Partie 1 : Relations Binaires

- $a > b$: ordre strict sur les $\mathbb{N}$ / $a <= b$: ordre large sur $\mathbb{Z}$
- $a <= b$: égalité sur $\mathbb{N}$, ensemble
- $a \Leftrightarrow b$: équivalence logique sur $\mathbb{B}$
- $a \Rightarrow b$: implication sur $\mathbb{B}$
- $A \subset B$: inclusion des ensembles
- $a \mid b$: divisibilité sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- $a \equiv b [5]$: congruence modulo 5 (le modulo doit être fixé sinon relation ternaire). Congruence = le reste de la division euclidienne.

$a \equiv b [5]$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times 5 + b$

reste de la division

$$\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline r & q \end{array}$$

$a = q \times c + r$

$a = r [c]$

II. Définition d'une relation binaire

1) Déf ensembliste et déf fonctionnelle

Une relation binaire entre les éléments de A et les éléments de B est un sous ensemble de $A \times B$.

Une relation est un ensemble de couple.

$a < b$: ordre strict sur $\mathbb{N}$

$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \ldots$

$$R = \{ \begin{array}{lll} (0,1) & (0,2) & (0,3)\ldots \\ & (1,2) & (1,3)\ldots \\ & & (2,3)\ldots \\ & & \ldots \end{array} \}$$

Une relation binaire est une fonction booléenne à deux arguments.

$R : A \times B \to \mathbb{B}$ ($\mathbb{B}$ = ensemble des booléens)

$(a,b) \to R(a,b)$ = Vrai si a Relation b

Faux si a !Relation b

$a < b$ $\quad$ $R(0,1) = V$ $\quad$ $R(0,2) = V$

$R(0,3) = V$ $\quad$ $R(1,2) = V$ ...

$R(0,0) = F$, $R(1,0) = F$ ...

2) Notation

On a R b pour dire que a est en relation avec b par R.

Exemple : $a < b$, $a \equiv_{[5]} b$ (notation adaptée)

R est utilisé pour noter plusieurs façon d'écrire la relation.

R : la relation

R : l'ensemble des couples

R : la fonction booléenne $(R(a,b) = V)$

attention piège

apparté sur les fonctions

Une fonction peut être représentée par une relation binaire

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = 3x$

f est défini par la relation

$Rf = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$

$\{(0,0), (1,3), (1/3, 1) ...\}$

$Rf(0,0) = V$, $Rf(1,3) = V$

$Rf(\frac{1}{3}, 1) = V$

$Rf(1,1) = F$ ...

Rf est la booléenne qui définit la relation Rf, laquelle représente la fonction f.

Une fonction f associe à un élément une unique image

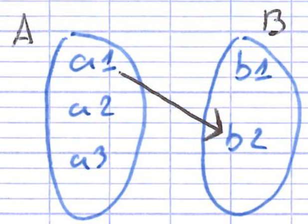
Une relation binaire R peut associer à un élément de départ plusieurs éléments d'arrivée apportée sur les opérateurs

$a+b \rightarrow$ fournie une valeur

$a+b=c$ peut être vu comme fonction à deux arguments ou une relation ternaire (opérateur bool : cas particulier)

3) Représentation d'une relation binaire

Diagramme



$a_1 \, R \, b_2$

Matrice

$M(R) \in M_{m,n}(\mathbb{B})$

$M(R)$ matrice booléenne avec m taille de A et n taille de B.

$$\begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & V & F & F & V \\ a_2 & V & V & F & V \\ a_3 & V & V & F & F \end{array}$$

