Contrôle continu INF303 - L2 INM — 27 octobre 2023

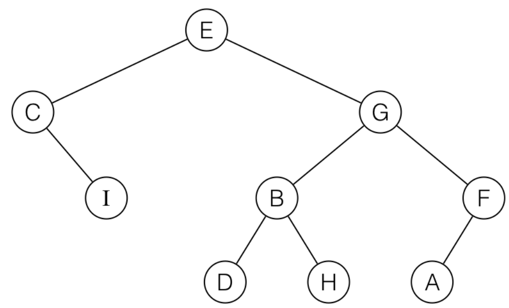
A lire attentivement avant de commencer le sujet :

— **Toutes les réponses doivent être justifiées.**
— Tous les graphes sont considérés comme simples et sans boucle.
— Le barème est donné à titre indicatif.
— Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.
— Les appareils électroniques sont interdits.
— Cet énoncé comporte 4 pages et 7 exercices.

Exercice 1 : Parcours d'arbre (2 points)

Pour l'arbre enraciné dessiné ci-contre, écrire les sommets dans l'ordre :

1. parcours en largeur
2. parcours en profondeur préfixe
3. parcours en profondeur infixe
4. parcours en profondeur postfixe



> 1. parcours en largeur : E C G I B F D H A
> 2. parcours en profondeur préfixe : E C I G B D H F A
> 3. parcours en profondeur infixe : C I E D B H G A F
> 4. parcours en profondeur postfixe : I C D H B A F G E

Exercice 2 : Questions diverses (4 points)

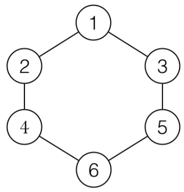
Question 1 – On considère la matrice M ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

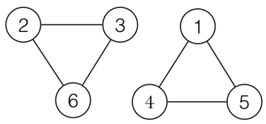
(a) Cette matrice peut-elle être une matrice d'adjacence ? Pourquoi ? Si la réponse est oui, dessinez le graphe correspondant.

(b) Cette matrice peut-elle être une matrice d'incidence ? Pourquoi ? Si la réponse est oui, dessinez le graphe correspondant.

(a) M peut être une matrice d'adjacence : elle ne contient que des 0 et des 1, elle est carrée, symétrique avec seulement des 0 sur la diagonale. La matrice est d'ordre 6, donc le graphe correspondant aura 6 sommets. On obtient le graphe suivant (cycle) :



(b) M peut être une matrice d'incidence : elle ne contient que des 0 et des 1, il n'y a pas de répétition de colonnes et on a exactement deux 1 sur chaque colonne. Comme la matrice a 6 lignes et 6 colonnes, le graphe correspondant aura 6 sommets et 6 arêtes. On obtient le graphe (2 cycles à 3 sommets) :

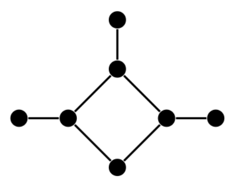


Question 2 – Séquence de degrés

(a) Existe-t-il un graphe dont la séquence de degrés est $1, 1, 1, 2, 3, 3, 3$?

(b) Existe-t-il un arbre avec la même séquence de degrés ?

(a) Oui, il existe un graphe dont la séquence de degrés est $1, 1, 1, 2, 3, 3, 3$, par exemple :



(b) Soit $T = (V, E)$ un arbre à 7 sommets. Comme T est un arbre, on a $|E| = n - 1 = 6$. De plus on sait que, comme dans tout graphe, on a :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \text{ donc ici } \sum_{v \in V} d(v) = 2 \times 6 = 12$$

Or si un arbre vérifie la séquence de degrés donnée dans la question, on peut calculer la somme des degrés :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 3 \times 1 + 2 + 3 \times 3 = 14 \neq 12$$

Il n'existe donc pas d'arbre avec la séquence de degrés donnée.

Question 3 – Dans la famille Tapahunkado, on organise chaque année une grande réunion de famille pour rassembler les 17 membres de la famille. A cette occasion, de nombreux cadeaux sont échangés : chacun fait un cadeau à tous les autres membres de la famille. Au fil du temps, les membres de la famille Tapahunkado prennent conscience que cette façon de faire n'est pas très écologique et, dans un souci de sobriété, elle décide de limiter le nombre de cadeaux pour l'édition de décembre 2023 de leur fête familiale. Chaque personne n'offrira un cadeau qu'à 5 autres personnes de la famille choisis au hasard. Un grand tirage au sort est organisé.

