Chapitre IV : Calcul matriciel

1) Définitions générales

Déf : Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients réels est une famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $m \cdot n$ réels notée sous forme d'un tableau rectangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \longleftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$\uparrow$ $j^{\text{ème}}$ colonne

L'indice $i \in \{1, \dots, m\}$ est l'indice de ligne ;
L'indice $j \in \{1, \dots, n\}$ est l'indice de colonne ;
Le réel $a_{i,j}$ est le coefficient d'indices i, j de la matrice $A = (a_{i,j})$.
L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Rem : On pourra noter a_{ij} au lieu de $a_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Attention toutefois : $a_{1,23} \neq a_{12,3}$!

L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et n colonnes est muni d'une structure d'espace vectoriel.

Proposition: $M_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel muni des opérations suivantes:

- **Addition:** Si $A=(a_{i,j})\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A+B\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est la matrice de coefficients $(a_{i,j}+b_{i,j})$.
- **Multiplication externe:** Si $A=(a_{i,j})\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est la matrice de coefficients $(\lambda a_{i,j})$.

En d'autres termes, l'addition et la multiplication externe sont définies coefficient par coefficient.

Définition: Si $i\in\{1,\dots,m\}$ et $j\in\{1,\dots,n\}$, on note $E_{i,j}\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$E_{i,j}=(m_{k,\ell})_{\substack{1\leq k\leq m\\ 1\leq \ell\leq n}} \quad \text{où} \quad m_{k,\ell}=\begin{cases}1 & \text{si } (k,\ell)=(i,j)\\ 0 & \text{si } (k,\ell)\neq(i,j)\end{cases}$$

En d'autres termes, la matrice $E_{i,j}$ n'a qu'un coefficient non nul, le coefficient de la ligne i et de la colonne j, qui est égal à 1.

Ex: Si $m=2, n=3$:

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \text{etc}\dots$$

Avec cette définition, une matrice $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ s'écrit

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{a_{i,j}}_{\text{coefficients de } A}E_{i,j},$$ et cette écriture est unique:

$$A=(a_{i,j})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}E_{i,j}\implies \lambda_{i,j}=a_{i,j}\ \forall (i,j).$$

On a ainsi montré :

Prop : La famille des $m \cdot n$ matrices $E_{i,j}$, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, est une base de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, appelée base canonique.

Conséquence : L'espace vectoriel $M_{m,n}(\mathbb{R})$ est de dimension $m \cdot n$.

Rem : L'espace $\mathbb{R}^m$ est isomorphe à $M_{m,1}(\mathbb{R})$. Les notions de base canonique coïncident.

2) Produit matriciel

La définition qui suit est très importante.

Déf : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$. Si $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{j,k}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle produit matriciel de A par B la matrice $C = AB = (c_{i,k}) \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq k \leq p. \qquad (*)$$

⚠ le produit matriciel AB n'est défini que si

\# colonnes de A = \# lignes de B !

Ex 1 : "produit scalaire" Si $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ (vecteur ligne) et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ (vecteur colonne), on a :

$$AB = \underbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \in \mathbb{R}.$$

<u>Ex 2 :</u> (cas général) Si $C = AB$ avec $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ et $\forall k \in \{1,\dots,p\}$ le coefficient $C_{i,k}$ est le "produit scalaire" de la <u>$i^{\text{ème}}$ ligne A</u> avec la <u>$k^{\text{ème}}$ colonne de B.</u>

<u>Exemple explicite :</u> $m = 2$, $n = 3$, $p = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}).$$

On sait que $AB \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. On trouve :

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} B$$

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

<u>Rem :</u> Dans cet exemple on peut aussi calculer BA :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 1 & 16 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

<u>Proposition :</u> Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$. (<u>Propriétés du produit matriciel</u>)

1) <u>Associativité</u> : Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B = M_{n,p}(\mathbb{R})$, et $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, alors :

$$A(BC) = (AB)C \in M_{m,q}(\mathbb{R}).$$

2) <u>Linéarité à droite :</u> Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors

$$A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC \in M_{m,p}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3) <u>Linéarité à gauche :</u> Si $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors

$$(\lambda A + B)C = \lambda AC + BC \in M_{m,p}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Déf:</u> Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on appelle <u>transposée de A</u> la matrice $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

<u>Ex:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les <u>lignes de A^T</u> sont <u>les colonnes de A</u>, les <u>colonnes de A^T</u> les <u>lignes de A</u>.

La transposition est clairement <u>involutive</u>:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ on a } (A^T)^T = A.$$

<u>Prop:</u> Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

<u>Dém:</u> On remarque d'abord que $B^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, donc le produit B^TA^T est bien défini, et donne un élément de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$.

