(*) : exos - obligatoires
(**) : exos pour les curieux
(***) : hors - programme

Correction Fiche 2.

Exercice 2 : *

On note C l'événement : "la coque est conforme".

On note A l'événement : "la coque est acceptée".

1) $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap C) + P(\bar{A} \cap \bar{C})$ d'après la Formule des probabilités totales (puisque $C, \bar{C}$ forment un système complet d'évènements)

$$= P(C)\,P(\bar{A} \mid C) + P(\bar{C})\,P(\bar{A} \mid \bar{C}).$$

Or d'après l'énoncé, $P(\bar{C}) = 0{,}05$, $P(A \mid C) = 0{,}96$ et $P(\bar{A} \mid \bar{C}) = 0{,}98$.

Donc $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 0{,}95$; $P(\bar{A} \mid C) = 1 - P(A \mid C) = 0{,}04$ et $P(A \mid \bar{C}) = 1 - P(\bar{A} \mid \bar{C}) = 0{,}02$.

Ainsi, $P(\bar{A}) = 0{,}95 \times 0{,}04 + 0{,}05 \times 0{,}98$.

$$= \frac{95}{100} \times \frac{4}{100} + \frac{5}{100} \times \frac{98}{100}$$

$$= \frac{870}{10000} = 0{,}087.$$

La probabilité que la coque soit rejetée est de 0,087.

2) $$P(C \mid \bar{A}) = \frac{P(C \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$= \frac{P(C)\,P(\bar{A} \mid C)}{P(\bar{A})} \quad \text{(Formule de Bayes).}$$

$$= \frac{0{,}95 \times 0{,}04}{0{,}087}$$ d'après 1).

$$\simeq 0{,}437.$$

La probabilité que la coque soit conforme sachant qu'elle a été rejetée est d'environ 0,437.

3) $$P(\bar{C} \mid A) \overset{\text{(Bayes)}}{=} \frac{P(\bar{C})\,P(A \mid \bar{C})}{P(A)} = \frac{0{,}05 \times 0{,}02}{1 - 0{,}087} = \frac{\frac{5}{100} \times \frac{2}{100}}{\frac{913}{1000}} = \frac{1}{913} \simeq 0{,}00110.$$

car $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}087$ d'après 1).

La probabilité que la coque soit non conforme sachant qu'elle est acceptée est d'environ 0,00110.

4) On cherche le pourcentage d'erreur lors du contrôle :

Il y a une erreur si la coque est acceptée alors qu'elle est non conforme ou si la coque est refusée alors qu'elle est conforme.

$$P((A\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap C)) = P(A\cap\bar{C}) + P(\bar{A}\cap C)$$

↳ car l'union est disjointe.

$$= P(\bar{C})P(A|\bar{C}) + P(C)P(\bar{A}|C)$$

$$= 0,05\times 0,02 + 0,95\times 0,04.$$

$$= \frac{5}{100}\times\frac{2}{100} + \frac{95}{100}\times\frac{4}{100}$$

$$= \frac{390}{10\,000}$$

$$= \frac{39}{1000}$$

$$= 0,039.$$

Le pourcentage d'erreur dans le contrôle est de 3,9%.

Exercice 4:

1) ** On choisit 6 personnes au hasard dans un groupe de 9 personnes dont 4 vérifient la condition : "être une femme".

X est le nombre de femmes dans ce jury de 6 personnes.

La loi de X est donc une loi hypergéométrique de paramètres $9, 6, \frac{4}{9}$.

$X \sim \mathcal{H}(9, 6, \frac{4}{9})$.

D'après la calculatrice, $P(X=3) \simeq 0,4762$.

2) * Il s'agit d'une répétition de 100 épreuves de Bernoulli indépendantes identiquement distribuées (succès pour l'obtention d'un trèfle à 4 feuilles) dont la probabilité de succès est 0,01. X étant le nombre de succès obtenus sur ces 100 épreuves,

X suit donc une loi binomiale de paramètres 100 et 0,01.
$(X \sim \mathcal{B}(100, 0{,}01))$

D'après la calculatrice, $P(X=3) \simeq 0{,}061$.

3)** X représente le nombre d'accidents ou déclarations arrivées dans la journée.

On sait qu'il y a 2 accidents en moyenne par heure donc 16 en moyenne sur une journée de 8 heures.

