Feuille d'exercices 2

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (*). Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? (justifier la réponse)

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 2 (*). Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

a) L'ensemble B des suites bornées.

b) L'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

c) L'ensemble des suites constantes à partir d'un certain rang.

d) L'ensemble des suites décroissantes à partir d'un certain rang.

e) L'ensemble des suites convergeant vers 0.

f) L'ensemble des suites monotones.

g) L'ensemble des suites dont la valeur est $\leqslant 1$ à partir d'un certain rang.

h) L'ensemble des suites 3-périodiques.[1]

i) L'ensemble des suites périodiques.[2]

Exercice 3 (*). Les ensembles E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

a) L'ensemble des fonctions 1-périodiques.[3]

---

[1] On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique de période* N (ou N*-périodique*) si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+N} = u_n.$$

[2] On dit qu'une suite est *périodique* si il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite est N-périodique.

[3] On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *périodique de période* T (ou T*-périodique*) si

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t + T) = f(t).$$

b) L'ensemble des fonctions croissantes.

c) L'ensemble des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

d) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + e^{t\sin(t)}y(t) = 0.$$

e) (***) L'ensemble des fonctions périodiques.[4]

Exercice 4 (*)**.** Soit E un K-espace vectoriel, et soient $v_1, \ldots, v_n \in E$.

a) Soit $\lambda \in K$ non nul. Montrer que $\mathrm{Vect}_K(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \mathrm{Vect}_K(v_1, \ldots, v_{n-1}, \lambda v_n)$.

b) Soit $1 \leq i \leq n-1$, et soit $\lambda \in K$. Montrer que l'on a

$$\mathrm{Vect}_K(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \mathrm{Vect}_K(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_i).$$

c) Si v_n est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{n-1}$, alors $\mathrm{Vect}_K(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \mathrm{Vect}_K(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Remarque. Les mêmes résultats sont vrais si on remplace v_n par v_j. Dans ce cas, la condition sur i dans **b)** devient $i \neq j$.

Exercice 5 (*)**.** Soit E un K-espace vectoriel (K est un corps). On se propose de donner une autre définition du sous-espace engendré par une partie de E.
Si $\mathcal{P}$ est une partie de E (pas nécessairement finie), on note $\mathrm{Vect}_K(\mathcal{P})$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels F de E contenant $\mathcal{P}$.

a) Pourquoi $\mathrm{Vect}_K(\mathcal{P})$ est-il un sous-espace vectoriel ?

b) Montrer les propriétés suivantes:

(i) $\mathrm{Vect}_K(\emptyset) = \{0_E\}$

(ii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $\mathcal{P} \subset F \Rightarrow \mathrm{Vect}_K(\mathcal{P}) \subset F$

(iii) Si $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, alors $\mathrm{Vect}_K(\mathcal{P}_1) \subset \mathrm{Vect}_K(\mathcal{P}_2)$

(iv) On a $\mathrm{Vect}_K(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de E.

c) Montrer que $\mathrm{Vect}_K(\mathcal{P})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{P}$) à coefficients dans K. Autrement dit, montrer l'égalité

$$\mathrm{Vect}_K(\mathcal{P}) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \mid m \geq 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K, v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{P}\}.$$

Pour montrer l'inclusion $\subset$, on montrera que le membre de droite est un sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{P}$ (attention, m n'est pas fixé !)

d) Lorsque $\mathcal{P} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, expliquer pourquoi on retrouve la définition du cours.

e) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On rappelle que $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$.

Montrer que $F + G = \mathrm{Vect}_K(F \cup G)$.

[4] On dit qu'une fonction est *périodique* si il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite est T-périodique.

Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 6 (*). On considère les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

1) $((1,1,0),(0,1,1))$,

2) $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$,

3) $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$,

4) $((0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$,

5) $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$,

6) $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$.

Parmi ces familles de vecteurs (justifier les réponses données) :

a) Déterminer lesquelles sont des familles libres. Compléter chacune de ces familles libres en une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer lesquelles sont des familles génératrices. Extraire une base de $\mathbb{R}^3$ de chacune de ces familles génératrices.

c) Déterminer lesquelles sont des bases de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées d'un triplet arbitraire $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ dans chacune de ces bases.

Exercice 7 (*). Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, déterminer lesquelles sont génératrices et lesquelles sont libres (justifier les réponses données). Le cas échéant, en extraire ou les compléter en des bases de $\mathbb{R}^4$.

a) $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$,

b) $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0))$,

c) $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$,

d) $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$,

e) $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$.

Exercice 8 (**). Pour chacune des familles suivantes, donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a,b pour que la famille en question soit une base de $\mathbb{R}^3$.

a) $((1,1,1),(0,a,1),(0,0,b))$,

b) $((1,0,1),(a,b,1),(b,a,1))$,

c) $((1,a,b),(a,1,a),(b,b,1))$,

d) $((a,a,b),(a,b,a),(b,a,a))$,

e) $((0,a,b),(a,0,b),(a,b,0))$.

Exercice 9 (**). Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles libres ?

a) $(f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto \sin(x), f_3 : x \mapsto 1)$,

b) $(f_1 : x \mapsto \cos^2(x), f_2 : x \mapsto \cos(2x), f_3 : x \mapsto 1)$,

c) $(f_1 : x \mapsto |x-1|, f_2 : x \mapsto |x|, f_3 : x \mapsto |x+1|)$,

Exercice 10 (**)**.** Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on note e_i la suite de nombre réels $(\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-il de dimension finie ?

c) On définit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ comme l'ensemble des suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\}$ est fini.

  a) Démontrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

  b) Ce sous-espace vectoriel est-il de dimension finie ?

Exercice 11 (**)**.** Montrer par récurrence que les familles suivantes de n vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont libres (On pourra utiliser la dérivation).

a) $(f_k : x \mapsto \sin(kx))_{1\leq k\leq n}$,

b) $(f_k : x \mapsto e^{\lambda_k x}))_{1\leq k\leq n}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels deux à deux distincts.

Exercice 12 (**)**.** Soit u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, w)$ si et seulement si

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0.$$

Exercice 13 (***)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n$ une famille libre de n vecteurs de E. On se donne n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et on pose

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$ on pose $y_i = x_i + y$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_k pour que la famille $y_1, \dots, y_n$ soit libre.