Chapitre II : Espaces vectoriels

Les espaces vectoriels sont des ensembles dont les éléments, appelés vecteurs, peuvent être additionnés entre eux et aussi multipliés par les éléments d'un corps, appelés scalaires.

1) Définition et premiers exemples

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un ensemble E muni de :

a) une loi de composition interne $+ : E \times E \longrightarrow E$

$$(v, w) \longmapsto v + w$$

b) une loi externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

possédant les propriétés suivantes :

1) $(E, +)$ est un groupe abélien ;

2) La loi externe est distributive par rapport à la loi interne :

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall v, w \in E$:

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

3) La loi externe vérifie :

neutre de la mult. dans $\mathbb{K}$.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall v \in E : \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v, \quad 1 \cdot v = v.$$

produit dans $\mathbb{K}$

Commentaires :

- Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.
- La loi interne (addition des vecteurs) est notée additivement. Son élément neutre est le vecteur nul 0_E, que l'on notera simplement 0. Le symétrique de $v \in E$ est l'opposé, noté $-v$.

⚠ Le corps $(\mathbb{K},+,\cdot)$ possède deux lois internes, également notées $+$ et $\cdot$, qu'il ne faut pas confondre avec l'addition des vecteurs et leur multiplication par un scalaire ! L'élément neutre 0 de l'addition dans $\mathbb{K}$ ne doit pas être confondu avec le vecteur nul !

Prop: $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall v \in E$ on a :

i) $0\cdot v = 0_E$, $1\cdot v = v$, $(-1)\cdot v = -v$

ii) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

Dém: $0\cdot v = (0+0)\cdot v = 0\cdot v + 0\cdot v \implies 0\cdot v = 0_E$

$1\cdot v = v$ par 3)

$1\cdot v + (-1)\cdot v = (1+(-1))\cdot v = 0\cdot v = 0_E \implies (-1)\cdot v = -v.$

$\lambda\cdot 0_E = \lambda\cdot(0_E+0_E) = \lambda\cdot 0_E + \lambda\cdot 0_E \implies \lambda\cdot 0_E = 0_E.$

Notations simplifiées: Il est d'usage fréquent de :

- noter $0_E = 0$ lorsqu'aucune confusion n'est possible ;
- omettre le signe $\cdot$ aussi bien pour la multiplication dans $\mathbb{K}$ que pour la loi externe !

Exemples: (On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour fixer les idées)

a) $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. C'est l'exemple le plus important pour ce cours.

Les éléments de E sont notés en colonnes :

$$v \in E \iff v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ où } v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}.$$

Les scalaires $v_1, \dots, v_n$ sont les composantes du vecteur v. L'addition et la multiplication externe sont définies comme suit :

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$V + W = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \lambda V = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

On vérifie que $\mathbb{R}^n$ muni de ces lois est un espace vectoriel réel (= sur $\mathbb{R}$).

Le vecteur nul est

$$0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

N.B. Si $n = 1$ alors $E = \mathbb{R}$! (Scalaires = vecteurs)

b) Soit X un ensemble et $E = \{ f : X \to \mathbb{R} \}$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{R}$. On définit les opérations suivantes : " $E = \mathbb{R}^X$ "

- $\forall f, g \in E : \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$ (addition)
- $\forall f \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in X$ (loi externe)

Alors E est un espace vectoriel réel. Le vecteur nul est l'application identiquement nulle.

N.B. En prenant $X = \{1, \dots, n\}$ on retombe sur l'exemple précédent.

c) L'algèbre des polynômes $\mathbb{R}[X]$

Soit E l'ensemble des suites réelles à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang. Si $a \in E$, alors

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

L'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que a_n soit le dernier coefficient non nul dépend de a.
Si $b \in E$ est un autre élément de E, on aura

$$b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, 0 \dots) \quad \text{avec typiquement } m \neq n.$$

On définit trois opérations :

- addition : $a+b = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \dots)$
- mult. par un scalaire : $\lambda a = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots)$
- multiplication interne : $a \cdot b = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots)$

