Université Grenoble Alpes
Licence sciences et technologies

UE MAT201
Année 2023–2024

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments.

a) On considère sur E la loi de composition interne $*$ définie par $a * a = a$, $a * b = a$, $b * a = b$, $b * b = b$. Cette loi est-elle commutative ? associative ?

b) Mêmes questions pour la loi $*$ définie par $a * a = b$, $a * b = a$, $b * a = a$, $b * b = a$.

c) Construire sur E une loi de composition interne $*$ telle que $(E, *)$ soit un groupe.

Exercice 2. On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition $*$ définie par $a*b = a+b-ab$ pour tous les $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier que la loi $*$ est associative, et admet un élément neutre que l'on identifiera.

b) Déterminer tous les éléments $a \in \mathbb{R}$ admettant un symétrique a' pour la loi $*$.

c) Vérifier que $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, muni de la loi $*$, est un groupe abélien.

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une loi de composition $*$ de la façon suivante :

$$\forall\,(x_1, y_1)\,,(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \;: \quad (x_1, y_1) * (x_2, y_2) \;=\; \big(x_1 + x_2\,, y_1 e^{x_2} + y_2 e^{-x_1}\big)\,.$$

a) Vérifier que la loi $*$ est associative, et admet un élément neutre que l'on identifiera.

b) Calculer le symétrique pour la loi $*$ de tout élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Vérifier que $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $*$ est un groupe. Ce groupe est-il abélien ?

Exercice 4. Montrer que les structures suivantes sont des groupes :

a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$.

b) $(\{-1, 1\}, \cdot\,)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot\,)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot\,)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot\,)$.

c) $(S(E), \circ)$, où E est un ensemble fini et $S(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E.
Remarque : si $E = \{1, \ldots, n\}$, on note S_n le groupe $S(E)$.

Exercice 5. Les ensembles suivants muni des lois considérées sont-ils des groupes ?

a) $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition $\circ$, où f_1, f_2, f_3, f_4 sont les applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = 1/x$, $f_4(x) = -1/x$.

b) $H = \{f_{a,b}\,;\,(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ muni de la composition $\circ$, où $f_{a,b}$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_{a,b}(x) = ax + b$.

c) L'ensemble E des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition.

Exercice 6.

a) Dresser la table de multiplication d'un groupe à trois éléments. Ce groupe est-il abélien ?

b) Montrer qu'il existe deux groupes non isomorphes possédant chacun quatre éléments. Ces groupes sont-ils abéliens ?

Exercice 7. Soit $\mathbb{U}_4$ l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
a) Écrire la table du groupe $(\mathbb{U}_4, \cdot\,)$. À quoi voit-on que ce groupe est abélien ?
b) Trouver un sous-groupe du groupe $(\mathbb{U}_4, \cdot\,)$ autre que $\{1\}$ et $\mathbb{U}_4$.

Exercice 8. Soit $(G, *)$ un groupe fini, ce qui signifie que l'ensemble G possède un nombre fini d'éléments. Étant donné $a \in G$, on note $a^2 = a * a$, $a^3 = a * a * a$, et ainsi de suite.
a) Observer que les éléments de la forme a^n, où $n \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas tous distincts.
b) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^m = e$, où e est l'élément neutre du groupe.
c) Si $m \in \mathbb{N}^*$ est le plus petit entier tel que $a^m = e$, vérifier que $H := \{e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 9. On considère le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs muni de l'addition.
a) Si $m \in \mathbb{N}$, on note $m\mathbb{Z} = \{mn\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. Vérifier que $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
b) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $G = m\mathbb{Z}$.

Indication : Si $G \neq \{0\}$, on pourra définir $m \in \mathbb{N}^*$ comme le plus petit entier naturel non nul contenu dans G. Pour tout élément n de G, on considérera alors le reste de la division euclidienne de n par m.

Exercice 10. On considère encore le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs muni de l'addition. Étant donnés $a, b \in \mathbb{N}^*$, on définit $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ comme dans l'exercice précédent, et on note

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \;=\; \big\{ak + b\ell\,;\, k, \ell \in \mathbb{Z}\big\}\,.$$

a) Vérifier que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
b) Montrer que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$, où $m = \mathrm{ppcm}(a, b)$.
c) Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$, où $n = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 11. On considère le groupe S_3 des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Outre l'élément neutre e, ce groupe est constitué de trois transpositions τ_1, τ_2, τ_3 et de deux permutations cycliques c_1, c_2.
a) Dresser la table de multiplication du groupe S_3. Ce groupe est-il abélien ?
b) Déterminer tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 12. On considère les éléments suivants du groupe S_5 :

$$\sigma \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varrho \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire sous la même forme l'élément $\sigma \circ \varrho$.
b) Calculer les puissances successives de l'élément σ, au sens de l'exercice 8, et déterminer le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que σ^m soit la permutation triviale.
c) Répéter l'opération avec les éléments ϱ et $\sigma \circ \varrho$.

Exercice 13. Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. Lorsque a et b sont deux éléments de E distincts, on définit l'application $\tau_{a,b} : E \to E$ par $\tau_{a,b}(a) = b$, $\tau_{a,b}(b) = a$, et $\tau_{a,b}(x) = x$ pour tout $x \in E \setminus \{a, b\}$. Une telle application s'appelle une transposition.

a) Calculer $\tau_{a,b} \circ \tau_{a,b}$.

b) Montrer que, pour tout $\sigma \in S(E)$, on a $\sigma \circ \tau_{a,b} \circ \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(a),\sigma(b)}$.

c) On prend $E = \{1, \ldots, 5\}$. Écrire la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

comme une composée de transpositions.

Exercice 14. Les applications suivantes sont-elles des morphismes de groupe ?

a) $f : x \mapsto 2x$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, puis de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

b) $f : x \mapsto x^2$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, puis de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

c) $f : x \mapsto \ln x$ de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

d) $f : x \mapsto \exp(x)$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

e) $f : x \mapsto \exp(x)$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

f) $f : z \mapsto \bar{z}$ de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Exercice 15. On considère l'ensemble $A = \{n + im \in \mathbb{C}\,;\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ muni de l'addition et de la multiplication définies comme sur $\mathbb{C}$.

a) Vérifier que $(A, +, \cdot)$ est un anneau, et identifier les éléments neutres des deux lois.

b) Déterminer tous les éléments de A qui sont inversibles pour la multiplication.

c) On dit qu'un élément $a \in A$ est irréductible s'il n'existe aucune factorisation dans A de la forme $a = bc$ avec a et b non inversibles. L'élément $a = 2$ est-il irréductible ?

Exercice 16.

a) Munir l'ensemble $F_2 = \{0, 1\}$ d'une addition et d'une multiplication de façon que F_2 soit un corps.

b) Munir l'ensemble $F_3 = \{-1, 0, 1\}$ d'une addition et d'une multiplication de façon que F_3 soit un corps.

c) Plus généralement, si $p \in \mathbb{N}^*$ est un entier premier, montrer qu'il existe un corps F_p possédant exactement p éléments.

Exercice 17. On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}\,;\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Vérifier que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, muni de l'addition et de la multiplication définies comme sur $\mathbb{R}$, est un corps.