Exercices INF 303

Université Grenoble Alpes

Table des matières

1 Enumération **3**

2 Récurrence **9**

3 Graphes **17**

4 Chaînes et cycles **26**

5 Arbres **34**

6 Plus courts chemins **48**

7 Coloration **56**

8 Couplages **66**

9 Flots **74**

10 Dessins de graphes **89**

Point méthode sur les preuves par récurrence dans les graphes :
Pour prouver une propriété $P(n)$ sur un graphe par récurrence sur n le nombre de sommets :

1. **Initialisation :** on montre $P(n)$ pour une petite valeur de n, généralement pour $n = 1$.
2. **Hérédité :** on veut prouver que $P(n+1)$ est vraie en s'aidant de l'hypothèse de récurrence $P(n)$. Comme le but est de prouver $P(n+1)$, on commence par **prendre un graphe G à $n+1$ sommets** correspondant aux hypothèses de $P(n+1)$. On enlève un sommet x judicieusement choisi, en posant $G' = G \setminus \{x\}$. Alors G' est un graphe à n sommets sur lequel on peut appliquer la propriété $P(n)$ par hypothèse de récurrence (attention, souvent il faut vérifier que G' satisfait bien les autres conditions de $P(n)$, outre la taille). On obtient donc une partie de la conclusion souhaitée sur G', et l'on doit travailler pour prouver la propriété sur G qui contient G' plus le sommet x. [1]
3. **En conclusion,** les étapes d'initialisation et d'hérédité montrent ensemble par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Méthodes de preuves courantes en graphes :

- ☐ Par l'absurde
- ☐ Par double comptage
- ☐ Par récurrence sur le nombre de sommets ou le nombre d'arêtes du graphe, ou sur un autre paramètre du graphe
- ☐ Par objet maximal ou minimal
- ☐ Preuve algorithmique par invariant de boucle

1. Parfois, on fait une récurrence forte, c'est-à-dire qu'on s'autorise à enlever un ensemble de sommets X (plusieurs sommets) et à appliquer l'hypothèse de récurrence sur le graphe plus petit $G \setminus X$.

1 Enumération

On rappelle ici qu'un jeu de cartes standard contient 52 cartes, réparties en 4 couleurs : le Carreau $\diamondsuit$, le Cœur $\heartsuit$, le Trèfle $\clubsuit$ et le Pique $\spadesuit$. Chaque couleur contient 13 cartes, numérotées ainsi : As, 1, 2, ..., 10, Valet, Dame, Roi.

Exercice 1 :

De combien de façons différentes sept enfants peuvent-ils se répartir 7 déguisements différents ?

> Sans perte de généralité, on peut aligner les 7 enfants dans un certain ordre, disons $E_1, \ldots, E_7$. Une façon d'affecter les 7 déguisements revient exactement à une façon de mettre les 7 déguisements dans un certain ordre en face des 7 enfants, c'est-à-dire à une permutation des 7 déguisements. Cela donne donc 7! possibilités.

Exercice 2 : De combien de façons six enfants peuvent-ils s'asseoir sur une rangée de six chaises si trois d'entre eux refusent d'occuper les extrémités de la rangée ?

> Comme trois enfants refusent de s'asseoir sur les extrémités, et que l'on a six enfants au total, alors 3 enfants sont d'accord pour s'asseoir sur les extrémités. Si on numérote les sièges $S_1, S_2, \ldots, S_6$, alors on a 3 choix d'enfants pour le siège S_1, puis 2 choix pour le siège S_6 (les trois enfants d'accord pour les bords, sauf celui déjà assis en S_1) ; ensuite n'importe quel ordre des 4 enfants restants sera valide pour S_2, S_3, S_4 et S_5, c'est-à-dire n'importe quelle permutation de ces 4 enfants (il y a 4! telles permutations).
> Le nombre total de possibilités est donc de $3 \times 2 \times 4! = 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$.

Exercice 3 : De combien de façons différentes peut-on former la suite ordonnée VALET, DAME, ROI, AS si l'on veut que les cartes de cette suite soient

Question 1 – de couleurs différentes ?

> Chacune des 4 couleurs apparaîtra donc exactement une fois dans la suite Valet, Dame, Roi, As donc cela revient à choisir une permutation des 4 couleurs : le nombre de possibilités est donc de $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Question 2 – de la même couleur ?

> On a 4 choix de couleur pour le Valet, puis un seul pour la Dame (il faut garder la même couleur que pour le valet), puis de même un seul pour le Roi et l'As. Le nombre de possibilités est donc de $4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$.

Question 3 – de n'importe quelle couleur ?

> On a 4 choix de couleur pour le valet, puis 4 pour la dame, 4 pour le roi et 4 pour l'As. Le nombre de possibilités est donc de $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

(Aux cartes les couleurs sont : le Carreau $\diamondsuit$, le Cœur $\heartsuit$, le Trèfle $\clubsuit$ et le Pique $\spadesuit$.)

Exercice 4 : Un coffre-fort possède cinq serrures à roulettes numérotées de 0 à 9 qui forment un code. Un voleur tente d'ouvrir le coffre-fort et il ne connaît pas la combinaison des cinq serrures.

Question 1 – Combien existe-t-il de possibilités de combinaisons ?

> On a 10 choix (dix chiffres de 0 à 9) pour la première serrure, puis 10 pour la deuxième, et ainsi de suite, autrement dit on a 10 choix pour chacune des 5 serrures successives : le nombre de possibilités est donc de $10^5 = 100000$.

Le voleur ne peut essayer que 100 combinaisons avant l'arrivée de la police.

Question 2 – Quelle est la probabilité qu'il réussisse à ouvrir le coffre-fort ?

La probabilité est calculée comme le nombre d'issues favorables (les 100 combinaisons qu'il va essayer) divisée par le nombre total d'issues, soit $\frac{100}{100000} = \frac{1}{1000}$.

Exercice 5 : 24 pilotes participent à un Grand Prix de Formule 1, mais seuls les 10 premiers marquent des points pour le championnat. Supposons que tous les pilotes terminent la course.

Question 1 – Combien de classements généraux possibles y a-t-il au total ?

Un classement général des 24 pilotes correspond exactement à choisir un ordre sur ces 24 pilotes, c'est-à-dire une permutation de ces 24 éléments. Il y a donc $24!$ possibilités.

Question 2 – Combien de classements possibles y a-t-il pour les 10 premiers ?

Ici il faut choisir à la fois les 10 pilotes parmi les 24 qui seront en tête de classement, et l'ordre pour ces 10 pilotes choisis : il s'agit donc d'un 10-arrangement d'un ensemble à 24 éléments. Il y en a donc $\frac{24!}{(24-10)!} = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$.
Remarquez que l'on obtient le même résultat en disant qu'il y a $\binom{24}{10}$ façons de choisir les 10 pilotes de tête, puis $10!$ façons de les ordonner, soit $\binom{24}{10} \times 10! = \frac{24!10!}{(24-10)!10!} = \frac{24!}{14!}$.

Exercice 6 : À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on compose une main de trois cartes. Combien existe-t-il de façons différentes de composer

Question 1 – trois as ?

On doit choisir 3 As parmi les 4 As existants, donc $\binom{4}{3} = 4$.

Question 2 – trois coeurs ?

On doit choisir 3 coeurs parmi les 13 existants (car $52/4 = 13$) donc $\binom{13}{3} = 286$ possibilités.

Question 3 – trois cartes d'une même couleur ?

On choisit une couleur (4 choix) puis on choisit 3 cartes parmi les 13 cartes de cette couleur donc $4 \times \binom{13}{3} = 1144 = \frac{52 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = 52 \times 22 = 1144$.
Attention au raisonnement **faux** suivant : on choisi une carte parmi les 52, puis une carte parmi les 12 restant dans cette couleur, puis une carte parmi les 11 restant de cette couleur soit $52 \times 12 \times 11 > 52 \times 22$.
Le problème de ce raisonnement est que l'on compte plusieurs fois la même main (par exemple je choisis l'As de coeur, puis un autre coeur disons le 7, puis un autre coeur disons le Valet ; or je pourrais choisir d'abord le Valet de Coeur, puis un autre coeur disons le 7, puis un autre Coeur disons le 7 ; je me retrouve dans les deux cas avec une main contenant le 7, le Valet et l'As de Coeur, mais je l'ai comptée à tort comme 2 choix différents).

Question 4 – une paire ? (deux cartes de même rang et une autre de rang différent)

On choisit d'abord le rang qui apparaîtra en double (13 choix, par exemple As), puis 2 cartes parmi les 4 cartes de ce rang (par exemple, As de Pique et As de Carreau), puis une carte parmi les $(52-4)$ ayant un rang différent. Cela donne donc $13 \times \binom{4}{2} \times 48 = \frac{52 \cdot 3 \cdot 48}{2} = 3744$.
Là encore, attention au raisonnement faux qui consisterait à choisir une carte parmi les 52, puis une carte parmi les 3 cartes restantes du même rang, puis une carte parmi les 48 restantes de rang différents. Cela donne $52 \times 3 \times 48$ mais on a compté en double chaque paire (ex : je prends l'As de Coeur, puis un autre As disons celui de Carreau, puis la Dame de Pique ; que j'obtiens également en choisissant d'abord l'As de Carreau, puis un autre As disons celui de Coeur, puis la Dame de Pique).

Question 5 – trois couleurs différentes ?

On choisit les 3 couleurs qui apparaîtront parmi les 4, puis on choisit 1 carte parmi les 13 de la première couleur, puis 1 parmi les 13 de la deuxième couleur, puis 1 parmi les 13 de la dernière couleur. Le nombre de choix est donc de $\binom{4}{3} \times 13 \times 13 \times 13 = 4 \cdot 13^3 = 8788$.
On obtient la même réponse si l'on raisonne ainsi : on choisit une carte parmi les 52, puis 1 carte parmi les 39 restantes de couleur différente, puis 1 carte parmi les 26 restantes de couleur différente des deux premières ; chaque main apparaîtra ainsi 3!, selon l'ordre dans lequel on prend les 3 coueulurs. Cela donne $\frac{52 \cdot 39 \cdot 26}{3!} = \frac{13 \times 4 \times 13 \times 3 \times 13 \times 2}{3 \times 2} = 4 \cdot 13^3$ possibilités.

Exercice 7 : On considère un ensemble fini non vide. Montrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, qu'il a autant de parties de cardinalité paire que de parties de cardinalité impaires.

Soit n la taille de l'ensemble fini non-vide. Comme pour chaque $k \in \{0, \ldots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinalité k, ce que l'on veut prouver est l'égalité suivante : $\sum_{k=1, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k}$.
Or $\sum_{k=1, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (1 + (-1))^n = 0$
Donc on a bien autant de parties de cardinalité paire que de parties de cardinalité impaire.

Exercice 8 : Combien de nombres composés d'exactement trois chiffres et inférieurs à 500 peut-on former à l'aide des chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 si les répétitions :

Question 1 – sont permises ?

> On remarque que le zéro n'est pas autorisé donc il s'agit de nombres en 1 et 499. On a 4 choix pour le chiffre des centaines (1, 2, 3 ou 4), puis 7 choix (chiffres 1 à 7) pour les dizaines et encore 7 choix pour les unités. Cela fait donc $4 \times 7 \times 7 = 4 \cdot 7^2 = 196$ possibilités.

Question 2 – ne sont pas permises ?

> On a toujours 4 choix pour les centaines, puis 6 choix pour les dizaines (tous les chiffres de 1 à 7 sauf celui déjà utilisé pour les centaines), puis 5 choix pour les unités (chiffres de 1 à 7 sauf les deux déjà utilisés). Cela donne donc $4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$ possibilités.

Exercice 9 : Combien peut-on former de mots de 7 lettres avec les lettres du mot PLAFOND

Question 1 – si une même lettre ne peut être employée qu'une seule fois ?

> Comme les 7 lettres du mot PLAFOND sont distinctes, cela revient à une permutation des 7 lettres soit $7! = 5040$ possibilités.

Question 2 – si on tolère les répétitions d'une même lettre ?

> Pour chacun des 7 emplacements de lettres, on a le choix entre 7 lettres, donc $7^7 = 823543$ possibilités.

Exercice 10 : Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot MISSISSIPPI (chacune de ses lettres doit être utilisée exactement une fois) ? Autrement dit, combien d'anagrammes ce mot a-t-il ?

> Le mot MISSISSIPPI contient 11 lettres donc il existe 11! permutations de ses lettres. Cependant, certaines permutations donnent le même anagramme (par exemple, en prenant n'importe quelle permutation qui mélange les 4 S mais qui laisse les autres lettres inchangées, on retrouve MISSISSIPPI de 4! façons différentes).
> Comme MISSISSIPPI contient 4 S, 4I et 2 P, chaque anagramme se retrouvera autant de fois que de permutations possibles des S entre eux, des I entre eux, et des P entre eux, soit 4!4!2! fois.
> Le nombre total d'anagrammes différents est donc de $\frac{11!}{4!4!2!1!}$.

Exercice 11 : Soient k, n deux entiers naturels. Dénombrer les mots sur $\{0, 1\}$ de longueur n qui ont exactement k uns.

> Le nombre de permutations est $n!$. Pour chaque permutation, toutes les permutations des uns sont équivalentes (donnent le même mot). De même pour les zéros. Donc, le nombre de mots est $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Principe des tiroirs

Exercice 12 : Dans un village de 400 habitants, y a-t-il au moins deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

> Il y a 366 dates d'anniversaire possibles, et il y a 400 habitants. Comme il y a plus d'habitants que de date d'anniversaire, alors d'après le principe des tiroirs, au moins deux habitants doivent se retrouver avec la même date d'anniversaire.

Exercice 13 : On considère un carré de côté d. On y place cinq points.

Montrer qu'au moins deux points sont à distance strictement inférieure à d.

> On coupe le carré de côté d en 4 carrés de côté $d/2$ (rejoindre les milieux des côtés opposés). Comme on a 5 points et 4 petits carrés, d'après le principe des tiroirs, au moins 2 points se retrouvent dans le même petit carré. Or, la distance maximale pour deux points dans un carré de côté c est $\sqrt{2}c$ donc les deux points dans le même petit carré sont à distance au plus $\sqrt{2}\frac{d}{2} = \frac{d}{\sqrt{2}} < d$.

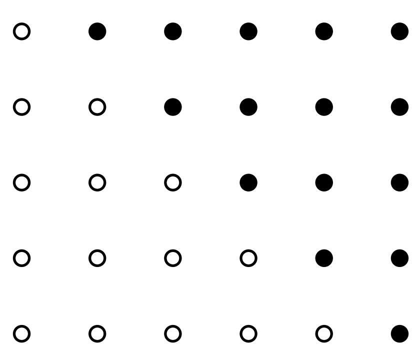
<u>Exercice 14</u> : On place les entiers de 1 à 10 sur un cercle. Montrer qu'il existe au moins un triplet d'entiers consécutifs dont la somme est supérieure ou égale à 17.

> On suppose par l'absurde que c'est faux. Alors 10, 9 et 8 ne peuvent pas se retrouver deux à deux consécutifs (sinon on a un triplet qui en contient au moins deux, de somme au moins $8 + 9 = 17$) ni deux-à-deux séparés par exactement un autre chiffre (même raison). Sans perte de généralité, comme on a dix places en tout, la disposition est donc de $\alpha|a|b|\beta|c|d|\gamma|e|f|g$ avec $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{8, 9, 10\}$ (le rôle de α et γ sont symétriques car on peut tourner dans l'autre sens). De plus, 7 ne peut pas se retrouver dans un triplet consécutif avec 10 (car $10 + 7 \geq 17$). Cela entraîne que 7 est dans le même triplet (= à distance 1 ou 2) que 8 ou 9 (= à distance 1 ou 2 de 8 ou 9). En effet :
>
> — si $\beta = 10$, alors 7 ne peut pas prendre les places a, b, c, d donc il se retrouve sur e, f ou g. De plus sans perte de généralité $\alpha = 8$ et $\gamma = 9$. La place de 7 est donc consécutive ou à distance 2 de $\alpha = 8$, ou de $\gamma = 9$.
>
> — sinon $\beta \neq 10$ donc sans perte de généralité $\alpha = 10$. Donc 7 ne peut pas prendre les places f, g, a, b donc il se trouve sur les places c, d ou e, qui sont à distance 1 ou 2 de γ, qui vaut 8 ou 9.
>
> Donc 7 est dans le même triplet que ϕ avec $\phi = 8$ ou $\phi = 9$. Or, il existe en fait deux triplets différents qui contiennent 7 et ϕ : l'un tournant de 7 vers ϕ, l'autre tournant de ϕ vers 7. Donc l'un de ses triplets ne contient pas 1, donc le troisième chiffre de ce triplet est au moins 2 : la somme du triplet est supérieure ou égale à $2 + 7 + \phi \geq 2 + 7 + 8 = 17$. On obtient une contradiction avec l'hypothèse de notre preuve par l'absurde.

Double-comptage

<u>Exercice 15</u> : Soit n un entier supérieur ou égal à 0. En vous aidant de la figure ci-dessous, montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$



On place des billes blanches et noires de la façon suivante :

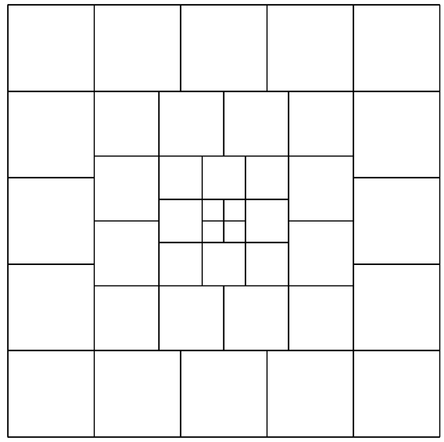
- sur la ligne 1, on met 1 bille blanches et n billes noires soit $n+1$ billes au total.
- sur la ligne 2, on place le même nombre de billes $(n+1)$ mais avec une bille blanche de plus qu'à la ligné précédente (donc une bille noire de moins)
- on continue selon la même règle jusqu'à obtenir un total de n lignes contenant chacune $n+1$ billes.

Soit S le nombre total de billes. On procède par double-comptage sur S :

- d'une part, on peut compter le nombre de billes disposées en rectangle avec n lignes de $(n+1)$ colonnes : $S = n(n+1)$ billes.
- d'autre part, le nombre de billes blanches est i sur la ligne numéro i (i allant de 1 à n), donc il y a $\sum_{i=1}^{n} i$ billes blanches au total. Quant-au nombre de billes noires, il y en a $(n+1-i)$ sur la ligne numéro i (i allant de 1 à n), soit un total de $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \sum i = 1^n i$ billes noires. Le nombre total de billes est donc la somme du nombre de billes blanches et du nombre de billes noires soit $S = 2\sum i = 1^n i$.

On obtient ainsi $n(n+1) = S = 2\sum i = 1^n i$ donc $\frac{n(n+1)}{2} = \sum i = 1^n i$.

Exercice 16 : Le carré ci-dessous est formé par 4 couronnes C_k ($k = 1, ..., 4$), où C_k est elle-même constituée de $4k$ carrés identiques de côté k.



Question 1 – Pour un k fixé, quel est l'aire couverte par la k-ième couronne ?

> La couronne C_k est constitué de $4k$ carrés, chacun de côté k donc d'aire k^2 : cela couvre au total une aire de $4k \times k^2 = 4k^3$.

Question 2 – Utiliser la question précédente et le dessin pour déduire une formule pour la somme des n premiers cubes.

> Mesurons le côté du grand carré (obtenu avec n couronnes) : les $4k$ carrés de la couronne extérieure C_n sont disposés de telle sorte que le côté extérieur de la couronne soit composés de $n+1$ carrés de côté n (longueur $(n+1)n$), et le côté intérieur de la couronne comporte $n-1$ carrés de côté n (longueur $n(n-1)$, tout comme le côté extérieur de la couronne C_{n-1}).
> *Remarque : on peut aussi calculer la côté du grand carré en traçant un segment entre le centre du carré et le milieu d'un côté du grand carré : ce segment traverse chaque couronne C_k exactement une fois, sur une largeur de k. Le segment a donc pour longueur $\sum_{k=1}^{n} k$. Le côté du grand carré est le double de la longueur de ce segment soit $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$.*
> L'aire du grand carré de côté $(n+1)n$ est donc de $(n(n+1))^2$. Celle-ci doit être égale à la somme des aires des n couronnes, soit $\sum_{k=1}^{n} 4k^3$ par la question précédente. Donc, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.

2 Récurrence

Exercice 17 :

Montrer par récurrence les résultats suivants :

Question 1 – La somme des entiers de 1 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$.

> On définit la propriété $P(n)$ pour $n \geq 1$ entier : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
> $P(1)$ est vraie car $\sum_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
> On suppose maintenant $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. La somme des entiers de 1 à $(n+1)$ vaut $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$. Or par hypothèse de récurrence $P(n)$, on a $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc $\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. On obtient donc que $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ donc $P(n+1)$ est vraie.
> En conclusion, $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$.

Question 2 – $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ pour $n \geq 1$.

On définit la propriété $P(n)$ pour $n \geq 1$ entier : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.
$P(1)$ est vraie car $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = (2 \times 1 - 1) = 1 = 1^2$.
On suppose maintenant que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$, montrons que $P(n+1)$ est vraie. Alors $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1)$. Or par hypothèse de récurrence $P(n)$, on sait que $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ et par ailleurs $(2(n+1)-1) = 2n+1$ donc $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (la dernière égalité provient d'une identité remarquable). On a donc prouvé que $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$ donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion, $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$, donc $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

Question 3 – La somme des n premiers cubes $1^3 + \ldots + n^3$ est $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour $n \geq 1$.

On définit la propriété $P(n)$ pour $n \geq 1$ entier : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
$P(1)$ est vraie car $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$.
On suppose maintenant que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$, montrons que $P(n+1)$ est vraie. Alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 + (n+1)^3$. En utilisant l'hypothèse de récurrence $P(n)$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ donc :

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{2^2} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{2^2}\right)$$

On reconnaît ensuite l'identité remarquable $(n^2+4n+4) = (n+2)^2$ et l'on obtient que $\sum_{k=1}^{k=n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$, donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion, $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$.

Question 4 – Pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ pour $n \geq 0$.

On définit la propriété $P(n)$ pour $n \geq 0$ entier : pour tous réels a, b $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

$P(0)$ est vraie car pour tous réels a, b, on $\sum\limits_{i=0}^{0} \binom{0}{i} a^i b^{0-i} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 = (a+b)^0$.

On suppose maintenant que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soient a et b des réels.
On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} =& (a+b) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \\
=& \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} && \text{par développement} \\
=& \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{(n+1)-j} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{(n+1)-i} && \text{par changement d'indice de somme } j = i+1 \\
=& \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{(n+1)-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{(n+1)-j} && \text{par renommage d'indice } j = i \\
=& \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) a^j b^{(n+1)-j} + a^{n+1} + b^{n+1} && \text{par regroupement de sommes } (j = 1 \text{ à } n) \\
=& \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j b^{(n+1)-j} && \text{par la relation de Pascal} \\
& + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{(n+1)-(n+1)} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{(n+1)-0} && \text{car } b^0, a^0, \binom{n+1}{0}, \binom{n+1}{n+1} \text{valent 1} \\
=& \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{(n+1)-j}
\end{aligned}$$

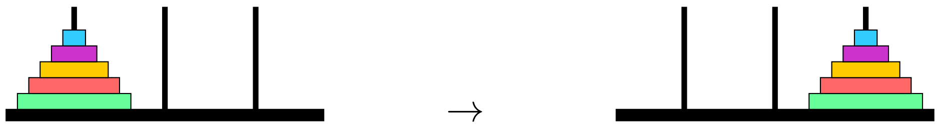
.

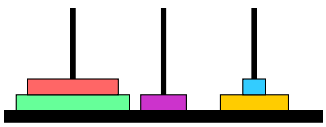
Exercice 18 : Montrer qu'avec des timbres de 3 et 5 euros, on peut faire des affranchissements pour toutes les sommes entières de plus de 8 euros. (Indice : il faut faire une récurrence à 3 crans).

Pour tout $n \geq 8$, on définit la propriété $P(n)$ suivante : "Il existe deux entiers naturels p at q tels que $n = 3p + 5q$.", ce qui signifie que l'on peut affranchir la somme de n euros avec p timbres de 3 euros et q timbres de 5 euros.
L'initialisation pour une récurrence à trois crans doit se faire sur les trois premiers entiers concernés soit $n = 8, 9$ et 10. $P(8)$ est vraie car $3 = 3 \times 1 + 5 \times 1$. $P(9)$ est vraie car $9 = 3 \times 3 + 5 \times 0$. Et $P(10)$ est vraie car $10 = 3 \times 0 + 5 \times 2$.
Hérédité (à trois crans) : Soit $n \geq 10$. Supposons que $P(n-2)$,$P(n-1)$, $P(n)$ sont vraies et montrons que que $P(n+1)$ est vraie Alors grâce à $P(n-2)$, on sait qu'il existe p et q entiers naturels tels $n-2 = 3p+5q$ et donc $n+1 = (n-2)+3 = 3(p+1)+5q$ donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion, on a montré que $P(8), P(9), P(10)$ sont vraies, et que si $P(n)$ est vraie pour 3 entiers n consécutifs, alors $P(n)$ est aussi vraie pour l'entier suivant : il s'agit d'une récurrence à 3 crans. Donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 8$.
Remarques :

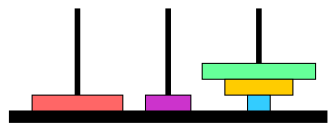
- Est-ce que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$? Non, $P(0), P(1), P(2), P(4)$ et $P(7)$ sont fausses.
- Pour tout $n \geq 8$, soit $H(n)$ la propriété suivante : il existe deux entiers naturels p et q avec $q \leq 2$ tels que $n = 3p+5q$, ce qui signifie que l'on peut affranchir la somme de n euros avec seulement des timbres de 3 euros et 0, 1 ou 2 timbres de 5 euros. Alors $H(n)$ se prouve avec exactement la même preuve par récurrence que celle de $P(n)$ ci-dessus.

<u>Exercice 19</u> : Dans le jeu des tours de Hanoi, il y a 3 pics et n disques. Les disques ont tous des tailles différentes. On numérote les disques du plus petit (1) au plus grand (n). Au départ tous les disques sont disposés du plus grand au plus petit sur un des pics. Il faut déplacer tous les disques pour les mettre sur un autre pic. Un "coup" consiste à déplacer un disque du dessus d'une pile vers le dessus d'une autre pile. De plus, il est interdit de poser un disque sur un disque plus petit





Autorisée



Interdite

Montrer par récurrence qu'il faut au moins $2^n - 1$ coups pour pouvoir déplacer toute la pile.

Pour $n \geq 0$, soit $P(n)$ la propriété suivante : pour déplacer la pile de n disques d'un piquet à un autre selon les règles des tours de Hanoi, au moins $2^n - 1$ mouvements sont nécessaires.
$P(0)$ est vraie car il faut au moins zéro ($= 2^0 - 1$) mouvements pour déplacer 0 disque.
Soit $n \geq 0$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On considère donc une pile de $n+1$ disques. On peut affirmer que le disque de plus grande largeur $(n+1)$ est déplacé au moins une fois (car il n'est pas sur le même piquet à la fin qu'au début), cela donne au moins un mouvement du piquet de départ que nous appellerons a à un autre piquet que nous appellerons b. De plus, pour que ce mouvement soit réalisable, il faut que :

— le piquet a ne contienne que le disque de taille $n+1$;

— le piquet b ne contienne aucun disque de taille $< n+1$.

Cela implique que tous les disques de taille 1 à n sont actuellement sur l'unique piquet différent de a et b, appelons-le c. Par conséquent, nous avons déjà déplacé la tour de n disques du piquet a au piquet c, ce qui par hypothèse de récurrence $P(n)$ nécessite au moins $2^n - 1$ mouvements.
Immédiatement après le déplacement du disque de taille $n+1$ du piquet a au piquet b, on dispose d'une pile de n disques sur le piquet c et l'unique disque de taille $n+1$ sur le piquet c. Regrouper les $n+1$ disques au même endroit nécessite donc a minima de déplacer la pile de n disques vers le piquet d'arrivée, ce qui nécessite là encore au moins $2^n - 1$ mouvements grâce à $P(n)$. Au total, il faut donc au moins $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ mouvements pour déplacer la pile de $n+1$ disques du piquet de départ a à son piquet d'arrivée.
Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
Remarque : on peut en fait aussi prouver qu'il existe une solution à $2^n - 1$ mouvements, ce qui combiné avec la preuve précédente montre que $2^n - 1$ est précisément le nombre optimal de déplacements pour résoudre les tours de Hanoi.
Pour tout $n \geq 0$, soit $H(n)$ la propriété suivante : il existe une série de $2^n - 1$ mouvements pour déplacer n disques d'un piquet à un autre selon la règle des tours de Hanoi (à condition que le troisième piquet soit vide).
$H(0)$ est vrai car il suffit de $0 = 2^0 - 1$ mouvements pour déplacer 0 disques.
Soit $n \geq 0$, supposons que $H(n)$ est vraie et montrons que $H(n+1)$ est vraie. On suppose donc que l'on dispose de $n+1$ disques sur un piquet de départ. On appelle a le piquet de départ et b le piquet d'arrivée souhaitée. On appelle c le dernier piquet (celui qui n'est ni a ni b et qui est supposé vide). Par l'hypothèse de récurrence $H(n)$, on peut déplacer les n disques de taille 1 à n du piquet a au piquet c en $2^n - 1$ mouvements (en utilisant le piquet b qui est vide). Maintenant, on peut déplacer le disque de taille $n+1$ (seul sur le piquet a) vers le piquet b (qui est actuellement vide). Ensuite, on déplace de nouveau les n disques de taille 1 à n, cette fois-ci du piquet c au piquet b (en utilisant le piquet a qui est vide) ; cela est possible avec $2^n - 1$ mouvements supplémentaires grâce à $H(n)$. On obtient alors l'empilement souhaité des $n+1$ disques sur le piquet b. Cela nous a coûté au total $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ mouvements. Donc $H(n+1)$ est vraie.
En conclusion, $H(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Arbres d'informaticien : parcours et backtracking

Rappels et précisions de vocabulaire :

— *Enfants, fils* d'un noeud : noeuds directement reliés en dessous du noeud.

— *Descendants* d'un noeud : tous les noeuds reliés en dessous par un chemin (les enfants, les enfants des enfants,...)

— *Parent, père* d'un noeud : noeud directement relié au dessus (il est unique !)

— *Ancêtres* d'un noeud : tous les noeuds reliés au dessus (le parent, le parent du parent,...)

— *Feuille* : noeud sans enfant

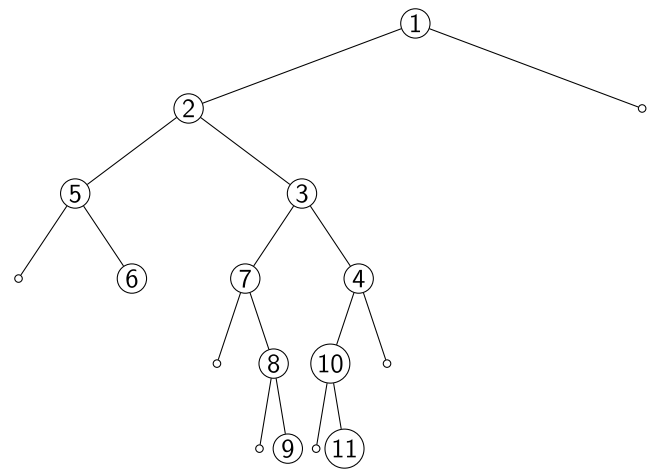
— *Racine* : noeud sans parent

— *Noeud interne* : noeud avec au moins un enfant

— *Profondeur d'un noeud* : distance avec la racine (nombre de traits) (la profondeur de la racine est 0 !)
— *Profondeur (hauteur) de l'arbre* : maximum des profondeurs sur tous les noeuds
— *Largeur* : nombre maximum de noeuds sur une même profondeur.
— *Arbre trivial* : ne contient qu'un noeud
— *Arbre k-aire* : tous les noeuds ont au plus k enfants. Attention, l'ordre des enfants a une importance ! Pour $k = 2$, on parle d'arbre *binaire.*
— *Arbre k-aire complet* : tous les niveaux sont remplis (sauf peut-être le dernier).

Exercice 20 : Dans le cours, on a vu qu'un arbre peut toujours être encodé par un arbre binaire, en suivant la transformation suivante : chaque noeud de l'arbre de départ a comme fils gauche son premier fils, et comme fils droit son premier frère.

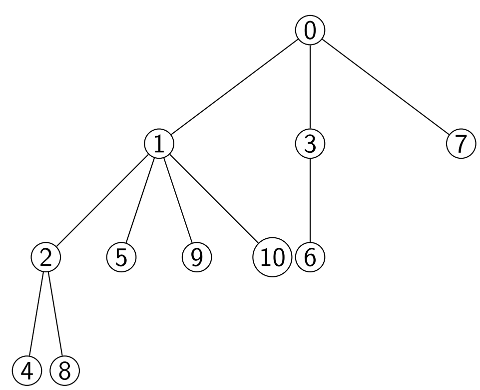
Question 1 – Transformer l'arbre de gauche en arbre binaire T_B.

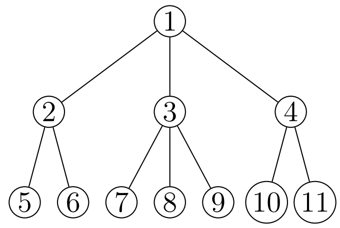


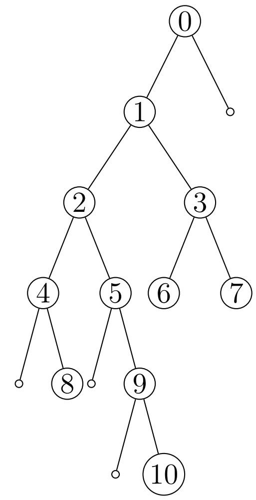
Question 2 – Comment retrouver la profondeur d'un nœud dans l'arbre gauche en utilisant T_B ?

Profondeur d'un nœud dans l'arbre gauche est égale au nombre d'enfants gauches quand on passe de la racine jusqu'au sommet en T_B.

Question 3 – Retrouver l'arbre correspondant à l'arbre binaire de droite.







Exercice 21 : Pour l'arbre de la Figure 1, donnez l'ordre des sommets pour les parcours en profondeur préfixe, suffixe et infixe. Donnez aussi l'ordre des sommets pour le parcours en largeur.

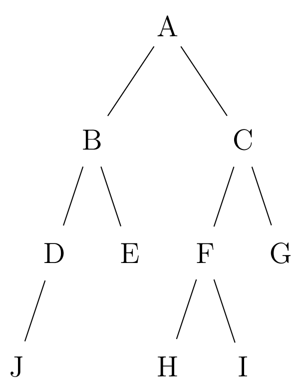


FIGURE 1 – Parcours d'un arbre

> Prefixe : $A, B, D, J, E, C, F, H, I, G$
> Suffixe : $J, D, E, B, H, I, F, G, C, A$
> Infixe : $J, D, B, E, A, H, F, I, C, G$
> Largeur : $A, B, C, D, E, F, G, J, H, I$

Exercice 22 : Pour un arbre à n nœuds, déterminer (en termes de n) :

1. la plus grande profondeur possible,
2. la plus grande largeur possible,
3. la plus petite profondeur possible,
4. la plus petite largeur possible.

Exercice 23 : Pour un arbre binaire à $n = 2^k - 1$ nœuds, déterminer (en termes de n) :

1. la plus grande profondeur possible,
2. la plus grande largeur possible,

3. la plus petite profondeur possible,
4. la plus petite largeur possible.

Exercice 24 : Quelle est la largeur d'un arbre k-aire complet avec aussi le dernier niveau rempli en fonction de la profondeur de l'arbre ?

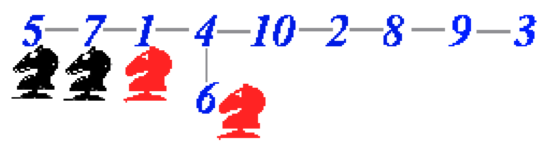
3 Graphes

Modélisation

Exercice 25 : **Échange de cavaliers** (Jean-Paul Davalan)
Pour résoudre ce casse-tête vous devez échanger les positions des deux cavaliers blancs avec celles des deux noirs, en respectant évidemment les règles du déplacement du cavalier sur un échiquier et en n'utilisant que les dix cases dessinées (le cavalier ne peut pas se poser sur une case non dessinée et un cavalier à la fois peut se poser sur une case). On n'impose pas d'alterner entre un déplacement de cavalier noir et un déplacement de cavalier blanc.

Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe.