En d'autres termes :

$$(a+b)_k = a_k + b_k, \quad (\lambda a)_k = \lambda a_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$(a \cdot b)_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m} \qquad \text{(produit de Cauchy)}$$

On vérifie que :

$\begin{cases} E \text{ muni de l'addition et de la mult. externe est un } \underline{\text{espace vectoriel}} \text{ sur } \mathbb{R} \\ E \text{ muni de l'addition et de la mult. interne est un } \underline{\text{anneau commutatif}}. \end{cases}$

Les éléments neutres de l'addition et de la multiplication sont :

$$0 = (0, 0, 0, \dots) \quad \text{et} \quad 1 = (1, 0, 0, 0, \dots).$$

Notation : $X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$. On vérifie que

$$X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) \quad \text{etc.}$$

Ainsi tout élément $a \in E$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} a &= (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \\ &= a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k. \end{aligned} \qquad (*)$$

On dit que a est un polynôme à une indéterminée ($=X$) à coefficients dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble de ces polynômes est noté $E = \mathbb{R}[X]$.

Rem: Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $a_n \neq 0$, on dit que P est un polynôme de degré n : $\deg(P) = n$.

Si P, Q sont des polynômes non nuls, alors

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P) \quad \forall \lambda \neq 0$
- $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Rem: L'écriture (*) rend la loi de produit très intuitive : il suffit de développer par distributivité et de rassembler les termes de même degré.

Ex: $P = 1 - 5X + 7X^2$, $Q = 1 + X$

$\Rightarrow P \cdot Q = 1 - 4X + 2X^2 + 7X^3$.

2) Sous-espaces vectoriels (on suppose toujours que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Déf: Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$). On dit qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si :

i) F n'est pas vide : $F \neq \emptyset$

ii) F est stable pour l'addition : $\forall v, w \in F$ on a $v + w \in F$

iii) F est stable pour la multiplication par un scalaire :

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall v \in F$ on a $\lambda v \in F$.

Rem: De façon équivalente, une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel ssi F (munie des lois héritées de E) est encore un espace vectoriel.

Notez que F est nécessairement non vide car $0 \in F$.

Vérification détaillée :

a) Supposons que $F \subset E$ vérifie i), ii), iii). Par i) il existe $v \in F$. Par iii) on en déduit que $0_E = 0 \cdot v \in F \Rightarrow F$ contient le vecteur nul. Par ii) l'addition $+$ est une loi interne à F. Enfin, $\forall v \in F$, on a par iii) $-v = (-1) \cdot v \in F$. Ainsi $(F, +)$ est un groupe abélien. En appliquant encore iii), on conclut que F muni de l'addition $+$ et de la multiplication externe $\cdot$ est un espace vectoriel.

b) Supposons que $F \subset E$ est un espace vectoriel (muni des lois $+$ et $\cdot$). Alors :

1) $F \neq \emptyset$ car $0_E \in F$;

2) F est stable par addition et par multiplication externe (par définition).

Ainsi F vérifie i), ii), iii). $\square$

Exemples :

- Si E est un espace vectoriel réel :
  - le plus petit sous-espace est $F = \{0\}$
  - le plus grand sous-espace est $F = E$
- Soit $E = \mathbb{R}^3$, et

$$F = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x_3 = 0 \right\} \quad \text{(plan passant par l'origine !)}$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de E (vérifier !).

- Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et

$$F = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; f \text{ est continue} \}.$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de E (vérifier !).

