Partie
Analyse élémentaire

MAP101 - DLST - UGA - 2024-2025

Licence 1 - Parcours IMA, MIN Int. et S&D

Table des matières

Ce document correspond à la partie Analyse élémentaire du module MAP101.
Il est composé de quatre chapitres, chaque chapitre consiste en une partie *Cours* suivi d'une fiche d'exercices.
Pour chaque chapitre, l'étudiant devra au préalable avoir lu la partie *Cours*, les séances de Cours-TD seront principalement destinées à approfondir des notions nouvelles de cours, puis à faire des exercices correspondants aux différentes fiches.

Dans cette partie Analyse élémentaire, l'accent sera mis sur la manipulation de fonctions (fonctions usuelles et fonctions composées à partir des fonctions usuelles) et de techniques de calcul de dérivées, primitives et intégrales. Le dernier chapitre consiste en la résolution d'équations différentielles, outil mathématique utilisé notamment en physique.

Ce document est disponible sur le site Chamilo-UGA (`http://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/GBX1MP11/`).

Notes :

Fonctions d'une variable réelle

1 Vocabulaire

Dans tout ce cours, on va utiliser des fonctions s'appliquant à des variables réelles et à valeurs réelles.

Définition 1. *Une **fonction** d'une variable réelle à valeurs réelles est une application f de A dans $\mathbb{R}$ (pour chaque valeur réelle x de A, il existe un unique réel y de $\mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$).*
La notation standard d'une fonction est la suivante :

$$f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right\}$$

*Le plus grand ensemble A permettant de définir une fonction est le **domaine de définition** de f, et est noté $\mathcal{D}_f$.*
Parfois une fonction f peut être définie uniquement par une expression de la variable x sous la forme $f(x)$ ou $y = f(x)$, dans ce cas, la première chose à faire est de déterminer (si cela est possible) son domaine de définition.

*Soit $x \in \mathcal{D}_f$ alors $y = f(x)$ est l'**image** de x (par la fonction f)*
*Pour $y \in \mathbb{R}$, x est un **antécédent** de y si $y = f(x)$.*
*L'ensemble des images des éléments de $\mathcal{D}_f$ par f est appelé **ensemble image** de f et noté $f(\mathcal{D}_f)$.*
*Si A est un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, l'**image** de A, notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A : $f(A) = \Big\{ f(x) \ , \ x \in A \Big\}$*

Exemple 1. *Soit la fonction y définie par $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.*
Pour pouvoir calculer $f(x)$, il faut que la valeur $x^2 - 4$ soit positive ou nulle :

$$x^2 - 4 \geq 0 \iff x^2 \geq 4 \iff |x| \geq 2 \iff \{x \geq 2 \text{ OU } x \leq -2\}$$

Le domaine de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;\,-2\,] \ \cup \ [\,2\,;\,+\infty\,[$, et on peut ensuite restreindre la définition de f à tout sous-ensemble A inclus dans $\mathcal{D}_f$.
Soit $x = 3$, l'image de x par f est $y = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5}$.
Soit $A = [\,2\,;\,5\,]$ alors $f(A) = [\,0\,;\,\sqrt{21}\,]$.
Soit $y = f(x) = 2$, les antécédents de y sont les deux valeurs $x = -\sqrt{8}$ et $x = \sqrt{8}$.

Exemple 2. *Pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2\,x}$, son domaine de définition est l'ensemble des x tels que $x^2 - 2\,x \neq 0 \iff x\,(x-2) \neq 0 \iff \Big\{ x \neq 0 \text{ ET } x \neq 2 \Big\}$:*

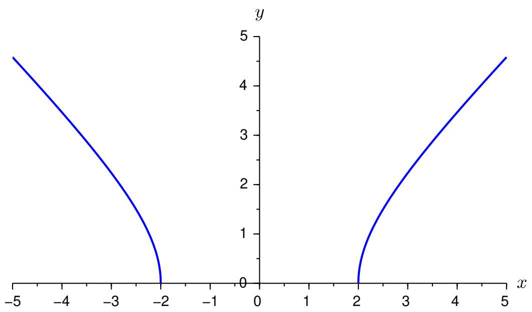
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\,;\,2\} =]-\infty\,;\,0\,[\ \cup \ ]\,0\,;\,2\,[\ \cup \ ]\,2\,;\,\infty\,[$$

Définition 2. *Pour une fonction f définie de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$, le* ***graphe*** *est l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avec $x\in\mathcal{D}_f$ et $y=f(x)$:*

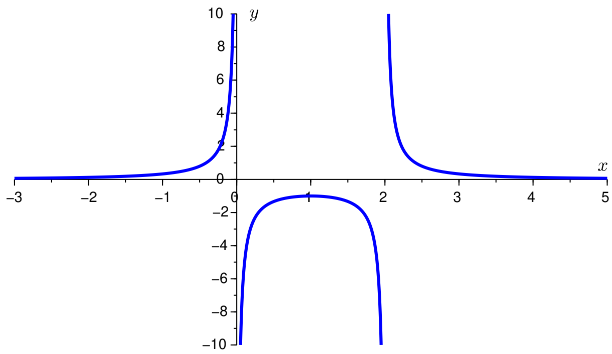
$$\Gamma = \Big\{(x,y)\ ,\ x\in\mathcal{D}_f \text{ et } y=f(x)\Big\}$$

On peut représenter graphiquement la fonction f par son graphe Γ, c'est à dire l'ensemble des points (x,y) du plan $\mathbb{R}^2$ tel que $y=f(x)$.

En général, le graphe Γ de la fonction f est non borné, alors pour sa représentation, on se limite à des valeurs de x (resp. y) dans un intervalle borné $[x_{min}, x_{max}]$ (resp. $[y_{min}, y_{max}]$).



Fonction $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ représentée pour x entre -5 et 5, et y entre 0 et 5



Fonction $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2\,x}$ représentée pour x entre -3 et 5, et y entre -10 et 10

Définition 3. *Les opérations sur les réels s'étendent aux fonctions de manière naturelle.*

cours$_f$onctions.tex

- ***addition :***
$$\begin{array}{rcl} & f+g & \\ \mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x)=f(x)+g(x) \end{array}$$

- ***multiplication :***
$$\begin{array}{rcl} & f\,g & \\ \mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f\,g)(x)=f(x)\,g(x) \end{array}$$

- ***multiplication par un réel :***
$$\begin{array}{rcl} & \lambda f & \\ \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x)=\lambda\,f(x) \end{array}$$

On peut aussi comparer des fonctions. Si f et g sont telles que $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_g=\mathcal{D}$:

— *si pour tout $x\in\mathcal{D}, f(x)=g(x)$, on note $f=g$*
— *si pour tout $x\in\mathcal{D}, f(x)=0$, on note $f\equiv 0$ (f* ***identiquement nulle****)*
— *si pour tout $x\in\mathcal{D}, f(x)\le g(x)$, on note $f\le g$ ou $g\ge f$*

Définition 4. *Soit f une fonction définie de A dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :*

- ***constante*** *sur A si* $\forall x \in A, \forall y \in A, \quad f(x) = f(y)$
- ***croissante*** *sur A si* $\forall x \in A, \forall y \in A, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- ***décroissante*** *sur A si* $\forall x \in A, \forall y \in A, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- ***strictement croissante*** *sur A si* $\forall x \in A, \forall y \in A, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- ***strictement décroissante*** *sur A si* $\forall x \in A, \forall y \in A, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$
- ***monotone*** *sur A si elle est croissante ou décroissante sur A*
- ***strictement monotone*** *sur A si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur A*
- ***majorée*** *sur A si $f(A)$ est majoré, c'est à dire :*
  il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) \leq M$.
- ***minorée*** *sur A si $f(A)$ est minoré, c'est à dire :*
  il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) \geq m$.
- ***bornée*** *sur A si $f(A)$ est borné c'est à dire si $f(A)$ est majoré et minoré.*

Définition 5. *Soit f une fonction, de domaine de définition $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0, c'est à dire $x \in \mathcal{D}_f \iff -x \in \mathcal{D}_f$.*
On dit que f est :

- ***paire*** *si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.*
- ***impaire*** *si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.*

L'intérêt de cette définition est que pour connaître les propriétés d'une fonction paire (resp. impaire), il suffit de connaître les propriétés de sa restriction à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.

Définition 6. *Une fonction f est* ***périodique*** *s'il existe un réel t non nul telle que* $\forall x \in \mathcal{D}_f, x + t \in \mathcal{D}_f$ *et* $f(x + t) = f(x)$.
Si l'ensemble des périodes strictement positives de f admet un plus petit élément T, alors T est la ***période fondamentale*** *de f.*

L'intérêt de cette définition est que pour connaître les propriétés d'une fonction périodique de période (fondamentale) T, il suffit de connaître les propriétés de sa restriction à
$\mathcal{D}_f \cap [\, a\, ;\, a + T\,]$, pour n'importe quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 3. *La fonction* sin *est impaire et périodique ($T = 2\,\pi$). On peut donc restreindre son domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$ (période $2\,\pi$) puis $[0, \pi]$ (* sin *impaire).*
Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, elle est strictement croissante, et sur l'intervalle $[\pi/2, \pi]$, elle est strictement décroissante.

Définition 7. *Soit f une fonction, de domaine de définition $\mathcal{D}_f$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathcal{D}_f$ et $B = f(A)$. f est une* ***bijection*** *de A dans B si et seulement si, pour tout élément $y \in B$, il existe une unique valeur $x \in A$ tel que $y = f(x)$.*

La propriété suivante sur les fonctions strictement monotones sur un intervalle sera admise.

Proposition 1. *Si une fonction f est strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle A inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors la fonction est bijective de A sur $f(A)$.*

Définition 8. *Si f est une fonction bijective d'un ensemble $A \subset \mathcal{D}_f$ dans $B = f(A)$ alors on peut définir la fonction* ***réciproque*** *de f, notée f^{-1} ainsi :*

f	f^{-1}
$A \longrightarrow B$	$B \longrightarrow A$
$x \mapsto y = f(x)$	$y \mapsto x = f^{-1}(y)$

Le graphe de f^{-1} est obtenu à partir du graphe de f en faisant une symétrie par rapport à la diagonale principale (la droite $x = y$).

Exemple 4. *Soit $f(x) = 3\,x - 6$, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car*

$$y = 3\,x - 6 \iff \frac{y}{3} = x - 2 \iff x = \frac{y}{3} + 2$$

et donc on peut définir sa fonction réciproque par $f^{-1} \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{3} + 2 \end{array} \right\}$

Exemple 5. *Soit $f(x) = x^2$, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ni de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ mais est bijective par exemple de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$:*

$$x \in \mathbb{R}_+ \textit{ et } y \in \mathbb{R}_+ \;:\; \left\{ y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \right\} \Rightarrow f^{-1} \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array} \right\}$$

Définition 9. *Soient f et g deux fonctions. On peut alors définir la* ***composée de f par g****, la fonction notée $g \circ f$, telle que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*
Le domaine de définition de $g \circ f$ est l'ensemble des réels x tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$.
En général, les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes.

Exemple 6. *Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.*

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ *et* $\mathcal{D}_{g \circ f} =]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]-1\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

$(f \circ g)(x) = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ *et* $\mathcal{D}_{f \circ g} =]-\infty\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

Définition 10. *Une fonction définie* ***par morceaux*** *ou* ***par intervalle*** *sur un intervalle A si A est l'union d'au moins deux intervalles A_k disjoints ($A = \cup_{k=1}^{n} A_k$ et pour $1 \leq j < k \leq n$, $A_j \cap A_k = \emptyset$), et sur chaque intervalle A_k, f est définie par une certaine fonction f_k ainsi :*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in A_1 \\ f_2(x) & si\ x \in A_2 \\ \dots & \\ f_n(x) & si\ x \in A_n \end{cases}$$

Exemple 7. *La fonction usuelle* ***valeur absolue*** *est une fonction définie par morceaux ainsi :*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ici $A = \mathbb{R} = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 =]-\infty; 0[$ et $A_2 = [0; +\infty[$.

2 Fonctions usuelles

Les fonctions utilisées dans ce cours sont *construites* à partir de fonctions usuelles en mathématiques et en calcul scientifique.

2.1 *monôme* ou fonction *monomiale*

Définition : $f(x) = a\,x^n$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, n est le *degré* du monôme.
De plus, la valeur $a = 0$ est utilisée uniquement pour $n = 0$, et donne la fonction *identiquement nulle.*

Propriétés :
. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. fonction de même parité que n
. si $n = 0$, $f(x) = a$ (fonction constante)

Exemples :
. $f(x) = 1$: fonction constante (égale à 1 pour tout x) de degré 0
. $f(x) = 3\,x$: fonction *linéaire* (monôme de degré 1, impaire)
. $f(x) = x^4$: fonction *puissance* 4 (monôme de degré 4, paire)

2.2 *polynôme* ou fonction *polynomiale*

Définition :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ le *degré* du polynôme ; $a_n \neq 0$ (si $n > 0$).
Un monôme est un polynôme particulier pour lequel (au plus) un coefficient a_k est non nul.

Propriétés :
. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. une fonction polynômiale est paire (resp. impaire) si tous les coefficients a_k non nuls correspondent à des indices k pairs (resp. impairs)
. Soient deux polynômes $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$ et $q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\,x^k$ de degré n.
Soit A un ensemble, égal à $\mathbb{R}$, ou contenant un intervalle ouvert $]\,\alpha\,;\,\beta\,[$:
$\Big\{$ pour tout $x \in A,\ p(x) = q(x)$ $\Big\}$ $\iff$ $\Big\{$ pour tout entier k entre 0 et n, $a_k = b_k$ $\Big\}$

Exemples :
. $f(x) = 2\,x - 5$: fonction *affine* (polynôme de degré 1)
. $f(x) = -x^6 + 2\,x^2 + 1$: fonction polynomiale de degré 6, et paire
. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a\,x^3 - 2\,x^2 + b = x^3 + c\,x^2 + d\,x + 4$
$\iff$ $a = 1$, $b = 4$, $c = -2$, $d = 0$

2.3 fonction *valeur absolue*

Définition : fonction définie sur $\mathbb{R}$, notée $f(x) = |x|$ avec $|x| = \left\{ \begin{array}{cc} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array} \right\}$.