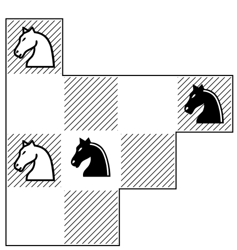
Sommet = case, arête = déplacement possible entre les deux cases en un coup.
On obtient le graphe ci-dessous.



Question 2 – Utiliser cette modélisation pour résoudre ce casse-tête.

On s'en sort de façon assez évidente (la case 6 nous sert de "voie de garage" pour réaliser les échanges), mais il faut quand même 40 coups pour y arriver !
Seuls les pros d'échecs auront trouvé cette solution sans dessiner le graphe...
Les déplacements d'une solution en 40 coups sont :

Cavalier Rouge 1 - 4 - 10 - 2 - 8
Cavalier Noir 7 - 1 - 4 - 10 - 2
Cavalier Noir 5 - 7 - 1 - 4 - 10
Cavalier Rouge 6 - 4 - 1 - 7 - 5
Cavalier Noir 10 - 4 - 1 - 7
Cavalier Noir 2 - 10 - 4 - 1
Cavalier Rouge 8 - 2 - 10 - 4 - 6
Cavalier Noir 1 - 4 - 10 - 2
Cavalier Noir 7 - 1 - 4 - 10
Cavalier Rouge 6 - 4 - 1 - 7
Cavalier Noir 10 - 4 - 1
Cavalier Noir 2 - 10 - 4 - 6



Question 3 – Y-a-t-il des cases inutiles ?

Cette solution n'utilise pas les deux cases 3 et 9 de l'échiquier.

Exercice 26 : Dans un tournoi d'échecs, chaque participant doit rencontrer tous les autres.

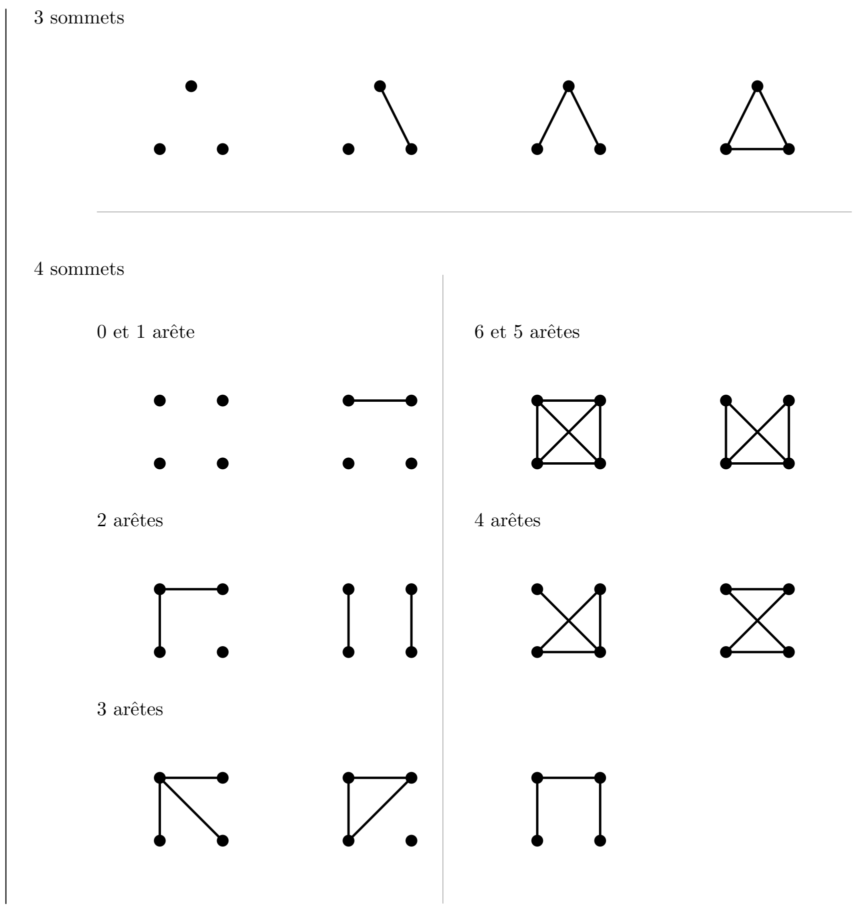
Chaque partie dure une heure. Déterminer la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre de participants est 3, 4, 5 ou 6.

<u>Exercice 27</u> : Trois touristes voyagent avec trois cannibales. Si les touristes sont en infériorité numérique par rapport aux cannibales, alors ces derniers mangent les touristes... Les touristes et les cannibales veulent traverser une rivière. Pour cela, ils disposent d'une barque, qui ne permet de transporter que deux personnes à la fois d'une rive à l'autre.

Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe. Tout le monde peut-il traverser sans qu'aucun touriste ne soit mangé ?

Notions de base

<u>Exercice 28</u> : Dessiner tous les graphes à 3 et 4 sommets, à isomorphisme près.



<u>Exercice 29</u> : Une ligue de football contient 15 clubs. Pour des raisons de temps, on décide que chaque club ne jouera que la moitié des matchs possibles. Comment organiser le tournoi ? (on pourra commencer par étudier le cas de 7 clubs).

Il n'est en fait pas possible d'organiser un tel tournoi pour $n = 7$ ou $n = 15$ clubs. En effet, supposons par l'absurde qu'un tel tournoi existe. On construit alors le graphe G suivant : les sommets sont les n clubs de foot, et deux clubs sont reliés par une arête si et seulement si elles s'affrontent dans le tournoi. Un tournoi classique complet donnerait alors la clique K_n de taille n, où chaque sommet a degré $n - 1$.

Dans notre tournoi, chaque club ne joue que la moitié des matchs possibles soit $(n-1)/2$ matchs. Cela signifie que, dans G, chaque sommet est de degré $(n-1)/2$. Or, quand $n = 7$ ou $n = 15$, on obtient $(n-1)/2 = 3$ ou $(n-1)/2 = 7$: dans les deux cas, tous les sommets sont de degré impair. Cependant on a un nombre impair de sommets au total, et il n'existe pas de graphe contenant un nombre impair de sommets de degré impair : contradiction.

Degrés

Exercice 30 : **Séquence de degrés**

On dit qu'une séquence de nombres entiers est *réalisable* s'il existe un graphe dont les sommets ont exactement les degrés de la séquence.

Question 1 – Pour chaque séquence qui suit, dites si la séquence est réalisable ou non. Si la réponse est oui, dessinez un tel graphe et dire s'il est unique (à isomorphisme près), sinon justifiez pourquoi il n'y a pas de tel graphe.

(a) $(1; 2; 2; 4; 5; 5)$
(b) $(2; 2; 2; 2; 2; 2)$
(c) $(1; 1; 1; 1; 1; 1)$
(d) $(3; 3; 3; 3; 3; 5)$
(e) $(2; 2; 2; 3; 3; 3)$
(f) $(0; 2; 2; 3; 4; 5)$
(g) $(5; 5; 5; 5; 2; 2)$

On utilise les propriétés suivantes, qui sont nécessaires et que l'on récapitulera à la seconde question :

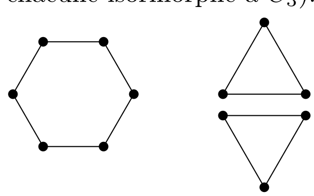
— Tout graphe doit avoir un nombre pair de sommets de degré impairs (car la somme des degrés doit être paire).

— Un graphe à n sommets ne peut pas contenir un sommet isolé (degré 0) et un somme universel (degré $n-1$, voisin de tous les autres sommets du graphe).

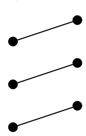
— Plus généralement, le degré minimum dans un graphe est supérieur ou égal au nombre de sommets universels qu'il contient (car tout sommet est adjacent au moins à tous les sommets universels).

(a) Non cette séquence n'est pas réalisable, car il y a 3 sommets de degré impair.

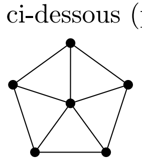
(b) Oui cette séquence est réalisable. Par une étude de cas, on obtient deux graphes non-isomorphes : le cycle de longueur 6 C_2, et l'union disjointe de deux triangles (deux composantes connexe, chacune isormorphe à C_3).



(c) Oui cette séquence est réalisable, par un unique graphe :



(d) Oui cette séquence est réalisable. Il y a un sommet universel et, une fois qu'on l'a placé, il reste à obtenir un graphe 2-régulier sur 5 sommets, qui est réalisé seulement par le cycle de longueur 5 C_5. On obtient donc qu'il existe un unique graphe réalisant la séquence de degrés, dessiné ci-dessous (parfois appelé la roue de longueur 5) :



(e) Non cette séquence n'est pas réalisable, car il y a 3 sommets de degré impair.

(f) Non cette séquence n'est pas réalisable, car le sommet de degré 5 (universel) doit être à la fois adjacent et non-adjacent au sommet de degré 0 (isolé)

(g) Non cette séquence n'est pas réalisable, car il y a 4 sommets de degré 5 (universels), qui doivent tous être adjacents avec le(s) sommet(s) de degré 2, qui serait alors de degré au moins 4, contradiction.

Question 2 – Donnez des conditions nécessaires pour qu'une séquence soit réalisable. Sont-elles suffisantes ?

> On récapitule les conditions nécessaires utilisées (ou découvertes) à la question précédentes :
>
> — La somme des degrés doit être paire (donc il faut un nombre pair de sommets degré impair)
>
> — tous les degrés doivent être compris entre 0 et $n-1$, pour un graphe à n sommets
>
> — le degré minimum da la séquence doit être supérieur ou égal au nombre de sommets universels (de degré $n-1$)
>
> Ces conditions ne sont pas suffisantes, par exemple la séquence $(1; 1; 2; 3; 4; 5)$ sur 6 sommets les respectent toutes mais n'est pas réalisable (une fois que l'on enlève le sommet universel, la question revient à savoir si la séquence $(0; 0; 1; 2; 3)$ est réalisable sur 5 sommets, or le sommet de degré 3 est incompatible avec les 2 sommets de degré 0)

Exercice 31 : **Théorème d'Havel-Hakimi** (N. Trotignon)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ les degrés des sommets de G. On numérote les sommets de G $v_1, \ldots, v_n$ de telle sorte que $d_G(v_i) = d_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Question 1 – Montrer qu'il existe un graphe H sur le même ensemble de sommets $V = \{v_1, ..., v_n\}$, tel que $N_H(v_n) = \{v_{n-d_n}, ..., v_{n-1}\}$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $d_H(v_i) = d_i$.

> On sait par hypothèse qu'il existe au moins un graphe qui respecte la séquence de degré (il s'agit de G). Parmi tous les graphes qui respectent la séquence de degrés ($d(v_i) = d_i$), on considère donc un graphe H qui maximise $N_H(v_n) \cap \{v_{n-d_n}, ..., v_{n-1}\}$. Si $|N_H(v_n) \cap \{v_{n-d_n}, ..., v_{n-1}\}| = d_n$, alors H satisfait la condition souhaitée. Sinon, il existe un non-voisin v_i de v_n, avec $n - d_n \leq i \leq n-1$. Or $|N_H(v_n)| = d_n$ donc il existe un voisin v_j de v_n, avec $1 \leq j \leq n - d_n - 1$. Comme $d_H(v_i) \geq d_H(v_j)$, il existe $k \notin \{i, j\}$ tel que v_k est voisin de v_i mais pas de v_j. Maintenant, on considère le graphe obtenu en effaçant les arétes v_iv_k, v_jv_n en en ajoutant les arétes v_kv_j et v_iv_n. Les sommets de ce graphe ont pour degré $d_1, ..., d_n$ et ce graphe contredit la maximalité de $N_H(v_n) \cap \{v_{n-d_n}, ..., v_{n-1}\}$.

Question 2 – On dit qu'une suite d'entiers $(d_1, ..., d_n)$ telle que $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ est une *séquence de degrés* s'il existe un graphe sur n sommets de degrés $d_1, ..., d_n$. Montrer qu'une suite S est une séquence de degrés si et seulement si ou bien $S = (0)$ ou bien la suite S' définie ci-dessous est une séquence de degré : $S' = (d'_1, ..., d'_{n-1})$ avec $d'_i = d_i$ si $1 \leq i \leq n - d_n - 1$ et $d'_i = d_i - 1$ si $n - d_n \leq i \leq n-1$.

> Il est clair que si $n = 1$, S est une séquence de degré si et seulement si $S = (0)$ (il y a un unique graphe à 1 sommet et sa séquence de degré est (0)).
> Intéressons-nous maintenant au cas $n \geq 2$.
> $\Rightarrow$ Si la séquence $(d_1, \ldots, d_n)$ est réalisable et $n \geq 2$, on considère G le graphe qui réalise la séquence de degré et on applique le résultat de la question 1 pour obtenir un graphe H avec la même séquence de degré et tel que $N_H(v_n) = \{v_{n-d_n}, ..., v_{n-1}\}$. Le graphe $H \setminus \{v_n\}$ a pour séquence de degré $S' = (d'_1, ..., d'_{n-1})$ avec $d'_i = d_i$ si $1 \leq i \leq n - d_n - 1$ et $d'_i = d_i - 1$ si $n - d_n \leq i \leq n-1$.
> $\Leftarrow$ Soit S une séquence d'entiers $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ tel que $S = (0)$ ou bien la suite S' définie ci-dessous est une séquence de degré : $S' = (d'_1, ..., d'_{n-1})$ avec $d'_i = d_i$ si $1 \leq i \leq n - d_n - 1$ et $d'_i = d_i - 1$ si $n - d_n \leq i \leq n-1$. Soit H' le graphe à $n-1$ sommets qui réalise la séquence de degré S'. On rajoute un sommets v_n dont le voisinage est exactement $\{v_{n-d_n}, ..., v_{n-1}\}$. Alors le graphe G ainsi obtenu réalise la séquence S (les sommets v_i tels que $i < n - d_n$ ont toujours degré $d'_i = d_i$ et les sommets v_i tels que $i \geq n - d_n$ ont gagné un voisin, donc degré $d'_i + 1 = d_i$).

Exercice 32 : **Jeux de mains**

Le tout-Grenoble se retrouve lors du vernissage d'une exposition dans une galerie d'art contemporain locale. Certaines des personnes présentes au vernissage se connaissent, d'autres pas. La plus élémentaire des politesses veut que les personnes qui se connaissent se serrent la main.

Deux personnes ne se connaissant pas ne se serrent pas la main.

Question 1 – Démontrer qu'il existe au moins deux personnes qui ont serré le même nombre de mains.

> On peut modéliser cette situation par un graphe simple non orienté à n sommets, où n est le nombre de personnes (un sommet = une personne, ses voisins = ceux à qui la personne a serré la main). Le degré d'un sommet v est le nombre de personnes à qui v a serré la main. Il y a n personnes, et n degrés possibles $(0, 1, \ldots, n-1)$. Il est impossible que les n sommets aient tous des degrés différents, car en ce cas pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ il y a un unique sommet de degré i. Or il ne peut y avoir à la fois un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n-1$.

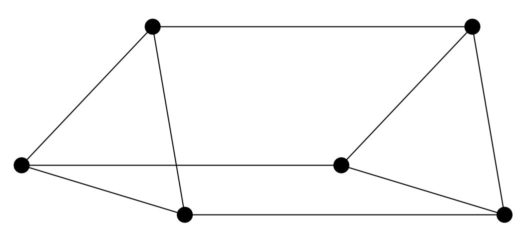
Exercice 33 : **Le professeur McBrain**

Le professeur McBrain et son épouse Muriel donnent une surprise-partie à laquelle ils invitent 4 autres couples mariés. À l'arrivée, certaines paires de personnes se sont serrées la main (bien sûr, aucun couple marié ne se serre la main). À la fin de la soirée, le professeur demande à chacune des 9 personnes, à combien de personnes elles ont serré la main au début de la soirée et il obtient 9 réponses différentes.

Question 1 – À combien de personnes Muriel a-t-elle serré la main ?

> On modélise la situation par un graphe contenant un sommet pour chacune des 10 personnes présentes à la soirée, et on relie deux sommets par une arête si les personnes correspondantes se sont serrées la main. La réponse d'une personne à la question du professeur McBrain correspond au degré de ce sommet. Comme aucun couple marié ne se serre la main, on sait que le degré de chaque sommet doit être en 0 et 8 (le maximum est : toutes les personnes à part soi-même et son conjoint). Appelons les sommets $v_0, \ldots, v_8, v_p$ de telle sorte que v_p est le professeur MacBrain, et v_i est la personne ayant serré i mains pour $i \in \{0, \ldots, 8\}$.
> Murielle a-t-elle pu serrer 8 mains ? Non, car en ce cas elle a serré la main de tout le monde sauf son mari le professeur McBrain, mais elle a donc serré la main avec la personne v_0 qui a serré 0 main, ce n'est pas possible. On se rend donc compte que la personne v_8 doit être en couple avec la personne v_0, car v_8 a serré la main de tout le monde sauf son conjoint, donc toutes les personnes autres que son conjoint ont degré au moins 1 : v_0 est la seule personne possible pour être le conjoint de v_8.
> Intéressons-nous maintenant à v_7, la personne qui a serré 7 mains : on sait qu'il a serré la main à v_8 et pas à v_0. Donc il a serré la main à tout le monde sauf son conjoint et v_0. Donc toutes les personnes qui ne sont ni le conjoint de v_8, ni le conjoint de v_7, ont serré la main à v_7 et v_8 : ils ont degré au moins 2. Donc v_1, qui a un degré < 2, est soit le conjoint de v_8 (pas possible car on sait déjà que c'est v_0), soit le conjoint de v_7 : v_1 et v_7 sont en couple.
> De la même façon, on en déduit v_2 est en couple avec v_6 puis que v_3 est en couple avec v_5. On en déduit que Murielle, qui est en couple avec $v_p \notin \{v_0, \ldots, v_8\}$, est nécessairement v_4 : elle a serré 4 mains.
> *Remarque :* on peut en déduire également que le professeur v_p a serré la main de v_8, v_7, v_6 et v_5, il a donc lui aussi serré 4 mains.

Exercice 34 : Dessinez un graphe 3-régulier qui ne soit pas le graphe complet K_4.

> Voici l'exemple d'un graphe 3-régulier (= tous les sommets ont degré 3) avec 6 sommets. *(Ce graphe est parfois appelé le prisme)*
>
> 

Exercice 35 : **Conseil municipal**

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :

- Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
- Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Question 1 – Combien y'a t-il de membres dans le conseil municipal ?

> On construite le graphe G tel que :
>
> - les sommets sont les 7 commissions.
> - les arêtes représentent les conseillers municipaux : comme chaque conseiller s'occupe exactement de deux commissions, l'arête de ce conseiller relie ces deux commissions.
>
> On nous dit que chaque paire de commission ont exactement un conseiller en commun, ce qui signifie que pour chaque paire de sommets (commissions), il existe exactement une arête entre les deux : le graphe G est le graphe complet à 7 sommets K_7.
> On sait que $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$ donc ici $|E(K_7)| = \frac{7\times 6}{2} = 21$ arêtes : il y a donc 21 conseillers.

Exercice 36 : Sept étudiants partent en vacances. Ils décident que chacun enverra une carte à trois autres. Est-il possible que chaque étudiant recoivent des cartes postales précisément de la part des trois personnes auxquelles il en a envoyé ?

Représentations des graphes

Exercice 37 :

Question 1 – Représenter le graphe correspondant à la matrice d'adjacence suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2 – Est-ce que les matrices suivantes sont les matrices d'incidence d'un graphe simple non orienté. Si c'est le cas, représenter ce graphe. Sinon, donner la raison.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

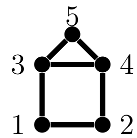
Exercice 38 : (A. Parreau)

Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adjacence, d'incidence, les deux, ou aucune des deux. Dans tous les cas, justifiez pourquoi, et dans le cas positif, dessinez le(s) graphe(s) correspondant(s).

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 39 : (A. Parreau)

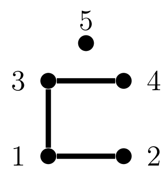
Complétez le tableau suivant :

Définition ensembliste	Représentation graphique	Matrice adjacence	Matrice d'incidence	Liste d'adjacence
				
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $E = \{12, 45, 34, 14, 35\}$				
		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$		
			$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
				— 1 : $[2, 3, 5]$ — 2 : $[1, 4]$ — 3 : $[1, 5]$ — 4 : $[2, 5]$ — 5 : $[1, 3, 4]$

Exercice 40 : (A. Parreau)

Chaque colonne du tableau suivant représente un graphe différent, avec une représentation différente. Dans chaque cas, on demande de répondre aux questions suivantes (sans passer par une autre représentation).

1. Quelle représentation du graphe a-t-on ?
2. Quels sont les voisins du sommet 1 ?
3. Quel est le nombre de voisins du sommet 4 ?
4. Est-ce que 5 est un sommet isolé ?
5. Combien y-a-t-il d'arêtes dans le graphe ?
6. Est-ce que les sommets 3 et 4 sont adjacents ?

		$V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{12, 34, 15\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	— 1 : [2, 3, 4] — 2 : [1, 3, 4] — 3 : [1, 2, 4] — 4 : [1, 2, 3] — 5 : []
1					
2					
3					
4					
5					
6					

4 Chaînes et cycles

Exercice 41 : Montrer qu'un graphe simple de degré minimum au moins k contient une chaîne élémentaire de longueur k.

> Soit $\Gamma = (v_1, ..., v_\ell)$ une chaîne élémentaire de longueur maximale. S'il existe u un voisin de v_ℓ qui n'apparaît pas dans Γ, alors on peut rajouter u à la fin de la chaîne Γ et obtenir une chaîne élémentaire strictement plus longue, ce qui contredit la maximalité de Γ. Donc tous les voisins de v_ℓ sont dans Γ. Or v_ℓ possède au moins k voisins (car son degré est au moins k). Donc la longueur de Γ est supérieure ou égale à k.

Exercice 42 : Prouver par récurrence sur k la propriété suivante $P(k)$, définie pour tout entier $k \geq 1$: si G est un graphe de degré minimum au moins k, alors pour tout $v \in V(G)$ il existe une chaîne élémentaire de longueur k commençant en v.

> **Initialisation pour $k = 1$:** Soit G un graphe de degré minimum 1 et soit $v \in V(G)$. Comme v possède au moins un voisin u, alors vu est une chaîne élémentaire de longueur 1 commençant en u.
>
> **Hérédité : prouvons $P(k+1)$ en utilisant $P(k)$.** Soit G un graphe de degré minimum $k+1$ et soit $v \in V(G)$. On doit trouver une chaîne élémentaire de longueur $k+1$ commençant en v. Comme v a au moins $k+1 \geq 1$ voisins, alors en particulier il a au moins un voisin u. Soit $G' = G \setminus \{v\}$. Pour chaque sommet $x \in V(G')$, $d_{G'}(x) \geq d_G(x) - 1$ car x perd 0 ou 1 voisin lorsqu'on retire v. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence $P(k)$ sur G', qui a degré minimum au moins k. On en déduit que pour tout sommet de G', il existe une chaîne élémentaire de longueur k commençant en ce sommet, en particulier il existe une chaîne P de longueur k dans G' commençant en u. En rajoutant l'arête vu au début de P, on obtient une chaîne de élémentaire longueur $k+1$ commençant en v dans G.
>
> **En conclusion,** par récurrence sur k, $P(k)$ est vraie pour tout $k \geq 1$.

Exercice 43 : Soit G un graphe simple dont exactement deux sommets x et y sont de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans G de x à y.

Preuve 1 : Par l'absurde, supposons qu'il n'y a pas de xy-chaîne. Alors x et y sont dans des composantes connexes distinctes C_x, C_y. D'après l'énoncé, x est alors le seul sommet de degré impaire dans le graphe induit par la composante C_x, or la somme des degrés de C_x doit être paire ; contradiction.

Preuve 2 : Soit C une chaîne simple commençant par x de longueur maximale dans G. Montrons que C se termine en y.

1. Si C termine en x, alors C est un cycle et donc x a degré pair dans la chaîne. Or x a degré impair dans G, donc il existe une arête e incidente à x qui n'est pas empruntée par C. On ajoute e à la chaîne pour obtenir une chaîne simple commençant par x, plus longue que C, ce qui est une contradiction avec la maximalité de C.
2. Si C se termine en un sommet $z \notin \{x, y\}$, alors z a degré impair dans la chaîne. Or z a degré pair dans G donc il existe une arête e incidente à z qui n'est pas empruntée par la chaîne C. Comme dans le cas précédent, on ajoute e à C pour obtenir une chaîne simple plus longue, contradiction.

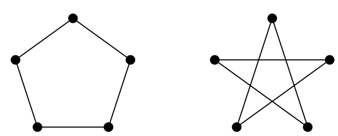
Exercice 44 : Soit G un graphe non orienté.

Question 1 – Montrer qu'au moins un des deux graphes, G ou son complémentaire, est connexe.

Preuve 1. Supposons G non connexe et montrons que son complémentaire l'est en montrant que pour tout $v_1, v_2 \in V$ il existe un chemin dans $\bar{G}$ allant de v_1 à v_2.
Si v_1 et v_2 ne sont pas dans la même composante connexe, alors en particulier $(v1, v2) \notin E$, donc $(v1, v2) \in \bar{E}$: ainsi v_1 et v_2 sont même voisins dans le graphe complémentaire.
Si v_1 et v_2 appartiennent à la même composante connexe. Comme G n'est pas connexe, il existe un sommet v_3 de G qui n'est pas dans la même composante connexe que v_1 et v_2. On en déduit alors, en appliquant deux fois le raisonnement précédent, que (v_1, v_3) et (v_3, v_2) sont des arêtes de G qui forment un chemin de v_1 à v_2.

Question 2 – Donner un exemple de graphe G connexe tel que son complémentaire $\overline{G}$ est aussi connexe. Vous dessinerez les deux graphes sur votre copie.

On peut prendre par exemple $G = C_5$ car on a $\overline{G} = C_5$, ils sont bien tous les deux connexes.



Exercice 45 : Soit G un graphe simple à n sommets et m arêtes. Montrer que si $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, alors G est connexe.

Preuve 1. Supposons par l'absurde que G n'est pas connexe. Soit C une composante connexe de G, appelons k son nombre de sommets ($1 \leq k \leq n-1$). On sait qu'un graphe avec k sommets comporte au maximum $k(k-1)/2$ arêtes. Donc, au maximum, G contient $f(k) = k(k-1)/2 + (n-k)(n-k-1)/2$ arêtes (on applique la même formule à $G \setminus C$ qui contient $n-k$ sommets).
On constate que :$f(k) = k^2 - nk + (n^2 - n)/2 = (k - n/2)^2 + [(n^2 - n) - (n/2)^2]$ (ou bien on dérive f selon k et on établit son tableau de variation sur $k \in [1; n-1]$).
Donc, $f(k)$ atteint son minimum pour $k = n/2$ et son maximum pour $k = 1$ ou $k = n-1$. On en déduit que G contient au maximum $f(1) = f(n-1) = (n-1)(n-2)/2$ arêtes. Or $m > f(1)$ par hypothèse, on obtient donc une contradiction. Donc G est connexe.

Remarque : Il n'existe pas de meilleure borne, car un graphe à n sommets, avec une composante connexe de taille 1, l'autre de taille $n-1$ et toutes les arêtes possibles comporte $(n-1)(n-2)/2$ arêtes (un sommet isolé plus une clique).

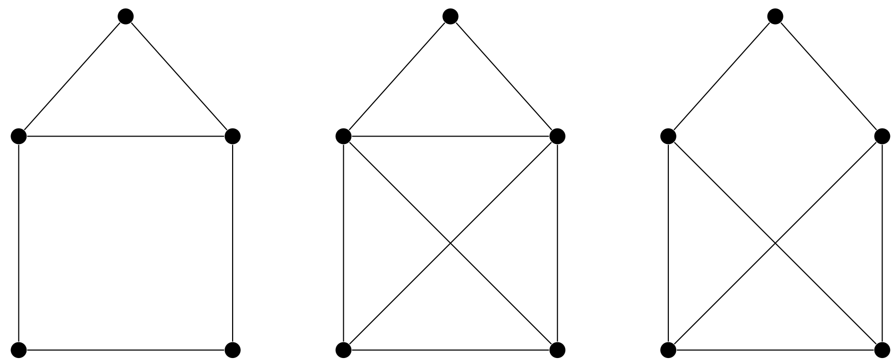
Preuve 2 si l'on a déjà montré que pour tout G, le graphe G ou son complémentaire $\overline{G}$ est connexe. Supposons par l'absurde qu'il existe un graphe G tel que $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ et G n'est pas connexe. Alors par la propriété ci-dessus, $\overline{G}$ est connexe, donc selon le théorème du cours, $|E(\overline{G})| \geq n-1$. Or l'union de $E(G)$ et de $E(\overline{G})$ forme l'ensemble des arêtes du graphe complet K_n soit $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments. Donc $m = \frac{n(n-1)}{2} - |E(\overline{G})| \leq \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, contradiction.

Exercice 46 : Soit G un graphe simple à n sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Montrer que G est connexe.

On suppose par l'absurde que G n'est pas connexe. Soit G_1, G_2 deux composantes connexes. D'après l'enoncé, G_1, G_2 ont degré minimum $n/2$. Donc $|V_1| \geq n/2 + 1$ (en effet, soit $u \in V_1$, comme G est simple $|N(u)| = d(u) \geq n/2$), de même pour V_2. Or $|V| \geq |V_1| + |V_2| \geq 2(n/2 + 1) = n + 2$, contradiction.

Graphes eulériens

Exercice 47 : **Sans lever le crayon**



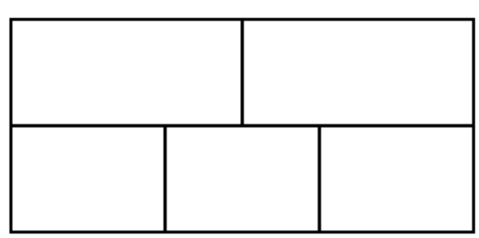
(a) (b) (c)

FIGURE 2 – À dessiner sans lever le crayon

Question 1 – Quels dessins dans la Figure 2 peuvent être dessinés sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ? Vous expliciterez le problème de graphe qu'il est nécessaire de résoudre pour répondre à cette question.

> Pour chacune des 3 figures, on définit un graphe en prenant comme sommets les points noirs, et comme arête les segments qui relient deux points noirs. Pouvoir dessiner la figure en une fois sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait correspond exactement à dessiner la figure en suivant un chemin eulérien dans le graphe. Or un chemin eulérien existe si et seulement si le graphe est connexe et son nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
> Les trois dessins sont connexes. Les dessins (a) et (c) ont exactement deux sommets de degré impair, donc il existe une chaîne eulérienne. Le dessin (b) contient quatre sommets de degré impair, donc il n'admet pas de chaîne eulérienne.
>
> Donc on peut dessiner les deux premiers mais pas le troisième.

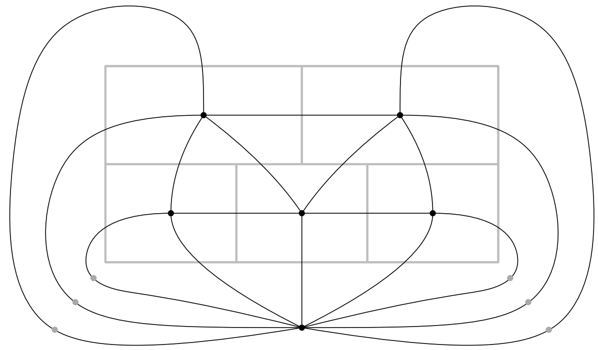
Exercice 48 : On se pose la question suivante : est-il possible de tracer une courbe fermée, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes, en s'autorisant d'utiliser un multigraphe. Vous décrirez clairement le (multi)graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

Question 2 – Répondre à la problématique en résolvant le problème de graphes choisi à la question précédente.

On peut associer un graphe à cette figure (en réalité un multigraphe car nous aurons des arêtes multiples) de la façon suivante : les sommets représentent les régions (y compris la région extérieure) et deux sommets sont reliés par autant d'arêtes que le nombre de segments communs de leurs régions. Le problème revient alors à effectuer un cycle eulérien dans ce graphe. Or, ce graphe contient 4 sommets de degré impair... c'est donc impossible.



Exercice 49 :

Question 1 – Soit G un graphe connexe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant des arêtes ? Est-ce que la réponse est la même suivant que l'on autorise ou non ce nouveau graphe G' à être un multigraphe ?

Un graphe connexe est eulérien si et seulement si il ne contient aucun sommet de degré impair. D'après la formule $\sum_v d(v) = 2|E|$, la somme des degrés est paire et donc il y a un nombre pair de sommets de degré impair. Ainsi on peut prendre les sommets de degré impair deux par deux, et ajouter une arête entre les deux à chaque fois, ce qui est toujours possible si on s'autorise à créer des multi-arêtes.

Attention, si on se restreint à rester sur un graphe simple : K_4 est un exemple de graphe avec 4 sommets de degré impair (3), et dans lequel on ne peut rajouter aucune arête : on ne peut donc pas rendre ce graphe eulérien.

Question 2 – Combien d'arêtes au minimum doit-on rajouter à G pour le rendre Eulérien ?

Il faut au moins une arête pour chaque paire de sommets de degré impair, donc s'il y a k sommets de degré impair, il faut ajouter au minimum $k/2$ arêtes.

Question 3 – Soit G un graphe connexe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un ou plusieurs sommets $v_1, \ldots, v_t$? (on a le droit d'ajouter des arêtes incidentes à un nouveau sommet, vers un autre nouveau sommet ou vers un ancien sommet ; par contre on ne s'autorise pas à ajouter une arête entre deux sommets qui existaient déjà dans G)

Rappelons qu'il faut obtenir un graphe connexe et que le nombre de sommets impairs soit pair pour obtenir un graphe eulérien (ces conditions sont nécessaires et suffisantes).

Si un graphe contient k sommets impairs, alors k est pair et il est possible de rajouter un nouveau sommet x, relié à ces k sommets. Dans le graphe obtenu, les k sommets considérés sont devenus de degré pairs. De plus, le degré de x étant k, il est également pair.

Exercice 50 : **Les dominos**

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

Question 1 – En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?

Les dominos sont au nombre de 4 + 3 + 2 + 1 = (4 x 5) / 2 = 10 :

1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5

Question 2 – Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

> Considérons maintenant le graphe complet K_5 à 5 sommets. Ce graphe possède 10 arêtes, chaque arête correspondant à une paire de sommets distincts, c'est-à-dire à un domino. Former une boucle fermée avec ces dominos revient donc à trouver un cycle eulérien (passant par toutes les arêtes, donc utilisant tous les dominos) dans K_5. Une solution possible est la suivante :
> 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1, 1-3, 3-5, 5-2, 2-4, 4-1.
>
> Chaque nombre apparait sur 4 dominos donc chaque sommet est de degré 4 ; par le théorème d'Euler K_5 est Eulérien.

Question 3 – Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

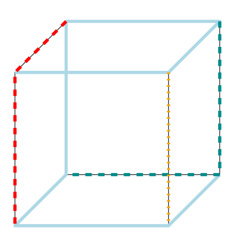
> Les dominos doubles peuvent être insérés sans difficulté dans cette suite. En terme de graphes, les dominos doubles correspondent à une boucle sur un sommet et cette boucle peut être "parcourue" lorsqu'on atteint le sommet en question pour la première fois par exemple. . .

Question 4 – Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

> Si l'on considère le même problème avec des faces numérotées de 1 à n, on doit raisonner sur le graphe complet à n sommets. Or, nous savons qu'un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et ne possède que des sommets de degré pair. Dans le cas des graphes complets, cela n'est vrai que si le nombre de sommets est impair

Exercice 51 : **Carcasse de cube**

On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

> On travaille sur le graphe issu du cube, dont les sommets sont les 8 sommets du sube et les arêtes sont les 12 arêtes du cube. Remarquons qu'il faut 12 x 10cm = 120cm pour faire la carcasse en passant une fois par chaque arête, donc on ne peux pas passer deux fois par une arête, sinon on n'a pas assez de fil.
> Le problème revient à déterminer une chaîne Eulérienne dans le cube ce qui est impossible car les 8 sommets sont tous de degré impair (3). Il est donc impossible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil.
> Nous allons utiliser plusieurs morceaux de fil pour réduire au fur et à mesure le nombre de sommets de degré impair restants. Un morceau de fil correspond à une chaîne élémentaire dans le graphe : dans une telle chaîne, les extrémités sont de degré 1 (impair) si elles sont distinctes et les autres sont de degré 2 (pair). Donc un morceau de fil permet de changer la parité d'au plus 2 sommets, donc on peut au maximum réduire de deux le nombre de sommets de degré impair : il en faut au moins 4 dans notre cube à 8 sommets de degré impair.
> De plus nous avons une solution avec 4 morceaux de fil.
>
> 
>
> Il faut donc couper le fil 3 fois pour obtenir nos 4 morceaux.

