$$

On a donc $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$ donc seul $X = X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$ convient.
D'où $\boxed{x = \ln(X) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})}$

b) $y = \cosh(x)$

$$y = \frac{\mathrm{e}^x + 1/\mathrm{e}^x}{2} = \frac{X + 1/X}{2} = \frac{X^2+1}{2X}$$
$$\iff 2\,y\,X = X^2 + 1 \iff X^2 - 2\,y\,X + 1 = 0$$

On résout l'équation du second degré en X :

$$\Delta = 4\,y^2 - 4 = 4(y^2-1) \Rightarrow 0 \leq \sqrt{y^2-1} \leq \sqrt{y^2} = y \qquad \text{car } y \geq 1$$

Les deux racines sont

$$X_1 = \frac{2\,y - \sqrt{4\,y^2-4}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{2\,y + \sqrt{4\,y^2-4}}{2} = y + \sqrt{y^2-1} \geq y \geq 1$$

Comme x doit être supérieur à 0, il faut que X soit supérieur à 1.
On a $X_2 \geq 1$ et $X_1\,X_2 = 1 \iff X_1 = 1/X_2 \leq 1$.
Pour $y = 1$, $X_1 = X_2 = 1 = \exp(x) = 1$, donc $x = 0 = \ln(1 + \sqrt{1^2-1})$.
Pour $y > 1$, seul $X = X_2 = y + \sqrt{y^2-1} > y \geq 1$ convient
D'où $\boxed{x = \ln(X) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})}$

c) $y = \tanh(x)$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{X - 1/X}{X + 1/X} = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$$

$$\iff y(X^2 + 1) = X^2 - 1 \iff (1 - y)X^2 = 1 + y \iff X^2 = \frac{1 + y}{1 - y}$$

comme $y \in]-1;1[$, $Y = \dfrac{1 + y}{1 - y}$ est un réel strictement positif et donc

$$X = \sqrt{Y} \Rightarrow x = \ln(X) = \ln(\sqrt{Y}) = \ln(Y^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(Y) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)}$$

Exercice 17. *En utilisant la double inégalité*

$$\forall t \in]\,0\,;\,\pi/2\,[\;\;,\;\; \sin(t) \leq t \leq \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t}$	b) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t/2)}{t/2}$	c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(t/2)}{t/2}$	d) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t}$

Réponse :

a) pour $t \in]\,0\,;\,\pi/2\,[$, on a $0 < t$, $0 < \sin(t)$ et $0 < \cos(t) < 1$, donc :

$$\sin(t) \leq t \leq \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \iff \frac{\sin(t)}{t} \leq 1 \leq \frac{\sin(t)}{t}\frac{1}{\cos(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(t)}{t} \leq 1 \quad \text{et} \quad \cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \cos(t) = 1$, par encadrement (théorème des gendarmes) : $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ étant paire, on a

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

b) Quand t tend vers 0, il en est de même pour $t/2$, donc :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t/2)}{t/2} = \lim_{t/2\to 0} \frac{\sin(t/2)}{t/2} = \lim_{u=t/2\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

c) $\dfrac{\sin^2(t/2)}{t/2} = \sin(t/2)\,\dfrac{\sin(t/2)}{t/2}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(t/2)}{t/2} = \left[\lim_{t\to 0} \sin(t/2)\right] \times \left[\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t/2)}{t/2}\right] = 0 \times 1 = 0$$

d) $\cos(t) = \cos\big(2(t/2)\big) = 1 - 2\,\sin^2(t/2) \Rightarrow \cos(t) - 1 = -2\,\sin^2(t/2)$

$$\Rightarrow \frac{\cos(t)-1}{t} = -\frac{2\,\sin^2(t/2)}{t} = -\frac{\sin(t/2)^2}{t/2} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t/2)^2}{t/2} = 0$$

Exercice 18. *Démontrer que deux fonctions polynomiales p et q de degré n sont égales sur tout intervalle A de $\mathbb{R}$ si et seulement si leurs coefficients de même rang sont égaux :*

$$\left[\forall x \in A,\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \quad = \quad q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k\right] \iff \left[\forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ a_k = b_k\right]$$

La démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Réponse :
A) On commence avec $n = 0$. Deux fonctions polynomiales de degré 0 sont deux fonctions constantes. Posons $p(x) = a_0$ et $q(x) = b_0$ alors :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = q(x) \iff a_0 = b_0$.

B) Supposons que la propriété est vraie pour le degré n. Soient deux fonctions polynomiales de degré $n+1$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k\, x^k$ et $q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k\, x^k$, montrons que :

$$\left[\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = q(x)\right] \iff \left[\forall k \in \{0, 1, \dots, n, n+1\},\ a_k = b_k\right]$$

1. L'implication

$$\left[\forall k \in \{0, 1, \dots, n, n+1\},\ a_k = b_k\right] \Rightarrow \left[\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = q(x)\right]$$

est évidente car alors :

$$p(x) - q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k\, x^k - \sum_{k=0}^{n+1} b_k\, x^k = \sum_{k=0}^{n+1} (a_k - b_k)\, x^k = \sum_{k=0}^{n+1} 0\, x^k = 0 \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Donc pour tout réel x, $p(x) - q(x) = 0 \iff p(x) = q(x)$

2. Montrons l'implication

$$\left[\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = q(x)\right] \Rightarrow \left[\forall k \in \{0, 1, \dots, n+1\},\ a_k = b_k\right]$$

2.1) Si pour tout x réel, on a $p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k\, x^k = q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k\, x^k$, cela est vrai pour $x = 0$:

$$p(0) = a_0 = q(0) = b_0 \iff a_0 = b_0$$

2.2) Ensuite pour tout x réel, $p(x) = q(x)$ est équivalent à $p(x) - a_0 = q(x) - b_0$

$$p(x) - a_0 = \sum_{k=1}^{n+1} a_k\, x^k = x\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}\, x^k\right) \quad \text{et} \quad q(x) - b_0 = \sum_{k=1}^{n+1} b_k\, x^k = x\left(\sum_{k=0}^{n} b_{k+1}\, x^k\right)$$

Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{p(x) - a_0}{x} = \dfrac{q(x) - b_0}{x}$, on a donc deux fonctions polynomiales de degré n :

$$P(x) = \frac{p(x) - a_0}{x} = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}\, x^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \frac{q(x) - b_0}{x} = \sum_{k=0}^{n} b_{k+1}\, x^k$$

égales sur $\mathbb{R}^\star$ donc égales sur l'intervalle $A = \mathbb{R}_+^\star$, donc pour tout entier k entre 0 et n, $a_{k+1} = b_{k+1}$.
Et donc avec 2.1) et 2.2), on a montré que pour tout entier k entre 0 et $n+1$, $a_k = b_k$.