Université Grenoble Alpes — **UE MAT201**
Licence sciences et technologies — **Année 2022–2023**

Examen du 15 mai 2023

Les documents, calculatrices, téléphones portables et objets connectables sont interdits.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Durée de l'épreuve : 2 heures.

Question de cours.
a) Donner la définition d'un groupe $(G, *)$.
b) Si $(G, *)$ est un groupe, définir ce qu'est un sous-groupe $H \subset G$.
c) Si $(G, *)$ est un groupe et H_1, H_2 sont deux sous-groupes de G, vérifier que $H_1 \cap H_2$ est encore un sous-groupe de G.

Exercice 1. Dans chacun des exemples ci-dessous, préciser si F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel E et, le cas échéant, calculer la dimension du sous-espace F. Les réponses doivent être justifiées.
a) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \big\{(x, y, z) \in E\,;\, x + 2y + 3z = 0\big\}$.
b) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \big\{(x, y, z) \in E\,;\, x = 3y,\ y = 5z\big\}$.
c) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, \text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = 0\big\}$.

Exercice 2. On considère les trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) En déduire sans calcul que le système linéaire suivant possède une solution unique :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 4y - z = 0 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases} \qquad (*)$$

c) Calculer la solution (x, y, z) du système $(*)$. *On recommande de simplifier le système en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.*

T.S.V.P

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

et on note $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $\phi_A(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$.

a) Déterminer les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ et $\mathrm{Im}(\phi_A)$, et calculer leurs dimensions.

b) Donner l'expression de la matrice A^2.

c) Quelle est la signification géométrique de l'application ϕ_A ?

d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\phi_A) \oplus \mathrm{Im}(\phi_A)$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

et on note $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme canoniquement associé, tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$. On se donne également une seconde famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer les vecteurs $\phi(f_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

c) En déduire l'expression de la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\phi)$.

d) À l'aide de la question précédente, calculer le rang de ϕ et la dimension du noyau de ϕ.

e) Déterminer la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)$.

f) Calculer la matrice inverse P^{-1}.

g) Vérifier le résultat de la question c) en calculant le produit $P^{-1}AP$.

h) Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On recommande d'utiliser l'expression de l'endomorphisme ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 5. (*Cet exercice est plus difficile et pourra être traité en dernier.*)
Soit E un espace vectoriel réel, et $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose que

$$\forall v \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(v) = \lambda v.$$

Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f = \mu\,\mathrm{Id}_E$.

Université Grenoble Alpes — **UE MAT201**
Licence sciences et technologies — **Année 2022–2023**

Corrigé de l'examen du 15 mai 2023

Question de cours.

a) Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne, notée $*$, possédant les propriétés suivantes :
- la loi $*$ est associative : $\forall x, y, z \in G$ on a $x * (y * z) = (x * y) * z$;
- il existe un élément neutre $e \in G$ tel que : $\forall x \in G$ on a $x * e = e * x = x$;
- tout élément $x \in G$ admet un symétrique $x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

b) Une partie $H \subset G$ est un sous-groupe si elle contient l'élément neutre e, si elle est stable par la loi $*$ ($\forall x, y \in H$ on a $x * y \in H$), et si le symétrique de tout élément $x \in H$ est un élément $x' \in H$.

c) Notons $H = H_1 \cap H_2$. Puisque H_1, H_2 sont des sous-groupes, on a $e \in H_1$ et $e \in H_2$, donc $e \in H$. Si $x, y \in H$, alors $x, y \in H_i$ pour $i = 1, 2$, donc $x * y \in H_i$ pour $i = 1, 2$, ce qui montre que $x * y \in H$. De même, si $x \in H$, l'élément symétrique x' appartient à H_i pour $i = 1, 2$, donc $x' \in H$. On conclut que H est un sous-groupe de G.

Exercice 1.

a) On a $F = \mathrm{Ker}(\phi)$, où $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est la forme linéaire définie par $\phi(x, y, z) = x+2y+3z$. Comme $\phi(1, 0, 0) = 1$, cette forme n'est pas nulle, donc (par un résulat du cours) son noyau est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3 - 1 = 2$.

b) Par définition on a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $(x, y, z) = (15z, 5z, z)$, ce qui montre que F est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(15, 5, 1)$. Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de dimension un.

c) La partie F n'est pas stable par addition, donc n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet, si $f(x) = x$ et $g(x) = 1 - x$, alors $f, g \in F$ mais $f + g \notin F$ car la fonction $f + g$ est identiquement égale à 1.