Exercice 52 : **Jeu de cartes** (Matej Stehlik)

Dans un jeu de $52 = 13 \times 4$ cartes, chaque carte a une valeur $(A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R)$ et une couleur $(\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit)$. On cherche à savoir quelle est la longueur maximale d'une suite de cartes qu'on peut construire à partir d'un jeu de 52 cartes de façon à ce que deux cartes consécutives soient de la même valeur ou de la même couleur, mais si on prend trois cartes consécutives quelconques, elles n'ont pas toutes trois la même valeur ni la même couleur. Par exemple, $A\spadesuit, 7\spadesuit, 7\heartsuit, D\heartsuit$ est une suite qui respecte cette règle.

Question 1 – Peut-on faire une telle suite avec toutes les cartes (longueur 52) ? Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

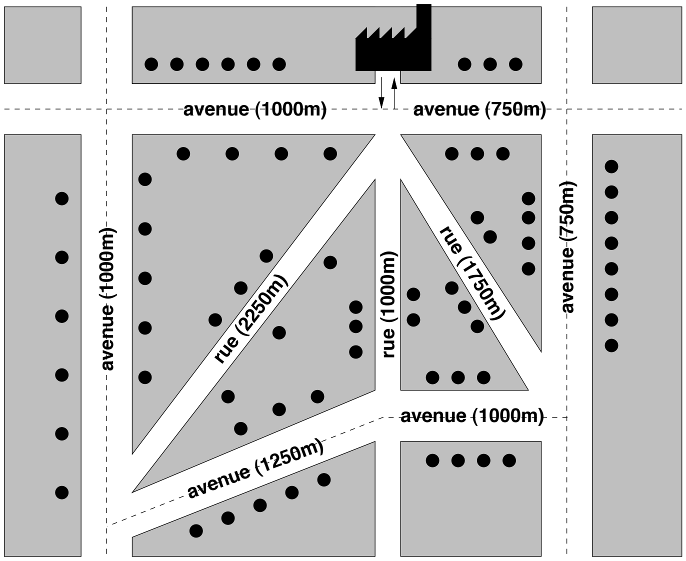
> On représente le jeu de 52 cartes par un graphe G dont les sommets sont $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$ et dont les arêtes sont les cartes. Une chaîne simple dans ce graphe correspond à une suite de cartes valides, car : deux cartes consécutives ont même valeur ou même couleur partagent de même qui deux arêtes consécutives partage un même sommets ; trois cartes consécutives n'ont pas la même valeur ni la même couleur car le graphe est biparti.
> Savoir s'il existe une suite contenant chaque carte revient à savoir s'il existe une chaîne eulérienne dans le graphe (utiliser chaque arête exactement une fois).
> Le graphe contient 4 sommets de degré impair, donc il n'existe pas de chaîne eulérienne (donc pas de chaîne de longueur 52).

Question 2 – On cherche maintenant la longueur de la plus grande suite de cartes. Reformuler comme un problème de graphes et trouver la solution.

> Trouver la plus grande suite de cartes revient à trouver la plus longue chaîne simple dans le graphe. Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ce problème, donc il faut faire preuve d'imagination. On peut reformuler le problème de la plus longue chaîne simple en : il existe une chaine simple de longueur $52 - k$ (pour k entier naturel) ssi l'on peut supprimer k arêtes dans G et obtenir une chaîne eulérienne dans le graphe modifié.
> Or le graphe G contient 4 sommets de degré impair (les sommets $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$, qui ne sont pas reliés entre eux). Il existe une solution pour $k = 1$ si et seulement si la suppression d'une unique arête transforme deux sommets de degré impair en degré pair (pour passer de 4 à 2 sommets de degré impair). Or cela n'est pas possible car aucune de nos arêtes ne relie deux sommets de degré impair. Donc il n'existe pas de chaîne de longueur 51.
> Par contre pour $k = 2$, on trouve une solution : si l'on supprime deux arêtes incidentes à A, par exemple, cela va nous donner un graphe avec exactement deux sommets de degré impair, donc il existe une chaîne eulérienne dans ce graphe modifié avec 50 arêtes. C'est-à-dire, il existe une suite de longueur 50, et c'est la plus longue suite.

Exercice 53 : **Ramassage des poubelles**

Voici le plan simplifié d'un quartier de Propreville. Une benne venant de l'usine d'incinération doit vider les 70 conteneurs indiqués sur le croquis et revenir à l'usine.



La circulation sur les avenues et sur les rues est dans les deux sens. La vitesse du camion-benne à vide (ou entre deux ramassages) est de 30km/h et il est le même dans les deux sens. Il faut compter 30 secondes pour vider un conteneur. Chaque avenue a deux voies et il faut réaliser le ramassage indépendamment de chaque coté, ce qui nécessite deux passages de la benne (un dans chaque sens). Le ramassage sur les trois rues se fait des deux cotés en même temps.

Question 1 – Trouver le trajet optimal qui minimise le temps total du parcours nécessaire pour ramasser toutes les ordures.

Exercice 54 : **Le digicode**

Un digicode possède 10 touches numérotées de 0 à 9. Le code fait 4 chiffres. On cherche à deviner le code en tapant le minimum de touches. On tire parti du fait que le digicode ouvre la porte dès que les 4 chiffres sont tapés. Quelle est la longueur minimale d'une suite de chiffres de 0 à 9 telle que tout code possible de 4 chiffres apparait comme sous-suite de 4 éléments consécutifs ?

> On considère un multigraphe graphe orienté $\overline{G}$ dont les sommets sont toutes les suites de chiffres de longueurs 3. On trace un arc de xyz vers $x'y'z'$ si $y = x'$ et $z = y'$, étiqueté par z' (autrement dit, on a les arcs $xyz \xrightarrow{t} yzt$). Chaque sommet du graphe a degré entrant égal à 10 et degré sortant égal à 10. Noter que le graphe possède 10 boucles sur les sommets correspondant aux 10 suites constantes (si on les enlève, ces sommets-là ont degré entrant et sortant égal à 9). Le graphe non-orienté sous-jacent est connexe, et chaque sommet a degré entrant égal au degré sortant, donc il existe un circuit orienté eulerien de $\overline{G}$. Les arcs de $\overline{G}$ sont en bijection avec les mots de longueur 4 : L'arc $xyz \xrightarrow{t} yzt$ correspond au mot $xyzt$.
> Le circuit eulérien permet d'obtenir une suite de longueur 10003 chiffres. On ne peut pas faire mieux car il y a 10000 mots de longueur 4 sur 10 chiffres.

Exercice 55 : On dispose de 15 perles numérotées de 1 à 15. On veut construire un collier qui respecte la curieuse règle suivante :

La somme des numéros de deux perles adjacentes sur le collier doit toujours être un carré parfait.

On considére que le collier est ouvert, c'est-à-dire que les deux perles situées aux deux extrémités du collier ne sont pas adjacentes. La somme de leurs numéros ne doit donc pas nécessairement être un carré parfait.

On rappelle que les carrés parfaits sont les nombres 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25...

Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les perles.

Question 2 – En déduire que l'on peut construire un collier qui respecte cette règle.

Exercice 56 :

L'*hypercube* de dimension $n \geq 1$ est un graphe ayant pour sommets l'ensemble de tous les mots binaires de longueur n. Par exemple, 00, 01, 10, 11 sont les 4 sommets de l'hypercube de dimension 2. Deux sommets sont liés par une arête si et seulement si les mots correspondants diffèrent en exactement une coordonnée (c'est-à-dire en un bit). Par exemple, il y a une arête entre 00 et 10, mais pas entre 00 et 11. L'hypercube de dimension n est un graphe généralement noté Q_n.

Question 1 – Démontrer que Q_2, Q_3, et Q_4 sont hamiltoniens.

Une construction récursive de Q_n en fonction de Q_{n-1} consiste à considérer deux copies de Q_{n-1} que l'on connecte entre elles par un ensemble d'arêtes particulier, que l'on appelle un couplage.

Question 2 – Expliciter cette construction pour Q_3 et Q_4. Donner la construction générale pour n quelconque.

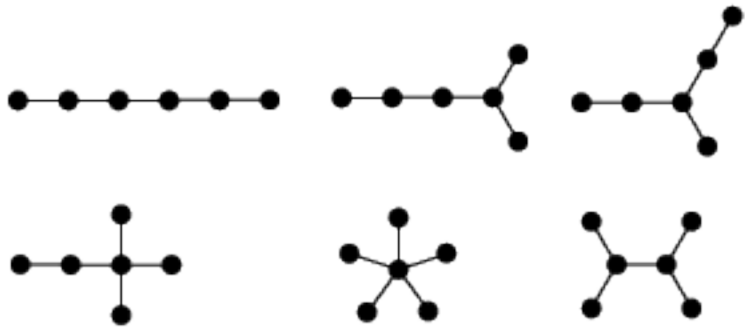
Cette vision des choses permet d'appliquer un principe de récurrence pour démontrer des propriétés intéressantes de l'hypercube.

Question 3 – Démontrer que Q_n est hamiltonien pour tout $n \geq 2$. On pourra faire une preuve par récurrence en utilisant la question précédente, qui donne à la fois le cas de base de la récurrence et le principe de décomposition permettant d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

5 Arbres

Exercice 57 : **Arbres à 6 sommets**

Trouver tous les arbres à 6 sommets, à isomorphisme près.



Pour justifier que nos 6 graphes sont deux-à-deux non-isomorphes, on peut commencer par regarder leur séquence de degré (dans l'ordre décroissant), car deux graphes ayant des séquences de degrés différentes ne peuvent pas être isomorphes :

1. $(2, 2, 2, 2, 1, 1)$
2. $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$
3. $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$
4. $(4, 2, 1, 1, 1, 1)$
5. $(5, 1, 1, 1, 1, 1)$
6. $(3, 3, 1, 1, 1, 1)$

Le deuxième et le troisième ont la même séquence de degré, mais il ne sont pas isomorphes : s'ils étaient isomorphes, alors l'unique sommet de degré 3 serait envoyé sur l'unique sommet de degré 3 ; donc en l'enlevant, on devrait tomber sur des graphes isomorphes ; or dans le premier cas, retirer le sommet de degré 3 donne 3 composantes connexes dont une de taille 3, alors que dans le deuxième cas cela donne 3 composantes connexes de tailles respectives 2, 2, 1. Donc ces deux arbres ne sont pas isomorphes.

Pour argumenter qu'on n'a pas oublié de graphe, on peut faire le raisonnement suivant : soit $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$ la séquence de degrés d'un arbre à 6 sommets dans l'ordre décroissant. Alors $\sum_{i=1}^{6} d_i = 2|E| = 2 \times 5 = 10$. De plus tout arbre possède au moins deux sommets de degré 1 donc $d_5 = 1$ et $d_6 = 1$, donc $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 8$. Comme chaque d_i vaut au moins 1, alors $d_1 \leq 5$.

1. Si $d_1 = 5$: alors $d_2 = d_3 = d_4 = 1$ pour satisfaire une somme de 8, et l'étoile à 5 branches est l'unique façon de réaliser la séquence $(5, 1, 1, 1, 1, 1)$.
2. Si $d_1 = 4$: alors $d_2 = 2$ et $d_3 = d_4 = 1$ pour satisfaire une somme de 8. Une fois qu'on a placé un sommet de degré 4, la seule façon d'obtenir un sommet de degré 2 est de rajouter une feuille attachée à un voisin du somme de degré 4.
3. Si $d_1 = 3$: alors deux cas possibles pour faire une somme de 8 :
   (a) soit $d_2 = 3$ et $d_3 = d_4 = 1$: comme l'abre est connexe, il doit y avoir une chaîne entre les deux sommets de degré 3, et cette chaîne ne peut contenir aucun sommet de degré 1 ; donc les deux sommets de degré 3 sont adjacents ; ensuite il y a une unique façon de rajouter les 4 feuilles pour satisfaire le degré 3 de chacun des deux sommets initialement placés.
   (b) soir $d_2 = 2$ et $d_3 = 2$: comme l'abre est connexe, il doit y avoir une chaîne entre les deux sommets de degré 2, et cette chaîne ne peut contenir aucun sommet de degré 1 ; donc ou bien les deux sommets de degré 2 sont adjacents, ou bien ils sont voisins communs du sommet de degré 3. Dans le premier cas, par le même argument de connexité, et en ajoutant l'acyclicité, on voit que le sommet de degré 3 doit être adjacent à exactement l'un des deux sommets de degré 2. Une fois que les sommets de degré 2 et 3 sont placés, il existe une unique façon d'accrocher les feuilles pour obtenir la bonne séquence de degré.
4. Si $d_1 = 2$, alors $d_2 = d_3 = d_4 = 2$ et l'unique façon de placer les sommets est le chemin P_6.

Exercice 58 : **Cycles dans un graphe et son complémentaire**

Soit G un graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 5.

Question 1 – Montrer que G ou $\overline{G}$ contient un cycle.

Soit n le nombre de sommets de G. Supposons que G et $\overline{G}$ ne contiennent pas de cycle, alors $|E(G)|+|E(\overline{G})| \leq 2(n-1)$. Puisque le graphe induit par la réunion des arêtes de G et de $\overline{G}$ est un graphe complet à n sommets, on a $|E(G)|+|E(\overline{G})| = n(n-1)/2$. On obtient donc $n(n-1)/2 \leq 2(n-1)$, c'est-à-dire $n \leq 4$, ce qui contredit notre hypothèse sur n.

Autre correction possible :

Soit n le nombre de sommets de G. On suppose que G ne contient pas de cycle. Comme G est acyclique, il contient au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 1. Notons x un tel sommet. Comme $d_G(x) \leq 1$, et que $d_G(x) + d_{\overline{G}}(x) = n-1$ on a $d_{\overline{G}}(x) \geq n-2$.

Nommons $y_1, y_2 \cdots y_{n-2}$ n-2 voisins de x dans $\overline{G}$. (éventuellement x a un voisin de plus dans $\overline{G}$ s'il est de degré 0 dans G).
S'il n'existe pas dans $\overline{G}$ d'arête entre un sommet y_i et un sommet y_j, alors les sommets $\{y_1, y_2 \cdots y_{n-2}\}$ forment un stable dans $\overline{G}$ et donc une clique dans G. Or on sait que $n \geq 5$, donc on a $n-2 \geq 3$. Or une clique de taille supérieure ou égale à 3 contient au moins un cycle, ce qui est contradictoire avec le fait que G est acyclique.
On peut donc en conclure qu'il existe au moins 2 indices i et j tels que l'arête (y_i, y_j) existe dans $\overline{G}$. Alors (x, y_i, y_j, x) forme un cycle dans $\overline{G}$. Donc $\overline{G}$ contient un cycle.

Remarque : en fait, à ce stade du cours, les étudiants ne connaissent pas forcément les termes "stable" et "clique". Mais on peut simplement dire que s'il n'y a pas d'arêtes entre chaque paire de sommets de $\{y_1, y_2 \cdots y_{n-2}\}$ dans $\overline{G}$ alors K_{n-2} est un sous-graphe de G.

Exercice 59 :

Soit T un arbre comportant au moins 3 sommets de degré 1.

Question 1 – Montrer que T contient au moins un sommet de degré au moins 3.

Preuve 1 : On peut utiliser la formule $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$. Dans un arbre, $|E| = n-1$, donc $\sum_{v \in V} d(v) = 2n-2$. S'il y au moins trois sommets de degré 1 et que tout sommet est de degré ≤ 2, alors on a $\sum_{v \in V} d(v) \leq 3 + 2(n-3) = 2n-3$: contradiction. Il existe donc au moins un sommet de degré ≥ 3.

Preuve 2 : On peut faire le raisonnement suivant : soit x, y, z trois sommets de degré 1. Comme un arbre est connexe, alors il existe un chemin d'extrémités x et y. Il existe également un chemin d'extrémités x et z. Comme x est de degré 1, alors ces deux chemins se rencontrent en un sommet t qui est donc de degré ≥ 3.

Preuve 3 : Par contraposée, supposons que le degré maximal soit au plus 2. Si un arbre a degré maximal 2 alors c'est un chemin. Un chemin à deux sommets de degré 1.

Preuve 4 : Par récurrence sur le nombre de sommets n.

— Initialisation : il n'y a pas d'arbres ayant 3 feuilles pour $n = 1, 2, 3$. Pour $n = 4$, il y a un unique arbre à trois feuilles, c'est l'étoile à 3 branches dont le sommet central est de degré 3.

— Hérédité : Soit T un arbre d'ordre $n+1$ avec trois sommets x, y, z de degré 1.
  On appelle v l'unique voisin de x.

  — Cas 1 : le voisin v est de degré 2 dans $T - x$ et donc de degré 3 dans T : on a notre sommet de degré 3.

  — Cas 2 : Le voisin v est de degré 1 dans $T - x$, donc $T - x$ est un arbre (enlever une feuille x ne déconnecte pas l'arbre) à n sommets avec trois sommets de degré 1 : v, y, z. Par hypothèse de récurrence, $T - v$ admet un sommet w de degré au moins 3, et w a aussi degré au moins 3 dans T.

Exercice 60 :

Soit F une forêt ayant c composantes connexes et n sommets, avec $c \geq 1$ et $n \geq 1$.

Question 1 – Donner le nombre d'arêtes de F en fonction de c et n.

Soient $T_1, \ldots, T_c$ les composantes connexes de F. On a vu en cours que T_i est un arbre pour tout i. Soit n_i le nombre de sommets de T_i : comme T_i est un arbre alors le nombre d'arêtes de T_i est $n_i - 1$. D'autre part le nombre d'arêtes de F est la somme des nombres d'arêtes des T_i, $i = 1, \ldots, c$. Donc

$$\text{nb. d'arêtes de } F \;=\; \sum_{i=1}^{c}(n_i - 1) \;=\; (\sum_{i=1}^{c} n_i) - c.$$

Comme d'autre part on a $\sum_{i=1}^{c} n_i = n$, alors le nombre d'arêtes de F est égal à $n - c$.

Remarquons que ceci nous donne une troisième caractérisation des arbres : ce sont les graphes acycliques ayant un nombre maximum d'arêtes (à nombre de sommets fixés).

Une autre solution : utiliser la formule d'Euler. Une forêt a 0 faces car c'est un graphe acyclique, on a donc $s - a + f = c \;\Rightarrow\; a = s + f - c = s - c = n - c$.

Exercice 61 : La séquence de degrés d'un arbre est 5, 4, 3, 2, 1, ..., 1. Determinez le nombre de "1" dans la séquence.

Soit k le nombre de 1 dans la séquence, alors l'arbre possède $n = 4 + k$ sommets au total. Or c'est un arbre donc $|E| = n - 1 = 3 + k$. De plus $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, mais aussi $\sum_{v \in V} d(v) = 5+4+3+2+k \times 1 = 14 + k$. Donc $14 + k = 2(3 + k)$ donc $14 + k = 2k + 6$ donc $k = 8$.

Exercice 62 : Question 1 – Montrer que si T est un arbre à n sommets de degré maximum $\Delta(T) \leq 1$, alors T possède au moins $\Delta(T) + 1$ feuilles.

Pour $\Delta(T) = 0$, alors T n'a aucune arête donc un seul sommet (qui est une feuille).

Pour $\Delta(T) = 1$: T contient au moins deux sommets, donc pas de sommets isolés, donc tous les sommets ont degré 1. On en déduit que $\sum_{v \in V(T)} d(v) = n$ d'une part, et d'autre part $|E(T)| = n - 1$ car T est un arbre. Donc $n = 2(n - 1)$ par la formule de la somme des degrés, donc $n = 2$. Il y a un seul arbre à 2 sommets (et exactement une arête), et il a bien deux feuilles.

Question 2 – Prouver par récurrence sur n la propriété $P(n)$ suivante, définie pour tout entier $n \geq 2$: si T est un arbre à n sommets de degré maximum $\Delta(T)$, alors T possède au moins $\Delta(T)$ feuilles.

Initialisation pour $n = 1$ **:** Soit T un arbre à un seul sommet, alors T a un sommet unique qui est une feuille et $\Delta(T) = 0$.

Hérédité : prouvons $P(n+1)$ **en utilisant** $P(n)$**.** Soit T un arbre à $n+1$ sommets avec $n \geq 1$ (on peut supposer $\Delta(T) \geq 2$ car la propriété est prouvé à la question précédente pour $\Delta(T) \leq 1$). On sait que T possède au moins une feuille f : on utilise pour cela un théorème du cours indiquant qu'un graphe acyclique possédant au moins une arête a toujours au moins une feuille, qu'on ne reprouvera pas ici.
Soit $T' = T \setminus \{f\}$, alors T' est un arbre. (cf cours, mais on peut le reprouver : la suppression du sommet f ne peut pas créer de cycle, donc T' est acyclique, de plus $|V(T')| = |V(T)| - 1 = n$ car on a supprimé le sommet f, et $|E(T')| = |E(T)| - 1$ car on a supprimé l'unique arête incidente à f). Donc $|E(T')| = |E(T)| - 1 = |V(T)| - 1 - 1 = |V(T')| - 1$. Donc T est acyclique avec $|V(T)| - 1$ arêtes, c'est donc un arbre par la propriété "deux sans trois").
On applique l'hypothèse de récurrence sur T' qui est bien un arbre à n sommets. Alors T' possède au moins $\Delta(T')$ feuilles, on pose $k = \Delta(T')$.
Regardons maintenant le degré maximum de T'. Soit p l'unique voisin de f dans T, alors seul p change de degré entre T' et T. Autrement dit, on a $d_{T'}(p) = d_T(p) - 1$, et $d_{T'}(v) = d_T(v)$ pour tout $v \neq p, f$, en particulier : parmi les k feuilles de T', on a au moins $k-1$ sommets qui ne changent pas de degré entre T' et T, donc ils sont toujours des feuilles de T. Attention en revanche, si p fait partie des k feuilles de T', il n'est plus une feuille dans T. De plus on obtient aussi $\Delta(T) = k$ ou $\Delta(T) = k+1$. On distingue les deux cas :

1. Si $\Delta(T) = k$, alors on prend les $k-1$ feuilles de T' différentes de p, et en rajoutant f, on obtient donc au moins k feuilles dans T.
2. Si $\Delta(T) = k+1$ et $k \geq 2$, alors p est le seul sommet de degré $k+1$ dans T.
   - Si $k \geq 2$, alors p est de degré $k \geq 2$ dans T' donc n'est pas une feuille dans T', donc les k feuilles de T' sont des feuilles de T, et on ajoute f comme $k+1$-ième feuille.
   - Si $k = 1$, alors T' contient en fait deux feuilles, dont une différente de p. Cette feuille et f forment les deux feuilles de T.

En conclusion, par récurrence sur k, $P(k)$ est vraie pour tout $k \geq 1$.

Question 3 – Est-ce que la réciproque de la propriété $P(n)$ est vraie ? Justifier.

Arbre couvrants de poids minimum

Exercice 63 : **Le château d'eau :**

Une communauté de communes veut desservir un ensemble de villages en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans l'un des villages (voir Figure 3). Selon des paramètres législatifs, géologiques, etc., le coût d'installation des canalisations pour transporter l'eau est estimé pour certaines paires de villages. Certains villages ne peuvent pas être reliés directement à cause du relief. On suppose que les capacités des canalisations sont illimitées. Il faut déterminer un réseau qui puisse acheminer de l'eau dans chaque village, et ce au moindre coût.

Question 1 – Proposez une solution pour ce problème.

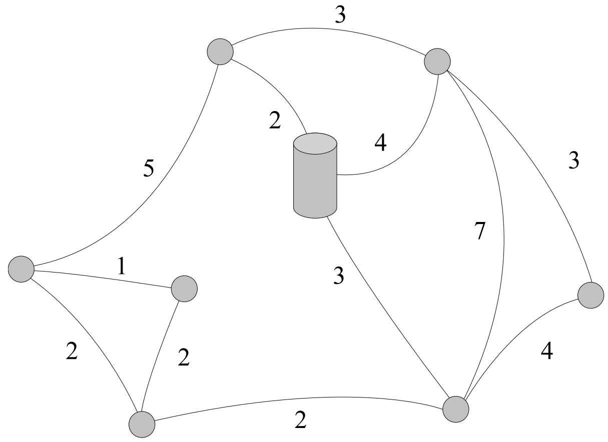
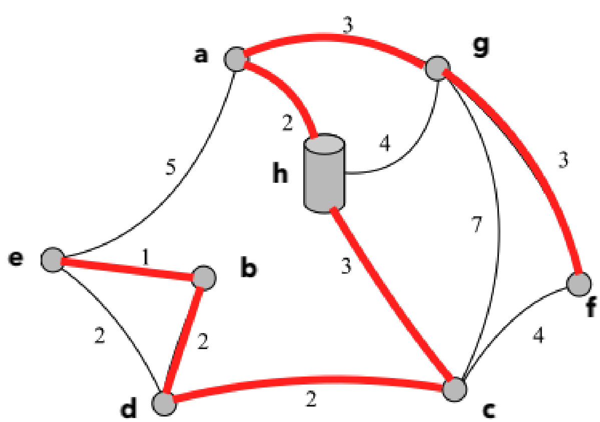


Figure 3 – Le château d'eau est représenté par le cyclindre, les disques étant les villages à desservir. Les chiffres représentent les coûts de liaison entre deux villages.

On construit un graphe dont les sommets sont les villages et le château d'eau, et on relie deux sommets par une arête s'il est possible d'installer une canalisation entre les deux, et l'arête sera pondérée par le coût de cette canalisation.
Le réseau doit être connexe, pour minimiser le coût on veut donc un ensemble d'arête formant un graphe couvrant connexe minimal, c'est-à-dire un arbre couvrant minimum. On va appliquer l'algorithme de Kruskal pour résoudre ce problème. On utilise la numérotation arbitraire des sommets indiqués sur le dessin ci-dessus ; en cas d'égalité de poids des arêtes, on départage arbitrairement ; on s'arrête dès que l'on a sélectionné 7 arêtes (car on a 8 sommets).

F	Poids	Arête e	Cycle détecté ?
$\emptyset$	1	eb	Non
$\{eb\}$	2	bd	Non
$\{eb, bd\}$	2	ed	Oui :$ebde$
$\{eb, bd\}$	2	cd	Non
$\{eb, bd, cd\}$	2	ah	Non
$\{eb, bd, cd, ah\}$	3	gf	Non
$\{eb, bd, cd, ah, gf\}$	3	ch	Non
$\{eb, bd, cd, ah, gf, ch\}$	3	ag	Non
$\{eb, bd, cd, ah, gf, ch, ag\}$	–	–	–

On obtient un cout optimal de 16, avec la solution ci-dessous (elle n'est pas unique) :



Exercice 64 : **Monsieur le 9** (GI)

Un opérateur téléphonique veut installer un nouveau réseau de communication haut débit connectant les principales villes de France : Brignoud, Gières, Lans en Vercors, Monestier de Clermont, Tullins et Uriage. Il souhaite savoir quelles connexions permettent de relier les villes à moindre coût.

Les coûts de connexion entre 2 villes dépendent de la distance, du relief, des lignes déjà existantes. Ils sont donnés dans la Table 1 :

TABLE 1 – Coûts de connexion

	G	B	L	U	T	M
G	-	5	8	2	2	11
B		-	7	4	8	12
L			-	6	7	13
U				-	3	12
T					-	10
M						-

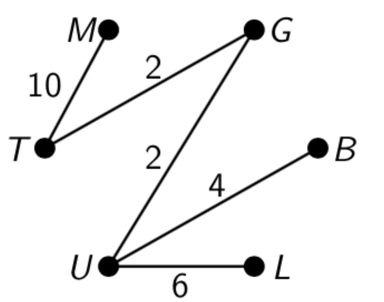
Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

Question 2 – Répondre à la problématique en résolvant le problème de graphes choisi à la question précédente.

Soit $G = (V, E)$ le graphe où $V = \{$Brignoud, Gières, Lans en Vercors, Meylan, Tullins et Uriage$\}$ (un sommet par ville) et $E = \{XY : X, Y \in V\}$, autrement dit G est un graphe complet à 6 sommets. Pour chaque paire de ville, il y a donc une arête entre les deux, que l'on pondère par le coût d'une connexion directe entre les deux.
On veut un sous-graphe couvrant connexe de poids minimum, donc un arbre couvrant de poids minimum. On applique l'algorithme de Kruskal, en s'arrêtant dès que l'on a 5 arêtes (car on a 6 sommets).

F	Poids	Arête e	Cycle détecté ?
$\emptyset$	2	GU	Non
$\{GU\}$	2	GT	Non
$\{GU, GT\}$	3	UT	Oui : $GUTG$
$\{GU, GT\}$	4	BU	Non
$\{GU, GT, BU\}$	5	GB	Oui : $GBUG$
$\{GU, GT, BU\}$	6	LU	Non
$\{GU, GT, BU, LU\}$	7	BL	Oui : $BULB$
$\{GU, GT, BU, LU\}$	7	LT	Oui : $LTGUL$
$\{GU, GT, BU, LU\}$	8	GL	Oui : $GLUG$
$\{GU, GT, BU, LU\}$	8	BT	Oui : $BTGUB$
$\{GU, GT, BU, LU\}$	10	TM	Non
$\{GU, GT, BU, LU, TM\}$	–	–	–

On obtient la solution suivante de poids 14.



Exercice 65 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe de la Figure 4, l'arbre couvrant de poids minimum a un poids de 17. Réarranger les poids des arêtes afin que les arbres couvrants de poids minimum aient un poids de 19.

Le fait de réarranger les poids signifie ici qu'il faut échanger les poids d'une arête à l'autre : à la fin, vous devez toujours avoir les poids $1, 2, \ldots, 9$ *qui apparaissent chacun exactement une fois.*

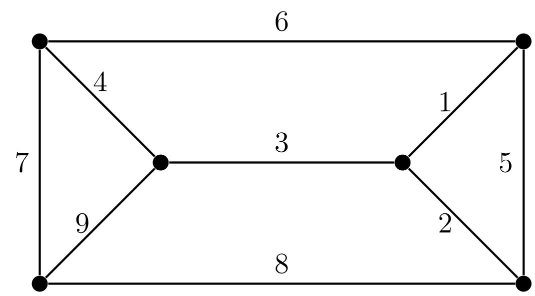


Figure 4 – Graphe G

Exercice 66 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe du cube en dimension 3, on sait que quatre arêtes ont un poids de 1, quatre arêtes ont un poids de 2 et quatre arêtes ont un poids de 3. Quelle est une répartition possible des arêtes telle que le poids de l'arbre couvrant de poids minimum est 10 ? Même question si ce poids est 11.

Exercice 67 : **Camion** (J.-F. Hèche)

Le réseau de la Figure 5 représente une partie du réseau routier d'une ville. Les nœuds correspondent aux carrefours, les arêtes aux routes que l'on suppose toutes à double sens et les nombres sur les arêtes indiquent la hauteur maximale (en centimètres) qu'un véhicule peut avoir s'il désire emprunter la route correspondante.

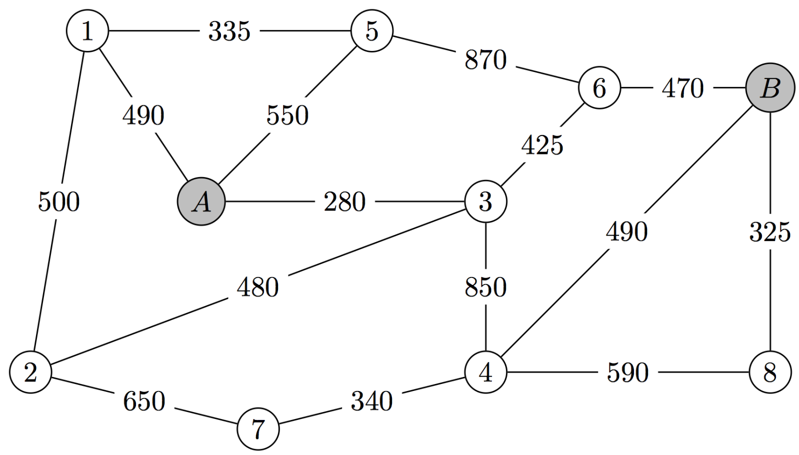
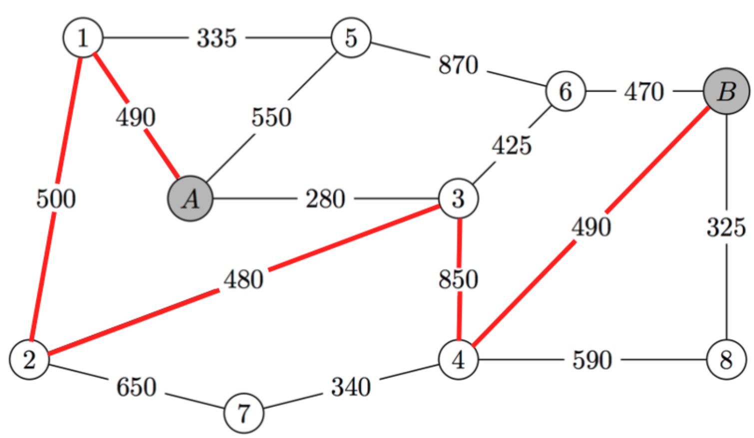


FIGURE 5 – Réseau routier avec les hauteurs maximales (en centimètres)

Un livreur désire se rendre du point A au point B. Pour ceci, il veut déterminer la hauteur maximale x, en mètres, du camion qu'il peut utiliser.

Question 1 – Trouver manuellement la solution au problème du livreur.

La hauteur maximum est de 480, avec le chemin ci-dessous :



Question 2 – Exprimer, avec le vocabulaire de la théorie des graphes, si le livreur, ayant un camion de hauteur x mètres, peut effectuer sa livraison en utilisant uniquement les routes du réseau donné. Vous pouvez définir un graphe auxiliaire G_x.

Soit G_x le graphe obtenu à partir du réseau routier de la figure en ne gardant que les arêtes de hauteur supérieure ou égale à x. Alors le livreur peut livrer de A à B avec son camion si et seulement si A et B sont dans la même composante connexe.

Question 3 – Citer une structure de données permettant de gérer efficacement des composantes connexes d'un graphe qui grossissent au fur et à mesure de l'exécution d'un algorithme. Rappeler les primitives de cette structure de données et leur complexité.

La structure de données Union-Find est efficace dans cette situation. Elle fournit (en appelant n le nombre de sommets du graphe) :

- Une initialisation de la partition, où chaque sommet est seul dans sa partie, en $O(n)$
- Une primitive $find(v)$ qui renvoie le représentant de la partie / composante connexe de v, en $O(\log n)$
- Une primitive $union(u, v)$ qui fusionne les parties / composantes connexes respectives de u et v, en $O(\log n)$.

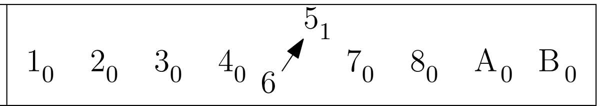
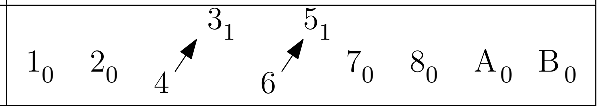
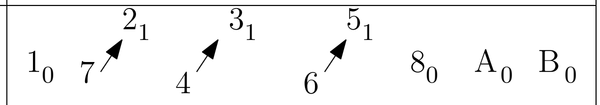
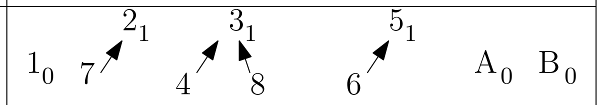
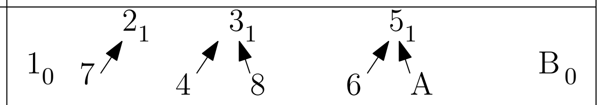
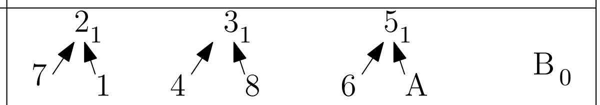
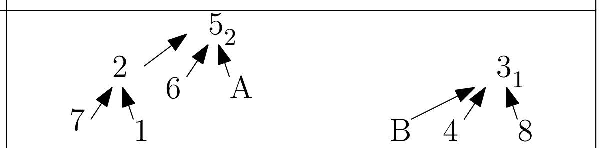
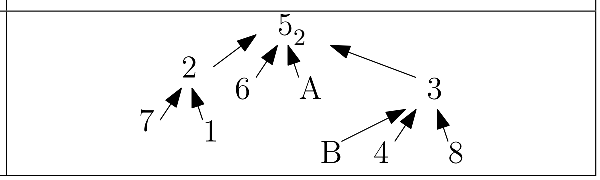
Question 4 – Écrire un algorithme en pseudo-code, utilisant la structure de données de la question précédente, pour résoudre le problème du livreur. L'entrée sera un graphe G (supposé connexe), une pondération $w : E(G) \to \mathbb{N}$, un sommet de départ A et un sommet d'arrivée B.

