# Graphes

**Nadia Brauner**

Nadia.Brauner@imag.fr

# Plan

# Plan

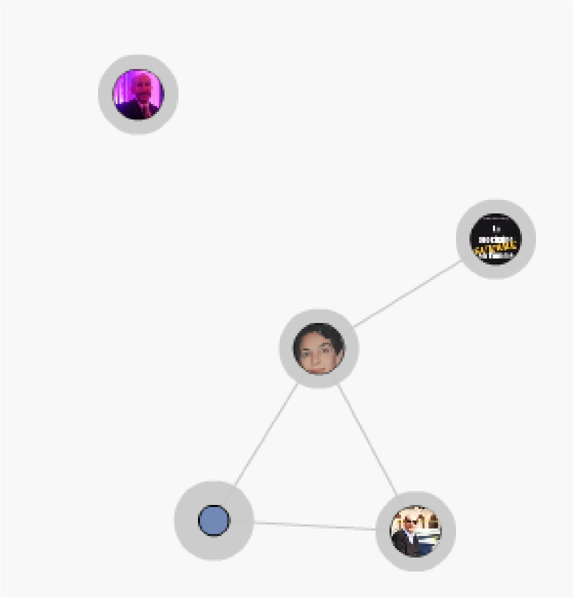
# Modélisation

L'utilisation judicieuse d'un graphe peut rendre certains problèmes concrets accessibles à un raisonnement mathématique

**Modéliser avec des graphes**

- une ensemble d'objets homogènes
(étudiants, employés, machines, usines, carrefours...)
- les liens entre ces objets
(est plus habile, est dans le même atelier, collabore avec, est relié par une route...)

# Des graphes de tous les jours : réseau Facebook



# Des graphes de tous les jours : réseau Linkedin

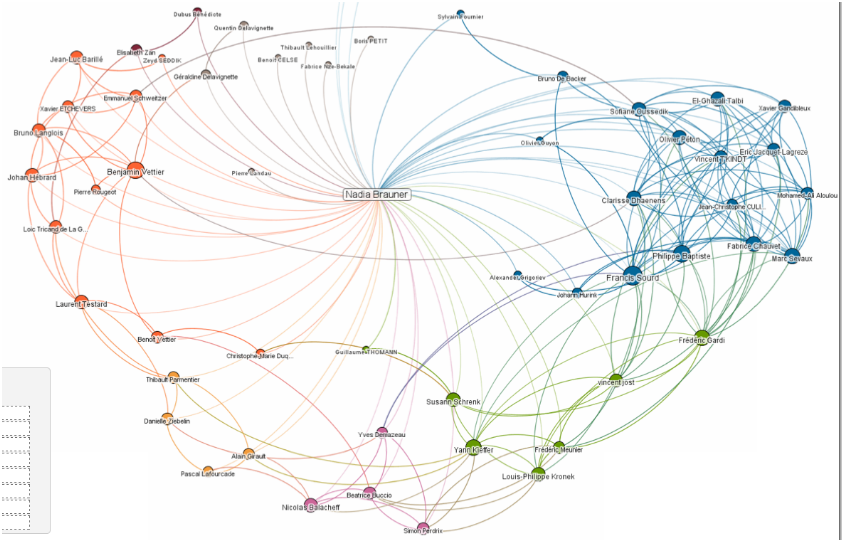
## Your Network of Trusted Professionals

You are at the center of your network. Your connections can introduce you to 1,083,000+ professionals — here's how your network breaks down:

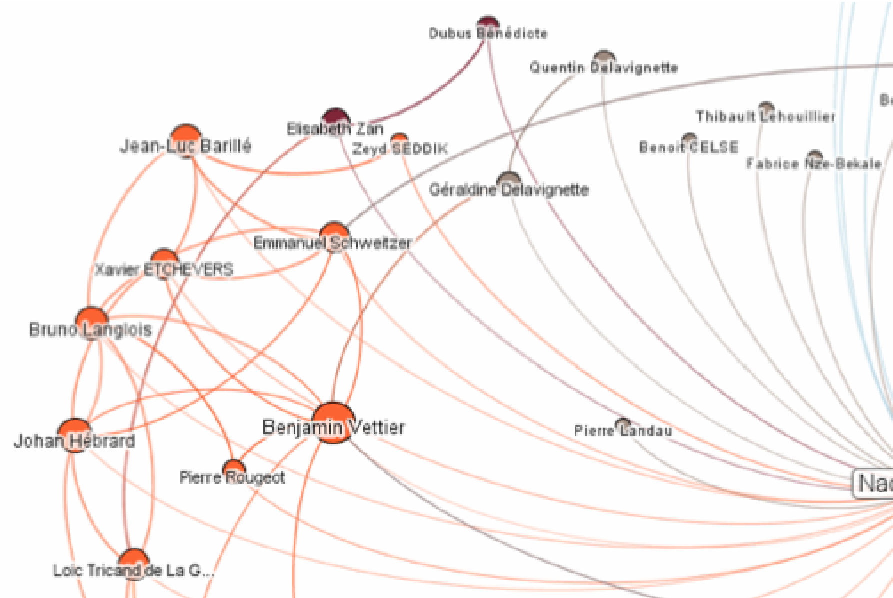
| | |
|---|---|
| 1 **Your Connections** Your trusted friends and colleagues | 57 |
| 2 **Two degrees away** Friends of friends; each connected to one of your connections | 10,400+ |
| 3 **Three degrees away** Reach these users through a friend and one of their friends | 1,072,500+ |
| **Total users you can contact through an Introduction** | 1,083,000+ |

**3,218 new people** in your network since January 23

# Des graphes de tous les jours : réseau Linkedin



# Des graphes de tous les jours : réseau Linkedin



# Des graphes de tous les jours : transports en communs

# Modélisation

## Des graphes de la vie courante

- Internet (promenade entre pages web)
- Règles d'un jeu fini (échec, dames. . . )
- Plans des lignes de transport en commun
- Réseau des amis sur Facebook

## D'autres graphes

- Molécules chimiques
- Circuits imprimés
- Factorisations d'un nombre

# Modélisation

## Décrire

- les sommets
- les arêtes, arcs
- la pondération des arcs
- la question associée

## Le GPS

- les sommets : carrefours
- les arcs : rues orientées
- la pondération des arcs : longueurs
- la question associée : plus court chemin entre deux sommets

# Modélisation

## Quelques problèmes concrets

- Cheminement
  - GPS
  - Organisation de projet
  - Procédé de fabrication le plus sûr
- Compatibilité
  - Organisation de sessions d'examens
  - Cuisson de lots dans des fours
- Recherche multicritère de solution dominantes
- Affectation de ressources sur un projet
- Flots
  - Acheminement de pétrole via un réseau d'oléoducs,
  - Fluidification du trafic automobile dans une ville

# Modélisation

## Quelques problèmes concrets

- Connexité
  - Accessibilité dans un réseau de transport
  - Réseau souterrain du campagnol terrestre 2-connexe
  - Fiabilité dans les réseaux

# Plan

# Graphes

**Graphe fini** : $G = (V, E)$ où

- $V$ est un ensemble fini
- $E$ est un ensemble de couples non ordonnés d'éléments de $V$

Cycle à 3 sommets : $V = \{1, 2, 3\}$ $E = \{12, 23, 13\}$ [1]

couple non ordonné : $12 \equiv 21$

1. Formellement $E$ est inclus dans l'ensemble des parties à deux éléments de $V$ et $uv$ devrait s'écrire $\{u, v\}$. Donc $uu \notin E$

# Graphes

## Terminologie

- $G$ : Graphe [*Graph*]
- $V$ : ensemble des sommets du graphe [*Vertices*]
- $E$ : ensemble des arêtes du graphe [*Edges*]

- **Ordre** du graphe = nb de sommets = $Card(V) = |V|$

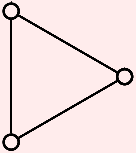
- $n = |V|$ $\qquad$ $m = |E|$

# Graphes

## Représentation graphique

- $V$ : sommets $\rightarrow$ points
- $E$ : arêtes $\rightarrow$ traits (reliant les points)

Représentation graphique du cycle à 3 sommets



# Graphes

## Représentation graphique

Dessiner les graphes suivants :

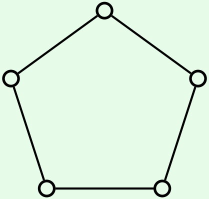
- Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
- Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
- Graphe associé à la situation : Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

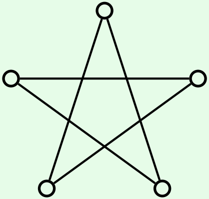
(IREM d'Aix-Marseille)

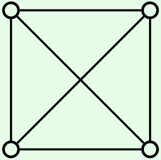
# Graphes

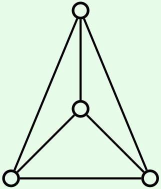
## Représentation graphique

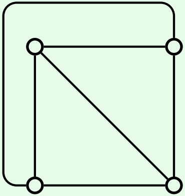
Est-ce le même graphe ?









