Déduction Naturelle

Propriétés et tactiques

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

Février 2025

Au dernier cours

Déduction naturelle

- Règles
- Contexte
- Preuves

Rappel des règles

	Introduction	Élimination
Implication	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \ldots\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$	$\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E$
Conjonction	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \wedge E1$ $\dfrac{A \wedge B}{B} \wedge E2$
Disjonction	$\dfrac{A}{A \vee B} \vee I1$ $\dfrac{B}{A \vee B} \vee I2$	$\dfrac{A \vee B \quad A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow C}{C} \vee E$
	Règle du faux	
$\perp$	$\dfrac{\perp}{A}$ *Efq*	
	Règle de réduction à l'absurde	
	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ *RAA*	

Un exemple avec environnement

Prouvez que $\neg A$ dans l'environnement $\neg(A \vee B)$

environnement			
référence		formule	
(i)		$\neg(A \vee B)$	
contexte	numero	preuve	justification
1	1	Supposons A	
1	2	$A \vee B$	$\vee I1$ 1
1	3	$\perp$	$\Rightarrow E$ *(i)*, 2
	4	Donc $\neg A$	$\Rightarrow I$ 1, 3

Théorème

Théorème 3.3.1

Si une formule A est déduite d'un environnement de formules Γ ($\Gamma \vdash A$) alors A est une conséquence de Γ ($\Gamma \models A$).

Toute preuve écrite dans un environnement Γ est correcte !

Preuve par récurrence sur le nombre de lignes d'une preuve P :

- On note H_i le contexte et C_i la conclusion de la i^{e} ligne de P.
- On montre que pour tout k on a $\Gamma, H_k \models C_k$.

D'où pour la dernière ligne n de la preuve $\Gamma \models A$.
(H_n est vide et $C_n = A$.)

Règles standard

Preuve de la forme :

contexte	numero	preuve	justification
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Γ, H_k	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Γ, H_k	k	C_k	$R\ i, j$

où les prémisses i et j sont :

- utilisables à la ligne précédente
- ou font partie de l'environnement Γ.

Par hypothèse de récurrence, les formules i et j sont conséquences de Γ, H_k (en fait, d'un contexte contenu dans Γ, H_k).

On vérifie que pour toutes les règles, la conclusion est conséquence des prémisses (par exemple $D,\ E \models D \wedge E$).

Par transitivité $\Gamma,\ H_k \models C_k$.

Cas particulier : la dernière règle est $\Rightarrow I$

Preuve de la forme :

contexte	N°	preuve	justification
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Γ, H_k, B	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Γ, H_k	k	$\texttt{Donc}\ B \Rightarrow D$	$\Rightarrow I\ i, j$

où D est utilisable sur la ligne précédente (ou fait partie de Γ).

Par hypothèse de récurrence D est conséquence de Γ, H_k, B
(en fait, d'un contexte contenu dans Γ, H_k, B).

On a donc $\Gamma, H_k,\ B \models D$
ce qui revient à dire que $\Gamma,\ H_k \models B \Rightarrow D$.

Théorème

Théorème 3.4.1

Soient Γ un ensemble fini de formules et A une formule.
Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$.

Idée de la preuve

On décompose

- A
- ou une formule de Γ

pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence.

Par exemple : si $\Gamma \models B \vee C$ alors $\Gamma, \neg B \models C$.
si $\Gamma, B \Rightarrow C \models A$ alors $\Gamma, \neg B \models A$ et $\Gamma, C \models A$.

Subtilités de la démonstration

Cas de base :

- A est indécomposable si A est $\perp$ ou une variable.
- Γ est indécomposable si Γ est une liste de littéraux ou comprend la formule $\perp$.

- Si on décompose une formule en ses sous-formules on ne retrouve pas toujours une règle de la déduction naturelle
- il faut donc parfois « compléter » la preuve.
- Il faut pondérer les connecteurs pour assurer qu'on réduit la taille du problème,
par exemple $m(B \vee C) > m(\neg B) + m(C)$.

Remarque 3.4.2

La preuve de complétude est constructive, c'est-à-dire qu'elle donne un algorithme pour construire une preuve de A dans Γ.

Cependant les preuves ainsi construites peuvent être longues.

L'outil
http://teachinglogic.univ-grenoble-alpes.fr/DN/
construit des preuves plus efficaces.
Il utilise les tactiques « optimisées » présentées section 3.2.

Par exemple, pour prouver $B \vee C$:

- Essayez d'abord de prouver B.
- Si vous échouez, essayez de prouver C.
- Sinon, utilisez la tactique 10 (prouver C sous l'hypothèse $\neg B$).

Tactiques

On cherche à prouver A dans l'environnement Γ.

Liste de 13 tactiques à utiliser dans l'ordre !

