Examen – MAT 101 – 2023/2024

Durée : 2 heures

Vendredi 22 décembre 2023

Les calculatrices, téléphones portables et tout document sont interdits.

Exercice 1 *Question de cours*

_____/4 p.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Une attention particulière sera accordée à la qualité de l'argumentation.

Solution 1

4 p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{H}_n \ : \ \text{"} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{"}.$$

(0,5 point). Montrons par récurrence que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** On a $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ et

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0.$$

  Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie. *(0,5 point)*

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie *(1 point)*. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) && \textit{(0,5 point)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{car } \mathcal{H}_n \text{ est vraie, } \textit{(0,5 point)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. && \textit{(0,5 point)} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. *(0,5 point)*

- **Conclusion :** par récurrence, on a montré que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

______/7 p.

1. *(1 point)* Simplifier (sans justifier) l'ensemble

$$\bigcup_{x\in[1,2]}\left[\frac{1}{x},1+\frac{1}{x}\right].$$

2. *(1 point)* Écrire la négation de l'assertion

$$\forall\theta,\theta'\in\mathbb{R},\qquad\left(e^{i\theta}=e^{i\theta'}\implies\exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\theta'+2k\pi\right).$$

3. *(1 point)* Calculer

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i}^{i+1}ij.$$

4. *(3 points)* Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer les trois sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\qquad\qquad\sum_{i=0}^{n}2^{2i+1},\qquad\qquad\sum_{k=0}^{n}(2k+1).$$

5. *(1 point)* Combien y a-t-il de nombres entiers s'écrivant avec exactement 3 chiffres, telle que leur écriture ne contient pas le chiffre 0 et ne contient pas deux chiffres identiques ?
Exemples : le nombre "427" s'écrit avec les trois chiffres "4", "2" et "7" et ne contient pas deux chiffres identiques. Le nombre "121" s'écrit avec les trois chiffres "1", "2" et "1" et contient les deux chiffres identiques "1" et "1".

Solution 2

7 p.

1. On a

$$\bigcup_{x\in[1,2]}\left[\frac{1}{x},1+\frac{1}{x}\right]=\left[\frac{1}{2},2\right].$$

(1 point)

2.

$$\exists\theta,\theta'\in\mathbb{R},\ e^{i\theta}=e^{i\theta'}\ \text{et}\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \theta\neq\theta'+2k\pi.$$

(1 point)

3. On a

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i}^{i+1}ij=\sum_{j=1}^{2}1\times j+\sum_{j=2}^{3}2\times j=1\times(1+2)+2\times(2+3)=13.$$

(1 point)

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, *(0,5 point)* on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^{k}=(1+1)^n=2^n.$$

(0,5 point)

D'après la formule de somme d'une série géométrique, *(0,5 point)* on a

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{2i+1} = 2\sum_{i=0}^{n} 4^i = 2\frac{4^{n+1}-1}{4-1} = \frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right).$$

(0,5 point)

D'après la formule montrée dans la question de cours, *(0,5 point)* on a

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2.$$

(0,5 point)

5. Il y a 9 chiffres qui sont différents de 0. On a donc 9 manières de sélectionner le premier chiffre. Le deuxième chiffre devant être distinct du premier, on a $9-1=8$ manières de le sélectionner. Le troisième chiffre devant être distincts des deux premiers, on a $9-2=7$ manières de le séle sélectionner. Il y a donc $9\times 8\times 7 = 497$ nombres possibles. *(1 point)*

Exercice 3

______/3 p.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. *(1 point)* Rappeler la définition de "$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$".
2. *(1 point)* Donner un exemple d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant ces hypothèses (justifier).
3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \geq \frac{1}{x}.$$

   (a) *(0,75 point)* Montrer que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   (b) *(0,25 point)* Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{f(u_n)}{u_n\left(1+\frac{1}{f(u_n)}\right)}.$$

   En utilisant le résultat de la question précédente et les opérations usuelles sur les limites, montrer que

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Solution 3

3 p.

1.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n| \leq \varepsilon.$$

(1 point)

2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n+1}$. *(0,5 point)* On a bien $u_n = \frac{1}{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ *(0,25 point)* et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$. Soit $n \geq N$. On a

$$n+1 \geq \lceil \varepsilon^{-1} \rceil + 1 \geq \varepsilon^{-1} + 1 \geq \varepsilon^{-1}.$$

Donc, comme $\frac{1}{n+1} > 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$|u_n| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon.$$

(0,25 point)

3. (a) Par opérations sur les limites, on a $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. *(0,25 point)*
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{u_n} \leq f(u_n).$$

   (0,25 point) Donc, par théorème des gendarmes, on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. *(0,25 point)*

   (b) Par opérations sur les limites, on en déduit que $\left(1 + \frac{1}{f(u_n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et,

   $$v_n = \frac{f(u_n)}{u_n\left(1 + \frac{1}{f(u_n)}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

   (0,25 point)

Exercice 4 *Ellipse du jardinier*

______/6 p.

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Soit

$$\mathcal{E}(\alpha) = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| + |z-1| = \alpha\right\}.$$