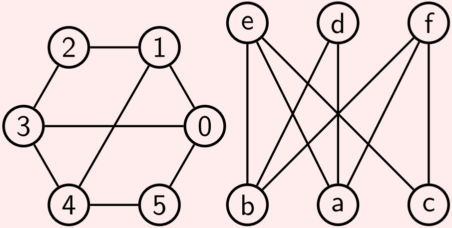


# Graphes

$G$ est **isomorphe** à $H$ :

- $\exists$ une bijection $f : V(G) \to V(H)$
- $\forall x, y \in V(G)$, on a $xy \in E(G) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(H)$

Bijection entre les sommets qui préserve les arêtes[2]




$1 \mapsto b \quad 2 \mapsto d$
$3 \mapsto a \quad 4 \mapsto e$
$5 \mapsto c \quad 0 \mapsto f$

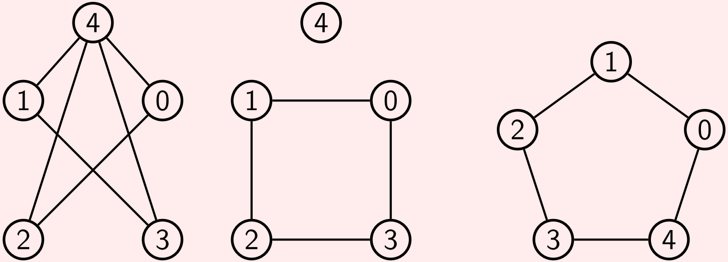
2. bien sur, $G = (V(G), E(G))$. On avait omit jusque là car il n'y avait pas d'ambiguité.

# Graphes

$\overline{G}$ est le **complémentaire** de $G$ :

- même ensemble de sommets
- les arêtes de $\overline{G}$ sont les non-arêtes de $G$ :
  $uv \in E(G) \Leftrightarrow uv \notin E(\overline{G})$

Un graphe est **auto-complémentaire**
s'il est isomorphe à son complémentaire

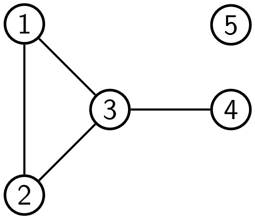


# Graphes

**Représentation graphique**

*Graphviz* : logiciel de représentation de graphes

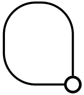
```
graph G
{
 node [shape=circle
    fontname = "Arial"];
 1 -- 3 ;
 2 -- 3 ;
 1 -- 2 ;
 3 -- 4 ;
 5 ;
}
```



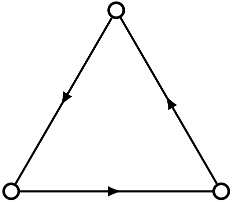
# Graphes

## Variantes

- **Boucle** : arêtes du type $ii \in E$



- **Graphe orienté** : $E$ contient des couples ordonnés $(12 \neq 21)$

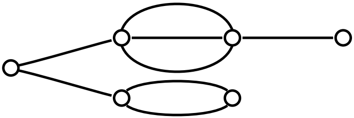


$E = \{$**arcs**$\}$

# Graphes

## Variantes

- **Multigraphe** : $E =$ collection
  (chaque arête peut apparaître plusieurs fois)



  sinon, graphe simple

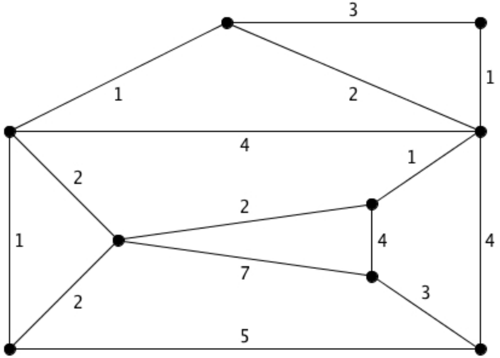
ici, **graphe** $=$ graphe simple, sans boucle, non orienté [3]

3. sauf si explicitement précisé

# Graphes

## Variantes

- **Graphes étiquetés** (labellisés, pondérés, valués) : informations/valeurs sur les sommets et/ou sur les arêtes



