Recherche Opérationnelle I

Nadia Brauner

Nadia.Brauner@imag.fr

Programmation linéaire

Programmation linéaire

Plan

Plan

Programmation linéaire

Cadre de la PL

Programmation linéaire

nombre fini de variables réelles, contraintes linéaires, objectif linéaire

Variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ réelles

Contrainte générique (contrainte i) :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

Fonction-objectif générique (à maximiser / minimiser) :

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Programmation linéaire

Exemple : culture de courgettes et navets

Contraintes concernant les quantités d'engrais et d'anti-parasites

- 8ℓ engrais A disponible
  $\rightarrow 2\ell/m^2$ nécessaires pour courgettes, $1\ell/m^2$ pour navets
- 7ℓ engrais B disponible
  $\rightarrow 1\ell/m^2$ nécessaires pour courgettes, $2\ell/m^2$ pour navets
- 3ℓ anti-parasites disponible
  $\rightarrow 1\ell/m^2$ nécessaires pour navets

Objectif : produire le maximum (en poids) de légumes, sachant que rendements $= 4kg/m^2$ courgettes, $5kg/m^2$ navets

Programmation linéaire

Exemple : culture de courgettes et navets

Variables de décision

- x_c : surface de courgettes
- x_n : surface de navets

Fonction objectif $\max 4x_c + 5x_n$

Contraintes

- $2x_c + x_n \leq 8$ (engrais A)
- $x_c + 2x_n \leq 7$ (engrais B)
- $x_n \leq 3$ (anti-parasites)
- $x_c \geq 0$ et $x_n \geq 0$

Programmation linéaire

Intérêt de la PL

Problème général d'optimisation sous contraintes

$\Rightarrow$ **AUCUNE méthode GÉNÉRALE de résolution !!**

Problème linéaire quelconque
$\Rightarrow$ existence de méthodes de résolution générales et efficaces

Ces méthodes sont efficaces en théorie et en pratique
$\Rightarrow$ existence de nombreux logiciels de résolution :
Excel, CPLEX, Mathematica, LP-Solve...

Cadre restrictif

- variables réelles
- contraintes linéaires
- objectif linéaire

Programmation linéaire

Représentation in extenso

- $\max 4x_c + 5x_n$
- $2x_c + x_n \leq 8$ (engrais A)
- $x_c + 2x_n \leq 7$ (engrais B)
- $x_n \leq 3$ (anti-parasites)
- $x_c \geq 0$ et $x_n \geq 0$

Représentation matricielle

$$\max \quad (4 \quad 5)\begin{pmatrix} x_c \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_c \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_c \geq 0 \qquad x_n \geq 0$$

Programmation linéaire

Représentation in extenso

$$
\begin{array}{llcll}
\max z = & \sum_j c_j x_j & & & \\
s.c. & \sum_j a_{ij} x_j & \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} & b_i & i = 1, 2 \ldots m \\
 & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2 \ldots n
\end{array}
$$

Programmation linéaire

- second membre $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- matrice de format $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- coût (ou profit) $c = (c_1, c_2 \dots c_n)$

- n var. de décision $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Représentation matricielle

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ s.c. \quad Ax & \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Programmation linéaire

Vocabulaire

- x_i **variable** de décision du problème
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **solution réalisable** (admissible)
  ssi elle satisfait toutes les contraintes
- ensemble des solutions réalisables = **domaine** ou région admissible
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **solution optimale**
  ssi elle est réalisable et optimise la fonction-objectif
- **contraintes** inégalité ou égalité linéaire
  - $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$
  - $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$
  - $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ldots + a_{3n}x_n = b_3$
- **fonction objectif** (ou fonction économique) linéaire
  - max / min $c_1x_1 + c_2x_2 \ldots + c_nx_n$

Programmation linéaire

Applications

Feuille de TD: Programmation linéaire

- Production de vins
- Publicité
- Fabrication d'huile d'olives
- Bergamote

Caseine:

- Cucumbers and onions
- Perfumes
- Dairy Products
- Apples

Programmation linéaire

Forme canonique d'un PL

- maximisation
- toutes les variables sont non négatives
- toutes les contraintes sont des inéquations du type "$\leq$"

$$\max z = \textstyle\sum_j c_j x_j$$

$$\begin{array}{lrcll} s.c. & \sum_j a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1, 2 \ldots m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2 \ldots n \end{array}$$

