Correction Feuille TD 5

Rappels d'amphi : Considérons le système à m équations et n inconnues $x_1, \dots, x_n$ suivant :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

On peut écrire (S) sous forme matricielle comme :

$$(S) \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice des coeff. du système

Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Théorème 1 Les opérations élémentaires sur les lignes effectuées simultanément sur la matrice A et le vecteur $\vec{b}$ ne changent pas les solutions du système (S).

- Soit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ la matrice augmentée du système

Théorème 2 (Rouché-Fontené ou Rouché-Capelli)

① Le système (S) possède des solutions $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(\tilde{A}) = \text{rang}(A)$

② Si $\text{rang}(\tilde{A}) = \text{rang}(A) = r$ alors :

* si $r = n \Rightarrow (S)$ a une seule solution

* Si $r<n \Rightarrow (S)$ a une infinité de solutions
et l'ensemble des solutions a la forme $\vec{v}+W$ où
 - $\vec{v}$ est un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ solution de (S)
 - W est l'ensemble des solutions du système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
 donc W est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de
 $\dim(W)=n-r$.

Exercice 1. Pour chacune des matrices A suivantes, trouver, à l'aide d'opérations sur les lignes, une matrice inversible Q telle que la matrice QA est échelonnée. En déduire le rang de A.

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution

(1) Pour échelonner A il faut effectuer les opérations lignes :

$L_1 \to L_1 = 1\cdot L_1 + 0\cdot L_2$

$L_2 \to 2L_2 - L_1 = -1\cdot L_1 + 2\cdot L_2$

Celles ci correspondent à multiplier A, à gauche, par la matrice : $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

En effet on a $Q\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 2$

(2) Pour échellonner A on commence par :

$L_1 \to L_1 = 1\cdot L_1 + 0L_2 + 0L_3$

$L_2 \to L_2 - L_1 = -1\cdot L_1 + 1\cdot L_2 + 0\cdot L_3$

$L_3 \to L_3 - L_1 = -1\cdot L_1 + 0\cdot L_2 + 1\cdot L_3$

Celles ci correspondent à multiplier A à gauche par

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient $E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ensuite on effectue les opérations

$$L_1 \to L_1 = 1 \cdot L_1 + 0 \cdot L_2 + 0 L_3$$
$$L_2 \to L_2 = 0 \cdot L_1 + 1 \cdot L_2 + 0 \cdot L_3$$
$$L_3 = L_3 - L_2 = 0 \cdot L_1 - 1 \cdot L_2 + 1 L_3$$

Celles ci correspondent à multiplier $E_1 A$ à gauche par :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et en effet } E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $Q = E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{rang} A = 3$

Rem <u>Il y a-t-il une méthode plus rapide ?</u>

Oui, si on fait comme pour le calcul de l'inverse jusqu'à quand A est échelonnée.

Soit A matrice $n \times m$. Écrivons I_n et A à côté !

Effectuons sur A les opérations pour l'échelonner et les mêmes sur I_n. Quand A sera échelonnée, I_n sera égale à la matrice Q de l'exo !

Ex

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{Q =} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

: Comme A est échelonnée on a Q !

Exercice 2. À l'aide d'opérations sur les lignes, échelonner la matrice suivante et en déduire son rang en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution On va échelonner A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & b \\ 0 & -3 & -2a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & b \\ 0 & 0 & a-3 & 3-3b \end{pmatrix}$$

On a donc que $\operatorname{rang} A = \begin{cases} 2 & \text{si } a=3 \text{ et } b=1 \\ 3 & \text{si } a \neq 3 \text{ ou } b \neq 1 \end{cases}$

Exercice 3. Résoudre, à l'aide d'opérations sur les lignes, les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$$

Solution

(S_1) La forme matricielle du système est

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ la matrice augmentée du système est $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Echelonnons-la pour résoudre le système :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to 3L_2 - L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right) \quad (*)$$

Comme $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = 2$ le système a une unique solution

On peut la trouver en résolvant le système équivalent (*) :
$$\begin{cases} 3x+y=2 \\ 5y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11/15 \\ y=-1/15 \end{cases}$$

(S2) La forme matricielle du système est
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pour résoudre le système on va échelonner sa matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to 2L_2 - 5L_1]{} \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad (*)$$

Comme $\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \text{rang}\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{array}\right) = 2$ le système a une seule
solution, que l'on trouve en résolvant le système équivalent (*) : $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

Exercice 4. Écrire les systèmes d'équations linéaires suivants sous forme matricielle $AX=b$ et déterminer, à l'aide d'opérations sur les lignes, leur rang (c'est-à-dire le rang de la matrice A) et l'ensemble de leurs solutions. Comparer ces ensembles.

$$(S_1) \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} -x+y+z=1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$$

Sol La forme matricielle est $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=b$ où
(S1) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Clairement $\text{rang} A=2$ car les 2 lignes de A ne sont pas multiple l'une de l'autre. Echelonnons la matrice $(A:b)$ pour résoudre (S1) :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_1]{} \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc :

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

l'ensemble des solutions de (S_1) est

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=z, y=0\} = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.

