Fonctions et dénombrement

Ce chapitre est consacré aux notions de *fonction* et d'*application*, et à leur application dans des problèmes de dénombrement.

Cours

3.1. Fonctions, suites. — Intuitivement, une fonction f est un objet mathématique qui associe à tout élément x d'un ensemble E un élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F. On peut avoir comme image mentale la fonction "capitale", qui associe à chaque pays sa capitale : E pourrait désigner l'ensemble des pays, et F l'ensemble des villes. Pour bien définir la fonction, il faut bien préciser l'ensemble E, l'ensemble F et la "règle de correspondance" qui permet d'obtenir x à partir de $f(x)$. Il se trouve qu'on peut formuler cette règle en termes ensemblistes, et on peut définir une fonction de manière ensembliste de la façon suivante.

Définition 3.1

Soient E et F des ensembles. Une *fonction f de E dans F*, aussi appelée *application de E dans F* est définie par son *graphe* : c'est un sous-ensemble Γ_f de $E \times F$, tel que pour tout $x \in E$, exactement un élément y de F vérifie $(x, y) \in \Gamma_f$. Cet élément y est l'*image* de x et est noté $f(x)$. La notation standard est la suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble E est appelé *l'ensemble de départ de la fonction f* et F *est l'ensemble d'arrivée.*

Remarque 3.2. — Parfois, on distingue les notions de fonction et d'application. Une application de E dans F correspond alors à la définition ci-dessus, mais une fonction n'est pas nécessairement définie partout : une fonction associe à un élément de l'ensemble de départ au plus une valeur de l'ensemble d'arrivée. L'ensemble de définition d'une telle fonction $f : E \to F$ est un sous-ensemble de E. Cette distinction est parfois pratique, mais dans ce cours nous garderons la notion définie ci-dessus : les fonctions et les applications sont la même chose, et l'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours définie.

Exemple 3.3. — Si $E = \mathbf{R}^*$ et $F = \mathbf{R}$, l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \mid xy = 1\}$ définit la fonction

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

Par contre, l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas le graphe d'une fonction, en effet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ appartiennent tous deux à Γ, ce qui contredit la définition précédente.

Remarque 3.4. — Les définitions redonnent que le graphe Γ_f est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathscr{D}_f$. On retrouve donc la description du graphe que vous avez déjà rencontré dans le secondaire :

$$\Gamma_f = \{\, (x, f(x)),\ x \in \mathscr{D}_f \,\}.$$

Mais il faut saisir que, du point de vue de la théorie des ensembles, c'est le graphe qui définit la fonction.

Remarque 3.5. — Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée et le même graphe.

Représentation 3.6. — Pour des ensembles finis, il est parfois commode de représenter le graphe d'une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F par des flèches entre deux patatoïdes : pour chaque élément a de E, on trace un point dans le patatoïde correspondant à E et pour chaque élément b de F, on trace un point dans le patatoïde de F, en donnant un nom à chacun de ces points ; ensuite pour chaque couple (a, b) on trace une flèche allant du point correspondant à a vers le point correspondant à b.

À titre d'exemple, soient $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$. Considérons l'application de E dans F qui à un nombre associe le reste de sa division euclidienne par 2 : 0 s'il est pair, 1 s'il est impair. Le graphe de cette application est :

$$\Gamma = \{\, (0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1) \,\},$$

sa représentation graphique est donnée sur la figure 7.

Pour des fonctions d'une partie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, on représente le graphe comme dans le secondaire en dessinant pour chaque élément (x, y) du graphe le point de coordonnées

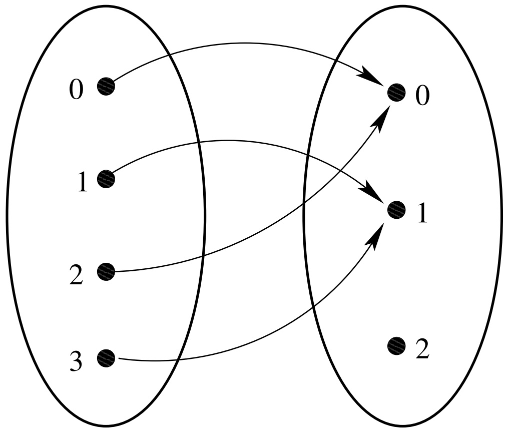

FIGURE 7. Représentation graphique d'une application de $\{0, 1, 2, 3\}$ vers $\{0, 1, 2\}$.