X suit une loi de Poisson de paramètre 16.

$(X \sim \mathcal{P}(16))$

D'après la calculatrice, $P(X=3) \simeq 0{,}0001$.

4) Un joueur reçoit 8 cartes au hasard parmi les 32 cartes.
De plus, sur ces 32 cartes, il y a 4 as.
X est le nombre d'as reçu par un joueur.
La loi de X est donc une loi hypergéométrique de paramètres 32, 8, $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
$(X \sim \mathcal{H}(32, 8, \frac{1}{8}))$
D'après la calculatrice, $P(X=3) = 0{,}0374$.

5)** X désigne le nombre de bons numéros sur notre grille.
Or il y a 49 numéros sur la grille et parmi ces 49, il y en a 6 bons.
Donc X suit une loi hypergéométrique de paramètres 49, 6, 1/6.
$(X \sim \mathcal{H}(49, 6, 1/6))$.

D'après la calculatrice, $P(X=3) = 0{,}0177$.

6)* Premier jeu : il s'agit d'une répétitions de 4 épreuves de Bernoulli indépendantes identiquement distribuées dont la probabilité de succès est 1/6.
On note X la variable comptant le nombre de 6 obtenus (sur les 4 lancés).
X suit une loi binomiale de paramètres 4, 1/6 $(X \sim \mathcal{B}(4, 1/6))$.

Le joueur gagne si $X \geq 1$.

Or $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$\simeq 1 - 0,482$

$\simeq 0,518$.

Second jeu : On refait exactement le même raisonnement.

Cette fois-ci $X \sim \mathcal{B}(24, 1/36)$.

Et $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$\simeq 1 - 0,509$

$\simeq 0,491$.

La probabilité de gagner est plus faible pour le second jeu, ce qui est cohérent avec l'énoncé.

Exercice 5 : *

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de postes occupés.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = \frac{2,5}{60} = \frac{1}{24}$.

car chaque poste à une probabilité $\frac{2,5}{60} = \frac{1}{24}$ d'être occupé et on compte le nombre de postes occupés parmi les 1000. (répétition de 1000 épreuves de Bernoulli indépendantes identiquement distribuées de probabilité de succès égale à $1/24$.)

$(X \sim \mathcal{B}(1000, 1/24))$

D'après la calculatrice $P(X \geq 51) \simeq 0,0841$.

La probabilité de saturation du réseau pendant une minute en heures de pointe est ~~d'~~ environ $0,0841$.

Solution Exercice 2.3 Fiche 2 du Workbook p.5

**

On peut formuler la solution de deux façons différentes : la première avec des arguments de dénombrement et la seconde en utilisant des variables aléatoires. L'avantage de la seconde méthode est qu'elle permet une généralisation au cas où la probabilité qu'un nouveau né soit un garçon vaille p avec p non nécessairement égal à $1/2$.

première méthode :

On suppose ici que la probabilité de naissance d'un garçon est la même que celle de naissance d'une fille, à savoir $p = 1/2$.

Une fratrie de deux enfants peut être décrite par un couple (i, j) avec $i \in \{0, 1\}$ et $j \in \{0, 1\}$ avec la convention que i est le sexe de l'ainé(e) et j celui du(de la) cadet(te) et où la valeur 1 désigne un garçon et la valeur 0 une fille.

Dans une fratrie de deux les quatres cas possibles sont $(0, 1), (1, 1), (0, 0)$ et $(1, 0)$. Les quatre cas envisagés sont équiprobables (de probabilité $1/4 = 1/2 \cdot 1/2$) car le sexe de l'aîné et celui du cadet sont indépendants et que la probabilité qu'un nouveau né soit un garçon est de $p = 1/2$.

1. **question 1** : dans une fratrie de deux qui contient au moins un garçon seuls trois cas sont possibles : $(0, 1), (1, 1)$ et $(1, 0)$ (équiprobables). le seul cas favorable indiquant qu'on a deux garçon est $(1, 1)$. Donc la probabilité que l'enfant de la fratrie qui est à l'intérieur soit un garçon sachant que celui qui a ouvert la porte est un garçon (qu'il soit l'ainé ou le cadet) vaut $1/3$ (nombre de cas favorables divisé par nombres de cas possibles)
2. **question 2** : dans une fratrie de deux où l'ainé est un garçon et où le cadet (ou la cadette) est un bébé, seuls deux cas sont possibles : $(1, 1)$ et $(1, 0)$ (équiprobables). Ensuite comme précédemment le seul cas favorable qui indique qu'on a deux garçons est $(1, 1)$. Donc la probabilité que l'enfant de la fratrie qui est un bébé (et est donc nécessairement le cadet) soit un garçon sachant que celui qui a ouvert la porte est l'aîné et est un garçon vaut $1/2$ (nombre de cas favorables divisé par nombres de cas possibles)

seconde méthode :

