Dérivées

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer la fonction τ_a, taux d'accroissement de f en un point a du domaine de définition,*
puis calculer $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x)$, et (re)trouver l'expression de la dérivée de f en a.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\Big($ *indication : distinguer le cas $a = 0$ et $a > 0$* $\Big)$

d) $f(x) = \mathrm{e}^x$ $\Big($ *indication : utiliser* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1$ $\Big)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 7

Réponse :
a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $a \in \mathbb{R}$.

$$\tau_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$
$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = a + a = 2\,a$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = 2\,a}$$

b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$ donc $a \neq 0$.

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a}{a\,x} - \frac{x}{a\,x}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{a\,x}}{x - a} = \frac{-(x - a)}{a\,x\,(x - a)} = \frac{-1}{a\,x}$$

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = \frac{-1}{a \times a} = -\frac{1}{a^2}$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = -\frac{1}{a^2}}$$

c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = [\,0\,;+\infty\,[$ donc $a \geq 0$.

$$\tau_a(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}^2-\sqrt{a}^2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

1. cas $a = 0$: $\tau_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \tau_0(x) = \frac{1}{\sqrt{0+}} = \frac{1}{0+} = +\infty$$

donc la dérivée de f n'est pas définie en 0 (f non dérivable en 0)

2. cas $a = 0$: $\tau_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\,a^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}$$

La fonction racine carrée est un exemple de fonction qui n'est pas dérivable en certain(s) point(s) de son domaine de définition.

d) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $a \in \mathbb{R}$.
Pour cette fonction, il est préférable d'écrire le taux d'accroissement avec $x = a + h$, $h \neq 0$.

$$\tau_a(x) = \tau_a(a+h) = \frac{\mathrm{e}^{a+h}-\mathrm{e}^a}{h} = \frac{\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^a}{h} = \mathrm{e}^a\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = \mathrm{e}^a \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \mathrm{e}^a \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \mathrm{e}^a \times 1 = \mathrm{e}^a$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = \mathrm{e}^a = \exp(a) = f(a)}$$

Exercice 2. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = x^4$	b) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	c) $f(x) = 6\,x^2 + \dfrac{5}{2}x^4 - 3$
d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$	e) $f(x) = \mathrm{e}^x - 4\,\sin(x)$	f) $f(x) = \Big(\mathrm{e}^x - 4\,\sin(x)\Big)x^2$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 8

Réponse :

a) $f'(x) = 4\,x^{4-1} = \boxed{4\,x^3}$

b) b) $f(x) = -x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -(-2)\,x^{-2-1} = 2\,x^{-3} = \boxed{\dfrac{2}{x^3}}$

c) $f'(x) = 6\,(2\,x) + \dfrac{5}{2}\,(4\,x^3) + 0 = \boxed{12\,x + 10\,x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ avec $f_1(x) = x - 1$ et $f_2(x) = x^2 + x + 1$

$$f_1'(x) = 1\ ,\ f_2'(x) = 2\,x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{f_1'(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2'(x)}{f_2^2(x)}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1 - (x-1)(2\,x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2 + x + 1 - 2\,x^2 - x + 2\,x + 1}{(x^2+x+1)^2} = \boxed{\frac{-x^2 + 2\,x + 2}{(x^2+x+1)^2}}$$

e) $f'(x) = \boxed{\mathrm{e}^x - 4\,\cos(x)}$

f) $f(x) = f_1(x)\,f_2(x)$ avec $f_1(x) = \mathrm{e}^x - 4\,\sin(x)$ et $f_2(x) = x^2$:

$$f_1'(x) = \mathrm{e}^x - 4\,\cos(x) \qquad f_2'(x) = 2\,x$$

$$\Rightarrow f'(x) = f_1'(x)\,f_2(x) + f_1(x)\,f_2'(x) = \boxed{x^2(\mathrm{e}^x - 4\,\cos(x)) + 2\,x\,(\mathrm{e}^x - 4\,\sin(x))}$$

Exercice 3. *En utilisant la dérivée d'une fonction composée, calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \sin(2\,x - 1)$	b) $f(x) = \cos(3\,x^2 - 5\,x + 1)$	c) $f(x) = \Big(\mathrm{e}^x + \sin(x)\Big)^3$
d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$	e) $f(x) = \sin\Big(\exp(x)\Big)$	f) $f(x) = \exp\Big(\sin(x)\Big)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 9

Réponse : $f(x) = (u \circ v)(x) = u\Big(v(x)\Big) \Rightarrow f'(x) = v'(x)\,u'\Big(v(x)\Big)$

a) $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 2\,x - 1 \Rightarrow u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 2$

$$\Rightarrow f'(x) = \boxed{2\,\cos(2\,x - 1)}$$

b) $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 1 \Rightarrow u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = 6\,x - 5$

$$\Rightarrow f'(x) = -(6\,x - 5)\,\sin(3\,x^2 - 5\,x + 1) = \boxed{(5 - 6\,x)\,\sin(3\,x^2 - 5\,x + 1)}$$

c) $u(x) = x^3$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + \sin(x) \Rightarrow u'(x) = 3\,x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x + \cos(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \boxed{3\,(\mathrm{e}^x + \cos(x))\,\Big(\mathrm{e}^x + \sin(x)\Big)^2}$$

d) $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 1 - x^2 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}$ et $v'(x) = -2\,x$

$$\Rightarrow f'(x) = -2\,x\,\frac{1}{2\,\sqrt{1 - x^2}} = \boxed{-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

e) $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \exp(x) \Rightarrow u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \exp(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \boxed{\exp(x)\,\cos(\exp(x))}$$

f) $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = \sin(x) \Rightarrow u'(x) = \exp(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \boxed{\cos(x)\,\exp(\sin(x))}$$

Exercice 4. *Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, préciser son domaine de définition et calculer l'expression de sa dérivée.*

a) $f(x) = (x^2 - 2\,x)^{1/3}$	b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	c) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$
d) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$	e) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$	f) $f(x) = \ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Réponse :

a) $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x(x-2) = x^2 - 2\,x$ et $f_2(x) = x^{1/3}$.
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = f_1'(x) f_2'(f_1(x)) = (2\,x - 2)\frac{1}{3}\,(x^2 - 2\,x)^{1/3-1} = \boxed{\frac{2(x-1)}{3\,(x^2-2\,x)^{2/3}}} = \boxed{\frac{2(x-1)}{3\,\sqrt[3]{(x^2-2\,x)^2}}}$$

b) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $f_2 = x \mapsto \sqrt{x^3}$ est définie pour $x^3 \geq 0 \iff x \geq 0$ donc la fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cap \mathcal{D}_{f_2} =]0, +\infty[$.

