Contrôle continu INF303 - L2 INM   27 octobre 2023

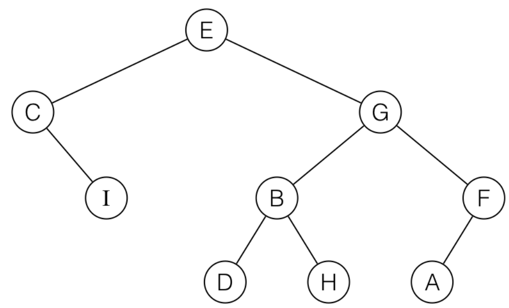
A lire attentivement avant de commencer le sujet :

- **Toutes les réponses doivent être justifiées.**
- Tous les graphes sont considérés comme simples et sans boucle.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.
- Les appareils électroniques sont interdits.
- Cet énoncé comporte 4 pages et 7 exercices.

Exercice 1 : **Parcours d'arbre** (2 points)

Pour l'arbre enraciné dessiné ci-contre, écrire les sommets dans l'ordre :

1. parcours en largeur
2. parcours en profondeur préfixe
3. parcours en profondeur infixe
4. parcours en profondeur postfixe



Exercice 2 : **Questions diverses** (4 points)

Question 1 – On considère la matrice M ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Cette matrice peut-elle être une matrice d'adjacence ? Pourquoi ? Si la réponse est oui, dessinez le graphe correspondant.

(b) Cette matrice peut-elle être une matrice d'incidence ? Pourquoi ? Si la réponse est oui, dessinez le graphe correspondant.

Question 2 – Séquence de degrés

(a) Existe-t-il un graphe dont la séquence de degrés est $1, 1, 1, 2, 3, 3, 3$?

(b) Existe-t-il un arbre avec la même séquence de degrés ?

Question 3 – Dans la famille Tapahunkado, on organise chaque année une grande réunion de famille pour rassembler les 17 membres de la famille. A cette occasion, de nombreux cadeaux sont échangés : chacun fait un cadeau à tous les autres membres de la famille. Au fil du temps, les membres de la famille Tapahunkado prennent conscience que cette façon de faire n'est pas très écologique et, dans un souci de sobriété, elle décide de limiter le nombre de cadeaux pour l'édition de décembre 2023 de leur fête familiale. Chaque personne n'offrira un cadeau qu'à 5 autres personnes de la famille choisis au hasard. Un grand tirage au sort est organisé.

Est-il possible que chaque personne reçoive un cadeau exactement des 5 personnes à qui elle en a offert un ?

Exercice 3 : **Farandole de desserts** (3 points)

Virginie a préparé 8 desserts différents pour son anniversaire, lors duquel elle attend 100 invités :

1. Baba au Rhum
2. Chou à la crème
3. Éclair au chocolat
4. Fondant au chocolat
5. Glace à la vanille
6. Millefeuille
7. Panna Cotta
8. Tarte aux fraises

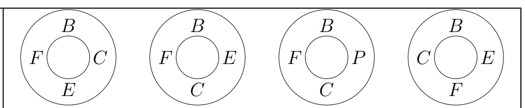
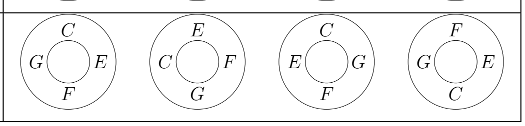
Chaque invité aura 4 desserts parmi les 8, et elle souhaiterait que, d'une façon ou d'une autre (détaillée dans la suite), un invité n'ait pas les mêmes desserts que n'importe quel autre.

Question 1 – Combien d'assortiments différents de 4 desserts peut-elle faire (deux assortiments sont différents s'ils comprennent au moins un dessert qui n'est pas le même) ? Ce nombre suffit-il pour que les 100 invités aient des assortiments différents deux-à-deux ?

Précision : l'assortiment "Baba au Rhum + Choux à la crème + Fondant au chocolat + Panna Cotta" est différent de l'assortiment "Baba au Rhum + Choux à la crème + Millefeuille + Pana Cotta" mais n'est pas différent de l'assortiment " Choux à la crème + Fondant au chocolat + Baba au Rhum + Panna Cotta".

Question 2 – Déçue de ne pouvoir faire un assortiment différent par personne, Virginie a une nouvelle idée : elle va disposer les 4 desserts de chaque personne de façon circulaire dans une assiette ronde, et elle veut que chaque invité ait une assiette différente. Combien d'assiettes différentes peut-elle faire ? Est-ce suffisant pour que ses 100 invités aient chacun une assiette différente des autres ?

Précision : dans le tableau ci-dessous, les 4 assiettes de la première ligne sont considérées deux-à-deux différentes, mais les 4 assiettes de la deuxième lignes sont considérées comme deux-à-deux identiques. On utilise une abbréviation pour chaque type de dessert (première lettre du nom).