(x, y). Ainsi, dans la figure 8, nous avons représenté une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On constate que pour tout x fixé de l'ensemble de définition (représenté en vert sur l'axe des abscisses), la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée est x croise le graphe, tracé en rouge, en un unique point de coordonnées $(x, f(x))$ la valeur de $f(x)$, qui est la deuxième coordonnée de ce point est donc bien déterminée par x.

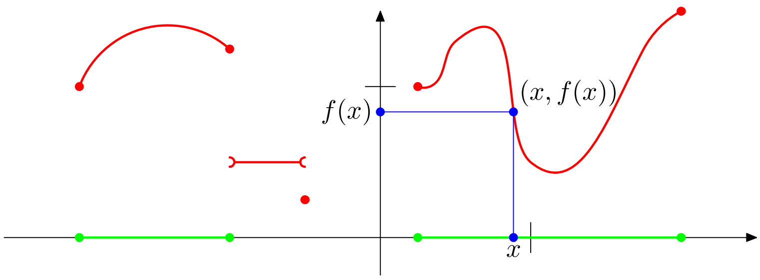

FIGURE 8. Représentation graphique d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

Par contre, pour la partie Γ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ représentée en rouge dans le dessin de la figure 9, on peut trouver un nombre réel x, tel que la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée vaut x croise l'ensemble Γ en trois points distincts (x, y_1), (x, y_2) et (x, y_3). Donc l'ensemble Γ n'est pas le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; pour le nombre réel x, on ne peut pas définir de manière univoque le nombre réel $f(x)$.

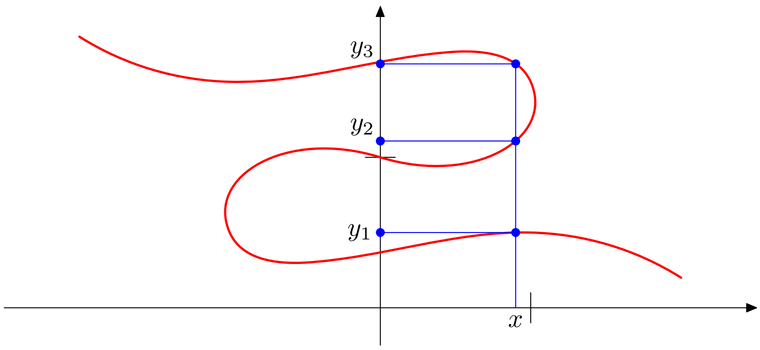

FIGURE 9. Ensemble qui n'est pas le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

Définition 3.7

Une *suite* d'éléments de E est une fonction de $\mathbf{N}$ dans E. De préférence à la notation fonctionnelle, on emploie pour les suites une notation *indicielle*, et on parlera de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où u_n désigne l'image de n par la fonction u.

Remarque 3.8. — Par abus de langage, si $n_0 \in \mathbf{N}$, on appelera également suite d'éléments de E une application de $\{ n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant n_0 \}$ dans E, on note alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemples 3.9. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Ainsi $u_0 = 1, u_1 = -1, \cdots$.

On peut aussi définir une suite par récurrence. Par exemple soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Ainsi, $u_1 = 4, u_2 = 16, \ldots$

Définition 3.10

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Soit A un sous-ensemble de E. On appelle *image de A par f* et on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A.

$$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A\,,\ f(x) = y \} \ = \{ f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

2. Soit B un sous-ensemble de F. On appelle *image réciproque (ou préimage) de B par f* et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B.

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\} \,.$$

Attention à la notation f^{-1} : elle ne signifie pas que f est inversée. C'est une convention pour désigner un sous-ensemble de l'espace de départ.

Exemple 3.11. — Dans l'application de la figure 7, L'image de $\{0, 2\}$ est le singleton $\{0\}$. L'image réciproque de $\{1\}$ est $\{1, 3\}$. L'image réciproque de $\{2\}$ est l'ensemble vide.

Terminologie 3.12

Un élément x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle un *antécédent* de y. D'après la définition 3.10, l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

Remarque 3.13. — On pourra noter que pour une partie B de l'ensemble d'arrivée F, la partie $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B.