Propriété : fonction paire et positive.

2.4 fonction *inverse*

Définition : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriétés :
. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$
. fonction impaire.
. fonction impaire, et bijective de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}^\star$.
. f strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$

2.5 fonction *exponentielle*

Définition : c'est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\text{pour tout couple de réel } (x, y)\ ,\ f(x+y) = f(x)\, f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(t)-1}{t} = 1$$

On la note $f(x) = \exp(x)$, et par définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Propriétés :
. f strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$
. $\forall x\ , \forall y\ ,\ \exp(x) > 0\ ,\ \exp(x+y) = \exp(x)\ \exp(y)\ , \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}\ ,\ \exp(0) = 1$

2.6 fonction *logarithme (népérien)*

Définition : par définition, c'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. On la note $f(x) = \ln(x)$

Propriétés :
. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^\star =]\,0\,;\,+\infty\,[$
. fonction strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$
. $\forall x > 0, \forall y > 0\ ,\ \ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)\ \ ,\ \ln(1/x) = -\ln(x)\ ,\ \ln(1) = 0$
. $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x\big)$ et $\big(\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exp(\ln(x)) = x\big)$

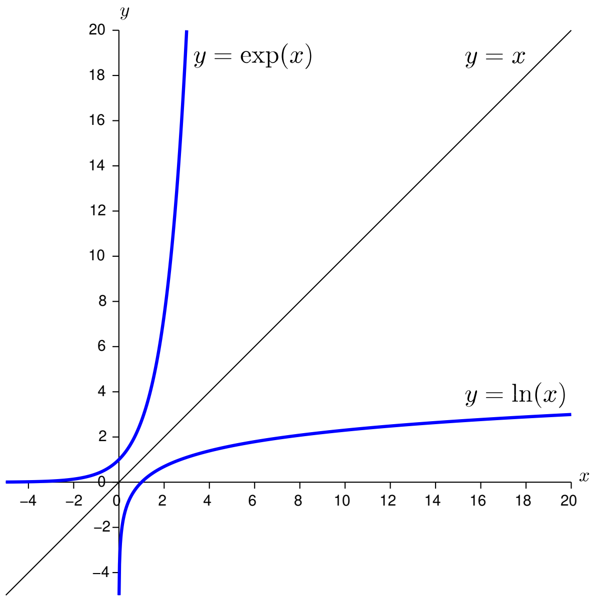


FIGURE 1 – Fonctions exponentielle et logarithme.

2.7 fonction *puissance*

Définition : $f(x) = x^a$ avec a une constante réelle.
Le domaine de définition de f dépend de la valeur de a suivant les différents cas :

1. $a \in \mathbb{N}$: fonction monôme ; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$: inverse de fonction monôme ; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$
3. $a = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$: f racine n-ième de x,
   fonction réciproque de $x \mapsto x^n$: $y = f(x) = \sqrt[n]{x} \iff x = f^{-1}(y) = y^n$.
   si n pair alors $\mathcal{D}_f = [\,0\,;+\infty\,[$, si n impair alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
4. avec 1,2 et 3, on peut définir la fonction pour $a \in \mathbb{Q}$.
5. $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $f(x) = x^a = \exp(a\,\ln(x))$; $\mathcal{D}_f =]\,0\,;+\infty\,[$.

Propriétés :
. si $a \neq 0$, fonction strictement monotone et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$
. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $\ln(x^a) = a\,\ln(x)$

2.8 fonction *exponentielle de base* a

Définition : $f(x) = a^x = \exp(x\,\ln(a))$ avec a une constante réelle strictement positive.

Propriétés :
. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. si $a = 1$, f fonction constante égale à 1
. si $a \neq 1$, fonction strictement monotone et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$
. $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ avec $\mathrm{e} \simeq 2,71828182845904523536$

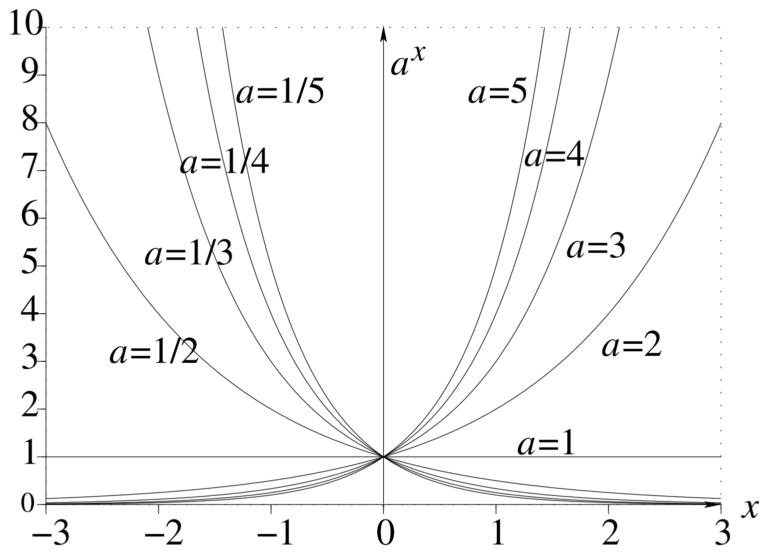


FIGURE 2 – Fonctions exponentielle $x \mapsto a^x$ pour plusieurs valeurs de a.

2.9 fonction ***logarithme de base*** a

Définition : C'est la fonction réciproque de l'exponentielle en base a avec $a > 0$ et $a \neq 1$.

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

En général, on utilise plutôt une constante réelle $a > 1$, les valeurs les plus souvent utilisées en pratique sont $a = \mathrm{e}$ (logarithme népérien), $a = 10$ (logarithme décimal), $a = 2$ (logarithme en base 2).

Propriétés :

. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$

. fonction strictement monotone et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$

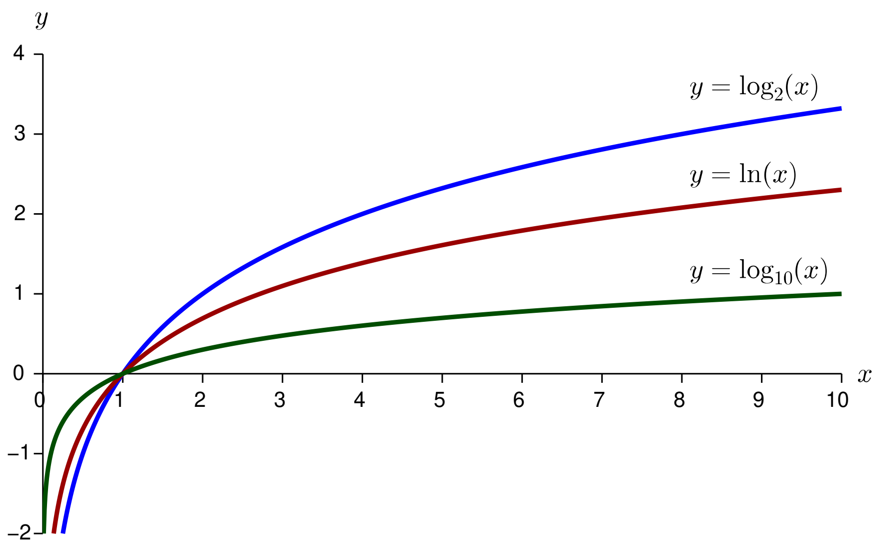


FIGURE 3 – Fonctions logarithmes pour différentes valeurs de a.

2.10 fonctions *trigonométriques*

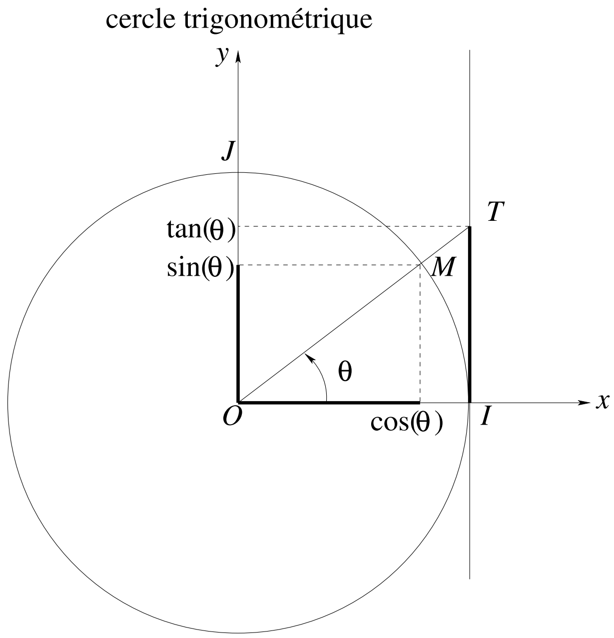


FIGURE 4 – Cercle trigonométrique, sinus, cosinus et tangente d'un angle θ

Rappels :
Le ***cercle trigonométrique*** (figure 4) est le cercle centré à l'origine et de rayon 1, dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Les angles sont mesurés en ***radians***, à partir de l'axe des abscisses orienté vers la droite :
- de manière positive, en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique).
- de manière négative, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique inverse).

La demi-droite partant de l'origine O et d'angle θ coupe le cercle en un point M.
La longueur *signée* de l'arc de cercle allant de I à M est égale à θ.
Deux angles qui diffèrent d'un multiple de $2\,\pi$ correspondent au même point sur le cercle, et donc aux mêmes valeurs des fonctions trigonométriques.
Sur la figure 4, le cosinus de (l'angle) θ est l'abscisse du point M et le sinus de (l'angle) θ est l'ordonnée du point M. Donc ces deux fonctions sont périodiques de période $2\,\pi$ (figure 5).
La tangente est définie pour tout angle dont le cosinus est non nul, à savoir tout angle différent de $\pi/2$ modulo π, et est l'ordonnée du point T (figure 4). Elle est périodique de période π (figure 5).

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{OI} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{OJ} \\ \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OI} + \tan(\theta)\,\overrightarrow{OJ} = \dfrac{1}{\cos(\theta)}\,\overrightarrow{OM} \quad \text{pour } \theta \neq \pi/2 + k\,\pi \quad \text{avec } k \text{ entier} \end{array}\right.$$

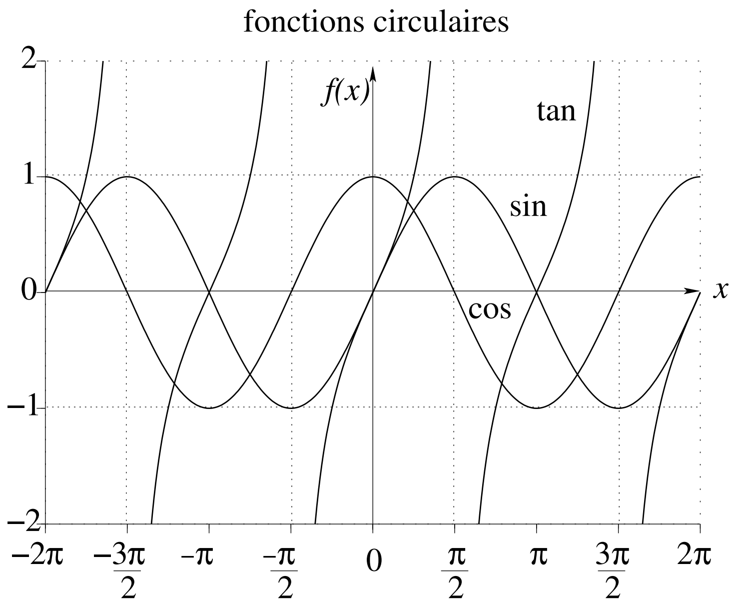


FIGURE 5 – Fonctions sinus, cosinus et tangente.

2.10.1 Fonction *cosinus*

Définition : le ***cosinus*** de l'angle θ est l'abscisse du point M.
En remplaçant θ par x, on note $f(x) = \cos(x)$

Propriétés :

. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. fonction paire et de période fondamentale $2\,\pi$
. fonction strictement décroissante et bijective de $[\,0\,;\,\pi\,]$ dans $[\,-1\,;\,1\,]$

2.10.2 Fonction *sinus*

Définition : le ***sinus*** de l'angle θ est l'ordonnée du point M.
En remplaçant θ par x, on note $f(x) = \sin(x)$

Propriétés :

. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. fonction impaire et de période fondamentale $2\,\pi$
. fonction strictement croissante et bijective de $[\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,]$ dans $[\,-1\,;\,1\,]$

2.10.3 Fonction *tangente*

Définition : la ***tangente*** de l'angle θ est le rapport du sinus sur le cosinus.
En remplaçant θ par x, on note $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Propriétés :

. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x = \pi/2 + k\,\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \ ] -\pi/2 + k\,\pi \, ; \, \pi/2 + k\,\pi\,[$

. fonction impaire et de période fondamentale π

. fonction strictement croissante et bijective de $]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$ dans $\mathbb{R}$

2.10.4 Autres propriétés sur les fonctions trigonométriques

Nous ne vous conseillons pas d'apprendre par cœur un grand nombre de formules trigonométriques ; vous devez retenir les propriétés ci-dessus pour chaque fonction (notamment les parités), les trois formules de (1) et (2), et le tableau des valeurs remarquables de (3).