Est-il possible que chaque personne reçoive un cadeau exactement des 5 personnes à qui elle en a offert un ?

Non, il n'est pas possible que chaque personne reçoive un cadeau exactement des 5 personnes à qui elle en a offert un. En effet, supposons par l'absurde que ce soit possible. On peut alors modéliser le problème par un graphe non orienté car il y a une réciprocité dans les cadeaux offerts :

— sommets = membres de la famille

— une arête entre 2 sommets si les 2 personnes correspondantes se sont offert un cadeau l'une à l'autre.

On aurait alors un graphe à 17 sommets (nombre de personnes dans la famille) et 5-régulier (chacun offre 5 cadeaux). On aurait donc 17 sommets de degré 5, ce qui est impossible car dans un graphe, il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair. On arrive donc à une contradiction.

Exercice 3 : **Farandole de desserts** (3 points)

Virginie a préparé 8 desserts différents pour son anniversaire, lors duquel elle attend 100 invités :

1. Baba au Rhum
2. Chou à la crème
3. Éclair au chocolat
4. Fondant au chocolat
5. Glace à la vanille
6. Millefeuille
7. Panna Cotta
8. Tarte aux fraises

Chaque invité aura 4 desserts différents parmi les 8, et elle souhaiterait que, d'une façon ou d'une autre (détaillée dans la suite), un invité n'ait pas les mêmes desserts que n'importe quel autre.

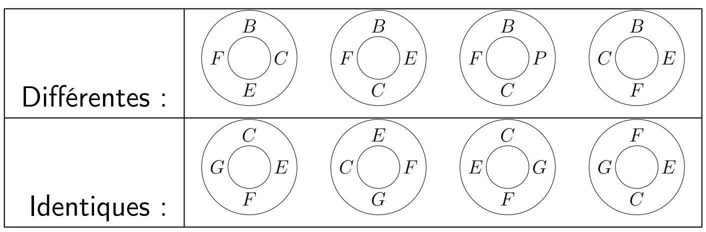
Question 1 – Combien d'assortiments différents de 4 desserts peut-elle faire (deux assortiments sont différents s'ils comprennent au moins un dessert qui n'est pas le même) ? Ce nombre suffit-il pour que les 100 invités aient des assortiments différents deux-à-deux ?

Précision : l'assortiment "Baba au Rhum + Choux à la crème + Fondant au chocolat + Panna Cotta" est différent de l'assortiment "Baba au Rhum + Choux à la crème + Millefeuille + Pana Cotta" mais n'est pas différent de l'assortiment " Choux à la crème + Fondant au chocolat + Baba au Rhum + Panna Cotta".

> Un choix de dessert correspond exactement à un sous-ensemble (non-ordonné) de 4 desserts parmi 8, il y en a donc :
> $$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4!} = \frac{4\times 2\times 7\times 3\times 2\times 5}{4\times 3\times 2} = 7\times 2\times 5 = 70$$
> Cela ne fait pas assez de combinaisons différentes pour les 100 invités.

Question 2 – Déçue de ne pouvoir faire un assortiment différent par personne, Virginie a une nouvelle idée : elle va disposer les 4 desserts de chaque personne de façon circulaire dans une assiette ronde, et elle veut que chaque invité ait une assiette différente. Combien d'assiettes différentes peut-elle faire ? Est-ce suffisant pour que ses 100 invités aient chacun une assiette différente des autres ?

Précision : dans le tableau ci-dessous, les 4 assiettes de la première ligne sont considérées deux-à-deux différentes, mais les 4 assiettes de la deuxième ligne sont considérées comme deux-à-deux identiques. On utilise une abréviation pour chaque type de dessert (première lettre du nom).