$a_1 \, R \, b_1$

$a_1 \, \not R \, b_2$

Exemple : la relation d'appartenance sur $\{1,2,3\}$

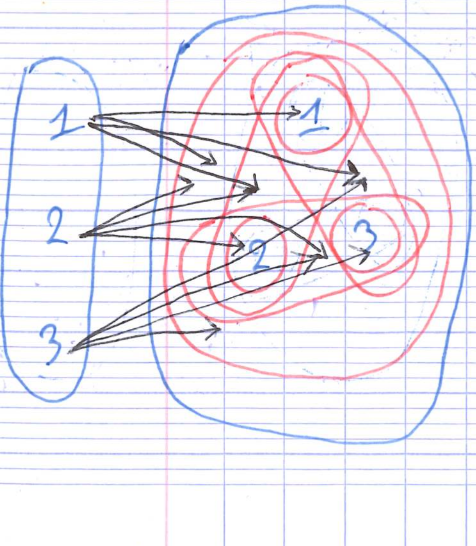
$\in$ sur $A \times B$

$A = \{1,2,3\}$

$B = P(\{1,2,3\})$

$= \{\emptyset ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{1,2\} ; \{1,3\} ; \{2,3\} ; \{1,2,3\}\}$

$1 \in \{1\}$, $2 \in \{2,3\}$, $1 \notin \{2,3\}$



$$\begin{array}{c|cccccccc} & \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1,2,3\} \\ \hline 1 & F & V & F & F & V & V & F & V \\ 2 & F & F & V & F & V & F & V & V \\ 3 & F & F & F & V & F & V & V & V \end{array}$$

remarque : . A et B doivent être fini pour faire la représentation en matrice / diagramme.

. il faut avoir défini l'ordre A et B

III Opérations sur les relations

1) Composition

Ex : relation successeur S sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

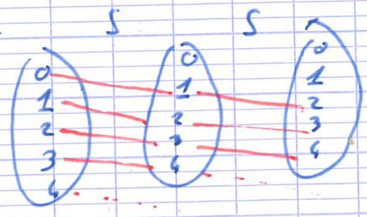
$0 \, S \, 1$ $\qquad$ $1 \not S \, 0$

$1 \, S \, 2$ $\qquad$ $1 \not S \, 3$

$2 \, S \, 3$

$\vdots$

composition de S par elle même



$0 S 1 S 2 \rightarrow 0 \; S \circ S \; 2$

$1 S 2 S 3 \rightarrow 1 \; S \circ S \; 3$

$2 S 3 S 4 \rightarrow 2 \; S \circ S \; 4$

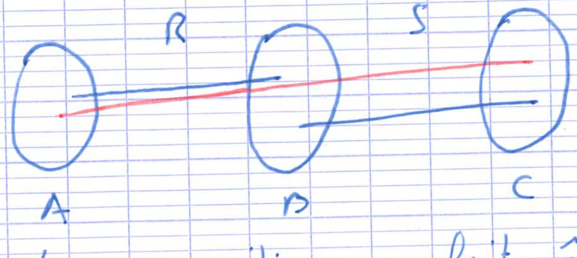
($S \circ S$ c'est "est-ce que le deuxième élément est égal au premier + 2")

Définition : On considère R sur $A \times B$

S sur $B \times C$

$S \circ R = \{ (a,c) \in A \times C \mid \exists \, b \in B, \; a R b \wedge b S c \}$

$S \circ R$: ens de couple $a\,c$ tq il y a un élément intermédiaire b avec $a R b$ et $b S c$



Rmq : La composition se fait ĉ pour les fonctions.

