# Exercice 3.2

1. Par définition $V(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$

$V(X) = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$

$\boxed{V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}$

2. $\mathbb{E}[a] = a$ immédiat (la variable $a$ n'est pas aléatoire)

Par linéarité $\mathbb{E}[aX+b] = \mathbb{E}[aX] + \mathbb{E}[b] = a\mathbb{E}[X] + b$

$V(aX+b) = \mathbb{E}[(aX+b-\mathbb{E}[aX+b])^2] = \mathbb{E}[(aX+b-(a\mathbb{E}[X]+b))^2]$

$= \mathbb{E}[(aX - a\mathbb{E}[X])^2] = a^2\,\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$

Donc $\boxed{V(aX+b) = a^2 V(X)}$

3. $\mathbb{P}(|X|<a) = \mathbb{P}(-a<X<a) = \mathbb{P}(X<a) - \mathbb{P}(X\leq -a)$

Par symétrie $\mathbb{P}(X\leq -a) = \mathbb{P}(X\geq a) = 1-\mathbb{P}(X<a)$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(|X|<a) = 2\,\mathbb{P}(X<a) - 1}$

# Exercice 3.3

1. $\mathbb{P}(X>6) = 1-\mathbb{P}(X\leq 6) = 1 - \int_0^6 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$= 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^6 = 1-(-e^{-6\lambda}+1) = e^{-6\lambda}$

Donc $\mathbb{P}(X>6) = 0.3 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{6}\ln(0,3) \simeq 0,201}$

2. On cherche $t$ tel que $\mathbb{P}(X<t) = 0,5$

$\mathbb{P}(X<t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1-e^{-\lambda t}$

Donc $\mathbb{P}(X<t) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow \boxed{t = -\frac{1}{\lambda}\ln(0,5) \simeq 3,47}$

Au bout de 3,47 ans, un robot aura une chance sur deux d'être déjà tombé en panne.

3. "Un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années" est égal à l'événement $X>2$.

$\mathbb{P}(X>2) = 1-\mathbb{P}(X\leq 2) = 1-(1-e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda} \simeq \boxed{0,67}$

La probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne pendant les deux premières années est de 0,67.

4. $\mathbb{P}(X>6 \mid X>2) = \dfrac{\mathbb{P}((X>6)\cap(X>2))}{\mathbb{P}(X>2)} = \dfrac{\mathbb{P}(X>6)}{\mathbb{P}(X>2)}$ car $(X>6) \subset (X>2)$

Donc $\mathbb{P}(X>6 \mid X>2) = \dfrac{e^{-6\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-4\lambda} \simeq \boxed{0,45}$

5. Considérons la variable $Y$ : nombre de robots n'ayant pas eu de pendant les deux premières années.

Les robots fonctionnent de manière indépendante donc on peut modéliser $Y$ avec une loi binomiale : $Y \sim \mathcal{B}(10, e^{-2\lambda})$

$\rightarrow$ on effectue 10 tirages indépendants avec proba de succès $\mathbb{P}(X>2)$

$\mathbb{P}(Y \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant 2) \simeq \boxed{0,997}$

Il y a 99,7 % de chances qu'au moins 3 robots ne soient pas tombés en panne au cours des deux premières années.

Exercice 3.6

1. a. $\boxed{\mathbb{P}(X<1,45) \simeq 0,9265}$ , $\boxed{\mathbb{P}(X<2,01) \simeq 0,9778}$ Calculatrice et tables

$\boxed{\mathbb{P}(-1,65<X<1,34) \simeq 0,8604}$ , $\boxed{\mathbb{P}(|X|<2,05) \simeq 0,9596}$ Calculatrice

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-1,65<X<1,34) &= \mathbb{P}(X<1,34) - \mathbb{P}(X\leqslant -1,65)\\ &\simeq 0,9099 - (1-0,9505)\\ &\boxed{\simeq 0,8604}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X|<2,05) &= 2\mathbb{P}(X<2,05)-1 \quad \text{(voir Ex 3.2)}\\ &\simeq 2\times 0,9798 - 1\\ &\boxed{\simeq 0,9596}\end{aligned}$$

Tables

1. b. $\mathbb{P}(X<u) = 0,63 \longrightarrow \boxed{u \simeq 0,3319}$

$\mathbb{P}(X>u) = 0,63 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X<-u) = 0,63 \rightarrow \boxed{u \simeq -0,3319}$