(1) Théorème de Pythagore : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(2) Cosinus/sinus d'une somme : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases}$

(3) Valeurs remarquables pour le sinus et le cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$

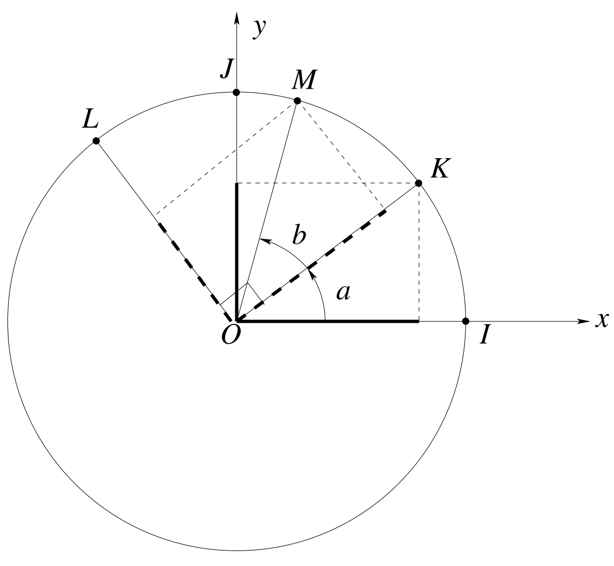


FIGURE 6 – Somme de deux angles.

Reportez-vous à la figure 6 pour les notations. Notons K le point d'intersection avec le cercle de la demi-droite d'angle a, L le point d'intersection de la demi-droite d'angle $a + \pi/2$, M le point d'intersection de la demi-droite d'angle $a + b$. Par définition :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\,\overrightarrow{OK} + \sin(b)\,\overrightarrow{OL} = \cos(a+b)\,\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\,\overrightarrow{OJ}$$

Or :

$$\overrightarrow{OK} = \cos(a)\,\overrightarrow{OI} + \sin(a)\,\overrightarrow{OJ}$$

et par rotation du vecteur $\overrightarrow{OK}$ d'un quart de tour dans le sens trigonométrique (rotation d'angle $\pi/2$), on obtient le vecteur $\overrightarrow{OL}$, avec le point L dont l'abscisse et l'ordonnée sont respectivement l'opposé de l'ordonnée et l'abscisse du point K :

$$\overrightarrow{OL} = -\sin(a)\,\overrightarrow{OI} + \cos(a)\,\overrightarrow{OJ}$$

En reportant les expressions de $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OL}$ dans celle de $\overrightarrow{OM}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\Big(\cos(a)\,\overrightarrow{OI} + \sin(a)\,\overrightarrow{OJ}\Big) + \sin(b)\Big(-\sin(a)\,\overrightarrow{OI} + \cos(a)\,\overrightarrow{OJ}\Big)\\ &= \Big(\underbrace{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}_{cos(a+b)}\Big)\overrightarrow{OI} + \Big(\underbrace{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}_{sin(a+b)}\Big)\overrightarrow{OJ}\,.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(4) Il est bon de connaître les relations suivantes, ou de savoir les retrouver rapidement en dessinant le cercle trigonométrique.

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$

(5) La double inégalité suivante nous servira plus tard à étudier la dérivée de ces fonctions. Soit θ un angle tel que $0 \leq \theta < \pi/2$: $\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)$

Dans la figure 4, on note T_1 le triangle $(O\,I\,M)$, S le ***secteur angulaire*** $(O\,I\,M)$, et T_2 le triangle $(O\,I\,T)$.
Alors on a

$$\text{aire}(T_1) = \frac{\sin(\theta)}{2}\ ,\ \text{aire}(S) = \frac{\theta}{2}\ ,\ \text{aire}(T_2) = \frac{\tan(\theta)}{2}$$

et comme $T_1 \subset S \subset T_2$, on a le résultat $\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)$.

2.11 fonctions *hyperboliques*

Les fonctions hyperboliques sont définies à partir de la fonction exponentielle, et sont utilisées notamment en calcul intégral et pour la résolution d'équations différentielles.

2.11.1 Fonction *cosinus hyperbolique*

Définition :

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Propriétés :

. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. fonction paire
. fonction strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[\,1\,;+\infty\,[$

2.11.2 Fonction *sinus hyperbolique*

Définition :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Propriétés :

. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. fonction impaire
. fonction strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2.11.3 Fonction *tangente hyperbolique*

Définition :

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Propriétés :

. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
. fonction impaire
. fonction strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1\,;1\,[$

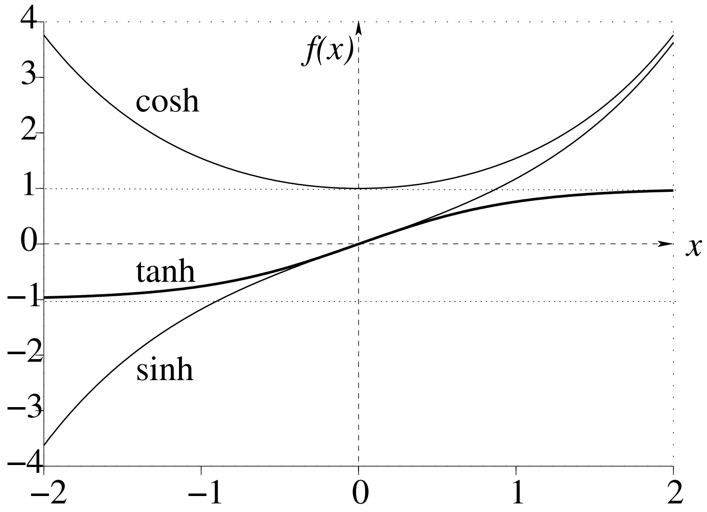


FIGURE 7 – Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques.

3 Limites et continuité

La notion de limite permet de connnaître le comportement d'une fonction f ***au voisinage*** (à proximité) d'un point a particulier (a appartenant à $\mathcal{D}_f$ ou étant une borne de $\mathcal{D}_f$).
Dans ce cours, on se limitera à utiliser les limites de fonctions en un point $a \in \mathbb{R}$.

Définition 11. *Soit f une fonction de domaine $\mathcal{D}_f$.*
Soit a un réel tel que $\exists\, e > 0$ et $[a-e, a[\, \cup\,]a, a+e] \subset \mathcal{D}_f$.
La fonction f admet une limite finie v au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, \eta > 0 \ , \ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - v| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = v$.
Concernant la représentation graphique de f, pour tout réel $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'il soit, on peut trouver un reel $\eta > 0$ tel que le graphe de f restreint à $[\, a-\eta\, ;\, a+\eta\,] \cap \mathcal{D}_f$ est inclus dans le rectangle $[\, a-\eta\, ;\, a+\eta\,] \times [\, v-\varepsilon\, ;\, v+\varepsilon\,]$.

On peut définir la limite de $f(x)$ à droite (resp. à gauche) en a en considérant uniquement des valeurs de x supérieures (resp. inférieures) à a et on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = v$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = v$).

Exemple 8.

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
f admet une limite en a, pour tout $a > 0$, et f admet seulement une limite à droite en $a = 0$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (partie entière inférieure).
Soit $a \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = a - 1 \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = a$$

donc f n'admet pas de limite en a (la représentation graphique de f est discontinue en $x = a$).

On rappelle les résultats sur les opérations de limites.

Propriété 1. *Ci-dessous, v et w désignent des réels.*

1. (multiplication par un scalaire) Si $\lim_{x\to a} f(x) = v$, et λ un réel alors
$$\lim_{x\to a}(\lambda\, f)(x) = \lambda\, v.$$

2. (somme et produit) Si $\lim_{x\to a} f(x) = v$ et $\lim_{x\to a} g(x) = w$ alors
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = v + w \text{ et } \lim_{x\to a}(f\times g)(x) = v\,w.$$

3. (fraction) Si $\lim_{x\to a} f(x) = v$ et $\lim_{x\to a} g(x) = w$ alors :

- *si $w \neq 0$ alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{v}{w}$*
- *si $w = 0$ et $v \neq 0$ alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (limite infinie)*
- *si $v = w = 0$ alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une* **forme indéterminée** *qui faut lever en modifiant l'expression de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$*

4. (composition) Si $\lim_{x\to a} f(x) = v$ et $\lim_{x\to v} g(x) = w$, alors $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = w$.

5. (encadrement - théorème des gendarmes) Soient trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle $[a-e, a+e]$ (avec $e > 0$) telles que :
$$\forall x \in [a-e, a+e]\ ,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = v$$
alors $\lim_{x\to a} g(x) = v$.

Exemple 9. *Si $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x - 1$ alors lorsque x tend vers $a = 1$, on a $f(x)$ et $g(x)$ qui tendent vers 0, et donc la fraction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers une forme indéterminée.*
Or $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ *donc* $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2.$

On utilisera essentiellement le calcul de limite d'une fraction (taux d'accroissement) afin de déterminer les expressions des dérivées des fonctions usuelles.

Définition 12. *Une fonction f est continue en $a \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
Une fonction f est continue sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ si elle est continue en tout point a de I.

Si une fonction est continue en un point a, elle est nécessairement définie en ce point, et donc admet une limite finie en a. Cela simplifie le calcul des limites.

Proposition 2. *Toutes les fonctions usuelles de la partie 2 sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.*

A partir de fonctions usuelles continues, des opérations arithmétiques et de composition, on peut obtenir des fonctions plus complexes et continues.

Propriété 2. *Des propriétés 1 sur les limites, on a les résultats similaires sur la continuité.*

1. *(multiplication par un scalaire) Si f est une fonction continue en a, et λ un réel alors λf est continue en a.*
2. *(somme et produit) Si f et g sont deux fonctions continues en a, alors $f+g$ et fg sont continues en a.*
3. *Si f est une fonction continue en a avec $f(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.*
4. *(composition) Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Pour les fonctions définies par morceaux, il peut être intéressant d'avoir la continuité au point de raccord entre deux intervalles voisins.

Propriété 3. *Soient $a < b < c$ trois réels, et soit f la fonction définie par morceaux ainsi :*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f_1(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ f_2(x) & \text{si } b < x \leq c \end{array} \right\} \quad \text{ou bien} \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f_1(x) & \text{si } a \leq x < b \\ f_2(x) & \text{si } b \leq x \leq c \end{array} \right\}$$

avec f_1 définie et continue sur $[a;b]$ et f_2 définie et continue sur $[b;c]$.

Les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. *la fonction f_1 est continue sur $[a;b]$,*
2. *la fonction f_2 est continue sur $[b;c]$,*
3. *$f_1(b) = f_2(b)$,*

si et seulement si *la fonction f est continue sur $[a;c]$.*
Dans ce cas, la fonction f est en particulier continue au point de raccord correspondant à $x = b$.

Pour terminer, rappelons un théorème énoncé en terminale que nous admettrons, et un corollaire utile.

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b deux éléments de I.*
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel x compris entre a et b tel que $f(x) = y$.

Corollaire 1. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [\,a\,;\,b\,]$ et qui change de signe sur I c'est à dire $f(a)\,f(b) < 0$ alors il existe $x \in]\,a\,;\,b\,[$ telle que $f(x) = 0$.*

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition :*

a)	$f(x) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$
b)	$f(x) = \dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{1-x}}$

c)	$f(x) = \sqrt{x+1}$
d)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
e)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

f)	$f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$
g)	$f(x) = \sqrt{x-x^3}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Exercice 2. *Soient les fonctions* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x - 1$ *et* $h(x) = x^2$.
Pour chacune des fonctions composées suivantes, déterminer son domaine de définition $\mathcal{D}$*, ainsi qu'une expression la plus simple possible.*

a) $f \circ g$	b) $g \circ f$	c) $f \circ g \circ h$	d) $g \circ h \circ f$	e) $f \circ h \circ g$	f) $f \circ g \circ g \circ h$

Exercice 3.
a) *Déterminer les constantes* a, b *et* c *telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x+a)\,(b\,x-1) = 2 - c\,x^2$$

b) *Déterminer les constantes* a *et* b *telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Exercice 4. *Simplifier les expressions suivantes :*

a) $\exp\Big(2\,\ln\lvert x\rvert - 3\,\ln(y)\Big) - \exp\Big(-\ln(y)\Big)$	b) $\log_2\Big(4^x\,2^{x+y}\Big) + \log_4\left(\dfrac{8^{y-x}}{2^x}\right)$

Exercice 5. *Déterminer le (ou les réels)* x *strictement positif(s) solution(s) de chaque équation :*

a) $2(4^x) = 8(2^x)$	b) $x^x = (2\,x)^{2\,x}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 12

Exercice 6. *En utilisant les formules du cours :*

$$(1)\quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$(2)\quad \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

$$(3)\quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad (4)\quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$(5)\quad \cos(-x) = \cos(x) \qquad (6)\quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

démontrer les formules de trigonométrie ci-dessous.
Une fois qu'une formule est démontrée, on peut l'utiliser pour démontrer les formules suivantes.

$\cos(2\,a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\,\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\,\sin^2(a)$	$\sin(2\,a) = 2\,\sin(a)\cos(a)$

$\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2\,a)}{2}$	$\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2\,a)}{2}$	$\tan^2(a) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(2\,a) = \dfrac{2\,\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 13

Exercice 7. *Simplifier les expressions suivantes :*

a) $\cosh(x) + \sinh(x)$	b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 14

Exercice 8. *Dans cet exercice a, b désignent deux réels.*
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln|x| & \textit{si } x \leq -1 \\ a\,x + b & \textit{si } -1 < x < 1 \\ 6 - x^2 & \textit{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Déterminer a et b afin que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. *Dans cet exercice a, b et c désignent trois réels.*
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) & \textit{si } x \leq 0 \\ a\,x^2 + b\,x + c & \textit{si } 0 < x < 2 \\ x + 1 & \textit{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer a, b et c afin que f soit continue sur $\mathbb{R}$, et vérifie $f(1) = 0$.

