Flots - exemple et compléments

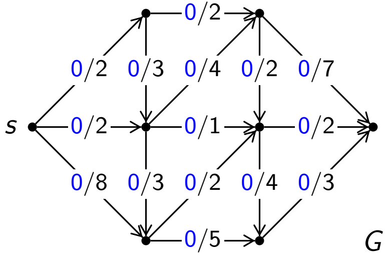
Plan

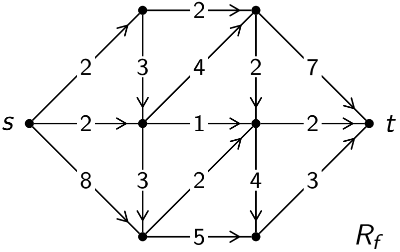
Plan

1. Exemple d'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

2. Compléments sur les flots
   - Flots entiers
   - Flots et couplages

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

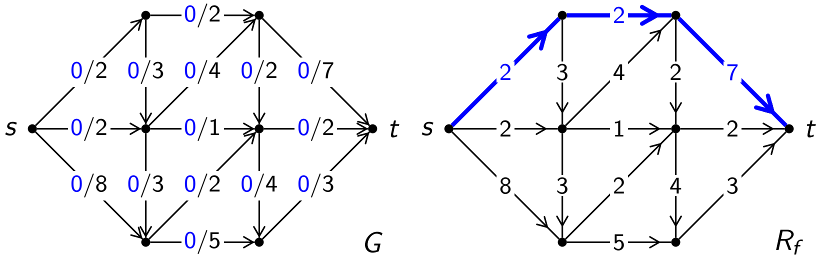




On initialise au flot nul

$$\mathrm{val}(f) = 0$$

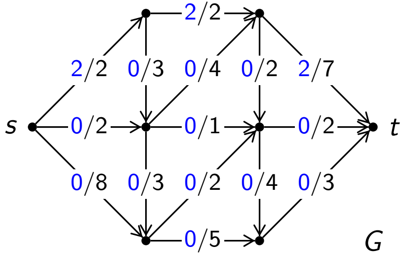
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson



$\text{val}(f) = 0$

chemin augmentant de capacité résiduelle 2

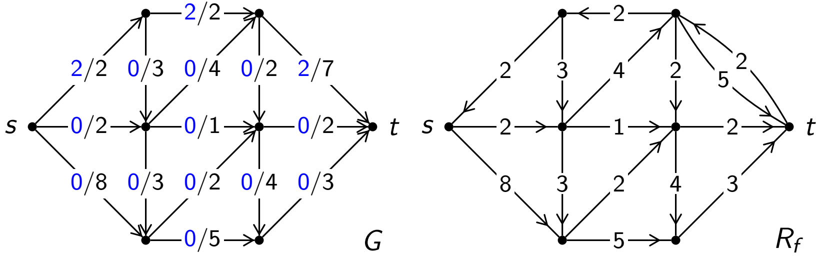
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson



On augmente le flot
$\mathrm{val}(f) = 2$

mise à jour du graphe résiduel ...

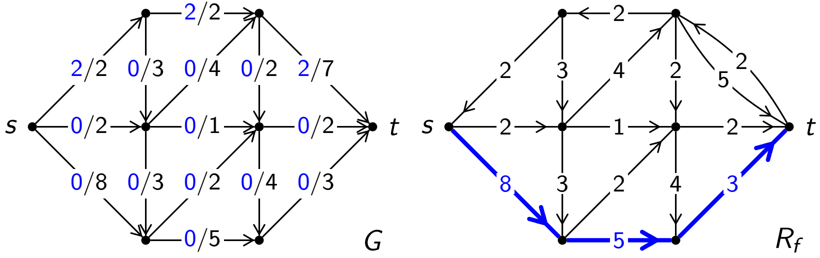
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson



