Corrigé Feuille Td4 - MAT201

Exercice 1. On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Pour chacune des matrices ci-dessus, trouver m et n tels la matrice représente une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ dans les bases usuelles. Écrire ces applications en termes des coordonnées.

(2) Ecrire la transposée de chacune de ces matrices.

(3) Etant données deux matrices A, B appartenant à l'ensemble ci-dessus, calculer les produits $A\,B$, $A^T\,B$, $A\,B^T$, $A^T\,B^T$ qui sont définis.

Solution

Rappel d'amphi:

Si A est une matrice de taille $m\times n$ (c.à.d. A a m lignes et n colonnes) alors A est la matrice de l'application linéaire $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (produit matrice . vecteur) dans les bases usuelles.

(1) · La matrice $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a taille 3×1, donc $m=3$, $n=1$

A est la matrice de l'application linéaire

$f_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f_A(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

· la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a taille 2×3 (donc $m=2, n=3$)

A est la matrice de l'application linéaire

$f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x-y+z \end{pmatrix}$

· la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a taille 3×3 (donc $m=n=3$)

A est la matrice de l'application linéaire

$f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$

- La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ a taille 4×3 (donc $m=4$, $n=3$)

A est la matrice de l'application linéaire $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x+2y+z \\ 2x+y+3z \\ x+3y+2z \end{pmatrix}$

(2) **Rappel d'amphi** : Si A est une matrice de taille $m \times n$, sa transposée A^T est la matrice de taille $n \times m$ telle que pour tout $i = 1, .., m$, i-ème colonne de A^T = i-ème ligne de A

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Rem Remarquons que dans ce cas $A^T = A$. On dira alors que A est symétrique.

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(3) **Rappel d'amphi (produit matriciel)**

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$. Alors le produit $A \cdot B$ est défini si et seulement si $n = p$. Dans ce cas :

- $A \cdot B$ est une matrice de taille $m \times q$
- l'élément de place (i,j) (càd $i$ème ligne et j-ème colonne) de $A \cdot B$ est donné par le produit scalaire de la $i$ème ligne de A avec la j-ème colonne de B.

Avec les matrices de l'exo et leur transposées on peut donc faire les produits suivants :

- $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [(3x1)·(1x3) = 3x3]
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$ [(1x3)·(3x1) = 1x1]
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$ [(1x3)x(3x2) = 1x2]
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [(1x3)x(3x3) = 1x3]
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ [(1x3)x(3x4) = 1x4]
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ [(2x3)x(3x2) = 2x2]
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ [(2x3)x(3x1) = 2x1]

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $[(2 \times 3) \times (3 \times 3) = 2 \times 3]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $[(2 \times 3) \times (3 \times 4) = 2 \times 4]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $[(3 \times 2) \times (2 \times 3) = 3 \times 3]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $[(3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3 \times 3]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[(3 \times 3) \times (3 \times 1) = 3 \times 1]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $[(3 \times 3) \times (3 \times 2) = 3 \times 2]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $[(3 \times 3) \times (3 \times 4) = 3 \times 4]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 13 & 13 \\ 10 & 14 & 11 & 11 \\ 13 & 11 & 14 & 11 \\ 13 & 11 & 11 & 14 \end{pmatrix}$ $[(4 \times 3) \times (3 \times 4) = 4 \times 4]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $[(4 \times 3) \times (3 \times 1) = 4 \times 1]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $[(4 \times 3) \times (3 \times 2) = 4 \times 2]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $[(4\times 3)\times(3\times 3) = 4\times 3]$

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 14 \\ 13 & 18 & 17 \\ 14 & 17 & 23 \end{pmatrix}$ $[(3\times 4)\times(4\times 3) = 3\times 3]$

Exercice 2. On considère les application linéaires $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suivantes :

$f_1(x,y,z) = x + 2y - 3z, \quad f_2(x) = (x, -x, 2x)$
$f_3(x,y) = (x+y, x-y), \quad f_4(x,y,z) = (x+2y+3z, x+y+z, x-y-z)$
$f_5(x,y,z) = (x-2y, 3y), \quad f_6(x,y,z,t) = (x+y-2z+t, x+y+t).$

Pour chacune :

(1) écrire la matrice A_i de f_i dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$;
(2) calculer $\mathrm{Ker}(A_i)$
(3) L'application f_i est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Rappel d'amphi: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ application linéaire.
La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est la matrice A de taille $m\times n$ telle que :

i-ème colonne de A = coordonnées du vecteur $f(0,\dots,0,1,0,\dots)$
(dans la base can. de $\mathbb{R}^m$)