$$f(x) = \frac{1}{x^{2^{1/3}}} - \frac{1}{x^{3^{1/2}}} = \frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-2/3} - x^{-3/2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2/3-1} - \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-3/2-1} = \boxed{\frac{3}{2}x^{-5/2} - \frac{2}{3}x^{-5/3}} = \boxed{\frac{3}{2\,\sqrt{x^5}} - \frac{2}{3\,\sqrt[3]{x^5}}}$$

c) $f(x) = (x^2+1)^{3/2}$: $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = x^{3/2}$.
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$, $f_1(x) \geq 1 > 0$ ($f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$) et $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}_+$ donc $f(x)$ défini pour tout x : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = f_1'(x) f_2'(f_1(x)) = 2\,x\,\frac{3}{2}\,(x^2+1)^{3/2-1} = 3\,x\,(x^2+1)^{1/2} = \boxed{3\,x\,\sqrt{x^2+1}}$$

`d)` $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x^2 + 1$ et $f_2(x) = \sqrt{x}$.
$f_1(x)$ est définie pour tout x réel, et $f_1(x) = x^2 + 1 \geq 1$ donc toujours positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est définie pour tout réel : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = f_1'(x)\, f_2'(f_1(x)) = 2\,x\,\frac{1}{2\,\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

`e)` $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ et $f_2(x) = \sqrt{x}$.
$f_1(x) = x + (f_2 \circ f_3)(x)$ avec $f_3(x) = x^2 + 1$.
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \geq 0$.
$\mathcal{D}_f = \{x\ ,\ x^2 + 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2+1} \geq 0\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_1(x) = x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \text{ et } f_3'(x) = 2\,x$$

$$\Rightarrow f_1'(x) = 1 + f_3'(x) f_2'(f_3(x)) = 1 + 2\,x\,\frac{1}{2\,\sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f_1(x)}{\sqrt{f_3(x)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f_1'(x)\, f_2'(f_1(x)) = \frac{f_1(x)}{\sqrt{f_3(x)}}\,\frac{1}{2\,\sqrt{f_1(x)}} = \frac{\sqrt{f_1(x)}}{2\,\sqrt{f_3(x)}} = \boxed{\frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}}$$

`f)` $f(x) = (\ln \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.
D'après la question précédente, $f_1(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
D'après la question précédente, $f_1'(x) = \dfrac{f_1(x)}{\sqrt{f_3(x)}}$ avec $f_3(x) = x^2 + 1$.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{f_1(x)}{\sqrt{f_3(x)}}\,\frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{\sqrt{f_3(x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Exercice 5. *On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, si la fonction f et sa dérivée f' sont définies et continues sur I.*

a) *Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ ax + b & si \quad x > 0 \end{cases}$$

b) *Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = 1$.*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & si \quad x > 0 \end{cases}$$

c) *Déterminer les réels a, b, c et d tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & si \quad 0 < x < 1 \\ x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Réponse :

a) • La fonction $f(x) = f_1(x) = \exp(x)$ est continue et dérivable sur $]-\infty; 0]$.

• La fonction $f(x) = f_2(x) = a\,x + b$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

• La fonction f est continue en $x = 0$ si et ssi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

On a bien $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \exp(x) = f(0) = \exp(0) = 1$.
Et la condition $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ donne $\lim_{x\to 0^+} a\,x + b = b = 1$.

• La fonction dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$f'(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x \leq 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

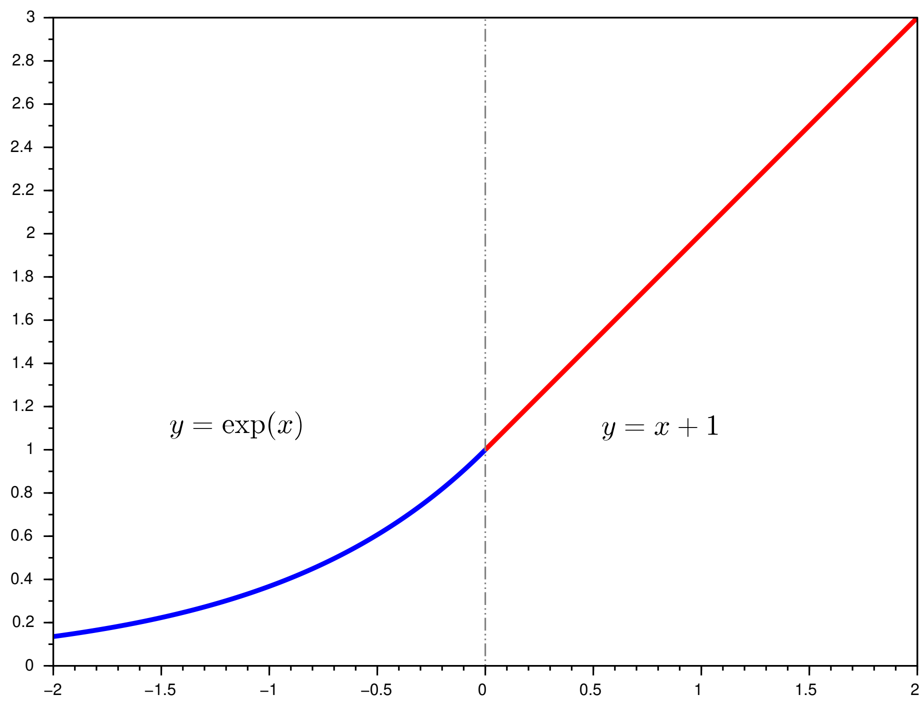
f' est continue si $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = v = f'(0) \in \mathbb{R}$:

1. sur l'intervalle $]-\infty; 0]$, la fonction $g_1(x) = \exp(x)$ est continue,
2. sur l'intervalle $]0; +\infty]$, la fonction $g_2(x) = a$ est continue,

donc il suffit que $g_1(0) = g_2(0)$ pour que f' soit continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0.

$$g_1(0) = g_2(0) \Rightarrow \exp(0) = 1 = a$$

donc $\boxed{a = b = 1}$
Le graphe de la fonction pour $x \in [-2; 2]$ est le suivant :



b) • La fonction $f(x) = x + 1$ est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$.

• La fonction $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

• La fonction f est continue en $x = 0$ si et ssi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

On a bien $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x + 1 = f(0) = 1$.
Et la condition $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ donne $\lim\limits_{x\to 0^+} a\,x^2 + b\,x + c = c = 1$.