$\text{val}(f) = 2$

graphe résiduel mis à jour

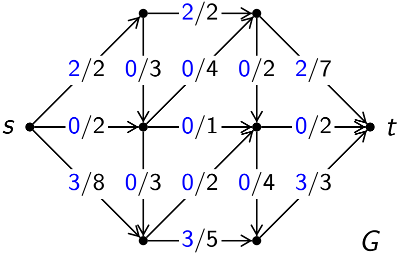
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson



$\mathrm{val}(f) = 2$

chemin augmentant de capacité résiduelle 3

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

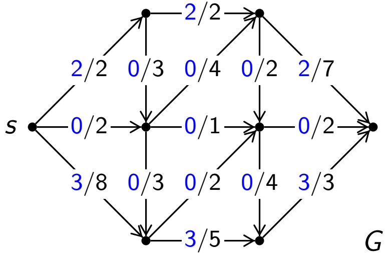


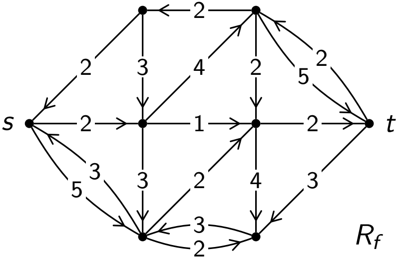
On augmente le flot

$\text{val}(f) = 5$

mise à jour du graphe résiduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

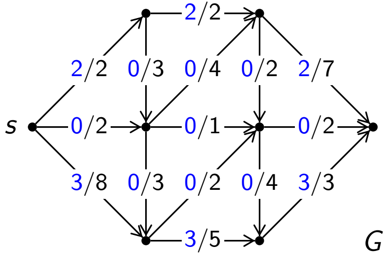


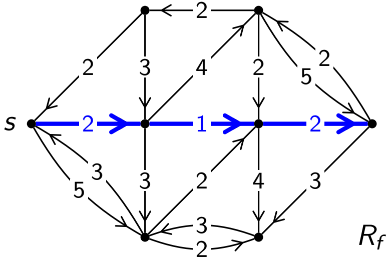


$\mathrm{val}(f) = 5$

graphe résiduel mis à jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

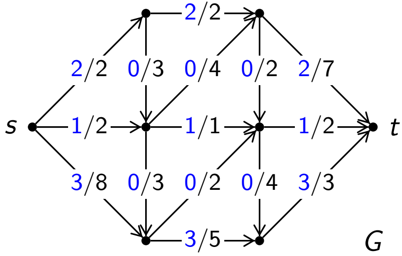




$\mathrm{val}(f) = 5$

chemin augmentant de
capacité résiduelle 1

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

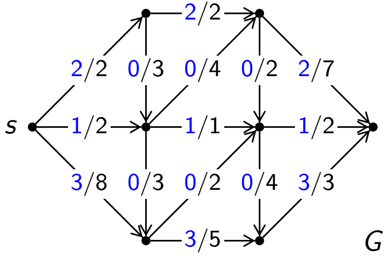


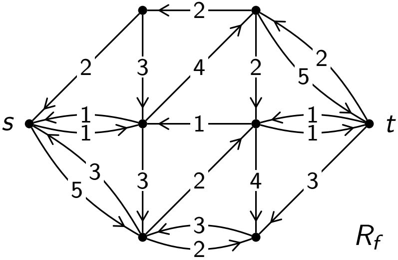
On augmente le flot

$\mathrm{val}(f) = 6$

mise à jour du graphe résiduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