Différentes :	
Identiques :	

Exercice 4 : **TP - matrice d'incidence** (2 points)

On se place ici dans le contexte des TP et on suppose qu'on dispose du fichier `graphe.py` qui était fourni au TP2, pour une utilisation avec des graphes non orientés et non pondérés. Dans ce fichier, on fournit une classe pour manipuler les graphes. On rappelle ici quelques fonctions permettant de manipuler ces graphes, essentiellement à travers des exemples. Dans tous ces exemples, on suppose qu'un graphe `g` est défini préalablement à l'aide d'un constructeur.

— `g.nombre_sommets()` renvoie le nombre de sommets du graphe `g`,

— `g.nombre_aretes()` renvoie le nombre de sommets du graphe `g`,

— `g.ajouter_arete(u,v)` modifie le graphe `g` en lui ajoutant l'arête `(u,v)`,

— `g.supprimer_arete(u,v)` modifie le graphe `g` en supprimant l'arête `(u,v)` (on suppose qu'elle existe),

— `g.degre(u)` renvoie le degré du sommet `u` dans le graphe `g`,

— lors de l'itération `for v in g.voisins(u) :`, la variable `v` parcourt les voisins dans `g` du sommet `u`, dans l'ordre croissant,

— `g.premier_voisin(u)` renvoie l'indice du premier voisin de `u` dans `g`.

Question 1 – Ecrire la fonction `matrice_incidence` qui prend en argument un graphe `g` et qui renvoie la matrice d'incidence de `g` sous forme d'une liste de listes (la premier élément de la liste est la liste qui constitue la première ligne de la matrice, et ainsi de suite). Votre graphe passé en paramètre ne doit pas être modifié.

Exercice 5 : **Transfert de courrier** (4 points)

Marion et Alex souhaitent envoyer les faire-part de naissance de leur bébé dans leur famille, sans payer de timbre et en minimisant l'emprunte carbone (CO_2) totale de la distribution. Pour cela, ils veulent faire passer les faire-part en mains propres à certains membres de leur famille, qui à leur tour seront chargés de distribuer une partie des faire-part à d'autres membres de la famille et ainsi de suite. Lorsqu'une personne P_1 se rend chez une personne P_2 pour lui donner un ou des faire-part :

— il faut que P_1 connaisse l'adresse de P_2,

— la quantité de CO_2 dépensée ne dépend pas du nombre d'enveloppes (leur poids est négligeable dans le transport)

Tout le monde n'a pas forcément l'adresse de tous les membres de la famille, donc voici le carnet d'adresses de chaque personne, avec la quantité de CO_2 associée pour faire le trajet aller-retour :

1. Alex et Marion : Céline (400g), David (31 000g), Edith (300g), Gisèle (2 000g)
2. Bernard : David (4 000g), Gisèle (34 000g)
3. Céline : Alex et Marion (400g), David (30 000g), Edith (200g), François (3 000g)
4. David : Alex et Marion (31 000g), Bernard (4 000g), Céline (30 000g)
5. Edith : Alex et Marion (300g), Céline (200g), François (3 200g)
6. François : Céline (3 000g), Edith (3 200g), Gisèle (1 400g)
7. Gisèle : Alex et Marion (2 000g), Bernard (34 0000g), François (1 400g)

On remarque que le carnet d'adresses est symétrique : si une personne P_1 possède l'adresse d'une personne P_2, alors P_2 possède aussi l'adresse de P_1.

Question 1 – Modéliser la problématique comme un problème de théorie des graphes, sur un graphe G que vous définirez correctement. On pourra utiliser l'initiale d'une personne comme abréviation pour cette personne.

Question 2 – En utilisant une technique vue dans cette matière, que vous expliciterez, résoudre le problème de graphe défini à la question précédente.

Question 3 – Explicitez la distribution de faire-part que vous conseillez à Marion et Alex, et la quantité de CO_2 totale dépensée.

Question 4 – Si les carnets d'adresses n'étaient pas symétriques, est-ce que la même méthode aurait marché ?

Exercice 6 : **Salage des routes** (3 points)