Dessin 3.14. — Sur la figure 10, on considère l'image par une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'un segment représenté en orange sur la figure. Pour chaque x de ce segment, on peut construire comme précédemment son image $f(x)$; l'ensemble $f(A)$ est formé de tous les $f(x)$ où x parcourt le segment. Il est représenté en vert. Autrement dit, on regarde la partie du graphe dessinée en bleue, qui est obtenue en intersectant la bande verticale orange correspondant aux points du plan dont la première coordonnée est dans A avec le graphe de la fonction. On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des ordonnées, ce qui donne, dans cet exemple, un intervalle correspondant à $f(A)$.

Pour la même application f, étant donné un intervalle B de $\mathbf{R}$, on considère sur la figure 11 l'intersection du graphe avec la bande horizontale orange correspondant aux points dont la seconde coordonnée est dans B. On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des abscisses ce qui donne alors la partie correspondant à $f^{-1}(B)$ qui est ici la réunion de deux intervalles.

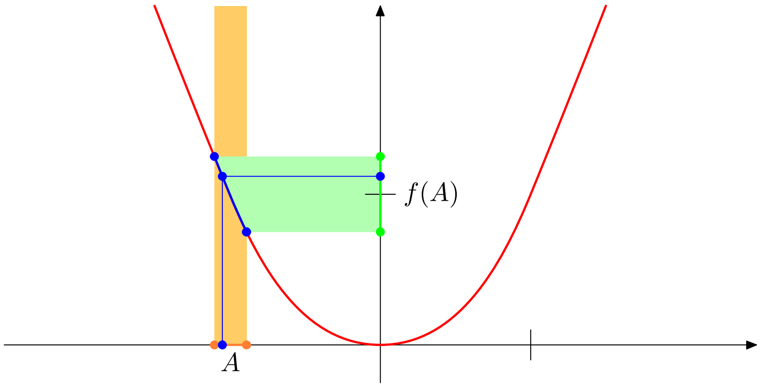

FIGURE 10. Image d'une partie A.

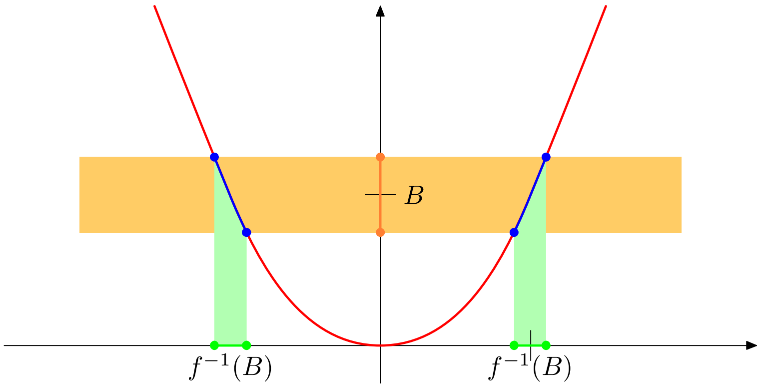

FIGURE 11. Image réciproque d'une partie B.

Définition 3.15

Soient E, F, et G des ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On définit la *composée* de f par g , notée $g \circ f$, comme l'application de E vers G qui à x associe $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Attention à l'ordre des applications dans l'écriture $g \circ f$: c'est l'ordre inverse des flèches dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) \ . \end{array}$$

Définition 3.16

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F. On dit que f est :

1. *injective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au plus* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall x_1, x_2 \in E\ , \quad \Big(f(x_1) = f(x_2)\Big) \implies x_1 = x_2\ .$$
2. *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au moins* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall y \in F\ ,\ \exists x \in E\ ,\ f(x) = y\ .$$
3. *bijective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *exactement* un antécédent dans l'ensemble de départ.

Une application est donc bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective (voir figure 12). On dit également *injection* à la place d'application injective, *surjection* à la place d'application surjective et *bijection* à la place d'application bijective.

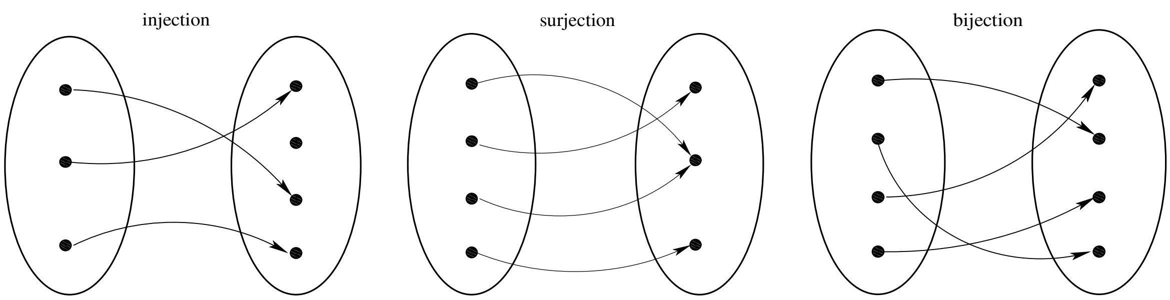

FIGURE 12. Représentations graphiques d'une injection, d'une surjection et d'une bijection.