• La fonction dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

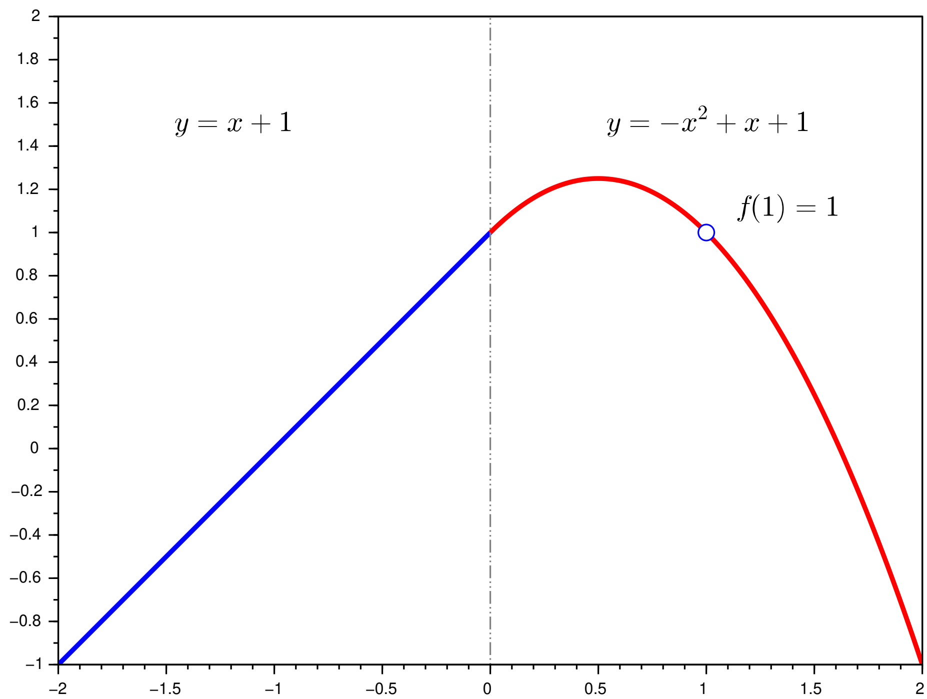
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2\,a\,x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f' est prolongeable par continuité si

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = v \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 1$$

La condition $f(1) = 1$ donne $a + b + c = 1$
donc $\boxed{a = -1,\ b = c = 1}$
Le graphe de la fonction pour $x \in [-2; 2]$ est le suivant :



c) • La fonction $f(x) = 1$ est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$.

• La fonction $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ est continue et dérivable sur $]0; 1[$.

• La fonction $f(x) = x$ est continue et dérivable sur $]1; +\infty[$.

• La fonction f est continue en $x = 0$ si et ssi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

On a bien $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = f(0) = 1$.
Et la condition $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ donne $\lim\limits_{x\to 0^+} a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = d = 1$.

• La fonction f est continue en $x = 1$ si et ssi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

On a bien $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = f(0) = 1$.
Et la condition $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(0)$ donne $\lim\limits_{x\to 1^-} a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = a + b + c + d = 1$.

• La fonction dérivée f' est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ par

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f' est prolongeable par continuité en $x = 0$ si

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = v \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = c \end{array} \right\} \Rightarrow c = 0$$

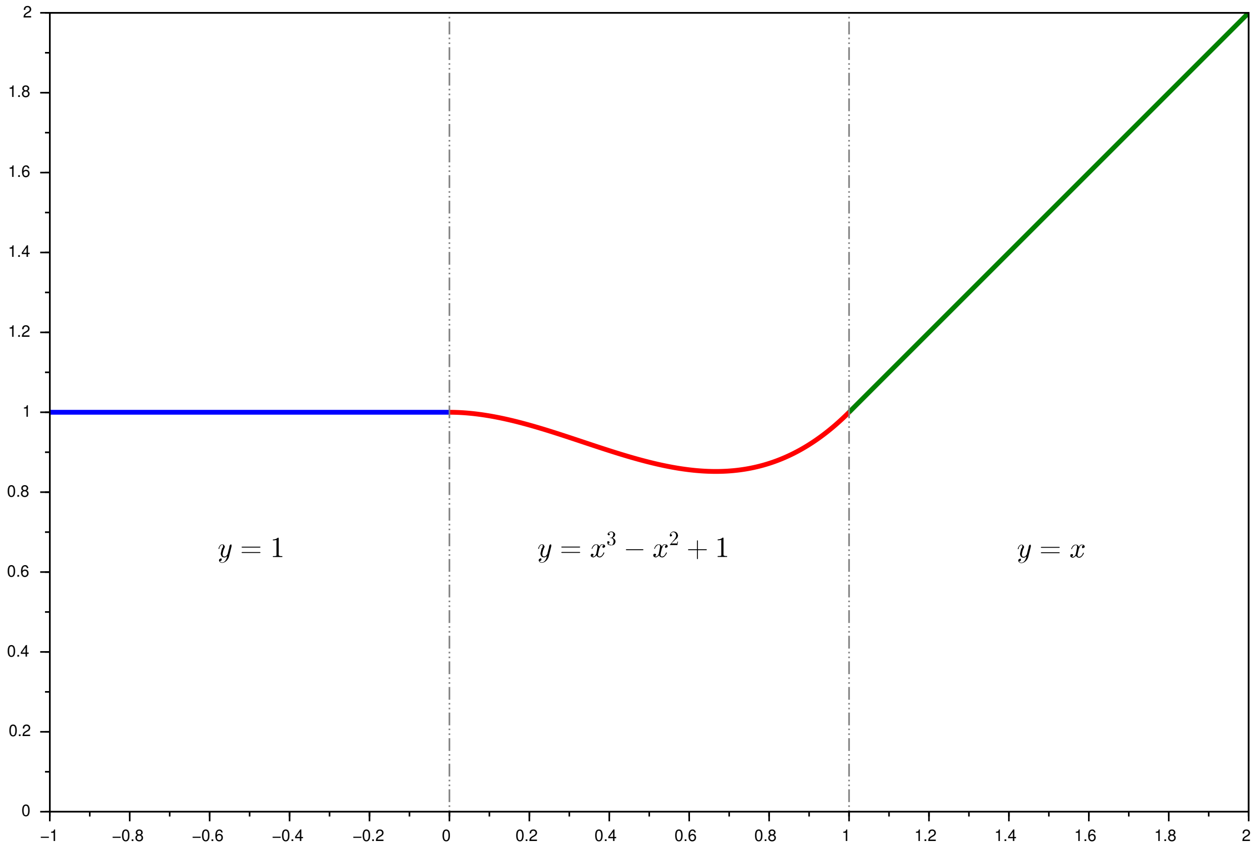
f' est prolongeable par continuité en $x = 1$ si

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = w \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 3\,a + 2\,b + c \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1 \end{array} \right\}$$

donc $\boxed{a = 1,\ b = -1,\ c = 0 \text{ et } d = 1}$

Le graphe de la fonction pour $x \in [-1; 2]$ est le suivant :



Exercice 6. *Dans cet exercice, le but est d'étudier la dérivabilité d'une fonction en $x = 0$.*

a) *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,|x|$.*

1. *Montrer que f est continue en 0.*
2. *Pour $x \neq 0$, calculer $f'(x)$, dérivée de la fonction f en x.*
3. *Déterminer τ_0, la fonction* taux d'accroissement de *f en $a = 0$, et en déduire si on peut définir ou non $f'(0)$, dérivée de la fonction f en 0.*
4. *En utilisant les résultats des questions 2 et 3, la fonction dérivée f' est-elle définie en 0 ? La fonction dérivée f' est-elle continue en 0 ?*

b) *Refaire le même exercice avec la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.*

c) *Refaire le même exercice avec la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.*