$f : E \rightarrow F$

$g : F \rightarrow G$

$g(f(x)) = g \circ f(x)$

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

$R : A \times B$

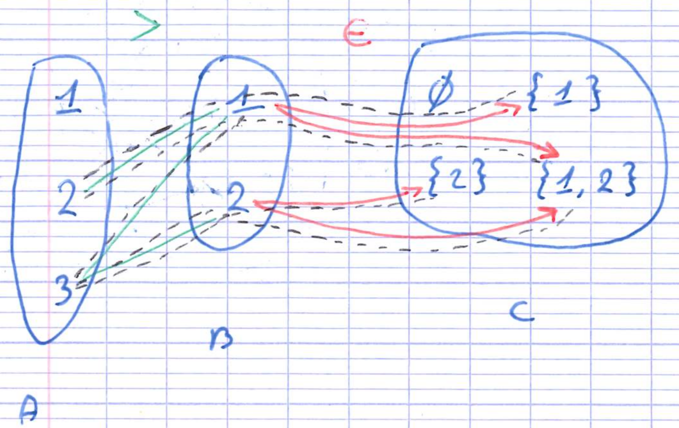
$S : B \times C$

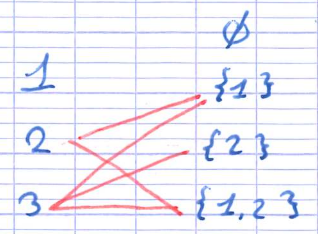
$S \circ R$

$A \xrightarrow[R]{} B \xrightarrow[S]{} C$

Ex : appartient sur $\{1,2\} \times \mathcal{P}(\{1,2\})$ ② $\in$

ordre strict sur $\{1,2,3\} \times \{1,2\}$ ① $>$





$\in \circ >$

composition $\in \circ >$

$M(>)$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & F & F \\ 2 & V & F \\ 3 & V & V \end{array}$$

$M(\in)$

$$\begin{array}{c|cccc} & \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{1,2\} \\ \hline 1 & F & V & F & V \\ 2 & F & F & V & V \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{1,2\} \\ \hline 1 & F & F & F & F \\ 2 & F & V & F & V \\ 3 & F & V & V & V \end{array}$$

$M(\in \circ >)$

$V \wedge V$ ou $F \wedge F$

1) Composition (produit de matrice)

Etant donné deux matrices booléennes : $M_1 \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{B})$

$M_2 \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{B})$

Le produit $M_1 \times M_2 = Q \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ avec

$$q_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} m^1_{ik} \wedge m^2_{kj}$$

$$2 \; 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 3$$

2

$$M_2 \begin{pmatrix} m^2_{11} & m^2_{12} & m^2_{1j} \\ m^2_{21} & m^2_{22} & m^2_{2j} \\ m^2_{31} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$M_1 \begin{pmatrix} m^1_{11} & m^1_{12} & \dots \\ m^1_{21} & m^1_{22} & \dots \\ m^1_{31} & \dots & \dots \\ m^1_{i1} & m^1_{i2} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & & \vdots \\ & & \vdots \\ \dots & \dots & q_{ij} \end{pmatrix} Q$$

$$q_{ij} = (m^1_{i1} \underbrace{\wedge}_{\text{∧ à la place des multiplication}} m^2_{1j}) \underbrace{\vee}_{\text{∨ à la place des +}} (m^1_{i2} \wedge m^2_{2j}) \vee \dots$$

C'est un produit vectoriel on a remplacé [∧ à la place des multiplication

$$\begin{array}{c} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} a \quad 3 \\ \begin{pmatrix} V & F & F \\ V & F & V \\ F & V & F \\ F & V & V \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \begin{pmatrix} V & F \\ F & F \\ V & V \end{pmatrix} 2 \\ \begin{pmatrix} {}^a V & F^b \\ {}^c V & V^d \\ {}^e F & F^f \\ {}^g V & V^h \end{pmatrix} 4 \end{array}$$

a et $\wedge$ VFF / VFV → VFF | V vrai (VV ou)

b $\wedge$ VFF / FFV → FFF | F (VV)

g $\wedge$ FVV / VFV → FFV | V (VV)

h $\wedge$ FVV / FFV → FFV | V (VV)

e $\wedge$ FVF / VFV → FFF (VV)

f $\wedge$ FVF / FFV → FFF (VV)

c VFV / VFV → VFV | V ; VFV / FFV → FFV | V

Remarque : La composition de relation s'écrit ≈ celle des fonction.

$f \circ g(x) = f(g(x))$ $\qquad a\, R \circ S\, c$

$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ $\qquad A \xrightarrow{S} B \xrightarrow{R} C$

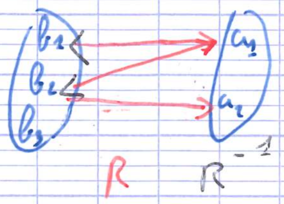
2) Inverse

L'inverse R^{-1} d'une relation R est la relation défini par : $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$

Ex : $R^{-1} \subseteq A \times B$ $\qquad R \subseteq B \times A$

Voyons ce que ça donne sur une matrice

$$R = \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & V & F \\ b_2 & V & V \\ b_3 & F & F \end{array} \qquad R^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & V & V & F \\ a_2 & F & V & F \end{array}$$



⚠ L'inverse d'une relation se calcule par la transposé de sa matrice mais pas par l'inverse de sa matrice.