> Ici, l'ordre des 4 desserts parmi 8 compte dans une certaine mesure.
> Si l'on représente une assiette par l'ordre de ses 4 desserts en partant du haut et dans les aiguilles d'une montre, on obtient un 4-arrangement des 8 desserts, par exemple sur la première assiette dessinée : BCEF.
> Il faut faire attention que l'on peut les disposer les desserts dans l'ordre des aiguilles d'une montre ou dans l'autre sens sur l'assiette, et obtenir ainsi deux assiettes équivalentes ; ainsi BCEF et BFEC représentent la même assiette ; de plus on peut tourner l'assiette d'un quart de tour et obtenir une assiette équivalente (BCEF=CEFB). On a donc huit 4-arrangements qui représentent une seule et même assiette : 4 choix pour décider quel dessert parmi les 4 est en haut, et deux choix pour le sens dans lequel on tourne. Le nombre de 4-arrangements est $\frac{8!}{4!}$ qu'il faut donc diviser par 8, soit $\frac{8!}{8\times 4!} = 7\times 6\times 5 = 210$ possibilités différentes.
>
> **Alternative :** D'abord, on choisit 4 desserts parmi les 8, sans ordre : ce sont les desserts qui vont apparaître dans notre assiette. On décide, sans perte de généralité (car les 4 positions sont équivalentes), de mettre le plus petit dans l'ordre alphabétique en haut de l'assiette. Ensuite, on décide quel dessert va en face : on a trois choix (il faut choisir un dessert parmi les 3 restants). Ensuite, l'ordre dans lequel on met les deux desserts restants n'importe pas car cela revient à tourner dans un sens ou dans l'autre autour de l'assiette. Ainsi on n'a pas de doublons (car être en face est différent d'être à côté, peu importe comment on tourne l'assiette), autrement dit on peut décrire une disposition d'assiette exactement en décidant qui est en fasse du plus petit dessert. On obtient donc $\binom{8}{4}\times 3 = 70\times 3 = 210$ possibilités différentes.
>
> Comme il y a 210 possibilités différentes pour 100 invités, ce choix est suffisant pour que chaque paire d'invités ait des assiettes différentes.

Exercice 4 : **TP - matrice d'incidence** (2 points)

On se place ici dans le contexte des TP et on suppose qu'on dispose du fichier `graphe.py` qui était fourni au TP2, pour une utilisation avec des graphes non orientés et non pondérés. Dans ce fichier, on fournit une classe pour manipuler les graphes. On rappelle ici quelques fonctions permettant de manipuler ces graphes, essentiellement à travers des exemples. Dans tous ces exemples, on suppose qu'un graphe `g` est défini préalablement à l'aide d'un constructeur.

— `g.nombre_sommets()` renvoie le nombre de sommets du graphe `g`,

— `g.nombre_aretes()` renvoie le nombre d'arêtes du graphe `g`,

— `g.ajouter_arete(u,v)` modifie le graphe `g` en lui ajoutant l'arête `(u,v)`,

— `g.supprimer_arete(u,v)` modifie le graphe `g` en supprimant l'arête `(u,v)` (on suppose qu'elle existe),

— `g.degre(u)` renvoie le degré du sommet `u` dans le graphe `g`,

— lors de l'itération `for v in g.voisins(u) :`, la variable `v` parcourt les voisins dans `g` du sommet `u`, dans l'ordre croissant,

— `g.premier_voisin(u)` renvoie l'indice du premier voisin de `u` dans `g`.

Question 1 – Ecrire la fonction `matrice_incidence` qui prend en argument un graphe `g` et qui renvoie la matrice d'incidence de `g` sous forme d'une liste de listes (la premier élément de la liste est la liste qui constitue la première ligne de la matrice, et ainsi de suite). Votre graphe passé en paramètre ne doit pas être modifié.

```python
def matrice_incidence(g):
    n = g.nombre_sommets()
    m = g.nombre_aretes()
    mat = [[0]*m for _ in range(n)]
    a = 0
    for u in range(n):
        for v in g.voisins(u):
            if u < v:
                mat[u][a] = 1
                mat[v][a] = 1
                a += 1
    return mat
```

<u>Exercice 5</u> : **Transfert de courrier** (4 points)

Marion et Alex souhaitent envoyer les faire-part de naissance de leur bébé dans leur famille, sans payer de timbre et en minimisant l'emprunte carbone (CO_2) totale de la distribution. Pour cela, ils veulent faire passer les faire-part en mains propres à certains membres de leur famille, qui à leur tour seront chargés de distribuer une partie des faire-part à d'autres membres de la famille et ainsi de suite. Lorsqu'une personne P_1 se rend chez une personne P_2 pour lui donner un ou des faire-part :

— il faut que P_1 connaisse l'adresse de P_2,

— la quantité de CO_2 dépensée ne dépend pas du nombre d'enveloppes (leur poids est négligeable dans le transport)