Définition 3.17

Si une application f de E vers F est bijective, tout élément de F a un antécédent et un seul par f. On peut alors définir *l'application réciproque* de f, notée f^{-1}, par

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y \ .$$

Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f$, la composée de f par son application réciproque f^{-1}, est l'application qui à x associe x, de E vers E. On l'appelle *application identique de* E, ou *identité de* E.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & f^{-1} & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x \ . \end{array}$$

Les notations pour l'application réciproque et pour l'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée F sont liées par la relation :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\} \ .$$

On prendra garde au fait que si l'image réciproque d'une partie est définie pour toute application, l'application réciproque, quant à elle, n'est définie que pour une application bijective.

La notion de bijection est importante pour montrer que deux ensembles ont le même cardinal.

Définition 3.18

Un ensemble E est dit *fini* s'il existe un entier naturel n et une bijection de E dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Cet entier n est alors unique et est appelé le *cardinal de* E. On le note $|E|$, ou $\sharp E$, ou bien encore $\mathrm{card}(E)$.

Remarque 3.19. — Cette définition contient en fait un résultat très intuitif : le fait que $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$ sont en bijection si et seulement si $n = m$.

Remarquons aussi que l'ensemble vide est fini ; c'est l'unique ensemble de cardinal 0. Par ailleurs, un ensemble E est de cardinal 1 si et seulement c'est un singleton, c'est-à-dire qu'il a un unique élément. Si on note a cet élément, on obtient l'égalité $E = \{a\}$.

On admettra les résultats intuitifs suivants :

Théorème 3.20 (admis)

1. **Principe d'addition :** Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis disjoints est la somme des cardinaux.
2. **Principe de multiplication :** Le cardinal du produit de deux ensembles finis est le produit des cardinaux.

En fait, le principe d'addition peut être affiné.

Théorème 3.21 (admis)

Principe d'inclusion-exclusion : Soient A et B deux ensembles finis, alors on a
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

On admet ce théorème mais le résultat est intuitif : pour compter le nombre d'éléments dans $A \cup B$, on compte les éléments de A, puis on compte les éléments de B, et enfin on retire une fois ceux que l'on a compté deux fois.

3.2. Sommes et produits. — Commençons par les sommes.

L'écriture
$$\sum_{k=0}^{5} 2^k$$
se lit « *somme pour k allant de zéro à cinq de deux puissance k* ». C'est une notation abrégée pour :
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$
La lettre k est l'*indice de sommation*. On la remplace successivement par toutes les valeurs entières comprises entre les deux *bornes*, qui sont 0 et 5 dans notre exemple. Donnons une définition plus précise de ces notations :

Définition 3.22

Soient $p, q \in \mathbf{Z}$ des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Soit $(u_p, \ldots, u_q)$ une famille de $q - p + 1$ nombres réels (ou complexes) On définit

$$\sum_{k=p}^{q} u_k := u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$$

Le terme de gauche se lit « somme pour k allant de p à q des u_k ». De même

$$\prod_{k=p}^{q} u_k := u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q$$

et se lit « produit pour k allant de p à q des u_k »

Remarque 3.23. — Les bornes peuvent elles-mêmes être des variables. Par exemple, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

désigne la somme

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n \,.$$

Rappelons que, par convention, $a^0 = 1$ pour tout nombre réel a. En revanche, les bornes ne peuvent dépendre de l'indice de sommation, ainsi

$$\sum_{k=0}^{k} 2^k$$

n'a pas de sens, car on ne sait où arrêter la somme. Prenez l'habitude d'écrire les sommes sous forme développée quitte à introduire des points de suspension entre les premiers termes et les derniers.

On introduit la notation suivante qui est plus générale. Le recours aux ensembles rend parfois les manipulations plus explicites.