- forme matricielle

$$\begin{array}{lrcl} \max z = cx & & & \\ s.c. & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Programmation linéaire

Forme standard d'un PL

- maximisation
- toutes les variables sont non négatives
- toutes les contraintes sont des équations

$$\max z = \sum_j c_j x_j$$

$$\begin{array}{lrcll} s.c. & \sum_j a_{ij} x_j & = & b_i & i = 1, 2 \ldots m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2 \ldots n \end{array}$$

- forme matricielle

$$\begin{array}{lrcl} \max z = cx & & & \\ s.c. & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Programmation linéaire

Passage entre les formes

- équation $\to$ inéquation

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- max $\leftrightarrow$ min $\qquad \max f(x) = -\min -f(x)$
- inéquation $\to$ équation : ajouter une variable d'écart

$$\begin{array}{lcll} ax \leq b & \iff & ax + s = b, & s \geq 0 \\ ax \geq b & \iff & ax - s = b, & s \geq 0 \end{array}$$

- variable non contrainte $\to$ variables positives

$$x \lesseqgtr 0 \iff \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Programmation linéaire

Passage entre les formes

Feuille de TD : Programmation linéaire

- Exercice Formes linéaires et canoniques

Programmation linéaire

Linéariser un problème non linéaire

e_i : expression linéaire des variables de décision

- **obj :** $\min \max\{e_1, e_2 \dots e_n\}$

$$\begin{cases} \min y \\ y \geq e_i \qquad i = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

- **obj :** $\max \min\{e_1, e_2 \dots e_n\}$

$$\begin{cases} \max y \\ y \leq e_i \qquad i = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

- **obj :** $\min |e_1|$

$$|e_1| = \max(e_1, -e_1) \quad \begin{cases} \min y \\ y \geq e_1 \\ y \geq -e_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min e^+ + e^- \\ e_1 = e^+ - e^- \\ e^+, e^- \geq 0 \end{cases}$$

Programmation linéaire

Linéariser un problème non linéaire

Feuille de TD : Programmation linéaire

- Exercice Linéarisation

Programmation linéaire

Un peu d'histoire

- années 30-40 : Kantorovitch, économiste soviétique
  $\Rightarrow$ modèles linéaires pour la planification et l'optimisation de la production
- années 40-50 : Dantzig, mathématicien américain
  $\Rightarrow$ algorithme du simplexe
- application historique
  - Opérations Vittles et Plainfare pour ravitaillement de la trizone pendant le blocus de Berlin par pont aérien (23 juin 1948 – 12 mai 1949)
  - simplexe exécuté à la main (des milliers de variables), jusqu'à 12 000 tonnes de matériel par jour !
- 1975 : prix Nobel économie Kantorovitch
- XXIème siècle : logiciels de PL disponibles partout, utilisation de la PL dans tous les domaines industriels...

Plan

Interprétation géométrique

Exemple : culture de courgettes et navets

Variables de décision

- x_c : surface de courgettes
- x_n : surface de navets

Fonction objectif $\max 4x_c + 5x_n$

Contraintes

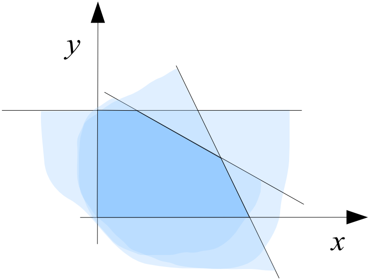
- $2x_c + x_n \leq 8$ (engrais A)
- $x_c + 2x_n \leq 7$ (engrais B)
- $x_n \leq 3$ (anti-parasites)
- $x_c \geq 0$ et $x_n \geq 0$

Interprétation géométrique

Interpréter les contraintes courgettes et navets

- $2x + y \leq 8 \Rightarrow$ demi-plan de $\mathbb{R}^2$
- $x + 2y \leq 7 \Rightarrow$ demi-plan
- $y \leq 3 \Rightarrow$ demi-plan
- $x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow$ demi-plans