Tout le monde n'a pas forcément l'adresse de tous les membres de la famille, donc voici le carnet d'adresses de chaque personne, avec la quantité de CO_2 associée pour faire le trajet aller-retour :

1. Alex et Marion : Céline (400g), David (31 000g), Edith (300g), Gisèle (2 000g)
2. Bernard : David (4 000g), Gisèle (34 000g)
3. Céline : Alex et Marion (400g), David (30 000g), Edith (200g), François (3 000g)
4. David : Alex et Marion (31 000g), Bernard (4 000g), Céline (30 000g)
5. Edith : Alex et Marion (300g), Céline (200g), François (3 200g)
6. François : Céline (3 000g), Edith (3 200g), Gisèle (1 400g)
7. Gisèle : Alex et Marion (2 000g), Bernard (34 000g), François (1 400g)

On remarque que le carnet d'adresses est symétrique : si une personne P_1 possède l'adresse d'une personne P_2, alors P_2 possède aussi l'adresse de P_1.

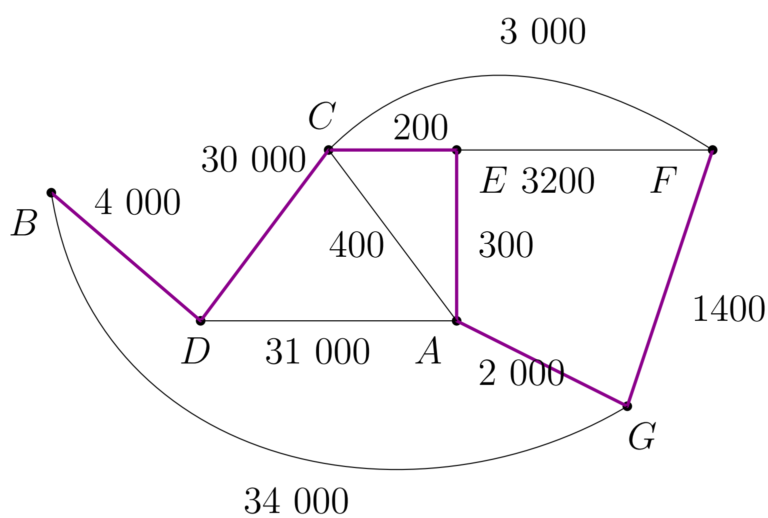
Question 1 – Modéliser la problématique comme un problème de théorie des graphes, sur un graphe G que vous définirez correctement. On pourra utiliser l'initiale d'une personne comme abréviation pour cette personne.

> On construit le graphe G dont les sommets sont les personnes (plus exactement les foyers, car Alex et Marion ne font qu'un seul sommet) ; on relie deux personnes par une arête si l'une a l'adresse de l'autre (non-orientée car les carnets d'adresse sont symétriques), pondérée par la quantité de CO_2 (aller-retour en grammes).
>
> Le problème est alors de trouver un arbre couvrant de poids minimum, le long duquel les faire-part vont transiter (on l'enracinera à la fin en Alex et Marion).

Question 2 – En utilisant une technique vue dans cette matière, que vous expliciterez, résoudre le problème de graphe défini à la question précédente.

> On applique l'algorithme de Kruskal (il nous faut $7 - 1 = 6$ arêtes).

Ensemble d'arêtes	Poids	Arête	Cycle détecté ?
$\emptyset$	200	CE	Non
$\{CE\}$	300	AE	Non
$\{CE, AE\}$	400	AC	Oui : ACE
$\{CE, AE\}$	1400	GF	Non
$\{CE, AE, GF\}$	2000	AG	Non
$\{CE, AE, GF, AG\}$	3000	CF	Oui : $CFGAEC$
$\{CE, AE, GF, AG\}$	3200	EF	Oui : $EFGAE$
$\{CE, AE, GF, AG\}$	4000	DB	Non
$\{CE, AE, GF, AG, DB\}$	30000	CD	Non
$\{CE, AE, GF, AG, DB, CD\}$	–	–	–



Question 3 – Explicitez la distribution de faire-part que vous conseillez à Marion et Alex, et la quantité de CO_2 totale dépensée.