1 ↑ ième position

Rém Il s'agit de la matrice telle que

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f_1(x,y,z) = x + 2y - 3z,$

(1) $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et A_1 est la matrice de taille 1×3 suivante

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$f_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $f_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $f_3\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

(2) Rappelons que

$$\mathrm{Ker}(A_i) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid A_i\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0\right\} = \mathrm{Ker}(f_i)$$

$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = 3z-2y\} =$$

$$= \{(3z-2y, y, z) \mid y,z\in\mathbb{R}\} =$$

$$= \mathrm{Vect}((-2,1,0),(3,0,1))$$

(3) · Comme $\dim \mathrm{Ker}(f_i) = \dim \mathrm{Ker}(A_i) = 2 \neq 0$ l'application f_i n'est pas injective

· D'après le thm du rang, on a que f_i est surjective car $\dim \mathrm{Im}(f_i) = 3 - \dim \mathrm{Ker}(f_i) = 3-2 = 1 = \dim(\mathbb{R})$

- $f_2(x) = (x, -x, 2x)$

(1) On a $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, donc A_2 matrice 3×1 donnée par

$A_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $f_2(1)$

(2) $\mathrm{Ker} A_2 = \{x\in\mathbb{R} \mid f_2(x) = (0,0,0)\} = \{0\}$

(3) f_2 Injective car $\ker f_2 = \{0\}$

D'après le thm du rang, $\dim \mathrm{Im} f_2 = 1-0 = 1 \Rightarrow$

f_2 pas surjective car $\dim \mathrm{Im} f_2 < 3$.

- $f_3(x,y) = (x+y, x-y)$,

(1) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donc A_3 matrice 2×2 définie par

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(1,0)$ $f(0,1)$

(2) $\ker A_3 = \ker(f_3) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \right\} = \{(0,0)\}$

(3) f_3 injective car $\ker(f_3) = \{(0,0)\}$ et aussi surjective car $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2-0 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

- $f_4(x,y,z) = (x+2y+3z, x+y+z, x-y-z)$

(1) $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$f(1,0,0)$ $f(0,1,0)$ $f(0,0,1)$

(2) $\ker A_4 = \ker f_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \right\}$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x=y+z \\ y+z=0 \end{cases} \right\} =$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x=0 \\ y=-z \\ z=0 \end{cases} \right\} = \{(0,0,0)\}$

(3) f_4 injective car $\ker f_4 = \{(0,0,0)\}$ et surjective car $\dim \operatorname{Im} f_4 = 3-0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

- $f_5(x,y,z) = (x-2y, 3y)$,

(1) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow A_5 =$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \\ & \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array} & \end{array}$$

(2) $\ker A_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 2y \\ 3y = 0 \end{cases}\} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((0,0,1))$

(3) f_5 pas injective car $\dim \ker A_5 = \dim \ker f_5 = 1$
f_5 surjective car $\dim \operatorname{Im} f_5 = 3-1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ d'après le thm. du rang.

- $f_6(x,y,z,t) = (x+y-2z+t, x+y+t)$

(1) $f_6 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ et $A_6 =$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(1,0,0,0) & f(0,1,0,0) & f(0,0,1,0) & f(0,0,0,1) \end{array} \end{array}$$

(2) $\operatorname{Ker} A_6 = \operatorname{Ker} f_6 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ x+y+t=0 \end{cases}\right\}$

$= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} t=-x-y \\ 2z=0 \end{cases}\right\} =$

$= \{(x,y,0,-x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} =$

$= \operatorname{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1))$

(3) f_6 pas injective car $\dim \operatorname{Ker} f_6 = 2$

f_6 surjective car $\dim \operatorname{Im} f_6 = 4-2 = \dim \mathbb{R}^2$, d'après le thm du rang.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des familles suivantes :

$$\mathcal{B}_1 = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)),$$
$$\mathcal{B}_2 = ((1,-1,0),(0,1,-1),(1,1,1)),$$
$$\mathcal{B}_3 = ((2,2,3),(1,1,1),(1,0,1))$$

(1) Vérifier que $\mathcal{B}_i$ est une base de $\mathbb{R}^3$;

(2) Écrire les matrices de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_i}$ et $P_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}}$.

(3) Écrire la matrice $M_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}(\varphi)$.