Transposé — inverse d'une relation

$$M(R^{-1}) = {}^{t}M(R)$$

R : relation $M(R)$: mat $\neq M(R)^{-1}$

inverse d'une matrice

3) Union & intersection

L'union est l'intersection des relations est défini ĉ l'union et l'intersection des ensembles

$R \cup S : \{(a,b) \in R\} \cup \{(a,b) \in S\}$

$R \cap S : \{(a,b) \in R\} \cap \{(a,b) \in S\}$

R et S sont défini sur les m̂ ensembles.

$S \subseteq A \times B$ et $R \subseteq A \times B$

Ex : $R = \{(a_1,b_1), (a_2,b_1), (a_2,b_2)\}$

$S = \{(a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_1), (a_3,b_2)\}$

matrice de R, S, R∪S et diagramme : R∩S

$$R \; \begin{array}{c|cc} & b_1 & b_2 \\ \hline a_1 & V & F \\ a_2 & V & V \end{array} \qquad S \; \begin{array}{c|cc} & b_1 & b_2 \\ \hline a_1 & V & F \\ a_2 & F & V \\ a_3 & V & V \end{array}$$

$R \cup S = \{(a_1,b_1), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_1), (a_3,b_2)\}$

$R \cap S : \{(a_1,b_1), (a_2,b_2)\}$

Rappel : union / intersection

→ ensemble liste : m̂ chose que cl (Rab)

R et S des relations

$R \cup S = \{(a,b) \mid (a,b)$ dans R ou (a,b) dans $S\}$

$R \cap S = \{(a,b) \mid (a,b)$ dans R et (a,b) dans $S\}$

→ matrice

pour une "case" i,j on regarde i,j pour les relations R et S. - union → si l'une des cases vaut 1, i,j pour l'union vaut 1 sinon 0.

- intersection → si l'une des cases vaut 0, i,j pour l'union vaut 0 sinon 1

$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \cup S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R \cap S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Inverse :

. ensemble liste : on inverse les couples dans l'ensemble

$R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a)$ dans $R\}$

$R = \{(a,a),(a,c),(b,c)\}$ $\qquad R^{-1} = \{(a,a),(c,a),(c,b)\}$

$R \subseteq A \times B$ $\qquad R^{-1} \subseteq B \times A$

. matrice :

- relation R représentée par une matrice $(r_{i,j})$ de dimension $m * n$.

- relation R^{-1} est représentée par $(r'_{i,j})$ de dimension $n * m$ avec $\forall\, i,j,\ r'_{i,j} = r_{i,j}$

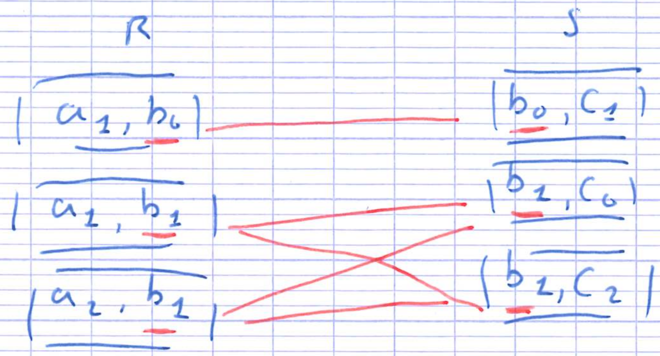
$$\begin{array}{cc} & 3 \\ 2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

M $\qquad\qquad$ transposé M

Composition

- ensembliste : si on a R de A vers B et S de B vers C.

$S \circ R = \{(a,c) \mid \exists\, b$ dans B avec (a,b) dans R et (b,c) dans $S\}$.