Exercices supplémentaires

Exercice 10. *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition :*

a)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$
b)	$f(x) = \sqrt{x^2 - \lvert x\rvert - 2}$
c)	$f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{8}{x}}$

Exercice 11.

a) *Déterminer les constantes a, b, c et d telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = a\,x + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

b) *Déterminer les constantes a, b, c, d, α et β telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = a + \frac{b}{x+\alpha} + \frac{c}{x+\beta} + \frac{d}{(x+\beta)^2} = \frac{x^3 + 2\,x - 3}{x^3 - 3\,x - 2}$$

Exercice 12. *Déterminer le (ou les réels) x strictement positif(s) solution(s) de chaque équation :*

a) $\sqrt{x}\,\ln(x) = x\,\ln(\sqrt{x})$	b) $\log_2(x) + \log_x(2) = 5/2$

Exercice 13. *(suite de l'exercice 6)*
Demontrer les formules de trigonométrie ci-dessous.

$\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big)$	$\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$$

$\cos(a) + \cos(b) = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin(a) + \sin(b) = 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

en posant $t = \tan(x/2)$:

$\sin(x) = \dfrac{2\,t}{1+t^2}$	$\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan(x) = \dfrac{2\,t}{1-t^2}$

Exercice 14. *Simplifier les expressions suivantes :*

a)	$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) - \cosh(2\,x)$	b)	$\dfrac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}$

Exercice 15. *Pour chaque fonction :*

- *dire si elle est paire ou impaire, ou ni l'une, ni l'autre,*
- *déterminer son domaine de définition,*

a)	$\dfrac{2\,x}{x^2-1}$	b)	$\dfrac{1}{x^3-1}$	c)	$\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$
d)	$\dfrac{1}{\sinh(x^3-x)}$	e)	$\dfrac{\sin(x)}{x}$	f)	$\dfrac{x^2}{\sin^2(x)}$

Exercice 16. *Le but de cet exercice est de déterminer, pour chaque fonction hyperbolique $y = f(x)$, l'expression de sa fonction réciproque $x = f^{-1}(y)$.*
Pour chaque fonction, le but est de déterminer l'expression de x en fonction de y.

a) *(réciproque de* $\sinh$*)* $y = \sinh(x)$*, bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$
b) *(réciproque de* $\cosh$*)* $y = \cosh(x)$*, bijective de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[\,1\,;+\infty\,[$
c) *(réciproque de* $\tanh$*)* $y = \tanh(x)$*, bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $]\,-1\,;1\,[$

Indication : utiliser $X = \mathrm{e}^x > 0$, ainsi que les ensembles de départ et d'arrivée de chaque fonction bijective.

Exercice 17. *En utilisant la double inégalité*

$$\forall t \in\,]\,0\,;\pi/2\,[\;,\;\; \sin(t) \leq t \leq \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

calculer les limites suivantes :

a)	$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}$	b)	$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t/2)}{t/2}$	c)	$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(t/2)}{t/2}$	d)	$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)-1}{t}$

Exercice 18. *Démontrer que deux fonctions polynomiales p et q de degré n sont égales sur tout intervalle A de $\mathbb{R}$ si et seulement si leurs coefficients de même rang sont égaux :*

$$\left[\forall x \in A,\; p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k \;=\; q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\,x^k\right] \iff \left[\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\; a_k = b_k\right]$$

La démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Dérivées

1 Taux d'accroissement et dérivabilité en un point

On considère une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. Soit a un point de I.

Définition 1. *On appelle* ***taux d'accroissement*** *de f en a, la fonction τ_a suivante.*

$$\begin{array}{ccl} I \setminus \{a\} & \stackrel{\tau_a}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \ . \end{array}$$

Géométriquement, la valeur de $\tau_a(x)$ est la ***pente*** *de la droite (appelée* ***sécante****) passant par les points du graphe $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.*
Si I est un intervalle de temps et $f(x)$ désigne la position d'un point mobile au temps x, $\tau_a(x)$ est la ***vitesse moyenne*** *du mobile sur l'intervalle $[a, x]$ (distance parcourue divisée par le temps de parcours).*

Définition 2. *On dit que f est* ***dérivable*** *en a si le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a. Si c'est le cas, cette limite est la* ***dérivée de f en a*** *et se note $f'(a)$.*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

Pour calculer la dérivée en a, il est parfois commode de se ramener à un calcul de limite en 0, en écrivant dans le taux d'accroissement $x = a + h$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La ***dérivée*** *de f est la fonction f', qui à un point associe la dérivée de f en ce point, si elle existe.*
Géométriquement, la valeur de la dérivée en a est la ***pente de la tangente*** *en a à la courbe d'équation $y = f(x)$ (figure 8).*
L'équation de la tangente en a à la courbe d'équation $y = f(x)$ est donnée par

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Si x est le temps et $f(x)$ la position d'un mobile à l'instant x, $f'(a)$ est sa ***vitesse instantanée*** *à l'instant a.*

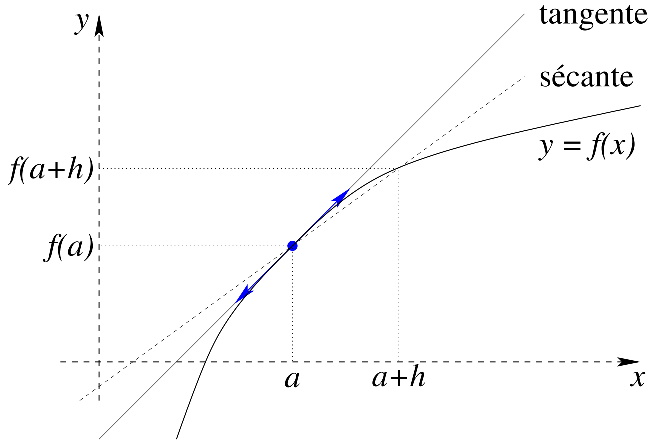


FIGURE 8 – Sécante pour $(a, a+h)$ et tangente en a à la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exemple 1. *Soit λ un réel.*
a) Soit f la fonction constante sur $I = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda$

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\lambda - \lambda}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I\,,\ f'(x) = 0$$

b) Soit f la fonction linéaire sur $I = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda\, x$

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\lambda\, x - \lambda\, a}{x - a} = \lambda\, \frac{x - a}{x - a} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I\,,\ f'(x) = \lambda$$

c) Soit f la fonction carrée sur $I = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2\,x$

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a$$

$$\Rightarrow \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \tau_a(x) = a + a = 2\,a$$

Proposition 1. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration : Pour tout $x \neq a$ suffisamment proche de a, par définition du taux d'accroissement, on a $f(x) = f(a) + (x - a)\tau_a(x)$.
Or f dérivable en a signifie que $\tau_a(x)$ tend vers $f'(a)$ (qui est un réel) quand x tend vers a et $x - a$ tend vers 0 :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a}(x - a) \lim_{x \to a} \tau_a(x) = f(a) + (a - a)\, f'(a) = f(a)$$

$\square$

Définition 3. *On peut appliquer la dérivée à la fonction f' pour obtenir la* ***dérivée seconde*** *de f notée f'' ($f'' = (f')'$).*

Exemple 2. *La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2\,x$.*
La dérivée seconde de $f(x) = x^2$ est la dérivée (première) de $f'(x) = 2\,x$ donc $f''(x) = 2$.

La propriété suivante fait le lien entre la (dé)croissance d'une fonction et le signe de sa dérivée.

Propriété 1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle A.*

a) $\left| \begin{array}{lll} \forall x \in A, f'(x) \geq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ croissante sur } A \\ \forall x \in A, f'(x) \leq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ décroissante sur } A \end{array} \right.$

b) $\left| \begin{array}{lll} \forall x \in A, f'(x) > 0 & \Longrightarrow & f \text{ strictement croissante sur } A \\ \forall x \in A, f'(x) < 0 & \Longrightarrow & f \text{ strictement décroissante sur } A \end{array} \right.$

Exemple 3. *La fonction f définie par $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a aussi : $f'(x) = 3\,x^2 \geq 0$.*
Elle est même strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$, donc la réciproque n'est pas toujours vraie pour le point b).

2 Techniques de calcul

Les résultats de cette section sont à connaître par cœur : ils vous permettent de calculer les dérivées de fonctions avec des expressions complexes, à partir des dérivées des fonctions usuelles, et de techniques de dérivation.

Théorème 1. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant a. On suppose que f et g sont dérivables en a. Alors :*

1. *$f + g$ est dérivable en a, de dérivée $f'(a) + g'(a)$*
2. *$f\,g$ est dérivable en a, de dérivée $f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.*
3. *soit λ une constante réelle : λf est dérivable en a, de dérivée $\lambda f'(a)$.*

Démonstration : Par hypothèse, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$.

1. Écrivons le taux d'accroissement de la somme.
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} .$$
Comme la limite de la somme est la somme des limites, le résultat s'ensuit.
2. Écrivons le taux d'accroissement du produit.
$$\frac{(f\,g)(x) - (f\,g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)}{x-a}$$
$$= \frac{f(x)\,g(x) - f(a)\,g(x) + f(a)\,g(x) - f(a)\,g(a)}{x-a}$$
$$= g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$
Comme g est dérivable, elle est continue en a, donc $g(x)$ tend vers $g(a)$ quand x tend vers a. La limite d'un produit est le produit des limites, idem pour la somme. D'où le résultat.
3. En prenant la dérivée du produit $f\,g$ avec $g(x) = \lambda$ une fonction constante, on a le résultat.

$\square$

Théorème 2. *Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, dérivable en a. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $g(a)$, dérivable en $g(a)$. Alors la composée $f \circ g$ est dérivable en a, de dérivée :*

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)\, f'(g(a))$$

Démonstration : Calculons $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h}$.
On pose $k = g(a+h) - g(a)$, comme g continue en a, $\lim\limits_{h \to 0} k = \lim\limits_{h \to 0} g(a+h) - g(a) = 0$:

$$\frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h}$$
$$= \frac{f(g(a) + g(a+h) - g(a)) - f(g(a))}{h} = \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{h}$$
$$= \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} \times \frac{k}{h} = \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

On fait tendre h vers 0, alors $g(a+h)$ tend vers $g(a)$, k tend vers 0, et $f(g(a)+k)$ tend vers $f(g(a))$:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right)$$
$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} \times \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(g(a))\, g'(a)$$

$\square$

Voici deux corollaires du théorème 2.

Corollaire 1. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.*
1. La dérivée de $\dfrac{1}{g(x)}$ *est* $-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$
2. La dérivée de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *est* $\dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$

Démonstration : 1. On applique le théorème 2 avec la fonction inverse $f(y) = \dfrac{1}{y}$, celle-ci est dérivable en tout point b où elle est définie, et $f'(b) = -\dfrac{1}{b^2}$.
On déduit que si g est dérivable et ne s'annule pas en a, alors son inverse $\dfrac{1}{g(x)}$ est dérivable, de dérivée

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}\ .$$

2. En combinant ceci avec la formule donnant la dérivée d'un produit, on obtient la dérivée d'un quotient.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)}\ .$$

$\square$

Corollaire 2. *Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans J, dérivable sur I et telle que $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} est :*

$$\forall y \in J \ , \ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration : Pour tout $x \in I$, $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, et on note $y = f(x)$

$$\forall x \in I \ , \ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\Rightarrow \forall x \in I \ , \ \left(f^{-1} \circ f\right)'(x) = f'(x)\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = 1$$

Comme $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ et $f'(x) \neq 0$, on a

$$\forall y \in f(I) \ , \ f'(f^{-1}(y))\left(f^{-1}\right)'(y) = 1 \iff \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

□

Les théorèmes et corollaires de cette section permettent de démontrer la dérivabilité de toutes les fonctions que vous aurez à examiner, à condition d'admettre la dérivabilité des « fonctions de base » que sont les fonctions usuelles.

Propriété 2.
Les fonctions usuelles polynômes, puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus sont dérivables en tout point d'un intervalle ouvert où elles sont définies.
La fonction valeur absolue est dérivable en tout point d'un intervalle ouvert ne contenant pas 0.

Voici deux tableaux récapitulatifs des formules de dérivation à connaître par cœur.

x est la variable, $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions de x,
a est une puissance (réel non nul), α un réel non nul et β un réel quelconque.

fonction	**dérivée**
β	0
x^a	$a\,x^{a-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$

fonction	**dérivée**
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$\beta\,u(x)$	$\beta\,u'(x)$
$u(x)\,v(x)$	$u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$
$(u\circ v)(x) = u(v(x))$	$v'(x)\,u'(v(x))$
$u(\alpha\,x+\beta)$	$\alpha\,u'(\alpha\,x+\beta)$
$u(x)^a$	$a\,u'(x)\,u(x)^{a-1}$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{v(x)\,u'(x)-u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$

3 Dérivées des fonctions usuelles

Cette section présente les dérivées des fonctions usuelles avec leurs preuves, et permettent ensuite, en utilisant les techniques de calcul, de calculer les dérivées de fonctions plus complexes.

Proposition 2. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier fixé.*
La dérivée de la fonction $f(x) = x^n$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ est :

$$f'(x) = n\, x^{n-1}$$

Démonstration :
1) Si $n = 0$, alors la fonction est constante, et sa dérivée est nulle.

