Chapitre V : Matrices et systèmes linéaires

On présente dans ce chapitre une méthode effective, aisément programmable, qui permet de calculer le rang d'une matrice et de résoudre des systèmes linéaires de grande dimension.

1) Opérations élémentaires sur les matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice à m lignes et n colonnes. On note

- $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ les lignes de A
- $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ les colonnes de A

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_m \end{pmatrix}, \quad A = \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \cdots \middle| C_n \right).$$

Les opérations élémentaires suivantes transforment A en une matrice équivalente :

Opérations sur les lignes :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$: multiplication de la ligne L_i par $\lambda \neq 0$
- $L_i \longleftrightarrow L_j$: échange des lignes i et j $(i \neq j)$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{R}$: ajout de λL_j à la ligne L_i $(i \neq j)$

Opérations sur les colonnes : (idem)

- $C_i \leftarrow \lambda C_i$, $\lambda \neq 0$
- $C_i \longleftrightarrow C_j$, $i \neq j$
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $j \neq i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemme : Les opérations sur les lignes et les colonnes transforment $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ en une matrice équivalente.

Dém : Vérifions-le pour les opérations sur les colonnes ; la preuve est similaire pour les lignes. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$A = \left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, C_n \right) \qquad E_{i,j} = \left(0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \underset{\uparrow\ \text{jème colonne}}{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \right) \leftarrow \text{ième ligne}$$

$$\Rightarrow A E_{i,j} = \left(0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \underset{\uparrow\ \text{jème colonne}}{C_i} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \right).$$

Ainsi chaque opération élémentaire sur les colonnes revient à transformer A en $Q^{-1} A P$ avec $Q = I_m$ et :

- $C_1 \longleftarrow \lambda C_1 \ (\lambda \neq 0)$: $P = \lambda E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}$.
- $C_1 \longleftrightarrow C_2$: $P = E_{1,2} + E_{2,1} + E_{3,3} + \cdots + E_{n,n}$.
- $C_1 \longleftarrow C_1 + \lambda C_2$: $P = E_{1,1} + \lambda E_{2,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}$.

On vérifie que toutes les matrices P ci-dessus sont bien inversibles. $\square$

Rem : On peut aussi vérifier directement que chaque opération élémentaire sur les colonnes laisse inchangé le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) \subset \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

dont la dimension est précisément le rang de A. Les opérations élémentaires sur les colonnes transforment donc A en une matrice de même rang, i.e. équivalente.

Montrons à présent, sur des exemples, comment transformer, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ en une matrice plus simple, dite <u>échelonnée</u>, pour laquelle le rang est facile à calculer.

<u>Ex 1 :</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

- $a_{1,1} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ on peut éliminer $a_{i,1}$ $(2 \leq i \leq 4)$ en ajoutant à L_i un multiple approprié de L_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

- pour la nouvelle matrice, on a $a_{2,2} = (-1) \neq 0$; donc on peut éliminer $a_{i,2}$ $(3 \leq i \leq 4)$ en ajoutant à L_i un multiple de L_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

- pour la nouvelle matrice on a $a_{3,3} = 0$, et aussi $a_{4,3} = 0$
$\Rightarrow$ on ne peut pas se ramener à $a_{3,3} \neq 0$ en permutant deux lignes.
On laisse donc intacte la colonne 3 et on utilise le fait que $a_{3,4} = -2 \neq 0$ pour simplifier la dernière ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix}$$

: matrice de <u>rang 3</u>.

Ex 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

- $a_{1,1} \neq 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$

- $a_{2,2} = 0 \Longrightarrow$ on permute les deux dernières lignes :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: matrice de rang 3.

Déf : On dit qu'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est échelonnée s'il existe des entiers $r \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$ et $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$ t.q.

- si $i \in \{1, \dots, r\}$: $a_{i,j} = 0$ si $j < j_i$; $a_{i,j_i} \neq 0$
- si $i \in \{r+1, \dots, m\}$: $a_{i,j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Matrice échelonnée : (dessin pour $j_1 = 1$!)

$$\begin{pmatrix} a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1,j_3} & \cdots & a_{1,j_r} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & a_{2,j_2} & \cdots & a_{2,j_3} & \cdots & a_{2,j_r} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{3,j_3} & \cdots & a_{3,j_r} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{r,j_r} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition : Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est échelonnée au sens de la définition ci-dessus, alors

$$\text{rang}(A) = r.$$

<u>Dém</u> : Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. On voit que :

