Recherche Opérationnelle I

Nadia Brauner

Nadia.Brauner@imag.fr

Dualité

Dualité

Plan

1. Illustration économique
2. Comment prouver l'optimalité ?
3. Écrire le dual
4. Propriétés

Dualité

Nouveau concept en Programmation Linéaire

Primal

- données A, b, c
- minimiser

Dual

- mêmes données A, b, c
- maximiser

Plan

1. Illustration économique
2. Comment prouver l'optimalité ?
3. Écrire le dual
4. Propriétés

Plan

1. Illustration économique
2. Comment prouver l'optimalité ?
3. Écrire le dual
4. Propriétés

Problème primal ($\mathcal{P}$)

Une famille utilise 6 produits alimentaires comme source de vitamine A et C

	produits (unités/kg)						demande (unités)
	1	2	3	4	5	6	
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par kg	35	30	60	50	27	22	

But : minimiser le coût total

Modélisation

Problème dual $(\mathcal{D})$ associé à $(\mathcal{P})$

Un producteur de cachets de vitamine synthétique veut convaincre la famille d'acheter ses vitamines.

Quel prix de vente w_A et w_C ?

- pour être compétitif
- et maximiser le profit

Modélisation

Modélisation matricielle

Problème primal

famille : acheter des produits alimentaires à coût minimum et satisfaire la demande en vitamine A et C

Modélisation sous forme matricielle

Problème dual

producteur de vitamines synthétiques : être compétitif vis-à-vis des produits alimentaires comme source de vitamine et maximiser le profit de vente

Modélisation sous forme matricielle

Généralisation de l'illustration économique

	ressource i	demande j
produit j	a_{ij}	c_j
coût i	b_i	

Problème primal (demandeur de produit) : quelle quantité x_i de ressource i acheter pour satisfaire la demande à coût minimum ?

$$\min \sum_i b_i x_i \qquad s.c. \quad \sum_i a_{ij} x_i \geq c_j \quad \forall j$$

Problème dual (vendeur de produit) : à quel prix proposer les produits pour maximiser le profit tout en restant compétitif ?

$$\max \sum_j c_j w_j \qquad s.c. \quad \sum_j a_{ij} w_j \leq b_i \quad \forall i$$

Plan

1 Illustration économique

2 Comment prouver l'optimalité ?

3 Écrire le dual

4 Propriétés

Comment prouver l'optimalité ?

Objectif : démontrer l'optimalité d'une solution

$$
\begin{array}{l}
\max z = x_1 + x_2 \\
\begin{array}{rcrcl}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & x_2 & \leq & 2
\end{array} \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Idée : trouver une combinaison valide des contraintes permettant de borner terme à terme la fonction objectif

Comment prouver l'optimalité ?

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & \multicolumn{2}{l}{y_1, y_2, y_3 \geq 0} &
\end{array}
$$

Finalement,

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 20y_1 & + & 6y_2 & + & 2y_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & & & \\
 & 4y_1 & + & 2y_2 & & & \geq & 1 \\
 & 5y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\
 & y_i & \geq & 0 & & & &
\end{array}
$$

(borne sup minimale)

(borner terme à terme l'objectif)

Plan

1. Illustration économique
2. Comment prouver l'optimalité ?
3. Écrire le dual
4. Propriétés

Forme canonique de dualité

Donnée A, b, c

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{D}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{array} \right.$$

Tableau des signes

min	**max**
primal	dual
dual	primal
variable ≥ 0	contrainte $\leq$
variable $\lessgtr 0$	contrainte $=$
variable ≤ 0	contrainte $\geq$
contrainte $\leq$	variable ≤ 0
contrainte $=$	variable $\lessgtr 0$
contrainte $\geq$	variable ≥ 0

L'écriture du Dual est automatique :

- les variables
- la fonction objectif
- les contraintes

Écrire le dual

Écrire le programme dual

$\max z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3$

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & & & = & 3 \\ & & & & 2x_3 & \geq & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0$

Plan

1. Illustration économique
2. Comment prouver l'optimalité ?
3. Écrire le dual
4. Propriétés

Propriétés

Propriété

Le dual du dual est équivalent au primal

vérifier sur un exemple

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 3 \\ & & & & x_3 & \geq & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & & x_2 & & & \leq & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \qquad x_3 \leq 0$$

Propriétés

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{D}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{array} \right.$$

Théorème de dualité faible

Pour chaque paire de solutions admissibles x de $(\mathcal{P})$ et w de $(\mathcal{D})$

$z = cx \geq wb = v$

Conséquence : que se passe-t-il si l'un est non borné ?