- Tactiques 1 à 3 : la preuve est terminée
- Tactiques 4 à 6 : preuve guidée par la formule à prouver (règles I)
- Tactiques 7 à 9 : preuve guidée par l'environnement (règles E)
- Tactiques 10 à 13 : raisonnement par l'absurde

Tactique 1 (trivial)

Si $A \in \Gamma$ alors la preuve obtenue est vide.

Tactique 2 (trivial + intro)

Si A est la conséquence d'une règle dont les prémisses sont dans Γ, alors la preuve obtenue est « A ».

Tactique 3 (Efq)

Si Γ comporte une contradiction, c'est-à-dire une formule B et une formule $\neg B$,
alors la preuve obtenue est « $\perp, A$ ».

Tactique 4

Si $A = B \wedge C$ alors :

contexte	preuve	justification
Γ	$\vdots$	$\vdots$
Γ	B	
Γ	$\vdots$	$\vdots$
Γ	C	
Γ	$B \wedge C$	$\wedge I$

Les preuves peuvent échouer (si $\Gamma \not\models A$).
Ici, si la preuve de B ou C échoue, celle de A aussi.

Par la suite on ne signale plus les cas d'échecs,
sauf s'il faut essayer une autre preuve.

Tactique 5

Si $A = B \Rightarrow C$, alors prouver C sous l'hypothèse B :

contexte	preuve	justification
Γ, B	Supposons B	
Γ, B	$\vdots$	$\vdots$
Γ, B	C	
Γ	Donc $B \Rightarrow C$	$\Rightarrow I$

Tactique 6

Si $A = B \vee C$, alors prouver B :

contexte	preuve	justification
Γ	$\vdots$	$\vdots$
Γ	B	
Γ	$B \vee C$	$\vee I1$

Si la preuve de B échoue alors prouver C :

contexte	preuve	justification
Γ	$\vdots$	$\vdots$
Γ	C	
Γ	$B \vee C$	$\vee I2$

Si la preuve de C échoue aussi, essayer les tactiques suivantes.

Prouver une disjonction (non-triviale) (exemple 3.1.12)

Prouver que $\neg A \vee B$ dans l'environnement $A \Rightarrow B$.

environnement			
référence		formule	
(i)		$A \Rightarrow B$	
contexte	numero	preuve	justification
1	1	Supposons $\neg(\neg A \vee B)$	
1,2	2	Supposons A	
1,2	3	B	$\Rightarrow E$ *(i)*, 2
1,2	4	$\neg A \vee B$	$\vee I2$ 3
1,2	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 4
1	6	Donc $\neg A$	$\Rightarrow I$ 2, 5
1	7	$\neg A \vee B$	$\vee I1$ 6
1	8	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 7
	9	Donc $\neg\neg(\neg A \vee B)$	$\Rightarrow I$ 1, 8
	10	$\neg A \vee B$	RAA 9

Arbre (exemple 3.1.12)

Donnez la représentation en arbre de la preuve précédente :

$$\dfrac{\dfrac{(1)\cancel{\neg(\neg A \vee B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(1)\cancel{\neg(\neg A \vee B)} \qquad \dfrac{\dfrac{(i) A \Rightarrow B \quad (2)\cancel{A}}{(3) B}\Rightarrow E}{(4) \neg A \vee B}\vee 2}{(5)\bot}\Rightarrow E}{(6)\neg A}\Rightarrow I[2]}{(7)\neg A \vee B}\vee 1}{(8)\bot}\Rightarrow E}{\dfrac{(9)\neg\neg(\neg A \vee B)}{(10)\neg A \vee B} RAA}\Rightarrow I[1]$$

L'environnement est constitué des formules portées par les feuilles non-enlevées.

Intuitionnisme et constructivisme (Brouwer, 1881-1966)

Dans la suite de Poincaré, il fonde (en 1918) la philosophie **intuitionniste** : les mathématiques doivent manipuler des objets accessibles à l'intuition.

- refus des objets infinis comme dans la théorie des ensembles
- en particulier notion de **réel constructible** = algorithme qui produit ses décimales

Exemple de preuve non constructive : supposons $P(0)$ et $\neg P(2)$.
Alors $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x+1))$ ... mais on ne sait pas dire si $x = 0$ ou $x = 1$ est le « bon » témoin pour cette propriété.
Les règles d'introduction du $\vee$ explicitent lequel des cas est vrai : suivre le raisonnement pas à pas constitue un *algorithme* !

En revanche la règle $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ permet de contourner cette contrainte.

