Fonctions et dénombrement

Fonctions

Exercice 3.1. (*)

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. Parmi les ensembles suivant, dire lesquels sont les graphes d'une application d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Lorsque l'ensemble est le graphe d'une application, donner son ensemble de départ.

1. $\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - x + 1 = 0 \}$;
2. $\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 \}$;
3. $\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2 \}$;
4. $\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2 \text{ et } y \geqslant 0 \}$.

Solution de l'exercice 3.1

1. L'équation $y - x + 1 = 0$ se réécrit $y = x - 1$. Comme pour tout x réel il existe un unique y tel que $y = x - 1$, l'ensemble décrit est le graphe d'une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (l'application $x \mapsto x - 1$).
2. Comme ci-dessus, pour tout x réel il existe un unique y tel que $y = x^2$, dont l'ensemble décrit est le graphe d'une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (l'application $x \mapsto x^2$).
3. Cette fois-ci, à x fixé, il y a $0, 1$, ou 2 solutions à l'équation $x = y^2$. En particulier pour x positif il y a deux solutions, donc l'ensemble décrit n'est pas le graphe d'une fonction.
4. Par rapport à la question précédente, on a enlevé des solutions à l'équation $x = y^2$: avec la contrainte $y \geqslant 0$, cette équation a 0 solution pour $x < 0$ et exactement une solution pour $x \geqslant 0$. Par conséquent l'ensemble décrit est le graphe d'une application d'ensemble de départ $\mathbf{R}_+$ (l'application $x \mapsto \sqrt{x}$).

Exercice 3.2. (**) Soient I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas une fonction constante.
4. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Solution de l'exercice 3.2

1. $\exists x \in I, f(x) = 0$
2. $\forall x \in I, f(x) = 0$
3. $\exists x, y \in I, f(x) \neq f(y)$
4. $\forall x, y \in I, (x \neq y) \implies (f(x) \neq f(y))$
5. $\exists a \in I, \forall x \in I, f(x) \geqslant f(a)$
6. $\forall m \in \mathbf{R}, \exists x \in I, f(x) > m$
7. $\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = x_0$

Exercice 3.3. (**)

Pour chacune des affirmations suivantes, décrire en termes simples les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient ces affirmations :

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, (x = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$.

9. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
10. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \text{ ou } f(x) \geqslant 0)$.

Solution de l'exercice 3.3

1. f est une application constante.
2. f est une application quelconque. En effet, pour x quelconque, il suffit de prendre $y = x$ pour que l'assertion soit satisfaite.
3. Aucune application ne satisfait cette assertion. En effet sa négation est $\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R}, f(x) \geqslant f(y)$. Cette négation est toujours vraie puisque pour x quelconque, il suffit de poser $y = x$ pour que cette négation soit vraie.
4. f n'admet pas de maximum.
5. f envoie les réels négatifs ou nuls sur les réels négatifs ou nuls, c'est-à-dire $f(\mathbf{R}_-) \subset \mathbf{R}_-$.
6. Par contraposée, f envoie les réels strictement positifs sur les réels strictement positifs, c'est-à-dire $f(\mathbf{R}_+^*) \subset \mathbf{R}_+^*$.
7. C'est la contraposée de la précédente, donc f envoie les réels strictement positifs sur les réels strictement positifs.
8. $f(0) = 0$.
9. f ne peut s'annuler que en 0 (mais ne s'annule pas forcément en 0).
10. Toute application satisfait cela.

Exercice 3.4. (*)

Soient f et g les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) = 2n \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f,\ f \circ g,\ g \circ g,\ g \circ g \circ g$.

Solution de l'exercice 3.4

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ on a $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$ car $2n$ est pair. On a donc
$$\begin{aligned} g \circ f \colon \mathbf{N} &\to \mathbf{N} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ on a
$$f \circ g(n) = g(g(n)) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) = n & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(0) = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$
3. Soit $n \in \mathbf{N}$ on a
$$g \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} g\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ g(0) = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$
Or si n est pair, alors $\frac{n}{2}$ est pair si et seulement si n est divisible par 4 et dans ce cas $g(\frac{n}{2}) = \frac{n}{4}$ obtient donc
$$g \circ g(n) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{si } n \text{ est divisible par 4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
4. Soit $n \in \mathbf{N}$ on a
$$g \circ g \circ g(n) = g(g \circ g(n)) = \begin{cases} g\left(\frac{n}{4}\right) & \text{si } n \text{ est divisible par 4} \\ g(0) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Or $\frac{n}{4}$ est un nombre entier pair si et seulement si n est divisible par 8 donc on obtient
$$g \circ g \circ g(n) = \begin{cases} \frac{n}{8} & \text{si } n \text{ est divisible par 8} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 3.5. (**)

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle " fonction indicatrice de A" et on note $\mathbf{I}_A$ l'application de E vers $\{0, 1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{^cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.
3. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.

Solution de l'exercice 3.5

1. Soit $x \in E$, alors si $x \in A$ on a $1 - \mathbf{I}_A(x) = 1 - 1 = 0$ et sinon si $x \in^c A$ on a $1 - \mathbf{I}_A(x) = 1 - 0 = 1$ donc par définition de $\mathbf{I}_{^cA}$ on a $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{^cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. Soit $x \in E$ si $x \in A \cap B$ alors $\min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \min(1, 1) = 1 = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x) = \mathbf{I}_{A\cap B}(x)$. Sinon $x \in^c A \cup^c B$ et on a $\mathbf{I}_A(x) = 0$ ou $\mathbf{I}_B(x) = 0$ et donc $\min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = 0 = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x) = \mathbf{I}_{A\cap B}(x)$.

3. Soit $x \in E$ si $x \notin A \cup B$ alors $\mathbf{I}_A(x) = 0 = \mathbf{I}_B(x)$ et $\max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = 0 = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x) = \mathbf{I}_{A\cap B}(x)$.

   Sinon si $x \in A \cup B$ alors $\mathbf{I}_A(x) = 1$ ou $\mathbf{I}_B(x) = 1$ et donc $\max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = 1$, et si de plus $x \in A \cap B$ alors $\mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x) = 1$ et si $x \in (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ on a $\mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x) = 1$.