Et l'optimalité ?

Certificat d'optimalité

Si

$$z = cx = wb = v$$

pour des solutions admissibles x de $(\mathcal{P})$ et w de $(\mathcal{D})$, alors x et w sont optimales

Théorème de dualité forte

Si $(\mathcal{P})$ a des solutions et $(\mathcal{D})$ a des solutions, alors

$$cx^* = w^* b$$

Propriété des écarts complémentaires

Pour l'exemple des vitamines

- écrire le primal avec les variables d'écart (s_i)
- écrire le dual avec les variables d'écart (t_i)
- trouver une solution du primal optimale
- trouver une solution du dual optimale
- écrire les paires de variables (s_i, w_i) et (x_j, t_j)
- que remarquez-vous ?

Propriété des écarts complémentaires

Forme canonique de dualité

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{lll} \min & z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j & \\ s.c. & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i & \forall i \\ & x_j \geq 0 & \forall j \end{array} \right. \quad (\mathcal{D}) \left\{ \begin{array}{lll} \max & v = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i & \\ s.c. & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \leq c_j & \forall j \\ & w_i \geq 0 & \forall i \end{array} \right.$$

Les solutions réalisables x^* de $(\mathcal{P})$ et w^* de $(\mathcal{D})$ sont **optimales** si et seulement si

(1) $(\sum_j a_{ij} x_j^* - b_i) w_i^* = 0 \quad \forall i$

et

(2) $(c_j - \sum_i a_{ij} w_i^*) x_j^* = 0 \quad \forall j$

Pour mieux comprendre

(1) $\iff$ si $w_i^* > 0$ alors $\sum_j a_{ij} x_j^* = b_i$

$\iff$ si $\sum_j a_{ij} x_j^* > b_i$ alors $w_i^* = 0$

(2) $\iff$ si $x_j^* > 0$ alors $\sum_i a_{ij} w_i^* = c_j$

$\iff$ si $\sum_i a_{ij} w_i^* < c_j$ alors $x_j^* = 0$

Propriété des écarts complémentaires

Forme canonique de dualité

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min & z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j & \\ s.c. & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i & \forall i \\ & x_j \geq 0 & \forall j \end{cases} \quad (\mathcal{D}) \begin{cases} \max & v = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i & \\ s.c. & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \leq c_j & \forall j \\ & w_i \geq 0 & \forall i \end{cases}$$

Les solutions réalisables x^* du primal et w^* du dual sont optimales si et seulement si

(1) $(\sum_j a_{ij} x_j^* - b_i) w_i^* = 0 \quad \forall i$

et

(2) $(c_j - \sum_i a_{ij} w_i^*) x_j^* = 0 \quad \forall j$

Autrement dit...

Pour x^* optimale de $(\mathcal{P})$ et w^* optimale de $(\mathcal{D})$, une contrainte de $(\mathcal{P})$ est serrée à égalité OU la variable associée à cette contrainte est nulle dans w^*. Idem dans l'autre sens

Propriété des écarts complémentaires

Intérêt Si on connaît x^* optimal de $(\mathcal{P})$, alors on peut trouver y^* en appliquant la propriété des écarts complémentaires (et ainsi prouver l'optimalité de x^*)

essayer sur un exemple

$\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

avec $x_1 = 2$ et $x_2 = 2$

Petite philosophie de la dualité

À quoi servent les trois théorèmes de dualité

- Dualité faible : pour faire la **preuve d'optimalité**
- Écarts complémentaires : pour trouver une solution optimale du dual connaissant une solution optimale du primal
- Dualité forte : **garantit** qu'une preuve d'optimalité (utilisant la dualité) est possible