2) Supposons $n > 0$. Écrivons le taux d'accroissement de f en a. Pour $x \neq a$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$= \frac{x^n - a\, x^{n-1}}{x - a} + \frac{a\, x^{n-1} - a^2\, x^{n-2}}{x - a} + \frac{a^2\, x^{n-2} - \dots}{x - a} + \dots + \frac{\dots - a^{n-1}\, x}{x - a} + \frac{a^{n-1}\, x - a^n}{x - a}$$

$$= x^{n-1} + a\, x^{n-2} + a^2\, x^{n-3} + \dots + a^{n-2}\, x + a^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i\, a^{n-1-i}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \sum_{i=0}^{n-1} x^i\, a^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i\, a^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} = n\, a^{n-1}$$

3) Supposons $n < 0$, on pose $m = -n > 0$, donc $f(x) = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, définie pour $x \neq 0$.
En utilisant la propriété sur la dérivée de l'inverse d'une fonction, on a :

$$f'(x) = -\frac{m\, x^{m-1}}{(x^m)^2} = -m\, \frac{x^{m-1}}{x^{2\,m}} = -m\, x^{m-1}\, x^{-2\,m} = -m\, x^{m-1-2\,m} = -m\, x^{-m-1} = n\, x^{n-1}$$

□

Proposition 3. *Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.*
La dérivée de $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ pour $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$ est $f'(x) = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

Démonstration : f est la fonction réciproque de $g(x) = x^n$. Donc

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n f(x)^{n-1}} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

qui est définie seulement pour $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$. □

Proposition 4. *Soit $a = \dfrac{p}{q}$ un rationnel fixé ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$).*
La dérivée de $f(x) = x^a$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ est $f'(x) = \dfrac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

Démonstration : $f(x) = (h \circ g)(x)$ avec $g(x) = x^{\frac{1}{q}}$ et $h(x) = x^p$, donc :

$$f'(x) = g'(x) h'(g(x)) = \frac{1}{q} x^{1-1/q} p\ (x^{1/q})^{p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

$\square$

Proposition 5. *La dérivée de $f(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$ est $f'(x) = \mathrm{e}^x$.*

Démonstration : Par définition, $f(x) = \mathrm{e}^x$ vérifie $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^0}{h-0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \times 1 = \mathrm{e}^x$$

$\square$

Proposition 6. *La dérivée de $f(x) = \ln|x|$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ est $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Démonstration : Pour $x > 0$, $f(x) = \ln(x)$ est la réciproque de $g(x) = \mathrm{e}^x$. Donc

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Pour $x < 0$, $f(x) = \ln|x| = \ln(-x) = \ln\Big(g(x)\Big)$ avec $g(x) = -x$, et donc :

$$f'(x) = g'(x)\,\ln'\Big(g(x)\Big) = -1 \times \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

$\square$

Proposition 7.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $\sin(x)$ est $\cos(x)$, et la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.
Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$, la dérivée de $\tan(x)$ est $\tan(x)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.

Démonstration :
1) dérivabilité de sin en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. On utilise la double inégalité $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ pour $0 < x < \pi/2$ donc :

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \quad \text{et} \quad x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \iff \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \text{ pour } x \in]0; +\pi/2[$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ étant paire, et en utilisant le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

La fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

2) dérivabilité de cos en 0 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1\times 0=0$$

La fonction cosinus est dérivable en 0 et $\cos'(0)=0$.

3) dérivabilité de sin et cos en $a\in\mathbb{R}$: on utilise les formules de sommation pour exprimer les fonctions *taux d'accroissement*, puis calculer les dérivées en a.

— Taux d'accroissement de la fonction sin en a, évalué en $x=a+h$:

$$\tau_a(a+h)=\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\frac{1}{h}\Big(\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)\Big)$$

$$=\sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

On sait que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0\quad\text{et}\quad\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1\ .$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(a+h)=\cos(a)\ .$$

— Taux d'accroissement de la fonction $\cos(x)$ en a, évalué en $x=a+h$:

$$\tau_a(a+h)=\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=\frac{1}{h}\Big(\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)\Big)$$

$$=\cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(a+h)=-\sin(a)$$

4) dérivée de la fonction tangente :

$$\tan'(x)=\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{\cos(x)\ \cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$$

□

Proposition 8.
Pour $x\in\mathbb{R}$, la dérivée de $\sinh(x)$ *est* $\cosh(x)$ *et la dérivée de* $\cosh(x)$ *est* $\sinh(x)$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, la dérivée de $\tanh(x)$ *est* $1-\tanh(x)^2=\dfrac{1}{\cosh(x)^2}$.

Démonstration : Il suffit d'exprimer les fonctions hyperboliques à partir de la fonction exponentielle, puis d'utiliser les théorèmes de la section précédente. □

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer la fonction τ_a, taux d'accroissement de f en un point a du domaine de définition,*
puis calculer $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x)$, et (re)trouver l'expression de la dérivée de f en a.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\Big($ *indication : distinguer le cas $a = 0$ et $a > 0$* $\Big)$

d) $f(x) = \mathrm{e}^x$ $\Big($ *indication : utiliser $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1$* $\Big)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 7

Exercice 2. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = x^4$	b) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	c) $f(x) = 6\,x^2 + \dfrac{5}{2}x^4 - 3$
d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$	e) $f(x) = \mathrm{e}^x - 4\,\sin(x)$	f) $f(x) = \Big(\mathrm{e}^x - 4\,\sin(x)\Big)x^2$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 8

Exercice 3. *En utilisant la dérivée d'une fonction composée, calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \sin(2\,x - 1)$	b) $f(x) = \cos(3\,x^2 - 5\,x + 1)$	c) $f(x) = \Big(\mathrm{e}^x + \sin(x)\Big)^3$
d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$	e) $f(x) = \sin\Big(\exp(x)\Big)$	f) $f(x) = \exp\Big(\sin(x)\Big)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 9

Exercice 4. *Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, préciser son domaine de définition et calculer l'expression de sa dérivée.*

a) $f(x) = (x^2 - 2\,x)^{1/3}$	b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	c) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$
d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$	e) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$	f) $f(x) = \ln\Big(x + \sqrt{1 + x^2}\Big)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Exercice 5. *On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, si la fonction f et sa dérivée f' sont définies et continues sur I.*

a) *Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & si \quad x \leq 0 \\ ax + b & si \quad x > 0 \end{cases}$$

b) *Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = 1$.*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & si \quad x > 0 \end{cases}$$

c) *Déterminer les réels a, b, c et d tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & si \quad 0 < x < 1 \\ x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Exercice 6. *Dans cet exercice, le but est d'étudier la dérivabilité d'une fonction en $x = 0$.*

a) *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,|x|$.*

1. *Montrer que f est continue en 0.*
2. *Pour $x \neq 0$, calculer $f'(x)$, dérivée de la fonction f en x.*
3. *Déterminer τ_0, la fonction* taux d'accroissement de *f en $a = 0$, et en déduire si on peut définir ou non $f'(0)$, dérivée de la fonction f en 0.*
4. *En utilisant les résultats des questions 2 et 3, la fonction dérivée f' est-elle définie en 0 ? La fonction dérivée f' est-elle continue en 0 ?*

b) *Refaire le même exercice avec la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.*

c) *Refaire le même exercice avec la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.*

Questions facultatives supplémentaires : exercice 12

Exercices supplémentaires

Exercice 7. *Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer la fonction τ_a, taux d'accroissement de f en un point a du domaine de définition, puis calculer $\lim_{x\to a} \tau_a(x)$, et (re)trouver l'expression de la dérivée de f en a.*

a) $f(x) = \ln(x)$ $\Big($ *indication : utiliser* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ $\Big)$

b) $f(x) = \sin(x)$ $\Big($ *indication : utiliser* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} = 0$ $\Big)$

c) $f(x) = \cos(x)$ $\Big($ *indication : utiliser* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} = 0$ $\Big)$

Exercice 8. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \ln(x) + \dfrac{x^2}{2}$	b) $f(x) = \dfrac{\sinh(x)}{x^2}$	c) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Exercice 9. *En utilisant la dérivée d'une fonction composée, calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \ln\Big(\cos(x)\Big)$	b) $f(x) = \ln\Big(\cos(x^2)\Big)$	c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$

Exercice 10. *Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, préciser son domaine de définition et calculer l'expression de sa dérivée.*

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$	b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$	c) $f(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$
d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2 \sin^2(x)}$	e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$	f) $f(x) = \dfrac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}$

Exercice 11. *Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$, et deux fonctions f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que $f_1(x_1) = f_2(x_1)$ et $f_1(x_2) = f_2(x_2)$.*
On définit la fonction f ainsi

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < x_1 \\ \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f_1(x) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ f_2(x) & \text{si } x \geq x_2 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. *Refaire l'exercice 6 avec les fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{\sqrt{|x|}} & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$ *indication : utiliser* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\exp(t) - 1}{t} = 1$

Exercice 13. *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.*

a) *Montrer que si f est paire alors f' est impaire.*

b) *Montrer que si f est impaire alors f' est paire.*

Exercice 14. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) - x$.*

a) *déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante.*

b) *déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est décroissante.*

Intégrales et primitives

Ce chapitre est une partie technique où tous les résultats théoriques seront admis. Il a pour but d'apprendre à calculer des intégrales et des primitives à l'aide de techniques de base.

1 Aire algébrique

Dans tout le chapitre, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La portion du plan comprise entre le graphe de f, l'axe horizontal Ox et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que :

$$a \le x \le b \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \le y \le f(x) & \text{si } f(x) \ge 0 \\ f(x) \le y \le 0 & \text{si } f(x) \le 0 \end{cases}$$

On veut évaluer l'aire de cette portion de plan, en comptant positivement les surfaces situées au-dessus de l'axe horizontal, et négativement celles situées au-dessous. Nous parlerons de l'***aire algébrique "sous" le graphe de*** f.

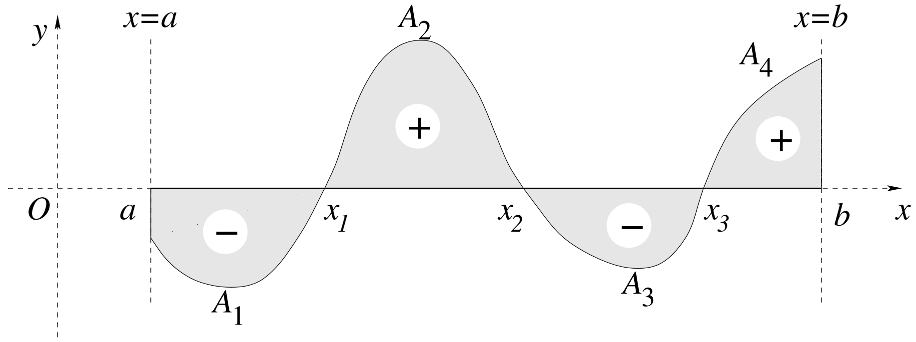


FIGURE 9 – Aire algébrique située sous le graphe de f.

Exemple 1. *Dans cet exemple ci-dessus,*
– *pour* $a \le x \le x_1$, *l'aire algébrique "sous" le graphe de* f *est* $A_1 < 0$ *car* $f(x) \le 0$,
– *pour* $x_1 \le x \le x_2$, *l'aire algébrique "sous" le graphe de* f *est* $A_2 > 0$ *car* $f(x) \ge 0$,
– *pour* $x_2 \le x \le x_3$, *l'aire algébrique "sous" le graphe de* f *est* $A_3 < 0$ *car* $f(x) \le 0$,
– *pour* $x_3 \le x \le b$, *l'aire algébrique "sous" le graphe de* f *est* $A_4 > 0$ *car* $f(x) \ge 0$,
et donc l'aire "sous" le graphe de f *pour* $a \le x \le b$ *est :*

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = -|A_1| + |A_2| - |A_3| + |A_4|$$

Définition 1. *Soit* f *une fonction continue sur* $[\,a\,;\,b\,]$.
On appelle **intégrale de** f **sur** $[\,a\,;\,b\,]$ *l'aire algébrique située "sous" le graphe de* f.
On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. *Ceci est une valeur réelle qu'on appelle aussi* **intégrale définie**.
On définit $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *par* $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, les deux lettres a et b, et la lettre x jouent des rôles totalement différents. Les lettres a et b désignent les bornes de l'intervalle d'intégration, on peut les remplacer par des valeurs réelles (par exemple $a = 1$ et $b = 3$ donne l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;\,3\,]$), ou toute autre expression mathématique.
La variable d'intégration x est muette : elle permet de parcourir l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. On ne peut pas la remplacer par un réel. Par contre, n'importe quelle autre lettre (autre que a, b, f) pourrait jouer le même rôle :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Dans l'écriture des intégrales, on évitera toujours de noter avec la même lettre la variable d'intégration et une des bornes de l'intervalle.

Voici quelques théorèmes, conséquences de la définition (1) :

Théorème 1 (Relation de Chasles)**.** *Soient a, b, c trois réels tels que $a < b < c$. Soit f une fonction continue de $[\,a\,;\,c\,]$ dans $\mathbb{R}$. On a :*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Théorème 2 (Monotonie)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I.*

1. *Si pour tout x de $[\,a\,;\,b\,]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.*
2. *Si pour tout x de $[\,a\,;\,b\,]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Le théorème essentiel est celui qui relie la notion d'intégrale avec la notion de dérivée, et permet ensuite de pouvoir calculer des intégrales.

Théorème 3. *Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$.*
Alors la fonction F définie sur $[\,a\,;\,b\,]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[\,a\,;\,b\,]$ et $F'(x) = f(x)$.

Démonstration : On fixe $x \in [\,a\,;\,b\,]$ et on calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$. Prenons h non nul et proche de 0.

si $h>0$, on note I_h l'intervalle $[\,x\,;\,x+h\,]$	si $h<0$, on note I_h l'intervalle $[\,x+h\,;\,x\,]$.