   Dans tout les cas on a bien $\mathbf{I}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.

Exercice 3.6. (**)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E vers F. Soient A et A' deux sous-ensembles de E. Soient B et B' deux sous-ensembles de F. Quelles sont les assertions parmi les assertions suivantes qui sont toujours vraies ?

1. $(A \subset A') \implies (f(A) \subset f(A'))$.
2. $(B \subset B') \implies (f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$.
3. $f(A \cup A') = (f(A) \cup f(A'))$.
4. $f^{-1}(B \cup B') = (f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'))$.
5. $f(A \cap A') = (f(A) \cap f(A'))$.
6. $f^{-1}(B \cap B') = (f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'))$.
7. $f^{-1}(f(A)) = A$.
8. $f(f^{-1}(B)) = B$.
9. $f(A \cap f^{-1}(B)) = (f(A) \cap B)$.
10. $f(A \cup f^{-1}(B)) = (f(A) \cup B)$.

Solution de l'exercice 3.6

1. L'assertion est toujours vraie. En effet si on fixe $f : E \to F$ une fonction et $A \subset A'$ deux sous-ensembles de E alors si $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, comme $A \subset A'$ on a aussi $x \in A'$ donc $y \in f(A')$.
2. L'assertion est toujours vraie. En effet si on fixe $f : E \to F$ une fonction et $B \subset B'$ deux sous-ensembles de F, alors si $x \in f^{-1}(B)$ alors $f(x) \in B \subset B'$ donc $f(x) \in B'$ et $x \in f^{-1}(B')$.

3. L'assertion est toujours vraie. En effet fixons $f\colon E \to F$ une fonction et A, A' deux sous-ensembles de E alors on va montrer $f(A \cup A') = (f(A) \cup f(A'))$ par double inclusion.

   La première question nous donne $f(A) \subset f(A \cup A')$ et $f(A') \subset f(A \cup A')$ donc on a l'inclusion $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$.

   Pour l'autre inclusion soit $y \in f(A \cup A')$, alors il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$, alors soit $x \in A$ et alors $y \in f(A) \subset f(A) \cup f(A')$, soit $x \in A'$ et alors $y \in f(A') \subset f(A) \cup f(A')$, ce qui nous donne l'autre inclusion.

   Finalement on a bien $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

4. L'assertion est toujours vraie. En effet fixons $f\colon E \to F$ une fonction et B, B' deux sous-ensembles de F alors on va montrer $f^{-1}(B \cup B') = (f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'))$. Soit $x \in E$ on a
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cup B') \iff f(x) \in B \cup B' &\iff f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

5. Cette assertion n'est pas vraie en général. En effet si on prend $E = F = \mathbf{R}$ et $f\colon x \mapsto x^2$ alors en posant $A = \{1\}$ et $A' = \{-1\}$ on a $f(A \cap A') = \emptyset$ et $f(A) \cap f(A') = \{1\}$.

6. L'assertion est toujours vraie. En effet fixons $f\colon E \to F$ une fonction et B, B' deux sous-ensembles de F alors on va montrer $f^{-1}(B \cap B') = (f(B) \cap f(B'))$. Soit $x \in E$ on a
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cap B') \iff f(x) \in B \cap B' &\iff f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B' \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'). \end{aligned}$$
   D'où $f^{-1}(B \cap B') = (f(B) \cap f(B'))$.

7. Cette assertion n'est pas vraie en général. En effet si on prend $E = F = \mathbf{R}$ et $f\colon x \mapsto x^2$ alors en posant $A = \{1\}$ alors $f^{-1}(f(A)) = \{-1, 1\} \neq A$.

8. Cette assertion n'est pas vraie en général. En effet si on prend $E = F = \mathbf{R}$ et $f\colon x \mapsto x^2$ alors en posant $B = \{-1\}$ alors $f(f^{-1}(B)) = \emptyset \neq B$.

9. L'assertion est toujours vraie. En effet fixons $f\colon E \to F$ une fonction, $A \subset E$ et $B \subset F$ alors montrons que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

   Si $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ alors il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, donc $y \in f(A)$ car $x \in A$ et $y \in B$ car $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y \in f(A) \cap B$ et on a l'inclusion $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$.

Pour l'autre inclusion si $y \in f(A) \cap B$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, et donc $f(x) \in B$ et il s'ensuit que $x \in A \cap f^{-1}(B)$ donc $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.

10. Cette assertion n'est pas vraie en général. En effet si on prend $E = F = \mathbf{R}$ et $f\colon x \mapsto x^2$ alors en posant $B = \{-1\}$ et $A = \emptyset$ alors $f(A \cup f^{-1}(B)) = \emptyset \neq f(A) \cup B$.

Exercice 3.7. (*) Soit A une partie de $\mathbf{R}$ et f une application de A dans $\mathbf{R}$.

1. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $A =]-1;1[\cup]2,3[$, que f est dérivable sur A et que $f'(x) > 0$ pour tout x dans A. Peut-on en déduire que f est injective ?

Solution de l'exercice 3.7

1. Supposons que f soit strictement croissante. Soient x et x' deux éléments distincts de A. Alors, soit $x > x'$, soit $x' < x$. Dans le premier cas, comme f est strictement croissante, $f(x) > f(x')$, et donc $f(x) \neq f(x')$. Dans le second cas, $f(x) < f(x')$ et donc $f(x) \neq f(x')$. On a bien montré que :
$$\forall x, x' \in A,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$
ce qui est équivalent au fait que f soit injective. Le cas où f est strictement décroissante est analogue.

   La réciproque n'est pas vraie : f peut être injective sans être strictement monotone. Un exemple est donné par la fonction f définie sur $A := \{1, 2, 3\}$ par $f(1) = 0$, $f(2) = 2$ et $f(3) = 1$.
2. f n'est pas nécessairement injective. Un contre-exemple est donné par la fonction f définie sur $A =]-1;1[\cup]2,3[$ par
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-1,1[\\ x - \frac{5}{2} & \text{si } x \in]2,3[\end{cases}$$
En effet, f vérifie les hypothèses de l'énoncé, mais $f(0) = f(5/2) = 0$.

