Travaux dirigés
de modélisation des structures informatiques

V. Garnero

Table des matières

1 Représentations d'une relation

Exercices de TD

Exercice 1-1: On considère deux ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$ et les relations $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ et $\mathcal{S} \subseteq A \times B$. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont définies respectivement par les matrices suivantes :

$\mathcal{R}$	a	b	c
a	F	F	V
b	V	F	V
c	F	F	V

$\mathcal{S}$	0	1	2
a	V	F	F
b	F	F	V
c	F	V	F

1. Représentez S sous la forme d'un diagramme de A vers B.
2. Représentez R sous la forme d'un diagramme de A vers A.
3. Représentez R sous la forme d'un graphe orienté avec comme nœuds les éléments de A.

Exercice 1-2: On considère $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et les relations d'ordre strict $< \subseteq A \times A$ et d'ordre large $\geqslant \subseteq A \times A$.

1. Représentez $<$ et $\geqslant$ sous la forme d'un tableau.
2. Représentez $<$ et $\geqslant$ sous la forme d'un diagramme de A vers A.
3. Représentez $<$ et $\geqslant$ sous la forme d'un graphe orienté avec comme nœuds les éléments de A.

2 Opérations sur les relations

Exercices de TD

Exercice 2-1: On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\}$, $C = \{c_0, c_1\}$, $Z = \{z_0, z_1\}$. On considère la relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, la relation $\mathcal{S} \subseteq B \times C$, et la relation $\mathcal{T} \subseteq Z \times A$ définies par :

— $\mathcal{R} = \{(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$,

— $\mathcal{T} = \{(z_0, a_1), (z_1, a_0), (z_1, a_1), (z_1, a_2)\}$,

— $\mathcal{S} = \{(b_0, c_0), (b_1, c_0), (b_1, c_1)\}$.

1. Calculez $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \circ \mathcal{T}$.
2. Calculez $\mathcal{S} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{T})$.
3. Démontrez que la composition est associative.

Exercice 2-2: On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\}$. On considère les relations $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq A \times B$, définies par :

— $\mathcal{R}_1 = \{(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$,

— $\mathcal{R}_2 = \{(a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_0)\}$,

1. Calculez $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)^{-1}$.
2. Calculez $(\mathcal{R}_1^{-1} \cap \mathcal{R}_2^{-1})$.
3. Démontrez que toutes relations $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq A \times B$ vérifies $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)^{-1} = \mathcal{R}_1^{-1} \cap \mathcal{R}_2^{-1}$.

Exercice 2-3: On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}; B = \{b_0, b_1, b_2\}; C = \{c_0, c_1\}$. On considère les relations $\mathcal{R} = \{(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_0), (a_2, b_2)\} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} = \{(b_0, c_0), (b_1, c_0), (b_1, c_1), (b_2, c_1)\} \subseteq B \times C$.

1. Tracez le diagramme de la composition $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
2. Calculez le produit booléen des matrices de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.
3. Calculez le produit réel des matrices de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

Exercice 2-4: On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\}$, $Z = \{z_0, z_1\}$. On considère les relations $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq A \times B$, et la relation $\mathcal{T} \subseteq Z \times A$ définies par :

— $\mathcal{R}_1 = \{(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$,

— $\mathcal{R}_2 = \{(a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_0)\}$,

— $\mathcal{T} = \{(z_0, a_1), (z_1, a_0), (z_1, a_1), (z_1, a_2)\}$.

1. Calculez $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{T}$.
2. Calculez $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$.
3. Démontrer que la composition n'est pas $\cap$-distributive.
4. Démontrer que, pour tous $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{T}$,
   on vérifie $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{T} \subseteq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$.

Exercice 2-5: On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\}$, $C = \{c_0, c_1\}$. On considère la relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, et la relation $\mathcal{T} \subseteq Z \times A$ définies par :

— Calculez $(\mathcal{R} \circ \mathcal{T})^{-1}$.

— Calculez $(\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1})$.

— Démontrer que toutes relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B, \mathcal{T} \subseteq B \times C$ vérifies $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)^{-1} = \mathcal{R}_2^{-1} \circ \mathcal{R}_1^{-1}$.

Exercices d'entraînement

Exercice 2-6: On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\}$, $Z = \{z_0, z_1\}$. On considère les relations $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq A \times B$, et la relation $\mathcal{T} \subseteq Z \times A$ définies par :

— $\mathcal{R}_1 = \{(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$,

— $\mathcal{R}_2 = \{(a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_0)\}$,

— $\mathcal{T} = \{(z_0, a_1), (z_1, a_0), (z_1, a_1), (z_1, a_2)\}$.