Définition 3.24

Soit E un ensemble fini et $f : E \to \mathbf{C}$ (ou $\mathbf{R}$, ou $\mathbf{Z}$) une fonction. Alors l'expression
$$\sum_{x\in E} f(x)$$
désigne la somme de toutes les valeurs $f(x)$ où x parcourt l'ensemble E.

Exemple 3.25. — L'expression $\sum_{k\in[\![1,5]\!]} 2^k$ désigne la même chose que $\sum_{k=1}^{5} 2^k$, c'est-à-dire la somme $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.

L'expression $\sum_{k\in[\![1,5]\!]} 2^n$ désigne la somme de 5 copies de l'expression 2^n, d'où $\sum_{k\in[\![1,5]\!]} 2^n = 5 \cdot 2^n$. Dans l'expression précédente, la variable n est donc libre puisqu'elle n'a pas été introduite, tandis que la variable k est muette : l'écriture $\sum_{k\in[\![1,5]\!]}$ l'introduit.

On définit de la même façon l'écriture $\prod_{x\in E} f(x)$.

Cette écriture en termes d'ensemble peut simplifier les manipulations, grâce aux remarques ci-dessous :

Proposition 3.26

— (Principe d'addition) Étant donné un ensemble E tel que $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, et une fonction $f : E \to \mathbf{C}$, on a
$$\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{x\in A} f(x) + \sum_{x\in B} f(x).$$

— (Principe de changement de variable) Étant donné deux ensembles E, F, une fonction $g : F \to E$ qui est une bijection, et une fonction $f : E \to \mathbf{C}$, on a
$$\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{y\in F} f(g(x)).$$

Exemple 3.27. — Voici quelques exemples d'égalités illustrant la manipulation des indices et des bornes. Nous donnons sous chaque exemple une écriture sous forme développée.

Dans ce premier exemple, on utilise la bijection $[\![1,n]\!] \to [\![0,n-1]\!]$ qui retranche 1 à chaque entier.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} 2^k &= \sum_{h\in[\![0,n-1]\!]} 2^{h+1} = \sum_{h=0}^{n-1} 2^{h+1} \\ 2^1 + \cdots + 2^n &= 2^{0+1} + \cdots + 2^{n-1+1} \,. \end{aligned}$$

L'indice de sommation peut être remplacé par n'importe quel autre : comme on l'a déjà dit, c'est une variable muette. Dans ce second exemple, on change une fois d'indice de sommation, on utilise la bijection $[\![1,n]\!] \to [\![n+1,2n]\!]$ qui ajoute n à chaque entier, et on regroupe deux ensembles de sommation via $[\![0,n]\!] \cup [\![n+1,2n]\!] = [\![0,2n]\!]$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} &= \sum_{k\in[\![0,n]\!]} 2^k + \sum_{h\in[\![1,n]\!]} 2^{n+h} \\ &= \sum_{k\in[\![0,n]\!]} 2^k + \sum_{k\in[\![n+1,2n]\!]} 2^k = \sum_{k\in[\![0,2n]\!]} 2^k = \sum_{k=0}^{2n} 2^k \\ (2^0 + \cdots + 2^n) + (2^{n+1} + \cdots + 2^{2n}) &= 2^0 + \cdots + 2^{2n} \,. \end{aligned}$$

Observez que la borne peut être une des variables de la quantité à sommer, comme dans l'exemple

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^n = \sum_{k\in[\![0,n]\!]} 2^n &= (n+1)2^n \\ 2^n + \cdots + 2^n &= (n+1)2^n \,. \end{aligned}$$

Dans cet exemple la quantité à sommer ne dépend pas de l'indice de sommation : celle-ci a pour seul effet de compter les termes. Attention, pour $m \leqslant n$, il y a $n-m+1$ termes dans la somme de m à n.