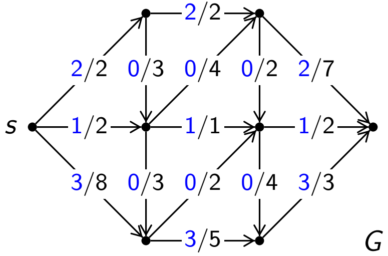


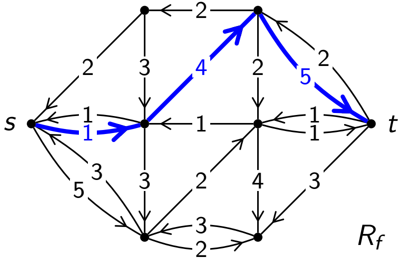


$\text{val}(f) = 6$

graphe résiduel mis à jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

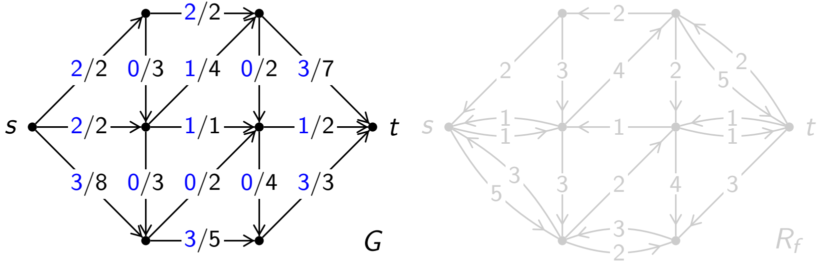




$\mathrm{val}(f) = 6$

chemin augmentant de capacité résiduelle 1

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

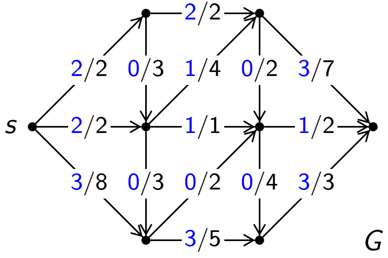


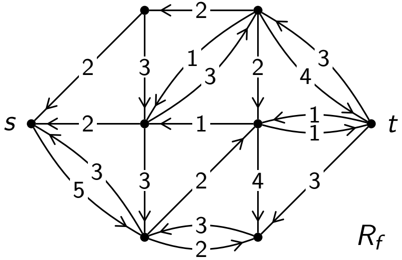
On augmente le flot

$\mathrm{val}(f) = 7$

mise à jour du graphe résiduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

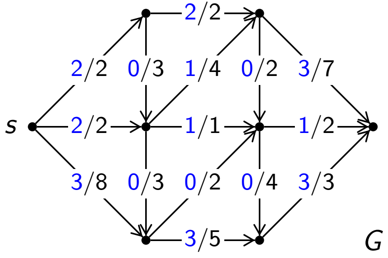


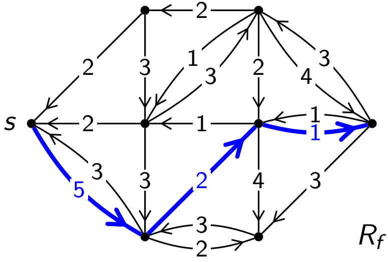


$\text{val}(f) = 7$

graphe résiduel mis à jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

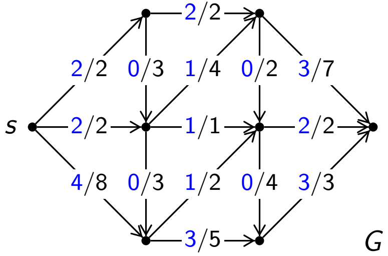




$\mathrm{val}(f) = 7$

chemin augmentant de capacité résiduelle 1

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

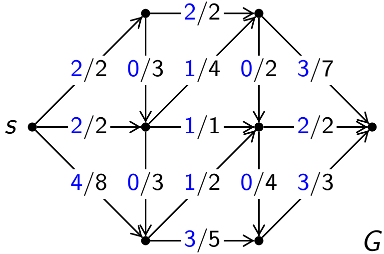


On augmente le flot

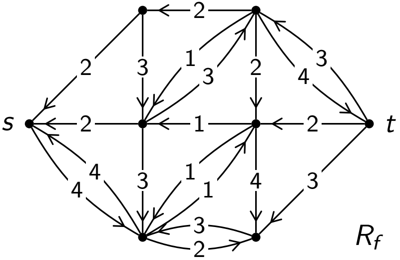
$\mathrm{val}(f) = 8$

mise à jour du graphe résiduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson



G

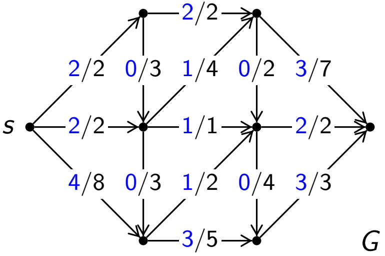


R_f

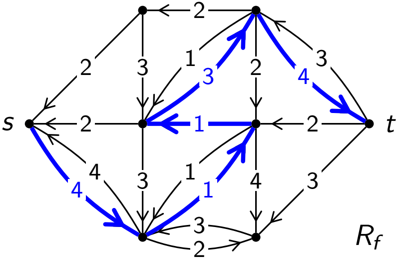
$\mathrm{val}(f) = 8$

graphe résiduel mis à jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

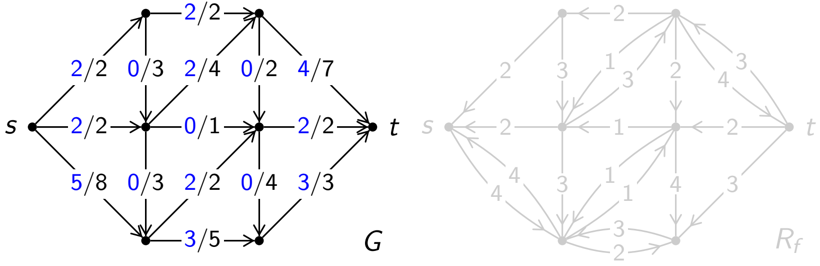


$\mathrm{val}(f) = 8$



chemin augmentant de capacité résiduelle 1

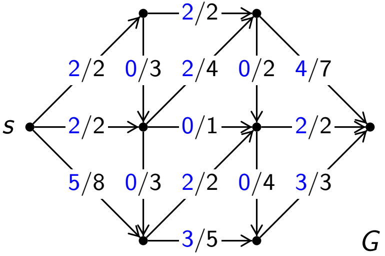
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

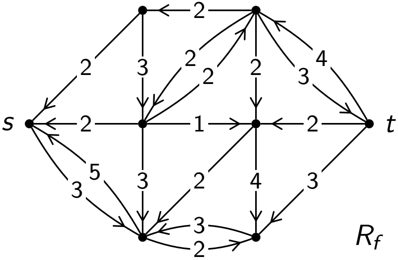


On augmente le flot
$\mathrm{val}(f) = 9$

mise à jour du graphe résiduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

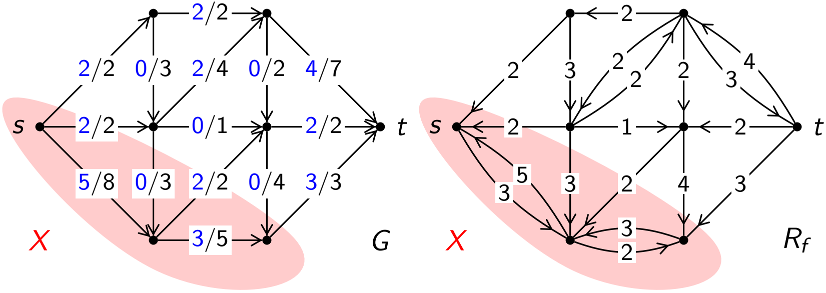




$\mathrm{val}(f) = 9$

graphe résiduel mis à jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson



$\text{val}(f) = 9 = \text{cap}(X)$

Remarque 1

A chaque étape de l'algorithme, en théorie, on dessine le graphe résiduel, puis on redessine le graphe avec le flot mis à jour.

A l'écrit, dans un souci d'efficacité, on ne vous oblige pas à dessiner le graphe résiduel.

