Examen terminal - MAP101 - décembre 2023

Durée 2 h - documents et calculette interdits

Les différentes parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque

Le barème est donné à titre indicatif

Justifier au mieux chaque réponse

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation

---

Partie 1 (4 pt)
Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante (E_1) suivante :

$$y'(x) + \frac{2\,x}{x^2+1}\,y(x) = 4\,x, \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \tag{E_1}$$

Déterminer la solution de l'équation différentielle (E_1) vérifiant $y(1) = 1$.

Partie 2 (3 pt)
Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (H_2) suivante :

$$y''(x) - 4\,y'(x) + 3\,y(x) = 0, \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \tag{H_2}$$

Déterminer la solution de l'équation différentielle (H_2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Partie 3 (3 pt) À partir des données suivantes

k	1	2	3	4	5
t_k	0	3	5	8	9
y_k	5	2	4	10	8

on calcule la fonction $y = f(t)$ par interpolation linéaire par morceaux.

1. Déterminer l'expression de la fonction $f(t)$ pour $t \in [\,3\,;\,5\,]$.
2. Quelle est la valeur de $f(7)$?

(suite du sujet au verso) →

Partie 4 (3 pt)
Soit la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de la fonction f.
2. En faisant le changement de variable $t = (u^2-1)^2$, calculer l'intégrale définie suivante :

$$A = \int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie 5 (7 pt)
Pour cette partie :
– la question 3 peut être traitée, même si la question 2 n'a pas été traitée,
– la question 4 peut être traitée, même si les questions 1, 2 et 3 n'ont pas été traitées.

Dans cette partie, α désigne un réel supérieur à 1, et p désigne un entier naturel.
On note $A(\alpha,p)$ l'intégrale définie suivante :

$$A(\alpha,p) = \int_1^\alpha \big(\ln(x)\big)^p\,\mathrm{d}x$$

Pour $p=0$, on a

$$A(\alpha,0) = \int_1^\alpha \mathrm{d}x$$

1. Dans le cas $p=0$, calculer la valeur de $A(\alpha,0)$ en fonction de α.
2. Dans le cas $p>0$, montrer l'égalité (R) suivante :

$$A(\alpha,p) = \alpha\,\big(\ln(\alpha)\big)^p - p\,A(\alpha,p-1) \qquad (R)$$

Pour cela, utiliser l'intégration par parties en posant $u(x) = \big(\ln(x)\big)^p$ et $v'(x) = 1$.

• • •

Soit l'intégrale définie suivante :

$$B = \int_1^5 \big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

3. En utilisant le résultat de la question 1, et en admettant l'égalité (R) de la question 2, calculer la valeur de B.
4. En utilisant la méthode des rectangles (valeur à gauche), calculer $\overline{B}$, approximation de l'intégrale B avec un découpage de l'intervalle $[\,1\,;\,5\,]$ en $n=4$ sous-intervalles.

Corrigé - Examen terminal - décembre 2023

Partie 1
Pour cette équa. diff., on a

$$a(x) = \frac{2\,x}{x^2+1} \qquad \text{et} \qquad f(x) = 4\,x$$

(1) Une primitive de $a(x) = \dfrac{2\,x}{x^2+1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est $A(x) = \ln|u(x)| = \ln|x^2+1| = \ln(x^2+1)$ car $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc les solutions de l'E.D. homogène associée sont

$$y_H(x) = C\,\exp(-A(x)) = C\,\exp(-\ln(x^2+1)) = \frac{C}{\exp(\ln(x^2+1))} = \frac{C}{x^2+1} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(2) On cherche une solution particulière y_0 avec

$$y_0(x) = \frac{g(x)}{x^2+1}$$

$$\text{avec} \qquad g'(x) = f(x)\,\exp(+A(x)) = 4\,x\,\exp(\ln(x^2+1)) = 4\,x\,(x^2+1) = 4\,x^3+4\,x$$

$$\Rightarrow g(x) = x^4+2\,x^2 \Rightarrow y_0(x) = \frac{x^4+2\,x^2}{x^2+1}$$

(3) Les solutions de l'E.D. (E_1) sont donc

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = \frac{C}{x^2+1} + \frac{x^4+2\,x^2}{x^2+1} = \boxed{\frac{x^4+2\,x^2+C}{x^2+1}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