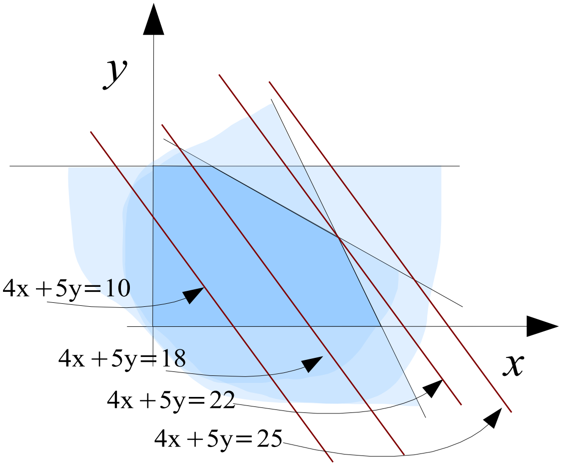
Ensemble des solutions réalisables = intersection de ces demi-plans : **polyèdre**



Interprétation géométrique

Optimiser l'objectif

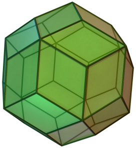
Les **lignes de niveau** $\{4x + 5y = \text{constante}\}$ sont des droites parallèles



Interprétation géométrique

Géométrie d'un PL

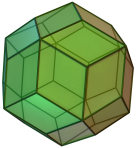
L'ensemble des solutions réalisables est toujours un **polyèdre** (intersection de demi-espaces)



Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif f sont des **hyperplans affines** ($n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

Interprétation géométrique

Géométrie d'un PL



Optimum atteint au bord

L'optimum de la fonction-objectif, s'il existe, est atteint en (au moins) un **sommet** du polyèdre.

Justification mathématique :
les dérivées partielles de $f(x) = c.x$ ne s'annulent jamais,
et le domaine $\{x \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ est compact
$\Rightarrow$ l'optimum est atteint au bord...

Programmation linéaire

Solutions d'un PL

La région admissible peut être

- vide
  - nb solutions optimales : 0
- non vide, bornée
  - nb solutions optimales : 1 ou ∞
- non vide, non bornée
  - nb solutions optimales : 0 ou 1 ou ∞

Proposer des exemples de PL pour chacun des cas

Feuille de TD : Programmation linéaire

- Exercice Résolution graphique

Plan

Bases et points extrêmes

Rappels

$$\begin{array}{lrcl} \max & z & = & cx \\ \text{s.c.} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

- A matrice $m \times n$
- $x = (x_1\, x_2 \ldots x_n)$
- $b = (b_1\, b_2 \ldots b_m)$
- $c = (c_1\, c_2 \ldots c_n)$

- Les contraintes définissent un polyèdre
- Une solution optimale est un sommet du polyèdre

Comment énumérer les sommets d'un polyèdre ?

Bases et points extrêmes

Passage à la forme standard

Forme standard

On peut rajouter des **variables d'écart** :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i,\, e_i \geq 0$$

PL standard :

$$\begin{array}{lccc} \max & z(x) & = & c.x \\ \text{s.c} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

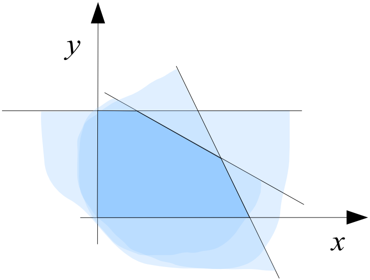
On travaille dans un espace de dimension plus grande, mais toutes les contraintes sont des égalités.

- Manipulations algébriques plus aisées

Bases et points extrêmes

Passage à la forme standard

$$\begin{aligned} \max z &= 4x + 5y \\ \text{s.c.} \quad & 2x + y \leq 8 \\ & x + 2y \leq 7 \\ & y \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max z &= 4x + 5y \\ \text{s.c.} \quad & 2x + y + e_1 = 8 \\ & x + 2y + e_2 = 7 \\ & y + e_3 = 3 \\ & x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{aligned}$$

9 points intéressants
(intersection de contraintes)

5 points admissibles

énumération de ces 9 points comme solution de la forme standard (solutions de base)

