Université Grenoble Alpes
L2 - DLST - UGA **Année 2023**

STA401 - Examen terminal - SUJET B (MIN-MAT) - 1ère session - Correction

---

Exercice 1:

1.

	Espérance de X	Moyenne empirique	Moyenne estimée de X	Variance de X	Variance empirique	Variance estimée de X
Valeurs	20	19,8	19,8	121	0,96	1,0667

2. $P(20-a<X<20+a) \;=\; P(-\frac{a}{4}<\frac{X-20}{4}<\frac{a}{4})=0,98 \iff P(\frac{X-20}{4}<\frac{a}{4})=0,99 \iff \frac{a}{4}=2,3263 \iff a=9,3052$

3. L'intervalle $]a;b[$ voulu est l'intervalle de confiance de μ au niveau de confiance 0,99 avec σ^2 inconnue : $P(\mu\in I)=1-\alpha \iff I=\left[\overline{x}\pm t^{n-1}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$ avec $t^{n-1}_{1-\alpha/2}=2,7195$. Donc $[a;b]\simeq[18,64025;21,35975]$

Exercice 2 :

On désire faire l'étude complète d'une pièce de monnaie (dont on ignore si elle est truquée ou pas), on étudie l'évènement A: " tomber sur pile". On note $P(A)=p$

PARTIE A

1. $S=\left\{\begin{array}{ll}1 & \textit{si A se réalise } (p)\\ 0 & \textit{sinon}\end{array}\right\}$ suit une loi Bernoulli de paramètre p inconnue.

2. a) X est la somme de 400 variables X_i de Bernoulli indépendantes, donc X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=400$ et p.
b) *Le théorème Central Limite* : approximation par une loi Gaussienne [n est grand, n=400>50] : $\mu = np = 400p$ et $\sigma^2=400p(1-p)$.

3. Bienaymé Tchebychev (X var. a. positive, a>0) : $P(\mid X-E(X)\mid > a)\leq V(X)/a^2 \iff$
$P(400p-a\leq X\leq 400p+a)\geq 1-400p(1-p)/a^2$
Donc : $400p-a=190$ *et* $400p+a=210$ *Donc* : $a=10>0$
De plus, $1-400p(1-p)/100\geq 0.95 \iff 4p^2-4p+0.05\geq 0 \iff$
p est compris entre $p_1=0.01266$ *et* $p_2=0.98734$ (résolution d'un trinôme)

4. a) Dans ce cas, les conditions sont bien vérifiées et X suit approximativement le loi $\mathcal{N}(200;100)$.
b) On veut savoir si la pièce est "conforme" ou pas, donc construction de l'intervalle de fluctuation de p au niveau de 99% : $\left]p\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right[$. On trouve : $\left]0,5\pm 2,5758\sqrt{\frac{0,5*0,5}{400}}\right[=]0,435605;0,564395[$
Puisque $f=0,55\in I$, donc pour un niveau de confiance de 99%, cette pièce n'est pas truquée.

PARTIE B

1. $f=220/400=0,55$

2. Intervalle de confiance pour encadrer (estimer) la probabilié p : $\left[F-u\,\frac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}}\,;\,F+u\,\frac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}}\right]$
Pour un niveau de 0.99 on lit : $u_{(0,995)}\simeq 2.5758$. On déduit l'intervalle de confiance de p : [0,48593; 0,61407].
Avec une probabilité de 99%, on conclut que le pourcentage de piles de cette pièce est comprise entre 48,93% et 61,41%

3. a) *On veut faire le test qui minimise* $\alpha = P[H_1 \mid H_0\, vraie] = P[déclarer\, p > 0.6\, alors\, que\, p = 0.5]$ d'où le test :
   $\mathcal{H}_0 :\ p = 0.5$ contre $\mathcal{H}_1 :\ p = 0.6 \quad (> 0.5)$
   b) D'après les questions précédentes, on a l'approximation : X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(np; np(1-p))$. On déduit que $F = X/n \rightsquigarrow \mathcal{N}(p\,;\ \dfrac{p(1-p)}{400})$.
   La statistique du test est donc : $T = \dfrac{F-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ elle suit la loi Normale centrée réduite
   Rejet de $\mathcal{H}_0 \iff P(F > c \mid p = 0.5) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\dfrac{F-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5*0.5}{400}}} > \dfrac{c-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5*0.5}{400}}}\right) = \alpha$
   Sur la table de la loi Normale, on déduit le quantile : $u_{(1-\alpha)}$ Ce qui donne une valeur de $c = 0.5 + u\sqrt{(05*05)/400}$
   Rejet de $\mathcal{H}_0 \iff F > c = 0.5 + u\sqrt{(05*05)/400}$ ou bien Rejet de $\mathcal{H}_0 \iff T > u_{(1-\alpha)}$
   c) Pour $\alpha = 2\%$, la valeur de $c = 0.5513425$, et $T_{calc} = 2$. Dans les deux cas, on ne rejettera pas $\mathcal{H}_0$ avec un risque β de se tromper.
   d) Puisqu'on accepte $\mathcal{H}_0$, on doit calculer le risque de 2eme espèce : $\beta = P(\text{accepter } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1\ vraie) =$
   $= P(F < c \mid p = 0.6) = P(\dfrac{F-0.6}{\sqrt{\dfrac{0.6*0.4}{400}}} < \dfrac{0.5513425-0.6}{\sqrt{\dfrac{0.6*0.4}{400}}}) = P(T' < -1.98645) \simeq 0.02349.$
   Dans le test précédent on accepte donc de déclarer la pièce non truquée avec un risque de 2,35% de se tromper.
   La puissance de ce test est donc de 0,9765, ce qui justifie un bon test précédent (*puissance* > 80%).
   e) $p_{valeur} = P_{H_0}(T > 2) \simeq 0.0228$. En conséquence, pour tous les risques $\alpha < p_{valeur}$, on accepterait $\mathcal{H}_0$ (la pièce n'est pas truquée avec un risque β) . Pour tous les risques $\alpha > p_{valeur}$, on accepterait $\mathcal{H}_1$(la pièce est truquée, au risque α)