(1) Vérifions que B_1, B_2, B_3 sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
Comme chaque famille a 3 vecteurs, il suffit de montrer que chaque famille est libre dans $\mathbb{R}^3$.

- B_1 est libre car si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0)$ alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

- B_2 est libre car si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0)$ alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_3 + \lambda_3 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

- B_3 est libre car si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda_1(2,2,3) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(1,0,1) = (0,0,0)$ alors

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \ (\mathrm{III} - \mathrm{I}) \\ \lambda_2 = -2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -3\lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

(2) Ici on fera un rappel sur les matrices de passage :

Rappel d'amphi

Soit E un espace vectoriel de $\dim E = n$ sur $\mathbb{R}$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ deux bases de E

La matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de taille $n \times n$ ainsi formée :

pour tout $i = 1, .., n$, la i-ème colonne de $P_B^{B'}$ est donnée par les coordonnées de e_i' dans la base B.

- Si $B = (\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3})$ base canonique et $B_1 = (\underbrace{(1,0,0)}_{e_1'}, \underbrace{(1,1,0)}_{e_2'}, \underbrace{(1,1,1)}_{e_3'})$ alors

* Pour trouver $P_B^{B_1}$ on trouve les coord. de chaque vecteur de B_1 dans la base B

$$e_1' = (1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$$
$$e_2' = (1,1,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 0 (0,0,1)$$
$$e_3' = (1,1,1) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$$

Donc

$$P_B^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Pour trouver $P_{B_1}^{B}$ on trouve les coord. de chaque vecteur de B dans la base B_1

$$e_1 = (1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (1,1,0) + 0 (1,1,1)$$
$$e_2 = (0,1,0) = -1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (1,1,0) + 0 (1,1,1)$$
$$e_3 = (0,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - 1 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,1,1)$$

Donc nous avons que $P_{B_1}^{B}$ est la matrice suivante :

$$P_{B_1}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rém Remarquons que $P_{B_1}^{B} \cdot P_{B}^{B_1} = I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Si $B = (\overset{=e_1}{(1,0,0)}, \overset{=e_2}{(0,1,0)}, \overset{=e_3}{(0,0,1)})$ base canonique et $B_2 = (\underset{=e_1'}{(1,-1,0)}, \underset{=e_2'}{(0,1,-1)}, \underset{=e_3'}{(1,1,1)})$ alors

* Pour trouver $P_{B}^{B_2}$ on trouve les coord. de chaque vecteur de B_2 dans la base B

$e_1' = (1,-1,0) = 1 \cdot (1,0,0) + -1 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$

$e_2' = (0,1,-1) = 0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + -1 (0,0,1)$

$e_3' = (1,1,1) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$

Donc

$$P_{B}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

* Pour trouver $P_{B_2}^{B}$ on trouve les coor. aque vecteur de B dans la base B_2

- $e_1 = (1,0,0) = \lambda_1 (1,-1,0) + \lambda_2 (0,1,-1) + \lambda_3 (1,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 1 - \lambda_3 = 1 - \lambda_2 = 2/3 \\ \lambda_2 = 1/3 \end{cases}$$

Donc $e_1 = \frac{2}{3}(1,-1,0) + \frac{1}{3}(0,1,-1) + \frac{1}{3}(1,1,1)$

- $e_2 = (0,1,0) = \lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 = -1/3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3 \\ \lambda_3 = 1/3 \end{cases}$$

Donc $e_2 = -\frac{1}{3}(1,-1,0) + \frac{1}{3}(0,1,-1) + \frac{1}{3}(1,1,1)$

- $e_3 = (0,0,1) = \lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 = -1/3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 - 1 = -2/3 \\ \lambda_3 = 1/3 \end{cases}$$

Donc $e_2 = -\frac{1}{3}\cdot(1,-1,0) - \frac{2}{3}\cdot(0,1,-1) + \frac{1}{3}(1,1,1)$

- Enfin

$$P_{B_2}^{B} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Si $\mathcal{B} = (\overset{=e_1}{(1,0,0)}, \overset{=e_2}{(0,1,0)}, \overset{=e_3}{(0,0,1)})$ base canonique et $\mathcal{B} = (\underset{=e_1'}{(2,2,3)}, \underset{=e_2'}{(1,1,1)}, \underset{=e_3'}{(1,0,1)})$ alors