Bases et points extrêmes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{s.c.} & 2x & + & y & + & e_1 & & & & & = & 8 \\
 & x & + & 2y & & & + & e_2 & & & = & 7 \\
 & & & y & & & & & + & e_3 & = & 3 \\
 & x, & & y, & & e_1, & & e_2, & & e_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

x	y	e_1	e_2	e_3	sol de base	admiss.	pt extrême
$\underline{0}$	$\underline{0}$	8	7	3	✔	✔	(0,0)
$\underline{0}$	8	$\underline{0}$	-9	-5	✔	✘	
$\underline{0}$	3.5	4.5	$\underline{0}$	-0.5	✔	✘	
$\underline{0}$	3	5	1	$\underline{0}$	✔	✔	(0,3)
4	$\underline{0}$	$\underline{0}$	3	3	✔	✔	(4,0)
7	$\underline{0}$	-6	$\underline{0}$	3	✔	✘	
	$\underline{0}$			$\underline{0}$	✘	✘	
3	2	$\underline{0}$	$\underline{0}$	1	✔	✔	(3,2)
2.5	3	$\underline{0}$	-1.5	$\underline{0}$	✔	✘	
1	3	3	$\underline{0}$	$\underline{0}$	✔	✔	(1,3)

$$\{\textbf{points extrêmes}\} \Longleftrightarrow \{\textbf{solutions de base admissibles}\}$$

Bases et points extrêmes

- Système linéaire $Ax = b$
- A format $m \times n$, rang $A = m \leq n$
- **Base** de A : sous-matrice $B(m \times m)$ inversible de A
  $A = (B, N)$

$$(B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \qquad \text{ou} \qquad Bx_B + Nx_N = b$$

$$\Rightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

- **Solution de base** associée à B :
  - $x_N = 0$ variables hors base
  - $x_B = B^{-1}b$ variables de base

Bases et points extrêmes

Applications

Feuille de TD : Programmation linéaire

- Exercice Bases *2

Bases et points extrêmes

Base et solution de base

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 = 8 \\ x + 2y + e_2 = 7 \\ y + e_3 = 3 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Base initiale ? $\{e_1, e_2, e_3\}$ par exemple :

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 = 8 \\ x + 2y + e_2 = 7 \\ y + e_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y \\ e_2 = 7 - x - 2y \\ e_3 = 3 - y \end{cases}$$

$e_1, e_2, e_3 =$ variables de base, $x, y =$ variables hors base

Bases et points extrêmes

Base et solution de base

$$\begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y \\ e_2 = 7 - x - 2y \\ e_3 = 3 - y \end{cases}$$

- on met les variables hors base à 0
- on en déduit les valeur des variables de base

$$x = y = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y = 8 \\ e_2 = 7 - x - 2y = 7 \\ e_3 = 3 - y = 3 \end{cases}$$

Bases et points extrêmes

- $Ax = b, \qquad x \geq 0$
- $(x_B, 0)$ associée à B est une **solution de base admissible** si $x_B \geq 0$
- $\{$**points extrêmes** du polyèdre$\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{$solutions de base admissibles du système linéaire correspondant$\}$
- nombre de points extrêmes $\approx C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
- solution de base dégénérée : certaines variables de base sont nulles
- si A est inversible : solution de base unique

Bases et points extrêmes

Base voisine et pivotage

Bases voisines

Deux sommets voisins correspondent à deux bases B et B' telles qu'on remplace une variable de B pour obtenir B'

- passer à un sommet voisin = changer de base (base voisine)

principe du pivotage

Bases et points extrêmes

Qui faire entrer dans la base ?

Essayons avec y : quelle est la valeur max que pourra avoir y ?

- $e_1 = 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8$
- $e_2 = 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5$
- $e_3 = 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3$

Bilan : $y_{\max} = 3$, pour $y = y_{\max}$ on a $e_1 = 5 - 2x$, $e_2 = 1 - x$, et $e_3 = 0$

▶ candidat pour une nouvelle base :
$\{e_1, e_2, e_3\} \cup \{y\} \setminus \{e_3\} = \{e_1, e_2, y\}$

$(x, y, e_1, e_2, e_3) = (0, 3, 5, 1, 0)$

Plan

L'algorithme du simplexe

Vers un algorithme de résolution

▶ Méthode de résolution "naïve" : énumérer tous les sommets, calculer f sur ces points, prendre le sommet pour lequel f est optimisé :

- fonctionne : nombre fini de sommets
- limitation : ce nombre peut être très grand en général...

L'algorithme du simplexe (G. B. Dantzig 1947) Algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

L'algorithme du simplexe

Principe d'amélioration locale

À partir d'un sommet, chercher un sommet voisin qui améliore l'objectif.

Principe d'amélioration locale (maximisation) :

Soit x_0 sommet non optimum. Alors il existe x, un sommet **voisin** de x_0, tel que $f(x) > f(x_0)$.

- Méthode de résolution : on part d'un sommet x_0 quelconque, on passe à un sommet voisin pour lequel f augmente, et ainsi de suite.