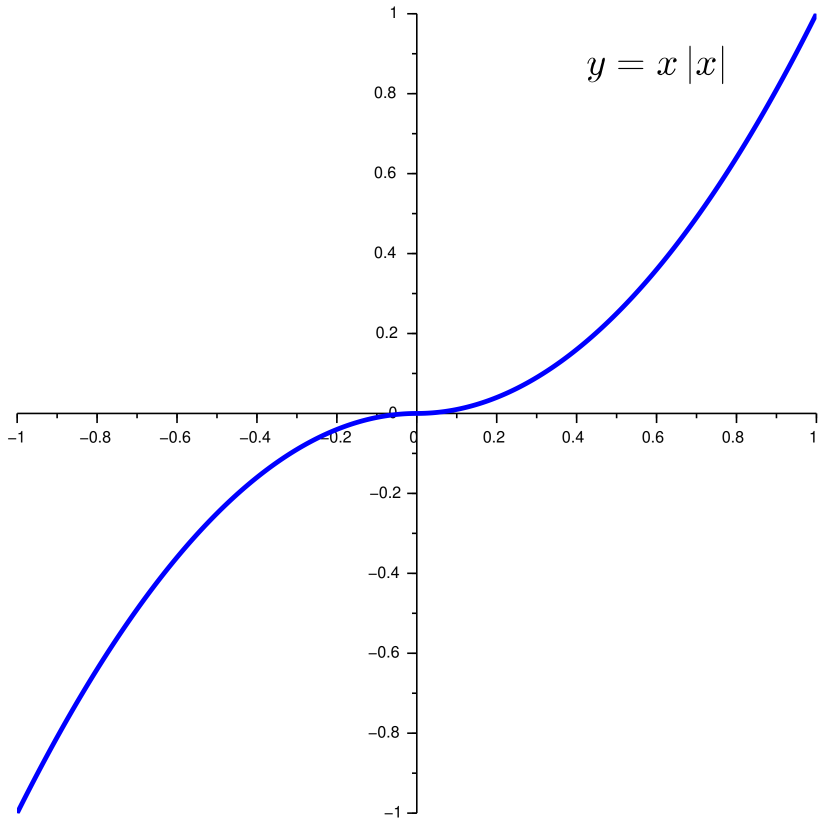
Questions facultatives supplémentaires : exercice 12

Réponse :

a) $f(x) = x\,|x|$.

1. $f(x)$ produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.
2. $$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
   La fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable pour $x < 0$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable pour $x > 0$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$:
   — pour $x < 0$, $f'(x) = -2\,x$
   — pour $x > 0$, $f'(x) = 2\,x$
3. $\tau_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x\,|x|}{x} = |x|$
   $$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \tau_0(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$
   donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$:
   $$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -2\,x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2\,x & \text{si } x > 0 \end{array} \right\} = 2\,|x|$$
4. La fonction f' est définie et continue en 0 car :
   $$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -2\,x = 0 = f'(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\,x = 0 = f'(0)$$

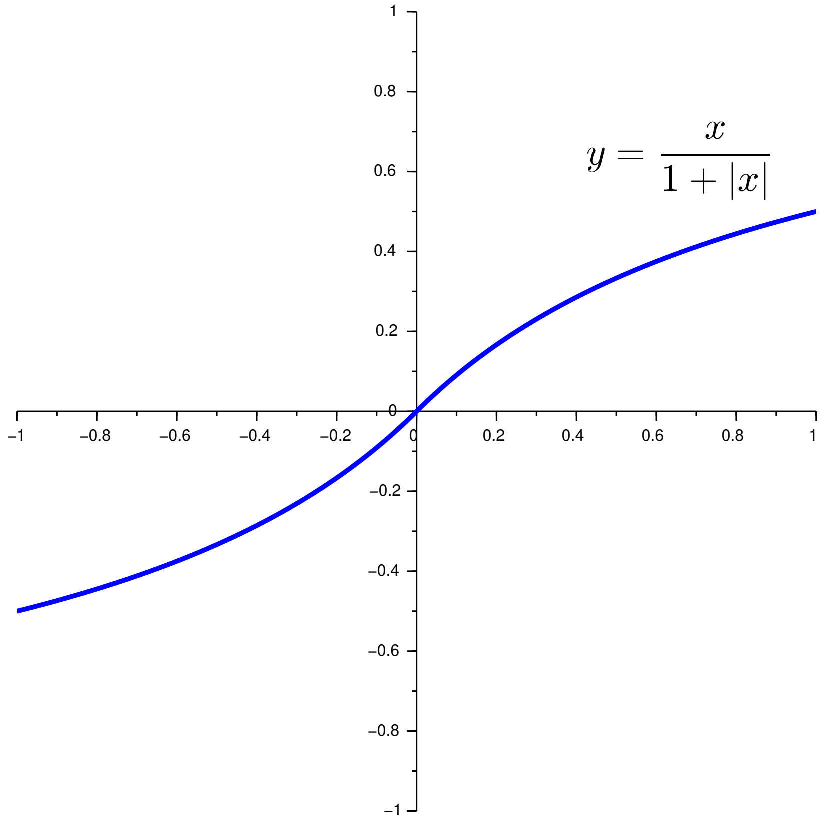
Le graphe de la fonction ne présente pas de point anguleux en $x = 0$.



b) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. La fonction $f_1 : x \mapsto 1 + |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) > 0$ donc la fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{f_1(x)} = \dfrac{1}{1+|x|}$ est définie est continue sur $\mathbb{R}$.
   Et comme $f(x) = x\, f_2(x)$, par produit, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.
2. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
   La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ est dérivable pour $x < 0$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est dérivable pour $x > 0$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$:
   — pour $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
   — pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
3. $\tau_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x}{x\,(1+|x|)} = \dfrac{1}{1+|x|}$
   $$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \tau_0(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+|x|} = 1$$
   donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 1$:
   $$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{(1+|x|)^2}$$
4. La fonction f est dérivable en 0, et f' est définie et continue en 0.

Le graphe de la fonction ne présente pas de point anguleux en $x = 0$.



c) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.

1. La fonction $f_1 : x \mapsto 1 + |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) > 0$ donc la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{f_1(x)} = \dfrac{1}{1+|x|}$ est définie est continue sur $\mathbb{R}$.

2. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est dérivable pour $x < 0$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est dérivable pour $x > 0$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$:
   — pour $x < 0$, $f'(x) = +\dfrac{1}{(1-x)^2}$
   — pour $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

3. $\tau_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{1}{1+|x|} - 1}{x} = -\dfrac{|x|}{x\,(1+|x|)}$

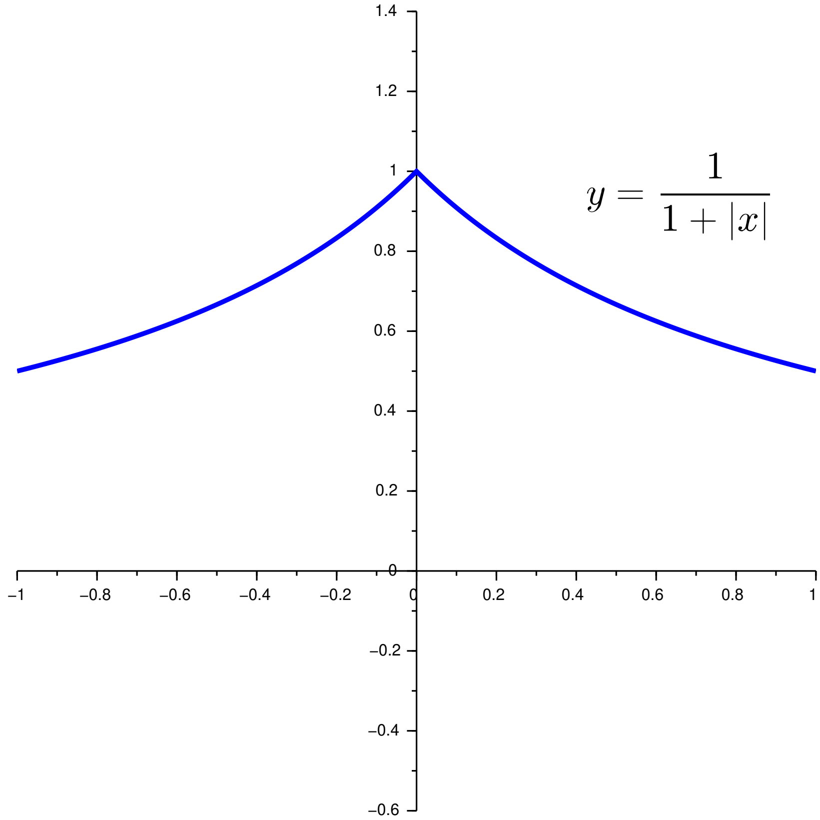
   $$\text{si } x < 0,\ \tau_0(x) = +\frac{x}{x\,(1-x)} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \tau_0(x) = 1$$

   $$\text{si } x > 0,\ \tau_0(x) = -\frac{x}{x\,(1+x)} = -\frac{1}{1+x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \tau_0(x) = -1$$

   donc la limite de τ_0 à gauche de 0 étant différente de la limite à droite de 0, on ne peut pas définir la dérivée de f en 0.

4. Donc la fonction f' n'est ni définie ni continue en 0.

Le graphe de la fonction présente un point anguleux en $x = 0$.



Exercices supplémentaires

Exercice 7. *Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer la fonction τ_a, taux d'accroissement de f en un point a du domaine de définition,*
puis calculer $\lim_{x\to a} \tau_a(x)$, et (re)trouver l'expression de la dérivée de f en a.

a) $f(x) = \ln(x)$ $\quad \Big($ *indication : utiliser* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1 \Big)$

b) $f(x) = \sin(x)$ $\quad \Big($ *indication : utiliser* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$ *et* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos(t)-1}{t} = 0 \Big)$

c) $f(x) = \cos(x)$ $\quad \Big($ *indication : utiliser* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$ *et* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos(t)-1}{t} = 0 \Big)$

Réponse :
a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^\star =]\,0\,;+\infty\,[$ donc $a \in]\,0\,;+\infty\,[\iff a > 0$.
Pour cette fonction, il est préférable d'écrire le taux d'accroissement avec $x = a + h$.

$$\tau_a(x) = \tau_a(a+h) = \frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h} = \frac{\ln\left(\dfrac{a+h}{a}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{h}{a}\right)}{a\,\dfrac{h}{a}}$$

on pose $t = \dfrac{h}{a}$, quand h tend vers 0, t tend aussi vers 0 :

$$\tau_a(x) = \frac{\ln(1+t)}{a\,t} \Rightarrow \lim_{x\to a} \tau_a(x) = \lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = \frac{1}{a} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = \frac{1}{a}}$$

b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $a \in \mathbb{R}$.
Pour cette fonction, il est préférable d'écrire le taux d'accroissement avec $x = a + h$.

$$\tau_a(x) = \tau_a(a+h) = \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$$

$$= \frac{\sin(h)\cos(a) + \cos(h)\sin(a) - \sin(a)}{h} = \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} + \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{x-a}$$

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = \lim_{h\to 0}\left(\cos(a)\,\frac{\sin(h)}{h} + \sin(a)\,\frac{\cos(h)-1}{h}\right)$$

$$= \cos(a)\,\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{=1} + \sin(a)\,\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} = \cos(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = \cos(a)}$$

c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $a \in \mathbb{R}$.
Pour cette fonction, il est préférable d'écrire le taux d'accroissement avec $x = a + h$.

$$\tau_a(x) = \tau_a(a+h) = \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \frac{\cos(h)\cos(a) - \sin(h)\sin(a) - \cos(a)}{h}$$

$$= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = \lim_{h\to 0} \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{t} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h} = -\sin(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = -\sin(a)}$$

Exercice 8. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \ln(x) + \dfrac{x^2}{2}$	b) $f(x) = \dfrac{\sinh(x)}{x^2}$	c) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Réponse :

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\, 2\, x = \boxed{\dfrac{1}{x} + x} = \boxed{\dfrac{1 + x^2}{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ avec $f_1(x) = \sinh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\left(e^x - \dfrac{1}{e^x}\right)$ et $f_2(x) = x^2$.
La dérivée de $f_1(x) = \sinh(x)$ est $f_1'(x) = \cosh(x)$:

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \left(-\frac{e^x}{(e^x)^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

La dérivée de $f_2(x) = x^2$ est $f_2'(x) = 2\, x$.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f_1'(x)\, f_2(x) - f_1(x)\, f_2'(x)}{f_2^2(x)} = \frac{x^2\, \cosh(x) - 2\, x\, \sinh(x)}{x^4} = \boxed{\frac{x\, \cosh(x) - 2\, \sinh(x)}{x^3}}$$

c) $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ avec $f_1(x) = e^x - 1$ et $f_2(x) = e^x + 1$.
La dérivée de $f_1(x)$ est $f_1'(x) = e^x - 0 = e^x$.
La dérivée de $f_2(x)$ est $f_2'(x) = e^x + 0 = e^x$.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f_1'(x)\, f_2(x) - f_1(x)\, f_2'(x)}{f_2^2(x)} = \frac{e^x\,(e^x + 1) - e^x\,(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x\, e^x + e^x - e^x\, e^x + e^x}{(e^x + 1)^2} = \boxed{\frac{2\, e^x}{(e^x + 1)^2}}$$