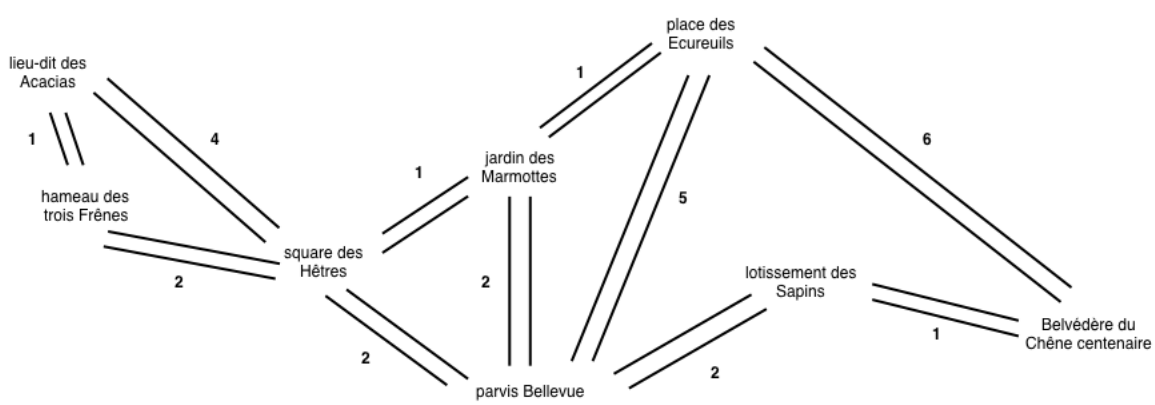


FIGURE 1 – Les routes principales

Une petite commune de moyenne montagne souhaite organiser au mieux le salage de ses routes principales en hiver pour en limiter le coût. Le schéma de la figure 1 représente les routes principales qui doivent être salées en cas de chute de neige. Les nombres sur les arêtes représentent les distances en kilomètres. Il faut utiliser $0,2$ tonnes de sel par kilomètre. Le camion de salage doit partir de l'entrepôt situé place des Ecureuils, parcourir chaque route à saler et revenir à l'entrepôt. Le dispositif qui permet au camion de bloquer l'épandage de sel est cassé, si bien qu'il ne peut pas parcourir une route sans y répandre du sel. Pour des raisons de sécurité, le camion ne doit donc pas passer deux fois par la même route car il y aurait trop de sel sur la route. Les services municipaux se demandent s'il est possible d'organiser un parcours pour saler les routes principales en respectant toutes ces contraintes.

Question 1 – Modéliser le problème comme un problème de théorie des graphes, sur un graphe G que vous définirez correctement.

Question 2 – Est-il possible de saler toutes les routes principales de la commune tout en respectant les normes de sécurité ? Vous justifierez l'existence ou non d'une solution.

Question 3 – Il y a aussi quelques routes secondaires :

— entre le lieu-dit des Acacias et le jardin des Marmottes, distance 6 km

— entre le lieu-dit des Acacias et la place des Ecureuils, distance 8 km

— entre la place des Ecureuils et le lotissement des Sapins, distance 4 km

Ces routes étant secondaires, le camion n'est pas obligé de les saler, mais il peut quand même y passer dans son parcours (mais pas plus d'une fois dans chacune, toujours pour des raisons de sécurité).

Est-il raisonnable d'utiliser une ou plusieurs de ces routes dans le parcours du camion ? Si oui, lesquelles et pourquoi ? Si plusieurs choix sont possibles, il faudra privilégier celui qui permet d'utiliser le moins de sel possible.

Exercice 7 : **Attaque de dragon** (3 points)

Victoria joue à un jeu de société avec un jeu de cartes spéciales qui comporte :

— des cartes Dragon, chacune avec une valeur entière indiquant la puissance du dragon

— des cartes bleues de valeur 5,

— des cartes rouges de valeur 3,

— des cartes jaunes de valeur 2.

Lorsque son adversaire pose une carte Dragon de puissance n, Victoria doit se défendre en posant un ensemble de cartes bleues, rouges et jaunes de telle sorte que :

— la somme de ces cartes est précisément égale à la puissance n du Dragon ;

— les couleurs de ces cartes sont équilibrées, à deux près maximum ; par exemple, elle peut poser 12 cartes bleues, 10 cartes rouges et 10 cartes jaunes, ou encore 11 cartes bleues, 10 cartes rouges et 12 jaunes, mais elle ne peut pas poser 10 cartes bleues, 15 cartes rouges et 13 cartes jaunes (car il y a 5 cartes rouges de plus que de cartes bleues, et $5 > 2$).

Le but de cet exercice est de montrer par récurrence que, pour tout dragon de puissance $n \geq 2$, il existe une défense possible pour Victoria (en supposant qu'elle peut avoir autant de cartes qu'elle veut de chaque couleur).

Pour tout entier $n \geq 2$, formalisons la propriété $P(n)$ que l'on cherche à montrer :

$$P(n) = \text{"}\exists p, q, s \in \mathbb{N} \text{ tels que } n = 5p + 3q + 2s \text{ et } max(p, q, s) - min(p, q, s) \leq 2\text{"}$$

Nous vous conseillons que faire une récurrence à 5 crans, c'est-à-dire de montrer dans l'étape d'hérédité que $P(n)$ implique $P(n + 5)$ (ou que $P(n - 4)$ implique $P(n + 1)$, comme vous préférez, mais soyez explicites sur votre copie).

Question 1 – Que représentent les entiers p, q et s qui apparaissent dans $P(n)$?

Question 2 – Une fois n'est pas coutume, commençons par prouver l'étape d'hérédité. Prouvez que, si $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq 2$, alors $P(n + 5)$ est vraie.

Question 3 – Pour quelles valeurs de n faut-il prouver que $P(n)$ est vraie dans l'initialisation ?
Indice : si $P(2)$ est vraie et que $P(n)$ implique $P(n + 5)$, alors $P(2)$ implique $P(7)$

Question 4 – Montrer l'étape d'initialisation puis conclure.