Exercice 2.

a) Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de vérifier que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Il est clair que $v_1 \neq 0$ et que v_2 n'est pas un multiple de v_1, donc la famille (v_1, v_2) est libre. Par ailleurs, tout vecteur $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ vérifie $x+y-2z = 0$, alors que $3+5-2 = 6 \neq 0$. Ceci montre que $v_3 \notin \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

b) Notons $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice du système $(*)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de la matrice transposée ${}^tA$ sont exactement les vecteurs v_1, v_2, v_3, ce qui montre que ${}^tA$ est inversible. Comme une matrice et sa transposée ont toujours le même rang, on en déduit que la matrice A est également inversible. On en conclut que le système $(*)$ possède une solution unique.

c) En effectuant les opérations élémentaires sur les lignes précisées ci-dessous, on trouve successivement

$$\begin{array}{rcll} x+y+z &=& 6 & \\ 2x-4y-z &=& 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3x+5y+z &=& 7 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} x+y+z &=& 6 & \\ -6y-3z &=& -12 & L_2 \leftarrow -L_2/3 \\ 2y-2z &=& -11 & \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{rcll} x+y+z &=& 6 & \\ 2y+z &=& 4 & \\ 2y-2z &=& -11 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} x+y+z &=& 6 & \\ 2y+z &=& 4 & \\ -3z &=& -15 & L_3 \leftarrow -L_3/3 \end{array}$$

On obtient ainsi $z=5$, puis $2y = 4-5 = -1$, donc $y=-1/2$, puis $x = 6-5+1/2 = 3/2$. L'unique solution du système $(*)$ est donc $(x,y,z) = (3/2, -1/2, 5)$.

Exercice 3.

a) Au vu de l'expression de la matrice A, un vecteur $X=(x,y,z)$ appartient au noyau de ϕ_A si et seulement si $x-z=0$ et $y-z=0$. Ainsi $x=y=z$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,1)$; en particulier $\dim(\mathrm{Ker}(\phi_A)) = 1$. Par ailleurs, la matrice A étant échelonnée, on voit que $\mathrm{Im}(\phi_A) = \big\{(x,y,0)\,;\, x,y \in \mathbb{R}\big\}$, de sorte que $\dim(\mathrm{Im}(\phi_A)) = 2$.

b) Un calcul direct montre que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A\,.$$

c) Par la question précédente, on a $\phi_A \circ \phi_A = \phi_A$, ce qui montre que ϕ_A est la projection sur le plan $\mathrm{Im}(\phi_A)$ parallèlement à la droite $\mathrm{Ker}(\phi_A)$.

d) Il s'agit d'un résultat du cours, valable pour toute projection. On peut aussi vérifier l'égalité directement. Si $X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a la décomposition

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix},$$

où le premier terme du membre de droite appartient à $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ et le second à $\mathrm{Im}(\phi_A)$. Ainsi $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\phi_A) + \mathrm{Im}(\phi_A)$, et la somme est directe car $\mathrm{Ker}(\phi_A) \cap \mathrm{Im}(\phi_A) = \{0\}$ en vertu de a).

Exercice 4.

a) Il suffit de montrrer que la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Si $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, les réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifient le système linéaire $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, dont l'unique solution est évidemment $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre.

b) et **c)** En utilisant l'expression de la matrice A, on trouve par calcul direct : $\phi(f_1) = 0$, $\phi(f_2) = -f_2$, $\phi(f_3) = f_3$. Ceci signifie que

$$A' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\phi) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) On a $\mathrm{rang}(\phi) = \mathrm{rang}(A') = 2$, et il s'ensuit que $\dim(\mathrm{Ker}(\phi) = 1$.

e) L'expression des vecteurs f_1, f_2, f_3 dans la base canonique implique que

$$P \;:=\; \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\big) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) On peut inverser la matrice P en résolvant le système linéaire $PX = b$ pour un second membre arbitraire $b \in \mathbb{R}^3$. On trouve

$$P^{-1} \;:=\; \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\big) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

g) Par calcul direct on obtient

$$P^{-1}AP \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; A'.$$

h) Le système à résoudre s'écrit de façon équivalente $\phi(X) = f_3$, et on cherche les solutions sous la forme $X = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$. En utilisant les résultats de la question b), on réduit le système à l'égalité $-\lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = f_3$, qui signifie que $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$. Ainsi toutes les solutions du système sont de la forme $X = f_3 + \lambda f_1$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est arbitraire.

Exercice 5. Si $E = \{0\}$, on peut prendre $\mu = 0$. Sinon, on choisit un vecteur $w \in E$ tel que $w \neq 0$. Par hypothèse, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ (qui est d'ailleurs unique) tel que $f(w) = \mu w$. On prétend que $f(v) = \mu v$ pour tout $v \in E$. Pour montrer cela, on distingue deux cas :

1) Si $v \in \mathrm{Vect}(w)$, alors $v = \alpha w$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $f(v) = \alpha f(w) = \alpha\mu w = \mu v$.

2) Si $v \notin \mathrm{Vect}(w)$, alors par hypothèse sur f il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \lambda v$, et $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $f(v + w) = \nu(v + w)$. Comme f est linéaire, on a donc

$$\nu(v + w) \;=\; f(v + w) \;=\; f(v) + f(w) \;=\; \lambda v + \mu w\,,$$

d'où $(\lambda - \nu)v + (\mu - \nu)w = 0$. Puisque la famille (v, w) est libre par hypothèse, il s'ensuit que $\lambda = \nu = \mu$. Ainsi, dans ce cas également, on a $f(v) = \mu v$.