Dans ce dernier exemple, une double somme est une somme de sommes, et on peut intervertir les deux tant que les bornes de la seconde somme ne dépendent pas de l'indice de sommation de la première somme.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{1} 2^{k+h} = \sum_{(k,h)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,1]\!]} 2^{k+h} = \sum_{(h,k)\in[\![0,1]\!]\times[\![0,n]\!]} 2^{k+h} = \sum_{h=0}^{1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+h}$$

$$(2^0+2^1)+\cdots+(2^n+2^{n+1}) = (2^0+\cdots+2^n)+(2^1+\cdots+2^{n+1}) \; .$$

Exemple 3.28. — Voici un enchaînement d'égalités, montrant que la somme des puissances de 2 de 2^0 jusqu'à 2^n vaut $(2^{n+1}-1)$ (c'est un cas particulier d'une formule à connaître que nous verrons plus loin). Pour chaque ligne de calcul, nous donnons à droite l'écriture sous forme développée. On rappelle que $2^0 = 1$.

$$\begin{array}{rcl|rl}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k & = & 2\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) & = & 2(2^0+\cdots+2^n)-(2^0+\cdots+2^n) \\
 & = & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) & = & (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
 & = & \left(\displaystyle\sum_{h=1}^{n+1} 2^h\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) & = & (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
 & = & \left(\displaystyle\sum_{h\in[\![1,n+1]\!]} 2^h\right) - \left(\displaystyle\sum_{k\in[\![0,n]\!]} 2^k\right) & = & (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
 & = & 2^{n+1}-2^0 & = & 2^{n+1}-1 \; .
\end{array}$$

Ce que nous venons de voir pour les sommes s'applique aussi aux produits. Le produit des entiers de 1 à n intervient dans de nombreuses formules.

Définition 3.29

La *factorielle* de n, notée « $n!$ », est définie comme le produit

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\ 2\ 3\cdots\ (n-2)\ (n-1)\ n \; .$$

Il est souvent utile d'étendre la définition de la factorielle en convenant que $0! = 1$.

Voici les premières valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

3.3. Dénombrement. —

Définition 3.30

Soit X un ensemble. On appelle permutation de X une application bijective de X dans X. Soit n un entier positif ou nul, On appelle *permutation des nombres de 1 à n* une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. L'ensemble des permutations des nombres de 1 à n est noté $\mathfrak{S}_n$ [13].

Une permutation u des nombres de 1 à n peut être vue comme un n-uplet d'entiers $(u_1, \ldots, u_n)$ dans lequel chaque entier entre 1 et n apparaît une et une seule fois. Par exemple $(5, 3, 2, 4, 1)$ est une permutation des nombres de 1 à 5.

En effet soit $(u_1, \ldots, u_n)$ un tel n-uplet. On définit alors l'application σ de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même par $\sigma(k) = u_k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$. σ est une bijection.

Réciproquement, à une bijection σ de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même, on associe le n-uplet $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$.

Théorème 3.31

Le nombre de permutations des nombres de 1 à n est $n!$.

Autrement dit, on a $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Démonstration. — On montre le théorème par récurrence sur n.

Si $n = 1$, la seule permutation des entiers de 1 à 1 est (1).

On suppose donc que le résultat est vrai pour l'entier n. Montrons-le pour l'entier $n+1$. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n+1$ et comptons le nombre A_k de permutations

$$(u_1, \ldots, u_{n+1})$$

telles que $u_k = n + 1$. À une telle permutation, associons le n-uplet :

$$(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_{n+1}) .$$

C'est une permutation des nombres de 1 à n. Inversement étant donnée une permutation $(v_1, \ldots, v_n)$ des entiers de 1 à n, alors

$$(v_1, \ldots, v_{k-1}, n + 1, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

13. La lettre $\mathfrak{S}$ est une lettre S majuscule dans l'alphabet gothique.

est une permutation des entiers de 1 à $n+1$ dont le k-ième terme est $n+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $A_k = n!$. Donc grâce au principe de d'addition, le nombre total de permutations des nombres de 1 à $n+1$ est :

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)\, n! = (n+1)!\ ,$$

ce qui montre le résultat pour $n+1$. □

Remarques 3.32. — i) De manière générale, si X est un ensemble fini de cardinal n l'ensemble des permutations de X est fini de cardinal $n!$.

ii) Pour ordonner n objets, il faut associer à chacun un nombre entre 1 et n de sorte que chaque nombre renvoie à un objet et un seul. Il y a autant de manières de le faire que de permutations des n premiers entiers : $n!$.

Définition 3.33

Le *nombre de combinaisons* de k objets parmi n est le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. On le note

$$\binom{n}{k}\ .$$

Remarque 3.34. — C'est le nombre de manières de choisir k objets parmi n, sans distinguer leur ordre. La notation $\binom{n}{k}$ que nous utilisons ici, de préférence à l'ancienne notation C_n^k, est conforme aux programmes en vigueur et à l'usage international. On peut éventuellement la lire « k parmi n ».