Soit X_1 la variable aléatoire modélisant le sexe de l'aîné(e) d'une fratrie de deux et X_2 celui du second. Chacune des deux variables X_1 et X_2 suit une loi de Bernoulli de même paramètre p où la modalité 1 désigne le sexe masculin. On suppose de plus que les deux variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

1. **question 1 :** la probabilité cherchée est celle que les des deux enfants de la fratrie soient des garçons sachant que l'un des deux (l'aîné ou le cadet est un garçon) soit :

$$P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} | \{X_1 = 1\} \cup \{X_2 = 1\}) = \frac{P((\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) \cap (\{X_1 = 1\} \cup \{X_2 = 1\}))}{P(\{X_1 = 1\} \cup \{X_2 = 1\})}$$

Ensuite en utilisant les propriétés de distributivité de l'intersection sur la réunion d'ensembles, le fait que la réunion de deux ensembles identiques est l'ensemble lui même et comme X_1 et X_2 sont indépendantes le numérateur s'écrit :

$$P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = p^2$$

Pour le dénominateur on a :

$$P(\{X_1 = 1\} \cup \{X_2 = 1\}) = P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) - P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) = 2p - p^2$$

Finalement la probabilité cherchée vaut :

$$\frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2-p}$$

et pour $p = 1/2$ on retrouve bien $1/3$.

2. **question 2 :** la probabilité cherchée est celle que les des deux enfants de la fratrie soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon soit :

$$P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} | \{X_1 = 1\}) = \frac{P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 1\})}{P(\{X_1 = 1\})}$$

Par l'indépendance de X_1 et X_2 le numérateur vaut p^2 et le dénominateur p. La probabilité cherchée vaut donc p soit $1/2$ dans le cas où la probabilité d'une naissance d'un garçon est $1/2$.

Correction - Fiche 2 (suite)

Ex6 *

① Soit X la variable aléatoire représentant "le nombre de témoins qui me désignent" parmi les 6. Il s'agit d'une répétition de 6 Bernoulli indépendantes et i.d. dont la proba de succès est de $\frac{1}{4}$ (si hasard). Donc X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(6; \frac{1}{4})$

a) $P(X=0) = 0{,}17798$
b) $P(X=1) = 0{,}35596$
c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}466$

$\Big\} \longrightarrow$ calculatrice

② $P(X=2) = 0{,}2966$ (calculatrice) si on considère que c'est le modèle défini en ① (donc hasard).
Il y a environ 30% de "chance" que 2 témoins vous aient désigné. Donc faible mais pas du tout négligeable !

③ $P(X=4) = 0{,}033$. Cette fois-ci, il n'y a que 3,3% de chance que 4 témoins vous aient désigné. Donc très peu de chance que ce soit du "hasard".

Ex 7

PARTIE A

1) * Soit X la variable désignant "le nombre de hackers qui ont trouvé le mdp" parmi les 4 possibles.
Il s'agit d'une répétition de 4 Bernoulli i.i.d. dont la proba de succès est $\frac{1}{10}$.
Donc X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(4; \frac{1}{10})$

2) * $P(\text{compte piraté}) = P(X \geq 1) = 0{,}3439$ (calculatrice)
$P(X=4) = 0{,}0001$

PARTIE B ** : Soit Y la variable désignant le nombre de comptes piratés par mois.

1) On sait que 2 comptes sont piratés en moyenne par semaine donc 8 comptes piratés (en moyenne) par mois. (on considère que 1 mois = 4 semaines).

Donc X suit la loi Poisson, $\mathcal{P}(8)$.

2) $P(X=10) = 0{,}09926$ (calculatrice)

Il y a 5 ouvertures par semaines, donc 20 ouvertures par mois.

$P(X > 20) = 0{,}000094$.

EX 2.8 : ***

EX 2.9 : ***.