Université Grenoble Alpes - DLST
L2 Licence Sciences et Technologies - STA401 **Mars 2023**

STA401 : CC2-Partiel

Durée : 1 heure 30
Documents autorisés : Tables statistiques - Calculatrice (lycée)

Exercice 1 :

1. Soient X et Y deux variables de lois Normales indépendantes, X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(2;4)$ et Y $\rightsquigarrow \mathcal{N}(3;25)$
   a) Quelle est la loi de $\frac{1}{5}(Y-3)$?
   b) Quelle est la loi de $3X-2Y$? En déduire $P(3X>2Y)$.

2. On suppose que X suit une loi Normale de moyenne $\mu = 40$ et de variance $\sigma^2 = 100$.
   a) Calculez $P(X < 45)$. Donnez la valeur à 10^{-4} avec les tables statistiques, et à 10^{-6} avec la calculatrice.
   b) Calculez la valeur a telle que $P(X > a) = 0,02$.

3. Soit X une variable de loi Binomiale de paramètres n = 1000, et p = 0,25. Citez le nom du théorème utilisé pour obtenir une loi approchée de cette loi Binomiale; calculez les paramètres exacts, et vérifiez les conditions.

4. Soit X une variable aléatoire dont on a mesuré les valeurs suivantes : 1; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6. Calculez la variance estimée sans biais de X. Donnez la commande exacte du logiciel R qui permet de retrouver cette variance.

Exercice 2 (filières MIN-MAT)

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ ($\theta > 0$).

On rappelle que la fonction de densité est définie par : $f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ pour x≥ 0 , et $f(x) = 0$ pour x< 0 .

1. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $\overline{X}$. [vous pourrez poser $\theta = \frac{1}{\lambda}$ si nécessaire]
2. Montrer que cet estimateur est sans biais et de variance asymptotiquement nulle.

Exercice 2 (filière INM)

Soit X une variable aléatoire de loi inconnue, mais dont on sait que $E[X] = 16$ et $V[X] = 16$.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, calculez une **minoration** de $P(10 < X < 22)$.
2. On suppose maintenant que X suit la loi $\mathcal{N}(16;16)$. Calculer la valeur exacte de $P(10 < X < 22)$ et vérifier la compatibilité avec le résultat précédent.

Exercice 3 :

On étudie un nouveau type d'ordinateur dont la probabilité p d'apparition d'un certain évènement E est de 20%.

1. On prend un échantillon de 6 ordinateurs de ce type.
   (a) Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs sur lesquels est survenu l'évènement E. Quelle est la loi exacte de X ? Justifier explicitement.
   (b) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun ordinateur sur lequel E soit apparu ?
   (c) La probabilité qu'il y ait au moins 5 apparitions de E est-elle inférieure à 1% ?

2. On prend maintenant un échantillon de 500 ordinateurs. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs sur lesquels l'évènement E est survenu dans cet échantillon.
   (a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X (justifiez tout précisément) ?
   (b) Calculer la probabilité pour qu'il y ait moins de 80 ordinateurs sur lesquels E soit apparu.
   (c) Calculer N pour que $P(X \geq N) = 0,3$. Vous donnerez les calculs qui permettent de trouver le résultat avec les tables statistiques. [N représente le nombre minimum d'ordinateurs sur lesquels E est apparu avec une probabilité de 30%]
3. Dans l'échantillon précédent des 500 ordinateurs, on compte 97 ordinateurs sur lesquels est survenu l'évènement E. Avec un niveau de 0.99, peut-on conclure que cet échantillon est repésentatif des ordinateurs de ce nouveau type ?

Exercice 4 :

On étudie le temps de compilation de programmes de 10 étudiants. On suppose que cette variable aléatoire X suit une loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2.

14,4	13,4	13,6	14,15	13,3	14,7	14,44	14,9	13,5	12,89

1. a) Calculer la moyenne et variance empiriques.
   b) Calculer la moyenne et variance estimées sans biais de X.
2. a) Donner un intervalle de confiance de niveau 0,99 pour la moyenne de X. Interprétez
   b) Donner un intervalle de confiance de niveau 0,99 pour l'écart type de X.
3. On suppose maintenant que l'écart type de X est connu et égal à 0,65. Dans les deux questions suivantes, on suppose que la moyenne est inchangée et toujours égale à celle obtenue en 1.
   a) Quel niveau de confiance faudrait-il prendre pour que l'intervalle de confiance de μ ait une précision de $\pm$ 0,3 ?
   b) Combien de programmes d'étudiants devrait-on prendre pour estimer μ au niveau de confiance de 99% avec une précision de $\pm$ 0,3 ?