(4) On détermine ensuite la constante C avec la condition $y(1) = 1$:

$$y(1) = \frac{1^4+2\times1^2+C}{1^2+1} = \frac{C+3}{2} = 1 \iff C = -1$$

La solution est donc

$$\boxed{y(x) = \frac{x^4+2\,x^2-1}{x^2+1}}$$

• • •

Alternative 1 : dans l'étape (2) (recherche d'une solution particulière y_0),
comme primitive de $g'(x) = 4\,x^3+4\,x$, on peut aussi choisir la fonction

$$g(x) = x^4+2\,x^2+1 = (x^2+1)^2$$

ce qui donne une autre solution particulière

$$y_1(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1} = x^2+1$$

puis l'expression suivante pour les solutions de (E_1) :

$$y(x) = y_H(x) + y_1(x) = \frac{C_1}{x^2+1} + x^2 + 1 \qquad \text{avec } y(1) = \frac{C_1}{2} + 2 = 1 \Rightarrow C_1 = -2$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{2}{x^2+1} + x^2 + 1 = \frac{-2+(x^2+1)^2}{x^2+1} = \frac{-2+x^4+2\,x^2+1}{x^2+1} = \boxed{\frac{x^4+2\,x^2-1}{x^2+1}}$$

• • •

Alternative 2 : la fonction $a(x) = \dfrac{2\,x}{x^2+1}$ est de forme particulière $a(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+1$.
Cette forme particulière pour $a(x)$ permet d'avoir une résolution de l'équation différentielle en faisant les étapes (1), (2) et (3) simultanément, de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&y'(x) + \frac{2\,x}{x^2+1}\,y(x) = 4\,x \\
&\Rightarrow (x^2+1)\,y'(x) + 2\,x\,y(x) = 4\,x\,(x^2+1) \\
&\iff u(x)\,y'(x) + u'(x)\,y(x) = 4\,x^3 + 4\,x \\
&\iff z'(x) = 4\,x^3 + 4\,x \quad \text{avec} \quad z(x) = u(x)\,y(x) = (x^2+1)\,y(x) \\
&\Rightarrow (x^2+1)\,y(x) = z(x) = x^4 + 2\,x^2 + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow y(x) = \frac{x^4+2\,x^2+C}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Partie 2

Pour l'E.D. (H_2), on a $a=-4$, $b=3$ et $f(x)=0$ donc l'E.D est homogène.

(1) L'équation caractéristique est :

$$r^2 + a\,r + b = r^2 - 4\,r + 3 = 0$$

On a $\Delta = (-4)^2 - 4\times 3 = 4 > 0$ ce qui donne deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.
Les solutions de l'E.D. (H_2) sont donc

$$y(x) = C_1\,\exp(x) + C_2\,\exp(3\,x) \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

(2) On détermine C_1 et C_2 avec les deux conditions. On a

$$y'(x) = C_1\,\exp(x) + 3\,C_2\,\exp(3\,x)$$

$$\Rightarrow y(0) = C_1 + C_2 = 1 \text{ et } y'(0) = C_1 + 3\,C_2 = -1 \iff C_1 = 2 \text{ et } C_2 = -1$$

La solution de l'E.D. (H_2) est donc

$$\boxed{y(x) = 2\,\exp(x) - \exp(3\,x)}$$

Partie 3

Sur chaque intervalle $[t_k; t_{k+1}]$, la fonction f est de la forme $f(t) = a\,t + b$.

1. L'intervalle $[3;5]$ correspond à $[t_2;t_3]$ donc

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(t_2) & = & a\,t_2 + b & = & y_2 \\ f(t_3) & = & a\,t_3 + b & = & y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3\,a + b & = & 2 \\ 5\,a + b & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} a & = & 1 \\ b & = & -1 \end{array}\right\}$$

   Sur l'intervalle $[3;5]$, $\boxed{f(t) = t - 1}$.

2. $t = 7$ appartient à l'intervalle $[5;8]$ qui correspond à $[t_3;t_4]$ donc

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(t_3) & = & a\,t_3 + b & = & y_3 \\ f(t_4) & = & a\,t_4 + b & = & y_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} 5\,a + b & = & 4 \\ 8\,a + b & = & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} a & = & 2 \\ b & = & -6 \end{array}\right\}$$

   Sur l'intervalle $[5;8]$, $f(t) = 2\,t - 6$ et donc $\boxed{f(7) = 8}$.

