
STA401 : CC2-Partiel-Correction

Exercice 1 :

1. a) $\mathcal{N}(0;1)$
   b) $Z = 3X - 2Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;136)$ car indépendantes.
   $P(3X-2Y>0) = P(\frac{Z-0}{\sqrt{136}} > \frac{0}{\sqrt{136}}) = P(\frac{Z}{\sqrt{136}} > 0) = 0,5$

2. a) 0.6915 et 0.691462
   b) $P(X > a) = P(Y > \frac{a-40}{10}) \iff P(Y < \frac{a-40}{10}) = 0.98 \iff u = 2.0537 \iff a = 60.537$

3. Le théorème Central Limite permet de justifier l'approximation par une loi Gaussienne [n grand, n=1000 supérieur à 50] ou [n>30, np=250>5 et n(1-p)=750>5] donc : $\mu = np = 250$ et $\sigma^2 = np(1-p) = 187.5$
4. $\widehat{\sigma}^2 = S'^2 = 2,66667$ et $var(c(1,2,3,2,3,4,6))$

Exercice 2 : (filière Inm)

1. Inégalité de Bienaymé Tchebychev (X variable réelle positive et a>0) :
   $P(\mid X - E(X) \mid \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(\mid X - 16 \mid \geq a) \leq \frac{16}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(-a \leq X - 16 \leq a) \geq 1 - \frac{16}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(16 - a \leq X \leq 16 + a) \geq 1 - \frac{16}{a^2}$. Ici, on veut $16 - a = 10$ et $16 + a = 22$, soit $a = 6$.
   Donc : $P(10 < X < 22) \geq 1 - 16/36 = 0,5555$.

2. Si X suit la loi $\mathcal{N}(16;16)$ alors, $P(10 < X < 22) \simeq 0.86638$ [minoration très large trouvée en 1)]

Exercice 2 : (filières Min-Mat)

Voir la correction faite en TD de l'exo 5.2

Exercice 3 :

1. (a) X_i suit une loi Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$. (Somme de 6 variables de Bernoulli(p) indépendantes, ou répétition de 6 expériences avec remise).
   (b) $P[X = 0] = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} 0,2^0 * 0,8^6 = 0,262$
   (c) $P[X \geq 5]$ =$0,0016$. Donc inférieure à 1%

2. (a) X suit une loi Binomiale ($n = 500$ et $p = 0,2$). (voir 1.(a)).
   Le théorème Central Limite permet de justifier l'approximation par une loi Gaussienne [n grand, n=500] : $\mu = np = 100$ et $\sigma^2 = np(1-p) = 80$.
   (b) $P[X < 80] = P[\frac{X-100}{\sqrt{80}} < \frac{80-100}{\sqrt{80}}] = P[Y < -2,236] = 1 - P[Y < 2,236] \approx 0,0127$ [car Y suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$]

(c) On note N le nombre minimum voulu, il doit vérifier :
$P[X \geq N] = 0,3$. *Donc,* $P[\frac{X-100}{\sqrt{80}} \geq \frac{N-100}{\sqrt{80}}] = P[Y \geq u] = 0,3 \Rightarrow P[Y < u] = 0,7 \Rightarrow u = 0,5244$. *Donc,* $N = 0,5244\sqrt{80} + 100 \approx 104,7$
On trouve donc au moins 105 ordinateurs.

3. On construit l'intervalle de fluctuation de p au niveau de 99% (p est connue et on cherche la cohérence d'un échantillon), n=500 est assez grand : $\left[p \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$. On trouve : $\left[0,2 \pm 2,5758\sqrt{\frac{0,2*0,8}{500}}\right] = [0,15392; 0,24608]$
Puisque $f = 97/500 \simeq 0,194 \in I$, on conclut que cet échantillon est représentatif avec 99% de confiance.

Exercice 4 :

1. a) Moyenne et variance empirique : $\overline{x} = 13,928$; $s^2 = 0,411636$.
b) Moyenne et variance estimée sans biais : $\widehat{\mu} = \overline{x} = 13,928$; $\widehat{\sigma^2} = s'^2 = 0,457373$.

2. a) Les paramètres μ et σ^2 du modèle sont inconnues, donc l'intervalle de confiance de μ au niveau de 99% est : $[\overline{x} \pm t_{1-\alpha/2}^{n-1}\frac{s'}{\sqrt{n}}]$. On trouve : $[13,928 \pm 3,2498 * \sqrt{0,457373/10}] \simeq [13,233; 14,623]$
Le temps de compilation des programmes des étudiants est en moyenne entre 13.233 et 14.623 avec une probabilité de 99%.
b) Intervalle de confiance de l'écart type avec $\alpha = 0,01$: $\left[\sqrt{\frac{ns^2}{z_{1-\alpha/2}^{(n-1)}}}; \sqrt{\frac{ns^2}{z_{\alpha/2}^{(n-1)}}}\right] \approx \left[\sqrt{\frac{4,11636}{23,59}}; \sqrt{\frac{4,11636}{1,735}}\right] \simeq [0,4177; 1,5403]$.

3. Dans la suite $\sigma = 0,65$ donc il est connu ! L'intervalle de la moyenne est maintenant : $[\overline{x} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.
a) Pour avoir une précision de l'intervalle de $\pm 0,3$, il faut que $u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,3 \Rightarrow$
$u_{1-\alpha/2} = 0,3 * \sqrt{10}/0,65 = 1,4595$. Lecture de table : $p = 1 - \alpha/2 \simeq 0,9279$, donc $\alpha \simeq 0,1442$. Il faut donc un niveau de confiance de 0,8558.
b) Pour avoir une précision de l'intervalle de $\pm 0,3$, il faut : $u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,3 \Rightarrow$
$n = (2,5758 * 0,65/0,3)^2 = 31,14$. Il faudrait donc un échantillon de 32 étudiants.