Proposition : Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection

$$F := \bigcap_{i\in I} F_i \quad \text{est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Dém :

i) $0_E \in F_i \ \forall i \in I$ (car F_i sous-espace) $\Rightarrow 0_E \in F$.

ii) Si $v, w \in F$, alors $\forall i \in I$ on a $v, w \in F_i \Rightarrow v+w \in F_i$ (car F_i sous-espace) $\Rightarrow v+w \in F$.

iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in F$, alors $\forall i \in I$ on a $v \in F_i \Rightarrow \lambda v \in F_i$ (car F_i sous-espace) $\Rightarrow \lambda v \in F$. $\square$

Sauf dans des cas très particuliers, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Proposition Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Dém : (par contraposée) Supposons que $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$. Ainsi il existe $v_1 \in F_1$, $v_1 \notin F_2$ et il existe $v_2 \in F_2$, $v_2 \notin F_1$. Alors

$$v_1, v_2 \in F_1 \cup F_2 \quad \text{mais} \quad w := v_1 + v_2 \notin F_1 \cup F_2 \qquad (*)$$

$\Longrightarrow F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Justification de $(*)$:

- si $w \in F_1$, alors $v_2 = w - v_1 = w + (-1)\cdot v_1 \in F_1$: absurde
- si $w \in F_2$, alors $v_1 = w - v_2 \in F_2$: absurde

donc $w \notin F_1 \cup F_2$. $\square$

Déf : Si F_1, F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, on définit la somme $F_1 + F_2 = \{ v_1 + v_2 \in E \,;\, v_1 \in F_1, v_2 \in F_2 \}$.

Prop : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Dém : . $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} \in F_1 + F_2 \Rightarrow F_1 + F_2 \neq \emptyset$.

. Supposons que $v := v_1 + v_2 \in F_1 + F_2$ et $w := w_1 + w_2 \in F_1 + F_2$. Alors

$$v + w = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{groupe abélien !}}}{=} (\overbrace{v_1 + w_1}^{\in F_1}) + (\overbrace{v_2 + w_2}^{\in F_2}) \in F_1 + F_2.$$

. Enfin, si $v = v_1 + v_2 \in F_1 + F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda v = \lambda (v_1 + v_2) = \underbrace{\lambda v_1}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda v_2}_{\in F_2} \in F_1 + F_2. \quad \square$$

3) Combinaisons linéaires, familles libres ou liées

Déf : Soit E un espace vectoriel réel, et $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E (où $m \in \mathbb{N}^*$). On appelle combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_m$ tout vecteur w de la forme

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Rem : Une expression telle que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ est bien définie grâce à l'associativité de l'addition dans E : les différentes opérations peuvent être effectuées dans un ordre quelconque. Comme l'addition est en outre commutative, une permutation des vecteurs $v_1, \dots, v_m$ ne change pas l'ensemble des combinaisons linéaires.

Déf : Si $v_1, \dots, v_n \in E$ on note $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

Prop : $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_n$. Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1, \dots, v_n$.

Dém : • $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

• Si $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ et $w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

alors $v + w = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

• Avec les mêmes notations, si $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\mu v = \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\mu \lambda_i) v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel, qui contient évidemment les vecteurs $v_1, \dots, v_n$: $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$, etc.

• Soit maintenant F un sous-espace vectoriel de E contenant $v_1, \dots, v_n$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, on a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in F$, donc F contient nécessairement toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \dots, v_n$. Ainsi $F \supset \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. $\square$

Rem (facultative) : Plus généralement, si $X \subset E$ est une partie non vide, on peut définir $\mathrm{Vect}(X)$ comme le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X (i.e. l'intersection des sous-espaces contenant X). On vérifie que $\mathrm{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

La définition qui suit est fondamentale :

Déf : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E.

a) On dit que la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est libre si elle vérifie la condition suivante : $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

b) On dit que la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est liée si elle n'est pas libre.

Rem : Si la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est libre, on dit aussi que les vecteurs $v_1, \dots, v_m$ sont linéairement indépendants. Dans le cas contraire, on dit que $v_1, \dots, v_m$ sont linéairement dépendants.

Cas particuliers (petites valeurs de m)

$m=1$: $\{v_1\}$ est libre ssi $v_1 \neq 0$

- si $v_1 = 0$: $1 \cdot v_1 = 0$ alors que $1 \neq 0 \implies \{v_1\}$ liée
- si $v_1 \neq 0$: $\lambda v_1 = 0$ seulement si $\lambda = 0 \implies \{v_1\}$ est libre.