On note $A(h)$ l'aire algébrique "sous" le graphe de f pour $t \in I_h$, $m(h)$ la valeur minimale de $f(t)$ pour $t \in I_h$, et $M(h)$ la valeur maximale de $f(t)$ pour $t \in I_h$.

si $h>0$, on a : $$h\,m(h) \le A(h) = F(x+h)-F(x) \le h\,M(h)$$ donc en divisant par h, on a $$m(h) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M(h)$$	si $h<0$, on a : $$-h\,m(h) \le A(h) = F(x)-F(x+h) \le -h\,M(h)$$ donc en divisant par $-h$, on a $$m(h) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M(h)$$

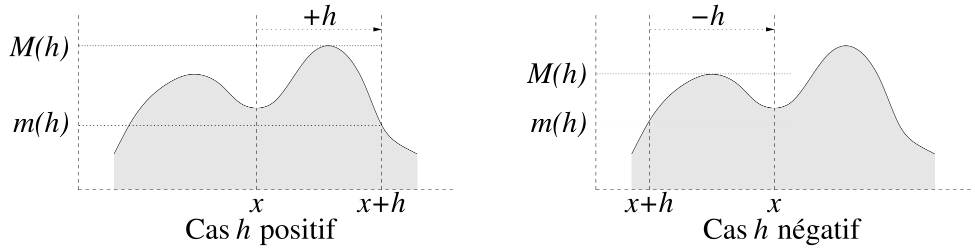


FIGURE 10 – Les deux cas pour $A(h)$.

Comme f est continue en x, on a $\lim\limits_{h\to 0} m(h) = \lim\limits_{h\to 0} M(h) = f(x)$. En effet :

a) f est continue en x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall t, t \in J = [\,x-\eta\,;\,x+\eta\,] \Rightarrow |f(t)-f(x)| \le \varepsilon$$

b) pour tout $h = t-x$ tel que $|h| \le \eta$, $f(x)-m(h) \le \varepsilon$ et $M(h)-f(x) \le \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall h, |h| \le \eta \Rightarrow |m(h)-f(x)| \le \varepsilon \text{ et } |M(h)-f(x)| \le \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{h\to 0} m(h) = f(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} M(h) = f(x)$.

Ensuite par l'encadrement $m(h) \le \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M(h)$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

□

2 Primitives d'une fonction continue

Définition 2. *On appelle* **primitive** *d'une fonction f, définie sur un intervalle $]\,a\,;\,b\,[$, toute fonction dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$, dont la dérivée coïncide avec f sur $]\,a\,;\,b\,[$.*

Proposition 1. *Etant données deux primitives de F_1 et F_2 de f, alors leur différence est une constante. Deux primitives de la même fonction diffèrent donc par une constante. Une fonction a donc une infinité de primitive.*

Démonstration : On a $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$.
Donc $F_2'(x) - F_1'(x) = 0 \Rightarrow F_2(x) - F_1(x) = C \iff F_2(x) = F_1(x) - C$ avec $C \in \mathbb{R}$. □

Pour spécifier une primitive particulière, il suffit de fixer sa valeur en un point. En général, on considère la primitive qui s'annule en un certain point. Elle s'écrit comme une intégrale, grâce au théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 4. *Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$, et c un point de l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. On considère la fonction $F_c(x)$, qui à $x \in [\,a\,;\,b\,]$ associe :*

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Alors F_c est l'unique primitive de f qui s'annule au point c.

Démonstration : Soit F une (autre) primitive de f telle que $F(c) = 0$. Soit $G = F - F_c$:

$$G(c) = F(c) - F_c(c) = 0 \text{ et } G' = F' - F_c' = f - f = 0$$

donc G est une fonction constante qui est identiquement nulle :

$$\forall x \in [\,a\,;\,b\,]\ ,\ G(x) = F(x) - F_c(x) = 0 \iff F(x) = F_c(x)$$

donc la fonction F est nécessairement la fonction F_c □

Remarques :
– Si on ne connait pas *a priori* l'expression des primitives d'une fonction f, on note les primitives de f sous la forme

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

– Si on connait l'expression de F, une primitive de f, alors on note :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Dans cette écriture, C est une constante sur chaque intervalle où la fonction à intégrer est définie et continue. Par exemple, l'ensemble des primitives de la fonction $f(x) = 1/x$ est l'ensemble des fonctions F telles que :

$$\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*\ ,\ F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont deux réels quelconques.
– N'importe quelle primitive peut être utilisée pour calculer une intégrale. Si F est une primitive de f, on a la notation et le résultat suivant pour une intégrale définie :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{1}$$

3 Techniques de calcul de primitives ou intégrales

En pratique, pour calculer les primitives d'une fonction donnée, ou calculer une intégrale définie, on utilise des techiques de calcul correspondant à des théorèmes sur les primitives/intégrales, afin de se ramener à des primitives usuelles.

3.1 Primitives usuelles

Les primitives usuelles, que l'on doit connaître, sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.
Pour toutes les primitives, $C \in \mathbb{R}$ est la constante d'intégration.
x est la variable, $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions de x,
a est une puissance (réel différent de -1), α un réel non nul et β un réel quelconque.
Attention : les intervalles de définition ne sont pas précisés.

Fonction	**Primitive**
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
β	$\beta\, x + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\exp(x)$	$\exp(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$v'(x)(u' \circ v)(x)) = v'(x)u'(v(x))$	$(u \circ v)(x) + C = u(v(x)) + C$
$u'(\alpha\, x + \beta)$	$\dfrac{1}{\alpha}\, u(\alpha\, x + \beta) + C$
$u'(x)\, u(x)^a$	$\dfrac{1}{a+1}\, u(x)^{a+1} + C$
$u'(x) \exp(u(x))$	$\exp(u(x)) + C$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + C$

Exemple 2.

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \,\mathrm{d}x &= \frac{x^4}{4} + C && \Big(\textit{ primitive de } x^a \Big)\\
\int 2\,x \exp(x^2) \,\mathrm{d}x &= \exp(x^2) + C && \Big(\textit{ primitive de } v'(x)u'(v(x)) \Big)\\
\int \cos(5\,x+\pi) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\, \sin(5\,x+\pi) + C && \Big(\textit{ primitive de } u'(\alpha\,x+\beta) \Big)\\
\int \frac{1}{x}\, \ln(x)^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\, \ln(x)^3 + C && \Big(\textit{ primitive de } u'(x)\,u(x)^a \Big)\\
\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \,\mathrm{d}x &= \ln\Big|\sin(x)\Big| + C && \Big(\textit{ primitive de } \frac{u'(x)}{u(x)} \Big)
\end{aligned}
$$

3.2 Linéarité de l'intégrale

La première technique de calcul consiste à utiliser la ***linéarité*** du théorème 5 suivant
– soit pour séparer l'intégrale d'une somme en une somme d'intégrales,
– soit pour faire "sortir" une constante d'une intégrale.

Théorème 5. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [\,a\,;\,b\,]$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\ \int_a^b \lambda\, f(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Si F est une primitive de f, et G une primitive de g :

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= F(x)+G(x)+C, \quad C\in\mathbb{R}\\ \int \lambda\, f(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda\, F(x)+C, \quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

L'exemple le plus simple est celui des polynômes.

Exemple 3.

$$\int (t^3+2\,t^2-4\,t+5)\,\mathrm{d}t = \int t^3\,\mathrm{d}t\ +2\int t^2\,\mathrm{d}t\ -4\int t\,\mathrm{d}t\ +5\int 1\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}x^4+C_1\ +\frac{2}{3}x^3+C_2\ -\frac{4}{2}x^2+C_3\ +5\,x+C_4 = \frac{x^4}{4}+\frac{2\,x^3}{3}-2\,x^2+5\,x+C$$

Exemple 4. *Pour $x \geq 0$, trouver la primitive de $f(x) = \dfrac{2}{x+2} - 6\,\exp(2\,x+1)$ qui s'annule en $x = 0$.*

$$\begin{aligned}F(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{2}{t+2} - 6\,\exp(2\,t+1)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{t+2}\ \mathrm{d}t - \int_0^x 6\,\exp(2\,t+1)\ \mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^x \frac{1}{t+2}\ \mathrm{d}t - 6\int_0^x \exp(2\,t+1)\ \mathrm{d}t = 2\Big[\ln|t+2|\Big]_0^x - 6\Big[\frac{1}{2}\exp(2\,t+1)\Big]_0^x\\ &= 2\Big(\ln|x+2| - \ln(0+2)\Big) - 3\Big(\exp(2\,x+1) - \exp(2\times 0+1)\Big)\\ &= 2\,\ln|x+2| - 2\,\ln(2) - 3\,\exp(2\,x+1) + 3\,\exp(1)\\ &= 2\,\ln(x+2) - 3\,\exp(2\,x+1) - 2\,\ln(2) + 3\,\mathrm{e}\end{aligned}$$

Un autre exemple où on utilise les formules trigonométriques pour "linéariser" une puissance ou un produit.

Exemple 5.

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2\,x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2\,x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,x\,\Big]_0^\pi - \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(2\,x)}{2}\Big]_0^\pi = \frac{1}{2}\,\frac{\pi - 0 - \sin(2\,\pi)+\sin(0)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

3.3 Intégration par parties

Une deuxième technique de calcul à connaître est l'***intégration par parties*** :

Théorème 6. *Soient u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur un intervalle I, et soient a et b deux points de I.*

$$\begin{array}{lrcl} \text{Primitives :} & \displaystyle\int u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x & = & \displaystyle u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x \\ \text{Intégrale définie :} & \displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x & = & \displaystyle\Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x \end{array}$$

Démonstration : La dérivée de $u(x)\,v(x)$ est $u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$. Donc :

$$\int_a^b \Big(u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b$$

$$\iff \int_a^b u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

□

• Il faut penser à une intégration par parties quand l'un des facteurs (ici $u(x)$) de la fonction à intégrer possède une dérivée plus simple, notamment un polynôme (dériver diminue le degré), et qu'on connaît une primitive de l'autre facteur (ici $v'(x)$) .

Exemple 6. *Calculer l'intégrale définie* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,\cos(x)\ \mathrm{d}x$.

On pose $\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \cos(x) \end{array}\right\}$ *donc* $\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & \sin(x) \end{array}\right\}$. *Ce qui donne :*

$$\int_0^{\pi/2} x\,\cos(x)\ \mathrm{d}x = \Big[x\,\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} - \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \Big[x\,\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\,\sin(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Exemple 7. *Calculer les primitives de* $x\,\mathrm{e}^x$.

On pose $\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right\}$ *donc* $\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right\}$. *Ce qui donne :*

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

• Si nécessaire, plusieurs intégrations par parties peuvent être nécessaires pour calculer une intégrale définie ou une primitive.

Exemple 8. *Calculer l'intégrale définie* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$.
On pose $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^2 \\ v'(x) & = & \sin(x) \end{array}\right\}$ *donc* $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2\,x \\ v(x) & = & -\cos(x) \end{array}\right\}$. *Ce qui donne :*

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\,x\Big(-\cos(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\cos(0)}_{=0} + 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{=A_2}$$

L'intégrale A_2 *est celle de l'exemple 6 :*

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\,A_2 = \pi - 2$$

3.4 Changement de variable

Une autre technique importante pour le calcul d'intégrales (ou de primitives) est le ***changement de variable***.

Théorème 7. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et deux réels a et b tels que $[\,a\,;\,b\,] \subset I$.*
Soit φ une fonction de $J = [\,\alpha\,;\,\beta\,]$ dans I, φ dérivable et de dérivée continue sur J, avec α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.
Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Démonstration : Soit F une primitive de f et soit $G = F\circ\varphi$.
Grâce aux hypothèses, G est une fonction dérivable sur $[\,\alpha\,;\,\beta\,]$ de dérivée donnée par

$$G'(u) = (F'\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u) = (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u) = f\Big(\varphi(u)\Big)\,\varphi'(u)$$

En utilisant la formule (1), on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta G'(u)\,\mathrm{d}u = G(\beta) - G(\alpha)$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

• Il est fortement déconseillé de retenir la formule par cœur. Un changement de variable doit se penser de la manière suivante.

1. On veut remplacer t par $t = \varphi(u)$ (t sera appelée la *variable de départ*, la variable d'intégration de l'intégrale initiale, et u sera appelée *variable d'arrivée*, la variable d'intégration de l'intégrale finale).
2. On exprime $\mathrm{d}t$ en fonction de u et $\mathrm{d}u$ en dérivant l'expression $t = \varphi(u)$: $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$
3. On ajuste les bornes de l'intervalle d'intégration : il faut trouver deux réels α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.
4. On remplace t et $\mathrm{d}t$ par leurs valeurs en fonction de u et $\mathrm{d}u$, et on est ramené à trouver $G(u)$ primitive de $f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$. Puis on calcule l'intégrale définie.

• Le théorème (7) permet de calculer une intégrale définie en utilisant un changement de variable.
On peut utiliser le changement de variable pour calculer une primitive en appliquant le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*
Soit φ une fonction bijective de J dans I, dérivable et de dérivée continue sur J.
Soit $G(u)$ une primitive de la fonction $f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$.
Alors :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = G(\varphi^{-1}(t)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

• La difficulté est de trouver le "bon" changement de variable qui va permettre de se ramener à une intégrale plus simple à calculer (calcul de la fonction G).
Dans l'UE MAP101, le changement de variable sera donné, soit directement sous la forme $t = \varphi(u)$ (t en fonction de u), soit sous la forme $u = \phi(t)$ (u en fonction de t), il faudra alors retrouver φ fonction réciproque de ϕ.

Exemple 9. *Calculer* $A = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ *avec le changement de variable* $t = \sin(u)$.