> On enracine l'arbre en A et on oriente les arêtes de la racine vers les feuilles. Chaque personne p recevra de son père les faire-part pour tout le sous-arbre enraciné en p, et donnera à ses enfants les faire-part nécessaires pour leur propre sous-arbre.
>
> Autrement dit, on obtient :
>
> — Alex et Marion donnent les faire-part de E, C, D, B à Edith.
>
> — Edith donne les faire-part de C, D, B à Céline.
>
> — Céline donne les faire-part de D et B à David.
>
> — David donne un faire-part à Bernard.
>
> — Gisèle donne un faire-part à François.
>
> La quantité totale de CO_2 dépensée est de 37 900g.

Question 4 – Si les carnets d'adresses n'étaient pas symétriques, est-ce que la même méthode aurait marché ?

> Si les carnets d'adresse n'était pas symétrique, alors on aurait dû faire un graphe orienté. Or le problème de l'arbre couvrant n'est pas bien défini / ne s'adapte pas facilement au cas orienté, et/ou l'algorithme de Kruskal ne fonctionne pas.

<u>Exercice 6</u> : **Salage des routes** (3 points)

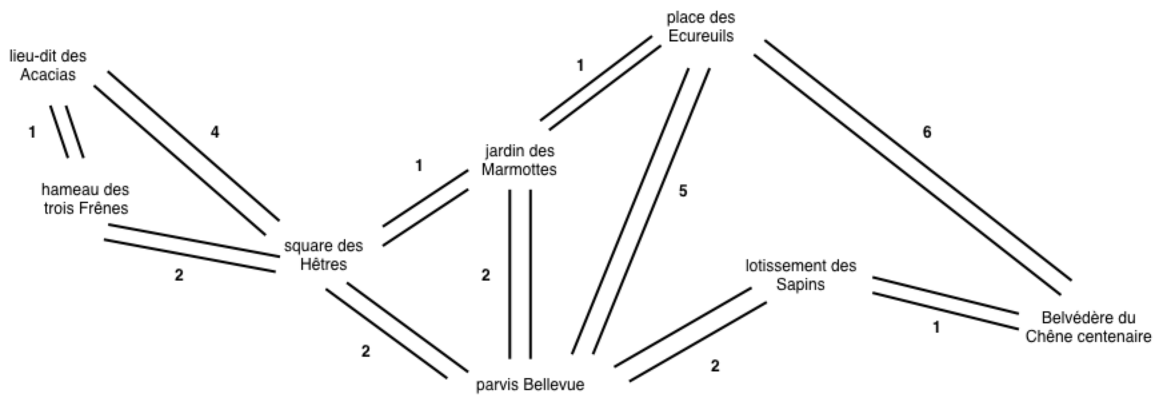


Figure 1 – Les routes principales

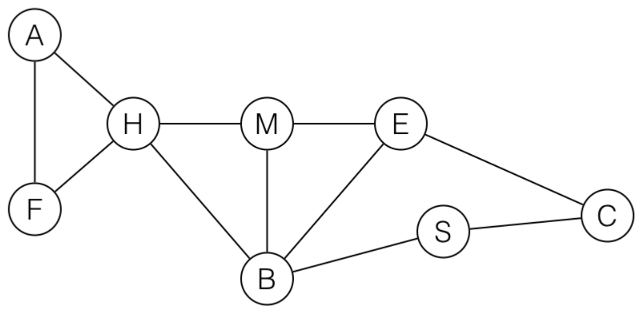
Une petite commune de moyenne montagne souhaite organiser au mieux le salage de ses routes principales en hiver pour en limiter le coût. Le schéma de la figure 1 représente les routes principales qui doivent être salées en cas de chute de neige. Les nombres sur les arêtes représentent les distances en kilomètres. Il faut utiliser $0,2$ tonnes de sel par kilomètre. Le camion de salage doit partir de l'entrepôt situé place des Ecureuils, parcourir chaque route à saler et revenir à l'entrepôt. Le dispositif qui permet au camion de bloquer l'épandage de sel est cassé, si bien qu'il ne peut pas parcourir une route sans y répandre du sel. Pour des raisons de sécurité, le camion ne doit donc pas passer deux fois par la même route car il y aurait trop de sel sur la route. Les services municipaux se demandent s'il est possible d'organiser un parcours pour saler les routes principales en respectant toutes ces contraintes.

Question 1 – Modéliser le problème comme un problème de théorie des graphes, sur un graphe G que vous définirez correctement.