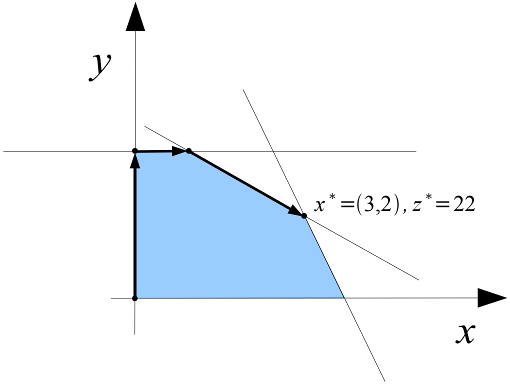
Remarque : on passe d'un problème **continu** (variables réelles) à un problème **discret** (nombre fini de sommets)...

L'algorithme du simplexe

Illustration 2D : courgettes et navets

$z = 4x + 5y$

$x_0 = (0, 0), z = 0 \to x = (0, 3), z = 15$
$x_0 = (0, 3), z = 15 \to x = (1, 3), z = 19$
$x_0 = (1, 3), z = 19 \to x = (3, 2), z = 22$



- plus d'amélioration locale possible $\Rightarrow$ optimum

L'algorithme du simplexe

Illustration concrète

- Standardisation :

$$\text{Maximiser } z = 4x + 5y \quad \text{s.c.} \begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 7 \\ y \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Maximiser } z = 4x + 5y \quad \text{s.c.} \begin{cases} 2x + y + e_1 = 8 \\ x + 2y + e_2 = 7 \\ y + e_3 = 3 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Base initiale ? $\{e_1, e_2, e_3\}$ par exemple :

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 = 8 \\ x + 2y + e_2 = 7 \\ y + e_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y \\ e_2 = 7 - x - 2y \\ e_3 = 3 - y \end{cases}$$

$e_1, e_2, e_3 =$ variables de base, $x, y =$ variables hors base

L'algorithme du simplexe

Solution de base associée

- on met les variables hors base à 0
- on en déduit :
  - valeur des variables de base
  - valeur de z

$$\text{ici : } x = y = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y = 8 \\ e_2 = 7 - x - 2y = 7 \\ e_3 = 3 - y = 3 \end{cases} \quad \text{et } z = 4x + 5y = 0$$

L'algorithme du simplexe

Changement de base

Observation essentielle : $z = 4x + 5y = 0 \Rightarrow$ on peut augmenter z si x ou y rentre dans la base.

Essayons avec y : quelle est la valeur max que pourra avoir y ?

- $e_1 = 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8$
- $e_2 = 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5$
- $e_3 = 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3$

Bilan : $y_{\text{max}} = 3$, pour $y = y_{\text{max}}$ on a $e_1 = 5 - x$, $e_2 = 1 - x$, et $e_3 = 0$

▶ candidat pour une nouvelle base :
$\{e_1, e_2, e_3\} \cup \{y\} \setminus \{e_3\} = \{e_1, e_2, y\}$

L'algorithme du simplexe

Nouvelle base $\{e_1, e_2, y\}$

$$\begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y \\ e_2 = 7 - x - 2y \\ e_3 = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y = 5 - 2x + e_3 \\ e_2 = 7 - x - 2y = 1 - x + 2e_3 \\ y = 3 - e_3 \end{cases}$$

Exprimons z en fonction des variables hors base

- $z = 4x + 5y = 15 + 4x - 5e_3$

Solution de base associée

$$x = e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 5 - 2x + e_3 = 5 \\ e_2 = 1 - x + 2e_3 = 1 \\ y = 3 - e_3 = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad z = 15$$

L'algorithme du simplexe

Itération

$z = 15 + 4x - 5e_3$ peut encore augmenter si x entre dans la base

Si x entre, qui sort ?
Valeur max de x :

- $e_1 = 5 - 2x + e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.5$
- $e_2 = 1 - x + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$
- $y = 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow$ aucune contrainte sur x

Bilan : $x_{\max} = 1$ et e_2 sort.
Nouvelle base $\{e_1, y, x\}$

$$\begin{cases} e_1 = 3 + 2e_2 - 3e_3 \\ x = 1 - e_2 + 2e_3 \\ y = 3 - e_3 \\ z = 19 - 4e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

L'algorithme du simplexe

Itération (suite)