Notons $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Si $1 \le i \le m$ et $1 \le k \le p$, on a:

$$(C^T)_{k,i} = C_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} (B^T)_{k,j} (A^T)_{j,i},$$

ce qui montre que $C^T = B^TA^T$. □

<u>Ex:</u> En reprenant les matrices ci-dessus on voit que

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} = (AB)^T.$$

3) L'anneau des matrices carrées

Déf : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel $M_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.

Une matrice carrée possède donc autant de lignes que de colonnes.
Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a donc $A^T \in M_n(\mathbb{R})$. Ceci conduit à la définition :

Déf : On dit qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est
- symétrique si $A = A^T$
- antisymétrique si $A = -A^T$

Exemple : Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, alors les matrices

$$AA^T \in M_m(\mathbb{R}) \text{ et } A^T A \in M_n(\mathbb{R})$$

sont bien définies et symétriques.
En prenant à nouveau $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ on a

$$AA^T = \begin{pmatrix} 30 & -1 \\ -1 & 58 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 53 & -11 \\ 5 & -11 & 34 \end{pmatrix}.$$

Remarque importante : en plus de l'addition et de la multiplication externe, l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ est muni d'une multiplication interne :

si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in M_n(\mathbb{R})$.

produit matriciel !

Ce produit admet pour élément neutre la matrice identité ainsi définie :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e. } (I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On vérifie que $I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

Prop : $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire, non commutatif.

produit matriciel !

Il s'agit d'une vérification immédiate, laissée au lecteur. Notez que :

* La multiplication dans $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutative :

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^T$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BA \;!$$

* L'anneau $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas "intègre" : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

alors $A \neq 0$ mais $A \cdot A = 0$!

Le produit de deux matrices non nulles peut donner la matrice nulle.

Déf : On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $AB = BA = I_n$. Cette matrice B est alors unique, on l'appelle l'inverse de A, et on la note A^{-1}.

On vient de voir que $M_n(\mathbb{R})$ contient des matrices non inversibles non nulles si $n \geq 2$.

Il est remarquable que l'existence d'un inverse à gauche ou à droite suffise à garantir qu'une matrice est inversible.

<u>Prop:</u> Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $AB = I_n$ <u>ou</u> $BA = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

<u>Dém:</u> Supposons qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $AB = I_n$. Considérons l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & XA \end{array} \quad \text{(le produit matriciel de } X \text{ par } A\text{)}.$$

- φ est <u>injective</u> : si $\varphi(X) = XA = 0$, alors
$$X = XI_n = X(AB) = (XA)B = 0.$$
- Comme φ est un endomorphisme, il s'ensuit que φ est aussi <u>surjective</u>. Il existe donc $X \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $\varphi(X) = XA = I_n$.
- On a $X = XI_n = X(AB) = (XA)B = I_nB = B$. Ainsi $BA = I_n$.

Supposons à présent qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $BA = I_n$. On considère alors l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \quad \text{et on procède comme ci-dessus. } \square$$

<u>Prop:</u> Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles. Alors le produit AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

<u>Dém:</u> $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. $\square$

<u>Déf :</u> (<u>Groupe linéaire de degré n</u>)

Notons $GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ;\ A \text{ est inversible} \}$.

Alors $GL_n(\mathbb{R})$, muni du produit matriciel, est un groupe, non abélien si $n \geq 2$.

<u>Remarque :</u> Il n'est pas facile de déterminer si une matrice donnée est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse. Nous verrons au chapitre 5 des méthodes permettant de faire cela.

<u>Exemples :</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ est inversible : } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) <u>Coordonnées d'un vecteur</u>, <u>matrice d'une application linéaire</u>

Soit E un espace vectoriel réel, de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. On rappelle que tout vecteur $x \in E$ admet une écriture unique de la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad \text{où } x_1, \dots, x_n \text{ sont des réels.}$$

Les réels $x_1, \dots, x_n$ sont les <u>coordonnées du vecteur x</u> dans la base $e = (e_1, \dots, e_n)$.
ou composantes

<u>Notation :</u> On note
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Si l'on souhaite mentionner la base $e = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle les coordonnées du vecteur x sont calculées, on utilisera la notation

$$X = M_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

où $M_e(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la <u>matrice colonne</u> des coordonnées de x dans la base e.

<u>Rem:</u> Quelle que soit la base e, l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto M_e(x) \end{aligned}$$

est un <u>isomorphisme d'espaces vectoriels</u>, cf. chapitre III.

La notation ci-dessus s'étend à une famille de vecteurs.

