Université Grenoble Alpes
L2/STA351 **Frédérique Leblanc**

Partiel STA351 2017-18 : Calculs de probabilités & Estimation

Matériel autorisé : calculatrice programmable (celle du bac par exemple), tables statistiques et un recto-verso A4 **manuscrit**.

Il sera tenu compte de la rédaction dans la notation ainsi que de l'orthographe : au delà de dix fautes la copie ne sera plus évaluée. Le barême n'est qu'indicatif.

Exercice 1 (2pts) :
Recette de gateau au chocolat :
- 5 oeufs
- 120 gr de farine
- 90 gr de sucre
- 225 gr de chocolat
- 75 gr de beurre

Je n'ai que 3 oeufs dans mon placard, quelles quantités de farine, sucre, chocolat et beurre dois-je utiliser pour respecter la recette ci-dessus ?

Exercice 2 (8pts) :
Afin de déterminer la concentration en glucose d'un échantillon sanguin, on effectue des dosages à l'aide d'une technique expérimentale. On considère que cette variable suit une loi normale de moyenne μ et variance σ^2. On effectue 10 dosages indépendants qui donnent les résultats suivants (en g/l) :

$0,96$	$1,04$	$1,08$	$0,92$	$1,04$	$1,18$	$0,99$	$0,99$	$1,25$	$1,08$

Partie A :

1. Calculer la moyenne et la variance empirique de la concentration en glucose de cet échantillon (utilisation du mode "stat" de la calculatrice).
2. Calculer les estimations sans biais de la moyenne et de la variance de la concentration en glucose obtenues avec cet échantillon.
3. Donner une estimation du pourcentage d'individus ayant une concentration en glucose strictement supérieure à 1 g/l.

Partie B :

1. Calculer un intervalle de confiance de niveau 95% de la variance σ^2 de cette concentration.
2. Calculer un intervalle de confiance de niveau 95% de la moyenne μ de cette concentration.
3. On suppose maintenant que la variance est connue : $\sigma^2 = 0,01$.
   (a) Calculer un intervalle de confiance de niveau 95% de la concentration moyenne μ.
   (b) Combien de dosages devrait-on prendre pour avoir un intervalle de confiance de longueur 0,1 g/l (les autres valeurs ne changeant pas) ?
   (c) Quel niveau de confiance faudrait-il prendre pour avoir un intervalle de confiance de longueur 0,1 g/l (les autres valeurs ne changeant pas) ?

Exercice 3 (10pts) :

On se propose ici de répondre au problème suivant : On coupe au hasard une baguette de longueur 1 en trois morceaux. Quelle est la probabilité de pouvoir réaliser un triangle avec les trois segments obtenu ?

On admettra qu'une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir former un triangle avec trois segments de longueur x, y et z est que la somme de deux côtés quelconques soit toujours supérieure ou égale au troisième côté ($x \leq y+z$ et $y \leq z+x$ et $z \leq x+y$). On notera p la probabilité cherchée.

Dans la première partie du problème on résoudra la question à l'aide du calcul de probabilités et dans la seconde partie en faisant des statistiques.

Avec le calcul de probabilités (7pts) :

On notera U et V les deux points de césure de la baguette. Dire que ces deux césures sont faites au hasard revient à supposer que les quantités aléatoires U et V suivent des lois uniformes sur $[0,1]$ et qu'elles sont indépendantes. On admettra que $P(U=V)=0$.

1. Quelle est la surface d'un triangle rectangle et isocèle dont l'hypoténuse est de longueur $1/\sqrt{2}$ (on cherchera d'abord l la longueur commune aux deux côtés adjacents) ?
2. Soient a, b, c et d quatre réels tels que $a \leq b$, $c \leq d$ et appartenant à l'intervalle $[0,1]$. Exprimer $P(U \in [a,b])$ et $P(V \in [c,d])$ en fonction de a, b, c et d. On rappelle que la densité de la variable uniforme est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x)=0$ sinon.
3. En déduire $P(\{U \in [a,b]\} \cap \{V \in [c,d]\})$ (on rappelle que l'indépendance entre U et V signifie que pour deux intervalles de $\mathbb{R}$, I et J quelconques : $P(\{U \in I\} \cap \{V \in J\}) = P(U \in I)P(V \in J)$).
4. On note $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ et $\Delta = \{(u,v) \in \Omega \mid u > v\}$: représenter graphiquement les domaines Ω et Δ dans un repère orthonormé.
5. On admettra que pour tout domaine $D \subset \Omega$: $P((U,V) \in D)$ est égale à la surface de D. Pour quels domaines a été montré ce résultat dans l'une des questions précédentes ?
6. Supposons à présent que la seconde césure V est inférieure (sur le segment $[0,1]$) à la première notée U.
   (a) Dans quel domaine trouve t-on alors les couples de césures possibles (u,v) ?
   (b) Soient $\Delta_1 = \{(u,v) \in \Delta \mid u < 1/2\}$, $\Delta_2 = \{(u,v) \in \Delta \mid v > 1/2\}$ et $\Delta_3 = \{(u,v) \in \Delta \mid v < u - 1/2\}$ et $\Delta_4 \subset \Delta$ tels que $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$ forment une partition de Δ : Représenter ces quatre domaines dans le domaine Δ. On refera de nouveau le dessin demandé dans la question 4 que l'on complètera en y rajoutant les quatre domaines Δ_i.
   (c) Montrer que si $(u,v) \in \Delta_1$ ou $(u,v) \in \Delta_2$ ou $(u,v) \in \Delta_3$ on ne peut pas constituer un triangle et que si $(u,v) \in \Delta_4$ on peut dessiner un triangle avec les trois segments obtenus. (indication : on pourra noter x la longueur du segment $[0,v]$, y celle du segment $[v,u]$ et z celle du dernier segment $[u,1]$).
   (d) En déduire la probabilité de pouvoir faire un triangle si $u > v$.
7. De façon analogue en déduire la probabilité de pouvoir faire un triangle si $u < v$.
8. Conclure.

Avec des statistiques (3pts) :

On réalise n fois l'expérience de couper au hasard la baguette en trois et on code le résultat par 1 si les trois morceaux obtenus permettent de réaliser un triangle et par 0 dans le cas contraire. On note X la variable qui modélise cette expérience. Sur $n=100$ essais on a obtenu : $\sum x_i = 23$.

1. Quelle est la loi de X ? Celle de $\sum X_i$?
2. Quelle estimation de p fournit l'échantillon observé ?
3. Donner un intervalle de confiance de niveau approximatif 90% pour le paramètre p.