1. *(2 points)* Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que

   $$|x| + |x-1| = \alpha.$$

   En déduire que

   $$\mathcal{E}(\alpha) \cap \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}(z) = 0\right\} = \left\{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}\right\}.$$

2. (a) *(1 point)* Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. En utilisant que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|z|^2 = z\bar{z}$ et $2\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}$, montrer que

   $$|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + 2\left(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1||z_2|\right).$$

   (b) *(1 point)* En déduire que

   $$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

   et que

   $$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad \Leftrightarrow \quad z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+.$$

3. (a) *(1,5 points)* Soit $z \in \mathcal{E}(\alpha)$. En appliquant l'inégalité obtenue à la question précédente (ainsi que son cas d'égalité) à $z-1$ et 1, montrer que

   $$|z| \leq \frac{1+\alpha}{2},$$

   et que

   $$|z| = \frac{1+\alpha}{2} \implies z = \frac{1+\alpha}{2}.$$

   (b) *(0,5 point)* Écrire et montrer un résultat similaire pour $z = \frac{1-\alpha}{2}$.

   Le point $z = \frac{1-\alpha}{2}$ est appelé "périgée", et le point $z = \frac{1+\alpha}{2}$ est appelé "apogée" de l'ellipse $\mathcal{E}(\alpha)$.

Solution 4

6 p.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par disjonction de cas : soit $x < 0$, soit $0 \le x \le 1$, soit $x > 1$. *(1 point)*
Cas 1 : Si $x < 0$. On a $|x| = -x$ et $|x-1| = -x+1$. Donc
$$|x| + |x-1| = \alpha \Leftrightarrow -2x+1 = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{1-\alpha}{2}.$$
(0,25 point) Or, comme $\alpha > 1$, $\frac{1-\alpha}{2} < 0$, *(0,25 point)* donc la solution de l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x = \frac{1-\alpha}{2}$.
Cas 2 : Si $0 \le x \le 1$. On a $|x| = x$ et $|x-1| = 1-x$. Donc
$$|x| + |x-1| = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha,$$
ce qui n'est jamais vrai car $\alpha > 1$.*(0,25 point)* Donc l'équation n'admet pas de solutions sur $[0,1]$.
Cas 3 : Si $x > 1$. On a $|x| = x$ et $|x-1| = x-1$, donc
$$|x| + |x-1| = \alpha \Leftrightarrow 2x-1 = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{1+\alpha}{2}.$$
Or, comme $\alpha > 1$, on a $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, donc la solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x = \frac{1+\alpha}{2}$.
On en déduit
$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\alpha) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\} &= \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Re}(z) - 1| = \alpha \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0\} \quad \text{(0,25 point)} \\ &= \left\{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}\right\}.\end{aligned}$$

2. (a) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} && \text{car } \forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\bar{z} \\ &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) && \text{car } \forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}' \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) && \text{car } \forall z \in \mathbb{C},\ 2\mathrm{Re}(z) = z+\bar{z} \\ &= (|z_1|+|z_2|)^2 + 2\left(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1||z_2|\right).\end{aligned}$$
(1 point si calcul juste)

   (b) On a
$$|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2} \le \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2))^2} = |z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|.$$
(0,5 point si au moins quelques étapes bien identifiées) Donc $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1||z_2| \le 0$ ce qui prouve l'inégalité. Pour le cas d'égalité, on a
$$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+.$$
(0,5 point si au moins quelques étapes bien identifiées)

3. (a) Soit $z \in \mathcal{E}(\alpha)$. En utilisant l'inégalité prouvée à la question précédente, on a
$$|z| = |z-1+1| \le |z-1| + 1 = \alpha - |z| + 1.$$
Donc
$$|z| \le \frac{1+\alpha}{2}.$$
(0,75 point) De plus, le cas d'égalité $|z| = \frac{1+\alpha}{2}$ implique $|(z-1)+1| = |z-1|+1$ et par le résultat de la question précédente, que $z-1 \in \mathbb{R}_+$. Donc $z \in \mathcal{E}(\alpha) \cap [1, +\infty[= \left\{\frac{1+\alpha}{2}\right\}$ par la première question et car $\alpha > 1$. *(0,75 point)*

(b) Soit $z \in \mathcal{E}(\alpha)$. En utilisant l'inégalité prouvée à la deuxième question, on a

$$\alpha - |z| = |z-1| \leq |z| + 1.$$

Donc

$$|z| \geq \frac{\alpha - 1}{2}.$$

De plus, le cas d'égalité $|z| = \frac{\alpha-1}{2}$ implique $|z-1| = |z|+1$ et par le résultat de la question précédente, cela implique que $-z \in \mathbb{R}_+$. Donc $z \in \mathcal{E}(\alpha) \cap \mathbb{R}_- = \left\{\frac{1-\alpha}{2}\right\}$ par la première question et car $\alpha > 1$. Donc on a montré

$$\forall z \in \mathcal{E}(\alpha), \quad |z| \leq \frac{\alpha-1}{2} \quad \implies \quad z = \frac{\alpha - 1}{2}.$$

(0,5 point)