- les colonnes $C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_r}$ sont <u>linéairement indépendantes</u> (grâce à la propriété d'échelonnage) ; expliquer !
- Au contraire, si $j_k < j < j_{k+1}$ pour un $k \in \{1, \dots, r-1\}$, ou $j_r < j \leq n$ si $k = r$, alors
$$C_j \in \mathrm{Vect}(C_{j_1}, \dots, C_{j_k}).$$

On en déduit que
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_{j_1}, \dots, C_{j_r}) \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = r. \ \square$$

<u>Proposition</u> : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ peut être mise sous forme échelonnée par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

<u>Dém</u> : Si $A = 0$, A est déjà échelonnée (avec $r = 0$).

- Sinon on pose $j_1 = \min\{j \in \{1, \dots, n\} ; C_j \neq 0\}$.

  $\Rightarrow C_{j_1}$ est la première colonne de A non identiquement nulle.

  Quitte à permuter deux lignes, on peut supposer que $a_{1,j_1} \neq 0$.
- En faisant $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{a_{i,j_1}}{a_{1,j_1}} L_1$ pour $i = 2, \dots, m$,

  on se ramène au cas où $a_{i,j_1} = 0$ pour $i = 2, \dots, m$.
- On itère le procédé ci-dessus en considérant la sous-matrice

  $A' = (a_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq m \\ j_1+1 \leq j \leq n}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & & \\ & & & \vdots & A' & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

- En un nombre fini d'étapes, on obtient ainsi une matrice échelonnée. $\square$

2) Généralités sur les systèmes linéaires

Déf : Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle <u>système linéaire à m équations et n inconnues</u> une équation de la forme

$$AX = b \qquad (*)$$

où la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ sont donnés. L'inconnue est le vecteur $X \in \mathbb{R}^n$.

Rem : En notant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

le système $(*)$ s'écrit de façon équivalente :

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b \qquad (**)$$

où $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^m$ sont les <u>colonnes</u> de A. Les m lignes de $(**)$ sont les m équations du système.

Rem : On dit parfois que le système $(*)$ est

- <u>Sous-déterminé</u> si $m < n$ (plus d'inconnues que d'équations)
- <u>Sur-déterminé</u> si $m > n$ (plus d'équations que d'inconnues)

Exemple : On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \iff AX = b$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Proposition :

a) Le système (*) possède une solution ssi $b \in \mathrm{Im}(\varphi_A)$. $= \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_m)$

En particulier, (*) possède une solution quel que soit $b \in \mathbb{R}^m$ ssi $\mathrm{rang}(A) = m$ [ce qui n'est possible que si $n \geq m$].

b) Si elle existe, la solution de (*) est unique ssi $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{0\}$. $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$.

[ce qui n'est possible que si $n \leq m$].

Rem : Ici et dans la suite, on identifie A à l'application linéaire

$$\varphi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$X \longmapsto AX.$$

Dém : a) (**) signifie que b est une combinaison linéaire des colonnes de A, ce qui veut dire que $b \in \mathrm{Im}(\varphi_A)$. La conclusion s'ensuit immédiatement.

b) Si X, X' sont deux solutions, alors $A(X-X') = b-b = 0 \Rightarrow X - X' \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

La conclusion s'ensuit. $\square$

Proposition : (système équilibré, $n = m$).

Si $n = m$, le système (*) possède une solution unique quel que soit $b \in \mathbb{R}^n$ ssi $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible.

Dém :

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors $\forall b \in \mathbb{R}^n$ l'unique solution de (*) est $X = A^{-1}b$.
- Si A n'est pas inversible, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_A) \neq \{0\}$, $\mathrm{rang}(A) < n$ donc :

  i) le système (*) n'admet aucune solution si $b \notin \mathrm{Im}(\varphi_A)$;

  ii) Si $b \in \mathrm{Im}(\varphi_A)$, le système (*) admet une infinité de solutions. $\square$

3) Résolution effective des systèmes linéaires

La méthode générale pour résoudre le système (*) repose sur le principe suivant :

Proposition : Les opérations élémentaires sur les lignes, effectuées simultanément sur la matrice A et le second membre b, ne changent pas les solutions de (*).

Dém : Toute opération élémentaire sur les lignes correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible $Q \in M_m(\mathbb{R})$, cf §1 de ce chapitre.
Si $A' = QA$ et $b' = Qb$, on a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$AX = b \iff A'X = b'$$

donc les solutions de (*) sont les mêmes que celles du système $A'X = b'$. $\square$

L'idée est à présent de mettre la matrice A sous forme échelonnée par une suites d'opérations élémentaires sur les lignes.