Dans le premier cas $\mathrm{Vect}(v_1) = \{0\}$, dans le second $\mathrm{Vect}(v_1) = \{\lambda v_1 ; \lambda \in \mathbb{R}\}$. (droite vectorielle engendrée par v_1).

$m=2$: (v_1, v_2) est liée ssi v_1, v_2 sont colinéaires : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q.
$v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.

- si par exemple $v_2 = \lambda v_1$ alors $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_1) \implies$ cas précédent !
- si (v_1, v_2) est libre on dit que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est le plan vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Remarques utiles : (cas général)

a) Si la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est libre, alors $v_i \neq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$.
En effet, si par exemple $v_m = 0$, alors

$$0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_{m-1} + 1 \cdot v_m \quad \text{(combinaison linéaire non triviale !)}$$

$\Longrightarrow$ la famille est liée.

b) La famille $(v_1, \dots, v_m)$ est liée ssi un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres.

- Si par exemple $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ avec $\lambda_m \neq 0$, alors
$$v_m = -\frac{1}{\lambda_m}\left(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{m-1} v_{m-1}\right).$$

- Inversement si $v_m = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$, alors
$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} + (-1) v_m = 0 \implies \text{la famille } (v_1, \dots, v_m) \text{ est liée.}$$

Dans un tel cas on a $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1}, v_m) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1})$.

Prop. Si $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ alors $\mathrm{Vect}(v, v_1, \dots, v_m) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$.

- $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m) \subset \mathrm{Vect}(v, v_1, \dots, v_m)$: (vrai quel que soit v)

si $w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$, alors $w = 0 \cdot v + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$!

- $\mathrm{Vect}(v, v_1, \dots, v_m) \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$: ($v \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m)$)

Par hypothèse, on a $v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i$ pour certains $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$.

Si $w = \lambda_0 v + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \in \mathrm{Vect}(v, v_1, \dots, v_m)$, alors

$$w = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_0 \mu_i + \lambda_i) v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m). \quad \square$$

Dans le même esprit :

Prop : Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre et si $v \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, alors la famille augmentée $(v, v_1, \dots, v_n)$ est encore libre.

Dém : Supposons que $\lambda_0 v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ pour certains $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda_0 \neq 0$, alors
$$v = -\frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$
ce qui contredit l'hypothèse que $v \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Ainsi $\lambda_0 = 0$ et
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ car $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.
Ainsi $(v, v_1, \dots, v_n)$ est encore libre. $\square$

Ex : $E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Si $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \\ -2\lambda_2 \end{pmatrix}$, alors nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ainsi la famille (v_1, v_2) est libre $\iff$ les vecteurs v_1, v_2 ne sont pas colinéaires.
$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \, ; \, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \, x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$
Le sous-espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est donc le plan d'équation $x_2 + x_3 = 0$.

4) Familles génératrices, bases

Déf. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. On dit que :
- la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice si $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$
- la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

La caractérisation suivante est très importante :

<u>Prop:</u> Une famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E ssi tout vecteur $v \in E$ admet une écriture unique de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les <u>coefficients du vecteur v dans la base</u> $(v_1, \dots, v_n)$.

<u>Dém:</u>

a) Supposons que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, et soit $v \in E$.

- comme la famille est génératrice, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.q.
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i .$$
- supposons qu'on ait aussi $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ avec $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$.
  Alors:
$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i ,$$
  et comme la famille est libre on conclut que $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1, \dots, n$.
  Ainsi l'écriture $(**)$ est unique.

b) Supposons que tout $v \in E$ admette une écriture unique de la forme $(**)$.
Alors

- $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$ par définition $\Rightarrow$ la famille est génératrice.
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$, alors l'unicité de l'écriture $(**)$ lorsque $v = 0$ donne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
  Ainsi la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre. On conclut que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E. $\square$

Déf : Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs. On dit qu'une famille $(w_1, \dots, w_m)$ est une extraction de $(v_1, \dots, v_n)$ s'il existe une application $\varphi : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ strictement croissante telle que $w_i = v_{\varphi(i)}$ pour $i = 1, \dots, m$.