1. Calculez $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{T}$.
2. Calculez $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$.
3. Démontrez que la composition est $\cup$-distributive.

Exercice 2-7: On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\}$. On considère la relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, définies par :

— Calculez $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$.

— Démontrer que toute relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ vérifie $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

3 Propriétés des relations

Exercices de TD

Exercice 3-1: On considère l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ et les relations $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ et $\mathcal{S} \subseteq A \times A$, définies par leur matrices :

$\mathcal{R}$	a	b	c
a	F	F	V
b	V	F	V
c	F	F	V

$\mathcal{S}$	a	b	c
a	V	F	F
b	F	F	V
c	F	V	F

Pour chacune des relations, précisez quelles propriétés (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité) sont vérifiées.

1. La relation $\mathcal{R}$ sur $A \times A$.
2. La relation $\mathcal{S}$ sur $A \times A$.

Exercice 3-2: On considère $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation. Démontrer les deux assertions suivantes ou leur négation.

1. Si $\mathcal{R}$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R}^{-1}$ est aussi antisymétrique.
2. Si $\mathcal{R}^{-1}$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R}$ est aussi antisymétrique.

Exercice 3-3: Pour chacune des relations suivantes, précisez quelles propriétés (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité) sont vérifiées. On considère $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan.

1. La relation de perpendicularité $\perp$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.
2. La relation de parallélisme $\parallel$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Exercice 3-4: On considère $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times A$ deux relations. Démontrer les trois assertions suivantes ou leur négation.

1. Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont antisymétriques, alors $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est aussi antisymétrique.
2. Si $\mathcal{R}_1$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est aussi antisymétrique.
3. Si $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont antisymétriques.

Exercice 3-5: On considère $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times A$ deux relations. Démontrer les trois assertions suivantes ou leur négation.

1. Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont transitives, alors $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est aussi transitive.
2. Si $\mathcal{R}_1$ est transitive, alors $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est aussi transitive.
3. Si $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est transitive, alors $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont transitives.

Exercice 3-6: On considère les ensemble $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{0, 1, \ldots b-1\}$ (avec $b > 0$).

1. Caractériser toutes les relations antisymétriques sur $A \times A$; et sur $B \times B$.
2. Dénombrer toutes les relations $A \times A$; et sur $B \times B$.
3. Écrire un algorithme `genASr` qui, étant donné un nombre b, génère de manière aléatoire uniforme une relation antisymétriques $\mathcal{R} \subseteq B \times B$.
4. Écrire un algorithme `testASr` qui, étant donné une matrice, teste si la relation associée $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ est antisymétriques.

Exercice 3-7: On considère $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times A$ deux relations. Démontrer les trois assertions suivantes ou leur négation.

1. Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont antisymétriques, alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ est aussi antisymétrique.
2. Si $\mathcal{R}_1$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ est aussi antisymétrique.
3. Si $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont antisymétriques.

Exercice 3-8: On rappelle que $\mathcal{R} \subset A \times A$ est antisymétrique si, par définition :
$\forall a, b \in A; (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \notin \mathcal{R} \vee a = b$.

1. Donner la formule pour $\mathcal{R}$ est non symétrique.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est non symétrique n'est pas équivalent à $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
3. Démontrer que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\forall a, b \in A; a \neq b \Rightarrow ((a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \notin R)$.
4. Démontrer que $\mathcal{R}$ est antisymétrique n'implique pas $(a, b) \notin \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in R$.
5. Donner la formule pour $\mathcal{R}$ est non antisymétrique.

R antisymétrique

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}; (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{R} \Rightarrow [(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \notin \mathcal{R} \vee \mathbf{a} = \mathbf{b}] \\
&\Leftrightarrow \forall a, b; (a, b) \notin \mathcal{R} \vee (b, a) \notin \mathcal{R} \vee a = b \\
&\Leftrightarrow \forall a, b; a = b \vee (a, b) \notin \mathcal{R} \vee (b, a) \notin R \\
&\Leftrightarrow \forall a, b; a \neq b \Rightarrow [(a, b) \notin \mathcal{R} \vee (b, a) \notin R] \\
&\Leftrightarrow \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \Rightarrow [(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \notin \mathbf{R}] \\
&\Leftrightarrow \forall a, b; [a \neq b \wedge (a, b) \in R] \Rightarrow (b, a) \notin R \\
&\Leftrightarrow \forall a, b; [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in R] \Rightarrow a = b
\end{aligned}$$

Exercice 3-9: On considère $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. On considère $\mathcal{I} = \{(e, e) \mid e \in A\}$ la relation identité sur $A \times A$. Prouvez les assertions suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
3. $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{I}$.
4. $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Exercices d'entrainement

Exercice 3-10: Pour chacune des relations suivantes, précisez quelles propriétés (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité) sont vérifiées.