Exemple 1 : On souhaite résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

On trouve successivement :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & \\ \quad -6y - 2z = -18 & L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ \quad -2y = -4 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \qquad L_2 \longleftarrow \left(-\frac{1}{2}\right) L_2 \\ y = 2 \qquad L_3 \longleftarrow \left(-\frac{1}{2}\right) L_3 \end{cases}$$ (étape facultative)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \\ -\frac{z}{3} = -1 \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \\ z = 3 \qquad L_3 \longleftarrow -3 L_3 \end{cases}$$ (étape facultative)

La matrice étant échelonnée, on obtient facilement la solution en partant de la fin : $z = 3$, puis $y = 2$, puis $x = 1$. L'unique solution est donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Rem : La dernière étape peut aussi se faire, si on veut, à l'aide d'opérations sur les lignes.

Exemple 2 : On souhaite résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + 7z = 1 \\ x - 9y + 11z = -7. \end{cases}$$ On trouve successivement :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -5y + 5z = -5 \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ -10y + 10z = -10 \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad\ \ y-z=1 \quad L_2 \longleftarrow -L_2/5 \\ \quad\ \ y-z=1 \quad L_3 \longleftarrow -L_3/10 \end{cases}$$

(étape facultative)

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad\ \ y-z=1 \\ \quad\quad\ \ 0=0 \quad L_3 \longleftarrow L_3-L_2. \end{cases}$$

La matrice est à présent échelonnée, et son rang est 2. La dernière équation peut évidemment être omise, et en passant z au membre de droite on trouve le système 2×2:

$$\begin{cases} x+y=3-z \\ \quad\ y=1+z \end{cases} \quad \text{qui se résout en} \quad \begin{cases} x=2-2z \\ y=1+z, \end{cases}$$

<u>Conclusion:</u> L'ensemble des solutions du système est la "droite affine"

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3;\ x=2-2z,\ y=1+z\right\}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\underbrace{\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\ker(\varphi_A)}.$$

Noter que $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\in\ker(\varphi_A)$.

<u>Remarque:</u> Pour le même système avec un second membre différent:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-3y+7z=1 \\ x-9y+11z=13 \end{cases}$$

On tombe après les mêmes étapes sur le système

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad\ \ y-z=1 \\ \quad\ \ y-z=-1 \end{cases}$$

qui n'a évidemment <u>aucune solution</u>!

En effet, $\begin{pmatrix}3\\1\\13\end{pmatrix}\notin \mathrm{Im}(\varphi_A)$.

Cas général où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est de rang r.

On effectue une suite d'opérations élémentaires sur les lignes du système afin de mettre la matrice A sous forme échelonnée. Le système devient alors :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1,j_2}x_{j_2} + \cdots + a_{1,j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots + a_{2,j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{r,j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{r,n}x_n = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

Cas 1 : Si $r < m$, alors :

- le système $(*)$ n'a aucune solution si $(b_{r+1}, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$.
- si $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$, les $m-r$ dernières lignes sont tautologiques, et peuvent être omises.

$\Longrightarrow$ dans la discussion ci-dessous on peut supposer que $r = m$ (i.e. la matrice A est surjective).

Cas 2 : $n = m \ (= r)$; (matrice carrée inversible).

Dans ce cas on a $(j_1, \ldots, j_r) = (1, \ldots, n)$ et le système $(*)$ devient

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{3,3}x_3 + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right.$$

avec $a_{i,i} \neq 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Ce système possède une solution unique, que l'on calcule aisément en déterminant d'abord x_n (dernière équation), puis x_{n-1}, ---, et enfin x_1.