Rem : On a forcément $m \leq n$. En termes simples, une extraction de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une sous-famille obtenue en retirant certains éléments (l'application φ servant à renuméroter ceux qui restent).

Ex : (v_1, v_2, v_4) est une extraction de (v_1, v_2, v_3, v_4).
On pose $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2$, $w_3 = v_4$.

Dans la suite on suppose que $E \neq \{0\}$, pour éviter de parler de familles à 0 élément.

Prop : Si E admet une famille génératrice $(v_1, \dots, v_n)$, il existe une extraction $(w_1, \dots, w_m)$ de $(v_1, \dots, v_n)$ qui est une base de E.

"De toute famille génératrice, on peut extraire une base"

Dém : On construit la famille extraite $(w_1, \dots, w_m)$ inductivement :

- Initialisation : soit $i_1 = \min\{i \in \{1, \dots, n\} ; v_i \neq 0\}$.
  (On sait que les v_i ne sont pas tous nuls, car sinon $E = \{0\}$).
  On pose $w_1 = v_{i_1}$. Noter que $\mathrm{Vect}(w_1) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{i_1})$.
- Etape de récurrence : on suppose qu'on a construit une extraction $(w_1, \dots, w_k)$ et que la famille $(w_1, \dots, w_k) = (v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ est libre, avec
  $$\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{i_k}).$$

Si $\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k) = E$, la famille $(w_1, \dots, w_k)$ est une base, et on a terminé. Sinon on pose :

$$\begin{cases} i_{k+1} = \min\{ i_k < i \leq n \,;\, v_i \notin \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k)\} & (\text{N.B. } i_k < n\,!) \\ w_{k+1} = v_{i_{k+1}}. \end{cases}$$

Alors $(w_1, \dots, w_{k+1})$ est une famille libre et $\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_{k+1}) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{i_{k+1}})$.

Cette construction se termine en un nombre fini d'étapes (au plus n) et fournit donc une extraction de $(v_1, \dots, v_n)$ qui est une base de E. □

<u>Déf</u> : On dit qu'un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ est <u>de dimension finie</u> s'il existe dans E une famille génératrice finie.

<u>Corollaire</u> : Tout espace vectoriel $E \neq \{0\}$ de dimension finie admet une base.

<u>Dém</u> : Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice, on en extrait une base par la proposition précédente.

<u>Proposition</u> (<u>théorème de la base incomplète</u>)

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute famille libre peut être <u>complétée</u> en une base de E.

<u>Dém</u> : Par hypothèse E admet une famille génératrice $(v_1, \dots, v_n)$.
Soit $(w_1, \dots, w_k)$ une famille libre dans E. La famille

$$(w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_n)$$

est évidemment génératrice. On peut donc en extraire une base $(z_1, \dots, z_m)$ en appliquant le procédé décrit dans la prop. précédente. La construction garantit que $m \geq k$ et $(z_1, \dots, z_k) = (w_1, \dots, w_k)$. Ainsi $(w_1, \dots, w_k)$ est une extraction de $(z_1, \dots, z_m)$. □

5) Théorie de la dimension

Lemme : Soit E un espace vectoriel admettant une famille génératrice $(v_1, \dots, v_n)$. Si $(w_1, \dots, w_m)$ est une famille libre dans E, alors $m \leq n$.

Dém : Supposons au contraire que $m > n$. On construit inductivement une nouvelle famille génératrice ainsi :

- **Initialisation :** Comme $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i. \quad (\text{les } \lambda_i \text{ ne sont pas tous nuls !})$$

Quitte à permuter les $v_1, \dots, v_n$, on suppose que $\lambda_1 \neq 0$. Alors

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}\left(w_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i\right).$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}(w_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$, donc la famille $(w_1, v_2, \dots, v_n)$ est génératrice.