Algorithme 1 : $hauteurMax(G, w, A, B)$

Entrées : un graphe G (supposé connexe), une pondération $w : E(G) \to \mathbb{N}$, un sommet de départ A et un sommet d'arrivée B.
Sorties : la hauteur maximale possible d'un camion pouvant relier A à B

```
début
    trier les arêtes par poids décroissant : w(e_1) ≥ w(e_2) ≥ ... ≥ w(e_m);
    i ← 1;
    Initialiser la partition du Union-Find;
    tant que find(A) ≠ find(B) faire
        Soient u et v les extremités de e_i;
        si find(u) ≠ find(v) alors
            union(u, v) ;
            lastAdded ← {e_i}
        i ← i + 1
    Retourner w(lastAdded) ;
```

Question 5 – Appliquer votre algorithme afin de déterminer la hauteur maximale du camion pour que la livraison soit possible et donner un itinéraire réalisable.

i	$w(e_i)$	e_i	Union-Find
1	870	5-6	
2	850	3-4	
3	650	2-7	
4	590	4-8	
5	550	A-5	
6	500	1-2	
7	490	1-A	
8	490	4-B	
9	480	2-3	

Exercice 68 : **Traductions**

Un document important, rédigé en anglais, doit être traduit en huit autres langues : allemand, danois, espagnol, français, grec, italien, néerlandais et portugais. Parce qu'il est plus difficile de trouver des traducteurs pour certaines langues que pour d'autres, certaines traductions sont plus chères que d'autres. Les coûts (en euros) sont indiqués dans la table ci-dessous.

de/à	dan.	néd.	ang.	fr.	all.	grec	it.	port.	esp.
dan.	∗	90	100	120	60	160	120	140	120
néd.	90	∗	70	80	50	130	90	120	80
ang.	100	70	∗	50	60	150	110	150	90
fr.	120	80	50	∗	70	120	70	100	60
all.	60	50	60	70	∗	120	80	130	80
grec	160	130	150	120	120	∗	100	170	150
it.	120	90	110	70	80	100	∗	110	70
port.	140	120	150	100	130	170	110	∗	50
esp.	120	80	90	60	80	150	70	50	∗

On veut obtenir une version du document dans chaque langue à un coût total minimum.

Question 1 – Modéliser le problème comme un problème d'un arbre couvrant de poids minimum.

Décrire clairement le graphe.

Graphe G :

- sommets $\leftrightarrow$ langues
- arêtes $\leftrightarrow$ traducteurs
- poids $\leftrightarrow$ coûts de traductions

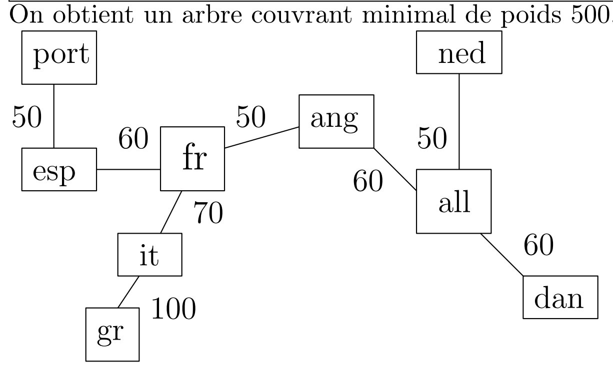
Problème : trouver un sous-graphe couvrant connexe de poids minimum, donc un arbre couvrant de poids minimum.

Question 2 – Quelles traductions devront être faites afin d'obtenir une version dans chaque langue à un coût total minimum ?

Note : l'exécution de l'algorithme est plus simple en construisant l'arbre sans dessiner le graphe initial. On exécute l'algorithme de Kruskal en s'arrêtant dès que l'on a 8 arêtes (car 9 sommets) :

F	Poids	Arête e	Cycle détecté ?
$\emptyset$	50	$ned-all$	Non
{ned-all}	50	$fr-ang$	Non
{ned-all, fr-ang}	50	$port-esp$	Non
{ned-all, fr-ang, port-esp}	60	$dan-all$	Non
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all}	60	$ang-all$	Non
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all}	60	$fr-esp$	Non
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp}	60	$fr-esp$	Non
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp}	70	$ned-ang$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp}	70	$fr-all$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp}	70	$fr-it$	Non
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	70	$esp-it$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	80	$ned-fr$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	80	$ned-esp$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	80	$all-it$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	80	$all-esp$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	90	$dan-ned$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	90	$it-ned$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	90	$ang-esp$	Oui
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it}	100	$gr-it$	Non
{ned-all, fr-ang, port-esp, dan-all, ang-all, fr-esp, fr-it, gr-it}	–	–	–

On obtient un arbre couvrant minimal de poids 500, dessiné ci-dessous.



Exercice 69 : **Découpe** (Wojciech Bienia)

A l'aide d'une scie à découper les courbes, on doit découper les 10 profils placés sur un morceau rectangulaire 35×25 de contre-plaqué comme l'indique le schéma de la Figure 6.

Le problème consiste à trouver le tracé qui minimise la longueur totale de découpe réellement effectuée, c'est-à-dire que les passages en arrière, les déplacements répétés par une ligne ou un trou déjà découpés ne comptent pas comme une augmentation de la longueur. Pour découper un morceau placé à l'intérieur de la planche il faut obligatoirement commencer le déplacement

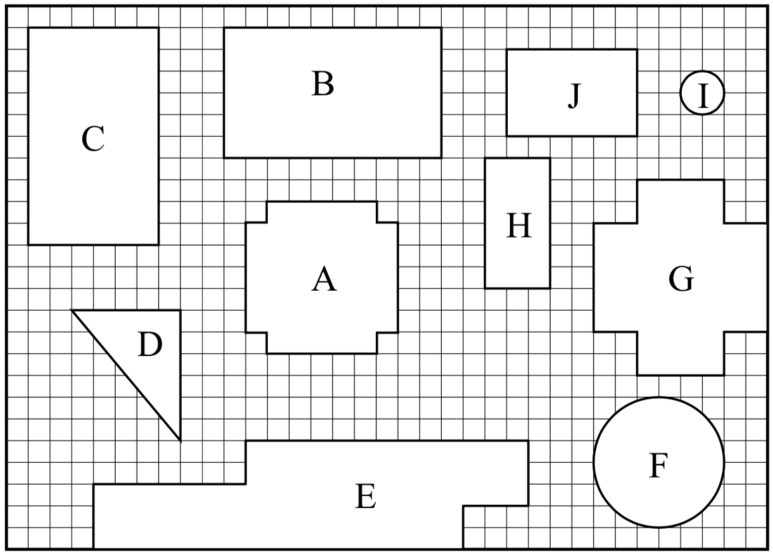


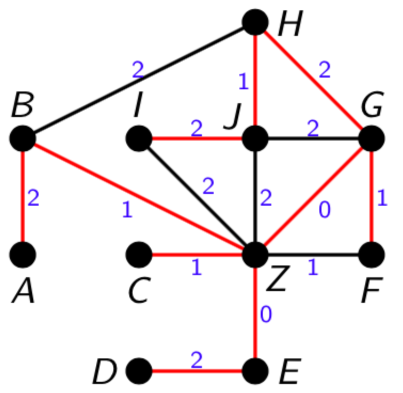
FIGURE 6 – Plan de découpe

de la scie à partir du bord de la planche, pour des raisons techniques.

Question 1 – Présentez le problème général comme un modèle classique de la théorie des graphes et justifiez cette modélisation.

> La découpe se décompose en l'ensemble des périmètres et l'ensemble des passages entre certaines pièces et l'extérieur. On peut optimiser seulement ces passages puisque les périmètres sont fixés. On peut donc considérer un graphe complet K_{11} dont les sommets représentent les pièces ou l'extérieur de la plaque, noté X. Pour optimiser localement il faut prendre les plus courtes distances entre chaque paire de pièces - on affecte ainsi des poids aux arêtes. Globalement on cherche un graphe connexe minimal c'est-à-dire l'arbre de poids minimum de ce K_{11} valué.

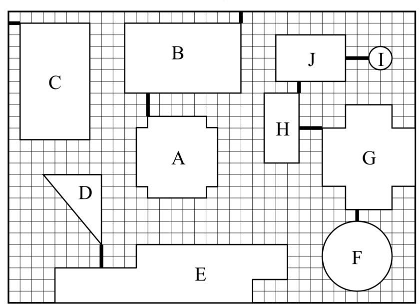
Question 2 – Traitez l'exemple et proposez un plan optimal de découpe. Ce plan est-il unique ? (justifier)



Dans la mise en marche, les calculs de certaines "grandes" distances sont inutiles. Voici le déroulement de l'algorithme de KRUSKAL :

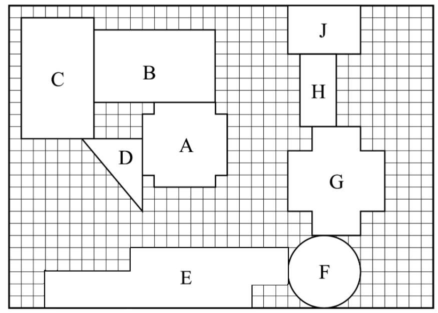
1. les arêtes de mesure 0 sont : XE et XG - on les accepte ;
2. les arêtes de mesure 1 sont : XB, XC, XF, FG, HJ ; à l'exception de FG qui ferme un cycle avec celles précédemment prises, on les accepte ;
3. les arêtes de mesure 2 sont : XI, XJ, AB, DE, GH, IJ ; à l'exception de GH et IJ on les accepte et ainsi l'arbre G de poids minimum est trouvé.

La solution n'est pas unique. Pour retrouver toutes les solutions, il suffit de réexaminer les trois arêtes FG, GH et IJ refusées : si les cycles qui les utilisent contiennent des arêtes du même poids, en les échangeant on produit une nouvelle solution optimale. Aussi les distances entre les pièces peuvent être réalisées pratiquement en plusieurs endroits. Un plan de découpe optimal avec le nombre minimal de coupures au bord est proposé sur la suivante.



Question 3 – La partie restante (quadrillée) du contre-plaqué peut-elle être en plusieurs morceaux à l'issue d'une découpe optimale ? Expliquez ce phénomène sur la base de la théorie des graphes.

Après avoir effectué une découpe optimale, on récupère ici la partie restante en un seul morceau. Avoir plusieurs morceaux signifie qu'il existe un tracé qui commence au bord et finit au bord, ou bien partant d'une pièce revient à la même pièce, ce qui veut dire qu'il existe un cycle dans la représentation graphique. C'est une contradiction, car toute solution optimale est un arbre de poids minimum donc un graphe sans cycle.



Mais, en réalité, la partie restante peut être mise en plusieurs morceaux par le découpage de périmètres, comme le montrent les deux exemples sur la figure. Ceci s'explique par l'existence de cycles de longueur nulle dans le graphe qui modélise le problème.

6 Plus courts chemins

Des dessins de graphes vous sont fournis en section 10 pour faciliter la rédaction de vos réponses pour certains exercices.

Exercice 70 : **Algorithme de Dijkstra** (Zoltán Szigeti)

Question 1 – En appliquant l'algorithme de Dijkstra, indiquez sur la Figure 7 la longueur des plus courts chemins issus du sommet s, dans le graphe. Vous indiquerez sur le dessin toutes les traces de l'algorithme.

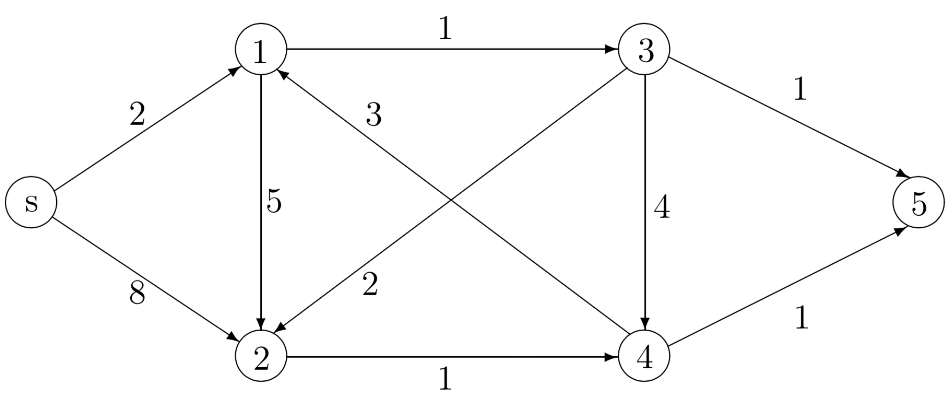
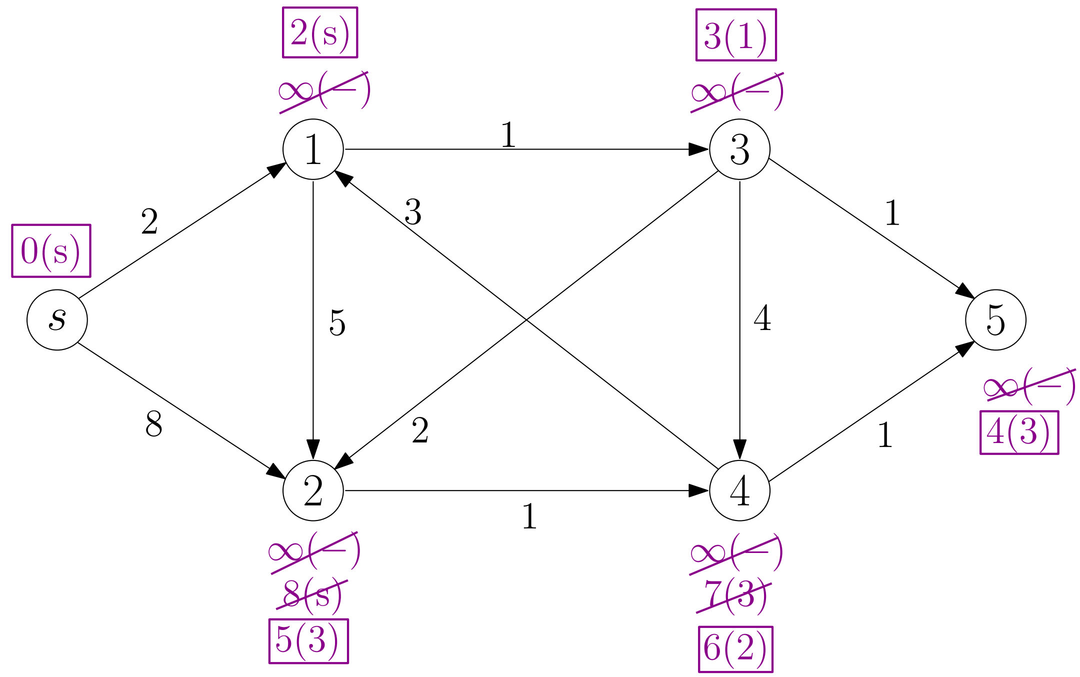


Figure 7 – Application de l'algorithme de Dijkstra

Les traces de l'algorithme sont annotées sur le dessins ci-dessous :



Ordre de traitement des sommets : s, 1, 3, 5, 2, 4

Question 2 – Indiquez l'arborescence des plus courts chemins issus de s sur le dessin de la Figure 8.

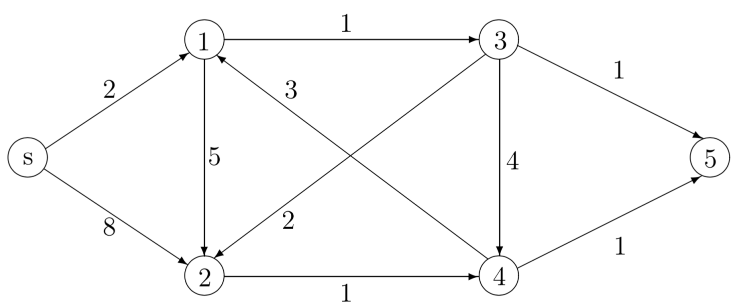
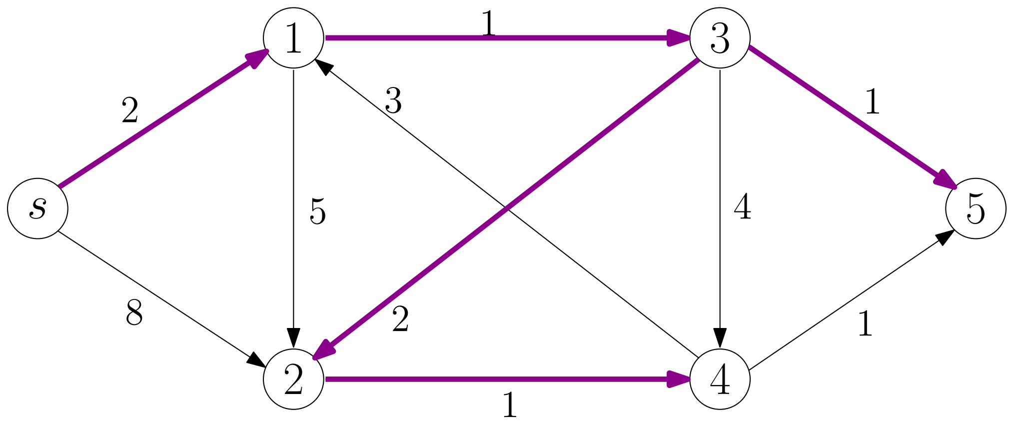


Figure 8 – Arborescence des plus courts chemins


s
1
2
3
4
5
2
8
5
1
3
2
4
1
1
1

Exercice 71 : Un élève de Polytech'Grenoble souhaite voir le soleil de minuit sur les fjords de Norvège. Il décide soudain de se rendre à Rana, charmante ville située à proximité du cercle polaire. Après avoir fait le tour de quelques compagnies aériennes, il a recensé plusieurs connexions aériennes possibles lui permettant d'aller de Grenoble (Lyon St Exupéry) à Rana, qu'il a représentées à l'aide du graphe de la Figure 9.

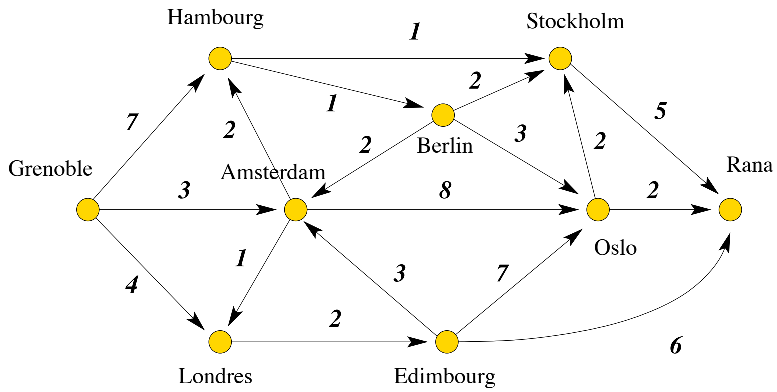


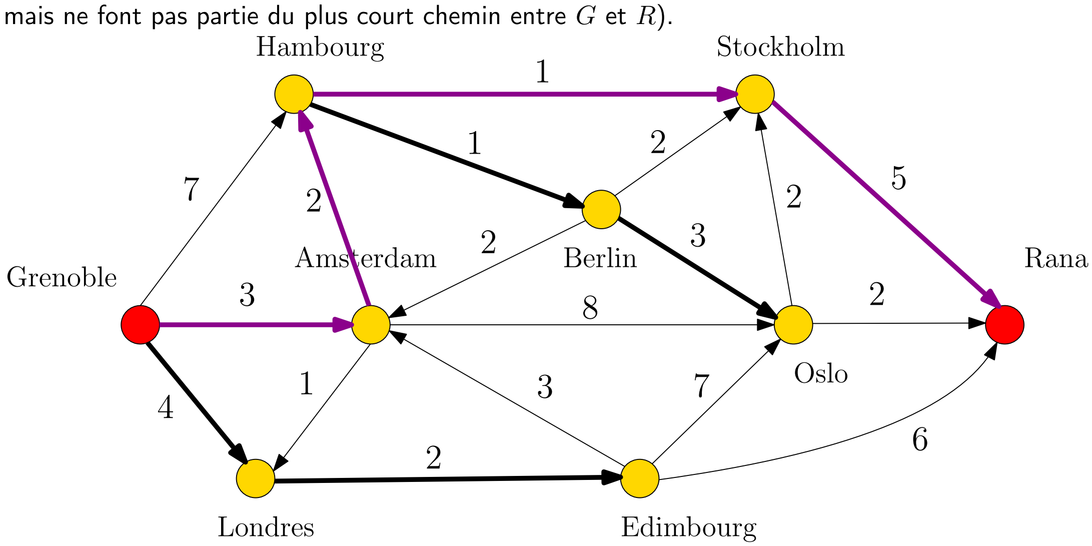
Figure 9 – Les valuations portées sur les arcs correspondent aux temps de vol (en heures)

Question 1 – Notre voyageur n'ayant que très peu de jours de vacances, aidez-le à déterminer le chemin le plus rapide pour se rendre de Grenoble à Rana.

Les poids sont positifs donc on peut appliquer l'algorithme de Dijkstra pour trouver les plus courts chemins depuis Grenoble (dans la suite, les villes seront représentées par leur initiale). Notre destination étant connue, on s'arrête dès que la distance à Rana devient définitive (c'est-à-dire qu'on traite le sommet Rana, il se trouve que dans cet exemple cela coïncidera avec la dernière étape de l'algorithme "toutes destinations").

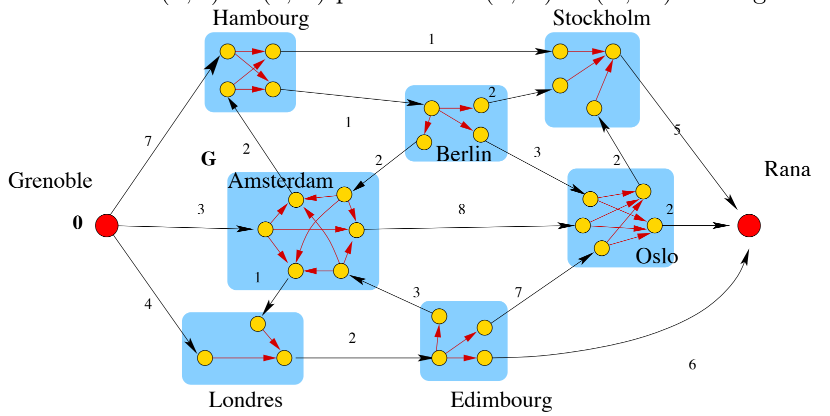
A	B	E	G	H	L	O	R	S
$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$0(G)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$
$3(G)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	**0(G)**	$7(G)$	$4(G)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$
3(G)	$\infty(-)$	$\infty(-)$		$5(A)$	$4(G)$	$11(A)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$
	$\infty(-)$	$6(L)$		$5(A)$	**4(G)**	$11(A)$	$\infty(-)$	$\infty(-)$
	$6(H)$	$6(L)$		**5(A)**		$11(A)$	$\infty(-)$	$6(H)$
	6(H)	$6(L)$				$9(B)$	$\infty(-)$	$6(H)$
		6(L)				$9(B)$	$12(E)$	$6(H)$
						$9(B)$	$11(S)$	**6(H)**
						9(B)	$11(S)$	
							11(S)	
$3(G)$	$6(H)$	$6(L)$	$0(G)$	$5(A)$	$4(G)$	$9(B)$	$11(S)$	$6(H)$

Le plus court chemin est donc $G \to A \to H \to S \to R$, comme indiqué sur le dessin ci-dessous (les arcs en gras en noir font partie de l'arborescence des plus courts chemins calculée par l'algorithme de Dijkstra, mais ne font pas partie du plus court chemin entre G et R).



Question 2 – Le graphe dessiné par notre voyageur ne tient pas compte des temps de transit à chaque escale, entre deux vols. Comment les modéliseriez-vous ?

Si on a un temps de transit t_{uw} à la ville v pour chaque couple de villes provenance/destination (u, w) où u est une ville de provenance possible pour v et w une destination possible pour v, i.e. si les arcs (u, v) et (v, w) existent, alors il suffit de remplacer le sommet v par un graphe biparti complet où les sommets sont $U \cup W$ copies des sommets u et v. En d'autre termes, $U = \{u' | (u, v) \in A\}$, $W = \{w' | (v, w) \in A\}$, et on défini t_{uw} comme longueur des arcs (u', w'). Enfin il suffit de remplacer tous les arcs (u, v) et (v, w) par des arcs (u, u') et (w, w') de longueurs respectivement t_{uv} et t_{vw}.



Exercice 72 : **Procédé de fabrication le plus sûr** (d'après J. Moncel)

L'entreprise de semiconducteurs Flee For All souhaite déterminer le procédé de fabrication le plus sûr pour leurs nouveaux processeurs SX-42. Il y a en effet plusieurs façons de faire pour transformer la matière première jusqu'au produit fini (enchaînement d'opérations de gravure, de vernissage, de nettoyage, de dopage, etc.). Le processus de fabrication de processeurs est extrêmement sensible, et si à une étape il y a le moindre problème alors la plaque de silicium est perdue et détruite. La Figure 10 décrit les étapes intermédiaires possibles, et la probabilité de succès de chaque étape.

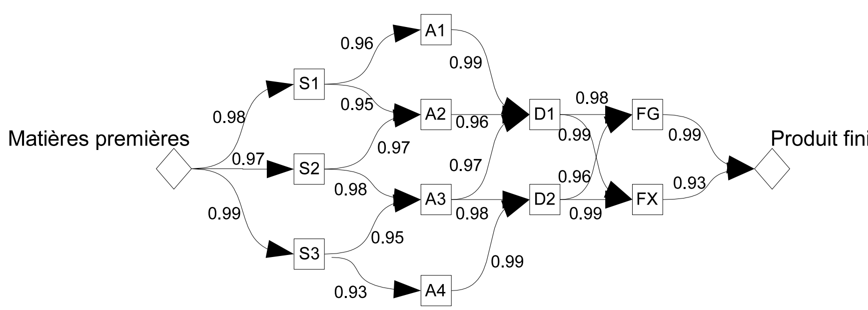


Figure 10 – Schéma descriptif des processus de fabrication possibles. Les produits semi-finis intermédiaires sont désignés par les abréviations S1, S2, S3, A1, A2, A3, A4, D1, D2, FG, FX. La probabilité de succès est indiquée pour chaque étape possible. Par exemple si l'on dispose de produits semi-finis de type S2, alors on a le choix entre deux processus. Le premier donnera des produits semi-finis de type A2, avec une probabilité de succès de 0.97 (il y aura donc 3% de déchets). Le second processus fournira des produits semi-finis de type A3, avec une probabilité de succès de 0.98 (il y aura donc 2% de déchets). La problématique est de déterminer le procédé de fabrication le plus sûr, c.-à-d. comportant le moins de déchets.

Question 1 – En utilisant le fait que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a $\log(ab) = \log a + \log b$, montrer que l'on peut transformer la recherche du procédé de fabrication le plus sûr en un problème de plus long chemin dans un graphe à préciser.

Comme en effet pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a $\log(ab) = \log a + \log b$, alors il suffit de remplacer chaque poids $p(x_i, x_j)$ par son logarithme $\log p(x_i, x_j)$. Ainsi, la probabilité de succès $\prod_{i=1}^{k-1} p(x_i, x_{i+1})$ (que l'on cherche à maximiser) d'un chemin $x_1, \ldots, x_k$ se transforme en

$$\log(\prod_{i=1}^{k-1} p(x_i, x_{i+1})) = \sum_{i=1}^{k-1} \log p(x_i, x_{i+1})$$

et comme maximiser une quantité revient à maximiser son log, alors on se ramène à un problème classique de plus long chemin.

Question 2 – Montrer que l'on peut ramener le problème de plus long chemin de la question précédente en problème de plus court chemin dans un graphe à préciser. Peut-on utiliser l'algorithme de Dijkstra pour cette recherche de plus court chemin ?

Dans la question 1, on a vu qu'on se ramenait à un problème de recherche de plus long chemin dans un graphe ayant les mêmes sommets et arcs que le graphe initial mais avec des poids correspondant à $\log p(x_i, x_j)$. On cherche donc le chemin qui maximise la probabilité de succès :$\sum_{i=1}^{k-1} \log p(x_i, x_{i+1})$. Cela revient à minimiser l'opposé : $-\sum_{i=1}^{k-1} \log p(x_i, x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1} - \log p(x_i, x_{i+1})$.
On se ramène donc à un problème de plus court chemin en remplaçant les poids $p(x_i, x_j)$ des arcs par $-\log p(x_i, x_j)$.
Comme $p(x_i, x_j)$ est une probabilité (non nulle sinon l'arc n'est pas présent), on a, pour tout (i, j) :

$$0 < p(x_i, x_j) \leq 1$$

et donc :

$$\log p(x_i, x_j) \leq 0$$

$$-\log p(x_i, x_j) \geq 0$$

On s'est donc ramenés à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe orienté avec poids positifs, on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra.

Exercice 73 : **Le pirate** (Benjamin Lévêque)

Les ordinateurs de l'entreprise Lypotech sont connectés en réseau. Pour les ordinateurs connectés, on connaît le temps de communication. Un pirate peut détruire une connexion dans ce réseau et, pour se venger de trois années difficiles dans cette boite, il souhaite augmenter le plus possible le temps de connexion entre le directeur (ordinateur A sur le graphique) et son secrétaire (ordinateur B).

Question 1 – Proposer un algorithme pour trouver la connexion à couper afin d'augmenter au maximum le temps de communication entre deux sommets A et B.

Question 2 – Si le graphe de la Figure 11 représente les connexions entre machines, alors quelle est la connexion qu'il doit couper ? Pour répondre à cette question, on ne déroulera pas l'intégralité de l'algorithme proposé à la question précédente ; on commencera par calculer un plus court chemin avec l'algorithme de Dijkstra puis on s'aidera des marques intermédiaires (distances provisoires) pour trouver la solution et justifier qu'elle est optimale.

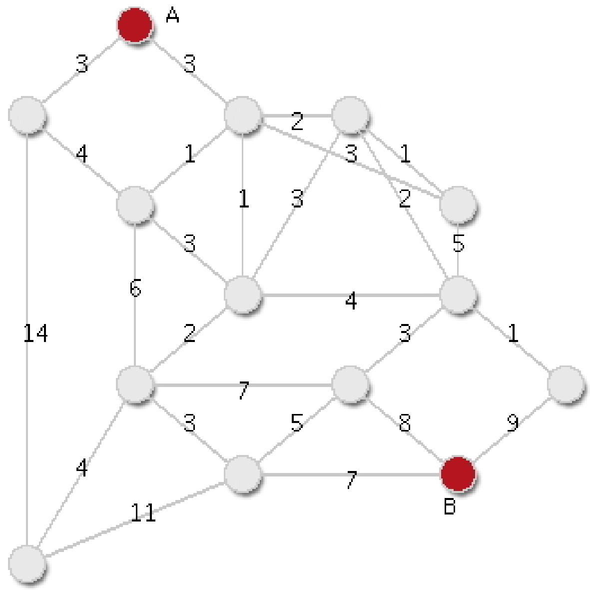


Figure 11 – Le réseau de l'entreprise

Exercice 74 :

Une grande entreprise de vente par correspondance a décidé de s'implanter dans un nouveau pays. Elle souhaite installer son entrepôt central et ses bureaux dans l'une des principales villes. Son argument de vente face à la concurrence repose sur la rapidité de la livraison à ses clients. Pour se conformer à cette image marketing elle veut que l'entrepôt soit dans une ville la plus proche possible de toutes les autres agglomérations (voir Figure 12).

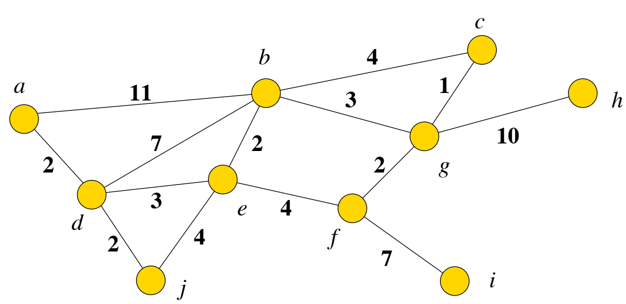
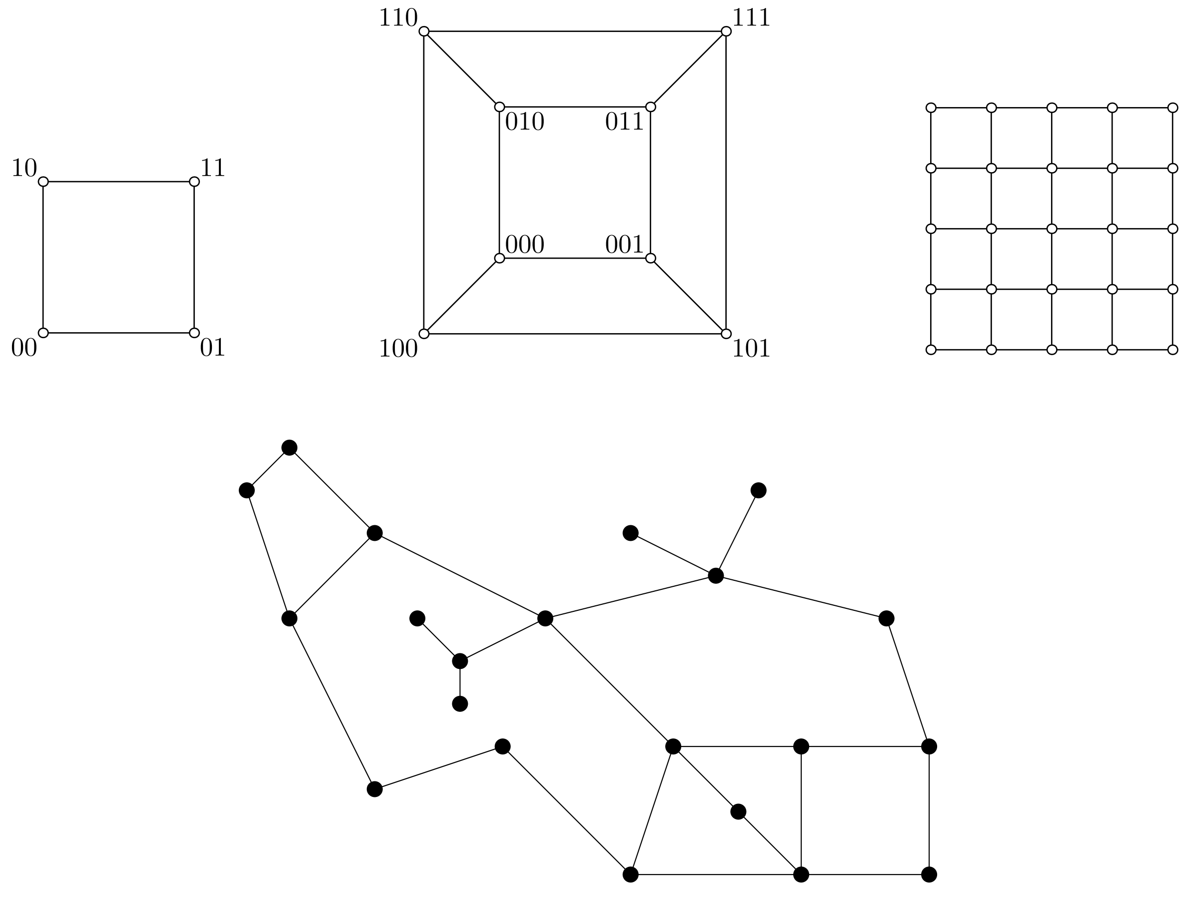


Figure 12 – Le graphe des différentes villes. Les valuations sur les arcs représentent les temps d'acheminement (en heure) entre 2 agglomérations, dépendants de la distance et du réseau routier (autoroute, nationale, région montagneuse...)

Question 1 – Quelle ville devrait choisir l'entreprise pour s'implanter ? Le chef de l'entreprise, qui est un ancien étudiant de l'université de Grenoble, pense que l'emplacement idéal est en e, car, dit-il, c'est "le centre du graphe"... A-t-il raison ?

7 Coloration

Exercice 75 : Les quatre graphes ci-dessous sont-ils bipartis ?



Exercice 76 : (G. Naves, Marseilles) Trouver une coloration optimale des graphes dessinés en Figure 13.