Exercice 9. *En utilisant la dérivée d'une fonction composée, calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \ln\Big(\cos(x)\Big)$	b) $f(x) = \ln\Big(\cos(x^2)\Big)$	c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$

Réponse :

a) $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \cos(x) \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = -\sin(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin(x)\,\frac{1}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \boxed{-\tan(x)}$$

b) $u(x) = \ln(\cos(x))$ et $v(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = -\tan(x)$ et $v'(x) = 2\,x$

$$\Rightarrow f'(x) = \boxed{-2\,x\,\tan(x^2)}$$

c) Pour cette dérivée, il faut éviter de choisir $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$, cela complique les calculs.
Il faut utiliser les propriétés du logarithme pour simplifier l'expression de la fonction :

$$f(x) = \ln\left(\left[\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right]^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) = \frac{1}{2}\Big[\ln\Big(1-\cos(x)\Big) - \ln\Big(1+\cos(x)\Big)\Big]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{-(-\sin(x))}{1-\cos(x)} - \frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)}\right] = \frac{\sin(x)}{2}\left[\frac{1}{1-\cos(x)} + \frac{1}{1+\cos(x)}\right]$$

$$= \frac{\sin(x)}{2}\left[\frac{1+\cos(x)}{\Big(1-\cos(x)\Big)\Big(1+\cos(x)\Big)} + \frac{1-\cos(x)}{\Big(1-\cos(x)\Big)\Big(1+\cos(x)\Big)}\right]$$

$$= \frac{\sin(x)}{2}\,\frac{2}{1-\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{2}\,\frac{2}{\sin^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\sin(x)}}$$

Exercice 10. *Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, préciser son domaine de définition et calculer l'expression de sa dérivée.*

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$	b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$	c) $f(x) = \dfrac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$
d) $f(x) = \sqrt{1+x^2\sin^2(x)}$	e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$	f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}+1}{\mathrm{e}^{1/x}-1}$

Réponse :

a) $f(x) = \exp\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow f$ définie pour $x \neq 0$ et $1+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$:
$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x)\exp(g(x)) = g'(x)f(x) = \boxed{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

b) f définie pour $1-\sin(x)\neq 0$ et $\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}>0$

$$1-\sin(x)\neq 0 \iff \sin(x)\neq 1 \iff x\neq \pi/2+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

$$-1\leq\sin(x)\leq 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 1+\sin(x) & \geq & 0 \\ 1-\sin(x) & \geq & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\geq 0$$

donc il faut que $1+\sin(x)\neq 0 \iff \sin(x)\neq -1 \iff x\neq -\pi/2+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
- méthode 1 pour le calcul de $f'(x)$

$$f(x)=\ln(u(x)) \text{ avec } u(x)=\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)} \text{ et } u'(x)=\frac{\cos(x)(1-\sin(x))+\cos(x)(1+\sin(x))}{(1-\sin(x))^2}=\frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}\frac{(1-\sin(x))}{(1+\sin(x))}=\frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}=\frac{2\cos(x)}{1-\sin^2(x)}=\frac{2\cos(x)}{\cos^2(x)}=\boxed{\frac{2}{\cos(x)}}$$

- méthode 2 pour le calcul de $f'(x)$

$$f(x)=\ln\left(\frac{v(x)}{w(x)}\right)=\ln(v(x))-\ln(w(x)) \quad \text{avec } v(x)=1+\sin(x) \text{ et } w(x)=1-\sin(x)$$

$$\iff f'(x)=\frac{v'(x)}{v(x)}-\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}-\frac{-\cos(x)}{1-\sin(x)}=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}+\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$$

$$=\frac{\cos(x)(1-\sin(x))+\cos(x)(1+\sin(x))}{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}=\frac{2\ \cos(x)}{1-\sin^2(x)}=\frac{2\ \cos(x)}{\cos^2(x)}=\boxed{\frac{2}{\cos(x)}}$$

c) f définie pour $x>0$ et $x-\ln(x)\neq 0$.
Soit $g(x)=x-\ln(x)$, $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

On fait le tableau de variation de g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

donc $g(x)\neq 0$ pour tout $x>0$.
Donc $\mathcal{D}_f=\,]0,+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x-\ln(x))-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(x+\ln(x))}{(x-\ln(x))^2}=\boxed{2\,\frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}}$$

d) $1+x^2\sin^2(x)\geq 1>0$ donc f est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

$$g(x)=1+x^2\ \sin^2(x)\Rightarrow g'(x)=2\,x\sin^2(x)+2\,x^2\ \sin(x)\cos(x)=2\,x\ \sin(x)\Big(\sin(x)+x\cos(x)\Big)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}=\boxed{\frac{x\ \sin(x)\Big(\sin(x)+x\ \cos(x)\Big)}{\sqrt{1+x^2\ \sin^2(x)}}}$$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}$

$$f_1(x) = x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$f_2(x) = x^2 - x + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

donc $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)} \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}}$$

$$= \frac{(2x+1)(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}$$

$$= \boxed{\frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2} \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}}$$

f) f est définie pour $x \neq 0$ et $e^{1/x} - 1 \neq 0$

$$e^{1/x} - 1 = 0 \iff e^{1/x} = 1 \iff 1/x = 0 \text{ impossible}$$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

$$g(x) = e^{1/x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)(g(x) - 1) - g'(x)(g(x) + 1)}{(g(x) - 1)^2}$$

$$= \frac{-2\, g'(x)}{(g(x) - 1)^2} = \boxed{\frac{2\, e^{1/x}}{x^2 \left(e^{1/x} - 1\right)^2}}$$

Exercice 11. *Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$, et deux fonctions f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que $f_1(x_1) = f_2(x_1)$ et $f_1(x_2) = f_2(x_2)$.*
On définit la fonction f ainsi

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < x_1 \\ \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f_1(x) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ f_2(x) & \text{si } x \geq x_2 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Réponse :
• La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car :
— de par sa définition, elle est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$,
— elle est continue en x_1 car

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = f(x_1) = f_1(x_1)$$

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f_1(x_1) + \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} f_2(x_1) = f_1(x_1) = f(x_1)$$

donc on a bien

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = \lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1) = f_1(x_1)$$

— elle est continue en x_2 car

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \frac{x_2 - x_2}{x_2 - x_1} f_1(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f_2(x_2) = f_2(x_2) = f(x_2)$$

$$\lim_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2) = f_2(x_2)$$

donc on a bien

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \lim_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2) = f_2(x_2)$$

• La dérivée de f est donc définie par

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) & \text{si } x < x_1 \\ \dfrac{1}{x_2 - x_1} \Big((x_2 - x)\, f_1'(x) - f_1(x) + (x - x_1)\, f_2'(x) + f_2(x) \Big) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ f_2'(x) & \text{si } x > x_2 \end{cases}$$

