

STA401 - Examen terminal - SUJET A (INM) - 1ère session

Durée : 2 heures

Documents autorisés : Tables statistiques non annotées - Calculatrice - Fiche formulaire partiel

Formulaire des tests joint avec ce sujet

Exercice : Autour du cours Toutes les questions sont indépendantes

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(20; 11^2)$.

Sur un échantillon de 10 individus, on obtient les résultats suivants : $\sum x_i = 198$ et $\sum x_i^2 = 3930$

Recopier et remplir le tableau avec les valeurs obtenues à partir de toutes les données de l'énoncé :

Espérance de X	Moyenne empirique de l'échantillon	Moyenne estimée sans biais de X	Variance de X	Variance empirique de l'échantillon	Variance estimée sans biais de X
?	?	?	?	?	?

2. Soit X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(20; 16)$. Déterminer la valeur a telle que :
 $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0,98$.
3. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Sur un échantillon de taille $n = 37$, on trouve une moyenne empirique de 20 et un écart type empirique 3.
 Calculer un encadrement de la moyenne μ vérifiant $P(a \leq \mu \leq b) = 0,99$. Que représente cet intervalle ?
4. Pour construire un intervalle de confiance de la moyenne d'une loi Normale dont la variance est inconnue, au niveau 99%, on utilise un échantillon de taille $n=20$. Donner la fonction à utiliser avec le **logiciel R** pour obtenir le quantile utile pour calculer cet intervalle.
5. On fait un test d'hypothèse bilatéral de la moyenne dont la variance est inconnue sur un échantillon de taille 30 individus. La valeur de la statistique T obtenue est $t_{calc} = 2,21$. Calculer la p_{valeur} (donnez la valeur exacte avec la calculatrice). En déduire tous les risques de première espèce pour lesquels vous rejeteriez \mathcal{H}_0 .
6. Donner la fonction à utiliser avec le **logiciel R** qui donne la p_{valeur} du test de la question précédente.

Problème :

On étudie la durée de vie X d'un composant électronique. On considère que X suit une loi normale, de moyenne μ et de variance σ^2 .

PARTIE A

On prend un échantillon de 11 composants sur lesquels on mesure X :

X_1	3,28	2,94	3,5	3,07	3,04	3,12	2,85	3,05	3,32	2,89	3,11
-------	------	------	-----	------	------	------	------	------	------	------	------

- Calculer des estimations sans biais de la moyenne et de la variance de X .
- a) Calculer un intervalle de confiance de niveau 95% de l'écart type.

- b) Calculer un intervalle de confiance de niveau 99% de la moyenne.
- c) Quel niveau de confiance faudrait-il prendre pour avoir un intervalle de confiance de la moyenne de précision $\pm 0,1$?
3. On veut tester si la variance σ^2 est égale ou différente de 0,05 au seuil de 1%. Poser les hypothèses du test, le mettre en oeuvre et conclure.
4. En ne tenant pas compte du résultat obtenu en 3), on veut tester si la moyenne est supérieure à 3 au seuil de 1%. Poser les hypothèses du test, le mettre en oeuvre et conclure.
5. Calculer la p_{valeur} du test précédent. En déduire tous les risques pour lesquels on accepterait de conclure que la moyenne est supérieure à 3.

PARTIE B

Les composants de ce premier échantillon de la partie A avaient subi un certain traitement.

Afin de savoir si ce traitement augmente la durée de vie X , on prend un second échantillon de 11 composants différents n'ayant subi aucun traitement, dont on donne les valeurs de X ci-dessous :

X_2	1,65	1,5	1,18	2,19	1,11	1,48	1,75	2,07	1,44	1,85	2,21
-------	------	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------

On veut vérifier qu'en moyenne la durée de vie X *augmente* avec le traitement.

1. Préciser et justifier la méthode appropriée qui permet de répondre à ce problème.
2. (a) Faire le test de comparaison des variances au seuil de $\alpha = 1\%$. Vous préciserez la statistique de ce test et sa loi, puis vous conclurez.
(b) Montrer que la p_{valeur} de ce test est 0,0477. Discuter selon les valeurs possibles de α . Que concluez-vous pour $\alpha = 1\%$? [Vérifier la cohérence avec (a)].
3. Posez les hypothèses du test des moyennes qui répond au problème. Précisez la statistique de ce test et sa loi. Calculez la p_{valeur} . Conclure votre test pour un risque $\alpha = 1\%$, et donner votre conclusion de façon explicite.

PARTIE C

On reprend les composants de l'échantillon de la partie B, et on leur fait subir ce traitement. Les valeurs obtenues après le traitement des 11 composants sont les suivantes (X_3) :

X_3	2,94	2,81	2,85	3,06	2,91	3,02	3,11	3,35	3,02	3,04	3,21
X_2	1,65	1,5	1,18	2,19	1,11	1,48	1,75	2,07	1,44	1,85	2,21

On veut savoir si en moyenne le traitement est efficace au seuil de $\alpha = 1\%$.

1. Préciser et justifier la méthode appropriée qui permet de répondre à ce problème.
2. Posez les hypothèses du test qui répond au problème. Précisez la statistique de ce test et sa loi. Calculez la p_{valeur} . Conclure votre test pour un risque $\alpha = 1\%$, et donner votre conclusion de façon explicite.