Quelques recommandations :

- pensez à indiquer clairement le $s - t$ chemin augmentant choisi (avec un dessin ou en utilisant les noms des sommets), et n'oubliez pas que c'est bien dans le graphe résiduel qu'il faut chercher les chemins, même si on ne le dessine pas... donc ne pas oublier qu'on peut utiliser des arcs retour.
- si vous dessinez alternativement des graphes résiduels et le graphe initial avec le flot mis à jour, pensez à indiquer quand il s'agit d'un graphe résiduel.

Remarque 2

Quand on part d'un flot nul, on a parfois beaucoup d'itérations de l'algorithme de Ford-Fulkerson à appliquer.

A l'écrit, pour gagner du temps, on peut parfois faire plusieurs étapes en une à condition de le rédiger très clairement.

Dans l'exemple traité ici, on peut traiter en une seule étape les 3 premiers $s - t$ chemins augmentants trouvés en les explicitant (par exemple, dessiner chacun avec une couleur, ou nommer les 3 chemins en utilisant les noms des sommets), et en précisant qu'on s'autorise à augmenter selon les 3 chemins en même temps dans la mesure où les chemins sont disjoints 2 à 2 (c'est-à-dire qu'aucun arc n'est commun à deux chemins).

Plan

Flots entiers (1/2)

Théorème d'intégralité

Si les capacités des arcs sont entières, alors il existe un flot maximum entier (avec une valeur entière sur chaque arc).

Démonstration

- Récurrence sur le nombre d'itérations k de Ford-Fulkerson.
- Le cas de base $k = 0$ est évident, car le flot nul est entier.
- Supposons qu'après $k \geq 0$ étapes l'algorithme Ford-Fulkerson trouve un flot f tel que $\mathrm{val}(f)$ est entier.
- Comme c et f sont entiers pour chaque arc de G, alors les capacités résiduelles de R_f sont entières.

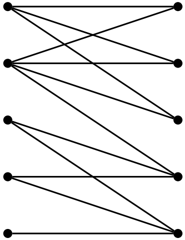
Flots entiers (2/2)

Démonstration (suite)

- Donc, la capacité résiduelle ε du chemin augmentant P choisi par l'algorithme est entière.
- Donc, le nouveau flot f' est de valeur $\text{val}(f') = \text{val}(f) + \varepsilon$, un entier.
- Le théorème est prouvé par récurrence.

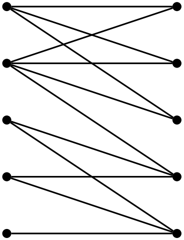
Flots et couplages

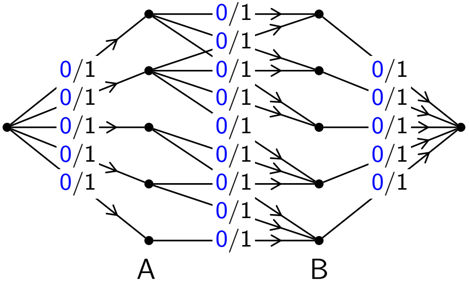
On peut utiliser le théorème de flot-max/coupe-min et le théorème d'intégralité pour prouver le théorème de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On considère un graphe $G = (A \cup B, V)$.



Flots et couplages

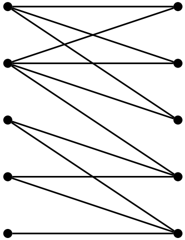
On peut utiliser le théorème de flot-max/coupe-min et le théorème d'intégralité pour prouver le théorème de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On considère un graphe $G = (A \cup B, V)$.

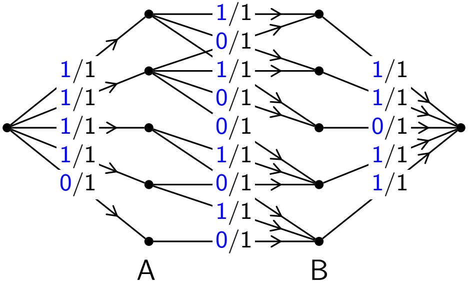




Flots et couplages

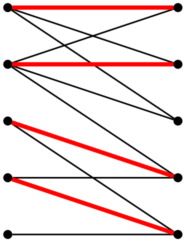
On peut utiliser le théorème de flot-max/coupe-min et le théorème d’intégralité pour prouver le théorème de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On considère un graphe $G = (A \cup B, V)$.