   Il faut se rappeler que le lien entre le signe de f' et la monotonie de f n'est valable que sur un intervalle : si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, si f est dérivable sur I et si $f'(x) > 0$ pour tout x de I, alors f est strictement croissante sur I. Ce n'est plus vrai si I n'est pas un intervalle, comme on peut le voir sur l'exemple ci-dessus.

Exercice 3.8. (**) Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
2. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow g \text{ injective.}$$

Solution de l'exercice 3.8

1. Montrons l'assertion contraposée, c'est à dire f non injective $\Rightarrow$ $g \circ f$ non injective. Supposons que f n'est pas injective. Il existe alors x et y dans E tels que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Par conséquent $g(f(x)) = g(f(y))$. Donc $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ et $x \neq y$, donc $g \circ f$ n'est pas injective.
2. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe x dans E tel que $g \circ f(x) = z$. Donc $g(f(x)) = z$. Donc z admet un antécédent par g : $f(x)$. On a bien montré que tout élément de G admet au moins un antécédent par g, donc g est surjective.
3. Cette affirmation est fausse. En effet, on peut prendre $E = G = \{1\}$, $F = \{1, 2\}$, f qui associe 1 à 1, g qui associe 1 à 1 et 2. Alors, $g \circ f$ est injective, mais g n'est pas injective.

Exercice 3.9. (**) Soit f une application de E dans F. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective,

(ii) $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

Solution de l'exercice 3.9

— Supposons que f est injective. Soit $A \subset E$. Montrons que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On sait alors que $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$. Comme f est injective, on en déduit que $x = y$, donc $x \in A$. On a montré que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Cette partie n'utilise pas l'injectivité de f. On a montré que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

— Supposons que $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$. Soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Par hypothèse, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ et $f^{-1}(f(\{y\})) = \{y\}$. Or, $f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f(\{y\})$. Donc $\{x\} = \{y\}$, donc $x = y$. On a montré que f est injective.

Exercice 3.10. (*) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une application de I dans $\mathbf{R}$. On suppose que f est continue sur I.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que $f(I)$ est un intervalle.
2. On considère la fonction f de $I =]-\infty; 2]$ dans $\mathbf{R}$, définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Montrer que f réalise une bijection de I sur $[-1, +\infty[$.

Solution de l'exercice 3.10

1. Soient $a \leqslant b$ dans $f(I)$. Il existe donc x et y dans I tels que $a = f(x)$ et $b = f(y)$. Si $c \in [a, b]$, par le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à f continue sur l'intervalle $[x, y]$, il existe $z \in [x, y]$ tel que $f(z) = c$. Comme I est un intervalle, $z \in I$. Donc $c \in f(I)$. On a montré que $f(I)$ est un intervalle.
2. (esquisse de démonstration) On montre, par exemple en calculant sa dérivée, que f est strictement décroissante sur I. Ceci implique que f est injective sur I. De plus, comme f est continue sur I, tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et que $f(2) = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f assure que tout élément de $[-1, +\infty[$ admet un antécédent par f. Donc f est surjective sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 3.11. Soit f l'application de $[0, 1[$ dans $]0, 2]$ définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1[& \to &]0,2] \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x+1 & \text{si} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x-1 & \text{si} & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?

3. L'application f est-elle bijective ?

4. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\left(f(x) \geqslant \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Solution de l'exercice 3.11

Faites un dessin !

1. Soient x et x' deux éléments de $[0,1[$ tels que $f(x) = f(x')$.
   - Si x et x' appartiennent à $[0,1/2]$, alors $2x+1 = 2x'+1$, donc $x = x'$.
   - Si x et x' appartiennent à $]1/2,1[$, alors $2x-1 = 2x'-1$, donc $x = x'$.
   - Si x appartient à $[0,1/2]$ et x' appartient à $]1/2,1[$, alors $2x+1 = 2x'-1$, donc $x = x'-1$. Ceci est impossible, car $x'-1$ appartient à $]-1/2,0[$ et x appartient à $[0,1/2]$.
   - Si x appartient à $]1/2,1[$ et x' appartient à $[0,1/2]$, on peut faire le même argument en échangeant les rôles de x et x'.

   En conlusion, pour tous x et x' $[0,1[$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$. Donc f est injective.
2. Soit y un élément de $]0,2]$.
   - Si $y \in]0,1[$, alors $\frac{y+1}{2} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ donc $f(\frac{y+1}{2}) = 2(\frac{y+1}{2}) - 1 = y$. Donc y admet un antécédent par f.
   - Si $y \in [1,2]$, alors $\frac{y-1}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $f(\frac{y-1}{2}) = 2(\frac{y-1}{2}) + 1 = y$. Donc y admet un antécédent par f.

   On a montré que tout élément de l'ensemble d'arrivée de f admet un antécédent par f, donc f est surjective.
3. L'application f est injective et surjective, donc elle est bijective.

4. Soit $x \in [0,1[$. Alors,

$$f(x) \geqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1/2] & \text{et } 2x+1 \geqslant \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x \in]1/2,1[& \text{et } 2x-1 \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1/2] & \text{et } 2x \geqslant \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x \in]1/2,1[& \text{et } 2x \geqslant \frac{5}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1/2] & \text{et } x \geqslant \frac{1}{4} \\ \text{ou} \\ x \in]1/2,1[& \text{et } x \geqslant \frac{5}{4} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in [1/4,1/2]$$

Exercice 3.12. (**) Soient a et b deux nombres complexes. Soit f la fonction de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{cases}$$

1. Montrer que f est bijective si et seulement si $a \neq 0$.
2. On suppose que a est non nul. Montrer que si ABC est un triangle équilatéral, alors $f(A)f(B)f(C)$ est encore un triangle équilatéral.