En effet, d'après la théorie, comme

$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A \vdots b) = 2 < 3 = \#$ variables on a que :

* le système possède des solutions
* l'ensemble des solutions a la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + W$ où $W = \mathrm{Vect}((1,0,1))$ et $\dim W = 3-2 = 1$.

(S_2) La forme matricielle est $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b'$ où

$A = \text{comme avant} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $b' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On échelonne $(A \vdots b')$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (*)$$

- $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A | b')$ donc le système a des solutions
- Comme $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|b') = 2$, l'ensemble des solutions a la forme $\vec{v} + W$ où $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ et $\dim W = 3-2 = 1$.

En effet de $(*)$ on a : $\begin{cases} -x+y+z=1 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y=0 \\ z=1+x \end{cases} \Rightarrow$ l'ensemble des sol. de (S_2) est

$$\{(x,0,1+x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \underbrace{(0,0,1)}_{\text{solution particulière de } (S_2)} + \underbrace{\mathrm{Vect}(1,0,1)}_{\text{ensemble des sol. de } (S_1)}$$

2. $(T_1)\begin{cases} x+z=0\\ x+y+2z=0\\ -x+2y+z=0\end{cases}$ $\quad(T_2)\begin{cases} x+z=1\\ x+y+2z=1\\ -x+2y+z=-1\end{cases}$ $\quad(T_3)\begin{cases} x+z=1\\ x+y+2z=-1\\ -x+2y+z=0\end{cases}$

Solution Soient $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $b_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $b_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Alors les formes matricielles des systèmes sont :

(T_1) $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=b_1$, (T_2) $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=b_2$, (T_3) $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=b_3$.

Echelonnons les matrices augmentées :

$$(T_1)\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&1&2&0\\-1&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_2\to L_2-L_1\\ L_3\to L_3+L_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\to L_3-2L_2]{}\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)}_{(*)}\Rightarrow$$

comme $\text{rang}(A)=\text{rang}(A|b_1)=2$ et (T_1) est un système homogène $\Rightarrow$ l'ensemble des solutions S_{T_1} du système (T_1) est un espace vectoriel de $\dim(S_{T_1})=3-2=1$. En effet en résolvant $(*)$ on a :

$S_{T_1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-z,\ y=-z\}=\text{Vect}(1,1,-1)$

$$(T_2)\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\1&1&2&1\\-1&2&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_2\to L_2-L_1\\ L_3\to L_3+L_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\to L_3-2L_2]{}\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)}_{(*)}\Rightarrow$$

comme $\text{rang}(A)=\text{rang}(A|b_2)=2\Rightarrow(T_2)$ a des solutions et l'ensemble des solutions S_{T_2} de (T_2) a la forme :

$S_{T_2}=\vec{v}_2+S_{T_1}$ où $\vec{v}_2$ solution particulière de (T_2).

En effet, en résolvant de $(*)$ on a que :

$S_{T_2}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1-z,\ y=-z\}=$

$\overset{!}{=}\{(1-z,-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\{(1,0,0)+z(-1,-1,1)\mid z\in\mathbb{R}\}=$

$\overset{!}{=}(1,0,0)+\text{Vect}(-1,-1,1)=(1,0,0)+S_{T_1}$

(T_3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$

comme $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|b_3) = 3$, le système (T_3) n'a pas des solutions.

Exercice 5. Déterminer, en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - ay = a \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x + y = 3 \\ ax + y = a. \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + ay = 2 \\ ax + y = 2 \\ ax + (1-a)y = 1 \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} ax - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

Solution

(S_1) La forme matricielle est $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

Echelonnons la matrice augmentée :

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -a & a \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2-a & a-2 \end{array}\right)$ $(*)$

- Si $a \neq 2$: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 2 \Rightarrow$ le système a une seule solution donnée, en résolvant $(*)$, par : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$
  $\Rightarrow$ l'ensemble des solutions de (S_1) est $S_{S_1} = \{(0,-1)\}$
- Si $a = 2$: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 1 \Rightarrow$ le système a une infinité de solutions donnée en résolvant $(*)$ par :
  $S_{S_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y + 2\} = \{(2y+2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \overset{!}{=} (2,0) + \text{Vect}(2,1)$

(S_2) La forme matricielle est $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

On échelonne la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ a & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - aL_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-a & -2a \end{array}\right) \quad (*)$$

- Si $a \neq 1$: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 2 \Rightarrow (S_2)$ a une seule solution donnée en résolvant $(*)$ par : $\begin{cases} x = (a-3)/(a-1) \\ y = 2a/(a-1) \end{cases}$
- Si $a = 1$: $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b) \Rightarrow (S_2)$ n'a pas de solutions.