On modélise le problème par un graphe G :

- les sommets correspondent aux intersections des routes (place, hameau, lieu-dit)
- chaque arête correspond à une route

Il n'est pas utile ici de mettre des poids sur les arêtes. Pour nommer les sommets on utilise l'initiale de leur nom (lettre en majuscule sur la figure). Voici le graphe obtenu :



Ici on cherche à trouver un parcours qui passe une et une seule fois par chaque route en revenant au point de départ. Cela revient donc à chercher un cycle eulérien dans le graphe G.

Question 2 – Est-il possible de saler toutes les routes principales de la commune tout en respectant les normes de sécurité ? Vous justifierez l'existence ou non d'une solution.

D'après le théorème d'Euler, un graphe connexe est eulérien si et seulement si tout sommet du graphe est de degré pair.

Ici, le graphe G est bien connexe. Par contre, il admet 2 sommets de degré impair (E et M). Il n'est donc pas eulérien. Il n'est donc pas possible de saler toutes les routes principales une et une seule fois en revenant à l'entrepôt.

Question 3 – Il y a aussi quelques routes secondaires :

- entre le lieu-dit des Acacias et le jardin des Marmottes, distance 6 km
- entre le lieu-dit des Acacias et la place des Ecureuils, distance 8 km
- entre la place des Ecureuils et le lotissement des Sapins, distance 4 km

Ces routes étant secondaires, le camion n'est pas obligé de les saler, mais il peut quand même y passer dans son parcours (mais pas plus d'une fois dans chacune, toujours pour des raisons de sécurité).

Est-il raisonnable d'utiliser une ou plusieurs de ces routes dans le parcours du camion ? Si oui, lesquelles et pourquoi ? Si plusieurs choix sont possibles, il faudra privilégier celui qui permet d'utiliser le moins de sel possible.

L'existence de ces routes secondaires donne la possibilité d'ajouter des arêtes dans le graphe, et ainsi de changer le degré de certains sommets. Il n'est pas intéressant d'utiliser l'arête ES même si c'est celle qui coûte le moins cher car S devient de degré 3 et aucune autre route secondaire ne peut venir changer la parité du sommet S. On a maintenant les arêtes AE et AM qui sont toutes les deux entre un sommet de degré pair (A) et un sommet de degré impair (E ou M). On veut changer la parité du degré des sommets E et M, pour cela il faudra prendre les 2 arêtes AE et AM. Et la parité du degré de A ne changera pas car on lui ajoute 2. Il est donc raisonnable d'utiliser la route entre le lieu-dit des Acacias et la place des Ecureuils et celle entre le lieu-dit des Acacias et le jardin des marmottes, car cela permet de rendre le graphe eulérien et donc de pouvoir saler toutes les routes principales une et une seule fois.

<u>Exercice 7</u> : Attaque de dragon (3 points)

Victoria joue à un jeu de société avec un jeu de cartes spéciales qui comporte :

- des cartes Dragon, chacune avec une valeur entière indiquant la puissance du dragon
- des cartes bleues de valeur 5,
- des cartes rouges de valeur 3,
- des cartes jaunes de valeur 2.

Lorsque son adversaire pose une carte Dragon de puissance n, Victoria doit se défendre en posant un ensemble de cartes bleues, rouges et jaunes de telle sorte que :

- la somme de ces cartes est précisément égale à la puissance n du Dragon ;
- les couleurs de ces cartes sont équilibrées, à deux près maximum ; par exemple, elle peut poser 12 cartes bleues, 10 cartes rouges et 10 cartes jaunes, ou encore 11 cartes bleues, 10 cartes rouges et 12 jaunes, mais elle ne peut pas poser 10 cartes bleues, 15 cartes rouges et 13 cartes jaunes (car il y a 5 cartes rouges de plus que de cartes bleues, et $5 > 2$).

Le but de cet exercice est de montrer par récurrence que, pour tout dragon de puissance $n \geq 2$, il existe une défense possible pour Victoria (en supposant qu'elle peut avoir autant de cartes qu'elle veut de chaque couleur).

Pour tout entier $n \geq 2$, formalisons la propriété $P(n)$ que l'on cherche à montrer :

$$P(n) = \text{"}\exists p, q, s \in \mathbb{N} \text{ tels que } n = 5p + 3q + 2s \text{ et } max(p,q,s) - min(p,q,s) \leq 2\text{"}$$

Nous vous conseillons que faire une récurrence à 5 crans, c'est-à-dire de montrer dans l'étape d'hérédité que $P(n)$ implique $P(n+5)$ (ou que $P(n-4)$ implique $P(n+1)$, comme vous préférez, mais soyez explicites sur votre copie).