Solution de l'exercice 3.12

1. Si $a = 0$, alors $f(0) = b = f(1)$, donc f n'est pas injective. Cela montre que f bijective $\Rightarrow a \neq 0$. Réciproquement, supposons que $a \neq 0$. Alors, pour tous z et x dans $\mathbf{C}$, comme $a \neq 0$,
$$z = f(x) \Leftrightarrow z = ax+b$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{z-b}{a}$$
ce qui montre à la fois que f est injective et surjective. En effet, si $f(x) = f(y)$, alors $x = \frac{f(x)-b}{a} = \frac{f(y)-b}{a} = y$, donc f est injective. De plus, si $z \in \mathbf{C}$, il admet un antécédent par f (qui est $\frac{z-b}{a}$). En conclusion, f est bijective.

2. On note z_M l'affixe d'un point M. Comme ABC est équilatéral, on a $|z_A - z_B| = |z_A - z_C| = |z_B - z_C|$. Or
$$f(A)f(B) = |f(z_A) - f(z_B)| = |az_A - az_B| = |a|.|z_A - z_B|$$
De même, $f(A)f(C) = |a|.|z_A - z_C|$ et $f(B)f(C) = |a|.|z_B - z_C|$. Comme $|z_A - z_B| = |z_A - z_C| = |z_B - z_C|$, on en déduit que $f(A)f(B) = f(A)f(C) = f(B)f(C)$. Donc $f(A)f(B)f(C)$ est un triangle équilatéral.

Exercice 3.13. (**) Soit f la fonction de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :
$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 \end{array} \right.$$

1. On dit que z est un point fixe de f si $f(z) = z$. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on notera a.
2. Montrer que $f(z)$ est l'image de z par la rotation de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Solution de l'exercice 3.13

1. Soit $z \in \mathbf{C}$.
$$\begin{aligned} f(z) = z & \Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 = z \\ & \Leftrightarrow (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)z = -2 \\ & \Leftrightarrow z = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} \end{aligned}$$
donc f admet un unique point fixe, $a := \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}$.
2. Pour cela, il suffit de montrer, en notant A le point d'affixe a, que $f(A) = A$, et que pour tout M différent de A, $f(M)f(A) = MA$ et que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{f(A)f(M)})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$.
$f(A) = A$ car $f(a) = a$. En notant z l'affixe de M,
$$f(M)f(A) = |f(z) - f(a)| = |e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 - (e^{i\frac{\pi}{3}} a + 2)| = |e^{i\frac{\pi}{3}}(z - a)| = |e^{i\frac{\pi}{3}}|.|z - a| = |z - a| .$$
Et l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{f(A)f(M)})$ a pour mesure l'argument de $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Or
$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(z - a)}{z - a} = e^{i\frac{\pi}{3}} .$$
qui a pour argument $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 3.14. (**) Soit f la fonction de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} \end{array} \right.$$

1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est une droite, que l'on notera Δ.

2. Montrer que $f(z)$ est l'image de z par la symétrie orthogonale d'axe Δ.

Solution de l'exercice 3.14

1. Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} f(z) = z \quad & \Leftrightarrow \quad e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} = z \\ & \Leftrightarrow \quad e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} - z = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\bar{z} - e^{-i\frac{\pi}{6}}z\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\overline{e^{-i\frac{\pi}{6}}z} - e^{-i\frac{\pi}{6}}z\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad -2iIm\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}z\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad Im\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}z\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad z \in \{e^{i\frac{\pi}{6}}a\,;\, a \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

   Notons $\Delta = \{e^{i\frac{\pi}{6}}a\,;\, a \in \mathbf{R}\}$ l'ensemble des points fixes de f. C'est la droite contenant les points 0 et $e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. Il suffit de montrer, en notant M un point d'affixe z n'étant pas sur Δ, , que $(Mf(M))$ est orthogonal à Δ et que le milieu de $[Mf(M)]$ appartient à Δ. Notons A le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{6}}$. Montrer que $(Mf(M))$ est orthogonal à Δ revient à montrer que l'angle $(\overrightarrow{Mf(M)}, \overrightarrow{OA})$ vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$. Or, si $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{f(z) - z}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} - z}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = -2iIm\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}z\right)$$

qui est imaginaire pur, donc est soit nul, soit a pour argument $\pi/2$ ou $-\pi/2$. Enfin, le milieu de $[Mf(M)]$ a pour affixe $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z}+z}{2}$, et

$$\begin{aligned} f(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z}+z}{2}) &= e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}z+\bar{z}}{2}\right) \\ &= \frac{z+e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z}}{2} \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z}+z}{2} \ . \end{aligned}$$

Donc $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z}+z}{2}$ est un point fixe de f, donc il appartient à Δ.

Exercice 3.15. (**) Soient a et b deux nombres complexes. On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & a\bar{z}+b \end{array} \right.$$

Soient M, N, P et Q quatre points du plans tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$. On note $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $P' = f(P)$ et $Q' = f(Q)$. Montrer que f « renverse les angles », au sens suivant :

$$(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \ .$$

Solution de l'exercice 3.15

En notant z_M l'affixe d'un point M, on a alors :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) &= Arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{P'Q'}}}{z_{\overrightarrow{M'N'}}}\right) \\
&= Arg\left(\frac{z_{Q'} - z_{P'}}{z_{N'} - z_{M'}}\right) \\
&= Arg\left(\frac{F(z_Q) - F(z_P)}{F(z_N) - F(z_M)}\right) \\
&= Arg\left(\frac{a\bar{z_Q} + b - a\bar{z_P} - b}{a\bar{z_N} + b - a\bar{z_M} - b}\right) \\
&= Arg\left(\frac{a(\bar{z_Q} - \bar{z_P})}{a(\bar{z_N} - \bar{z_M})}\right) \\
&= Arg\left(\frac{\overline{z_Q - z_P}}{\overline{z_N - z_M}}\right) \\
&= Arg\left(\overline{\left(\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}\right)}\right) \\
&= -Arg\left(\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}\right) \\
&= -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) .
\end{aligned}$$

Sommes et produits

Exercice 3.16. (*)

Calculer les nombres suivants.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} 1 , \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h , \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k ,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h , \quad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k , \quad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h ,$$

$$\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k , \quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h , \quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k .$$