(S_3) La forme matricielle est $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$

On échelonne la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ a & 1 & 2 \\ a & 1-a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - aL_1 \\ L_3 \to L_3 - aL_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a^2 & 2(1-a) \\ 0 & 1-a-a^2 & 1-2a \end{array}\right) \quad (*)$$

- Si $1-a^2 \neq 0$ on peut effectuer l'opération $L_3 \to (1-a^2)L_3 - (1-a-a^2)L_2$

On obtient

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a^2 & 2(1-a) \\ 0 & 0 & -(a-1)^2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Comme $a \neq \pm 1$ on a que $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|b) = 3$
Le système n'a pas de sol.

- Si $1-a^2 = 0$ alors, en reprenant $(*)$ on a que :
  * Si $a = -1$ alors on a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|b) = 3$
    $\Rightarrow$ le système n'a pas de solutions
  * Si $a = 1$ alors on a : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 2$
    le système a une solution donnée par $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

(S_4) La forme matricielle est $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Remarquons que, comme (Su) est un système homogène
* le système a toujours au moins une solution
* l'ensemble des solutions du système est égale à $\ker A$

On échelonne la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - aL_1}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1+a & 0 \\ 0 & -1-a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to 2L_3 + (a+1)L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & (a+1)(3-a) & 0 \end{array}\right)$$

* Si $a \neq -1$ et $a \neq 3$: le système a seulement la solution triviale $x = y = z = 0$.
* Si $a = -1$, le système devient $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$
l'ensemble des solutions est l'espace $\mathrm{Vect}((1,0,1))$.
* Si $a = 3$ le système devient $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$
l'ensemble des solutions est l'espace $\mathrm{Vect}((-1,-2,1))$.

Rem Dans tous les cas la matrice A a rang ≥ 2, donc $\dim \ker A \leq 1$ (d'après le thm. du rang).

Exercice 6. Résoudre les questions suivantes en se ramenant à la résolution d'un système linéaire.

1. Montrer que $(3,1,-1) \in \mathrm{Vect}\big((5,7,1),(3,5,1)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'intersection $\mathrm{Vect}((3,4,2),(0,1,-1)) \cap \mathrm{Vect}((-1,2,1),(-4,2,0))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que les deux plans affines de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y - z = 1$ et $2x - y + z = -1$ s'intersectent en une droite affine dont on déterminera un point et un vecteur directeur.

Solution

(1) $(3,1,-1) \in \mathrm{Vect}((5,7,1),(3,5,1)) \iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$ le système $\begin{cases} 5x+3y=3 \\ 7x+5y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$ a au moins une solution.

On échelonne la matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to 5L_3 - L_1]{L_2 \to 5L_2 - 7L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -16 \\ 0 & 2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to 2L_3 - L_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, comme le rang de la matrice des coeff. est égale au rang de la matrice augmentée du système, le système a au moins une solution et $(3,1,-1) \in \mathrm{Vect}((5,7,1),(3,5,1))$

Rem si on résoud le système on trouve $x=3$ et $y=-4$.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \iff$

$\exists x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tels que

(**) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

x, y, z, w sont solutions du système homogène :

$\begin{cases} 3x = -z - 4w \\ 4x + y = 2z + 2w \\ 2x - y = z \end{cases}$ c.à.d. (S) $\begin{cases} 3x + z + 4w = 0 \\ 4x + y - 2z - 2w = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

On échelonne la matrice augmentée pour résoudre (S) et on a :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to 3L_3 - 2L_1]{L_2 \to 3L_2 - 4L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -22 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -30 & 0 \end{array}\right)$$

Donc on a :

$$\begin{cases} 3x + z = -4w \\ 3y - 10z = 22w \\ z = -2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/3 \cdot w \\ y = 2/3\, w \\ z = -2w \end{cases}$$

Enfin $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cap \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -2w \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2w \\ -2w \\ -2w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cap \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Rem On obtient le même résultat si dans $(**)$ on remplace $x = -2/3\,w$ et $y = 2/3\,w$. En effet on a :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -2/3\,w \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2/3\,w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2w \\ -2w \\ -2w \end{pmatrix}$$

(3) La question revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

On échelonne la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Le système devient

$$\begin{cases} x = 1 + z - y \\ -3y = -3 - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\{(x,y,z) \mid x = 0,\ y = 1 + z,\ z \in \mathbb{R}\} = \{(0, 1+z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{point de la} \\ \text{droite affine}}}{(0,1,0)} + \operatorname{Vect}\Big(\underbrace{(0,1,1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{vecteur} \\ \text{directeur}}}\Big)$$

Exercice 7. Soient $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère le système linéaire $(S)\ :\ AX = b$ et son système homogène associé $(S_h)\ :\ AX = 0$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est une solution de (S) et $X \in \mathbb{R}^n$ est une solution de (S_h), alors $X_0 + X$ est une solution de (S).
2. Si $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ sont des solutions de (S), alors $X_1 - X_0$ est une solution de (S_h).
3. Si $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est une solution de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est formé des éléments de $\mathbb{R}^n$ de la forme $X_0 + X$, où X est une solution (quelconque) de (S).