Noter que si k n'est pas dans l'ensemble $[\![0, n]\!]$, il n'y a aucun sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k, et on a donc $\binom{n}{k} = 0$ dans ce cas. Aussi, il n'y a qu'un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ de cardinal 0, à savoir l'ensemble vide $\emptyset$, et il n'y a qu'un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ de cardinal n, à savoir l'ensemble $[\![1, n]\!]$ tout entier.

Proposition 3.35

Pour n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \,. \tag{20}$$

Démonstration. — Pour choisir k nombres dans $[\![1, n]\!]$, on peut se donner une permutation de $[\![1, n]\!]$, et décider de retenir les k premiers nombres. Parmi les permutations, toutes celles qui auront en commun leurs k premiers nombres conduiront au même choix. Il faut donc diviser par le nombre de permutations des k objets choisis, et par le nombre de permutations des $n-k$ objets qui ne l'ont pas été. On arrive alors à la formule voulue. □

Observez que (20) ne change pas si on remplace k par $n-k$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \,.$$

Choisir k objets parmi n (ceux que l'on garde) revient à en choisir $n-k$ (ceux que l'on laisse).

Voici une autre expression de $\binom{n}{k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(n-h) = \frac{n\ (n-1)\ \cdots\ (n-k+1)}{1\ 2\ \cdots\ k} \,. \tag{21}$$

Notez qu'il y a k facteurs au numérateur, comme au dénominateur. On obtient cette formule en simplifiant le quotient $n!/(n-k)!$ dans (20).

On peut aussi raisonner comme suit. Il y a n façons de choisir le premier objet, puis $n-1$ de choisir le second (puisqu'un objet a déjà été choisi), etc. Pour choisir le k-ième objet, il reste $n-(k-1)$ possibilités. Ceci correspond au numérateur de (21). Cette manière de procéder retourne une liste ordonnée. Il faut donc diviser par le nombre d'ordres possibles des k objets choisis, qui est $k!$.

Observez les relations suivantes, faciles à déduire de (20) ou (21) et de la définition de la factorielle.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} \,.$$

Pour calculer $\binom{n}{k}$ en pratique, on n'utilise ni (20) ni (21). Le calcul récursif par la formule du *triangle de Pascal* (connue des indiens, des chinois et des arabes bien avant Pascal) est beaucoup plus rapide.

Proposition 3.36 (Formule du triangle de Pascal)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} . \tag{22}$$

Nous conseillons au lecteur de démontrer cette formule à partir des expressions (20) et (21). Voici la justification combinatoire. Supposons que parmi les n objets dont k doivent être choisis, l'un d'entre eux soit distingué (disons qu'il est rouge). Parmi les choix possibles de k objets, certains ne contiennent pas l'objet rouge, d'autres le contiennent. Les premiers sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$, car les k objets sont choisis parmi les $n-1$ différents de l'objet rouge. Les choix contenant l'objet rouge sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ car l'objet rouge ayant été retenu, il reste $k-1$ objets à choisir parmi les $n-1$ autres. Voici, disposées en triangle, les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour n allant de 0 à 6.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Chaque valeur est la somme de celle qui est au-dessus, et de celle qui est à gauche de celle qui est au-dessus. S'il n'est pas indispensable de connaître ce tableau par cœur, il est souvent utile de savoir le réécrire rapidement.

3.4. Trois formules à connaître. — Les formules données par les trois théorèmes qui suivent sont souvent utiles.

Théorème 3.37

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} . \tag{23}$$

Démonstration. — Nous donnons d'abord la démonstration par récurrence. Nous verrons ensuite une justification géométrique et une justification combinatoire. L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) = \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \; .$$

Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \; .$$

Supposons maintenant que $H(n)$ est vraie. Ecrivons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \; .$$

En appliquant $H(n)$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \; .$$

Le membre de droite s'écrit :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; .$$

Nous avons donc démontré l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; ,$$

c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie. □

Voici maintenant une justification géométrique. Considérons un rectangle dont la largeur et la hauteur valent respectivement $n+1$ et n unités (figure 13). Ce rectangle peut être découpé en deux moitiés superposables. Chacune est formée de $1+2+\cdots+n$ carrés de côté unité, et couvre une surface égale à la surface du rectangle divisée par 2, soit $n(n+1)/2$.