Solution de l'exercice 3.16

1. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}1 &= (\sum_{h=1}^{1}1)+(\sum_{h=1}^{2}1)+(\sum_{h=3}^{k}1)\\ &= (1)+(1+1)+(1+1+1)\\ &= 1+2+3=6\ .\end{aligned}$$

2. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}h &= (\sum_{h=1}^{1}h)+(\sum_{h=1}^{2}h)+(\sum_{h=3}^{k}h)\\ &= (1)+(1+2)+(1+2+3)\\ &= 1+3+6=10\ .\end{aligned}$$

3. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k}k &= (\sum_{h=1}^{1}1)+(\sum_{h=1}^{2}2)+(\sum_{h=3}^{k}3)\\ &= (1)+(2+2)+(3+3+3)\\ &= 1+4+9=14\ .\end{aligned}$$

4. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k}h &= (\prod_{h=1}^{1}h)+(\prod_{h=1}^{2}h)+(\prod_{h=3}^{k}h)\\ &= (1)+(1\times 2)+(1\times 2\times 3)\\ &= 1+2+6=9\ .\end{aligned}$$

5. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k}k &= (\prod_{h=1}^{1}1)+(\prod_{h=1}^{2}2)+(\prod_{h=3}^{k}3)\\ &= (1)+(2\times 2)+(3\times 3\times 3)\\ &= 1+4+27=32\ .\end{aligned}$$

6. On a
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h &= (\sum_{h=1}^{1} h) \times (\sum_{h=1}^{2} h) \times (\sum_{h=3}^{k} h)\\ &= (1) \times (1+2) \times (1+2+3)\\ &= 1 \times 3 \times 6 = 18\ .\end{aligned}$$

7. On a
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k &= (\sum_{h=1}^{1} 1) \times (\sum_{h=1}^{2} 2) \times (\sum_{h=3}^{k} 3)\\ &= (1) \times (2+2) \times (3+3+3)\\ &= 1 \times 4 \times 9 = 36\ .\end{aligned}$$

8. On a
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h &= (\prod_{h=1}^{1} h) \times (\sum_{h=1}^{2} h) \times (\sum_{h=3}^{k} h)\\ &= (1) \times (1 \times 2) \times (1 \times 2 \times 3)\\ &= 1 \times 2 \times 6 = 12\ .\end{aligned}$$

9. On a
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k &= (\prod_{h=1}^{1} 1) \times (\prod_{h=1}^{2} 2) \times (\prod_{h=3}^{k} 3)\\ &= (1) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)\\ &= 1 \times 4 \times 27 = 108\ .\end{aligned}$$

Exercice 3.17. (*)

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre variables. Écrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les quantités suivantes.

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.
5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.

6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

Solution de l'exercice 3.17

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i$
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4 = \sum_{i=1}^{4} \prod_{j=1}^{i} a_j$
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 = \sum_{i=1^3} a_ia_{i+1} = \sum_{i=1^3} \prod_{j=i}^{i+1} a_j$
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 = \sum_{i=1}^{2} \prod_{j=i}^{i+2} a_j$
5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} a_ia_j$
6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \prod_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{i} a_j$.

Exercice 3.18. (**)

Démontrer par récurrence les assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} (k+1) = (n+1)(n+2)/2.$
2. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$
3. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4.$
4. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$

5. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$

6. $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3\ , \quad \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n-1)}.$

7. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1).$

Solution de l'exercice 3.18

1. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n}(k+1) = (n+1)(n+2)/2$$

Initialisation : Si $n = 0$ on a bien

$$\sum_{k=0}^{0}(k+1) = 1 = (0+1)(0+2)/2$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n}(k+1) = (n+1)(n+2)/2$, montrons l'hérédité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(k+1) &= \left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) + (n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n + 2 \\ &= \frac{(n+2)(n+3)}{2}\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

2. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

Initialisation : Si $n = 0$ on a bien

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, montrons l'hérédité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+3)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+3)}{6} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2+9n+6}{6}\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

3. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4.$$

Initialisation : Si $n = 0$ on a bien

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4$, montrons l'hérédité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

4. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Initialisation : Si $n = 0$ on a bien

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 1 = 2 - 1$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, montrons l'hérédité

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+2} - 1
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

5. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$

$$\forall n \in \mathbf{N} \ , \quad \sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Initialisation : Si $n = 0$ on a bien

$$\sum_{k=0}^{0} k2^k = 0 = -2 + 2$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$, montrons l'hérédité

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=0}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= (2n)2^{n+1} + 2 \\ &= n2^{n+2} + 2\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence

6. On va montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 \ , \quad \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n-1)}.$$

Initialisation : Pour $n = 3$ on a bien

$$\prod_{k=3}^{3} \frac{k^2-4}{k} = \frac{5}{3} = \frac{120}{12 \times 3 \times 2}$$

Hérédité : Soit $n \geqslant 3$ tel que $\prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n+1)}$, montrons l'hérédité.

$$\begin{aligned}\prod_{k=3}^{n+1} \frac{k^2-4}{k} &= \left(\prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k}\right) \frac{(n+1)^2-4}{n+1} \\ &= \frac{(n+2)!}{12n(n-1)} \times \frac{(n+1+2)(n+1-2)}{n+1} \\ &= \frac{(n+3)!}{12n(n+1)}\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

7. On va montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \,, \quad \prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

Initialisation : Pour $n = 1$ on a bien

$$\prod_{k=1}^{1} 1+k = 2 = 2^1 \times \prod_{k=1}^{1} (2k-1)$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$, montrons l'hérédité.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k) &= \prod_{k=2}^{n+2}(n+k) \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n}(n+k)\right)(2n+1)(2n+2) \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right) \\
&= 2(2n+1)\left(2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right) \\
&= 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Dénombrement

Exercice 3.19. (*) Soient p et q deux entiers naturels non nuls et soit f la fonction définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,q\} & \to & \{1,\ldots,pq\} \\ (i,j) & \mapsto & j+(i-1)q \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est bien définie (i.e que ses images sont bien dans $\{1,\ldots,pq\}$) et que c'est une bijection.
2. Cette bijection correspond à énumérer les cases d'un tableau à p lignes et q colonnes en le parcourant de gauche à droite, ligne par ligne en partant de la première ligne. Donner une bijection correspondant à l'énumération du même tableau, mais en le parcourant de haut en bas, colonne par colonne, en partant de la première colonne.