Question 1 – Que représentent les entiers p, q et s qui apparaissent dans $P(n)$?

> Les entiers p, q, s représentent respectivement le nombre de cartes bleues (5), de cartes rouges (3) et de cartes jaunes (2).

Question 2 – Une fois n'est pas coutume, commençons par prouver l'étape d'hérédité. Prouvez que, si $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq 2$, alors $P(n+5)$ est vraie.

> Soit $n \geq 2$, supposons que $P(n)$ est vraie. Alors il existe $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $n = 5p + 3q + 2s$ et $max(p,q,s) - min(p,q,s) \leq 2$. On remarque alors que l'on peut faire une défense de valeur $n+5$ soit en ajoutant une carte bleue de valeur 5, soit en ajoutant une carte rouge de 3 et une carte jaune de 2. Le but est de montrer qu'au moins une des deux solutions est suffisamment équilibrée donc valide.
>
> - Cas n°1 : si l'on n'a pas $max(p,q,s) = p = min(p,q,s) + 2$, alors on pose $p' = p+1$, $q' = q$ et $s' = s$, autrement dit on ajoute une carte bleue de valeur 5. Cela fonctionne car :
>   - ou bien p n'était pas le $max(p,q,s)$, dans ce cas $p' = p+1 \leq max(p,q,s)$ et donc $max(p',q',s') - min(p',q',s') \leq max(p,q,s) - min(p,q,s) \leq 2$.
>   - ou bien $p = max(p,q,s)$ mais $p < min(p,q,s) + 2$, auquel cas $p' = max(p',q',s') = p+1 < min(p,q,s) + 2 + 1$, donc $max(p',q',s') - min(p',q',s') \leq 2$.
> - Cas n°2 : si $max(p,q,s) = p = min(p,q,s) + 2$, alors on pose $p' = p$, $q' = q+1$, $s' = s+1$, autrement dit on ajoute une carte de valeur 3 et une carte de valeur 2. Sans perte de généralité entre q et s, on peut supposer $min(p,q,s) = q$ et donc $p = q+2$. On a trois valeurs possibles pour s : q, $q+1$, ou $q+2$. Alors d'une part $min(p',q',s') = min(p, q+1, s+1) = q+1$; et d'autre part $max(p',q',s') = max(p, q+1, s+1) \leq max(p,q,s) + 1$. Donc $max(p',q',s') - min(p',q',s') \leq max(p,q,s) + 1 - min(p,q,s) - 1 \leq 2$.
>
> Donc dans les deux cas, on trouve une défense équilibrée valide de valeur $n+5$, donc $P(n+5)$ est vraie.

Question 3 – Pour quelles valeurs de n faut-il prouver que $P(n)$ est vraie dans l'initialisation ?
Indice : si $P(2)$ est vraie et que $P(n)$ implique $P(n+5)$, alors $P(2)$ implique $P(7)$

> Il faut faire l'initialisation pour $n = 2, \ldots, 6$ car, comme énoncé dans l'indication, l'hérédité nous donne la validité de $P(n)$ à partir de $n = 7$

Question 4 – Montrer l'étape d'initialisation puis conclure.

Initialisation :

— $P(2)$ est vraie car $2 = 5 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 1$ et $(0, 0, 1)$ est équilibrée à 2 près (même 1 près).

— $P(3)$ est vraie car $3 = 5 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 0$ et $(0, 1, 0)$ est équilibrée à 2 près (même 1 près).

— $P(4)$ est vraie car $4 = 5 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 2$ et $(0, 0, 2)$ est équilibrée à 2 près.

— $P(5)$ est vraie car $5 = 5 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 0$ et $(1, 0, 0)$ est équilibrée à 2 près (même 1 près).

— $P(6)$ est vraie car $6 = 5 \times 0 + 3 \times 2 + 2 \times 0$ et $(0, 2, 0)$ est équilibrée à 2 près.

On a montré que $P(2), \ldots, P(6)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+5)$ pour $n \geq 2$ donc par récurrence à 5 crans, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$, autrement dit il existe une défense de valeur n équilibrée à 2 près.