— on peut prolonger par continuité la fonction f' en $x = x_1$ avec $f'(x_1) = f_1'(x_1)$ car

$$\lim_{x \to x_1^-} f'(x) = f_1'(x_1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1^+} f'(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1} \Big((x_2 - x_1)\, f_1'(x_1) - f_1(x_1) + (x_1 - x_1)\, f_2'(x_1) + f_2(x_1) \Big) \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \Big((x_2 - x_1)\, f_1'(x_1) \underbrace{- f_1(x_1) + f_2(x_1)}_{=0} \Big) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f_1'(x_1) = f_1'(x_1) \end{aligned}$$

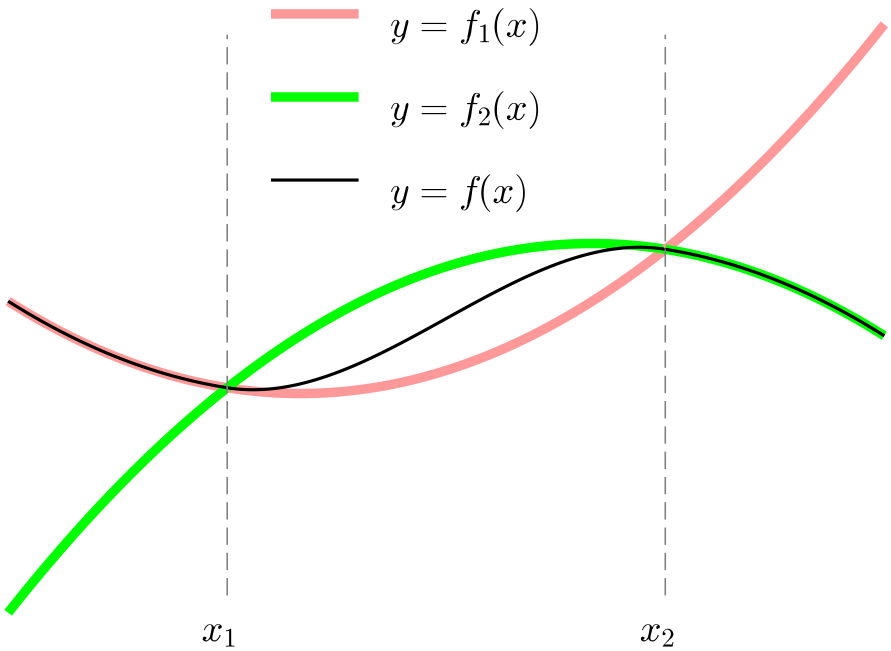
— on peut prolonger par continuité la fonction f' en $x = x_2$ avec $f'(x_2) = f_2'(x_2)$ car

$$\lim_{x \to x_2^-} f'(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\Big((x_2 - x_2)\, f_1'(x_2) - f_1(x_2) + (x_2 - x_1)\, f_2'(x_2) + f_2(x_2)\Big)$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1}\Big((x_2 - x_1)\, f_2'(x_2) \underbrace{-f_1(x_2) + f_2(x_2)}_{=0}\Big) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1}\, f_2'(x_2) = f_2'(x_2)$$

$$\lim_{x \to x_2^+} f'(x) = f_2'(x_2)$$

• Un exemple



Exercice 12. *Refaire l'exercice 6 avec les fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

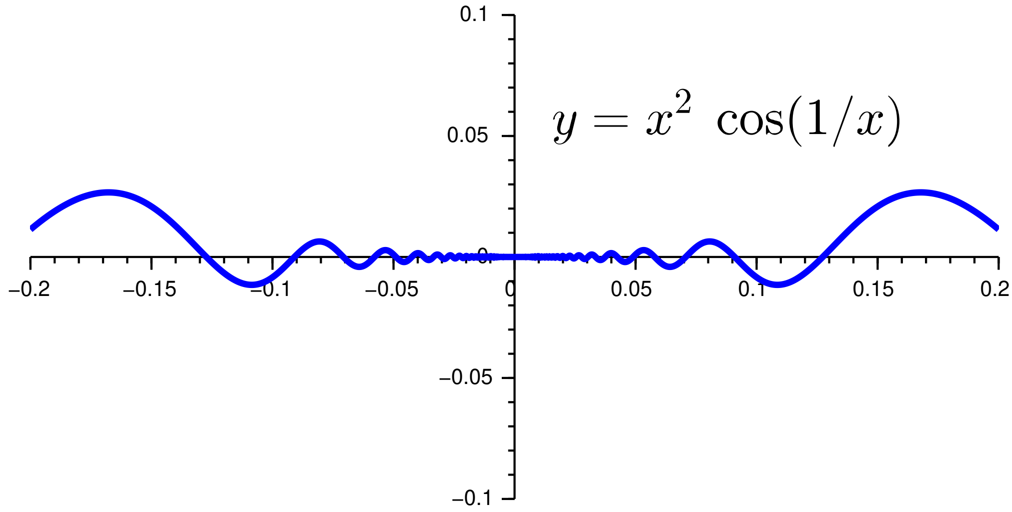
b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{\sqrt{|x|}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ *indication : utiliser* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\exp(t) - 1}{t} = 1$

Réponse :

a)

1. f est continue en 0 car en appliquant le *théorème des gendarmes* :
   $$g(x) = -x^2 \leq f(x) \leq x^2 = h(x) \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0} g(x)}_{=0} \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \underbrace{\lim_{x\to 0} h(x)}_{=0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ car la fonction $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et donc par composition et produit, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$:
   $$f'(x) = 2\,x\,\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2\,x\,\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
3. $\tau_0(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\,\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   En appliquant le *théorème des gendarmes* :
   $$-|x| \leq \tau_0(x) \leq +|x| \Rightarrow \lim_{x\to 0} \tau_0(x) = 0$$
   donc la dérivée de f en 0 est définie : $f'(0) = 0$.
4. Par contre pour $x \neq 0$, $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, en particulier le terme $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$:
   — le terme $2\,x\,\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (théorème des gendarmes).
   — soit la suite $x_k = \dfrac{1}{2\,k\,\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g(x_k) = \sin(2\,k\,\pi) = 0$.
   Donc la suite x_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ et $g(x_k) = 0$.
   — soit la suite $y_k = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\,k\,\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g(y_k) = \sin(\pi/2 + 2\,k\,\pi) = 1$.
   Donc la suite y_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ et $g(y_k) = 1$.
   On a deux sous-suites (x_k) et (y_k) qui tendent vers 0, mais pour l'une $g(x_k) = 0$ et pour l'autre $g(y_k) = 1$ donc $g(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.
   Donc f' n'est pas continue en 0.