Solution de l'exercice 3.19

Exercice 3.20. (**) Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{A}_{n,2}$ l'ensemble des couples de deux éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$. Pour a dans $\{1,\ldots,n\}$, on note E_a l'ensemble des couples de deux éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$ dont la première coordonnée est a.

1. Quel est le cardinal de E_a ?
2. Montrer que si a et a' sont distincts, alors E_a et $E_{a'}$ sont disjoints.
3. Montrer que
$$\mathscr{A}_{n,2} = \bigcup_{a\in\{1,\ldots,n\}} E_a$$
et représenter cette relation par un arbre de dénombrement.
4. En déduire que $|\mathscr{A}_{n,2}| = n(n-1)$.
5. Montrer que $\mathscr{A}_{n,2}$ est en bijection avec l'ensemble des applications injectives de $\{1,2\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$.

Solution de l'exercice 3.20

Exercice 3.21. (*)

Une entreprise veut se donner un nouveau sigle, qui soit formé d'exactement 3 lettres. De combien de façons peut-elle le faire ? Combien reste-t-il de possibilités si on impose au sigle d'être formé de lettres distinctes ?

Solution de l'exercice 3.21

Il y a 26 possibilités pour la première lettre, puis pour chacun de ces 26 choix, il y a 26 possibilités pour la seconde lettre, et pour chacun de ces choix, il y a encore 26 choix pour la troisième lettre. En tout il y a donc $26^3 = 17576$ façons de choisir un sigle.
Si on impose que les lettres sont distinctes, il n'y a que 25 possibilités pour la seconde lettre (toutes les lettres de l'alphabet sauf celle qui a déjà été choisie), et 24 pour la troisième lettre, ce qui fait $26 \times 25 \times 24 = 15600$ sigles possibles.

Exercice 3.22. (*)

On met dans une boîte 26 jetons de Scrabble, portant chacune des 26 lettres de l'alphabet (deux jetons distincts portent donc deux lettres distinctes). On en tire 3 à la fois. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Solution de l'exercice 3.22

Comme dans l'exercice précédent il y a 26 façons de choisir la première lettre, 25 pour la seconde, et 24 pour la troisième. Mais l'ordre de tirage ne se voit pas dans le tirage final, puisqu'on a oublié qui est la 1ère, qui est la 2e, et qui est la 3e. On se retrouve donc uniquement à choisir 3 parmi 26, et il y a donc $\binom{26}{3} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2600$ façons de le faire.

Exercice 3.23. (**)

1. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 5, ni par 7 ?
2. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 3000 qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5 ?

Solution de l'exercice 3.23

1. On peut déjà compter combien il y a de nombres entre 1 et 100 qui sont divisibles par 5 : il y en a 1 sur 5, c'est-à-dire $\frac{100}{5} = 20$.

   Pour les nombre de divisibles par 7, il y en a 1 sur 7, mais comme $\frac{100}{7}$ n'est pas un nombre entier, il faut comprendre : en fait $98 = 7 \times 14$, et donc entre 1 et 98 il y a 14 nombres divisibles par 7. Rajouter 99 et 100 ne rajoute aucun multiple de 7. Il y a donc 14 nombres divisibles par 7 entre 1 et 100.

   Pour les nombres divisibles par 5 et par 7, ils sont en fait multiples de 35, et donc il n'y a que 35 et 70.

   On peut maintenant appliquer le principe d'inclusion-exclusion. En notant E_5 les nombres divisibles par 5 entre 1 et 100, E_7 les nombres divisibles par 7 entre 1 et 100, on cherche à calculer

$$\begin{aligned} |[\![1, 100]\!] \setminus (E_5 \cup E_7)| &= 100 - |E_5 \cup E_7| \\ &= 100 - |E_5| - |E_7| + |E_5 \cap E_7| \\ &= 100 - 20 - 14 + 2 = 68. \end{aligned}$$

   Ainsi il y a 68 nombres entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 5, ni par 7.

2. Le principe est le même. En notant E_3 l'ensemble des nombres entre 1 et 3000 qui sont divisibles par 3, E_5 l'ensemble des nombres entre 1 et 3000 qui sont divisibles par 5, on a $|E_3| = \frac{3000}{3} = 1000$ et $|E_5| = \frac{3000}{5} = 600$. De plus les nombres divisibles par 3 et par 5 sont en fait les multiples de 15, il y en a $\frac{3000}{15} = 200$. Alors on a
$$\begin{aligned} |[\![1, 3000]\!] \setminus (E_3 \cup E_5)| &= 3000 - |E_3 \cup E_5| \\ &= 3000 - |E_3| - |E_5| + |E_3 \cap E_5| \\ &= 3000 - 1000 - 600 + 200 = 1600. \end{aligned}$$

Identités remarquables

Exercice 3.24. (**)

Démontrer les égalités suivantes, en utilisant des manipulations et des identités algébriques (sans utiliser de récurrence).

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\, n!$, $\forall n \geqslant 1$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$, $\forall n \geqslant 2$.
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1$, $\forall n \geqslant 1$.
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$, $\forall n \geqslant 2$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k = 2^n - 2$, $\forall n \geqslant 2$.
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}2^{k/2} = \frac{2^n-1}{\sqrt{2}-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1}-1}{6}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{n-k} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$.