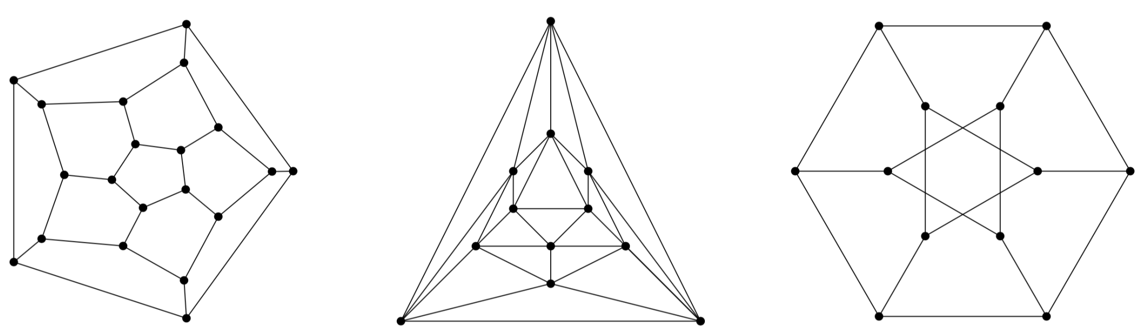
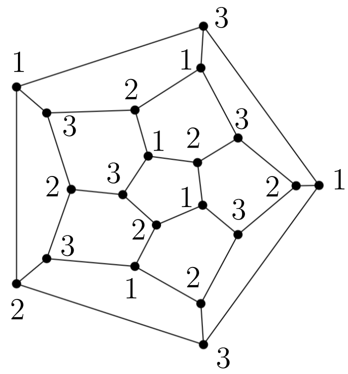
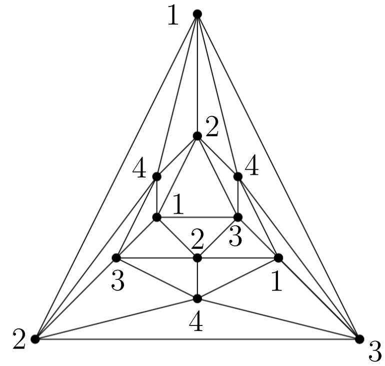


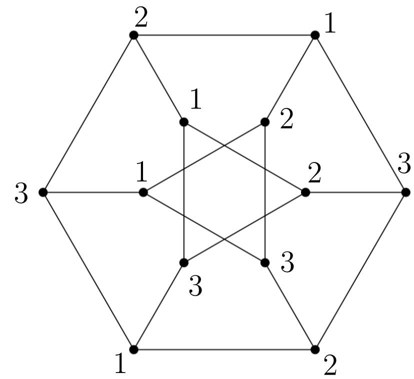
Figure 13 – Le dodécaèdre, l'icosaèdre et le graphe de Dürer.



3-colorable

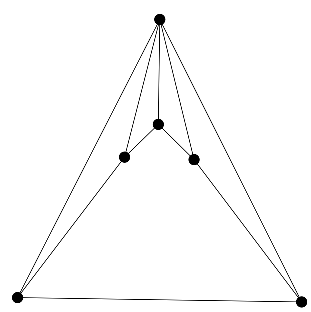


4-colorable



3-colorable

Appelons G_1, G_2, G_3 les trois graphes ci-dessus. On a prouvé que $\chi(G_1) \leq 3, \chi(G_2) \leq 4$ et $\chi(G_3) \leq 4$. Montrons que les colorations proposées sont optimales.
Pour G_1, il faut au moins trois couleurs à cause du C_5 (cycle impair), donc $\chi(G_1) \geq 3$; pour le dernier G_3, il faut au moins 3 couleurs à cause du triangle (clique de taille 3) donc $\chi(G_2) \geq 3$; pour G_2, il faut voir qu'il faut au moins 4 couleurs pour le sous-graphe induit ci-dessous, qui est une roue à cycle impair, c'est-à-dire qu'il est constitué d'un cycle impair (nécessite 3 couleurs) et un sommet universel à ce cycle (relié à tous les sommets du cycle, donc il faut une 4e couleur) :



La roue à cycle impair implique que $\chi(G_3) \geq 4$. Au total, on a donc $\chi(G_1) = 3, \chi(G_2) = 4$ et $\chi(G_3) = 4$ donc les colorations ci-dessus sont optimales.

Exercice 77 : Question 1 – En utilisant les caractérisations appropriées des arbres et des graphes bipartis, démontrez qu'un arbre est un graphe biparti.

Question 2 – Quels sont les graphes qui sont à la fois des arbres et des bipartis complets ?

Exercice 78 : Modélisez un jeu du Sudoku comme un problème de coloration de graphe. Vous indiquerez le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, le degré minimum et le degré maximum ainsi que le nombre chromatique du graphe.

Exercice 79 : **Régulation de la circulation**

La figure ci-dessous représente les trajectoires de neuf voies $\{V_1, \ldots, V_9\}$ à un carrefour très fréquenté de Kuala Lumpur (Malaisie). Chaque voie est pourvue de ses propres feux de signalisation.

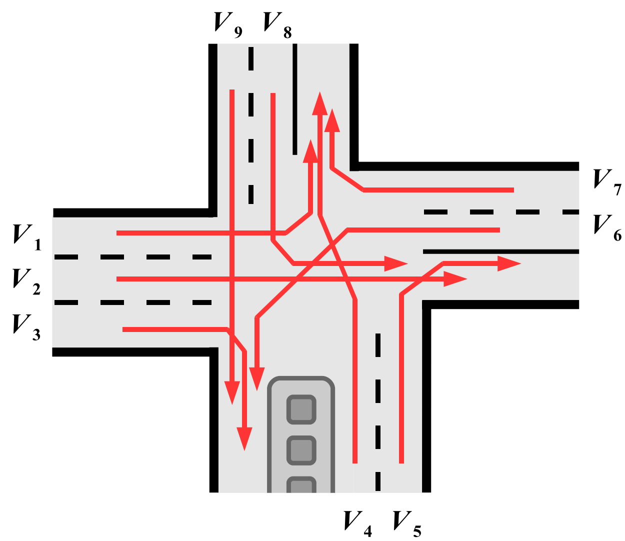


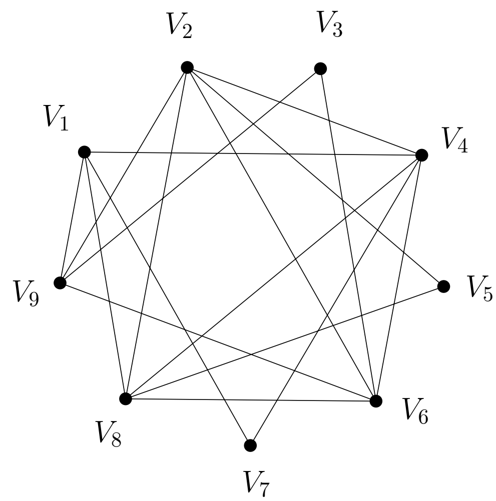
FIGURE 14 – Diagramme des neuf voies du carrefour. Le très grand nombre de véhicules empruntant ce carrefour (64 000 véhicules par jour en moyenne) conduit les autorités à réguler la circulation en phases, où à chaque phase les voies dont le feu est vert ne sont pas en conflit. Deux voies sont considérées en conflit si elles se croisent (par exemple V_1 et V_8) ou si elles ont la même destination (par exemple V_1 et V_7).

Les voitures d'une voie ne peuvent franchir le carrefour que lorsque leur feu est vert. La circulation est régulée par des cycles de 160 secondes, chaque cycle comportant 4 phases de durées 40 secondes comme suit :

– phase 1 : V_1, V_2 et V_3 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 2 : V_4, V_5 et V_9 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 3 : V_6 et V_7 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 4 : V_8 est au vert (les autres au rouge)

Question 1 – Modélisez la situation par un graphe, tel que le nombre minimum de phases pour réguler le trafic soit égal au nombre chromatique de ce graphe.

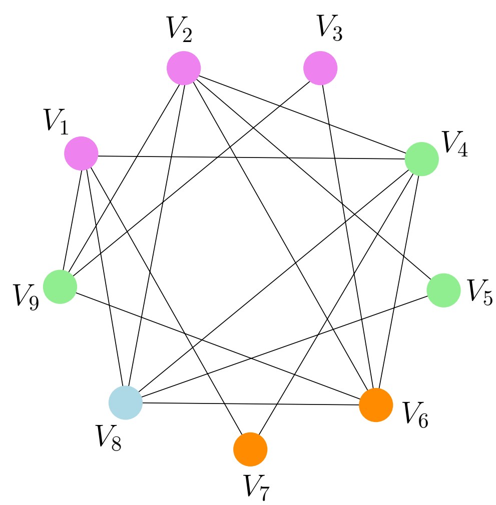
On choisit comme sommets les voies, et l'on met une arête entre deux voies si et seulement si elles sont en conflit. On obtient le graphe G ci-dessous :



Un ensemble de voies qui peuvent circuler en même temps correspond à un stable du graphe et inversement (voies sans conflit donc sommets non reliés par une arête). On cherche donc à partitionner le graphe en un nombre minimum de stables, ce qui correspond exactement à trouver une coloration optimale.

Question 2 – Peut-on faire mieux que 4 phases pour réguler le trafic ?

Le découpage en 4 phases correspond à une 4-coloration du graphe, on ne peut pas faire mieux car on a V_2, V_4, V_6, V_8 qui forment une clique de taille 4.



Les voies V_2 et V_4 sont en fait très fréquentées, de sorte que les autorités souhaitent que V_2 et V_4 soient au vert deux fois par cycle et non plus une seule fois comme précédemment.

Question 3 – Modifier le modèle pour prendre en compte cette contrainte ; donner un nouveau cycle ayant un nombre minimum de phases tel que V_2 et V_4 sont au vert deux fois dans le cycle.

On modifie le graphe G en G' : V_2 doit pouvoir apparaître deux fois par cycle donc il faut lui attribuer deux couleurs différentes. Pour cela, on le dédouble en deux sommets adjacents $V_{2,1}, V_{2,2}$, qui sont tous les deux reliés aux sommets qui étaient voisins de V_2 (les voies en conflit avec V_2). On procède de la même façon pour V_4 en le dédoublant en $V_{4,1}, V_{4,2}$. Autrement dit, pour $i = 2, 4$ et $j = 1, 2$, $V_{i,j}$ est adjacent à V_k si il y a conflit entre V_i et V_k ; de plus $V_{i,1}$ et $V_{i,2}$ sont voisins.
On crée ainsi une clique de taille 6 ($V_{2_1}, V_{2,2}, V_{4_1}, V_{4_2}, V_6, V_8$ car on dédouble deux sommets appartenant à une clique de taille 4) donc $\chi(G') \geq 6$ et d'autre part il est facile de 6-colorier ce graphe (ajouter deux nouvelles couleurs à la 4-coloration précédente, pour les deux nouveaux sommets) donc $\chi(G') \leq 6$. Au final $\chi(G) = 6$.
Le cycle de feu devient :
– phase 1 : V_1, V_2 et V_3 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 2 : V_4, V_5 et V_9 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 3 : V_6 et V_7 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 4 : V_8 est au vert (les autres au rouge)
– phase 5 : V_2 est au vert (les autres au rouge)
– phase 6 : V_4 est au vert (les autres au rouge)

Exercice 80 : **Réservations hotelières** (Louis Esperet)

À travers sa centrale de réservation, un hôtel a reçu les demandes suivantes pour la première semaine du mois de mars :

R. Arquette a réservé une chambre la nuit du 1er mars ;
L. Bacall a réservé une chambre les nuits des 3, 4, 5, et 6
M. Caine a réservé une chambre les nuits des 5, 6, 7
J. Depp a réservé une chambre les nuits des 1, 2, 3, 4
C. Eastwood a réservé une chambre les nuits des 2, 3, 4, 5, 6
B. Fonda a réservé une chambre la nuit du 7
J. Goodman a réservé une chambre les nuits des 1 et 2
T. Hanks a réservé une chambre les nuits des 5, 6, 7
J. Irons a réservé une chambre les nuits des 1, 2 et 3
S. Johansson a réservé une chambre les nuits des 2, 3, 4, 5

L'hôtel a seulement 4 chambres de libre mais en faisant venir très rapidement un plombier et un électricien, le gérant peut se débrouiller pour avoir 2 chambres de plus (la première chambre a des problèmes de faux-contact et dans la deuxième il y a une fuite). Le gérant préfère ne faire venir les artisans que si c'est absolument nécessaire (son beau-frère doit passer lui donner un coup de main pour les travaux la 2ème semaine de mars de toute façon). Bien sur, aucun de ces hôtes n'accepterait de changer de chambre en cours de séjour.

Question 1 – Le gérant doit-il faire venir les deux artisans ? Vous donnerez une modélisation en termes de graphes et vous indiquerez une répartition des clients dans les chambres.

Exercice 81 : Soit G un graphe à n sommets et soit $v_1, \ldots, v_n$ un ordre sur ses sommets. On dit que cet ordre est un ordre de *d-dégénérescence* si : *(les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes)*

1. chaque sommet v_i possède au plus d voisins avant lui dans l'ordre, autrement dit pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe au plus d indices j tels que $j < i$ et $v_j v_i \in E(G)$.
2. pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le sommet v_i est de degré au plus d dans $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$, autrement dit si l'on supprime tous les sommets après v_i dans l'ordre, alors v_i devient de degré au plus d.
3. le dernier sommet v_n a degré au plus d dans G, et $G \setminus \{v_n\}$ est aussi d-dégénéré.

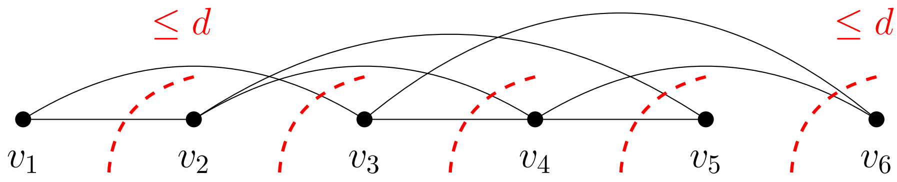


FIGURE 15 – Un exemple d'un ordre de d-dégénérescence avec $d = 2$: chaque sommet possède au plus 2 voisins à sa gauche.

Un graphe est *d-dégénéré* s'il admet un ordre de d-dégénérescence.

Question 1 – Prouver par récurrence sur n : si G est un graphe d-dégénéré alors G est $d+1$-colorable, c'est-à-dire $\chi(G) \leq d+1$.

Initialisation pour n=1 : pour un graphe à un seul sommet, il est d-dégénéré pour $d = 0$ (et n'importe quel $d \geq 0$), et $\chi(G) = 1 \leq d+1$.
Hérédité : prouvons $P(n+1)$ en utilisant $P(n)$

1. Soit G un graphe d-dégénéré à $n+1$ sommets.
2. Soit $v_1, \ldots, v_{n+1}$ un ordre de dégénérescence.
3. Alors v_{n+1} est de degré au plus d dans G.
4. On pose $G' = G \setminus \{v_{n+1}\}$.
5. G' est d-dégénéré avec l'ordre de dégénérescence $v_1, \ldots, v_n$ donc on applique l'hypothèse de récurrence sur G' : on peut colorer G' avec $d+1$ couleurs.
6. Parmi les $d+1$ couleurs, au moins une n'est donc pas utilisée sur le voisinage de v_{n+1} (car $|N(v)| \leq d$) : on l'attribue à v_{n+1} et on obtient ainsi une $d+1$-coloration de G, ce qui prouve que $\chi(G) \leq d+1$.

En conclusion, par récurrence sur n, tout graphe G d-dégénéré satisfait $\chi(G) \leq d+1$.

Question 2 – Prouver par récurrence sur n que tout graphe d-dégénéré à n sommets possède au plus dn arêtes. (Il existe une preuve simple sans récurrence mais on s'intéresse ici à la récurrence)

Initialisation pour n=1 : pour un graphe à un seul sommet, il est d-dégénéré pour $d = 0$ et il possède 0 arête.
Hérédité : prouvons $P(n+1)$ en utilisant $P(n)$

1. Soit G un graphe d-dégénéré à $n+1$ sommets.
2. Soit $v_1, \ldots, v_{n+1}$ un ordre de dégénérescence.
3. Alors v_{n+1} est de degré au plus d dans G.
4. On pose $G' = G \setminus \{v_{n+1}\}$.
5. G' est d-dégénéré avec l'ordre de dégénérescence $v_1, \ldots, v_n$ donc on applique l'hypothèse de récurrence sur G' : $|E(G')| \leq dn$.
6. Les arêtes de G se partitionne entre les arêtes de G' (il y en a au plus dn) et les arêtes incidents à v_{n+1} (il y en a au plus d, car v_{n+1} est de degré $\leq d$), donc au total $|E(G)| \leq dn + d = d(n+1)$.

En conclusion, par récurrence sur n, tout graphe G d-dégénéré satisfait $|E(G)| \leq d|V(G)|$.

Exercice 82 : Les roues

Une roue d'ordre n est un graphe à n sommets constitué d'un cycle à $n-1$ sommets (appelons ses sommets $v_1, \ldots, v_{n-1}$) auquel on ajoute un sommet u tel que uv_i est une arête pour tout i (voir figure ci-dessous). On note R_n la roue d'ordre n.

Question 1 – Démontrer que $\chi(R_n) = 3$ si $n \geq 5$ est impair et $\chi(R_n) = 4$ si $n \geq 4$ est pair.

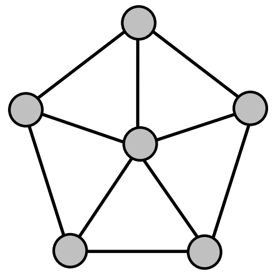


FIGURE 16 – La roue d'ordre 6 (le sommet u est celui qui se trouve au centre de la roue).

> Si n est impair, on colorie facilement le cycle avec 2 couleurs, le sommet u prend une troisième couleur. On ne peut pas faire mieux car par exemple uv_1v_2 est un triangle.
> Si n est impair, on trouve de même une 4-coloration (on 3-colorie le cycle et le centre u prend une quatrième couleur). Pour démontrer l'optimalité, on peut raisonner par l'absurde : supposons le graphe 3-colorié, le sommet u a, disons, la couleur 1 ; puis un sommet du cycle (disons v_1) a la couleur 2 ; ensuite de proche en proche les sommets du cycle ont la couleur 2 ou 3 ; lorsque l'on revient en v_1 on est coincé.

Exercice 83 : **Produits chimiques**

Huit lots de produits chimiques doivent être expédiés par avion depuis Saint-Denis (île de la Réunion) à la station scientifique de Port-aux-Français (îles Kerguélen). Pour des raisons de sécurité, certains de ces produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même container. En effet, les produits interagissent entre eux et il est risqué de les stocker dans un même container si les lots ne sont pas parfaitement étanches. Les produits sont notés $P_1, \ldots, P_8$. La table ci-dessous liste les interactions entre les produits chimiques. Par exemple, le produit P_1 peut être placé dans le même container que les produits P_3, P_4, P_7 et P_8, mais ne peut pas être placé avec P_2, P_5 ou P_6.

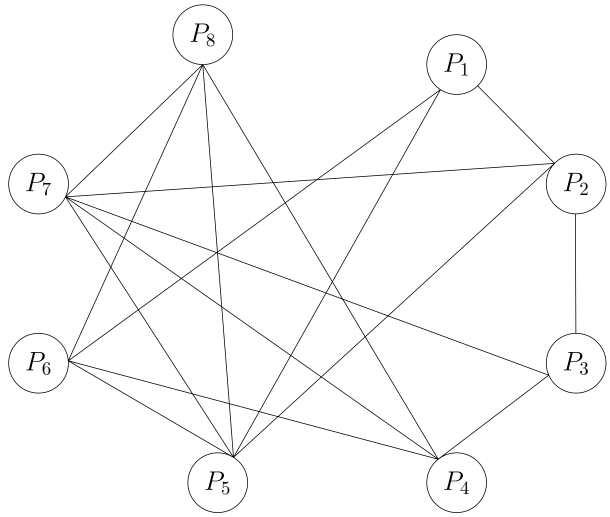
P_1 : P_2, P_5, P_6	P_2 : P_1, P_3, P_5, P_7	P_3 : P_2, P_4, P_7
P_4 : P_3, P_6, P_7, P_8	P_5 : P_1, P_2, P_6, P_7, P_8	P_6 : P_1, P_4, P_5, P_8
P_7 : P_2, P_3, P_4, P_5, P_8	P_8 : P_4, P_5, P_6, P_7	

Le prix de l'envoi d'un container est de 3000 euros. On peut supposer qu'il n'y a pas de contrainte de capacité sur les containers (c.-à-d. un container peut contenir un nombre maximum de n lots, avec $n \geq 8$).

On cherche à connaître le prix minimum de l'envoi des huit lots de produits chimiques ainsi que la répartition des lots de produits chimiques dans les containers.

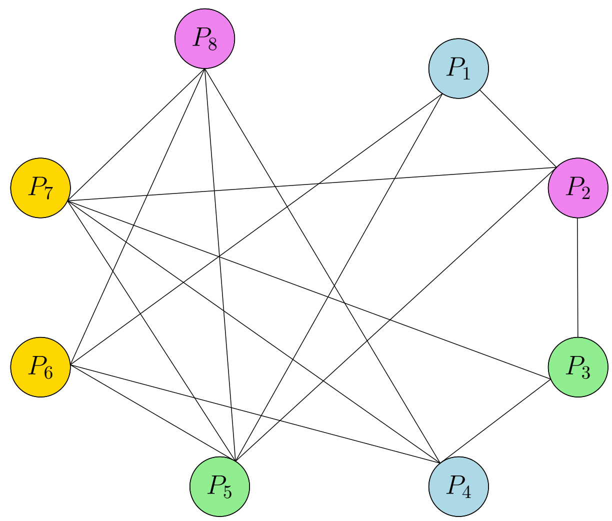
Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

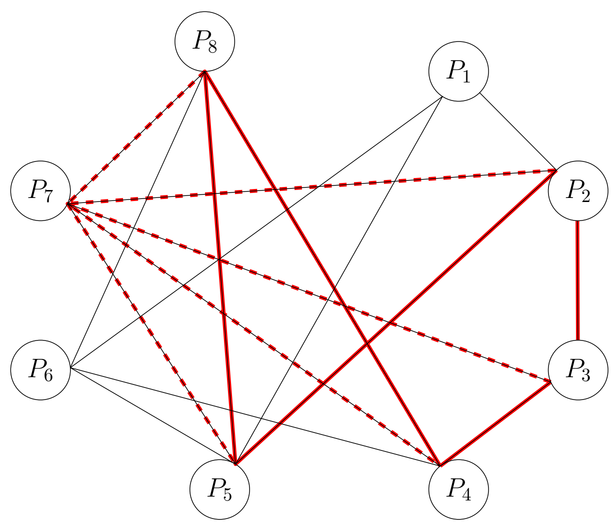
On construit un graphe dont les sommets sont les produits chimiques. Il y a une arête entre deux produits chimiques si et seulement si ils interagissent entre eux (voir graphe ci-dessous). Un stable dans le graphe correspond exactement à un ensemble de produits chimiques sans interactions, que l'on peut mettre dans le même container. On chercher à minimiser le nombre de container, donc à partitionner en un nombre minimum de stables : on cherche une coloration optimale du graphe.



Question 2 – Répondre à la problématique en résolvant le problème de graphes choisi à la question précédente. Justifier soigneusement. (Indice : ne réinventez pas la roue !).

On trouve ci-dessous une 4-coloration du graphe donc $\chi(G) \leq 4$. De plus on trouve une roue à cycle impair (P_2, P_3, P_4, P_8, P_5 formant le cycle et P_7 étant le centre de la roue, voir ci-dessous) donc $\chi(G) \geq 4$. Au total, $\chi(G) = 4$ donc il faut 4 container, ce qui coûte 12 000 euros.





Exercice 84 : **Qui a tué le Duc de Dunsmore ?** (d'après Claude Berge)

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de 10 ans. A l'époque, le Duc de Graphistan avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait également détruit le château de Graphistan où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi par l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses 7 ex-femmes. Or, avant sa mort, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Holmes - Je me souviens de l'affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

Watson - Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des ex-épouses : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Graphistan qu'une seule fois dans leur vie.

Holmes - Hum ! leur avez-vous demandé à quelle période ont eu lieu leurs séjours respectifs ?

Watson - Hélas, aucune ne se rappelait les dates exactes, après 10 ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles y avaient rencontré :

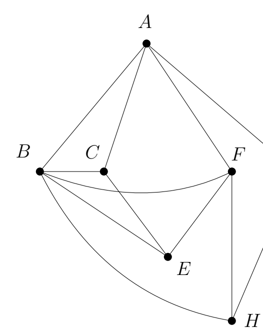
— Ann a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia, Georgia ;
— Betty a déclaré y avoir rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia, Helen ;
— Charlotte a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith ;
— Edith a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia ;
— Félicia a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith, Helen ;
— Georgia a déclaré y avoir rencontré Ann, Helen ;
— Helen a déclaré y avoir rencontré Betty, Félicia, Georgia.

Vous voyez mon cher Holmes, ces réponses sont concordantes !

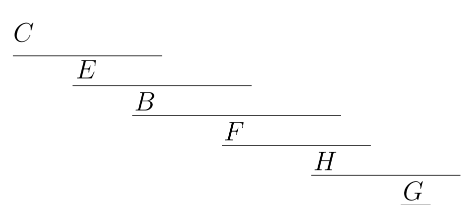
C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin. Puis, après moins de 30 secondes, Holmes s'écria : "tiens, tiens ! Ce que vous venez de dire détermine de façon unique l'assassin".

Mais qui donc est l'assassin ?

Question 1 – Modéliser les témoignages par un graphe G. À quelle classe de graphe G doit-il appartenir ?

> Les sommets seront les personnes interrogées (ex-épouses), et on reliera deux sommets si les personnes correspondantes disent d'être rencontrées au château du Duc (on observe que les témoignages sont réciproquement concordants donc on peut bien construire un graphe non-orienté).
> On obtient le graphe G suivant :
>
> 
>
>
> Comme chaque personne est venue une seule fois au château, son temps de présence correspond à un intervalle. Deux personnes se sont croisées si et seulement si leurs intervalles respectifs de présence au château s'intersectent. G doit donc être un graphe d'intervalle, si personne ne ment.

Question 2 – Identifier un menteur parmi les personnes interrogées. Vous tiendrez votre assassin !

> G contient un (et même plusieurs) cycles induits de longueur 4, qui ne sont pas des graphes d'intervalle. Il y a donc au moins un menteur. Grâce à la remarque de Sherlock Holmes, on se doute qu'il suffit de retirer un seul sommet à G pour qu'il devienne un graphe d'intervalle. Une condition nécessaire est de supprimer tous les C_4 induits. On repère en particulier : $AFGH$, $ACFE$, $ABHG$. Le seul sommet en commun dans les trois est A. Si l'on retire H, on obtient bien un graphe d'intervalle (on exhibe une famille d'intervalle qui convient).
>
> 
>

Exercice 85 :

On rappelle que $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G, c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur.

On note $\Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet de G.

Question 1 – Démontrer que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ pour tout graphe G. Donner des graphes G tels que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, et donner des graphes G tels que $\chi(G) < \Delta(G) + 1$.

Soit $\omega(G)$ le nombre de sommets de la plus grande clique de G. On rappelle qu'une clique est un sous-graphe partiel qui est complet.

Question 2 – Démontrer que $\chi(G) \geq \omega(G)$ pour tout graphe G. Donner des graphes G tels que $\chi(G) = \omega(G)$, et donner des graphes G tels que $\chi(G) > \omega(G)$.

Soit M_0 le graphe K_2. Par récurrence on définit M_{n+1} en fonction de M_n, $n \geq 0$, de la façon suivante :

— si $v_1, \ldots, v_k$ sont les sommets de M_n, alors les sommets de M_{n+1} sont $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k, u$

— si v_iv_j est une arête de M_n alors v_iv_j est aussi une arête de M_{n+1}

— si v_iv_j est une arête de M_n alors w_iv_j est une arête de M_{n+1}

— uw_i est une arête de M_{n+1} pour tout $i = 1, \ldots, k$

Question 3 – Démontrer que M_1 est un cycle à 5 sommets.

Question 4 – Démontrer que M_n a $3 \times 2^n - 1$ sommets pour tout $n \geq 0$.

Question 5 – Démontrer par récurrence sur n que $\omega(M_n) = 2$ pour tout $n \geq 0$.

Question 6 – Démontrer par récurrence sur n que $\chi(M_n) = 2 + n$ pour tout $n \geq 0$.

Les deux questions précédentes montrent qu'il peut y avoir un écart arbitrairement grand entre $\omega(G)$ et $\chi(G)$. Les graphes de la famille $(M_n)_{n\geq 0}$ sont appelés *graphes de Mycielski* en l'honneur du mathématicien du même nom.

8 Couplages

Des dessins de graphes vous sont fournis en section 10 pour faciliter la rédaction de vos réponses pour certains exercices.

Exercice 86 : **Compagnie aérienne**

Une compagnie aérienne dispose de cinq avions A_1, A_2, …, A_5. Chaque avion peut effectuer des vols sur les routes indiquées dans la Table 3.

Avion	Routes
A_1	Londres-Francfort
A_2	Londres-Francfort, Milan-Barcelone
A_3	Londres-Francfort, Paris-Moscou, Athènes-Madrid, Rome-Sofia
A_4	Paris-Moscou, Athènes-Madrid, Rome-Sofia
A_5	Londres-Francfort, Milan-Barcelone

Table 3 – Routes des avions

Question 1 – Dessiner un graphe biparti G dont les sommets représentent les avions et les routes, et dont les arêtes représentent les routes que l'avion peut prendre.

Question 2 – L'avion A_3 sert sur la route Londres-Francfort, A_4 sur la route Rome-Sofia, et A_5 sur la route Milan-Barcelone.

(a) Cette affectation est-elle un couplage maximal de G ? Qu'est-ce que cela signifie pour notre compagnie aérienne ?

(b) Cette affectation est-elle un couplage maximum de G ? Qu'est-ce que cela signifie pour notre compagnie aérienne ?

L'avion A_3 doit être retiré du service pour passer en maintenance.

Question 3 – Trouver un couplage maximum du graphe modifié.

Exercice 87 : Pour chaque graphe dans la Figure 17, trouver un couplage maximum et justifier pourquoi il est maximum.

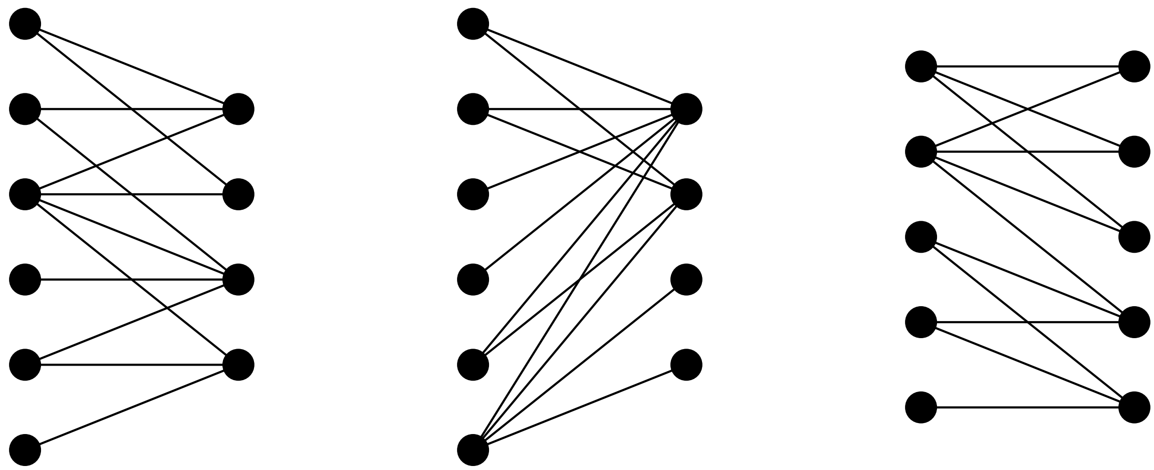


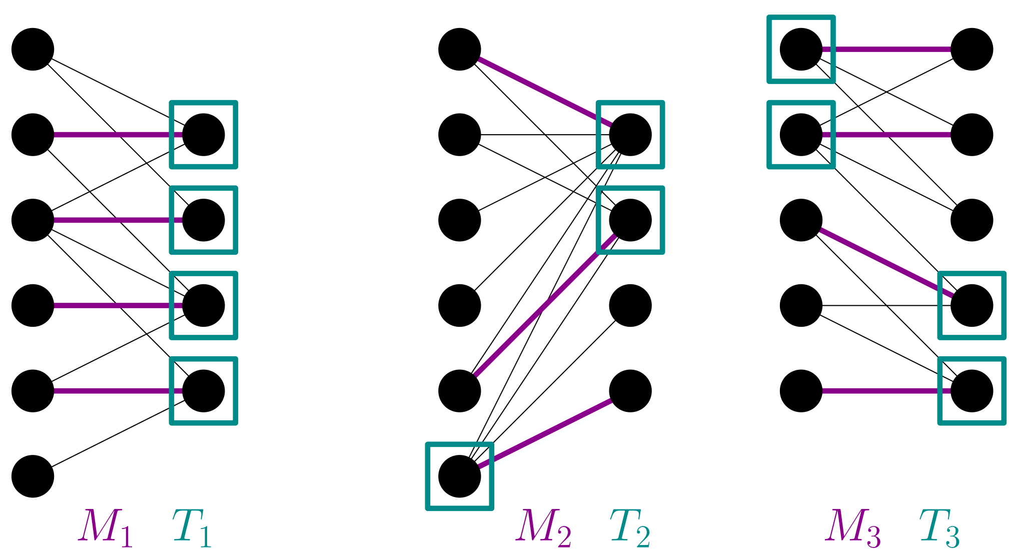
Figure 17 – Graphes

Pour chaque graphe, on trouve ci-dessous un couplage M_i puis un transveral T_i de la même taille : cela prouve que les deux sont optimaux (le couplage est maximum et le transversal est minimum). On obtient donc que :

— Pour le premier graphe, le couplage maximum a taille 4.

— Pour le deuxième graphe, le couplage maximum a taille 3.

— Pour le troisième graphe, le couplage maximum a taille 4.



Exercice 88 : Pour chaque graphe dans la Figure 18, trouver un couplage parfait ou expliquer pourquoi un tel couplage n'existe pas.

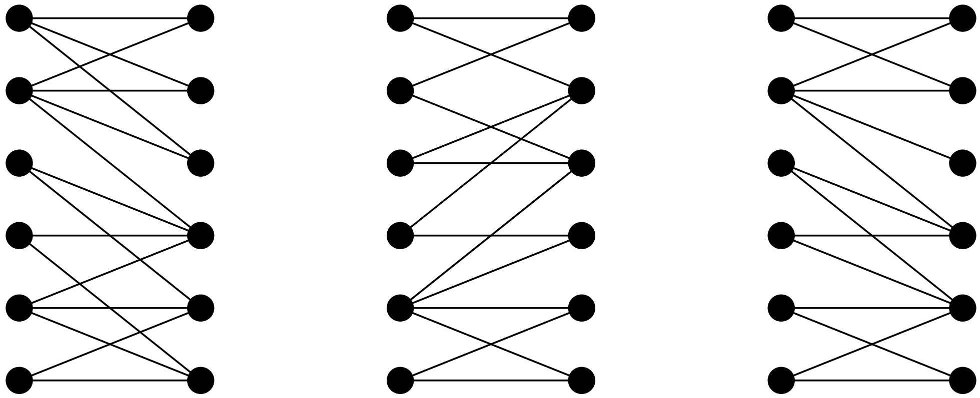
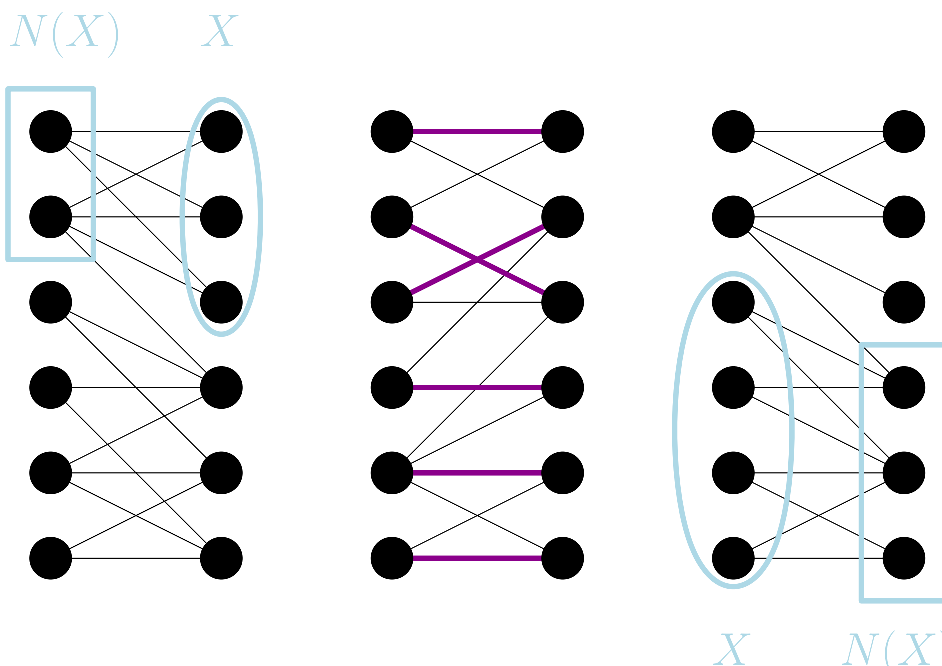


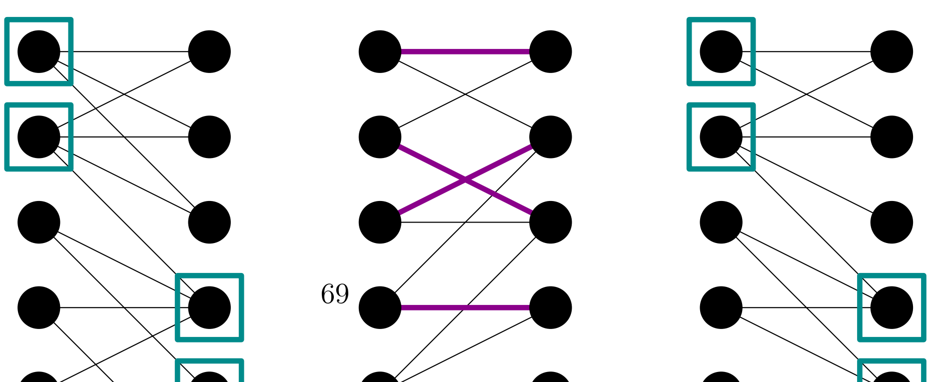
FIGURE 18 – Graphes



Pour chaque graphe biparti ci-dessous, on appelle A sa moitié gauche et B sa moitié droite.