- **Récurrence :** Supposons que, pour un $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on ait montré que la famille $(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ soit génératrice. On a donc

$$w_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i, \qquad \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \text{ non tous nuls.}$$

Quitte à permuter, on suppose que $\lambda_{k+1} \neq 0$, de sorte que

$$v_{k+1} = \frac{1}{\lambda_{k+1}}\left(w_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i - \sum_{i=k+2}^{n} \lambda_i v_i\right).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, v_n) = \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n) = E$, donc la famille $(w_1, \dots, w_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n)$ est génératrice.

Conclusion : La famille $(w_1, \dots, w_n)$ est génératrice, donc $w_m \in \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n)$ ce qui contredit l'hypothèse que $(w_1, \dots, w_m)$ est libre. $\square$

<u>Corollaire:</u> Si $(v_1, \dots, v_n)$ et $(w_1, \dots, w_m)$ sont deux bases de E, alors $n = m$. (Toutes les bases ont le même nombre d'éléments).

<u>Déf:</u> Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de E l'entier $n \in \mathbb{N}$ défini par:

- si $E = \{0\}$: $\dim(E) = 0$
- si $E \neq \{0\}$: $\dim(E) =$ nombre d'éléments d'une base de E.

<u>Exemples:</u>

1) $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. La base "canonique" de $\mathbb{R}^n$ est la famille $(e_1, \dots, e_n)$ définie par:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) L'algèbre des polynômes $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.
En effet, notons $v_0 = 1$, $v_1 = X$, $v_2 = X^2$, etc... On prétend que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ est libre. En effet, supposons que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{pour certains } \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Ceci signifie que le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ est nul, ce qui entraîne que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Le sous-espace $\mathrm{Vect}(v_0, v_1, \dots, v_n)$ est donc de dimension $n+1$.
(Il s'agit du sous-espace formé des polynômes de degré $\leq n$.)

Comme $\mathbb{R}[X] \supset \mathrm{Vect}(v_0, \dots, v_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a forcément

$\dim(\mathbb{R}[X]) = +\infty$. $\square$

Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n. Une famille $(v_1, .., v_n)$ d'éléments de E est libre si et seulement si elle est génératrice. Dans ce cas elle forme une base de E.

⚠ La cardinalité de la famille $(v_1, .., v_n)$ doit être égale à la dimension de E !

Dém :

- supposons que $(v_1, .., v_n)$ est libre. Alors $\mathrm{Vect}(v_1, .., v_n) = E$ ($\Rightarrow$ génératrice). En effet, il existerait sinon $w \in E$ t.q. $w \notin \mathrm{Vect}(v_1, .., v_n)$, de sorte que la famille augmentée $(v_1, .., v_n, w)$ serait libre. Mais par le lemme un espace de dimension n ne peut contenir une famille libre à $n+1$ éléments !
- Supposons que $(v_1, ..., v_n)$ est génératrice. Si elle n'est pas libre, on a (par exemple) $v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow \mathrm{Vect}(v_2, .., v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, .., v_n) = E$. Mais par le lemme aucune famille à $n-1$ éléments ne peut être génératrice dans un espace de dimension n ! $\square$

Dans l'exemple des polynômes considéré ci-dessus, on a utilisé le résultat suivant qui mérite d'être formulé explicitement :

Prop : Un espace vectoriel E est de dimension infinie ssi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, E contient une famille libre $(v_1, .., v_n)$ à n éléments.

Dém :

- Si $\dim(E) = n < \infty$, alors une famille libre dans E a au plus n éléments.
- Si E n'est pas de dimension finie, on construit inductivement une famille infinie $(v_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que $(v_1, ..., v_n)$ est libre $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

– initialisation : $E \neq \{0\} \Rightarrow$ il existe $v_1 \in E$, $v_1 \neq 0$.

- étape de récurrence : on suppose construite une famille libre $(v_1, \dots, v_n)$. On a $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \neq E$, car sinon E serait de dimension n. Donc il existe $v_{n+1} \in E$, $v_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, et la famille $(v_1, \dots, v_{n+1})$ est encore libre. □

Déf : Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est la somme directe de F_1 et F_2, et on note $E = F_1 \oplus F_2$, si :

a) $E = F_1 + F_2$ et b) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Proposition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1) F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

2) Il existe un sous-espace vectoriel G de E t.q. $E = F \oplus G$.