$\mathbb{P}(|X|<u) = 0,63 \Leftrightarrow 2\mathbb{P}(X<u) - 1 = 0,63$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X<u) = \dfrac{1+0,63}{2} = 0,815 \rightarrow \boxed{u \simeq 0,8965}$

1.c. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc $Y = 2X+3 \sim \mathcal{N}(3, 2^2) \rightarrow \boxed{Y \sim \mathcal{N}(3,4)}$

$\mathbb{P}(Y<4) = \mathbb{P}\left(X < \frac{4-3}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{\mathbb{P}(Y<4) \simeq 0{,}6915}$

$\mathbb{P}(-2<Y<1) = \mathbb{P}\left(\frac{-2-3}{2} < X < \frac{1-3}{2}\right) = \mathbb{P}(X<-1) - \mathbb{P}\left(X \leqslant -\frac{5}{2}\right)$

$= \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{5}{2}\right) - \mathbb{P}(X<1) \simeq 0{,}9938 - 0{,}8413$

$\boxed{\mathbb{P}(-2<Y<1) \simeq 0{,}1525}$

2.a. $\mathbb{P}(X<6) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{5} < \frac{3}{5}\right)$ avec $\frac{X-3}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(X<6) \simeq 0{,}7257}$

$\mathbb{P}(X>-2) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{5} > -1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{5} < 1\right) \boxed{\simeq 0{,}8413}$

$\mathbb{P}(-1<X<1{,}5) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-3}{5} < \frac{X-3}{5} < \frac{1{,}5-3}{5}\right)$

$= \mathbb{P}\left(-0{,}8 < \frac{X-3}{5} < -0{,}3\right)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{5} \leqslant 0{,}8\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{5} < 0{,}3\right)$

$\simeq 0{,}7881 - 0{,}6179$

$\boxed{\mathbb{P}(-1<X<1{,}5) \simeq 0{,}1702}$

2.b. $\mathbb{P}(X<u) = 0{,}63 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{5} < \frac{u-3}{5}\right) = 0{,}63$

D'après la question 1.b. $\frac{u-3}{5} \simeq 0{,}3319$

Donc $\boxed{u \simeq 4{,}6595}$

$\mathbb{P}(X>u) = 0{,}63 \Leftrightarrow \frac{u-3}{5} \simeq -0{,}3319 \Leftrightarrow \boxed{u \simeq 1{,}3405}$

$\mathbb{P}(|X-3|<u) = 0{,}63 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-3}{5}\right| < \frac{u}{5}\right) = 0{,}63$

$\Leftrightarrow \frac{u}{5} \simeq 0{,}8965 \Leftrightarrow \boxed{u \simeq 4{,}4825}$

Ex 3.7

2.a. $X \sim \mathcal{N}(23, 36)$ donc $\dfrac{X-23}{6} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(X > 40) = 1 - \mathbb{P}(X < 40) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-23}{6} < \frac{17}{6}\right) \simeq 1 - 0{,}9977$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X > 40) \simeq 0{,}0023}$$

2.b. $\mathbb{P}(X \leqslant c_{lim}) = 0{,}005 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\dfrac{X-23}{6} \leqslant \dfrac{c_{lim}-23}{6}\right) = 0{,}005$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X-23}{6} \leqslant \frac{23-c_{lim}}{6}\right) = 0{,}995$$

Avec les tables, on trouve $\dfrac{23-c_{lim}}{6} \simeq 2{,}5758$

Donc $\boxed{c_{lim} \simeq 7{,}5452}$

2.c. On doit avoir $\mathbb{P}(23-h \leqslant X \leqslant 23+h) = 0{,}95$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-\frac{h}{6} \leqslant \frac{X-23}{6} \leqslant \frac{h}{6}\right) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow 2\mathbb{P}\left(\frac{X-23}{6} \leqslant \frac{h}{6}\right) - 1 = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X-23}{6} \leqslant \frac{h}{6}\right) = 0{,}975$$

Avec les tables, on a $\dfrac{h}{6} \simeq 1{,}96$, donc $\boxed{h \simeq 11{,}76}$

2.d. $\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 36) = \mathbb{P}\left(-\dfrac{13}{6} \leqslant \dfrac{X-23}{6} \leqslant \dfrac{13}{6}\right)$

$$= 2\mathbb{P}\left(\frac{X-23}{6} \leqslant \frac{13}{6}\right) - 1 \simeq 2 \times 0{,}9849 - 1$$

$$\boxed{\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 36) \simeq 0{,}9698}$$