Le graphe de la fonction est le suivant, mais ne permet pas d'observer ce qui ce passe précisément autour de $x = 0$ car lorsqu'on se rapproche de $x = 0$, les oscillations sont de plus en plus fréquentes et atténuées.



b)

1. f est continue en $x=0$ car $f(x)=\sqrt{|x|}\,\dfrac{\exp(x)-1}{|x|}$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{-x}\,\frac{\exp(x)-1}{x} = 0\times 1 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\,\frac{\exp(x)-1}{x} = 0\times 1 = 0 = f(0)$$

2. Pour $x<0$, on a

$$f(x) = \frac{\exp(x)-1}{\sqrt{-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\exp(x)\sqrt{-x} \;-\; (\exp(x)-1)\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}^2}$$

$$= \frac{-2\,x\,\exp(x)+\exp(x)-1}{-2\,x\sqrt{-x}}$$

   Pour $x>0$, on a

$$f(x) = \frac{\exp(x)-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\exp(x)\sqrt{x} - (\exp(x)-1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{2\,x\,\exp(x)-\exp(x)+1}{2\,x\sqrt{x}}$$

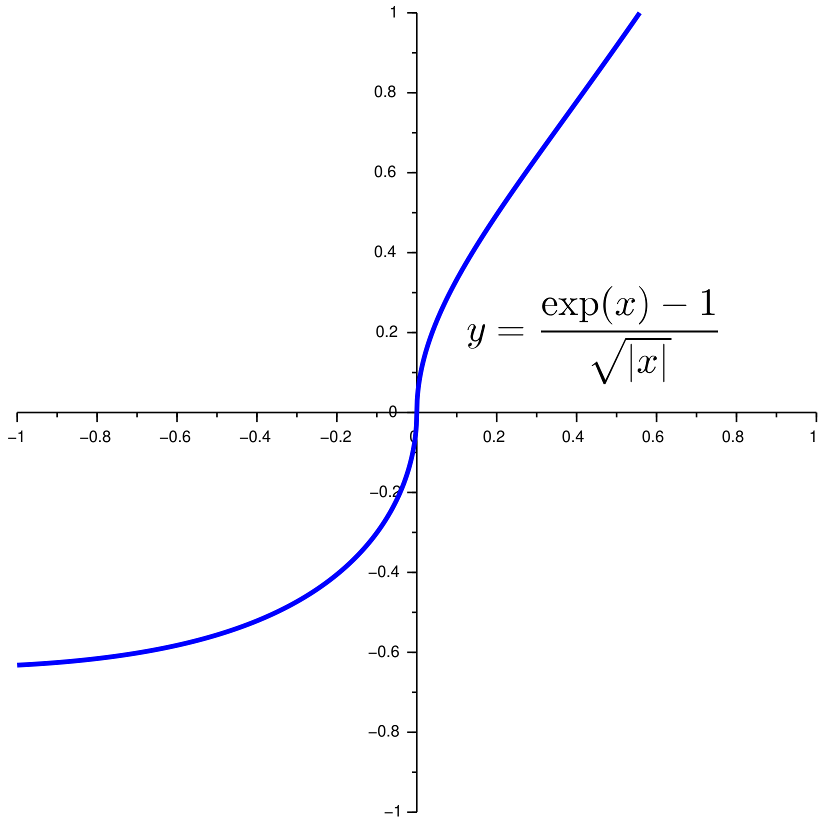
3. $\tau_0(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\exp(x)-1}{x\sqrt{|x|}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\tau_0(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}\;\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{|x|}} = 1\times +\infty = +\infty$$

   la fonction f n'est pas dérivable en $x=0$

4. Donc la fonction f' n'est pas définie, ni continue en $x=0$.

Le graphe de la fonction ne présente pas de point anguleux en $x=0$, mais la pente de la tangente en $x = 0$ est verticale correspondant à une dérivée infinie (donc non dérivable).



Exercice 13. *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.*
a) *Montrer que si f est paire alors f' est impaire.*
b) *Montrer que si f est impaire alors f' est paire.*

Réponse :
• Méthode 1 - en utilisant le taux d'accroissement
a) f paire : $f(-x) = f(x)$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-a) = \lim_{t\to -a} \frac{f(t)-f(-a)}{t-(-a)} = \lim_{t\to -a} \frac{f(t)-f(a)}{t+a}$$

$$\underbrace{=}_{x=-t} \lim_{x\to a} \frac{f(-x)-f(a)}{-x+a} = \lim_{x\to a} -\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -f'(a)$$

b) f impaire : $f(-x) = -f(x)$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-a) = \lim_{t\to -a} \frac{f(t)-f(-a)}{t-(-a)} = \lim_{t\to -a} \frac{f(t)+f(a)}{t+a}$$

$$\underbrace{=}_{x=-t} \lim_{x\to a} \frac{f(-x)+f(a)}{-x+a} = \lim_{x\to a} \frac{-f(x)+f(a)}{-x+a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

• Méthode 2 - en construisant une fonction particulière à partir de f
a) f paire : $f(-x) = f(x)$, on pose $g(x) = f(x) - f(-x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - (-f'(-x)) = f'(x) + f'(-x) = 0 \iff f'(-x) = -f'(x)$$

donc f' est impaire.
b) f impaire : $f(-x) = -f(x)$, on pose $g(x) = f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = 0$

$$g'(x) = f'(x) + (-f'(-x)) = f'(x) - f'(-x) = 0 \iff f'(-x) = f'(x)$$

donc f' est paire.

Exercice 14. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,\sin(x) - x$.*
`a)` *déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante.*
`b)` *déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est décroissante.*

Réponse : La croissance ou décroissance de f est donnée par le signe de sa dérivée première $f'(x) = 2\,\cos(x) - 1$.

`a)` f croissante sur un intervalle $A \iff \forall x \in A,\ f'(x) \geq 0$

$$f'(x) \geq 0 \iff 2\,\cos(x) - 1 \geq 0 \iff 2\,\cos(x) \geq 1 \iff \cos(x) \geq 1/2$$

$$\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\,-\pi/3 + 2\,k\,\pi\,;\,\pi/3 + 2\,k\,\pi\,]$$

f est croissante sur tout intervalle inclus dans un intervalle de la forme
$[\,-\pi/3 + 2\,k\,\pi\,;\,\pi/3 + 2\,k\,\pi\,]$ avec k entier relatif.

`b)` f décroissante sur un intervalle $A \iff \forall x \in A,\ f'(x) \leq 0$

$$f'(x) \leq 0 \iff 2\,\cos(x) - 1 \leq 0 \iff 2\,\cos(x) \leq 1 \iff \cos(x) \leq 1/2$$

$$\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\,\pi/3 + 2\,k\,\pi\,;\,5\,\pi/3 + 2\,k\,\pi\,]$$

f est décroissante sur tout intervalle inclus dans un intervalle de la forme
$[\,\pi/3 + 2\,k\,\pi\,;\,5\,\pi/3 + 2\,k\,\pi\,]$ avec k entier relatif.

Tracé de la fonction f