- matrice : produit booléen de matrice

$c_{ij} = \bigcup \{k$ 1 à $l\}$ de r_{ik} et s_{kj}

$$\begin{array}{cc} & 3 \\ 2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & 3 \\ 3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ex 2.1 :

3) montrer l'associativité

Soit R, S, T des relations respectivement incluses dans $A \times B$, $B \times C$, $C \times D$

On veut montrer que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

a) montrons $(T \circ S) \circ R \subset T \circ (S \circ R)$

Soit (a,d) un élément de $(T \circ S) \circ R$.

Par définition, il existe b tel que (a,b) dans R et (b,d) dans $T \circ S$. Comme (b,d) dans $T \circ S$, $\exists$ c tel que (b,c) dans S et (c,d) dans T.

Comme (a,b) dans R et (b,c) dans S, on a (a,c)

dans $S \circ R$.

Comme (a,c) dans $S \circ R$ et (c,d) dans T, on a

(a,d) dans $T \circ (S \circ R)$

Donc tout élément de $(T \circ S) \circ R$ est dans $T \circ (S \circ R)$,

l'inclusion est démontrée.

b) Montrons $T \circ (S \circ R)$ inclus dans $(T \circ S) \circ R$

(a,d) dans $T \circ (S \circ R) \Rightarrow \exists\, c$ tel que (c,d) dans T

et (a,c) dans $(S \circ R)$

$\Rightarrow \exists\, b, c$ tels que (c,d) dans T,

(b,c) dans S et (a,b) dans R

$\Rightarrow \exists\, b$ avec (a,b) dans R et

(b,d) dans $(T \circ S)$

$\Rightarrow (a,d)$ dans $(T \circ S) \circ R$

L'inclusion est démontrée.

III _ Propriétés sur les relations → sur des relations internes

c.a.d déf sur $E \times E$

$\leq$ interne ~~e externe~~

1) Réflexivité

Exemple : ctr exemple (pas réflexive)

$=$ $3=3$ $\neq$

$\leq$ $4 \leq 4$ $<$

$\equiv[3]$ $\subset$

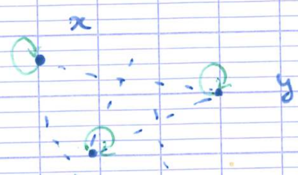
$//$ sur les droites du plan $d1 // d1$

Définition : Une relation R sur $E \times E$ est réflexive ssi pour $\forall\, x \in E$ $x R x$ $\forall\, x\ (x,x) \in R$

matrice

$$\begin{pmatrix} \times & & ? & \\ & \times & & \\ ? & & \times & \\ & & & \times \end{pmatrix}$$

graphe



Rmq : $\Leftrightarrow$ réflexive sur les booléens ($\mathbb{B}$) $0 \Leftrightarrow 0$

$\Leftrightarrow$ " " les formules logique x ou y

2) Symétrie

Exemple :

ctr exemple

$=$ $\leqslant$

$\equiv_{[3]}$ $3 \equiv_{[3]} 6$, $6 \equiv_{[3]} 3$ $<$

$//$ $\subseteq$

$\neq$ $2 \neq 3$, $3 \neq 2$

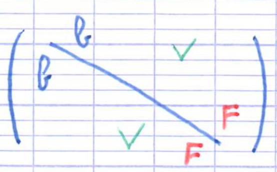
$\Leftrightarrow$

$\perp$ → sur les droite du plan

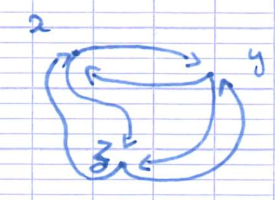
Définition : Une relation R sur E x E est symétrique ssi x R y implique y R x

$\forall x, y \in E \quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

matrice



graph



3) Transitivité

ctr exemple

$\equiv_{[3]}$ $3 \equiv 6$, $6 \equiv 9$, $3 \equiv 9$ $\perp$ $d_1 \perp d_2$, $d_2 \perp d_3$, ~~$d_1 \perp d_3$~~