Partie 4

1. Pour le domaine de définition de f, il faut que :

$$t \geq 0 \qquad \text{et} \qquad 1+\sqrt{t} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+\sqrt{t}} \neq 0$$

   Si $t \geq 0$, alors $1+\sqrt{t} \geq 1 > 0$, et les deux autres conditions ($1+\sqrt{t} \geq 0$ et $\sqrt{1+\sqrt{t}} \neq 0$) sont alors vérifiées.
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = [\,0\,;\,+\infty\,[}$.

2. Le changement de variable $t = (u^2-1)^2$ est donné dans le "bon sens" :
   (1) $t = \varphi(u) = (u^2-1)^2 \iff u = \sqrt{1+\sqrt{t}}$
   (2) $\varphi'(u) = (2\,u) \times (2\,(u^2-1)^{2-1}) = 4\,u\,(u^2-1)$
   (3) $t = 0 \iff u = \sqrt{1+\sqrt{0}} = 1$ et $t = 9 \iff u = \sqrt{1+\sqrt{9}} = 2$
   (4) On a alors

$$\int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{u}\,4\,u\,(u^2-1)\,\mathrm{d}u = 4\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$$

$$= 4\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^2 = 4\left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - 4\left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = 4\left(\frac{8}{3} - \frac{6}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)$$

$$= 4\,\frac{2}{3} - 4\,\frac{-2}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

Partie 5

1. Pour $p = 0$, on a donc :
$$A(\alpha, 0) = \int_1^\alpha \mathrm{d}x = \Big[\, x \,\Big]_1^\alpha = \boxed{\alpha - 1}$$

2. Soit $p > 0$ et $A(\alpha, p) = \displaystyle\int_1^\alpha \big(\ln(x)\big)^p \,\mathrm{d}x$.
Pour l'intégration par parties, on pose
$$\begin{cases} u(x) = \big(\ln(x)\big)^p & \Rightarrow \quad u'(x) = \dfrac{p}{x}\big(\ln(x)\big)^{p-1} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow \quad v(x) = x \end{cases}$$
$$\Rightarrow A(\alpha, p) = \Bigg[x\,\big(\ln(x)\big)^p\Bigg]_1^\alpha - \int_1^\alpha x\,\frac{p}{x}\,\big(\ln(x)\big)^{p-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \alpha\,\big(\ln(\alpha)\big)^p - 1\,\big(\ln(1)\big)^p - p\int_1^\alpha \big(\ln(x)\big)^{p-1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\alpha\,\big(\ln(\alpha)\big)^p - p\,A(\alpha, p-1)}$$

3. Il faut remarquer que $B = A(5, 2)$, et en utilisant les résultats des deux questions précédentes :
$$B = A(5,2) = 5\,\big(\ln(5)\big)^2 - 2\,A(5,1)$$
$$A(5,1) = 5\,\ln(5) - A(5,0) = 5\,\ln(5) - (5-1) = 5\,\ln(5) - 4$$
$$\Rightarrow B = 5\,\big(\ln(5)\big)^2 - 2\,\big(5\,\ln(5) - 4\big) = \boxed{5\,\big(\ln(5)\big)^2 - 10\,\ln(5) + 8}$$

4. L'approximation de $B = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles (valeur à gauche) avec n sous-intervalles est
$$\overline{B} = h\sum_{k=1}^{n} f\big(a + (k-1)\,h\big) = h\,\Big[f(a) \ + \ f(a+h) \ + \ f(a+2\,h) + \cdots + \ f(a+(n-1)\,h)\Big]$$
$$\text{avec} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$
Dans notre cas on a
$$f(x) = \big(\ln(x)\big)^2\ ,\ a = 1\ ,\ b = 5 \text{ et } n = 4 \Rightarrow h = \frac{5-1}{4} = 1$$
$$\overline{B} = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \big(\ln(1)\big)^2 + \big(\ln(2)\big)^2 + \big(\ln(3)\big)^2 + \big(\ln(4)\big)^2$$
$$= \boxed{\big(\ln(2)\big)^2 + \big(\ln(3)\big)^2 + \big(\ln(4)\big)^2}$$