* Pour trouver $P_B^{B_3}$ on trouve les coord. de chaque vecteur de B_3 dans la base B

$e_1' = (2,2,3) = 2\cdot(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3\cdot(0,0,1)$
$e_2' = (1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1(0,0,1)$
$e_3' = (1,0,1) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$

Donc

$$P_B^{B_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* Pour trouver $P_{B_3}^{B}$ on trouve les coord. de chaque vecteur de B dans la base B_3

- $e_1 = (1,0,0) = \lambda_1(2,2,3) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(1,0,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 = 2 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Donc $e_1 = -1(2,2,3) + 2(1,1,1) + 1\cdot(1,0,1)$

- $e_2 = (0,1,0) = \lambda_1(2,2,3) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(1,0,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 - 2\lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $e_2 = 0\cdot(2,2,3) + 1\cdot(1,1,1) - 1\cdot(1,0,1)$

• $e = (0,0,1) = \lambda_1 (2,2,3) + \lambda_2 (1,1,1) + \lambda_3 (1,0,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 = -2 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Donc $e = 1 \cdot (2,2,3) - 2 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (1,0,1)$

• Donc $$P_{B_3}^{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) __Rappel d'amphi:__ Soit E espace vect, $\dim E = n$

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E
$\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ base de E alors

• $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ = matrice $n \times n$ telle que

i-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ = coordonnée de $\varphi(e_i')$ dans la base $\mathcal{B}$

• En particulier si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$

$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ est la matrice $n \times n$ telle que

i-ème colonne de $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ = coordonnée de $\varphi(e_i')$ dans la base $\mathcal{B}'$

- En particulier : $P_B^{B'} = M_B^{B'}(\mathrm{Id})$ où $\mathrm{Id} : E \to E$ est l'application identité, $\mathrm{Id}(v) = v$ pour tout $v \in E$.

- Nous avons la formule :

$$M_{B'}^{B'}(\varphi) = P_{B'}^{B} \cdot M_B^B(\varphi) \cdot P_B^{B'}$$

- Comment se souvenir de cette formule ?
Avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\underset{B'}{E} \arrow[r, "M_{B'}^{B'}(\varphi)", "\varphi"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}", "P_B^{B'}"'] & \underset{B'}{E} \\
\underset{B}{E} \arrow[r, "M_B^B(\varphi)", "\varphi"'] & \underset{B}{E} \arrow[u, "\mathrm{Id}", "P_{B'}^{B}"']
\end{tikzcd}$$

- Pour faire la flèche $\longrightarrow$ on peut suivre le diagramme et faire d'abord la flèche $\downarrow$ ensuite $\longrightarrow$ ensuite $\uparrow$

- Au niveau des fonctions, ça revient à dire $\varphi = \mathrm{Id} \circ \varphi \circ \mathrm{Id}$
- Au niveau des matrices ça revient à dire

$$M_{B'}^{B'}(\varphi) = P_{B'}^{B} \cdot M_B^B(\varphi) \cdot P_B^{B'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc nous avons

$*$ $M_{B_1}^{B_1}(\varphi) = P_{B_1}^{B} \cdot M_B^B(\varphi) \cdot P_B^{B_1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$*$ $M_{B_2}^{B_2}(\varphi) = P_{B_2}^{B} \cdot M_B^B(\varphi) \cdot P_B^{B_2} =$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 0 \\ 4/3 & -5/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$*$ $M_{B_3}^{B_3}(\varphi) = P_{B_3}^{B} \cdot M_B^B(\varphi) \cdot P_B^{B_3} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 \\ 16 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$.

(1) Démontrer que $\varphi \circ \varphi(e_1) = \varphi(e_2) = 0$ et que $\varphi \circ \varphi(e_3) = \varphi(e_3)$.

(2) En déduire A^2. Vérifier en effectuant le produit matriciel.

(3) Démontrer que $A^3 = A^2$ sans effectuer le produit matriciel, puis vérifier en l'effectuant.