Solution de l'exercice 3.24

1. On sépare les termes $2k$ en $2 \times k$, et on développe le produit. Soit $n \geqslant 1$, on a donc
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(2k) &= \prod_{k=1}^{n} 2 \cdot \prod_{k=1}^{n} k \\ &= 2^n \cdot n!\end{aligned}$$
2. On rajoute dans le produit des termes de la forme $2k$ qu'on supprime au dénominateur, pour faire apparaitre des factorielles. On peut effectuer un changement d'incide pour ensuite regrouper deux produits en un seul. On a donc
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) \cdot \prod_{k=1}^{n}(2k)\right) \Big/ \prod_{k=1}^{n}(2k) \\ &= \left(\prod_{k \in [\![1,n-1]\!]}(2k+1) \cdot \prod_{k \in [\![1,n]\!]}(2k)\right) \Big/ \prod_{k=1}^{n}(2k) \\ &= \left(\prod_{i \in \{3,5,\ldots,2n-1\}} i \cdot \prod_{j \in \{2,4,\ldots,2n\}} j\right) \Big/ \prod_{k=1}^{n}(2k) \\ &= \left(\prod_{i \in \{2,3,4,\ldots,2n\}} i\right) \Big/ \prod_{k=1}^{n}(2k) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}\end{aligned}$$
en utilisant la question précédente pour la dernière égalité.
3. On va séparer le numérateur et le dénominateur, puis effectuer un changement d'indice au dénominateur (remplacer k par $k-1$) pour simplifier le

produit. Soit $n \geqslant 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} &= \prod_{k=1}^{n}(2k+1)\Big/\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= \prod_{k\in[\![1,n]\!]}(2k+1)\Big/\prod_{k\in[\![1,n]\!]}(2k-1) \\
&= \prod_{k\in[\![1,n]\!]}(2k+1)\Big/\prod_{k\in[\![0,n-1]\!]}(2k+1) \\
&= \left(\prod_{k\in[\![1,n-1]\!]}(2k+1)\right)\cdot(2n+1)\Big/\left((2\cdot 0+1)\cdot\prod_{k\in[\![1,n-1]\!]}2k+1\right) \\
&= \frac{2n+1}{1} = 2n+1.
\end{aligned}$$

4. On développe l'expression k^2-1 en $(k-1)(k+1)$, puis on a une somme "télescopique". Soit $n \geqslant 2$, on a donc

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k} \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod_{k=2}^{n}(k+1)\right)\Big/\left(\prod_{k=2}^{n}k\right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1}(k)\right)\left(\prod_{k=3}^{n+1}(k)\right)\Big/\left(\prod_{k=2}^{n}k\right) \\
&= \left(1(\prod_{k=2}^{n-1}k)\right)\left(\prod_{k=3}^{n+1}(k)\right)\Big/\left((\prod_{k=2}^{n-1}k)\cdot n\right) \\
&= (1)\left(\prod_{k=3}^{n+1}(k)\right)\Big/(n) \\
&= \frac{(n+1)!/2}{n} = \frac{(n+1)!}{2n}.
\end{aligned}$$

5. On coupe la somme en deux, et on utilise une formule du cours. Soit $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(n-k) &= \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k \\ &= (n+1)n - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$
6. On peut par exemple couper la somme en deux. Soit $n \in \mathbf{N}$, on a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$
7. On peut encore couper la somme en deux. Soit $n \in \mathbf{N}$, on a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= n(n+1) + n \\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$
8. C'est directement la somme d'une série géométrique. Soit $n \geqslant 2$ on a donc
$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = \frac{2^{n-1+1} - 2^1}{2-1} = 2^n - 2.$$

9. C'est encore la somme d'une série géométrique. Soit $n \geqslant 1$ on a donc
$$\sum_{k=1}^{2n-1} 2^{k/2} = \sum_{k=1}^{2n-1} (2^{1/2})^k = \frac{(2^{1/2})^{2n} - (2^{1/2})^0}{2^{1/2} - 1} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

10. C'est encore la somme d'une série géométrique. Soit $n \geqslant 0$ on a donc
$$\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} (2^2)^k = \frac{1}{2} \frac{4^{2n+1} - 4^0}{4 - 1} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}.$$

11. On peut utiliser l'identité remarquable $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$, avec $a = 2$ et $b = 3$. Soit $n \in \mathbf{N}$, on a donc
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3 - 2} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

12. On peut encore utiliser l'identité remarquable $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$, avec $a = -1$ et $b = 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$, on a donc
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{n-k} = \frac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{-1 - 2} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}.$$

Exercice 3.25. (**)

Démontrer, pour tout entier naturel n, les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ *(ajoutez les deux égalités précédentes).*
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k-1} \binom{n}{k} = 9^n/2$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} 3^{n-2k} \binom{n}{k} = (17/3)^n$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{i}^k \binom{n}{k} = 2^{n/2} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}$.

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k/2}\mathrm{i}^k\binom{n}{k} = 2^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/3}$.

Solution de l'exercice 3.25

Dans tout l'exerice on utilise l'identité remarquable appelée *formule du binôme (de Newton)*, valable pour tous $a, b \in \mathbf{C}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ et selon laquelle on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = (a+b)^n.$$

1. En appliquant la formule du binome, on a
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$
2. En appliquant la formule du binome, on a
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0.$$
3. Écrivons les deux formules précédentes remplaçant le nombre n par le nombre $2n$: on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 2^{2n}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k} = 0$. En additionnant ces deux formules on arrive à $\displaystyle 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(1+(-1)^k)$. On remarque que $(1+(-1)^k)$ vaut 2 si k est pair et 0 si k est impair. On peut donc simplifier la somme en ne gardant que les valeurs de k pair. Comme l'ensemble des nombres pairs entre 0 et $2n$ peut être décrit comme $\{2l\ ;\ l \in [\![0, n]\!]\}$, on a alors
$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(1+(-1)^k) = \sum_{l=0}^{n}\binom{2n}{2l}2.$$

En divisant par 2, et en reremplaçant la variable l par la variable k on trouve donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \frac{2^{2n}}{2} = 2^{2n-1}.$$

4. En appliquant la formule du binome, on a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$

5. En appliquant la formule du binome, on a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{-1} \binom{n}{k} (2^3)^k 1^{n-k} = \frac{1}{2}(2^3+1)^n = \frac{9^n}{2}.$$

6. En appliquant la formule du binome, on a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} 3^{n-2k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^3)^k (3^2)^{n-k} 3^{-n} = 3^{-n}(2^3+3^2)^n = (\frac{17}{3})^n.$$

Exercice 3.26. (**)

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f(x) = (1+x)^n$.