1. Pour le premier graphe, on trouve un ensemble de sommets $X \subseteq B$ tel que $|N(X)| < |X|$ donc, par le théorème de Hall (ou par le lemme des mariages), il n'existe pas de couplage parfait.
2. Pour le deuxième graphe, on a trouvé un couplage parfait dessiné ci-dessus.
3. Pour le troisième graphe, on trouve un ensemble de sommets $X \subseteq A$ tel que $|N(X)| < |X|$ donc, par le théorème de Hall (ou par le lemme des mariages), il n'existe pas de couplage parfait.

Alternative : Autre réponse possible et valable.



Exercice 89 : (W. Bienia) Le graphe biparti de la Figure 19 est composé de 12 sommets (6 blancs et 6 noirs). Les 4 arêtes épaisses forment le couplage M.

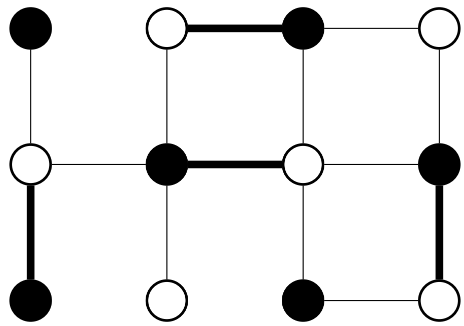


Figure 19 – Graphes

Question 1 – Montrez que M est un couplage maximal.

Question 2 – Appliquez la méthode vue en cours pour trouver un couplage maximum à partir de M

Question 3 – Donnez un certificat que le couplage obtenu est bien maximum.

Exercice 90 : (W. Bienia)

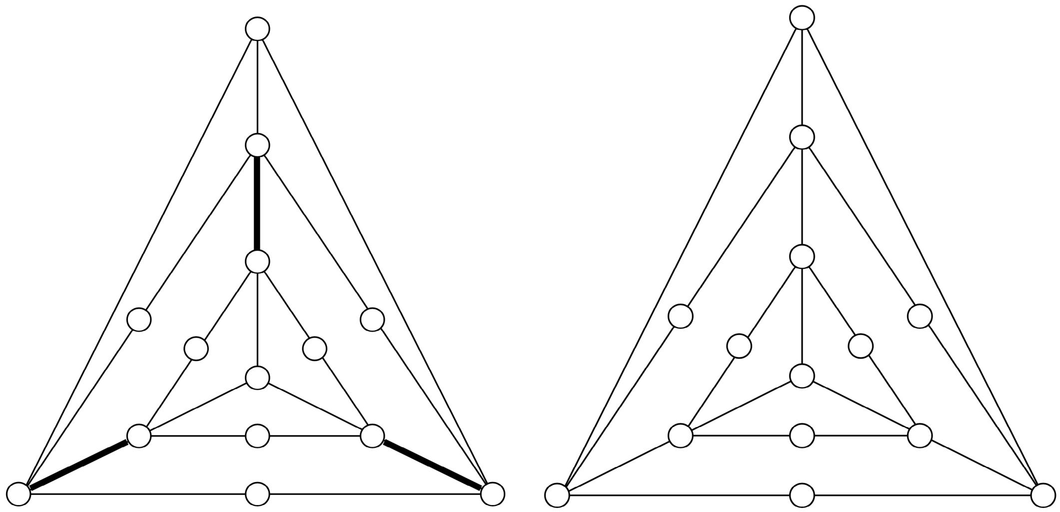


Figure 20 – Graphes

Question 1 – Justifiez que le graphe de la Figure 20 est biparti et que l'ensemble des arêtes épaisses forme un couplage maximal.

Question 2 – En appliquant la méthode vue en cours, à partir de ce couplage maximal, trouver un couplage maximum.

Question 3 – Donnez un certificat que le couplage obtenu est bien maximum.

Question 4 – Ce couplage est-il parfait ?

Exercice 91 :

Soit G un graphe biparti et k-régulier (tous les sommets sont de degré $k \geq 1$).

Question 1 – En utilisant le lemme des mariages, montrer que G a un couplage parfait.

> Comme $k|A| = \delta(A) = \delta(B) = k|B|$, on a $|A| = |B|$. Soit $X \subseteq A$. Grâce à la régularité de G, on a $|\delta(X)| = k|X|$. Chaque sommet dans $N(X)$ est de degré k, donc $|\delta(N(X))| = k|N(X)|$. Comme $\delta(X) \subseteq \delta(N(X))$, on a $k(X) = |\delta(X)| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|$. Donc, G a un couplage parfait par le lemme des mariages.

Question 2 – Déduire qu'on peut partitionner ses arêtes en k couplages parfaits.

> Par récurrence sur k. Le cas de base $k = 1$ est évident. Supposons que c'est vrai pour un entier $k \geq 1$, et soit G un graphe biparti $(k+1)$-regulier. Par la question précédente il existe un couplage parfait M_{k+1} dans G. Le graphe $G - M_{k+1}$ est k-régulier, donc il existe une partition de $E(G) - M_{k+1}$ en k couplages parfaits $M_1, \ldots, M_k$. Or, $M_1, \ldots, M_k, M_{k+1}$ est une partition de $E(G)$ en $k+1$ couplages parfaits, et le résultat et prouvé par récurrence.

Exercice 92 : **Cartes**

On distribue un jeu de 52 cartes en faisant treize paquets de quatre cartes chacun.

Question 1 – En utilisant le "lemme des mariages", expliquer pourquoi il est possible de prendre une carte de chaque paquet de telle façon qu'on termine avec treize cartes contenant toutes les valeurs (un as, un 2, et ainsi de suite jusqu'à un roi).

> Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti complet tel que $|A| = |B| = 13$. Les sommets de A représentent les treize paquets de quatre cartes, et les sommets de B représentent les treize valeurs (A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K). Ainsi une arête correspond) une carte. Pour prouver que $|N(X)| \geq |X|$, on va considérer un multigraphe biparti 4-régulier H, ou on met autant d'arêtes entre $a \in A$ et $b \in B$ que le nombre de cartes de valeur b dans le paquet a. On utilise le même argument que dans l'exercice précédent (avec $k = 4$) pour démontrer que $|N(X)| \geq |X|$ dans H. Évidemment, la même condition est valide dans le graphe G, donc on peut appliquer le lemme des mariages.

Exercice 93 : **Flotte de véhicules**

Une entreprise dispose d'une flotte de véhicules composée de 3 motos, 2 voitures, 1 camion et 2 quads, stockés dans un de ses parkings. Pour des raisons logistiques, elle doit déplacer d'un seul coup tous ses véhicules dans un autre parking. Huit collaborateurs se proposent pour conduire ces véhicules, mais ils n'ont pas tous le permis adéquat pour déplacer n'importe quel véhicule. Alice, Charlotte, David, François, Gaëlle et Hélène peuvent conduire les motos ou les voitures. Bob peut tout conduire. Éline peut conduire les voitures, les quads ou le camion (mais pas les motos). Aucun collaborateur n'aura le temps de faire plusieurs trajets entre les deux parkings.

Question 1 – Modéliser en termes de théorie des graphes (sur un graphe que vous définirez correctement) le problème consistant à savoir si l'entreprise peut déplacer tous ses véhicules simultanément grâce aux huit collaborateurs qui se sont proposés.

Question 2 – Résoudre le problème. Vous citerez le nom du théorème que vous utilisez pour répondre à la question.

Exercice 94 :

Considérons l'échiquier réduit de la Figure 21. On y a placé deux tours qui ne se menacent pas mutuellement.

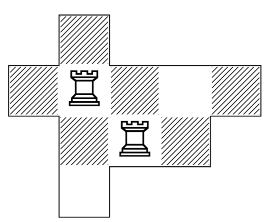


Figure 21 – Échiquiers

Quel est le nombre maximum de tours qu'on peut placer sur l'échiquier de sorte que les tours ne se menacent pas mutuellement ? Donnez un certificat d'optimalité.

Le nombre maximum est 3. C'est facile de trouver un placement de 3 tours (on les mets en diagonale sur les trois cases noires, à partir de la case tout en haut). Pour prouver que 3 est le nombre maximum, soit G le graphe biparti avec bipartition A, B tel que $C = \{a, \ldots, e\}$ est l'ensemble de colonnes de l'échiquier et $R = \{1, \ldots, 4\}$ est l'ensemble de rangées de l'échiquier, où $ij \in E(G)$ ssi la case (i, j) est dans l'échiquier. Notons que G est biparti.

Le nombre maximum de tours qui peuvent être placées sur l'échiquier correspond à $\nu(G)$. Par le théorème de König on a $\nu(G) = \tau(G)$, où $\tau(G)$ correspond au nombre minimum de colonnes et/ou rangées qui couvrent l'échiquier. Comme la colonne b et les rangées 2 et 3 couvrent l'échiquier, on a prouvé que 3 est bien le nombre maximum.

Exercice 95 : **Dominos**

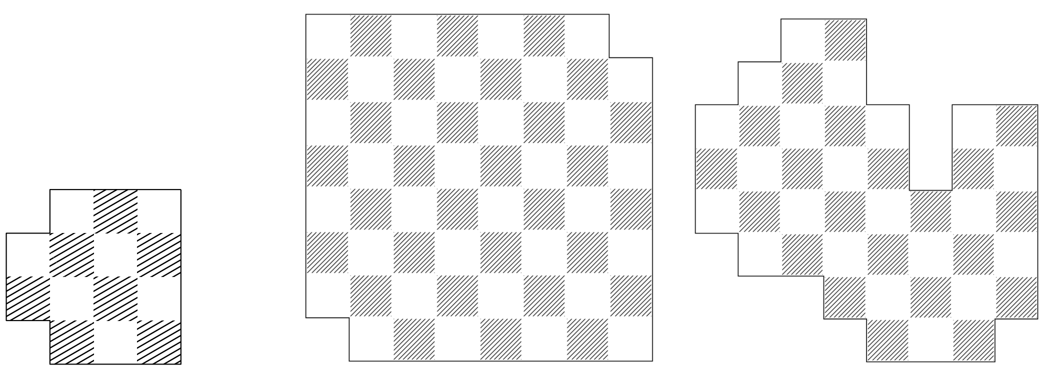
On se donne P un plateau obtenu à partir d'un échiquier (grille carrée alternant cases noires et blanches) auquel on a enlevé un certain nombre de cases (voir la figure ci-dessous pour des exemples de tels plateaux). Un domino est une figure qui occupe deux cases adjacentes (2×1 ou 1×2). On se demande si il est possible de paver P en dominos (c'est à dire recouvrir P tout entier, sans chevauchement, avec des dominos).

Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre. Indice : quelle que soit sa position, un domino couvre toujours une case blanche et une case noire.

On définit le graphe dont les sommets sont les cases de l'échiquier, et on relie deux sommets par une arête si les cases sont côte-à-côte dans l'échiquier. Une arête correspond donc à deux cases côte-à-côte, soit un placement possible d'un domino. Un placement de domino correspond à un couplage car les dominos ne se chevauchent pas (donc on ne prend pas deux arêtes qui touchent la même case). La question du pavage des dominos correspond donc à trouver un couplage parfait dans le graphe.

Question 2 – Le graphe obtenu par la méthode choisie dans la question précédente appartient-il à une classe de graphes particulière ? Si oui, cela aide-t-il à résoudre le problème de graphe choisi à la question précédente ?

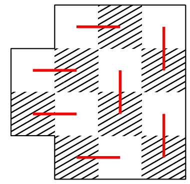
Le graphe ainsi obtenu est biparti (B, N) car on peut mettre d'un côté les cases blanches, disons B, et de l'autre les cases noires, disons N (deux cases de la même couleur ne sont jamais adjacentes). Cela aide pour trouver un couplage parfait (ou prouver qu'il n'en existe pas) car on peut utiliser le lemme des mariages (variante du théorème de Hall) et le théorème de König ($\nu(G) = \tau(G)$).



P_1 P_2 P_3

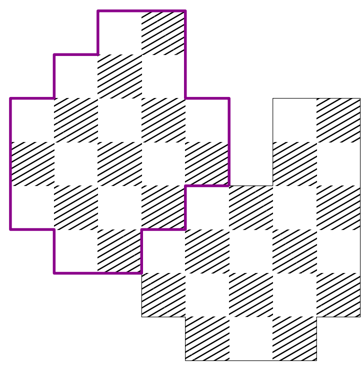
Question 3 – Répondre à la problématique pour le cas des plateaux P_1, P_2 et P_3 visibles sur la figure ci-dessus. Vous utiliserez les techniques de théorie de graphes appropriées pour le problème de graphes identifié dans les deux premières questions. *Remarque : étant donné la taille des instances, dessiner explicitement le graphe correspondant n'est peut-être pas la manière la plus simple de résoudre le problème.*

Pour P_1 : on dessine un pavage par domino, il existe bien un couplage parfait.



Pour P_2 : l'échiquier P_2 a 32 cases blanches et 30 cases noires, donc les deux côtés de la bipartition n'ont pas la même taille : par le lemme des mariages, il n'a pas de couplage parfait donc pas de pavage en dominos.

Pour P_3 : On peut noter que dans P_3 on a le même nombre de cases blanches que de cases noires, donc l'argument utilisé pour P_2 ne suffit pas. On rappelle le lemme des mariages : il y a un couplage parfait dans un graphe biparti G ssi $|B| = |N|$ et $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq B$. En termes de dominos, il existe un couplage parfait si et seulement si le nombre de cases blanches est égal au nombre de cases noires, et tout sous-ensemble X de cases blanches est adjacent à au moins $|N(X)|$ cases noires. Pourtant, dans P_3 il y a un sous-ensemble X de 11 cases blanches qui est adjacent à 10 cases noires seulement (voir le dessin ci-dessous : les 11 cases blanches dans la partie encadrée correspondent à X et les 10 cases noires dans cette même partie encadrée correspondent à $N(X)$).

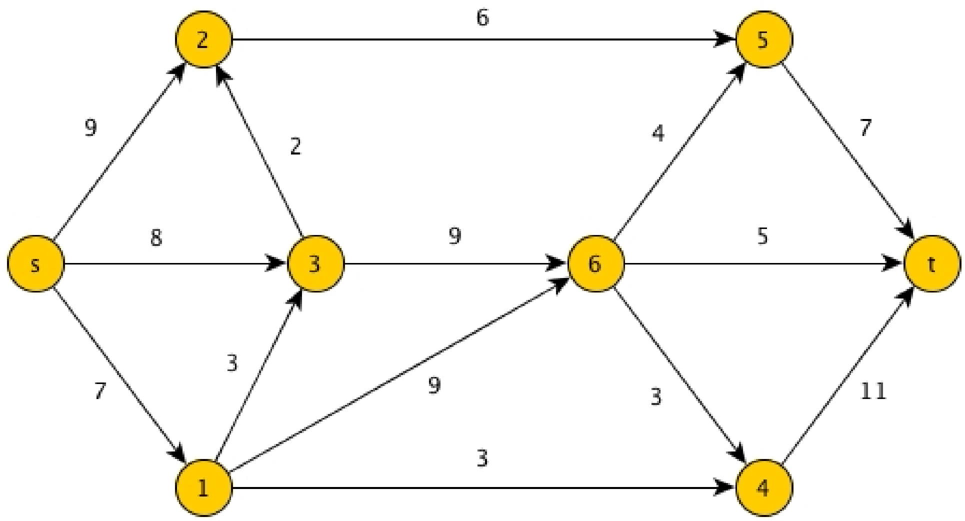


9 Flots

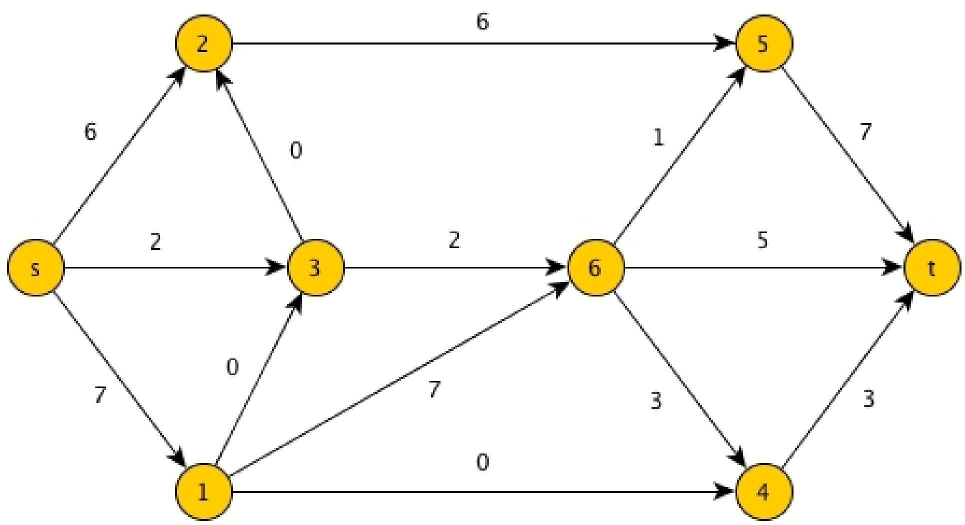
Des dessins de graphes vous sont fournis en section 10 pour faciliter la rédaction de vos réponses pour certains exercices.

<u>Exercice 96</u> : **Flot**

Le dessin ci-dessous représente un graphe avec les capacités sur les arcs.

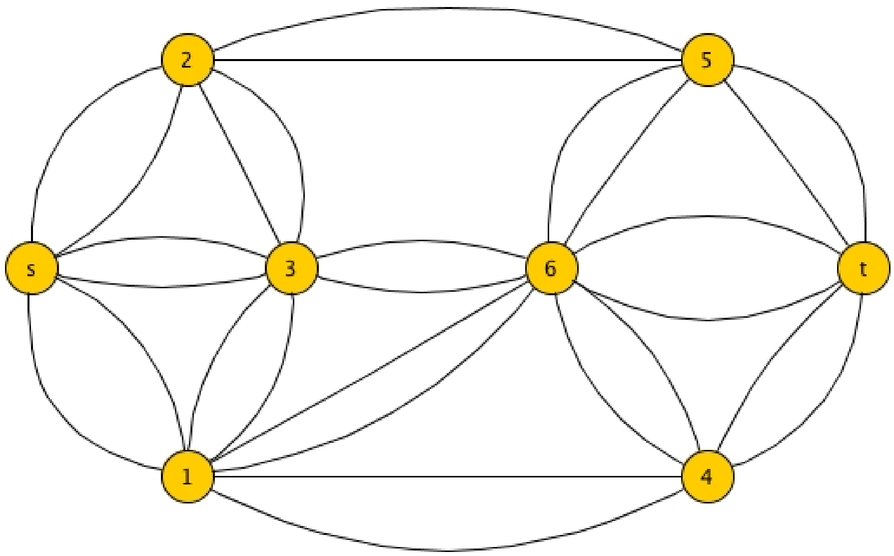


On a trouvé le flot f suivant



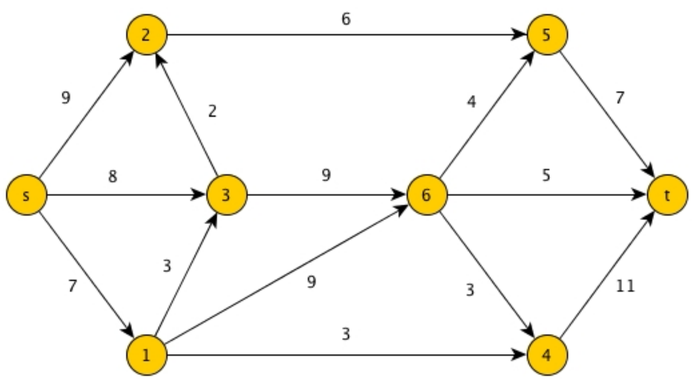
Question 1 – Vérifiez que f est bien un flot réalisable. Justifiez votre réponse et indiquez la valeur du flot.

Question 2 – Représentez le graphe résiduel correspondant à ce flot sur le dessin suivant. Vous indiquerez clairement pour chaque arête le sens de la flèche et la capacité résiduelle.

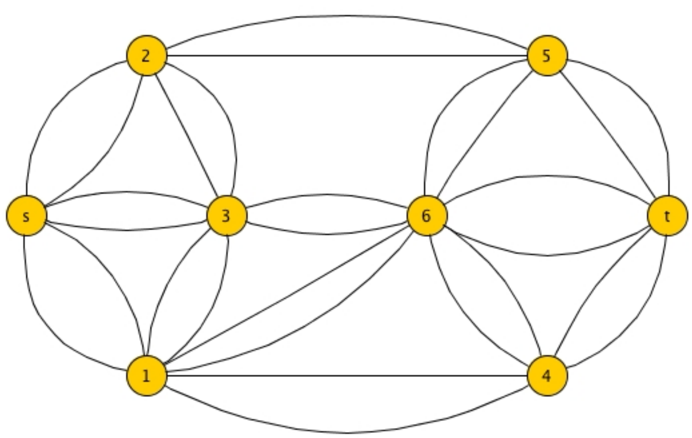


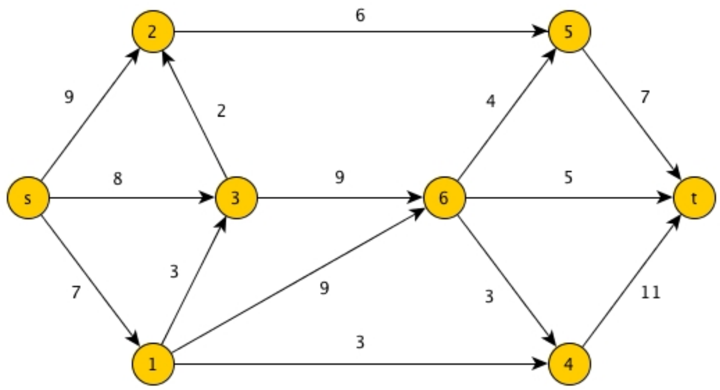
Question 3 – Représentez un st-chemin f-augmentant sur le graphe résiduel.

Question 4 – Donnez, sur le graphe suivant, la nouvelle valeur f' du flot. Les valeurs affichées sont les capacités des arcs.



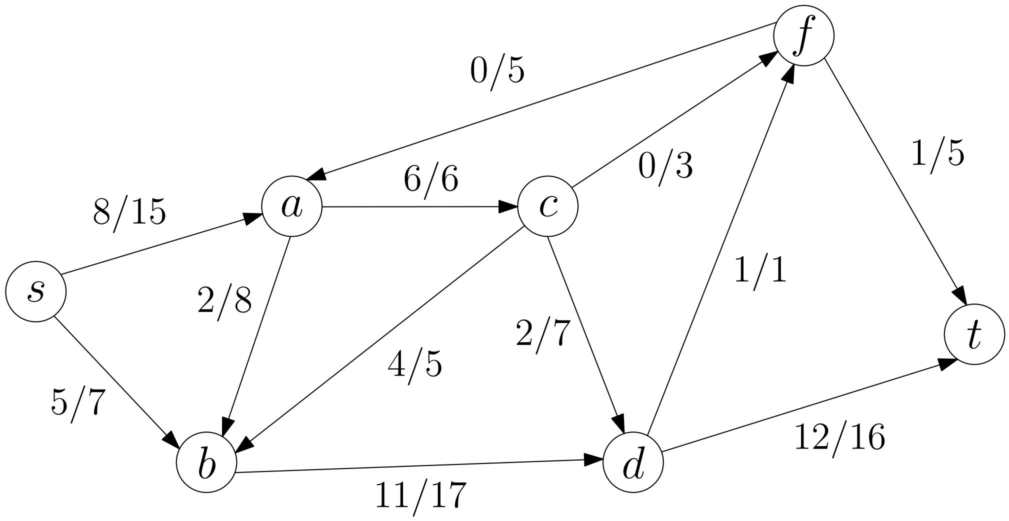
Question 5 – Est-ce que le flot f' est optimal ? précisez l'argument qui vous permet de justifier votre réponse sur l'un des deux graphes ci-dessous. Utilisez le graphe qui vous parait le plus pertinent.



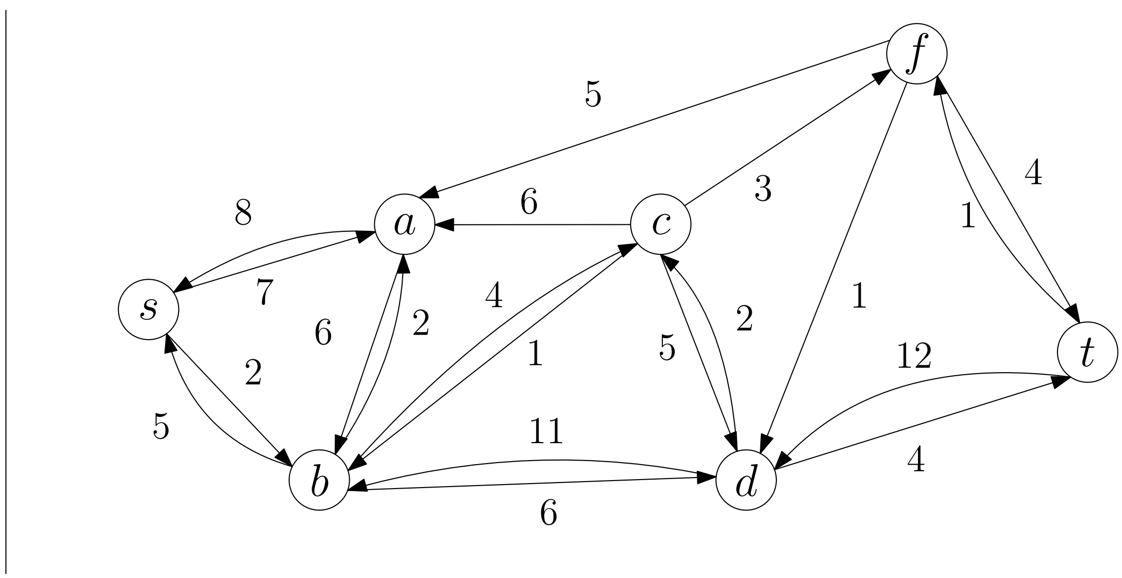

2
5
6
9
2
4
7
s
8
3
9
6
5
t
3
7
9
3
11
1
3
4

Exercice 97 : **Flot**

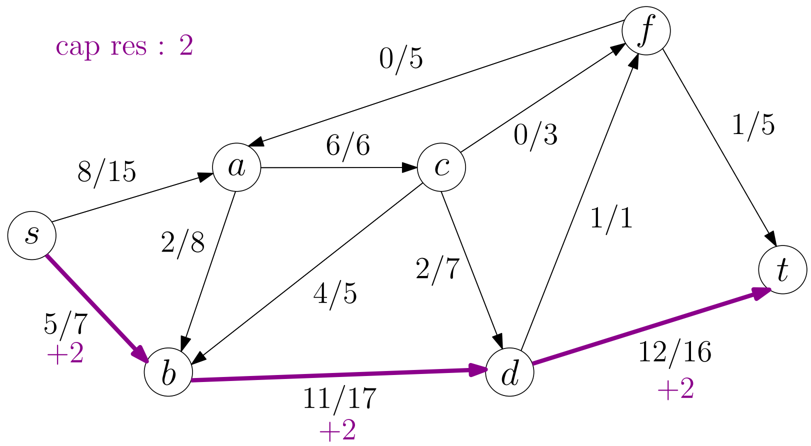
Sur le graphe G ci-dessous, on considère un réseau dans lequel on fait passer un flot entre les sommets s et t. Sur chaque arc sont indiquées la valeur du flot courant / la capacité de l'arc.

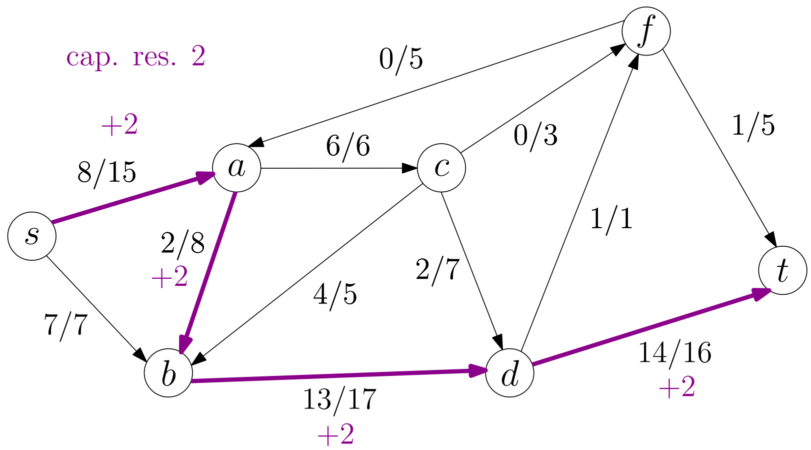


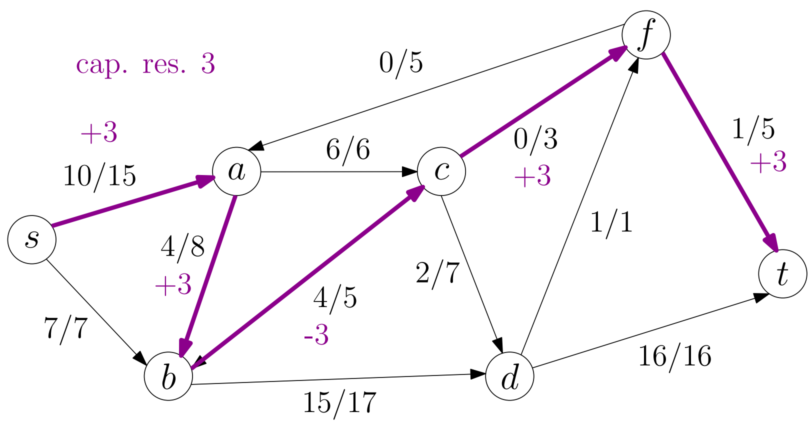
Question 1 – Dessiner, sur l'annexe ci-dessous, le graphe résiduel de G correspondant au flot fourni ci-dessus.

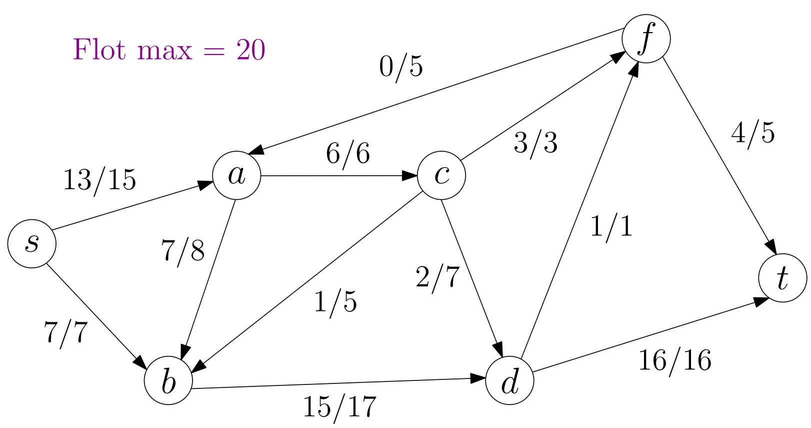


Question 2 – En prenant le flot fourni comme flot initial, appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour déterminer la valeur maximum d'un st-flot dans le graphe G ci-dessus. Vous donnerez les étapes de l'algorithme sur l'annexe et vous préciserez la valeur du flot obtenu (il peut y avoir plus de figures que nécessaire). Vous préciserez la valeur finale du flot obtenu sur chaque arc ainsi que la valeur totale du flot

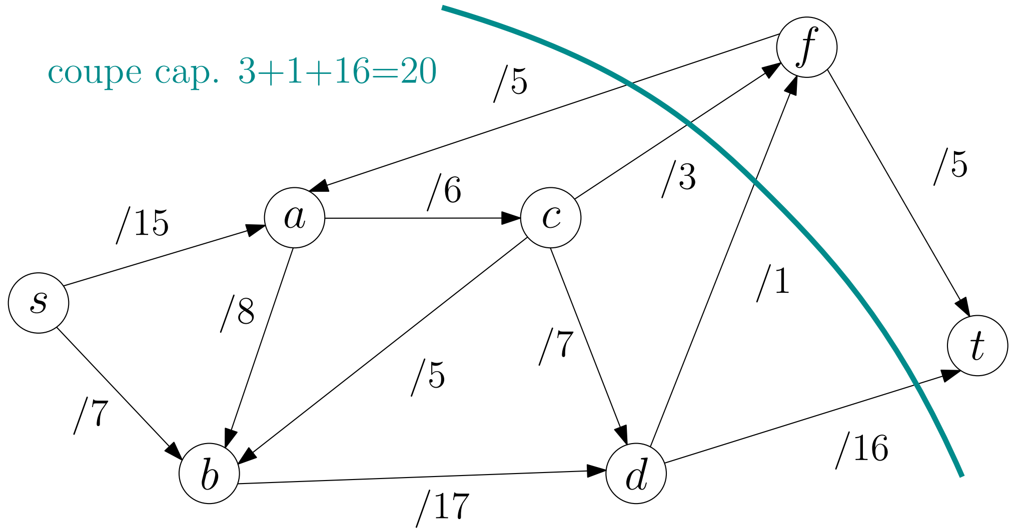

cap res : 2
0/5
1/5
0/3
6/6
8/15
2/8
1/1
2/7
4/5
5/7
+2
12/16
+2
11/17
+2


cap. res. 2
0/5
+2
1/5
0/3
6/6
8/15
1/1
2/8
+2
2/7
4/5
7/7
14/16
+2
13/17
+2


cap. res. 3
0/5
+3
10/15
6/6
0/3
+3
1/5
+3
1/1
4/8
+3
2/7
4/5
-3
7/7
16/16
15/17


Flot max = 20
0/5
4/5
3/3
6/6
13/15
1/1
7/8
2/7
1/5
7/7
16/16
15/17

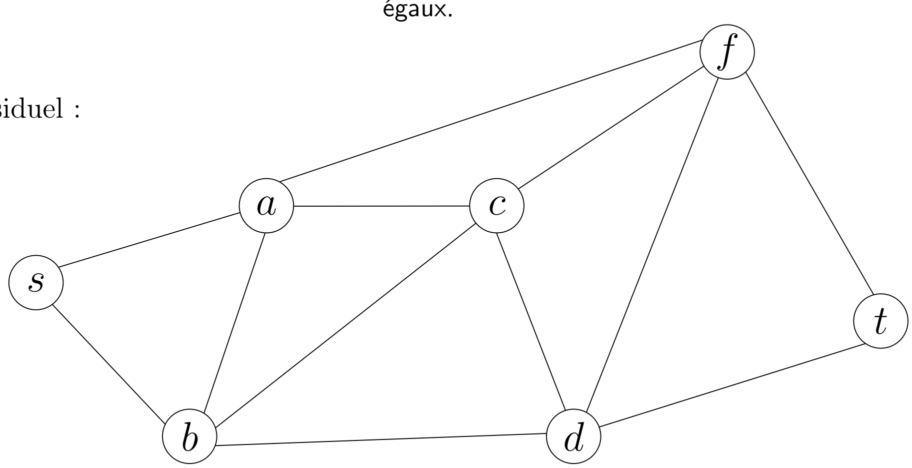
Question 3 – Donnez un certificat d'optimalité du flot que vous avez obtenu à la question précédente. Vous pourrez pour cela utiliser la Figure 22 sur l'annexe.