$=$ $\neq$

$<$ $3 \leq 5 \leq 7$, $3 \leq 7$ $3 \neq 6$, $6 \neq 3$, ~~$3 \neq 3$~~

$\leq$

$\subseteq$ $d_1 // d_2$, $d_2 // d_3$, $d_1 // d_3$

$//$

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$

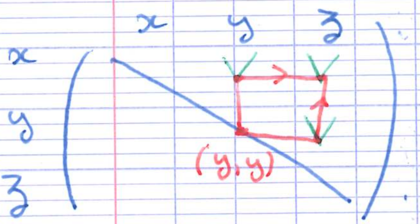
La composition de R par elle même ne rajoute aucun éléments

$(a, b) \in R \circ R \Rightarrow \exists\, c$ tel que $(a, c) \in R$ et $(c, b) \in R$

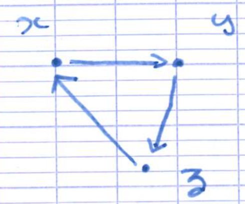
matrice $\rightarrow$ le produit de la matrice par elle même ne crée aucun nouveau 1

Définition : Une relation R sur $E \times E$ est transitive ssi $\forall x, y, z \in E \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

matrice



graphe

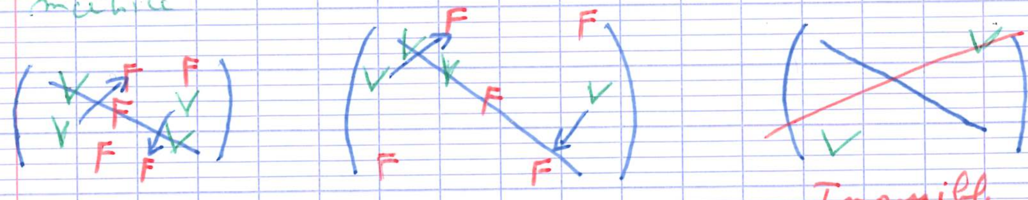


4) Antisymétrique

exple	cte
$=$	$\equiv [3]$
$<$	$//$
$\leq$	$\perp$
$\subset$	$\neq$

Définition : Une relation $R \in E \times E$ est antisymétrique ssi $\forall x, y \in E \quad (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$

matrice



Impossible

graphe

inclusion sur $P(\{a,b\})$

$$\begin{array}{c|cccc} & \{\} & \{a\} & \{b\} & \{a,b\} \\ \hline \{\} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \{a\} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \{b\} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \{a,b\} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ne pose pas de problème si c'est zéro

Symétrique et antisymétrique si hors de la diago tout vaut zéro

IV - ORDRES & ÉQUIVALENCES

1) Relation d'ordre

Exemple : <

	réfl	sym	antisym	trans
$<$	F	F	V	V
$>$	F	F	V	V
$\leq$	V	F	V	V
$\geq$	V	F	V	V
$\subset$	F	F	V	V
$\subseteq$	V	F	V	V
$\Rightarrow$	V	F	F sur les formules V sur les booléens	V

On parlera ici que d'ordre large ($\leq, \geq, \subseteq$)

Définition : Une relation R est un ordre ssi R est Reflexive, antisymétrique et transitive.

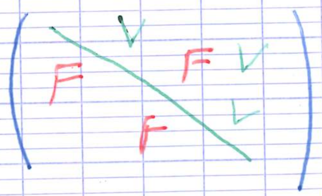
Exemple

Un ordre est totale ssi $\forall x, y$ on a $x R y \vee y R x$

$\forall$ $a, b \in \mathbb{Z}$
$a \leq b$ ou $b \leq a$

Total

$\exists$ $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$
$E \subseteq F$ et $F \subseteq E$
$E = \{1\}$ et $F\{2\}$



pas total

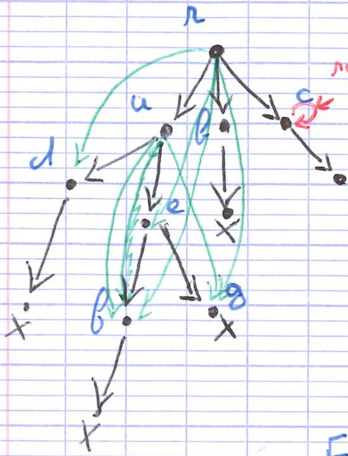
2) Relation d'équivalence

Définition : Une relation R est une relation équivalente ssi R est Reflexive, symétrique et transitive