1. *le changement de variable* $t = \varphi(u) = \sin(u)$ *est donné "dans le bon sens".*
2. $\varphi'(u) = \cos(u) \Rightarrow \mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \cos(u)\,\mathrm{d}u$.

$$\Rightarrow A = \int_{\sin(\alpha)}^{\sin(\beta)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\,\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

3. *il faut trouver les bornes α et β : on a* $\sin(\alpha) = a = 0$ *et* $\sin(\beta) = b = 1/2$.
Le plus simple est de choisir l'intervalle $I = [\,\alpha\,;\,\beta\,] = [\,0\,;\,\pi/6\,]$ *car la fonction φ est bijective de I dans* $[\,0\,;\,1/2\,]$, *et sur l'intervalle I, on a*

$$\sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = \cos(u) \geq 0$$

4.

$$A = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(u)}\,\cos(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u = \Big[\,u\,\Big]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

Exemple 10. *Calculer les primitives de* $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$ *avec le changement de variable* $u = \mathrm{e}^t$.

1. *Ici le changement de variable est donné "dans le mauvais sens", il faut exprimer* t *en fonction* u.
   La fonction $f(t) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$ *est définie pour* $t \in I = \mathbb{R}$.
   $$u = \phi(t) = \mathrm{e}^t = \varphi^{-1}(t) \iff t = \varphi(u) = \ln(u)$$
   La fonction $\varphi : u \mapsto t = \ln(u)$ *est bijective de* $J =]\,0\,;+\infty\,[$ *dans* $I = \mathbb{R}$, *et sa réciproque est* $\phi = \varphi^{-1} : t \mapsto u = \mathrm{e}^t$
2. $\varphi'(u) = \dfrac{1}{u} \Rightarrow G'(u) = f(\varphi(u))\,\varphi'(u) = \dfrac{1}{u+1}\,\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{u\,(u+1)}$.
   On peut montrer que :
   $$G'(u) = \frac{1}{u\,(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$
   $$\Rightarrow G(u) = \ln|u| - \ln|u+1| = \ln(u) - \ln(u+1) \qquad \textit{car } u > 0$$
3. *dans le cas de calcul de primitive, pas de correspondance de bornes à faire*
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = G(\varphi^{-1}(t)) + C = \ln(\mathrm{e}^t) - \ln(\mathrm{e}^t+1) + C = t - \ln(\mathrm{e}^t+1) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Exemple 11. *Calculer* $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *avec le changement de variable* $u = \sqrt{t}$.

1. *Ici le changement de variable est donné "dans le mauvais sens", il faut exprimer* t *en fonction* u.
   Comme $t \in [1;4]$ *donc* $t \geq 0$, *on a* $u = \sqrt{t} \iff t = u^2 = \varphi(u)$.
2. $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = 2\,u\,\mathrm{d}u$
3. *correspondance des bornes :* $\begin{cases} t = 1 \iff u = \sqrt{1} = 1 \\ t = 4 \iff u = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{u^2+u}\,2\,u\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u$
   $$= 2\Big[\ln|u+1|\Big]_1^2 = 2\big(\ln(3) - \ln(2)\big)$$

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = 6\,x^2 + 8\,x + 3$	b) $f(x) = x(x+a)(x+b)$
c) $f(x) = \mathrm{e}^x + 3\,\sin(x)$	d) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{x}$	f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
g) $f(x) = (5\,x - 3)^7$	h) $f(x) = \dfrac{3}{4 - 2\,x}$
i) $f(x) = \exp(5\,x)$	j) $f(x) = 2\,\cos(3\,x + \pi)$
k) $f(x) = 2\,x\,\cos(x^2 - 1)$	l) $f(x) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$
m) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$	n) $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Exercice 2.
a) *Déterminer la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = 4\,x + 2\,\sin(x)$ vérifiant $F(0) = 1$.*
j b) *Pour $x > 0$, déterminer la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{2\,x^2 + 3\,x + 4}{x^3}$ vérifiant $F(1) = 0$.*

Exercice 3. *Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$ par*

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2 + 2\,x} = \frac{x+4}{x\,(x+2)}$$

a) *Déterminer les deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.*
b) *Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 4. *Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ par*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - x^2} = \frac{x+1}{x^2\,(x-1)}$$

a) *Déterminer les trois réels a, b et c tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x-1}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.*
b) *Pour $x > 1$, en déduire $F(x)$, la primitive de $f(x)$ vérifiant $F(2) = 0$.*

Exercice 5. *En utilisant l'intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $x\sin(x)$	b) $x^2\cos(x)$	c) $x\,e^{2x}$	d) $\ln(x)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Exercice 6. *Calculer les intégrales définies suivantes*

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^3-2x+5)\,\mathrm{d}x$	b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\Big(\cos(x)+\sin(3\,x)\Big)\,\mathrm{d}x$	c) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$
d) $\displaystyle\int_{-3}^{-2}\frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x$	e) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt{t+2}}\,\mathrm{d}t$	f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan(x)\,\mathrm{d}x$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 12

Exercice 7. *Calculer les intégrales définies suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.*

a) $\displaystyle\int_1^2 t\,(t-1)^{1/3}\,\mathrm{d}t$ *avec* $t=u^3+1$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *avec* $t=(u-1)^2 \iff u=1+\sqrt{t}$.

c) $\displaystyle\int_0^{7/2}\sqrt[3]{2\,t+1}\,\mathrm{d}t$ *avec* $u=\sqrt[3]{2\,t+1}$.

d) $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *avec* $x=\sqrt{t}$.

Questions facultatives supplémentaires : exercice 13

Exercice 8. *Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.*

a) $\displaystyle\int\frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ *avec* $u=\sqrt{t+1}$	b) $\displaystyle\int\Big(\ln(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x$ *avec* $x=e^t$

Exercice 9.

a) *Déterminer les trois constantes réelles a, b et c tel que :*

$$\forall u>1,\ \frac{2\,u^2}{u^2-1}=\frac{2\,u^2}{(u-1)(u+1)}=a+\frac{b}{u-1}+\frac{c}{u+1}$$

b) *Soit l'intégrale définie* $A=\displaystyle\int_{\ln(5/4)}^{\ln(3)}\sqrt{e^t+1}\,\mathrm{d}t$.

En utilisant le changement de variable correspondant à $u=\sqrt{e^t+1}$, puis le résultat de la question précédente, calculer A.

Exercices supplémentaires

Exercice 10. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \sqrt{2\,x}$	b) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$
c) $f(x) = \dfrac{1}{(2\,x+1)^3}$	d) $f(x) = 3^x$
e) $f(x) = \dfrac{6\,x}{(x^2+1)^3}$	f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Exercice 11. *En utilisant l'intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $x\ \ln(x)$	b) $x^3\ \sin(x^2)$	c) $\exp(x)\ \sin(x)$

Exercice 12. *Calculer les intégrales définies suivantes*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\ \mathrm{d}x$	b) $\displaystyle\int_0^{4} \sinh^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$	c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2(x)\ \mathrm{d}x$

Exercice 13. *Calculer les intégrales définies suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.*

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^3}{y+2}\ \mathrm{d}y$ *avec* $y = x - 2$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ *avec* $x = \tan(t)$.

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ *avec* $t = \sin(u)$.

Exercice 14. *Soit f une fonction impaire, et a un réel strictement positif tel que la fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[-a, a]$.*
Montrer que $\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 15. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par* $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

a) *Déterminer les deux réels a et b tels que* $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

b) *En déduire les primitives de $f(x)$.*

c) *En utilisant le changement de variable $t = \ln(x)$, déterminer les primitives de la fonction g définie pour $t > 0$ par* $g(t) = \dfrac{1}{\sinh(t)}$.

Exercice 16.

a) *Soit a une constante réelle, résoudre l'équation* $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = a$
(indication : poser $X = \mathrm{e}^x > 0$)

b) *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{t^2 + 2\,t + 5}\ \mathrm{d}t$$

avec le changement de variable $t = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 1$.

Exercice 17. *La fonction $f(x) = \sinh(x)$ est continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et sa fonction réciproque est* $f^{-1}(x) = \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

a) *Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ puis la dérivée de $\operatorname{argsinh}(x)$.*

b) *En déduire les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, puis déterminer les primitives de $\sqrt{x^2+1}$ en utilisant l'intégration par parties.*

c) *Calculer les deux intégrales définies suivantes :*

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\,x^2+1}} \qquad \textit{et} \qquad B = \int_0^1 \sqrt{x^2+4}\ \mathrm{d}x$$

Exercice 18. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et les deux intégrales définies suivantes :*

$$C_n = \int_0^{\pi} t^n\ \cos(t)\ \mathrm{d}t \qquad\qquad S_n = \int_0^{\pi} t^n\ \sin(t)\ \mathrm{d}t$$

a) *Cas $n = 0$: calculer C_0 et S_0.*

b) *Cas $n \geq 1$: en utilisant l'intégration par parties, exprimer C_n en fonction de S_{n-1}, et S_n en fonction de C_{n-1}.*

c) *En déduire les valeurs de C_3 et S_3.*

Équations différentielles

Ce chapitre présente une introduction à la résolution d'équations différentielles, outil mathématique utilisé notamment en physique et en calcul scientifique.

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre

Définition 1. *Soient $a, f : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E_1) et l'équation différentielle homogène associée (H_1) :*

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{E_1}$$

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \tag{H_1}$$

Une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E_1) si y est dérivable, de dérivée continue sur I et vérifie

$$\forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Théorème 1 (Solution de (H_1))**.** *Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a sur I. Les solutions de (H_1) sont les fonctions h_H définies sur I :*

$$y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} \qquad \text{avec } C \text{ constante réelle.}$$

Démonstration : Soit $h : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)}$. On a pour tout x de I :

$$h'(x) = -a(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = -a(x)h(x) \iff h'(x) + a(x)\,h(x) = 0$$

h est donc solution de (H_1). De plus, pour tout x de I, $h(x) > 0$.
Soit $k : I \to \mathbb{R}$ une solution de (H_1), et soit $g(x) = \dfrac{k(x)}{h(x)} = k(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
Par dérivation, on a :

$$g'(x) = k'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + k(x)A'(x)\mathrm{e}^{A(x)} = \underbrace{(k'(x) + a(x)k(x))}_{=0}\mathrm{e}^{A(x)} = 0$$

donc la fonction $g(x)$ est constante sur l'intervalle I, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x de I, $g(x) = C$ d'où $k(x) = C\,h(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)}$. □

Théorème 2 (Solution de (E_1))**.** *Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a sur I. Soit y_0 une solution de (E_1). Alors toute solution de (E_1) est la somme de y_0 et d'une solution de l'équation homogène, c'est à dire*

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} + y_0(x)$$

Démonstration : Soit y une solution de (E_1). On vérifie alors facilement que $y - y_0$ est une solution de (H_1), d'où le résultat par le théorème précédent. □

Il ne reste plus qu'à trouver une solution de (E_1). La méthode utilisée est dite ***méthode de la variation de la constante***.
On va chercher y_0 sous la forme $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\mathrm{e}^{A(x)}$

Théorème 3. *Soit A une primitive de la fonction a définie sur I, et soit g une primitive de la fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$ sur I.*
Une solution particulière de (E_1) est donnée par la fonction $y_0 : x \mapsto g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$.

Démonstration : Soit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g'(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$.
Montrons que $\forall x \in I$, $y_0'(x) + a(x)\,y_0(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} y_0'(x) + a(x)\,y_0(x) &= \underbrace{g'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} + g(x)\,(-A'(x))\,\mathrm{e}^{-A(x)}}_{y_0'(x)} + \underbrace{a(x)\,g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}}_{a(x)\,y_0(x)} \\ &= f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,\mathrm{e}^{-A(x)} - a(x)\,g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)\,g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

□

Théorème 4 (Problème de Cauchy)**.** *Pour tout x_0 de I, pour tout b_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction dérivable y de I dans $\mathbb{R}$, solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)\,y(x) &= f(x) \\ y(x_0) &= b_0 \end{cases}$$

Démonstration :

1. D'après les théorèmes précédents, toute solution de (E_1) est de la forme

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} + y_0(x)$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$, C une constante réelle et $y_0(x)$ une solution particulière.

2. La *condition initiale* $y(x_0) = b_0$ donne

$$C\,\mathrm{e}^{-A(x_0)} + y_0(x_0) = b_0 \iff C = \frac{b_0 - y_0(x_0)}{\mathrm{e}^{-A(x_0)}} = \big(b_0 - y_0(x_0)\big)\,\mathrm{e}^{A(x_0)}$$

on a donc trouvé une unique valeur pour la constante C et donc il existe une unique fonction $y(x)$ solution du problème de Cauchy.

□

Exemple 1. *Soit le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x}\, y(x) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+^\star \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

1. *On résout l'équa. diff. homogène associée* (H_1) : $y'(x) + \dfrac{1}{x}\, y(x) = 0$
   On a la fonction $a(x) = \dfrac{1}{x}$ *dont une primitive est* $A(x) = \ln|x| = \ln(x)$ *car* $x > 0$.
   Donc les solutions de (H_1) *sont*

$$y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{C}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \frac{C}{x}\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

2. *On cherche une fonction* $y_0(x)$ *solution particulière de l'équation différentielle* (E_1) : $y'(x) + \dfrac{1}{x}\, y(x) = x$
   Posons $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \dfrac{g(x)}{x}$ *avec* $g'(x) = f(x)\ \mathrm{e}^{+A(x)} = x\,x = x^2$
   Une primitive de $g'(x)$ *est* $g(x) = \dfrac{x^3}{3}$ *d'où*

$$y_0(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{x^2}{3}$$

3. *Les solutions de* (E_1) *sont de la forme*

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3}\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

4. *Déterminons la solution du problème de Cauchy, c'est à dire la fonction* $y(x) = \dfrac{C}{x} + \dfrac{x^2}{3}$ *tel que* $y(1) = 0$ *:*

$$y(1) = C + \frac{1}{3} = 0 \iff C = -\frac{1}{3}$$

   donc la solution est la fonction $\boxed{y(x) = -\dfrac{1}{3\,x} + \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{x^3 - 1}{3\,x}\ ,\ \textit{avec } x > 0}$

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et a et b deux réels. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (E_2), et l'équation homogène associée (H_2)*

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x) \tag{E_2}$$

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0 \tag{H_2}$$

Une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E_2) si y est deux fois dérivable sur I et vérifie

$$\forall x \in I, \qquad y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)$$

Définition 3. *On appelle équation caractéristique associée à l'équation homogène (H_2) l'équation polynomiale du second degré : $\quad r^2 + a\,r + b = 0$.*

Si on cherche une solution de (H_2) de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{r\,x}$, on voit que r doit être racine de l'équation caractéristique précédente, d'où l'introduction de celle-ci.

