
TD5 : Tests paramétriques dans le modèle gaussien

Objectifs : Savoir faire des tests sur les paramètres moyenne et variance d'un modèle normal.

Exercice 5.1 :

Dans le cadre du réchauffement climatique, les écologistes veulent absolument minimiser le risque que des mesures ne soient pas prises s'il y a vraiment réchauffement de la planète. En revanche, les politiques veulent éviter de prendre des mesures si le réchauffement n'est pas avéré.

Partie A

1. Donner la définition du risque de première espèce.
2. A partir de ce risque, déterminer les hypothèses du test que devront faire les politiques, puis le test fait par les écologistes.

Partie B Des scientifiques ont construit un indice X mesurant le réchauffement. On admet que X est modélisé par une loi normale de moyenne μ et de variance 1. Si $\mu = 0$ les scientifiques considèrent qu'il n'y a pas de réchauffement avéré ; si $\mu = 5$, il y a un réchauffement climatique. On décide de fixer le niveau du test à $\alpha = 1\%$.

1. — Expliciter les hypothèses du test des politiques en fonction de μ .
— Donner l'estimateur de μ la statistique de ce test, et la règle de décision.
— On mesure l'indice X un certain jour et on trouve $x = 2,165$. Que vont décider les politiques ?
2. Refaire toute la question précédente mais sur le test des écologistes. Que décideront-ils ?

Exercice 5.2 :

Dans une population donnée, le poids des nouveaux-nés est modélisé par une loi Gaussienne. Dans l'ensemble de la population, l'écart-type des poids à la naissance est de 380 g. Le poids moyen d'un nouveau-né dont la mère ne fume pas est de 3400 g. Afin d'étudier l'effet du tabac sur le poids d'un nouveau-né, on relève le poids de 30 nouveau-nés dont les mères fument et on obtient une moyenne empirique de 3240 g, avec un écart-type de 426 g.

1. On suppose que l'écart-type de l'échantillon est connu et égal à 380 g. Donner les hypothèses du test permettant de décider si les nouveaux-nés de l'échantillon sont significativement plus légers en moyenne. Donner la statistique du test. Calculer la p valeur du test. Quelle est votre conclusion ?
2. On suppose l'écart-type inconnu. Refaire le même test qu'à la question précédente. Quelle est votre conclusion ?
3. On désire maintenant savoir si l'écart-type observé est significativement supérieur à celui de l'ensemble de la population. Faire le test adéquat qui répond à ce problème. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 5.3 :

Des études ont montré que la concentration en chlorophylle est une variable aléatoire X de loi normale, de moyenne μ et de variance σ^2 . On mesure cette concentration (en ml/l) dans les eaux de 11 ruisseaux différents. On obtient la série d'observations :

3.28, 2.94, 3.5, 3.07, 3.04, 3.12, 2.85, 3.05, 3.32, 2.89, 3.11

1. Calculer la moyenne et la variance empirique de l'échantillon.
2. Tester au seuil de 1% l'hypothèse " $\mu = 3$ " contre l'hypothèse " $\mu > 3$ ". Donnez l'expression littérale de votre conclusion.
3. Que pouvez-vous conclure pour un seuil de 5% ? Qu'en déduire sur la p valeur . Conclure.

Exercice 5.4 :

On étudie la longueur d'un oeuf de coucou qui est une variable aléatoire notée X . On modélise X par une loi normale. Le but est de déterminer les deux paramètres de cette loi. On dispose de l'échantillon de taille $n = 15$ suivant (en millimètres) pour lequel on a obtenu : $\sum x_i = 318.8$ et $\sum x_i^2 = 6782,78$.

1. Calculer la moyenne empirique et la variance empirique de cet échantillon.
2. Faire le test de la variance suivant : $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 0.5$ contre $\mathcal{H}_1 : \sigma^2 \neq 0.5$ au niveau de 5
3. Donner un encadrement de la p valeur pour le test précédent. Conclure quant à la valeur de σ^2 .
4. Faire le test de la moyenne suivant : $\mathcal{H}_0 : \mu = 21$ contre $\mathcal{H}_1 : \mu > 21$ au seuil de 5%.
5. Donner un encadrement de la p valeur pour le test précédent.
6. Donner une conclusion à toute cette étude.

Exercice 5.5 :

La variance des poids des pommes d'une certaine espèce A est connue et elle vaut 16. On désire comparer la variance des poids des pommes d'une nouvelle espèce B. On suppose que le poids des pommes est modélisé par une variable qui suit une loi normale.

1. On prélève parmi les pommes B un échantillon de taille 10 sur lequel on obtient un écart-type estimé de 4,84 g. Peut-on considérer que ce résultat sur l'espèce B est identique à celui des pommes de l'espèce A au seuil de 5
2. On prélève maintenant parmi les pommes B un échantillon de taille 50 sur lequel on obtient un écart-type estimé de 4,84 g. Refaire le test de la question 1. La conclusion change-t-elle ?