V. Clôture d'une relation

1) Clôture réflexive

Commençons par un exemple:



défini par la relation "fils" F

f F e   a F r .... ~~d F a~~

F est ici antisymétrique
Elle serait symétrique si les flèches allaient dans les deux sens.

$F \circ F$ défini la relation "petit fils".

La relation "descendant" D est la clôture transitive de F.

Ici on a a F r   d F a   mais pas d F r donc elle n'est pas transitive.

On rajoute la relation D   a D r   d D r   alors a D r

La clôture reflexive de D est ordre

La relation 'm̂ lignée' L est la clôture sym de D.

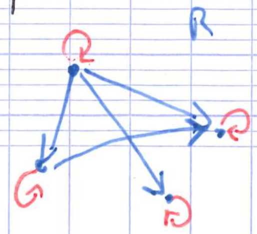
Déf: La clôture reflexive R^r d'une relation R est la plus petite relation reflexive contenant R.

R^r
- R^r contient R
- R^r reflexive
- pour toutes relations S $\begin{cases} \text{contenant } R \\ \text{reflexive} \end{cases}$ $R^r \subseteq S$

$R^r = R \cup I$

I matrice identitaire

Représentation graphique

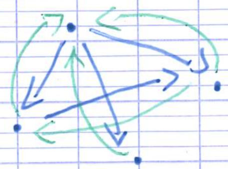


matrice $\begin{pmatrix} \checkmark & & & \\ & \checkmark & & \\ & & \checkmark & \\ & & & \checkmark \end{pmatrix}$

2) Clôture symétrique

déf : La clôture sym R^s d'une relation R est la plus petite relation symétrique contenant R.

$$\left(\forall S, \begin{array}{l} S \text{ contenant } R \\ S \text{ symétrique} \end{array}, R^s \subseteq S \right)$$



$$\begin{pmatrix} F & V & V & V \\ \cancel{F}V & F & \cancel{F}V & F \\ \cancel{F}V & V & F & V \\ \cancel{F}V & F & \cancel{F}V & F \end{pmatrix}$$

$$R^s = R \cup R^{-1}$$

3) Clôture transitive

déf : La clôture transitive R^+ d'une relation R est la plus petite relation transitive contenant R.

$$\left(\forall S, \begin{array}{l} S \text{ contenant } R \\ S \text{ transitive} \end{array}, R^+ \subseteq S \right)$$

$$R^+ = \bigcup_i R^i$$

$$R^1 = R \qquad R^i = R^{i-1} \circ R$$

$$= \underbrace{R \circ R \circ \dots R}_{i}$$

4) Équivalence engendrée

L'équivalence engendrée par R $\quad ((R^r)^s)^+$

⚠ Les clôtures doivent être calculées dans l'ordre

La transitive doit être la dernière

Clôture réflexive :

→ Sur une matrice : remplir la diagonale de 1

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^r = R \cup I$ (matrice identitaire $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Clôture symétrique

→ rajouter des 1 pour rendre la matrice symétrique

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R^s = R \cup R^{-1}$

Clôture transitive

transitif : pour a, b, c si $(a,b) \in R$ et $(b,c) \in R$ alors $(a,c) \in R$

$R = \{(a,b), (b,c), (c,d)\}$

$R' = \{(a,b), (b,c), (c,d), (a,c), (b,d)\}$

$R'' = \{(a,b), (b,c), (c,d), (a,c), (b,d), (a,d)\}$

$$R \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \quad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{R'}$ $\boxed{R}$ $\boxed{R''}$

$R^+ = \bigcup_i R^i$