<u>Déf:</u> Si $x, y, \dots, z$ sont m vecteurs de E, on note

$$M_e(x, y, \dots, z) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & y_n & \cdots & z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $x, y, \dots, z$ dans la base e : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $\dots$, $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$.

Soit à présent :

- E un espace vectoriel réel muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$
- F un espace vectoriel réel muni d'une base $f = (f_1, \dots, f_m)$, $m \in \mathbb{N}^*$
- $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Déf: On appelle <u>matrice de l'application linéaire</u> $\varphi : E \to F$ <u>dans les bases</u> e, f la matrice à m lignes et n colonnes donnée par

$$M_f^e(\varphi) = M_f(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

<u>Rem:</u> $m = \dim(F)$, $n = \dim(E)$ (et non l'inverse !)

En d'autres termes, les <u>colonnes</u> de la matrice $A = M_f^e(\varphi)$ contiennent les coordonnées dans la base f de l'image par φ des vecteurs de la base e.

Si $A = (a_{i,j})$, on a donc :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i \qquad (*)$$

Cette formule peut être utilisée comme définition de la matrice $A = M_f^e(\varphi)$.

<u>Exemple 1:</u> Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$, et $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ etc.

$F = \mathbb{R}^2$ de la base canonique $f = (f_1, f_2)$. $\quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ etc.

Alors

$$M_f^e(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

<u>Exemple 2:</u> Soit $E = \{ P \in \mathbb{R}[X] ; \deg(P) \leq 3 \}$ et $\varphi : E \to E$ l'endomorphisme défini par $\quad \varphi(P) = P' \quad \forall P \in E.$

On munit E de la base $e = (1, X, X^2, X^3)$. Alors :

$$M_e^e(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(expliquer!)}$$

Rem: Lorsque $\varphi : E \to E$ est un endomorphisme, il est naturel de prendre une même base $e = (e_1, \dots, e_n)$ pour l'espace E au départ et à l'arrivée. (cf. toutefois le §5 sur les matrices de passage!).
On parle alors de la matrice $M_e^e(\varphi)$ de l'endomorphisme φ dans la base E.
carrée ! Exemple: $\varphi = \mathrm{Id}$ ssi $M_e^e(\varphi) = I_n$!

Proposition 1 Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F.
L'application
$$\Phi_{e,f} : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$$
$$\varphi \longmapsto M_f^e(\varphi)$$
est un isomorphisme.

En d'autres termes, une fois les bases choisies, les applications linéaires $\varphi : E \to F$ s'identifient aux matrices dans $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Dém: Il est clair au vu de $(*)$ que l'application Φ est linéaire.
Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. En vertu de la proposition p. 49, il existe une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ t.q.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i \, , \quad \text{i.e. } M_f^e(\varphi) = A.$$

Ainsi Φ est bijective. $\square$

Corollaire: L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F vérifie

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E)\dim(F).$$

Proposition 2: Comme ci-dessus soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire, e une base de E, et f une base de F.
Si $x \in E$ et $y = \varphi(x) \in F$, on a :

$$Y = AX \qquad (**)$$

où $Y = M_f(y) \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, $A = M_f^e(\varphi) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $X = M_e(x) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

En d'autres termes, une fois les bases choisies, l'application linéaire φ est décrite par le produit matrice-vecteur $X \longmapsto AX$.

Dém : Si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, alors en utilisant $(*)$ on trouve :

$$y = \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) f_i$$

donc $y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$ avec $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$, ce qui est exactement $(**)$. $\square$

La composition de deux applications linéaires correspond au produit matriciel :

Proposition 3: Soient E, F, G des espaces vectoriels réels et $\varphi : E \to F$, $\psi : F \to G$ des applications linéaires.
Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $f = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F, et $g = (g_1, \dots, g_p)$ une base de G, alors :

$$\underbrace{M_g^e(\psi \circ \varphi)}_{\in M_{p,n}(\mathbb{R})} = \underbrace{M_g^f(\psi)}_{\in M_{p,m}(\mathbb{R})} \underbrace{M_f^e(\varphi)}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})}.$$

Dém : Notons $A = M_f^e(\varphi) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B = M_g^f(\psi) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$.

Par définition on a :

$$\forall j \in \{1,\dots,n\} : \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i$$

$$\forall i \in \{1,\dots,m\} : \quad \psi(f_i) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} g_k$$

Ainsi, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$:

$$(\psi \circ \varphi)(e_j) = \psi(\varphi(e_j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \psi(f_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} g_k$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{k,i} a_{i,j} \right) g_k = \sum_{k=1}^{p} c_{k,j} g_k$$

où $C = BA$. $\square$ Rem : on utilise ici que $a_{i,j} b_{k,i} = b_{k,i} a_{i,j}$!

