Corrigé première session 2016

Question de cours. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, soit $l \in \mathbf{R}$ et soit a un point adhérent au domaine de définition de f. La fonction f admet la limite l au point a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exercice 1.

1. Par définition,
$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) = B \}$$
2. On suppose que $B \subset B'$. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Par définition, $f(x) \in B$. Comme $B \subset B'$, cela implique $f(x) \in B'$. Donc $x \in f^{-1}(B')$. Ceci démontre l'inclusion $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
3. Soit $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(B \cup B') \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \cup B' \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B') \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \end{aligned}$$
Donc $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
4. Soit $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(F - B) \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in F - B \\ \Leftrightarrow\ & \neg(f(x) \in B) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(x \in f^{-1}(B)) \\ \Leftrightarrow\ & x \in E - f^{-1}(B) \end{aligned}$$
Donc $f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$.

Exercice 2.

1. Par la formule pour la somme d'une série géométrique, comme $x \neq 1$,
$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

2. De la formule précédente, on déduit les égalités :
$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3-3^n}{1-3} = \frac{3^n-3}{2}.$$
3. La formule de la question 1 donne également l'égalité
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{y}}.$$
En multipliant les deux côtés de l'égalité précédente par y^n, on en déduit les formules,
$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = y^n \left(\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{y}}\right) = \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x}.$$
Pour $n=1$ on retrouve la formule $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$, et pour $n=2$ la formule
$$y^3-x^3=(y-x)(y^2+yx+x^2).$$

Exercice 3. 1. Comme une application polynomiale est continue,
$$x^2+3x+2 \xrightarrow[x\to 1]{} 6$$
et comme $6 \neq 0$, on peut appliquer la proposition sur la limite d'un quotient qui donne
$$\frac{x^2}{x^2+3x+2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{6}.$$
2. Pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$, on a les égalités
$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}.$$
Donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2,$$
où l'avant-dernière égalité résulte de la proposition sur la limite d'un quotient.
3. Notons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbf{R}$
$$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

Par conséquent, si $x \neq 1$ et $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x > 1. \\ \frac{-1}{x} \text{ si } x < 1. \end{cases}$$

Il en résulte que les limites à gauche et à droite de la fonction considérée sont données par

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x} = -1.$$

Comme les limites à droite et à gauche diffèrent, la fonction considérée n'admet pas de limite en 1.

Exercice 4. 1. La norme de $5+12\text{i}$ est donnée par

$$|5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

2. Si $\delta = x + y\text{i}$, avec $x, y \in \mathbf{R}$ est une racine carrée de $5+12\text{i}$, alors x et y vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 13 \\ x^2-y^2 = 5 \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Donc $x^2 = 9$, $y^2 = 4$ et $xy > 0$. Par conséquent $\delta = 3+2\text{i}$ ou $\delta = -3-2\text{i}$. Il en résulte que les racines carrées de $5+12\text{i}$ sont $3+2\text{i}$ et $-3-2\text{i}$.

3. On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = 1 + 4(1+\text{i})(2+\text{i}) = 1 + 4(1+3\text{i}) = 5 + 12\text{i}.$$

les deux solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-1+3+2\text{i}}{2(1+\text{i})} = 1$$

et

$$z_2 = \frac{-1-3-2\text{i}}{2(1+\text{i})} = \frac{-1}{2}(2+\text{i})(1-\text{i}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\text{i}.$$

Exercice 5. 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2, 1, 1)$, et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour coordonnées $(1, 0, -1)$.

2. Les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont
$$(-1, 1 - (-2) \times (-1), -1) = (-1, -1, -1).$$
Comme ce produit est non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
3. Une équation implicite de l'unique plan $\mathscr{P}$ contenant A, B et C est
$$-(x-1) - (y-2) - (z-3) = 0$$
ou encore
$$x + y + z - 6 = 0$$
Comme $1 + 0 + 5 - 6 = 0$, le point D appartient au plan $\mathscr{P}$. Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Donc
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0.$$
4. Le point I, milieu du segment $[A, B]$ a pour coordonnées $(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ et comme on a égalité des distances $AI = BI$, le point I appartient à $\mathscr{H}$.
5. Par la relation de Chasles,
$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}.$$
D'autre part, comme I est le milieu de $[A, B]$, $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = 0$. Donc
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IM}.$$
On a donc les égalités
$$AM^2 - BM^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$$
6. Comme les distances sont positives, $AM = BM$ si et seulement si $AM^2 = BM^2$. Par la question précédente, cela équivaut à dire que $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Donc $\mathscr{H}$ est le plan orthogonal à la droite (AB) passant par I. Une équation implicite de $\mathscr{H}$ est donné par
$$-2(x-0) + (y - \frac{5}{2}) + (z - \frac{7}{2}) = 0$$
soit
$$-2x + y + z - 6 = 0.$$