Solution

(1) Si $X_0 \in \mathbb{R}^n$ solution de $(S) \Rightarrow AX_0 = b$

Si $X \in \mathbb{R}^n$ solution de $(S_h) \Rightarrow AX = 0$

Donc $A(X_0+X) = AX_0 + A\cdot X = b + 0 = b \Rightarrow X_0 + X$ sol. de (S)

(2) Si $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ sol. de $(S) \Rightarrow AX_0 = b = A\cdot X_1 \Rightarrow$

$A(X_0 - X_1) = A\cdot X_0 - A\cdot X_1 = b - b = 0 \Rightarrow X_0 - X_1$ sol. de (S_h)

(3) Montrons qu'on a l'égalité des ensembles :

$\{\text{solutions de } S\} = \{X_0 + X \mid X \text{ sol. de } (S_h)\}$

On procède par double inclusion :

$(\subseteq)$ Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ une sol. de $(S) \Rightarrow$ d'après (2) $Y - X_0$ sol. de $(S_h) \Rightarrow Y = X_0 + X$ où $X = Y - X_0$ sol de (S_h)

$(\supseteq)$ Soit $X_0 + X \in \mathbb{R}^n$ où X sol de $(S_h) \Rightarrow$ d'après (1), on a que $X_0 + X$ est une solution de (S). $\square$

Exercice 8. Méthode du pivot de Gauss et erreurs informatiques

Dans un ordinateur, la norme IEEE 754 simple précision (32 bits) permet de coder des nombres entre environ 10^{-45} et 10^{38} avec une précision de 8 à 9 chiffres significatifs en base 10. Cela veut dire que si on considère le nombre $\varepsilon = 10^{-10}$, alors $1+\varepsilon$ sera tronqué à 1 par l'ordinateur. De même, le calcul $1 + 1/\varepsilon$ donnera $1/\varepsilon = 10^{10}$ comme résultat.

On considère le système linéaire

(S) $$\begin{cases} \varepsilon x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

On va regarder sur cet exemple comment le choix du pivot peut radicalement changer la pertinence d'un calcul fait par un ordinateur.

1. Résoudre (S) à la main de façon exacte.
2. On considère maintenant que le calcul est fait par un ordinateur avec les erreurs de troncature du type « $1+\varepsilon = 1$ ». Éliminer x dans la deuxième ligne en utilisant la première ligne. Finir la résolution et comparer le résultat avec la solution exacte.
3. Même question si on utilise maintenant le terme x de la deuxième ligne pour éliminer la variable x dans la première ligne.

Solution: Rappelons que $1+\varepsilon=1$ et $1+1/\varepsilon=1/\varepsilon=10^{10}$.

(1) On résoud (S) de façon exacte :

$$\begin{cases}\varepsilon x+y=1\\ x+2y=3\end{cases} \xrightarrow[L_2\to\varepsilon L_2-L_1]{} \begin{cases}\varepsilon x+y=1\\ (2\varepsilon-1)\,y=(3\varepsilon-1)\end{cases} \quad (\star)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=1/(1-2\varepsilon)\\ y=\dfrac{1-3\varepsilon}{1-2\varepsilon}\end{cases}$$: une seule solution exacte $\boxed{\star}$

(2) Utilisons maintenant "$1+\varepsilon=1$" ou "$\varepsilon=0$"

Dans ce cas $(\star)$ devient : $\begin{cases}\varepsilon x=0\\ -y=-1\end{cases} \Rightarrow$ une infinité de solutions car $\varepsilon x=0$, $\forall x$.

(3) Utilisons "$1+\varepsilon=1$" ou "$\varepsilon=0$"

mais avec 1 comme pivot :

$$\begin{cases}x+2y=3\\ \varepsilon x+y=1\end{cases} \xrightarrow[L_2\to L_2-\varepsilon L_1]{} \begin{cases}x+2y=3\\ y(1-2\varepsilon)=1-3\varepsilon\end{cases} \quad (\star\star)$$

Comme "$1+\varepsilon=1$", $(\star\star)$ donne $\begin{cases}x=3-2=1\\ y=1\end{cases}$

$\Rightarrow$ une seule solution

(qui est bien l'approximation de la solution exacte $\boxed{\star}$)