Enfin, dans le cas bijectif, la matrice de l'application réciproque est la matrice inverse :

Proposition 4 : Soient E, F deux espaces vectoriels de même dimension n, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors φ est bijective ssi sa matrice $M_f^e(\varphi)$ est inversible, et dans ce cas $\left(M_f^e(\varphi)\right)^{-1} = M_e^f(\varphi^{-1})$.

Dém : Si φ est bijective notons $A = M_f^e(\varphi)$ et $B = M_e^f(\varphi^{-1})$.

Par la prop. 3 :

$$AB = M_f^f(\mathrm{Id}_F) = I_n, \quad BA = M_e^e(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

donc A est inversible et $B = A^{-1}$.

Inversement, si $A := M_f^e(\varphi)$ est inversible, il existe par la prop. 1 une unique appl. linéaire $\psi : F \to E$ t.q. $A^{-1} = M_e^f(\psi)$. Comme ci-dessus on a :

$$I_n = AA^{-1} = M_f^f(\varphi\circ\psi) \Longrightarrow \varphi\circ\psi = Id_F$$

$$I_n = A^{-1}A = M_e^e(\psi\circ\varphi) \Longrightarrow \psi\circ\varphi = Id_E.$$

Ainsi φ est une application bijective, et $\psi = \varphi^{-1}$. □

5) Matrice de changement de base

Il arrive fréquemment que l'on considère deux bases différentes sur un même espace vectoriel E. Se pose alors la question de relier les coordonnées d'un même vecteur dans les deux bases, et idem pour les matrices des applications linéaires.

Notation : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$. On note

$$P_e^f = M_e^f(Id_E) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{"matrice de passage"}$$

$\uparrow$ $GL_n(\mathbb{R})$!

En d'autres termes

$$P_e^f = M_e(f_1, f_2, \dots, f_n) :$$

Les colonnes de P_e^f sont les coordonnées dans la base e des éléments de la base f.

Il est clair que P_e^f est inversible (Prop. 4 ci-dessus) et que

$$(P_e^f)^{-1} = P_f^e.$$

Remarque sur la terminologie : dans de nombreux ouvrages P_e^f est appelée "matrice de passage de la base e à la base f", alors qu'il faudrait plutôt l'appeler "matrice de passage de la base f à la base e", cf. la proposition ci-dessous.

Proposition : Pour tout vecteur $x \in E$, on a :

$$M_e(x) = P_e^f \, M_f(x). \qquad \text{(chgt de base pour les vecteurs)}$$

C'est une application immédiate de la prop. 2 ci-dessus avec $F = E$ et $\varphi = Id$.

Au niveau des applications linéaires, on a :

Proposition : Soient E, F deux espaces vectoriels réels, $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E, et $f = (f_1, \dots, f_m)$ et $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$ deux bases de F.

Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, alors :

$$M_{f'}^{e'}(\varphi) = P_{f'}^{f} \, M_f^e(\varphi) \, P_e^{e'}. \qquad \text{(chgt de base pour les appl. linéaires)}.$$

Dém : On a $\varphi = Id_F \circ \varphi \circ Id_E$, donc en appliquant la proposition 3 (avec trois facteurs) on trouve :

$$M_{f'}^{e'}(\varphi) = \underbrace{M_{f'}^{f}(Id_F)}_{= P_{f'}^{f}} \, M_f^e(\varphi) \, \underbrace{M_e^{e'}(Id_E)}_{= P_e^{e'}}, \text{ ce qui est le résultat voulu.}$$

Corollaire (cas d'un endomorphisme) : Si E est muni de deux bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$, et si $\varphi : E \to E$ est une application linéaire, alors

$$M_f^f(\varphi) = \underbrace{(P_e^f)^{-1}}_{= P_f^e} \, M_e^e(\varphi) \, P_e^f.$$

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^3$, $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E, et $f = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que : $e_1 = f_3 - f_2$, $e_2 = f_1 + f_2 - f_3$, $e_3 = f_3 - f_1$. Ainsi

$$P := P_e^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P_f^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chgt de base pour un vecteur :

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in E$. Notons $Y = P^{-1} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$X = \underbrace{e_1 - 2e_3}_{\text{en base } e} = \underbrace{2f_1 - f_2 - f_3}_{\text{en base } f}.$$

Chgt de base pour une application linéaire :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = M_e^e(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que :

$$\varphi(f_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_1$$
$$\varphi(f_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2f_2 \quad \Rightarrow B = M_f^f(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\varphi(f_3) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3f_3$$

On vérifie par calcul direct la formule de changement de base :

$$B = P^{-1} A P.$$

Déf : On dit que deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$B = P^{-1} A P.$$

En vertu du corollaire p. 72, deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. En effet toute matrice inversible peut être interprété comme une matrice de passage.