$z = 19 - 4e_2 + 3e_3$ peut encore augmenter si e_3 entre dans la base

Si e_3 entre, qui sort ?
Valeur max de e_3 :

- $e_1 = 3 + 2e_2 - 3e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 1$
- $x = 1 - e_2 + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow$ aucune contrainte sur e_3
- $y = 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 3$

Bilan : ${e_3}_{\max} = 1$, e_1 sort. Nouvelle base $\{e_3, y, x\}$:

$$\begin{cases} e_3 = 1 + 2/3e_2 - 1/3e_1 \\ x = 3 + 1/3e_2 - 2/3e_1 \\ y = 2 - 2/3e_2 + 1/3e_1 \\ z = 22 - 2e_2 - e_1 \end{cases}$$

L'algorithme du simplexe

Terminaison

On a $z = 22 - 2e_2 - e_1$, donc $z^* \leq 22$

Or la solution de base $x = 3, y = 2, e_3 = 1$ donne $z = 22$

- optimum

La condition de terminaison concerne les coefficients de z exprimée avec les variables hors base.

L'algorithme du simplexe

Coûts réduits

B, une base de $Ax = b$

la fonction objectif :

$$\begin{aligned} z &= cx = c_B x_B + c_N x_N \\ &= c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N \\ &= z_0 - \sum_{j=1}^{n} (c_B B^{-1} a^j - c_j) x_j \\ &= z_0 - \sum_{j=1}^{n} (z_j - c_j) x_j \end{aligned}$$

$z_j - c_j = c_B B^{-1} a^j - c_j$ est le coût réduit de la variable hors base x_j

L'algorithme du simplexe

à chaque itération

$$
\begin{array}{rcl|c|c}
 & & & x_N & x_B \\
\hline
z & = & z_0 & \text{coûts réduits} & 0 \\
 & & & & \\
x_B & = & \oplus & \ddots & \\
\end{array}
$$

à l'optimum

$$
\begin{array}{rcl|c|c}
 & & & x_N & x_B \\
\hline
z & = & z_0^* & \ominus & 0 \\
 & & & & \\
x_B & = & \oplus & \ddots & \\
\end{array}
$$

L'algorithme du simplexe

Principe heuristique : faire rentrer en base la variable avec le coefficient le plus grand
Qui faire sortir ?

Principe du quotient minimal

colonne pivot x_1	second membre ≥ 0	quotient
$a_1 > 0$	b_1	-
$a_2 < 0$	b_2	$-\frac{b_2}{a_2}$
$a_3 < 0$	b_3	$-\frac{b_3}{a_3}$
$a_4 = 0$	b_4	-

ligne r $\quad \frac{b_r}{a_r} = \min \left\{ -\frac{b_i}{a_i} | a_i < 0 \right\}$

L'algorithme du simplexe

Pivotage

$$\begin{array}{rccc}
 & c & \cdots & a \\
 & \vdots & & \vdots \\
\text{ligne pivot} - & p & \cdots & b \\
 & | & & \\
 & \text{colonne} & & \\
 & \text{pivot} & &
\end{array}
\implies a \to a - \frac{b}{p} c$$

L'algorithme du simplexe

Phase II

Données : un programme linéaire et une solution de base admissible

Résultat : une solution de base admissible optimale ou déclarer "PL non borné"

1. Choix d'une colonne (variable) entrante
   - choisir une variable hors base x_j (colonne) ayant un coût réduit négatif
   - s'il n'existe pas de colonne entrante : STOP, la solution de base est optimale
2. Choix d'une ligne (variable) sortante
   - Choisir une ligne r minimisant le quotient
   - s'il n'existe pas de ligne sortante : STOP le tableau courant est non borné
3. Mise à jour de la base et du tableau
   - pivoter autour de a_{rj} et retourner en (1)

L'algorithme du simplexe

- Solution de base dégénérée si une ou plusieurs variables de base sont zéros (plus de bijection entre les solutions de base admissibles et les points extrêmes)
- Si toutes les solutions de base admissibles sont non dégénérées, l'algorithme du simplexe termine après un nombre fini d'itérations

L'algorithme du simplexe

Phase I

La Phase II de l'algorithme du simplexe prend en entrée une base réalisable. La Phase I permet de trouver une première base réalisable.

Découvrez la Phase I

- **Caseine:** Phase I*
- **Feuille d'exercice:** Simplexe *2