Exercice 3 :

PARTIE A

1. Calculs : $\hat{\mu} = \overline{x} = 3.1063636$ et $\widehat{\sigma^2} = 0.19494988^2 = 0.0380$
2. Test : $\begin{cases} \mathcal{H}_0 :\ \sigma^2 = 0,05 \\ \mathcal{H}_1 :\ \sigma^2 \neq 0,05 \end{cases}$ Test paramétrique de la variance bilatéral.
   Sous $\mathcal{H}_0$ la statistique est : $T = \dfrac{nS^2}{0,05}$ suit la loi $\mathcal{X}^2_{n-1}$; Rejet de $\mathcal{H}_0 \;\Leftrightarrow\; T < z^{n-1}_{\alpha/2} \quad ou\ T > z^{n-1}_{1-\alpha/2}$
   $z^{n-1}_{\alpha/2} = 2.156 \quad z^{n-1}_{1-\alpha/2} = 25.19$ et $T_{calc} = 7,6$. On ne peut donc pas rejeter $\mathcal{H}_0$ au seuil de 1% (on conclut donc que $\sigma^2 = 0,05$)
3. Test : $\begin{cases} \mathcal{H}_0 :\ \mu = 3 \\ \mathcal{H}_1 :\ \mu > 3 \end{cases}$ On considère que la variance est inconnue.
   Sous $\mathcal{H}_0$ la statistique est : $T = \dfrac{\overline{X}-3}{S'/\sqrt{n}}$. Elle suit une loi $\mathcal{T}_{10}$; Rejet de $\mathcal{H}_0 \;\Leftrightarrow\; T > t^{n-1}_{1-\alpha}$
   Pour $\alpha = 1\%$, on obtient : { Rejet de $\mathcal{H}_0 \iff T > 2.7638$ }. Or, $T_{calc} = 1.8078$. On ne peut donc pas rejeter $\mathcal{H}_0$ au seuil de 1% (on conclura que $\mu = 3$)

.

PARTIE B

1. Test comparaison de 2 échantillons indépendants (2 séries de composants différents), même variable. Condition : Normalité des variables (donné dans l'énoncé). Test sur les moyennes unilatéral (échant 1 > échant 2 - le traitement augmente X) : $\{\mathcal{H}_0 :\ \mu_1 = \mu_2\}$ contre $\{\mathcal{H}_1 :\ \mu_1 > \mu_2\}$
   Calculs : $\overline{x}_1 = 3.10636$, $s_1^{'2} = 0.0380$; $\overline{x}_2 = 1.67545$, $s_2^{'2} = 0.143247$

2. a) Test : $\{\mathcal{H}_0 \;:\; \sigma_1^2 = \sigma_2^2\;\}$ contre $\{\mathcal{H}_1 \;:\; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\;\}$. Calcul de la statistique (attention au plus grand !) : $T_{calc} = \dfrac{s_2^{'2}}{s_1^{'2}} = 3.76966$; lecture loi Fisher : $f^{(10;10)}_{(0,995)} = 5.85$; Rejet de $\mathcal{H}_1$. On accepte l'égalité des variances au seuil de 1%.

   b) $p_{valeur} = 2 * P_{\mathcal{H}_0}(T > 3.76966) = 0,04773$ (calculatrice avec la loi de Fisher). On conclut qu'il faut prendre des risques α supérieurs à 4,77% pour déclarer que les variances sont différentes. Sinon, à 1% par exemple, on conclura à l'égalité, et on pourra faire le test des moyennes suivant.

3. Test : $\{\mathcal{H}_0 \;:\; \mu_1 = \mu_2\;\}$ contre $\{\mathcal{H}_1 \;:\; \mu_1 > \mu_2\;\}$. (l'échantillon traité a une moyenne supérieure à celui non traité ?)

   Ici, variances égales (test avant), n petits (11), donc $T = \sqrt{\dfrac{n_1+n_2-2}{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{n_1S_1^2+n_2S_2^2}} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n_1+n_2-2}$

   Calculs : $T_{calc} = 11.14736$; T suit la loi $\mathcal{T}_{20}$
   $p_{valeur} = P_{\mathcal{H}_0}(T > T_{calc}) = P(T > 11.14736) = 2,46.10^{-10}$
   Pour $\alpha = 1\%$ (donc $\alpha > p_{valeur}$), on accepte $\mathcal{H}_1$. On conclut que la durée de vie des composants avec traitement est supérieure avec un risque de 1%. Le traitement augmente donc la durée de vie moyenne des composants pour un risque de 1% mais aussi quelque soit le risque α supérieur à $2{,}46.10^{-10}$ (mais inférieur à 4.77%). Il faudrait prendre des risques $\alpha < p_{valeur}$ pour ne pas accepter $\mathcal{H}_1$. Avec des risques quasiment nul de se tromper, on conclura à l'efficacité du traitement qui augmente la durée de vie significativement.