Rem : (relation d'équivalence)

- Toute matrice A est semblable à elle-même (prendre $P = I_n$)
- Si A est semblable à B, alors B est semblable à A (échanger P et P^{-1})
- Si A, B sont semblables et B, C sont semblables, alors A, C sont encore semblables (transitivité).

Déf : On dit que deux matrices $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes s'il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{R})$ t.q.

$$B = Q^{-1} A P.$$

En vertu de la prop. page 72, deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire à un changement de base près dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée.

Rem : Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$A, B \text{ semblables} \implies A, B \text{ équivalentes}$$

La réciproque est fausse, cf. paragraphe suivant.

6) Rang d'une matrice

Déf: Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A.

N.B. $\text{rang}(A) \leq \min(m,n)$.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rang}(A) = 2.$

Le lien avec la notion de rang d'une application linéaire est tout à fait naturel:

Prop: Supposons que $A = M_f^e(\varphi)$, où $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, e une base de E et f une base de F. Alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(\varphi).$$

Dém: On a

$$\text{rang}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\text{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)))$$
$$= \dim(\text{Vect}(M_f(\varphi(e_1)), \dots, M_f(\varphi(e_n)))) = \text{rang}(A)$$

puisque que les vecteurs $M_f(\varphi(e_1)), \dots, M_f(\varphi(e_n))$ sont les colonnes de A. $\square$

En particulier $\text{rang}(A) = \text{rang}(\varphi_A)$, où $\varphi_A : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ X \longmapsto AX \end{array}$

est l'application linéaire canoniquement associée à A.

Prop: Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi $\text{rang}(A) = n$.

Dém: A inversible ssi $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijective (cf. Prop 4. p.70)

ssi $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ surjective (φ_A endomorphisme)

ssi $\text{rang}(\varphi_A) = n$ i.e. $\text{rang}(A) = n$. $\square$

On a vu que deux matrices équivalentes représentent la même application linéaire à des choix de bases près : elles ont donc <u>même rang</u>.

La réciproque est vraie :

<u>Prop :</u> Deux matrices $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes ssi $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

<u>Dém :</u> Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $r = \text{rang}(A)$. On rappelle que $r \leq m$, $r \leq n$.
Considérons l'application $\varphi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ canoniquement associée à A.
Par le théorème du rang :

$$\dim(\ker(\varphi_A)) = n - \text{rang}(\varphi_A) = n - r.$$

Soit $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(\varphi_A)$ que l'on complète en une base $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Notons $f_i = \varphi_A(e_i)$ pour $i = 1, \dots, r$.
La preuve du thm du rang montre que $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$, que l'on peut compléter en une base $f = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_m)$ de $\mathbb{R}^m$.
Alors par construction :

$$M^e_f(\varphi_A) = J_r := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & 0 & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & 0 & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} r \\ \left.\vphantom{0}\right\} m-r \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1\ 1\ 1\ 0\ 1}}_{r} \ \underbrace{\hphantom{0}}_{n-r} \end{array}$$

<u>N.B. $\text{rang}(J_r) = r$.</u>

On a ainsi que toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est équivalente à J_r :
$A = Q^{-1} J_r P$, $Q \in GL_m(\mathbb{R})$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
Si $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ on a de même $B = \tilde{Q}^{-1} J_r \tilde{P}$, d'où finalement

$$B = (Q^{-1}\tilde{Q})^{-1} A (P^{-1}\tilde{P}).$$ Ainsi A, B sont équivalentes. $\square$

Corollaire : Une matrice et sa transposée ont même rang.

En d'autres termes, le rang d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est aussi la dimension dans $\mathbb{R}^n$ du sous-espace engendré par les lignes de A.

Dém : Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on a vu que $A = Q^{-1} J_r P$ avec $Q \in GL_m(\mathbb{R})$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi

$$A^T = P^T J_r^T (Q^{-1})^T \quad \text{où } P^T \in GL_n(\mathbb{R}), (Q^{-1})^T \in GL_m(\mathbb{R})$$

Ainsi A^T est équivalente à J_r^T, donc

$$\operatorname{rang}(A^T) = \operatorname{rang}(J_r^T) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcul direct}}}{=} r = \operatorname{rang}(A). \square$$