Théorème 5 (Solutions de (H_2))**.** *Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (H_2). Les solutions de (H_2) sont les fonctions h définies sur I ainsi :*

1. *(cas $\Delta > 0$) soient r_1 et r_2 les deux racines réelles de l'équation caractéristique,*

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{r_1\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2\,x},\ \ C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. *(cas $\Delta = 0$) soit r la racine double réelle de l'équation caractéristique,*

$$y_H(x) = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^{r\,x},\ \ C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$$

3. *(cas $\Delta < 0$) soient $r_1 = \alpha - i\omega$ et $r_2 = \alpha + i\omega$ les deux racines complexes (conjuguées) de l'équation caractéristique (avec $\alpha = -\dfrac{a}{2}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$),*

$$y_H(x) = \mathrm{e}^{\alpha\,x}(C_1\,\cos(\omega\,x) + C_2\,\sin(\omega\,x)),\ \ C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$$

Remarque : en physique, la solution est parfois exprimée sous la forme $y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega\,x + \varphi)$

Démonstration : Par un simple calcul de dérivée, il est facile de vérifier que les fonctions définies dans le théorème sont bien solutions de (H_2). Il reste à montrer que toute solution est de cette forme.

(cas $\Delta > 0$)
Soit h une solution de (H_2). Posons $z(x) = h'(x) - r_1\,h(x)$.
Comme r_1 et r_2 sont les deux racines de $r^2 + a\,r + b = 0$, on a

$$a = -(r_1 + r_2) \text{ et } b = r_1\,r_2$$

En dérivant $z(x) = h'(x) - r_1\, h(x)$, on a :

$$\begin{aligned} z'(x) &= h''(x) - r_1\, h'(x) \\ &= -a\, h'(x) - b\, h(x) - r_1\, h'(x) \\ &= (r_1 + r_2)\, h'(x) - r_1\, r_2\, h(x) - r_1\, h'(x) \\ &= r_2 \Big(h'(x) - r_1\, h(x) \Big) \\ &= r_2\, z(x) \end{aligned}$$

D'après le théorème (1), il existe donc une constante C telle que $z(x) = C\, \mathrm{e}^{r_2\, x}$.
Donc h est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$h'(x) - r_1\, h(x) = C\, \mathrm{e}^{r_2\, x}$$

Une solution particulière est donnée par

$$x \mapsto \frac{C}{r_2 - r_1} \mathrm{e}^{r_2\, x}$$

Puis en utilisant le théorème (2), il existe une constante D telle que

$$y_H(x) = h(x) = \frac{C}{r_2 - r_1} \mathrm{e}^{r_2\, x} + D\, \mathrm{e}^{r_1\, x} = C_1\, \mathrm{e}^{r_1\, x} + C_2\, \mathrm{e}^{r_2\, x}$$

d'où le résultat.

(cas $\Delta = 0$) Soit h solution de (H_2). Posons $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{r\, x}$.
Comme r est la racine double de $r^2 + a\, r + b = 0$, on a $a = -2\, r$ et $b = r^2$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h(x) &=& g(x)\, \mathrm{e}^{r\, x} \\ h'(x) &=& [\, g'(x) + r\, g(x)\,]\, \mathrm{e}^{r\, x} \\ h''(x) &=& [\, g''(x) + 2\, r\, g'(x) + r^2\, g(x)\,]\, \mathrm{e}^{r\, x} \end{array} \right\} \Rightarrow h''(x) - 2\, r\, h'(x) + r^2(x) = g''(x)\, \mathrm{e}^{r\, x} = 0$$

ce qui implique que $g''(x) = 0$ puis $g'(x) = C_1$ et enfin $g(x) = C_1\, x + C_2$.
Donc la solution est bien $y_H(x) = h(x) = (C_1\, x + C_2)\, \mathrm{e}^{r\, x}$.

(cas $\Delta < 0$) On admettra le résultat (on peut utiliser un raisonnement similaire à celui du cas $\Delta > 0$ avec des exponentielles complexes). $\square$

Exemple 2. *Soit l'équation différentielle homogène* $y''(x) + 2\, y'(x) - 3\, y(x) = 0$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2\, r - 3 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 2^2 + 4 \times 3 = 16 = 4^2 > 0$ *dont les deux racines sont réelles et distinctes :* $r_1 = (-2 - 4)/2 = -3$ *et* $r_2 = (-2 + 4)/2 = 1$.
Donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle homogène est :

$$\Big\{ y(x) = C_1\, \exp(-3\, x) + C_2\, \exp(x)\ ,\ C_1 \in \mathbb{R}\ ,\ C_2 \in \mathbb{R} \Big\}$$

Exemple 3. *Soit l'équation différentielle homogène* $y''(x) - 2\, y'(x) + y(x) = 0$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2\, r + 1 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 = 0$ *dont la racine réelle double est :* $r_1 = 2/2 = 1$.
Donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle homogène est :

$$\Big\{ y(x) = (C_1\, x + C_2)\, \exp(x)\ ,\ C_1 \in \mathbb{R}\ ,\ C_2 \in \mathbb{R} \Big\}$$

Exemple 4. *Soit l'équation différentielle homogène* $y''(x) + 4\,y'(x) + 5\,y(x) = 0$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4\,r + 5 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 4^2 - 4\times 5 = -4 = -2^2 < 0$ *dont les deux racines sont complexes et conjuguées :* $r_1 = \alpha + i\,\omega$ *et* $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\,\omega$ *avec* $\alpha = -4/2 = -2$ *et* $\omega = 2/2 = 1$.
Donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle homogène est :

$$\Big\{\, y(x) = \exp(-2\,x)\Big(C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)\Big)\ ,\ C_1 \in \mathbb{R}\ ,\ C_2 \in \mathbb{R} \,\Big\}$$

Théorème 6 (Solution de l'équation complète)**.**
Une solution de (E_2) *est de la forme* $y_0 + y_H$ *où* y_0 *est une solution particulière de* (E_2) *et* y_H *une solution de* (H_2).

Il existe une méthode (dite de *variation de la constante*) similaire à celle des équations différentielles d'ordre 1 permettant de trouver une solution particulière y_0 de l'équation différentielle d'ordre 2 (E_2). Cette méthode faisant appel à des éléments d'algèbre linéaire, nous ne la verrons pas dans ce cours.

Par la suite, si on est amené à résoudre une équation différentielle d'ordre 2 (E_2), la forme de la solution particulière y_0 sera donnée.

Exemple 5. *Soit l'équation différentielle* $y''(x) + 2\,y'(x) - 3\,y(x) = 6\,x - 1$ *avec une solution particulière de la forme* $y_0(x) = \alpha\,x + \beta$.

1. D'après l'exemple 2, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $y''(x) + 2\,y(x) - 3\,y(x) = 0$ *sont :*

$$\Big\{y(x) = C_1\,\exp(-3\,x) + C_2\,\exp(x),\ C_1 \in \mathbb{R}\ ,\ C_2 \in \mathbb{R}\Big\}$$

2. On cherche la solution particulière sous la forme $y_0(x) = \alpha\,x + \beta$.
On calcule $y_0'(x) = \alpha$ *et* $y_0''(x) = 0$ *puis on écrit que* $y_0''(x) + 2\,y_0'(x) - 3\,y_0(x) = 6\,x - 1$

$$\iff\ 0 + 2\,\alpha - 3\,(\alpha\,x + \beta) = 6\,x - 1\ \iff\ -3\,\alpha\,x + 2\,\alpha - 3\,\beta = 6\,x - 1$$

En identifiant terme à terme les deux polynômes, on obtient les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -3\,\alpha & = & 6 \\ 2\,\alpha - 3\,\beta & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -2 \text{ et } \beta = -1$$

Donc la solution particulière est $y_0(x) = -2\,x - 1$.

3. D'après 1. et 2., l'ensemble des solutions de l'équation $y''(x)+2\,y'(x)-3\,y(x) = 6\,x+1$ *sont donc*

$$\Big\{\, y(x) = C_1\,\exp(-3\,x) + C_2\,\exp(x) - 2\,x - 1\ ,\ C_1 \in \mathbb{R}\ ,\ C_2 \in \mathbb{R} \,\Big\}$$

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, déterminer une solution particulière, et en déduire l'ensemble des solutions.*

a) $y'(x) - 4\,y(x) = 3 \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R}$

b) $y'(x) + y(x) = 2\,\mathrm{e}^x \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R}$

c) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R}_+^*$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 6

Exercice 2. *Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :*

a) $y'(x) - 2\,y(x) = 4 \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R} \qquad \textit{avec } y(0) = 0$

b) $y'(x) = \dfrac{y(x)+1}{x} \qquad \textit{pour } x > 0 \qquad \textit{avec } y(1) = 0$

c) $y'(x) - 2\,y(x) = 2\,x \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R} \qquad \textit{avec } y(0) = \dfrac{1}{4}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 7

Exercice 3. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions :*

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = 0$

b) $y''(x) + 4\,y'(x) + 4\,y(x) = 0$

c) $y''(x) + 4\,y'(x) + 13\,y(x) = 0$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Exercice 4. *Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes :*

a)	$y''(x) - 5\,y'(x) + 4\,y(x) = 0$	*avec*	$y(0) = 5$	*et*	$y'(0) = 8$
b)	$y''(x) - 4\,y(x) = 0$	*avec*	$y(0) = 1$	*et*	$y'(0) = 6$
c)	$y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 0$	*avec*	$y(0) = 1$	*et*	$y'(0) = 0$

Exercice 5. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $y''(x) - 4\,y'(x) + 5\,y(x) = 6\,\mathrm{e}^x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,\mathrm{e}^x$

b) $y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = -2\,x^2 + 1$ *avec* $y(0) = 3$ *et* $y'(0) = 0$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,x^2 + B\,x + C$

c) $y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 4\,x\,\mathrm{e}^x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 2$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = (A\,x + B)\,\mathrm{e}^x$

d) $y''(x) + y(x) = \cos(x)$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,x\,\sin(x)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Exercices supplémentaires

Exercice 6. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, déterminer une solution particulière, et en déduire l'ensemble des solutions.*

a) $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = \sin(x)$ *pour* $x \in \,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$

b) $(x^2+1)\, y'(x) + x\, y(x) = 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}$

Exercice 7. *Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :*

a) $x^2\, y'(x) - (2x-1)\, y(x) = x^2$ *pour* $x > 0$ *avec* $y(1) = 1$

b) $(x+1)\, y'(x) - x\, y(x) + 1 = 0$ *pour* $x > -1$ *avec* $y(0) = 2$

Exercice 8. *Soit* λ *un réel non nul, on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle*

$$y'(x) - \lambda\, y(x) = f(x)$$

avec $f(x)$ *une fonction particulière.*
Déterminer l'expression de la solution générale lorsque :

a) $f(x) = c_0$ *avec la constante* $c_0 \in \mathbb{R}^*$

b) $f(x) = c_1\, x + c_0$ *avec les constantes* $c_1 \in \mathbb{R}^*$ *et* $c_0 \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\omega x}$ *avec les constantes* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\omega \in \mathbb{R}^*$

Exercice 9. *On considère l'équation différentielle* $|x|\, y'(x) + (x-1)\, y(x) = x^3$.

a) *Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour* $x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b) *Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour* $x \in \,]-\infty\,;\,0\,[$.

Exercice 10. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions :*

a) $y''(x) - y(x) = 0$

b) $y''(x) - y'(x) = 0$

Exercice 11. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $y''(x) + 4\,y(x) = 0$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $y(\pi/4) = 2$

b) $y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = 9\,\mathrm{e}^x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,x\,\mathrm{e}^x$

c) $y''(x) + y'(x) = x$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 2$
Indication *: revenir à une équation différentielle d'ordre 1 en posant* $z(x) = y'(x)$

Exercice 12. *Soit l'équation différentielle* (E) *:*

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)$$

avec a, b *constantes réelles, et* f *fonction définie et continue sur un intervalle* I.
Quelles que soient les constantes a *et* b, *les solutions de l'équation homogène associée* (H) *:*

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0$$

sont toujours de la forme $y_H(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ *avec* C_1, C_2 *constantes réelles.*
Soient g_1 *et* g_2 *deux fonctions dérivables sur* I *et vérifiant :*

$$\text{pour tout } x \in I\ ,\ \left\{\begin{array}{lcrcl} g_1'(x)\,y_1(x) & + & g_2'(x)\,y_2(x) & = & 0 \\ g_1'(x)\,y_1'(x) & + & g_2'(x)\,y_2'(x) & = & f(x) \end{array}\right.$$

a) *Montrer que la fonction* y_0 *définie par* $y_0(x) = g_1(x)\,y_1(x) + g_2(x)\,y_2(x)$ *est une solution particulière de* (E).

b) *Application : déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :*

$$y''(x) - y(x) = 2\,\mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$