Voici maintenant une explication combinatoire. Autour d'une table $n+1$ personnes sont assises et s'apprêtent à trinquer. Combien de bruits de verre entendra-t-on ? Il y a deux manières de compter. La première consiste à prendre les personnes dans l'ordre : la première doit trinquer avec les n autres. La seconde, qui a déjà trinqué avec la première, doit encore trinquer avec $n-1$ autres. Ainsi de suite jusqu'à la n-ième

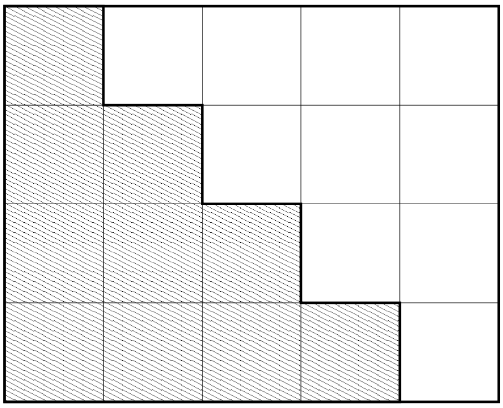

FIGURE 13. La somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

personne, qui ayant déjà trinqué avec les $n-1$ autres n'aura plus que la n-ième avec qui trinquer. On entendra donc $n+(n-1)+\cdots+1$ bruits de verre. La seconde manière de compter consiste à remarquer que le nombre de bruits de verre est égal au nombre de combinaisons de 2 personnes parmi $n+1$:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Les deux formules suivantes portent sur deux variables a et b que vous pouvez voir dans un premier temps comme deux réels. Ces formules sont aussi valables pour des nombres complexes, et plus généralement pour des objets quelconques que l'on peut ajouter et multiplier de façon commutative (par exemple des polynômes ou des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$).

La première généralise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Théorème 3.38

Pour tout entier n,

$$(24)\quad a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n).$$

(Rappelons la convention $a^0 = b^0 = 1$.)

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence. L'affirmation est vraie pour $n = 0$ puisque :

$$\sum_{k=0}^{0} a^0 b^0 = 1.$$

Supposons le résultat vrai pour n.

$$\begin{aligned}
(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k\right) &= (a-b)\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k} b^k\right) + b^{n+1}\right) \\
&= (a-b)\left(a\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right) + b^{n+1}\right) \\
&= a(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right) + (a-b)b^{n+1} \\
&= a(a^{n+1} - b^{n+1}) + (a-b)b^{n+1} \\
&= a^{n+2} - b^{n+2}
\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence a été utilisée pour obtenir l'avant-dernière égalité. Le résultat est vrai pour $n + 1$, donc pour tout n. □

Des cas particuliers du théorème 3.38 reviennent souvent dans les calculs. Nous avons déjà rencontré le cas $a = 2, b = 1$. Vous pouvez retenir le suivant :

$$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

Plus généralement, on a la relation :

Proposition 3.39 (Somme d'une série géométrique)

Soit x un nombre réel différent de 0 et de 1 et soient p et q des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que :

$$(1-x)\left(\sum_{k=p}^{q} x^k\right) = \sum_{k=p}^{q} x^k - \sum_{k=p+1}^{q+1} x^k = x^p - x^{q+1}.$$

□

Une autre formule à connaître est celle du *binôme de Newton*, qui généralise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Théorème 3.40 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = b^n + nb^{n-1}a + \cdots + nba^{n-1} + a^n. \tag{25}$$

À cause de (25), les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les *coefficients binomiaux*.

Démonstration. — Ici encore la démonstration se fait par récurrence, nous donnerons ensuite une justification combinatoire. Pour $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 \ .$$

Supposons que la formule est vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \left(\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= a^{n+1}+\left(\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right)+b^{n+1} \\
&= a^{n+1}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\right)+b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}\,.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal (22). Le résultat est démontré. □

Voici maintenant la justification combinatoire. La quantité $(a+b)^n$ est le produit de n facteurs, chacun contenant deux termes a et b. Quand on développe le produit, on prend dans le premier facteur un des deux termes, on le multiplie par un terme du second facteur, ainsi de suite jusqu'au n-ième facteur. Le produit obtenu est égal à $a^k b^{n-k}$ si on a choisi le terme a dans k facteurs et le terme b dans les $n-k$ autres. Le nombre de produits égaux à $a^k b^{n-k}$ est le nombre de combinaisons de k facteurs parmi n, soit $\binom{n}{k}$.