1. Les relations d'ordre $<$ et $\geqslant$ sur $A \times A$ (avec $A = \{0, 1, 2, 3\}$).
2. Les relations d'ordre $<$ et $\geqslant$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
3. Les relations d'égalité $=$ et de congruence $\equiv_{[5]}$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 3-11: On considère les ensemble $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{0, 1, \ldots b-1\}$ (avec $b > 0$).

1. Caractériser toutes les relations réflexives sur $A \times A$; et sur $B \times B$.
2. Dénombrer toutes les relations $A \times A$; et sur $B \times B$.
3. Écrire un algorithme `genRr` qui, étant donné un nombre b, génère de manière aléatoire uniforme une relation réflexive $\mathcal{R} \subseteq B \times B$.
4. Écrire un algorithme `testRr` qui, étant donné une matrice, teste si la relation associée $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ est réflexive.

Exercice 3-12: On considère $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times A$ deux relations. Démontrer les trois assertions suivantes ou leur négation.

1. Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont symétriques, alors $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est aussi symétrique.
2. Si $\mathcal{R}_1$ est symétrique, alors $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est aussi symétrique.
3. Si $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est symétrique, alors $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont symétriques.

Exercice 3-13: On considère $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times A$ deux relations. Démontrer les trois assertions suivantes ou leur négation.

1. Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont transitives, alors $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est aussi transitive.
2. Si $\mathcal{R}_1$ est transitive, alors $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est aussi transitive.
3. Si $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est transitive, alors $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sont transitives.

4 Relations d'ordre et d'équivalence

Exercices de TD

Exercice 4-1: On considère une relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, a-1\}$.

1. Écrire un algorithme `test0t` qui teste si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale.

On pourra utiliser des algorithmes vus précédemment.

Exercice 4-2: Étant donné $\mathcal{R}$ une relation d'ordre (quelconque), $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale si et seulement si $\forall x, y \in A; x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$. Sinon on parle de relation d'ordre partielle.

Pour chacune des relations suivantes, précisez si elles sont des relations d'équivalence, d'ordre (partielle ou totale) ou non.

1. La relation $\mathcal{R}_1 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_1 = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$.
2. La relation $\mathcal{R}_2 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_2 = \{(a,a),(b,b),(b,a),(b,c),(c,c)\}$.
3. La relation $\mathcal{R}_3 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_3 = \{(a,a),(b,b),(c,b),(b,a),(c,c)\}$.

Exercice 4-3: Pour chacune des relations suivantes, justifier qu'elles sont des relations d'équivalence et préciser l'ensemble quotient :

1. la relation d'égalité sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par l'ensemble $E = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$
2. la relation d'égalité en valeur absolue, définie par $A = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 = b^2\}$,
3. la relation de parité sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $P = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ (a-b) \equiv_{[2]} 0\}$,
4. la relation de congruence modulo 5 sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par
   $C_{[5]} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ (a-b) \equiv_{[5]} 0\}$.

Exercice 4-4: Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence quelconque. On rappelle que pour tout élément $x \in A$ on définit $[x] = \{y \mid x\mathcal{R}y\}$. On considère l'ensemble quotient $A/\mathcal{R} = \{[x] \mid x \in A\}$.

1. Démontré que pour tout $x \in A$, $x \in [x]$.
2. Démontré que pour tout $x, y \in A$, $y \in [x]$ si et seulement si $[x] = [y]$.
3. Démontré que pour tout $x, y \in A$,$[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$.
4. Conclure que $A/\mathcal{R}$ est une partition de A.

Exercices d'entrainement

Exercice 4-5: Étant donné $\mathcal{R}$ une relation d'ordre (quelconque), $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale si et seulement si $\forall x, y \in A; x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$. Sinon on parle de relation d'ordre partielle.

Pour chacune des relations suivantes, précisez si elles sont des relations d'équivalence, d'ordre (partielle ou totale) ou non.

1. La relation d'égalité $E \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $E = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a = b\}$.

2. La relation d'égalité en valeur absolue $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $A = \{(a, b) \ | \ a, b \in \mathbb{Z}, \ a^2 = b^2\}$.
3. La relation d'infériorité $I \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $I = \{(a, b) \ | \ a, b \in \mathbb{Z}, \ a \leqslant b\}$.
4. La relation de divisibilité $D \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $D = \{(a, b) \ | \ a, b \in \mathbb{Z}, b \equiv_{[a]} 0\}$.
5. La relation d'inclusion $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par $S = \{(A, B) \ | \ A, B \subseteq \mathbb{N}, \ A \subseteq B\}$.