(4) Donner une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$

Sol (1) Nous avons que $\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x+z\\z\end{pmatrix}$

Donc $\varphi\circ\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

et $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

En outre $\varphi\circ\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(2) Si $A = M_B^B(\varphi) \Rightarrow A^2 = M_B^B(\varphi\circ\varphi)$

Donc 1ère colonne de $A^2 = \varphi\circ\varphi(e_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

2ème colonne de $A^2 = \varphi\circ\varphi(e_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

3ème colonne de $A^2 = \varphi\circ\varphi(e_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

On vérifie en effet que

$$A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) On a que $A^3 = M_B^B(\varphi\circ\varphi\circ\varphi)$

- $\varphi\circ\varphi\circ\varphi(e_1) = \varphi(\varphi\circ\varphi(e_1)) = \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ = 1ère colonne de A^3
- $\varphi\circ\varphi\circ\varphi(e_2) = \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ = 2ème col. de A^3
- $\varphi\circ\varphi\circ\varphi(e_3) = \varphi\circ\varphi(e_3) = \varphi(e_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ = 3ème col. de A^3

Donc $A^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} = A^2$

Vérifions avec le produit matriciel :

$$A\cdot A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(4) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+z=0 \\ z=0 \end{cases}\} = \operatorname{Vect}((0,1,0))$

$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)) =$

$\overset{!}{=} \operatorname{Vect}((0,1,0), (0,0,0), (0,1,1)) =$

$\overset{!}{=} \operatorname{Vect}((0,1,0), (0,1,1))$

Rappel : le rang d'une matrice et comment le calculer

Déf Soit A une matrice $n \times m$. Le rang de A, rang(A), est le nombre maximale de colonnes de A formant une famille libre.

De façon équivalente : $\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Vect}(\text{colonnes de } A)$

Fait : $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$

Donc $\operatorname{rang}(A) =$ nombre maximale de lignes de A qui forment une famille libre

- le rang de certaines matrices est particulièrement facile à calculer.

Déf Une matrice A est dite échelonnée en lignes si, le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne, augmente strictement ligne par ligne.

Ex
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est échelonnée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas échelonnée

<u>Fait</u>: Si A est une matrice échelonnée $\Rightarrow$
$\text{rang}(A) = \#$ lignes non nulles de A

<u>Méthode de Gauss</u>:

Soit A une matrice quelconque.

<u>But</u> transformer A en une matrice échelonnée $\tilde{A}$ telle que $\text{rang}(\tilde{A}) = \text{rang}(A)$.

<u>Operations pour échelonner une matrice sans changer le rang</u>:

1. Echanger deux lignes entre elles
2. Echanger deux colonnes entre elles
3. Multiplier une ligne par un scalaire **non nul**
4. Ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne

<u>Rem</u> 3 & 4 peuvent aussi se résumer par:

Remplacer une ligne L par une combinaison linéaire de la forme $\alpha \cdot L +$ combinaison linéaire des autres lignes avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Exercice 9. Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{lignes}]{\text{permutation des}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 3L_1]{L_3 \to L_3 + 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[L_4 \to 2L_4 - L_2]{L_3 \to 2L_3 + 3L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{L_3 \to L_3 + 2L_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 4L_2]{L_3 \to L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to 3L_3 + L_2 \\ L_4 \to 3L_4 + L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rang$(A) = 3$.

APPLICATION 1 : Décider si une matrice est inversible

Théorème Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

A est inversible $\Longleftrightarrow$ rang$(A) = n$.

APPLICATION 2 : Calcul de l'inverse d'une matrice

Thm Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$.
Alors A peut être transformée en la matrice identité en appliquant les opérations de la méthode de Gauss.

Algorithme pour calculer A^{-1} (si A inversible)

On écrit la matrice A et la matrice identité $\mathbb{I}_n$ $n \times n$ à côté

	A	$\mathbb{I}_n$	
on fait des opérations	$\}$	$\}$	on effectue à chaque étape exactement les

de la méthode de Gauss jusqu'à que A devienne $\mathbb{I}_n$ $\downarrow$ $\mathbb{I}_n$ $\downarrow$ A^{-1}

mêmes operations qu'on fait sur A aussi sur $\mathbb{I}_n$. Quand A devient $\mathbb{I}_n$, $\mathbb{I}_n$ devient A^{-1}

Exercice 13. Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>**Solution:**</u>

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \to L_1 \to L_2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A cette étape on voit que rang $A = 3$
Donc A inversible et on peut continuer

$L_1 \to L_1 - L_2 - 2L_3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 \to \left(-\frac{1}{2}\right) . L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3 \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

② $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \to L_3 + 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \to L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

À cette étape on voit que $\operatorname{rang} A = 3$

Donc A inversible et on peut continuer

$$L_2 \to 4L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \to 8L_1 - 3L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} L_1 \to L_1/(-8) \\ L_2 \to L_2/8 \\ L_3 \to L_3/(-8) \end{matrix} \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & -3/8 & -1/8 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

③ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} L_2 \to 2L_2 - L_1 \\ L_3 \to 2L_3 - L_1 \end{matrix} \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_3 \to 3L_3 - L_2 \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

A cette étape
on voit que
rang $A = 3$
Donc A inversible
et on peut continuer

$$\downarrow \quad L_2 \to 4 \cdot L_2 + 7L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -18 & -6 & 42 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_1 \to 36L_1 + L_2 - 9L_3$$

$$\begin{pmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & 12 & -12 \\ -18 & -6 & 42 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1/72 \\ L_2 \to L_2/36 \\ L_3 \to L_3/4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 7/6 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_2 \to L_2 - 3L_1 \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_3 \to L_3 + 7L_2 \quad \downarrow$$

Ici on peut dire que rang $A = 3$ donc A inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_2 \to 15L_2 - 2L_3 \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_1 \to 15L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} L_1 \to L_1/15 \\ L_2 \to L_2/15 \\ L_3 \to L_3/15 \end{matrix}$$

$$\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. En utilisant la notion de rang d'une matrice, dire si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

(1) $\mathcal{F} = ((1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2))$

(2) $\mathcal{F} = ((5, 1, 0), (-1, 4, 1), (2, 0, 1))$

(3) $\mathcal{F} = ((0, 1, 2), (2, 1, 4), (2, 4, 10))$

<u>**Solution**</u>

(1) F base de $\mathbb{R}^3 \iff \dim \mathrm{Vect}(F) = 3 \iff \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

Or on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\3&1&2\end{pmatrix}=3 \text{ et } \mathcal{F} \text{ base de } \mathbb{R}^3.$$

(2) $\mathcal{F}$ base de $\mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix}5&-1&2\\1&4&0\\0&1&1\end{pmatrix}=3$

On échelonne :

$$\begin{pmatrix}5&-1&2\\1&4&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{}\begin{pmatrix}1&4&0\\5&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_2\to L_2-5L_1]{}\begin{pmatrix}1&4&0\\0&-21&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\to 21L_3+L_2]{}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&0\\0&-21&2\\0&0&23\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix}5&-1&2\\1&4&0\\0&1&1\end{pmatrix}=3\Rightarrow \mathcal{F} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

(3) $\mathcal{F}$ base de $\mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\2&4&10\end{pmatrix}=3$

On échelonne :

$$\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\2&4&10\end{pmatrix}\xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_1]{}\begin{pmatrix}1&1&4\\0&2&2\\2&4&10\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\to L_3-2L_1]{}\begin{pmatrix}1&1&4\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\to L_3-L_2]{}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&4\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\2&4&10\end{pmatrix}=2\Rightarrow \mathcal{F} \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3.$$

Exercice 11 (Vrai ou faux). Soit A une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? Motivez vos réponses.

(1) $\operatorname{rang}(A)=r$ si et seulement si la famille des vecteurs colonnes de A est de rang r.

(2) $\operatorname{rang}(A)=r$ si et seulement si la famille des vecteurs lignes de A est de rang r.

(3) Si $\operatorname{rang}(A)=r$, alors toute matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r.

(4) Si une matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r, alors A est de rang $\geq r$.

(5) La matrice nulle est la seule matrice de rang 0.

(6) Si A possède deux lignes non nulles et qui ne sont pas proportionnelles, alors $\operatorname{rang}(A)\geq 2$.

Solution:

(1) $\text{rang}(A) = r \iff \dim \text{Vect}(\text{colonnes } A) = r$ par déf. de $\text{rang}(A)$. Donc **VRAI**.

(2) VRAI car $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) = \dim \text{Vect}(\text{lignes } A)$

(3) FAUX : par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 2$$ mais la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ formée par les 2 premières col. de A a $\text{rang}(A') = 1$

(4) Vrai car cela signifie que au moins r colonnes de A forment une famille libre.

(5) Vrai. Démontrons la contraposée.

Pr Supposons A pas matrice nulle $\Rightarrow$ A a au moins une colonne non nulle $\Rightarrow \text{rang} A \geq 1$. $\square$

(6) VRAI : si a possède deux lignes L et $\tilde{L}$ non nulles et non proportionnelles $\Rightarrow$

$$\text{rang} A = \dim \text{Vect}(\text{lignes de } A) \geq \dim \text{Vect}(L, \tilde{L}) = 2.$$