Cas 3 $\quad n > m \; (= r) \quad$ (système sous-déterminé)

Dans ce cas on distingue :

- les inconnues principales $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$
- les inconnues libres $x_{k_1}, \dots x_{k_{n-r}}$ où

$$(k_1, \dots, k_{n-r}) = (1, \dots, n) \setminus (j_1, \dots, j_r)$$

Les inconnues libres peuvent prendre des valeurs quelconques, et une fois ces valeurs fixées les inconnues principales sont déterminées par le système. En passant au membre de droite les inconnues libres, on met $(*)$ sous la forme : (on rappelle que $r = m$)

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,j_1} x_{j_1} + a_{1,j_2} x_{j_2} + a_{1,j_3} x_{j_3} + \dots + a_{1,j_r} x_{j_r} & = & b_1 - \sum_{i=1}^{n-r} a_{1,k_i} x_{k_i} \\ a_{2,j_2} x_{j_2} + a_{2,j_3} x_{j_3} + \dots + a_{2,j_r} x_{j_r} & = & b_2 - \sum_{i=1}^{n-r} a_{2,k_i} x_{k_i} \\ a_{3,j_3} x_{j_3} + \dots + a_{3,j_r} x_{j_r} & = & b_3 - \sum_{i=1}^{n-r} a_{3,k_i} x_{k_i} \\ & \vdots & \\ a_{r,j_r} x_{j_r} & = & b_r - \sum_{i=1}^{n-r} a_{r,k_i} x_{k_i} \end{array}\right. \qquad (**)$$

Ce système permet de déterminer $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ en fonction des inconnues libres $x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-r}}$. On obtient ainsi toutes les solutions de $(*)$, qui forment un "sous-espace affine" de dimension $n-r$ donné par :

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \; x - c \in \operatorname{Ker}(\varphi_A) \right\} \text{ où } c \text{ est la solution de } (**)$$

avec $x_{k_1} = \dots = x_{k_{n-r}} = 0$.

4) Instabilités numériques, pivot de Gauss

La première étape dans la mise sous forme échelonnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est une suite d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,j_1}}{a_{1,j_1}} L_1 \quad \text{pour } i = 2, \dots, m.$$

Cette étape est possible si (et seulement si) le coefficient a_{1,j_1}, appelé pivot, est non nul. Cette hypothèse n'est pas complètement satisfaisante en pratique, où on fait des calculs numériques avec une précision finie. On conçoit que si $a_{1,j_1} = 10^{-6}$ l'opération ci-dessus puisse amplifier des erreurs d'arrondi, et in fine mettre en danger la précision du résultat.

Pour minimiser ce risque, on a intérêt à ce que le pivot soit de module aussi grand que possible. Quitte à permuter les lignes, on peut demander que

$$|a_{1,j_1}| \geqslant \max(|a_{2,j_1}|, \dots, |a_{m,j_1}|) > 0 \quad \text{(par choix de } j_1\text{)}$$

On appelle pivot de Gauss un pivot possédant cette propriété.

La méthode du pivot de Gauss† consiste à résoudre des systèmes linéaires par la méthode décrite au § 3), en choisissant à chaque étape le pivot de Gauss pour minimiser l'amplification des erreurs d'arrondi commises lors des différentes opérations élémentaires. Cette méthode est largement utilisée en analyse numérique matricielle.

† (Elimination de Gauss-Jordan)

5) Calcul de l'inverse d'une matrice

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de rang n, alors A est inversible et se pose alors le problème de calculer la matrice inverse $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$. Ce calcul est coûteux si n est grand, et on l'évite autant que possible.

On remarque que, si

$$A^{-1} = \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \cdots \middle| C_n \right)$$

alors pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ la colonne C_i est solution du système linéaire

$$AC_i = e_i, \qquad \text{où } (e_1, \dots, e_n) = \text{base canonique de } \mathbb{R}^n.$$

Le calcul de A^{-1} se ramène donc à la résolution de <u>n systèmes linéaires</u>, qui peut toutefois se faire simultanément en échelonnant une seule fois la matrice.

<u>Exemple :</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On considère la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

les trois dernières colonnes sont les trois seconds membres à traiter.

On commence par échelonner cette matrice par des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \longleftarrow 3L_2 + 2L_3$$

On continue à présent à éliminer les coefficients non diagonaux de la matrice de gauche par des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 17 & -9 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 9 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

Ainsi, en divisant tout par 2 : $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Autre méthode :</u> On résout le système linéaire symbolique :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + 4y + 5z = b \\ x - y + z = c \end{cases}$$

Par des opérations élémentaires sur les lignes, on trouve :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2y + 2z = b - a \\ -3y - 2z = c - a \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2y + 2z = b - a \\ 2z = -5a + 3b + 2c \end{cases}$$

On en déduit successivement :

$$z = \frac{1}{2}(-5a + 3b + 2c)$$

$$y = \frac{b-a}{2} - z = \frac{1}{2}(4a - 2b - 2c)$$

$$x = a - 2y - 3z = \frac{1}{2}(9a - 5b - 2c)$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

FIN