# Plan

# Degrés

Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

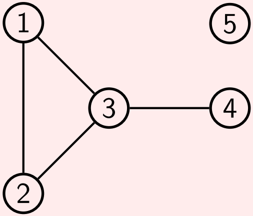
# Degrés

- $i$ et $j$ sont les **extrémités** de $ij \in E$
- $e$ est **incidente** à $i$ si $i$ est extrémité de $e$
- $i$ et $j$ sont **voisins** ou adjacents si $ij \in E$
- $N(u)$, le **voisinage** du sommet $u$ est ensemble des voisins de $u$

# Degrés

**Degré** d'un sommet $d(v)$ : nombre d'arêtes incidentes à $v$

$$d(v) = |N(v)|$$




$d(1) = 2 = d(2), \quad d(3) = 3, \quad d(4) = 1, \quad d(5) = 0$

- $v$ est **isolé** si $d(v) = 0$

# Degrés

Soit $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d\}$ et $E = \{ab, ac, ad, bd\}$.

- Quel est l'ordre du graphe ?
- Quels sont les sommets adjacents à $d$ ?
- Combien y-a-t-il d'arêtes incidentes à $c$ ?
- Quel est le degré de $d$ ?

Est-ce qu'il existe un graphe simple avec la séquence de degrés suivante ? s'il existe, trouver un tel graphe. Sinon, expliquer pourquoi.

(a) (1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 5 ; 5)
(b) (2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2)
(c) (1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1)
(d) (3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 5)
(e) (2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3)
(f) (0 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5)
(g) (5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 2 ; 2)

# Degrés

**Théorème**

*Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.*

chaque arête *uv* contribue à

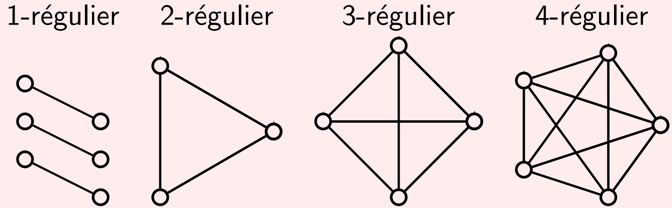
- 1 dans le degré de $u$
- 1 dans le degré de $v$

**Corollaire**

*Le nombre de sommets de degré impair est pair.*

# Degrés

- $G$ est $K$-**régulier** si $\quad d(v) = K \quad \forall v \in V$




**Graphe complet d'ordre** $K+1$ :

- graphe $K$-régulier à $K+1$ sommets
- noté $K_{K+1}$

Existe-t-il des graphes réguliers autres que les graphes complets ?

# Degrés

Dessiner $K_n$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Combien $K_n$ a-t-il d'arêtes ?

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :
Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.
Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun ;
Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

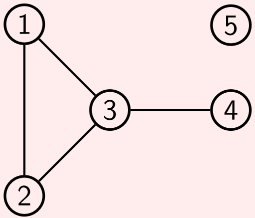
(IREM d'Aix-Marseille)

# Plan

# Représentations matricielles

**Matrice d'adjacence** de G : matrice $M$ carrée $n \times n$ binaire

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



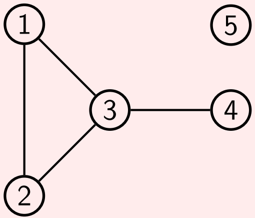

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $M$ est symétrique ($M_{ij} = M_{ji} \quad \forall ij$)
- diagonale $= 0$

# Représentations matricielles

**Matrice d'incidence** de $G$ : matrice $M$ binaire $n \times m$

$$M_{ie} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est extrémité de } e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$




$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Exactement deux 1 dans chaque colonne

# Représentations matricielles

**Graphes orientés**

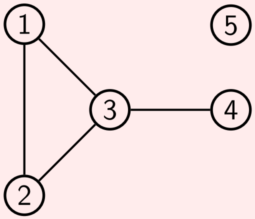
- Mêmes définition mais on doit distinguer $ij$ de $ji$
- Utiliser $\pm 1$
- Matrice d'incidence

$$M_{ia} = \begin{cases} 1 & \text{si arc } a \text{ sortant de } i \\ -1 & \text{si arc } a \text{ entrant dans } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

# Représentation machine des graphes

- **Liste d'adjacence** : tableau de $n$ listes chaînées
  liste dans la case $i$ = liste des voisins de $i$

- 1 : [2,3]
- 2 : [1,3]
- 3 : [1,2,4]
- 4 : [3]
- 5 : []




Il existe d'autres structures de données pour représenter les graphes

# Représentation machine des graphes

Dans une matrice d'incidence, que représente :

- la somme des coefficients d'une ligne ?
- la somme de tous les coefficients de la matrice ?