Tactique 7

Si $B \wedge C$ est dans l'environnement, alors prouver A à partir des formules B, C, qui remplacent $B \wedge C$ dans l'environnement :

contexte	preuve	justification
$\Gamma, B \wedge C$	B	$\wedge E1$
$\Gamma, B \wedge C$	C	$\wedge E2$
$\Gamma, B \wedge C$	$\vdots$	$\vdots$
$\Gamma, B \wedge C$	A	

Tactique 8

Si $B \vee C$ est dans l'environnement, alors :

- prouver A sous l'hypothèse B puis sous l'hypothèse C

contexte	preuve	justification
$\Gamma, B \vee C, B$	Supposons B	
$\Gamma, B \vee C, B$	$\vdots$	$\vdots$
$\Gamma, B \vee C, B$	A	
$\Gamma, B \vee C$	Donc $B \Rightarrow A$	$\Rightarrow I$
$\Gamma, B \vee C, C$	Supposons C	
$\Gamma, B \vee C, C$	$\vdots$	$\vdots$
$\Gamma, B \vee C, C$	A	
$\Gamma, B \vee C$	Donc $C \Rightarrow A$	$\Rightarrow I$
$\Gamma, B \vee C$	A	$\vee E$

Une preuve avec une disjonction comme hypothèse

Montrez que $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$.

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $\neg A \vee \neg B$	
1,2	2	Supposons $A \wedge B$	
1,2	3	A	$\wedge E$ 2
1,2	4	B	$\wedge E$ 2
1,2,5	5	Supposons $\neg A$	
1,2,5	6	$\bot$	$\Rightarrow E$ 3, 5
1,2	7	Donc $\neg A \Rightarrow \bot$	$\Rightarrow I$ 5, 6
1,2,8	8	Supposons $\neg B$	
1,2,8	9	$\bot$	$\Rightarrow E$ 4, 8
1,2	10	Donc $\neg B \Rightarrow \bot$	$\Rightarrow I$ 8, 9
1,2	11	$\bot$	$\vee E$ 1, 7, 10
1	12	Donc $\neg(A \wedge B)$	$\Rightarrow I$ 2, 11
	13	Donc $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$	$\Rightarrow I$ 1, 12

Tactiques 9 à 13 (tiers exclus)

Si :

- une autre formule est dans l'environnement ($\neg(B \vee C)$, $\neg(B \wedge C)$, $\neg(B \Rightarrow C)$, $B \Rightarrow C$)
- ou si $A = B \vee C$ et qu'on n'a pas réussi à prouver B ni C directement

Alors :

- on remplace ces formules par des formules plus simples ($\neg B, \neg C, \ldots$ selon les cas)
- on complète la preuve par les sous-preuves $P1$, $P2$, $\ldots P7$ (demandées à l'exercice 59)

Exemple : la formule de Peirce $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

1. Tactique 5 ($\Rightarrow$I)
2. Tactique 13
3. Tactique 12
4. Tactique 1

Supposons $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

> Preuve $P2$ de $\neg(p \Rightarrow q) \vee p$ à partir de $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
>
> Supposons $\neg(p \Rightarrow q)$
>
> > preuve $P6$ de p à partir de $\neg(p \Rightarrow q)$
>
> Donc $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
>
> Supposons p
>
> > preuve vide (car p est dans les hypothèses)
>
> Donc $p \Rightarrow p$
>
> p

Donc $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

L'exemple du cours en Déduction Naturelle

contexte	numero	preuve	justification
1	1	Supposons $(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m)$	
1	2	$\neg p \Rightarrow j$	$\wedge E$ 1
1	3	$j \Rightarrow m$	$\wedge E$ 1
1,4	4	Supposons $\neg(m \vee p)$	
1,4,5	5	Supposons p	
1,4,5	6	$m \vee p$	$\vee I$ 5
1,4,5	7	$\perp$	$\Rightarrow E$ 4,6
1,4	8	Donc $\neg p$	$\Rightarrow I$ 5,7
1,4	9	j	$\Rightarrow E$ 2, 8
1,4	10	m	$\Rightarrow E$ 3, 9
1,4	11	$m \vee p$	$\vee I$ 10
1,4	12	$\perp$	$\Rightarrow E$ 4, 11
1	13	Donc $\neg\neg(m \vee p)$	$\Rightarrow I$ 4, 13
1	14	$m \vee p$	RAA 13

Aujourd'hui

- La Déduction Naturelle propositionnelle est correcte et complète.
- Tactiques pour la construction d'une preuve

Preuves automatiques

Pour produire automatiquement des preuves sous forme de tableau, on recommande d'utiliser le logiciel (il implémente les treize tactiques précédentes) :

http://teachinglogic.univ-grenoble-alpes.fr/DN/

Plan du Semestre

- Logique propositionnelle
- Résolution propositionnelle
- Déduction naturelle propositionnelle *
- Pas de cours le 20/2 (forum des poursuites d'études)
- Logique du premier ordre

PARTIEL

- Base de la démonstration automatique
  (« résolution au premier ordre »)
- Déduction naturelle au premier ordre

EXAMEN

Quizz d'entraînement

- Chapitre 1 :
  https://moodle.caseine.org/mod/quiz/view.php?id=77877
- Chapitre 2 :
  https://moodle.caseine.org/mod/quiz/view.php?id=78253
- Chapitre 3 :
  https://moodle.caseine.org/mod/quiz/view.php?id=78255