Exercice 4-6: On considère une relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, a-1\}$.

1. Écrire un algorithme `testO` qui teste si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

On pourra utiliser des algorithmes vus précédemment.

Exercice 4-7: Pour chacune des relations suivantes, justifier qu'elles sont des relations d'équivalence et préciser l'ensemble quotient :

1. la relation $\mathcal{R}_1 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$,
2. la relation $\mathcal{R}_2 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$,
3. la relation $\mathcal{R}_3 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_3 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$.

5 Clôture d'une relation

Exercices de TD

Exercice 5-1: On considère $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. On défini :

— $\mathcal{R}^s$ la clôture symétrique de $\mathcal{R}$; $\mathcal{R}^s$ est la relation qui satisfait :

— $\mathcal{R}^s$ contient $\mathcal{R}$,

$\overset{et}{—}$ $\mathcal{R}^s$ symétrique,

$\overset{et}{—}$ pour toute relation $\mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ symétrique, alors $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{S}$.

— $\mathcal{R}' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}' = \bigcap_{\begin{cases}\mathcal{S} \text{ symétrique} \\ \mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}\end{cases}} \mathcal{S}$.

1. Démontré que les trois définitions sont équivalentes, c.a.d. que $R^s = \mathcal{R}' = \mathcal{R}$".

Exercice 5-2: On considère $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. on définie :

— $\mathcal{R}^t$ la clôture transitive de $\mathcal{R}$; $\mathcal{R}^t$ est la relation qui satisfait :

— $\mathcal{R}^t$ contient $\mathcal{R}$,

$\overset{et}{—}$ $\mathcal{R}^t$ transitive,

$\overset{et}{—}$ pour toute relation $\mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ relation transitive, alors $\mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{S}$.

— $\mathcal{R}'' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}'' = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{R}^n$ (où $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{i+1} = \mathcal{R}^i \circ \mathcal{R}$).

1. Démontrer que les trois définitions sont équivalentes, c.a.d. que $R^t = \mathcal{R}' = \mathcal{R}$".
2. Écrire un algorithme `constRs` qui construit dans la relation $\mathcal{R}^t$ la clôture transitive de la relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Exercices d'entrainement

Exercice 5-3: On considère $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. On défini :

— $\mathcal{R}^r$ la clôture réflexive de $\mathcal{R}$; $\mathcal{R}^r$ est la relation qui satisfait :

— $\mathcal{R}^r$ incluse dans $\mathcal{R}$,

$\overset{et}{—}$ $\mathcal{R}^r$ réflexive,

$\overset{et}{—}$ pour toute relation $\mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ réflexive, alors $\mathcal{R}^r \subseteq \mathcal{S}$.

— $\mathcal{R}' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}' = \bigcap_{\begin{cases}\mathcal{S} \text{ réflexive} \\ \mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}\end{cases}} \mathcal{S}$.

— $\mathcal{R}'' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}'' = \mathcal{R} \cup \mathcal{I}$ (où $\mathcal{I} = \{(a, a) \mid a \in A\}$).

1. Démontrer que les trois définitions sont équivalentes, c.a.d. que $R^r = \mathcal{R}' = \mathcal{R}$".
2. Écrire un algorithme `constRr` qui construit la relation $\mathcal{R}^r$, clôture réflexive de la relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Exercice 5-4: On considère $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. On rappel que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Similairement aux autres clôtures on appelle clôture par équivalence de $\mathcal{R}$ la plus petite relation d'équivalence qui contient $\mathcal{R}$. On définie donc :

— $\mathcal{R}^e$ la clôture par équivalence de $\mathcal{R}$; $\mathcal{R}^e$ est la relation qui satisfait :

1. $\mathcal{R}^e$ contient $\mathcal{R}$,
2. $\mathcal{R}^e$ relation d'équivalence,
3. Pour toute relation d'équivalence $\mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R}^e \subseteq \mathcal{S}$.

— $\mathcal{R}'' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}'' = \bigcup_{n \geqslant 0} (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{I})^i$
(avec $\mathcal{I}$ la relation identité et $\mathcal{S}^{i+1} = \mathcal{S}^i \circ \mathcal{S}$).

1. Démontrer que les quatre définitions sont équivalentes : $\mathcal{R}^e = \mathcal{R}' = \mathcal{R}'' = \mathcal{R}'''$.
2. Écrire un algorithme `constRe` qui construit dans la relation R^e clôture par équivalence de la relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.