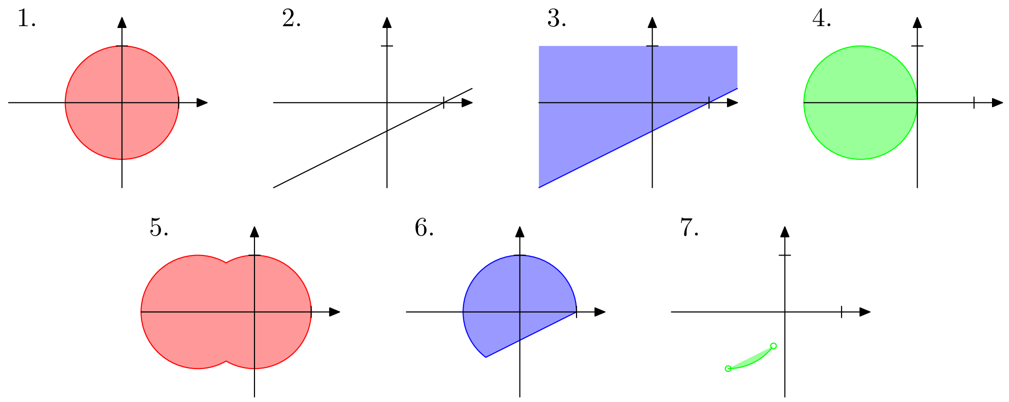
Corrigé partiel 2016

Question de cours. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, soit $l \in \mathbf{R}$ et soit a un point adhérent au domaine de définition de f. La fonction f admet la limite l au point a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Exercice 1. L'ensemble E est le disque fermé de centre en $(0,0)$ et de rayon 1, F est la droite passant par les points $(0,-1/2)$ et $(1,0)$ et G un demi-plan dont le bord est F. Par le théorème de Pythagore, $(x+1)^2+y^2$ est le carré de la distance de (x,y) à $(-1,0)$, donc H est le disque fermé de centre $(-1,0)$. (On peut aussi voir cela en faisant un changement de coordonnées $x' = x+1$ et $y' = y$). Cela conduit aux dessins suivants :



Dans la figure 7, le segment de droite $F \cap H$ ne fait pas partie de la figure.

Exercice 2.

1. La fonction $g \circ f$ est l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2. La fonction $f \circ g \circ f$ est l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $x \mapsto f(|x|) = |x|^2 = x^2$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $x = \sqrt{x}^2 = f(\sqrt{x})$ donc l'application f est surjective. Par contre $f(-1) = 1 = f(1)$ donc f n'est pas injective.
4. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $x = \sqrt{x^2} = g(x^2)$ donc g est surjective. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+$ tels que $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ alors $x = \sqrt{x}^2 = \sqrt{y}^2 = y$ donc g est injective. Elle est donc bijective. Comme
$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad x = g(x^2),$$
la réciproque de g est l'application g^{-1} de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $x \mapsto x^2$.

Exercice 3. 1. Si $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0}\left(k-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \frac{0-1}{2}.$$

ce qui prouve l'égalité dans ce cas. Supposons la formule vérifiée pour un entier n.

$$\sum_{k=0}^{n+1}\left(k-\frac{1}{2}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right) + (n+1) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{n^2-1}{2} + n + \frac{1}{2} = \frac{n^2-1+2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2-1}{2}.$$

ce qui démontre l'égalité pour $n+1$. Par récurrence, l'égalité vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} k3^k = 0 = -\frac{2\times 0-1}{4}3 + \frac{3}{4}.$$

Supposons la formule démontrée pour un entier n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k3^k = \left(\sum_{k=0}^{n} k3^k\right) + (n+1)3^{n+1} = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + (n+1)3^{n+1} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{2n-1+4n+4}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{6n+3}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{2(n+1)-1}{4}3^{n+2} + \frac{3}{4}$$

ce qui démontre le résultat pour $n+1$. Par récurrence, la formule vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. 1. Par le résultat sur la limite d'un produit de fonctions

$$f(x)^2 \xrightarrow[x\to 1]{} 2^2 = 4\ .$$

2. Comme la limite de f en 1 est non nulle, on peut appliquer le résultat sur la limite d'un quotient de fonctions et

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}\ .$$

3. Soit g l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto 1-x$. Comme g est polynomiale, $g(x) \xrightarrow[x\to 1]{} g(1) = 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) = 1$.

Pour démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ n'admet pas toujours de limite en 1, considérons par exemple l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et par $f(x) = 2$ si $x \geqslant 0$. Alors, cette application admet la limite 2 en 1, mais $\sqrt{f(1-x)} = 0$ si $x > 1$ et $\sqrt{f(1-x)} = \sqrt{2}$ si $x < 1$. En considérant les limites à droite et à gauche en 1, on obtient que l'application $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ n'admet pas de limite pour ce choix de l'application f ce qui prouve que cette fonction n'admet pas toujours de limite en 1.

Revenons au cas général. En appliquant le théorème sur la composée de fonctions à f et g, on obtient que, pour toute application f telle que $f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers 1,

$$f(1-x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2\ .$$

et comme

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 2]{} \sqrt{2},$$

en appliquant à nouveau ce théorème, on en déduit que

$$\sqrt{f(1-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{2}$$

Exercice 5. 1. En appliquant le théorème sur la composée d'application

$$\sqrt{|x|} \xrightarrow[x\to -1]{} 1\ .$$

L'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2+2$ est polynomiale, donc continue. Donc

$$x^2+2 \xrightarrow[x\to -1]{} 3\ .$$

Comme cette dernière limite est non nulle, on peut appliquer le résultat sur la limite du quotient

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+2} \xrightarrow[x\to -1]{} \frac{1}{3}\ .$$

2.
$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

où la dernière égalité résulte de la limite d'un quotient de fonctions.

3. En utilisant la limite obtenue à la question précédente, on obtient les formules suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-(x+1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

Comme les limites à droite et à gauche en -1 diffèrent, la fonction considérée n'admet pas de limite en -1.

Exercice 6. 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $a, b \in \mathbf{C}$, la formule du binôme s'écrit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. On applique la formule du binôme avec $b = 1$.
3. En appliquant la formule du binôme avec $b = -1$,

$$(a-1)^n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k.$$

4. En sommant les égalités des questions 1 et 2, on obtient

$$(a+1)^n + (1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^k + (-a)^k\right)$$

La somme $a^k + (-a)^k$ est nulle si k est impair et vaut $2a^k$ si k est pair, c'est-à-dire de la forme $k = 2k'$. Dans le cas où $n = 2n'$, on obtient donc

$$\sum_{k'=0}^{2n'} 2a^{2k'} \binom{2n'}{2k'} = (a+1)^{2n'} + (1-a)^{2n'}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{2n} a^{2k} \binom{2n}{2k} = \frac{1}{2}(a+1)^{2n} + \frac{1}{2}(a-1)^{2n}.$$