Corrigé partiel 2017

Question de cours. Soient E et F des ensembles, une application $f : E \to F$ est surjective si

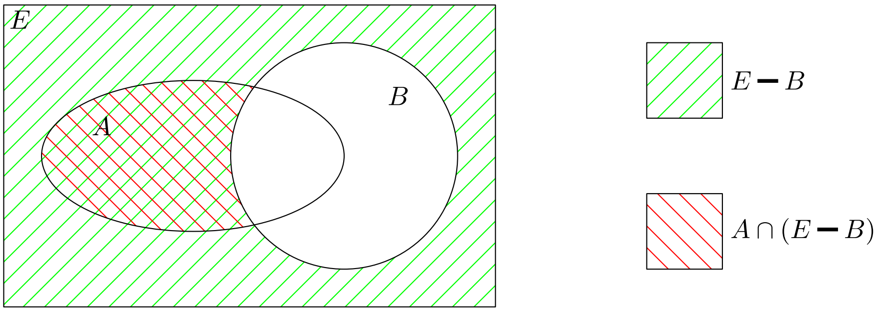
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Exercice 1.

P	Q	R	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow R$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)$	$P\Rightarrow R$	$((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R))\Rightarrow(P\Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Donc l'assertion $\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie.

Exercice 2. 1.



2. Supposons que $A \cap (E - B) = \emptyset$. Soit $x \in A$. Si $x \in E - B$, alors $x \in A \cap (E - B)$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur cette intersection. Donc $x \notin E - B$ et donc $x \in B$. On a prouvé l'inclusion $A \subset B$.

   Réciproquement, supposons que $A \subset B$. Alors

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

   Donc

$$\forall x \in A, \quad x \notin E - B.$$

   Cela prouve que l'intersection $A \cap (E - B)$ est vide.

Exercice 3. *Première solution :*

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = 4\Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)+n+1 = 4\frac{n(n+1)}{2}+n+1 = 2n(n+1)+n+1 = (2n+1)(n+1),$$

où la deuxième inégalité résulte d'une formule du cours.

Deuxième solution : On démontre la formule par récurrence sur n :
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0}(4k+1) = (4\times 0+1) = 1 = (2\times 0+1)(0+1)$. La formule est donc vraie dans ce cas.
Hérédité : On suppose la formule vérifiée pour n, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1}(4k+1) = \Big(\sum_{k=0}^{n}(4k+1)\Big)+4(n+1)+1 = (2n+1)(n+1)+4(n+1)+1 = 2n^2+7n+6.$$

Or $(2n+3)(n+2) = 2n^2+7n+6$. La formule est donc vraie pour $n+1$.

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}(4k+1) = (2n+1)(n+1).$$

Problème. 1. (a) Si $x > 0$, alors $(\sqrt[3]{x})^3 = \exp(\frac{1}{3}\ln(x))^3 = \exp(3\times\frac{1}{3}\ln(x)) = x$. Pour $x = 0$, $(\sqrt[3]{0})^3 = 0^3 = 0$. Enfin si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $(\sqrt[3]{x})^3 = (-\sqrt[3]{-x})^3 = -(-x) = x$. On obtient donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

(b) Tout nombre réel x admet un antécédent par f, à savoir $\sqrt[3]{x}$, donc f est surjective.

2. (a) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y$. Considérons la formule

$$y^3 - x^3 = (y-x)((x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2).$$

Comme y et x ne sont pas tous les deux nuls, il en de même de $x+\frac{1}{2}y$ et y. Donc les deux termes du produit sont strictement positifs. Donc $x^3 < y^3$.

(b) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x \neq y$. On a alors $x < y$ ou $y < x$ D'après (a), dans les deux cas, $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective. D'après la question 1.(b), elle est surjective. Elle est donc bijective.

3. (a) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y$. Raisonnons par l'absurde : si $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(x)$, par la question 2.(a), $y = f(f^{-1}(y)) \leqslant f(f^{-1}(x)) = x$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur x et y. Donc $f^{-1}(y) > f^{-1}(x)$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante.

(b) On a les égalités :

$$f(\sqrt[3]{xy}) = xy = (\sqrt[3]{x})^3(\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y})^3 = f(\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}).$$

Comme f est injective, cela prouve que

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y},$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

4. (a)

$$u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2)$$

pour tous $u, v \in \mathbf{R}$.

(b) En appliquant (a) à $\sqrt[3]{x}$ et $\sqrt[3]{y}$, on obtient

$$x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + +\sqrt[3]{y}^2)$$

La formule demandée s'obtient alors en appliquant 3.(b).

5. On pose $C_\alpha = \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}}$. Comme f^{-1} est croissante, pour $x, y \in]\alpha, +\infty[$, on a

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} > 3\sqrt[3]{\alpha^2}$$

Par la question 4.(b), il en résulte que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leqslant C_\alpha |x-y|.$$

6. Pour $x > 1$, on déduit de la question précédente que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi}| \leqslant \frac{1}{3}|x-\pi|$$

Il suffit donc de connaître 5 décimales de π.

7. Soit $a \in]\alpha, +\infty[$. Démontrons que $f^{-1}(x)$ tend vers $f^{-1}(a)$ quand x tend vers a. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose $\eta = \min\left(|a-\alpha|, \frac{\varepsilon}{C_\alpha}\right)$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$. Alors $x > \alpha$. On peut donc appliquer la question précédente, qui nous donne

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(a)| \leqslant C_\alpha|x-a| < C_\alpha \eta \leqslant C_\alpha \frac{\varepsilon}{C_\alpha} = \varepsilon.$$

Donc

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to a]{} f^{-1}(a),$$

et la restriction de f^{-1} à $]\alpha, +\infty[$ est continue.

8. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\alpha = \frac{a}{2}$. Par la question précédente,

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to a]{} f^{-1}(a).$$

9. (a) Il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^3$.
   (b) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon^3$ Pour $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - 0| < \eta$, on a, d'après la question 3.(a),
   $$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| = |\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x|} < \sqrt[3]{\eta} = \varepsilon.$$
   Donc
   $$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f^{-1}(0).$$
10. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel C existe. Il est forcément positif. Posons $y = 0$ et $x = \frac{1}{(C+1)^3}$. Alors
   $$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| = \frac{1}{C+1} \leqslant C|x - y| = \frac{C}{(C+1)^3}.$$
   On obtient $C + 1 \leqslant (C + 1)^2 \leqslant C$ et donc $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde.
11. Si $a < 0$, en utilisant la question 8, la formule $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x)$ et le théorème sur la limite de fonctions composées, on obtient que
   $$f^{-1}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f^{-1}(a).$$
   Par les questions 8 et 9.(b), cela vaut également pour $a \geqslant 0$, donc f^{-1} est continue.