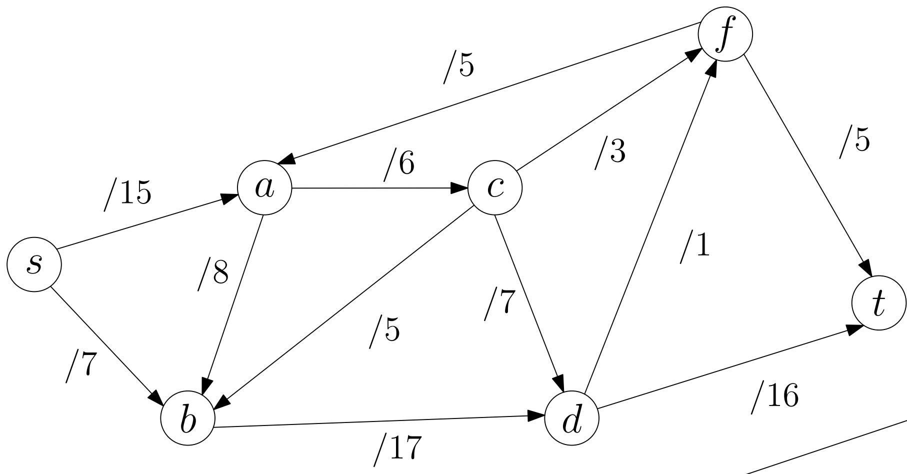
On trouve une coupe de capacité 20, ce qui prouve que notre flot de valeur 20 est optimal car ils sont égaux.

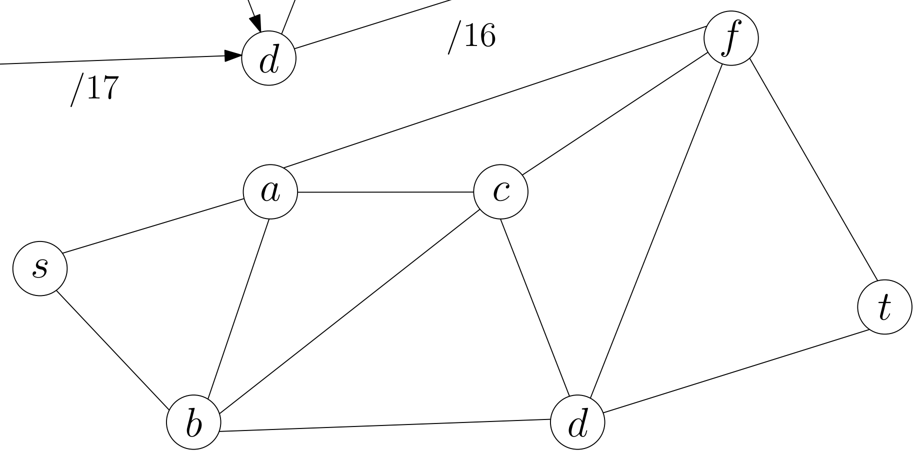
Fiche annexe

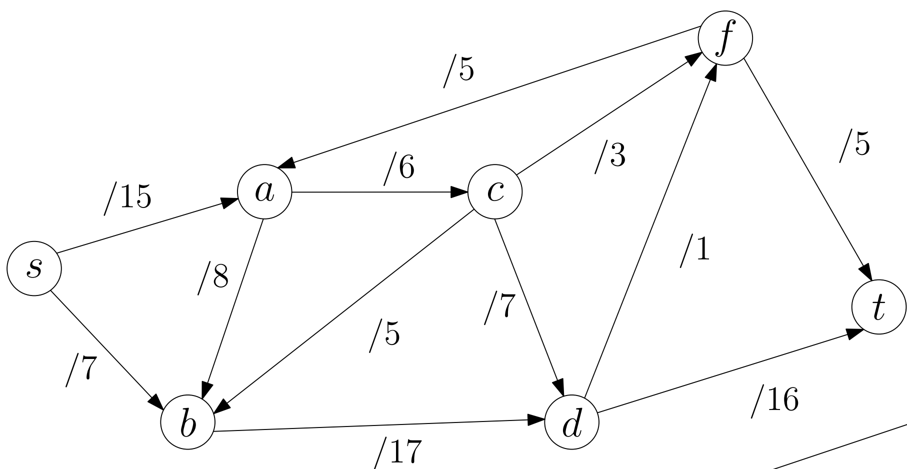
Question 1 - Graphe résiduel :

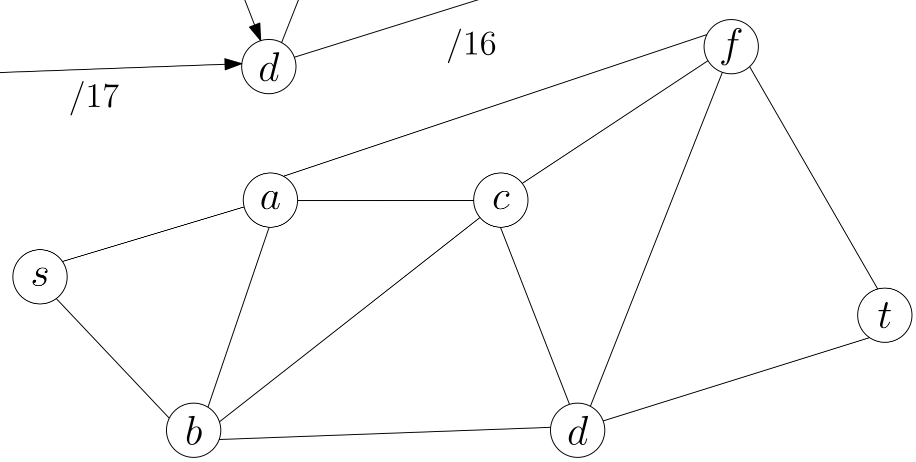


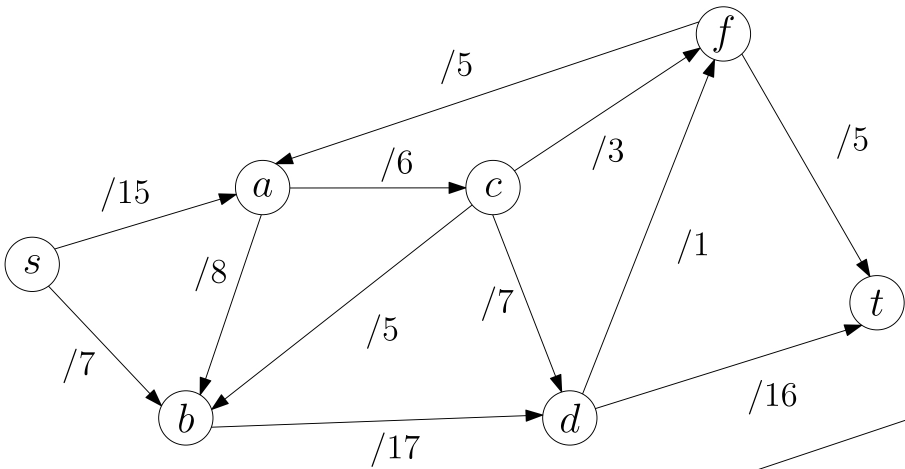
Question 2 - Autres étapes :



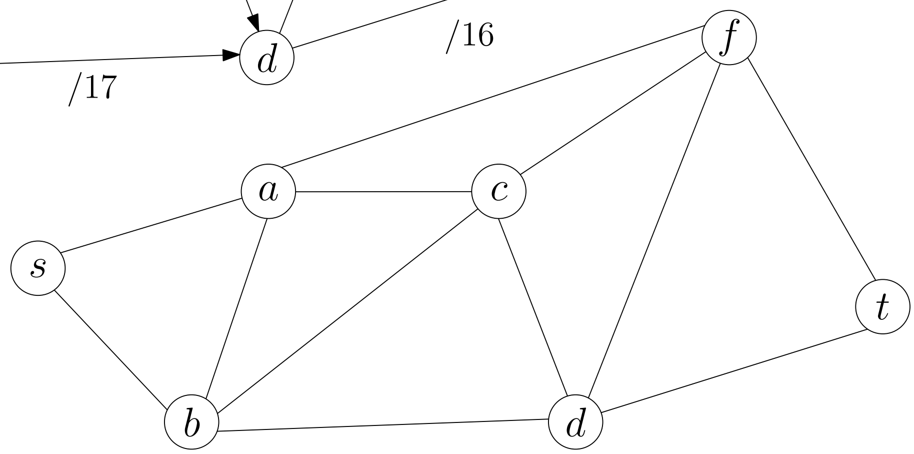




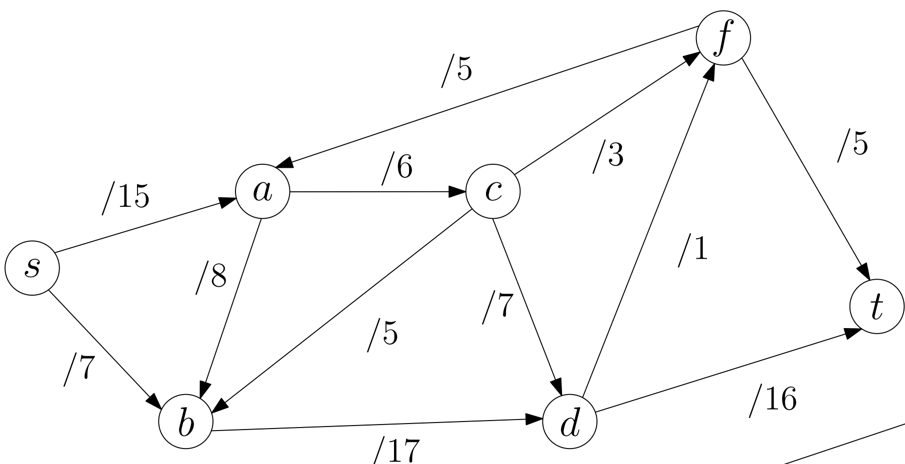




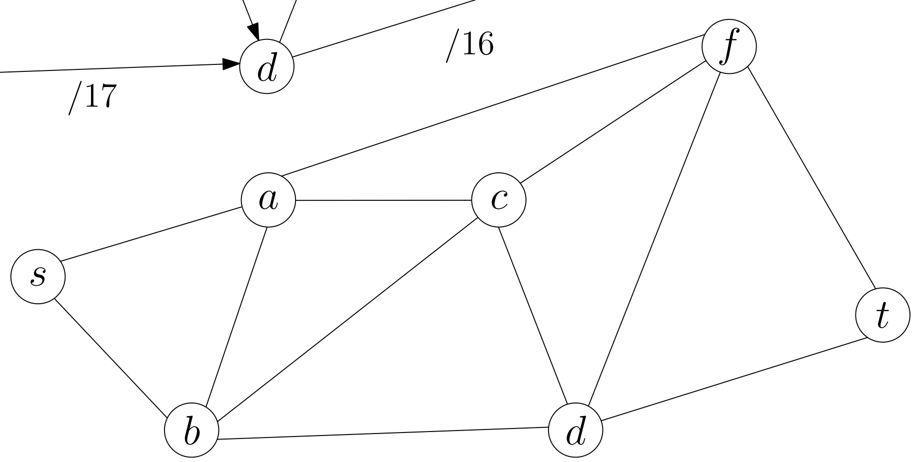
f
/5
/5
/3
/15
a
/6
c
s
/1
/8
t
/7
/5
/7
/16
b
d
/17



f
a
c
s
t
b
d



f
/5
/5
/3
/15
a
/6
c
s
/1
/8
t
/7
/5
/7
/16
b
d
/17



f
a
c
s
t
b
d

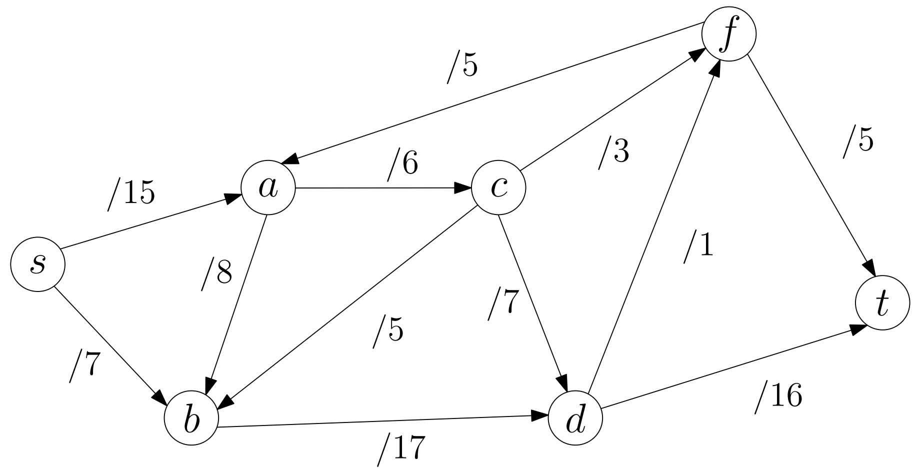
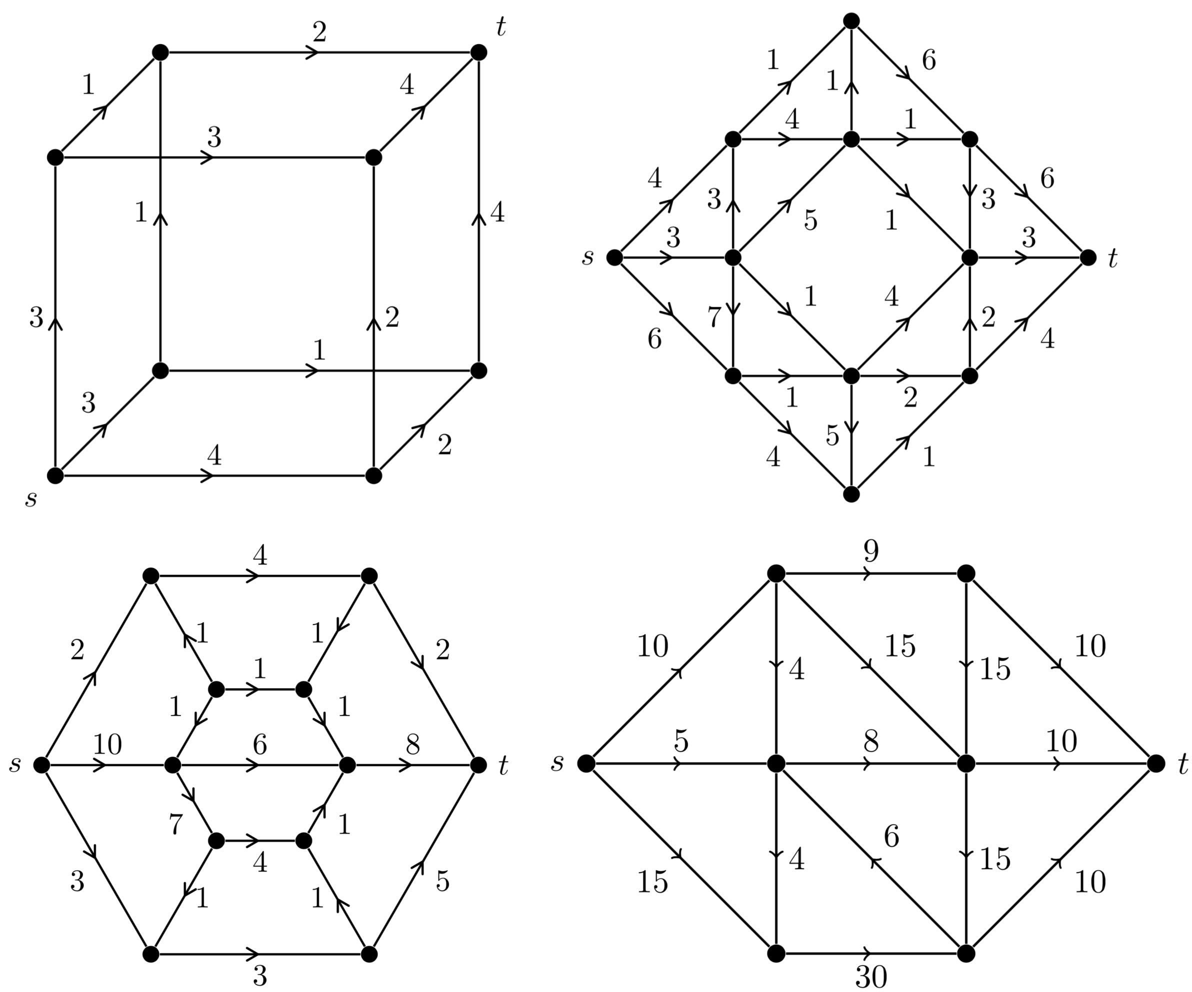


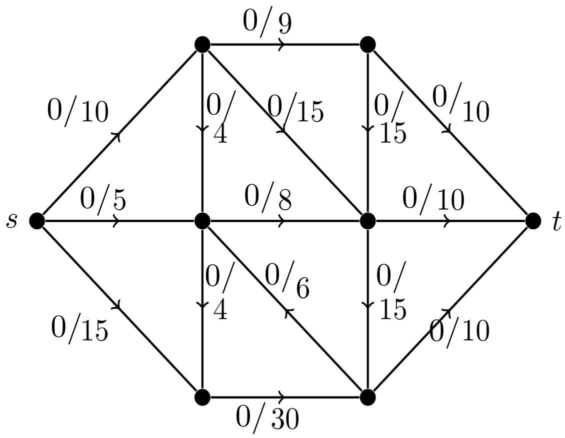
Figure 22 – Certificat d'optimalité

<u>Exercice 98</u> :

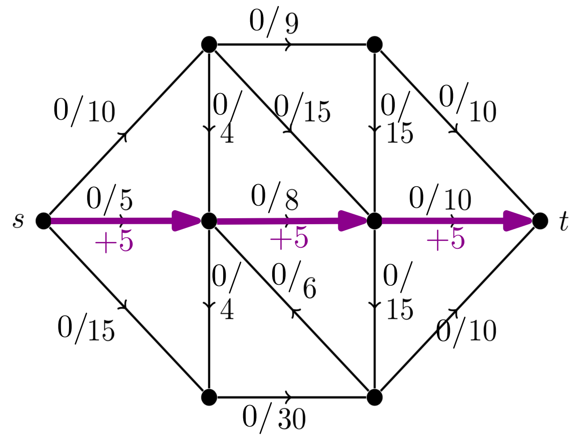
Utilisez l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum dans les graphes suivants. Vous prouverez pour chacun que la valeur du flot est bien maximum.



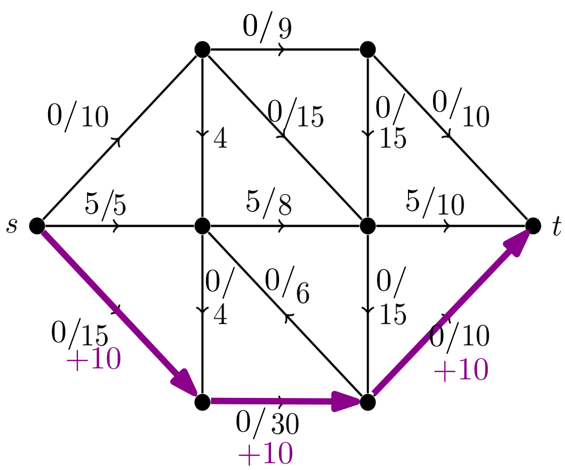
On donne ci-dessous les étapes de l'algorithme de Ford-Fulkerson pour l'un des graphes proposés. (On se permet de dessiner les chemins augmentants dans le graphe lui-même, sans dessiner le résiduel à chaque fois, en suivant la règle suivante : un arc $u \to v$ à flot nul ne peut être pris que dans le sens $u \to v$, un arc saturé $u \to v$ ne peut être pris que dans le sens inverse $v \to u$, et un arc ni saturé ni à flot nul peut être pris dans les deux sens.)



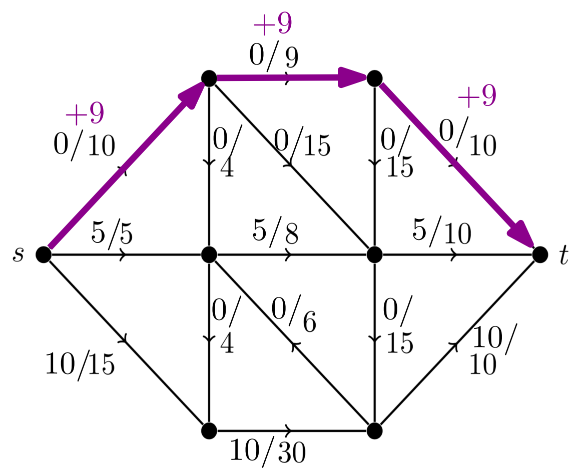
Flot actuel : 0



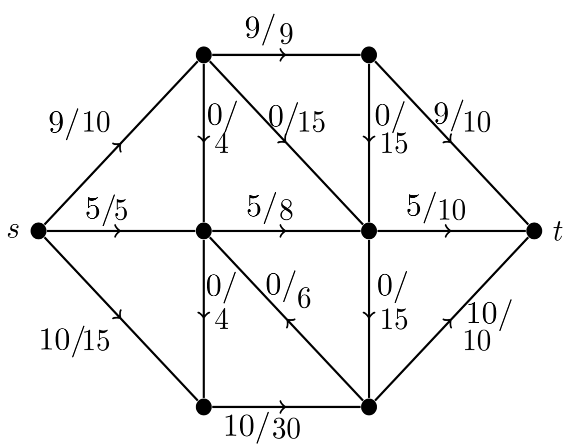
Flot actuel : 0 +5



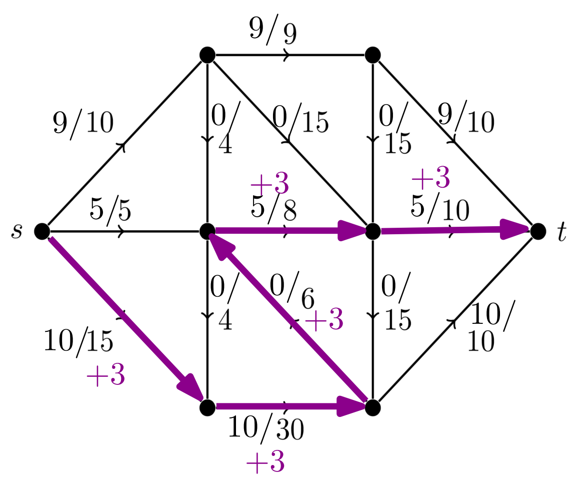
Flot actuel : 15 +10



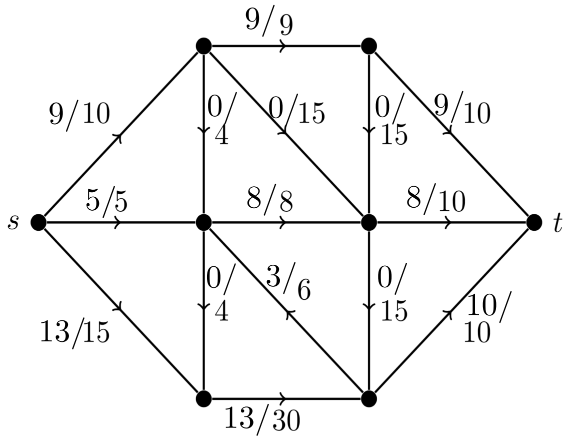
Flot actuel : 15 +9



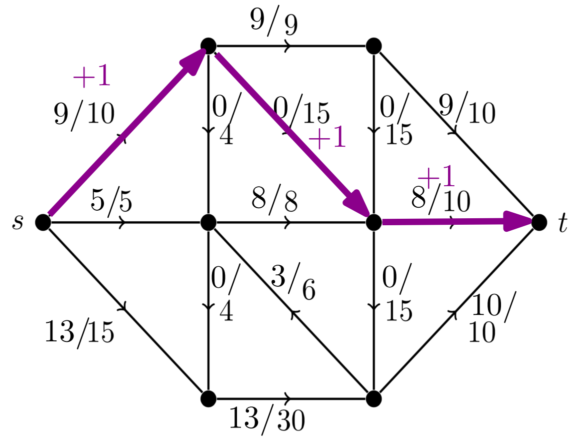
Flot actuel : 24



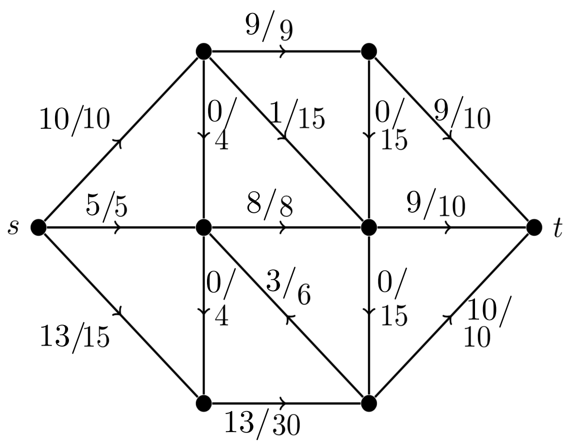
Flot actuel : 24 +3



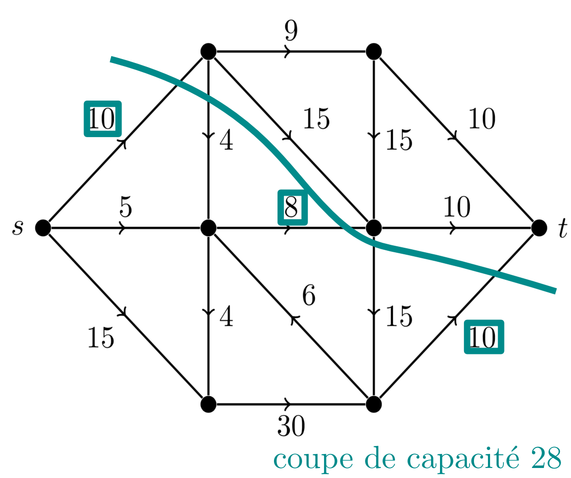
Flot actuel : 27



Flot actuel : 27 +1



Flot actuel : 28



Sur les deux derniers dessins : on trouve d'une part un flot de valeur 28, et d'autre part une coupe de valeur également 28, ce qui prouve que les deux sont optimaux.
Remarque : pour trouver la coupe, on a mis à gauche de la coupe les sommets accessibles depuis s dans le graphe résiduel, et à droite les autres.

Exercice 99 : **embouteillages en ville**

Un grand nombre de personnes venant de la vallée du Grésivaudan par l'A41 rejoignent chaque matin la porte de France afin de prendre l'autoroute E711 en direction de Lyon. Tous les matins, Grenoble subit des congestions importantes.

On veut donc optimiser ce réseau routier. Pour cela, on veut estimer sa capacité.

On choisit comme mesure la quantité de voitures qui arrivent du Grésivaudan à l'entrée de Grenoble juste avant le stade par unité de temps.

Question 1 – De quelques données a-t-on besoin ?

Question 2 – Décrivez précisément le problème que l'on souhaite résoudre

Exercice 100 : **Canalisations** (Jean-François Culus)

Une usine comporte généralement un gros réseau de canalisations, transportant l'eau d'une source unique (le point d'arrivée d'eau) vers une sortie unique : le tout à l'égout. Lors d'une extension de l'usine, on raccorde les anciennes canalisations aux nouvelles, augmentant donc les débits de certaines canalisations, jusqu'à saturation de certaines d'entre elles. On souhaite alors remplacer certaine de ces canalisation afin d'augmenter le flot global de l'usine.

Le but du problème est donc de savoir quelles sont les canalisations saturées qu'il serait souhaitable de remplacer par de nouvelles canalisations plus importantes.

Question 1 – Modélisez comme un problème de graphe

Exercice 101 : **Acheminement du pétrole**

La compagnie pétrolière Inti T'schouff souhaite acheminer du pétrole par oléoduc vers un pays client. Le réseau d'oléoduc comporte plusieurs tronçons, chacun ayant une capacité maximale (en débit) à ne pas dépasser. Les tronçons sont directionnels. Sur le graphe de la Figure 23, la compagnie pétrolière est représentée par le cylindre, le client par le jeton. La capacité maximale de chaque arc est indiquée.

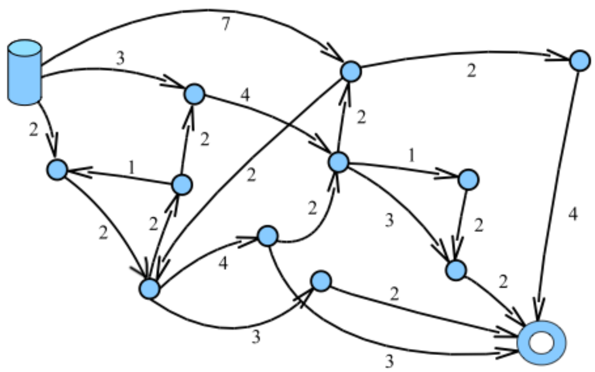


Figure 23 – Réseau d'Oléoduc

Question 1 – Quel est le débit maximum que la compagnie pétrolière peut envoyer vers le client via le réseau ?

Exercice 102 : **Bons et mauvais algorithmes de chemin augmentant**

On considère le réseau de transport de la Figure 24.

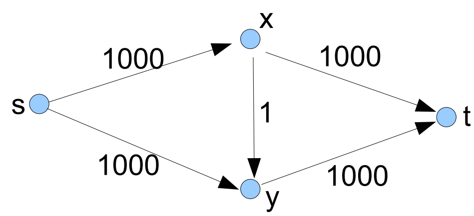


FIGURE 24 – Selon la façon dont on choisit les chemins augmentants, le nombre d'itérations de l'algorithme de Ford et Fulkerson sur cet exemple peut varier de 2 à 2000.

Question 1 – Quel est la valeur d'un (s,t)-flot maximum dans le réseau ci-dessus ? Justifiez.

Question 2 – Montrez que l'algorithme de Ford et Fulkerson peut terminer en deux itérations seulement.

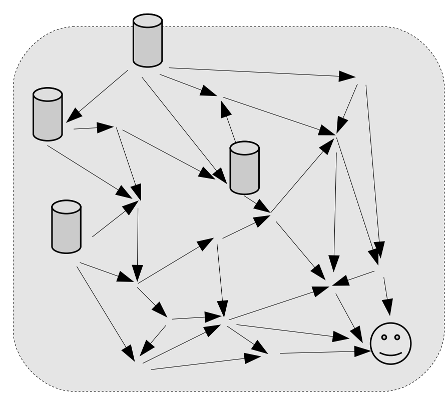
Question 3 – Montrez comment l'algorithme de Ford et Fulkerson peut, en faisant des choix de chemins augmentants particulièrement peu perspicaces, terminer en 2000 itérations.

On peut démontrer qu'une "bonne" façon de choisir des chemins augmentants est de choisir un chemin augmentant empruntant un nombre minimum d'arcs. Autrement dit à la première itération on choisirait ici soit le chemin s, x, t soit le chemin s, y, t, mais en aucun cas le chemin s, x, y, t.

Question 4 – Donnez un algorithme permettant de trouver un tel chemin augmentant.

Exercice 103 : **Flots multi-sources**

On considère un producteur de pétrole qui possède plusieurs sites de production et souhaite livrer à un client du pétrole via un réseau d'oléoducs. Chaque oléoduc est directionnel et possède une capacité maximum (en litres par unité de temps). Le pétrole est considéré comme étant le même à chacun des sites de production, nous cherchons à savoir quelle quantité maximum de pétrole nous pouvons envoyer du producteur (tous sites de production confondus) vers le consommateur (voir Figure ci-contre). Le problème est donc très proche du problème du flot maximum, à ceci près que nous avons plusieurs sources et non une seule.

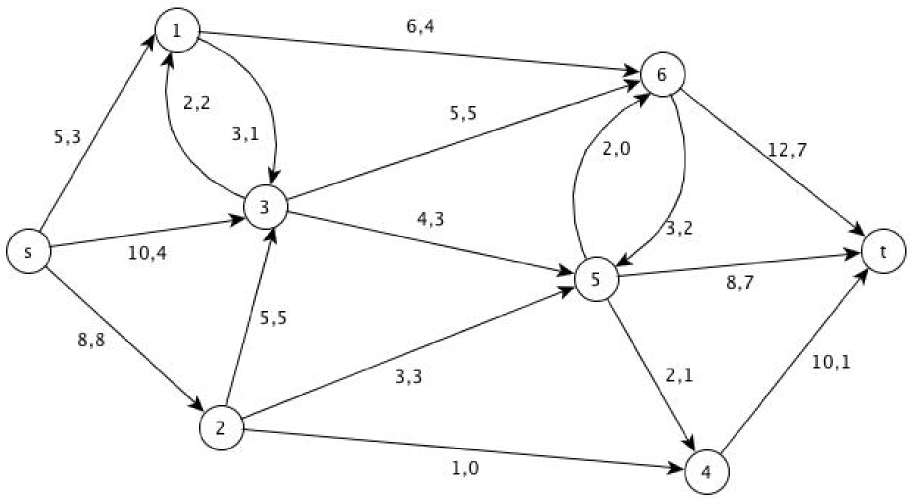


Question 1 – Expliquez comment modéliser ce problème par un problème de flot maximum.

Question 2 – Même questions si on considère maintenant que le producteur a plusieurs sites de production et le consommateur plusieurs sites où il peut réceptionner le flux.

Exercice 104 : (Gerd Finke)

Le réseau ci-dessous décrit l'évacuation de l'eau pluviale de S vers T dans une région après un orage. Les paires de nombres sur les arcs représentent les capacités et les flots d'eau pluviale des canalisations. Par exemple, l'arc $(1, 6)$ a une capacité de 6 unités et il y a un flot de 4 unités qui le traverse.



Question 1 – Est-ce que le réseau est saturé, c'est-à-dire le flot d'eau de 15 unités est-il le maximum que le réseau peut supporter ? Sinon, trouver le flot maximum et déterminer une coupe de capacité minimale.

Question 2 – Le canal (2, 3) est bouché. Quelle est la nouvelle valeur du flot maximum ?

On a réussi à déboucher le canal (2,3). On souhaite augmenter le flot et l'on envisage une expansion de la capacité de l'arc (2, 5). On discute actuellement une augmentation de 1 unité ou, à un coût supplémentaire, de 2 unités.

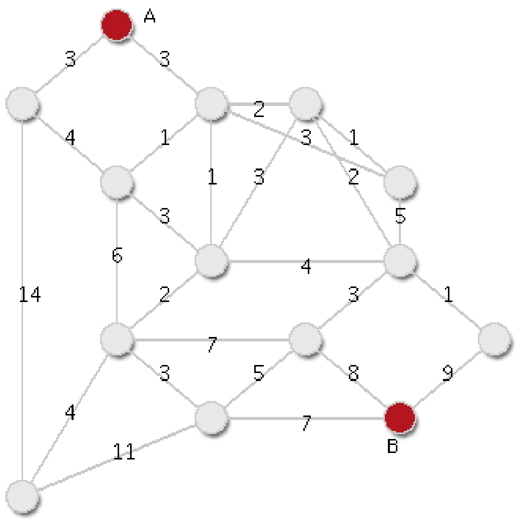
Question 3 – Quelle est votre recommandation ? Justifiez !

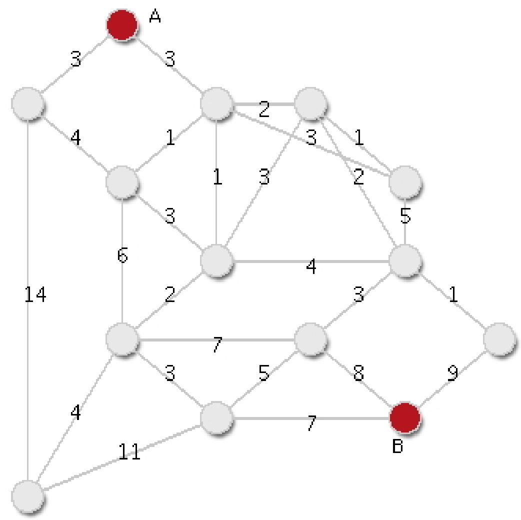
Retournons aux données initiales. Le flot total qui peut traverser le point 5 est limité à 7 unités.