3) On a $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Rem : On dit que G est un sous-espace supplémentaire de F dans E.

Dém : Soit $n = \dim(E)$. On suppose que $n \geq 1$ (rien à montrer sinon).

1) Si F n'était pas de dimension finie, F contiendrait une famille libre à $n+1$ éléments ce qui est impossible car $F \subset E$. Donc F est de dimension finie et toute famille libre dans F a au plus n éléments $\Rightarrow \dim(F) \leq n$.

2) Si $F = \{0\}$ on prend $G = E$. Sinon, soit $(v_1, \dots, v_k)$ une base de F (on a vu que $1 \leq k \leq n$). Par la prop. page 28, cette famille libre dans E peut être complétée en une base de E, que l'on note :

$$(\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{F}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{G}) = (v_1, \dots, v_n).$$

Notons $G = \{0\}$ si $k = n$ et $G = \mathrm{Vect}(v_{k+1}, \dots, v_n)$ sinon.
Alors G est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-k$, et on prétend que $E = F \oplus G$. C'est évident si $n = k$, et sinon :

- tout vecteur $v \in E$ s'écrit, pour certains $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i}_{\in G} \in F + G \quad \Rightarrow \quad \underline{E = F + G.}$$

- Supposons que $v \in F \cap G$. Alors $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ et $\mu_{k+1}, \dots, \mu_n$ t.q.

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i v_i$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i v_i .$$

Comme la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, ceci entraîne que $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ (et $\mu_{k+1} = \dots = \mu_n = 0$) $\Rightarrow v = 0$. $\Rightarrow$ $\underline{F \cap G = \{0\}}$

3) Avec les notations ci-dessus : $\dim(F) = k$, $\dim(G) = n-k$, donc $\dim(E) = n = \dim(F) + \dim(G)$. $\square$

Corollaire : Si $E = F_1 \oplus F_2$, alors $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Remarque : Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors :

- $F = \{0\}$ ssi $\dim(F) = 0$
- $F = E$ ssi $\dim(F) = \dim(E)$.

⚠ Si E est de dimension infinie, il existe toujours des sous-espaces F de E t.q. $F \neq E$ mais "$\dim(F) = \dim(E) = +\infty$".

Annexe: Extraire une base d'une famille génératrice (exemple).

Dans $E = \mathbb{R}^3$ on considère les cinq vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) La famille $(V_1, \dots, V_5)$ est génératrice : Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad \text{où} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que :

- $e_3 = V_3 - V_4 = V_5 - V_1 \in \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_n)$
- $e_2 = V_4 - 2e_3 = 3V_4 - 2V_3 \in \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_n)$
- $e_1 = V_1 - e_2 = V_1 - 3V_4 + 2V_3 \in \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_n)$

Ainsi $X \in \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_n) \Longrightarrow \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_n) = \mathbb{R}^3$.

b) Extraction d'une base par la proposition en page 27 :

- $V_1 \neq 0$ donc on pose $W_1 = V_1$.
- V_2 n'est pas un multiple de V_1 donc on pose $W_2 = V_2$
- $V_3 = V_2 - V_1 \in \mathrm{Vect}(W_1, W_2) \Rightarrow$ on écarte V_3.
- Montrons que $V_4 \notin \mathrm{Vect}(W_1, W_2)$: si $V_4 = \lambda V_1 + \mu V_2$ alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + 2\mu \\ 3\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda = -1, \mu = 1 \\ 3\mu = 2 \ \Rightarrow \ \text{contradiction !} \end{array}$$

On prend donc $W_3 = V_4$. On vérifie (comme ci-dessus) que $\mathrm{Vect}(W_1, W_2, W_3) = \mathbb{R}^3$.

Conclusion : (V_1, V_2, V_4) est une base de $\mathbb{R}^3$, extraite de $(V_1, \dots, V_5)$.