Dans une matrice d'adjacence, que représente :

- la somme des coefficients de la colonne $j$ ?
- la somme des coefficients de la ligne $i$ ?
- la somme de tous les coefficients de la matrice ?

Quel est le nombre maximum d'arêtes si on a $n$ sommets ?

# Représentation machine des graphes

## Comparaison

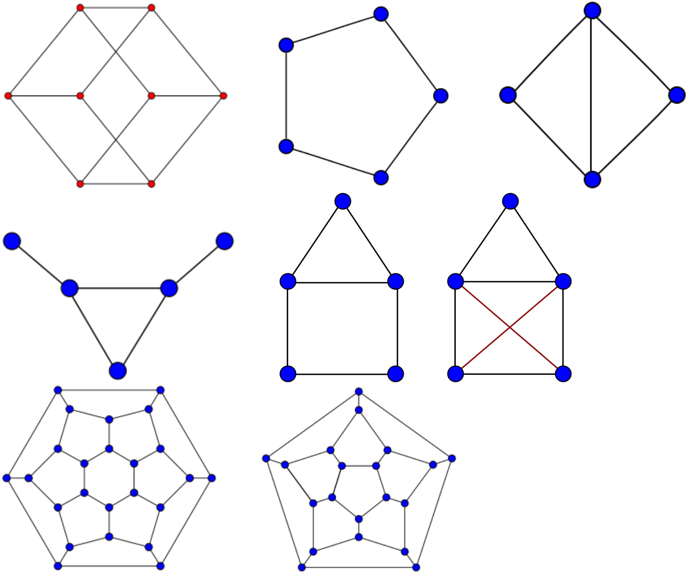
| | matrice adjacence | matrice incidence | liste adjacence |
|---|---|---|---|
| mémoire | $n^2$ | $n \times m$ | $n + 4m$ |
| peu d'arêtes | $-$ | $++$ | $++$ |
| bcp d'arêtes | $++$ | $-$ | - |
| | | | |
| $i$ et $j$ voisins ? | 1 | $m$ | degré $i$ |
| $i$ isolé ? | $n$ | $m$ | 1 |
| nb d'arêtes ? | $n^2$ | 1 | $n^2$ |

# Plan

# Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

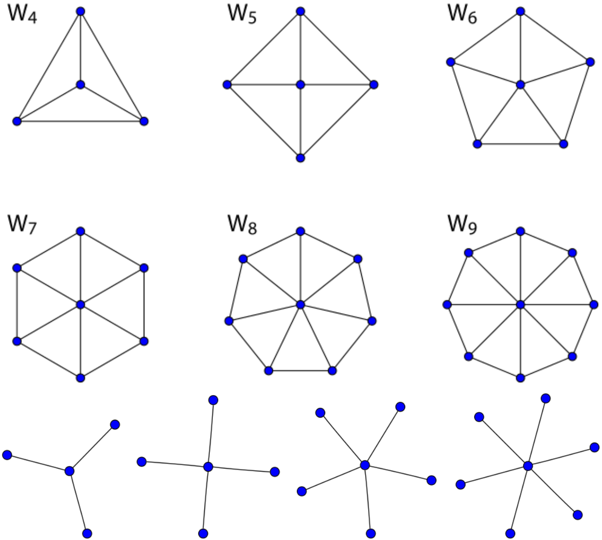
source : wikipedia



# Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

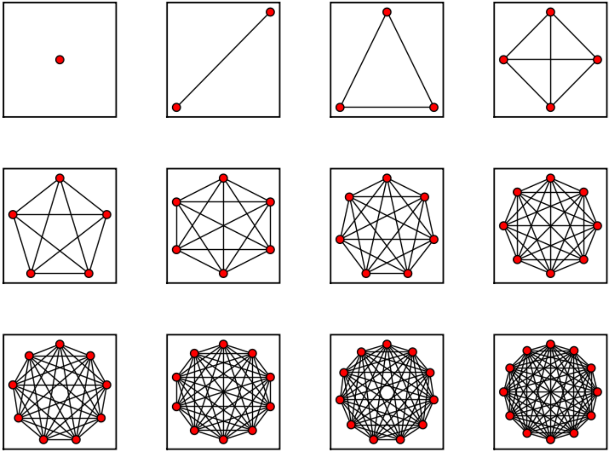
source : wikipedia



# Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

source : Wolfram MathWorld



# Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

source : Wolfram MathWorld