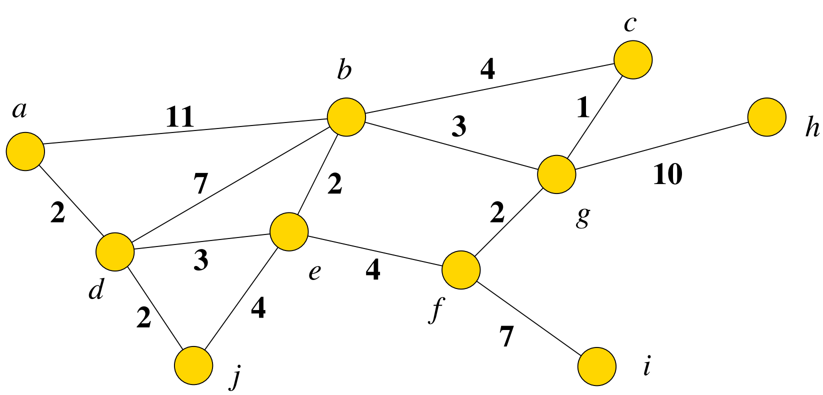
Question 4 – Transformez le réseau en forme standard (capacités uniquement sur les arcs) et trouvez le nouveau flot maximum et une coupe minimale.

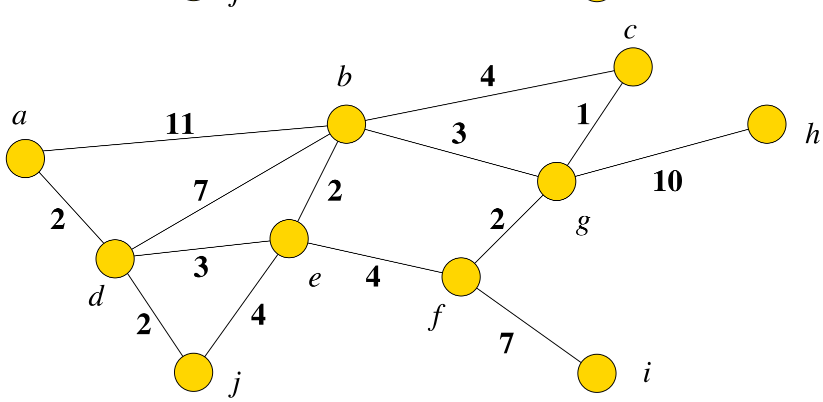
10 Dessins de graphes

Graphes pour exercices sur les plus courts chemins

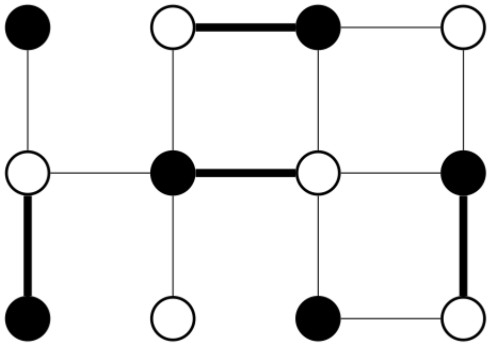


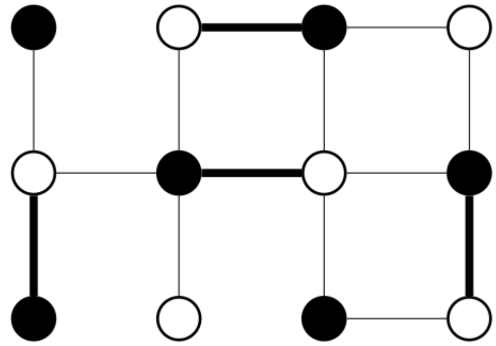


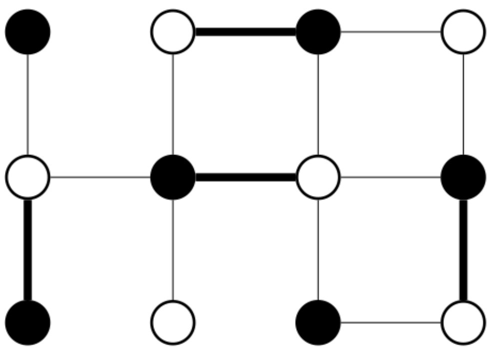


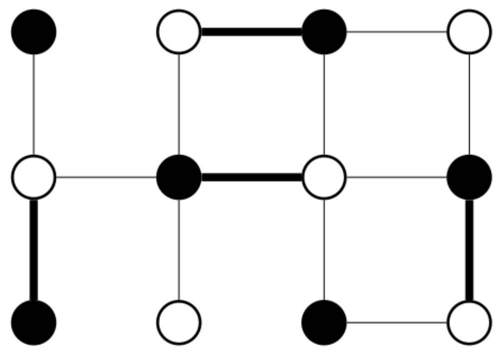


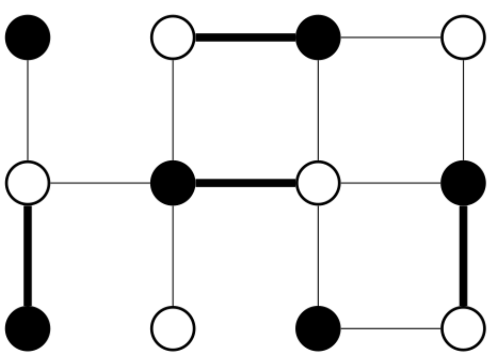
Graphes pour exercices sur les couplages

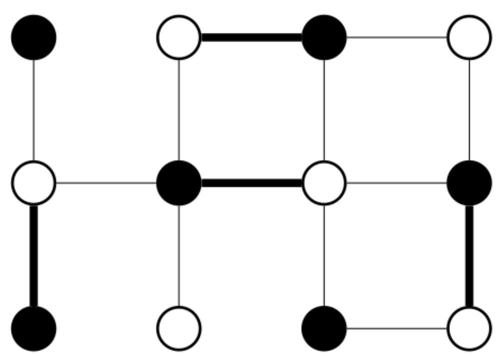


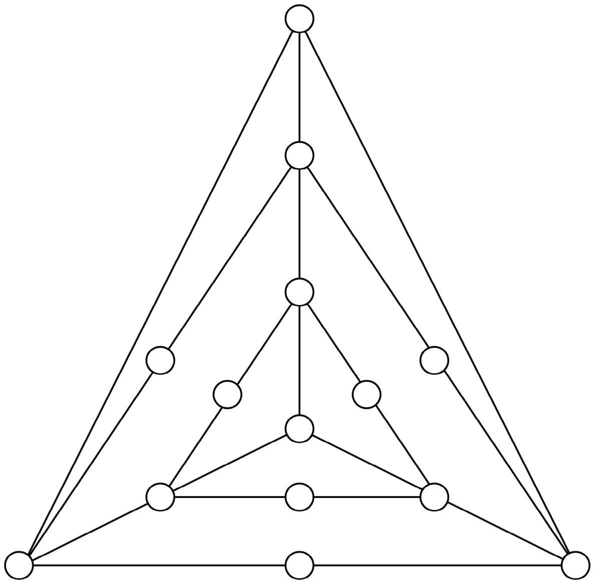
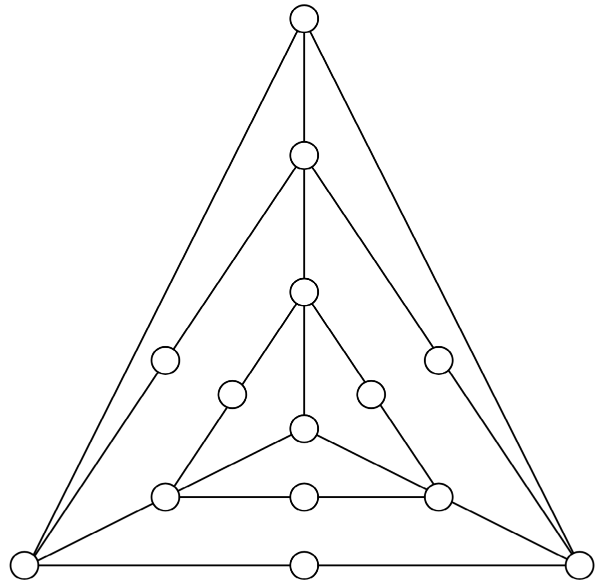
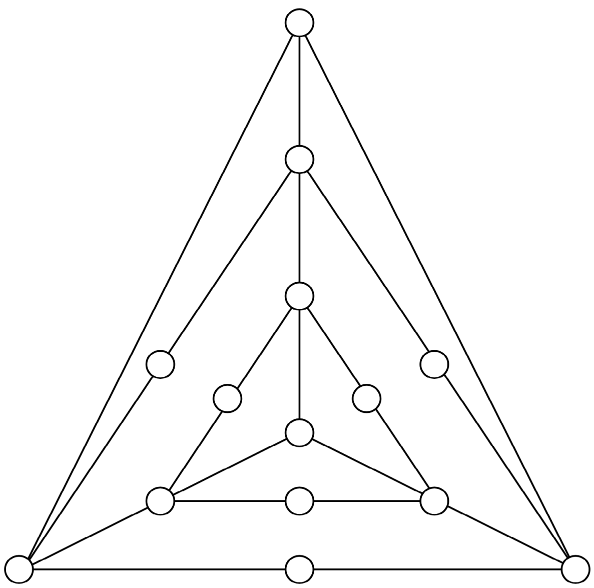
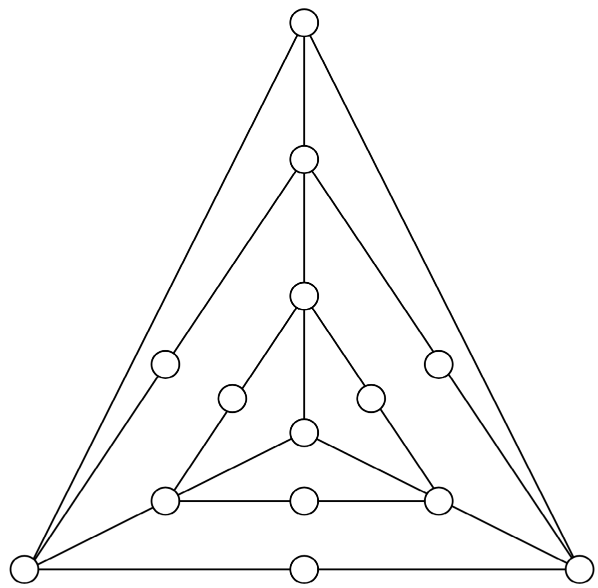
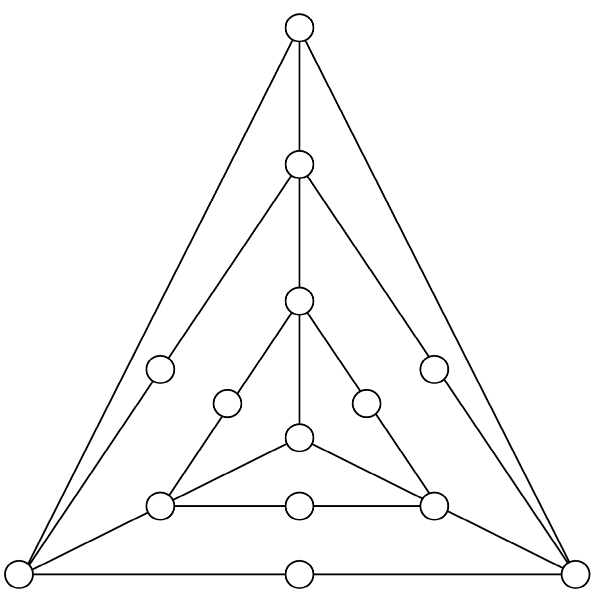
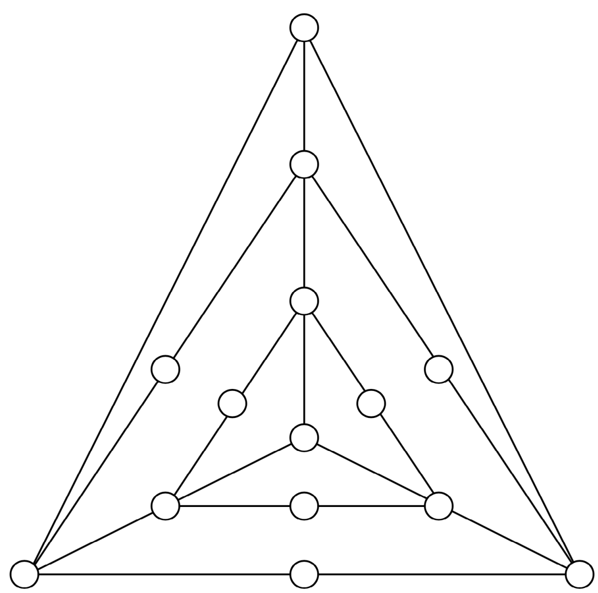




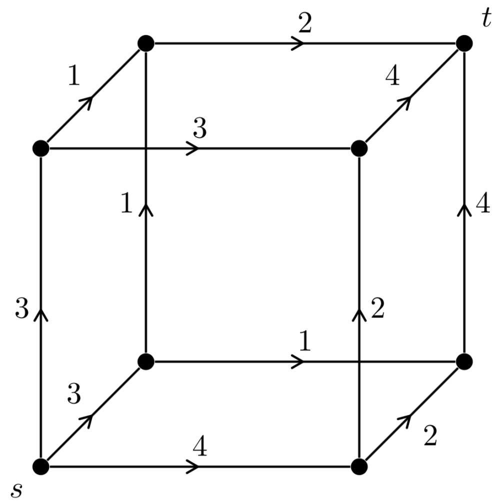


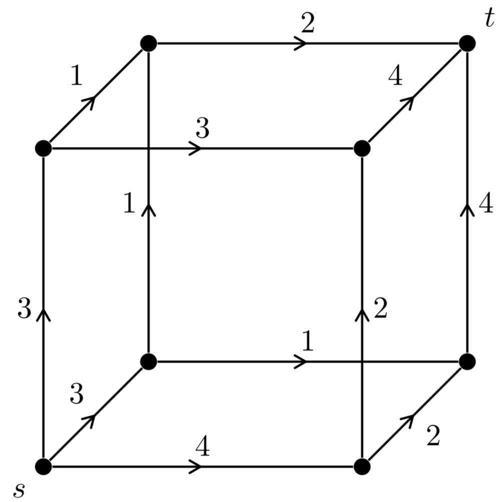


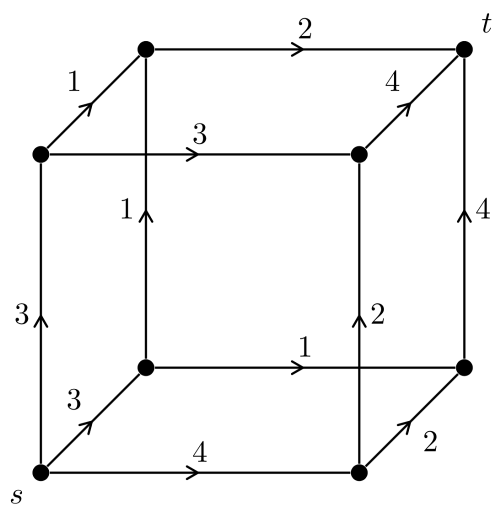


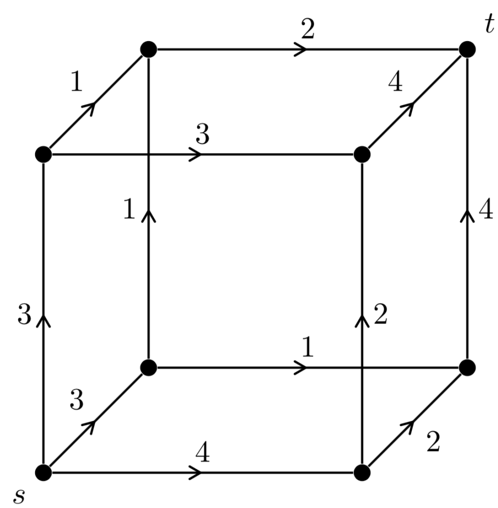







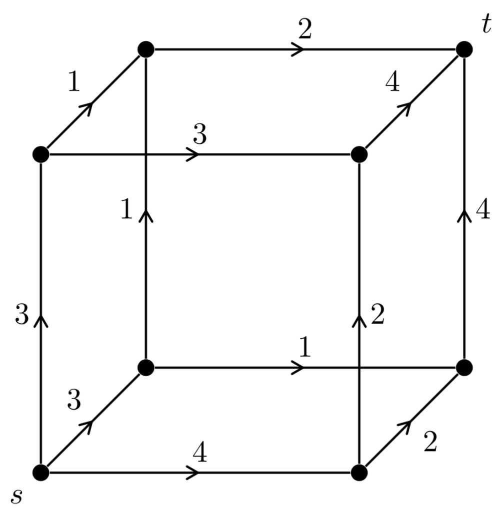
Graphes pour exercices sur les flots

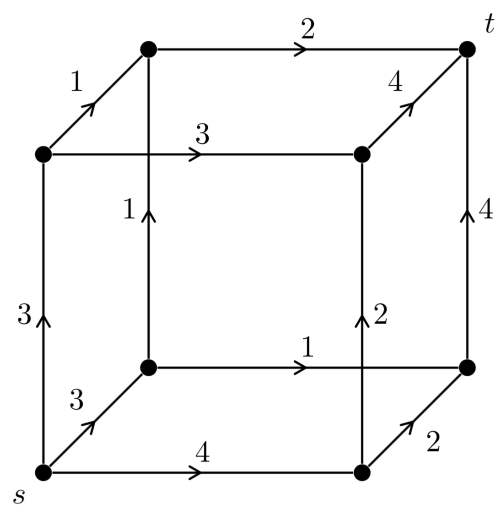


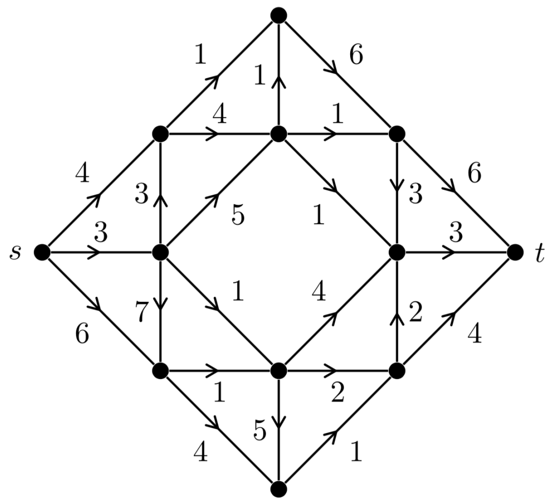


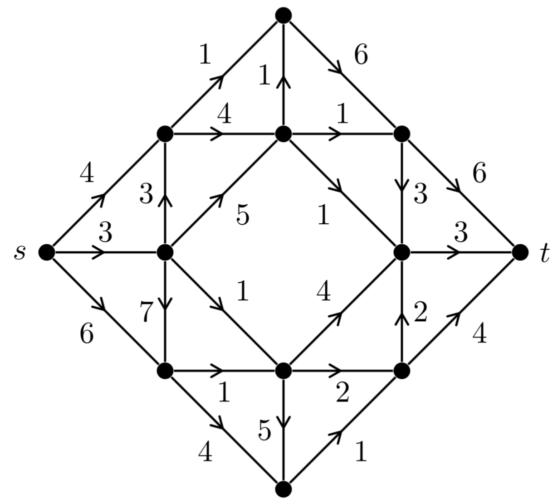


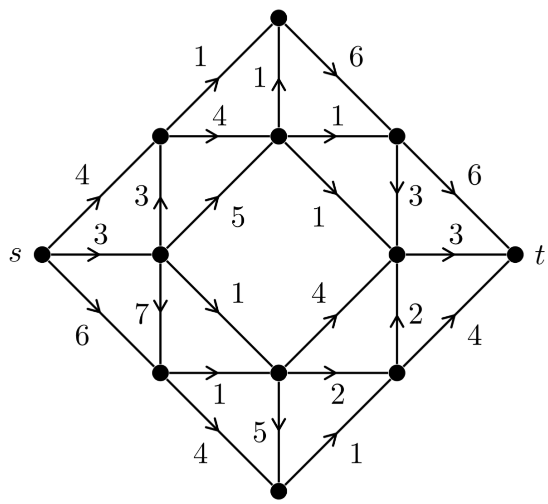


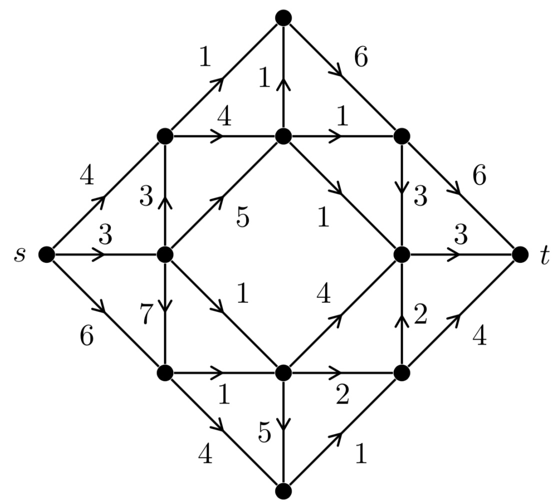


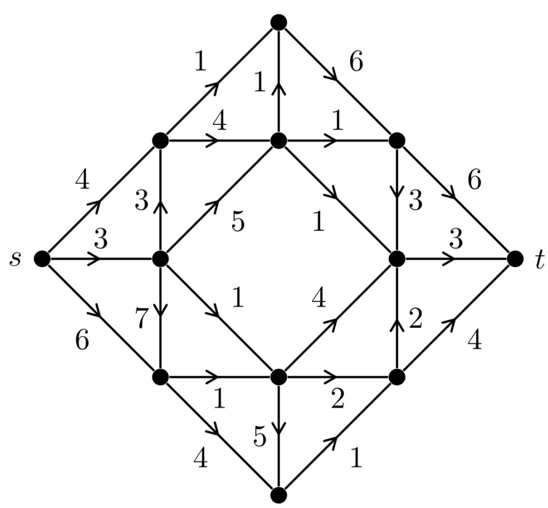


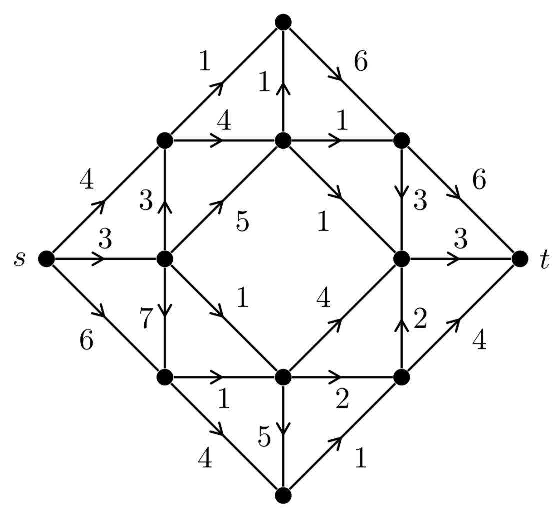

1
6
1
4
1
4
3
3
6
5
1
s
3
3
t
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

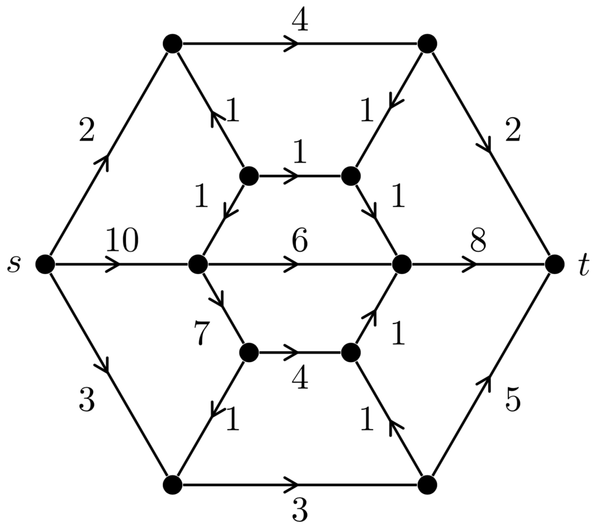

1
6
1
4
1
4
3
3
6
5
1
s
3
3
t
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

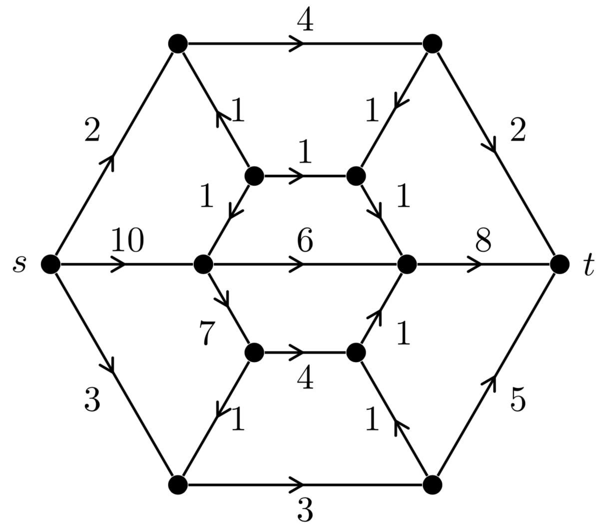

1
6
1
4
1
4
3
3
6
5
1
s
3
3
t
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

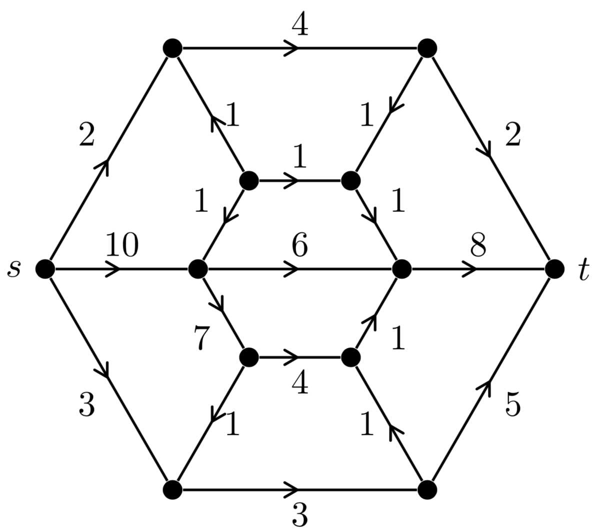

1
6
1
4
1
4
3
3
6
5
1
s
3
3
t
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

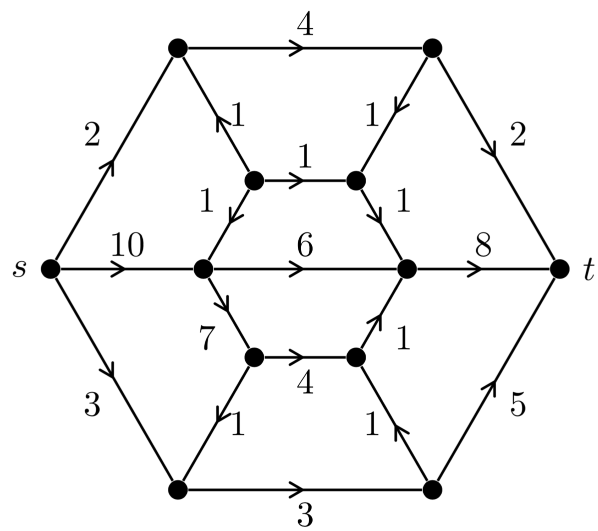

1
6
1
4
1
4
3
3
6
5
1
s
3
3
t
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

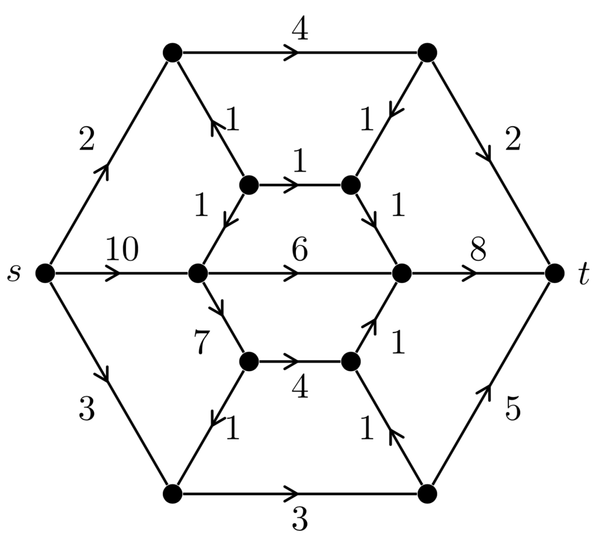

1
6
1
4
1
4
3
3
6
5
1
s
3
3
t
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

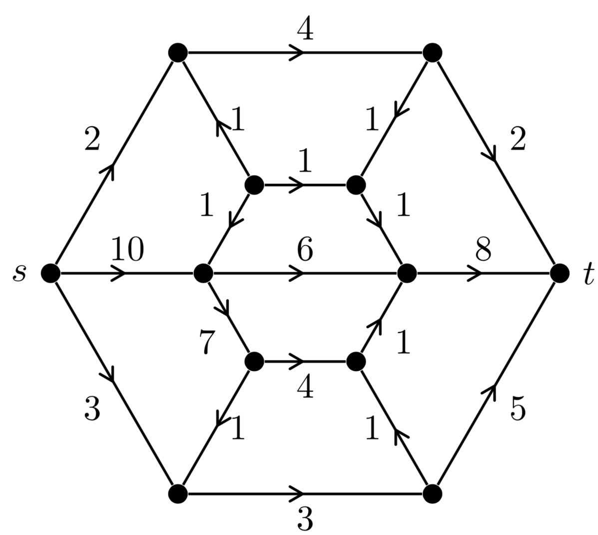

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
3
4
5
1
1
3

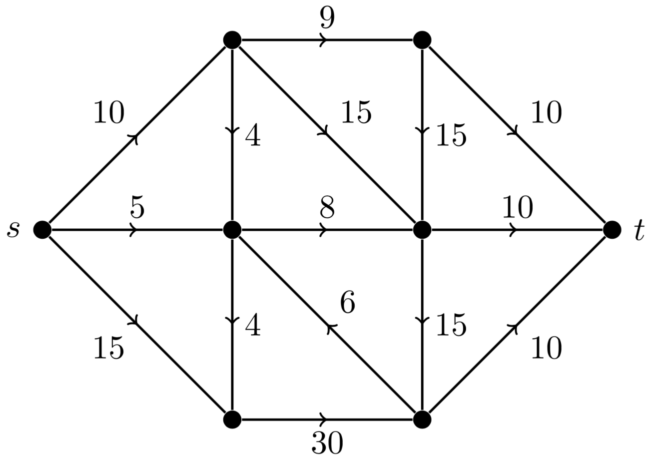
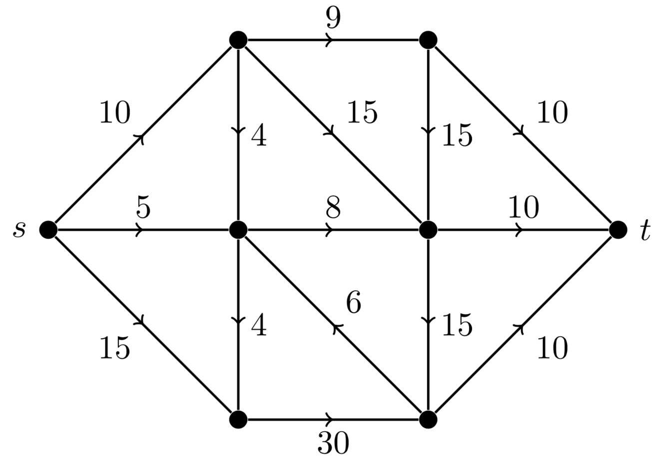
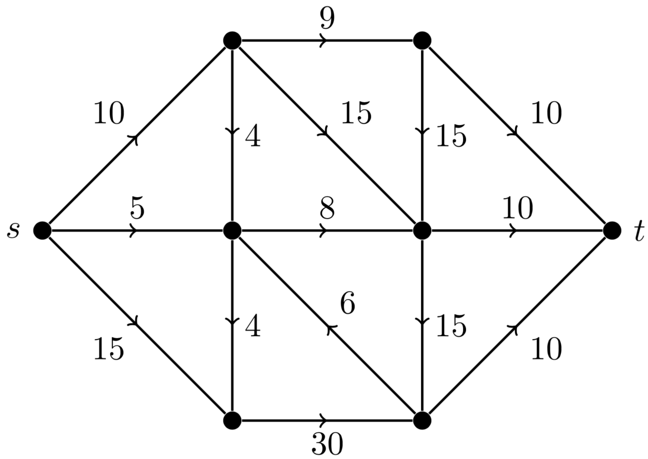
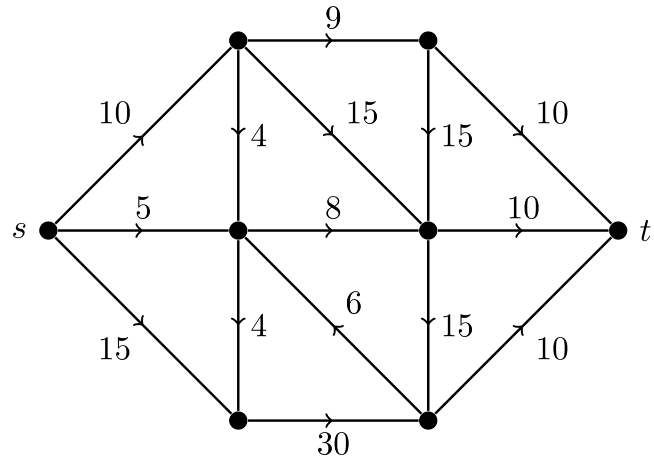
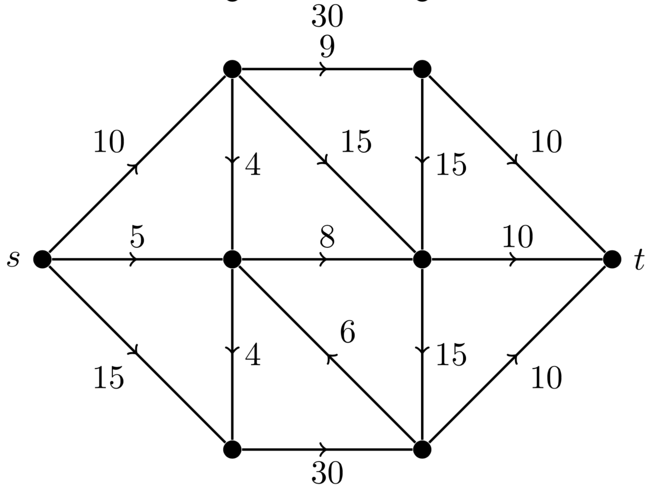
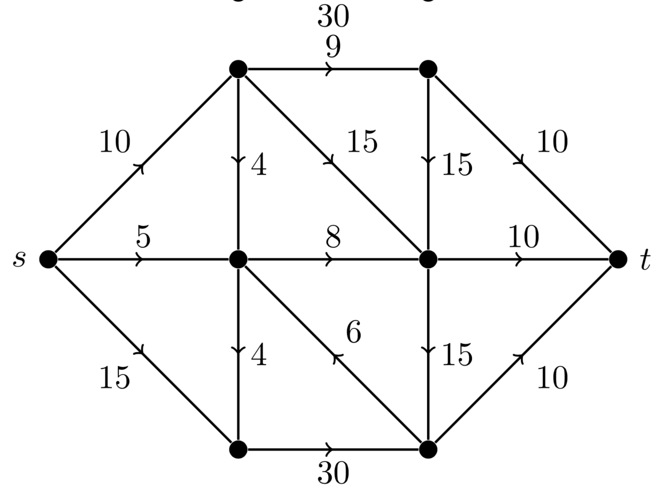

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
3
4
5
1
1
3


4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
3
4
5
1
1
3


4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
3
4
5
1
1
3


4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
3
4
5
1
1
3


4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
3
4
5
1
1
3


9
10
15
10
4
15
s
5
8
10
t
6
15
4
15
10
30

9
10
15
10
4
15
s
5
8
10
t
6
15
4
15
10
30

9
10
15
10
4
15
s
5
8
10
t
6
15
4
15
10
30

9
10
15
10
4
15
s
5
8
10
t
6
15
4
15
10
30

9
10
15
10
4
15
s
5
8
10
t
6
15
4
15
10
30

9
10
15
10
4
15
s
5
8
10
t
6
15
4
15
10
30

Contact UE : aurelie.lagoutte@univ-grenoble-alpes.fr