1. En utilisant une formule du cours, écrivez $f(x)$ comme une somme où interviennent les puissances de x.
2. La dérivée de f est $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. L'intégrale de f sur $[0,1]$ vaut

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

En utilisant la question 1. donner une autre expression de $f'(x)$ et de cette intégrale.

3. En déduire les valeurs des expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Solution de l'exercice 3.26

Exercice 3.27. (**)

Soient n et p deux entiers naturels. Cet exercice présente une méthode générale pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^p$, sur le cas particulier $p = 2$.

1. Soit $x \to P(x)$ une fonction, donner une expression plus simple de $\sum_{k=0}^{n}(P(k+1) - P(k))$.
2. Soit a, b, c des réels et $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Calculer $P(x+1) - P(x)$.
3. Déterminer a, b, c de sorte que $P(x+1) - P(x) = x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution de l'exercice 3.27

Exercice 3.28. (***)

Le but de l'exercice est de calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$ pour tout n entier positif.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$ pour $n = 0, 1, 2$, et 3.
2. Utiliser la formule du binôme pour dévolopper l'expression $(1+1)^n$ et en déduire pour tout entier positif n l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Pour tout n entier on note $T_0(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}, T_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}$, et $T_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$.

   Que vaut la somme $T_0(n) + T_1(n) + T_2(n)$?
4. On désigne par j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

   Montrer que j satisfait $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
5. Démontrer $(\mathrm{j}+1)^{3n} = T_0(n) + \mathrm{j}T_1(n) + \mathrm{j}^2T_2(n)$ et $(\mathrm{j}^2+1)^{3n} = T_0(n) + \mathrm{j}^2T_1(n) + \mathrm{j}T_2(n)$.
6. Déduire des questions précédentes l'égalité
$$3T_0(n) = 2^{3n} + (\mathrm{j}+1)^{3n} + (\mathrm{j}^2+1)^{3n}.$$

7. Montrer qu'on a $\mathrm{j}+1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{j}^2+1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et en déduire l'égalité
$$T_0(n) = \frac{2^{3n}+2(-1)^n}{3}.$$

Solution de l'exercice 3.28

Exercice 3.29. (***) *Construction de* $\mathbf{Q}$ *à partir de* $\mathbf{Z}$.
Quand on définit, un peu rapidement, les nombres rationnels à partir des entiers relatifs, on précise que si (p,q) et (p',q') sont dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ et $k\in\mathbf{Z}^*$ alors :

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q \tag{5}$$
$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+p'q}{qq'} \tag{6}$$
$$\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}. \tag{7}$$

En fait, cette manière de procéder est peu précautionneuse : il se pourrait que l'égalité de fractions définie par (5) ne soit pas compatible avec les définitions de l'addition (6) et de la multiplication (7). Dans la suite, s,t et s',t' sont également des éléments de $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$.

1. Montrer que si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ et $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'}$, alors
$$\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{p'}{q'} + \frac{s'}{t'} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{s}{t} = \frac{p'}{q'} \times \frac{s'}{t'}.$$

De manière plus abstraite, mais un peu plus rassurante, on peut procéder à l'aide de la notion de relation d'équivalence. Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une partie de $E\times E$. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence* sur E si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

— $\forall x\in E,\ (x,x)\in E$,

— $\forall (x,y)\in E\times E,\ (y,x)\in E$

— $\forall (x,y,z)\in E^3,\ ((x,y)\in E)\wedge((y,z)\in E) \Longrightarrow (x,z)\in E$.

Si $x\in E$ et $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, on note
$$C_{\mathscr{R}}(x) := \{y\in E \mid (x,y)\in\mathscr{R}\},$$

qui est appelé *classe d'équivalence de* x (pour la relation $\mathscr{R}$). On note $E/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence :

$$E/\mathscr{R} := \{C_{\mathscr{R}}(x);\ x \in E\} .$$

2. Montrer que si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors $x \in C_{\mathscr{R}}(x)$.
3. Si $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et
$$\mathscr{R} := \{((p,q),(p',q'))\,|\,pq' = p'q\} ,$$
montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
4. Soit f une fonction de $E \times E$ dans E. On suppose que pour tous x, x', y et y' dans E,
$$(x,x') \in \mathscr{R} \text{ et } (y,y') \in \mathscr{R} \Longrightarrow f((x,y)) = f((x',y')) . \tag{8}$$
Montrer que si x et x' sont dans E, $f(C_{\mathscr{R}}(x) \times C_{\mathscr{R}}(x'))$ est un singleton.

On peut alors définir $\bar{f}$, une fonction de $(E/\mathscr{R})^2$ dans $E/\mathscr{R}$ mais qui agit comme f sur E^2 : si C et C' sont dans $E/\mathscr{R}$, $\bar{f}(C,C')$ est défini comme $C_{\mathscr{R}}(y)$ où y est tel que $f(C \times C') = \{y\}$ (la question précédente assure que $f(C \times C')$ est bien un singleton).

5. Montrer que si E et $\mathscr{R}$ sont définis comme dans la question 3, et que f est définie sur E^2 par :
$$f((p,q),(p',q')) = (pq' + p'q, qq') ,$$
alors f vérifie (8).
6. Vérifier la même chose pour g définie par :
$$g((p,q),(p',q')) = (pp', qq') .$$

On peut alors définir $\mathbf{Q}$ comme $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, muni des opérations $\bar{f}$ et $\bar{g}$, et s'assurer que $\mathbf{Q}$ muni de ces deux opérations vérifie tout ce qu'on souhaite[2].

Solution de l'exercice 3.29

2. Associativité, commutativité et distributivité de f et g, le fait que $\mathbf{Q}$ « contient $\mathbf{Z}$ » au sens des classes des éléments de $\mathbf{Z} \times \{1\}$, que chaque élément possède un opposé et un inverse (sauf 0). De plus, tout ensemble qui possède ces propriétés doit contenir un ensemble de la même forme que $\mathbf{Q}$