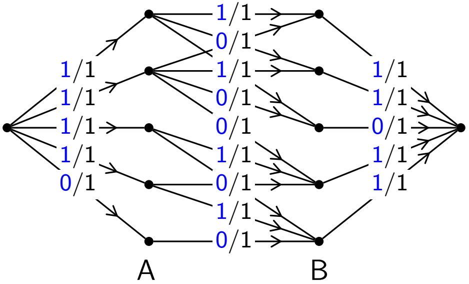




Flots et couplages

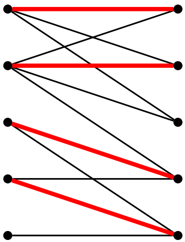
On peut utiliser le théorème de flot-max/coupe-min et le théorème d'intégralité pour prouver le théorème de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On considère un graphe $G = (A \cup B, V)$.

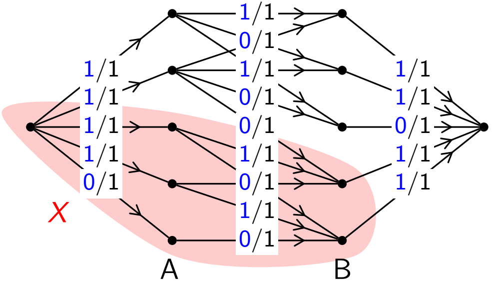




Flots et couplages

On peut utiliser le théorème de flot-max/coupe-min et le théorème d'intégralité pour prouver le théorème de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On considère un graphe $G = (A \cup B, V)$.

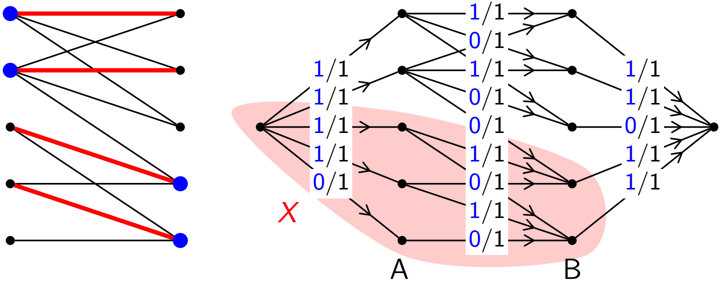




Soit R_f le graphe résiduel final (sur graphe G') et X la st-coupe associée.

Flots et couplages

On peut utiliser le théorème de flot-max/coupe-min et le théorème d'intégralité pour prouver le théorème de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On considère un graphe $G = (A \cup B, V)$.

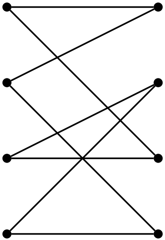


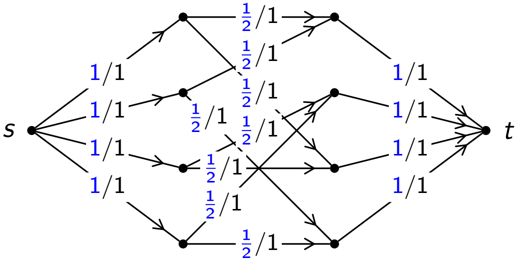
Soit R_f le graphe résiduel final (sur graphe G') et X la st-coupe associée. On trouve alors un transversal T du graphe initial G :

$$T = (A \cap (V \setminus X)) \cup (B \cap X)$$

Couplages dans les graphes bipartis réguliers

On peut aussi (re-)prouver que tout graphe biparti k-régulier ($k \geq 1$) possède un couplage parfait.





Merci pour votre attention !