MAP101 - Partiel - novembre 2022

Durée 1h30 - documents et calculette interdits

Le barème pour chaque exercice est indicatif

Justifiez au mieux chaque réponse

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation

Indiquez votre groupe sur votre copie en haut à gauche

Exercice 1 (4 pt)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{1-x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

Exercice 2 (3 pt)

Soit la fonction suivante f :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \\ a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Déterminer les coefficients réels a, b, c et d afin que la fonction f et sa dérivée f' soient continues en $x = 0$ et en $x = 1$.

Exercice 3 (3 pt)

Soit la fonction f suivante (définie et continue sur $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire l'expression de la fonction *taux d'accroissement de* f en $a = 0$.
2. Démontrer que la fonction f est dérivable en $x = 0$.

Exercice 4 (3 pt)

Déterminer le (ou les) réel(s) x solution(s) de l'équation :

$$\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x} = 4$$

(suite du sujet au verso)

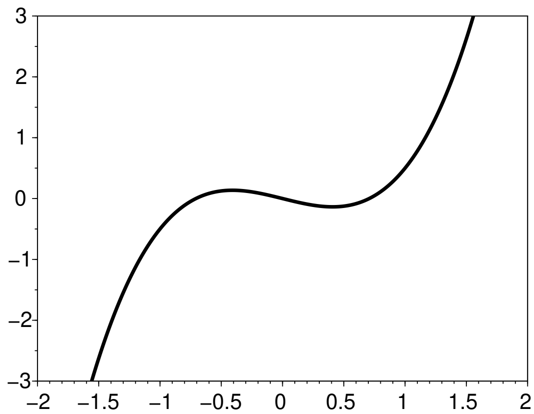
Exercice 5 (3 pt)
Soit la fonction f définie de la manière suivante :

$$f \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \ ; \ 2 \} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x^2-4} \end{array} \right.$$

Ecrire les instructions Scilab permettant de tracer le graphe de la fonction f avec les bornes suivantes pour le repère : $-1 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 3$.

Indication : le script Scilab suivant

```
// définition de h(x) = x^3-x/2
deff("y=h(x)" , "y = x .^ 3 - x ./ 2")
x = linspace(-2,2,1000)
y = h(x)
scf()
plot(x,y,"k-")
replot([-2,-3,2,3])
```



permet d'obtenir la figure ci-contre.

Exercice 6 (4 pt)
À partir des données suivantes

k	1	2	3	4	5
t_k	0	3	5	8	9
y_k	5	2	4	10	8

on calcule la fonction $y = f(t)$ par interpolation linéaire par morceaux.

1. Déterminer l'expression de la fonction $f(t)$ pour $t \in [\,3\,;\,5\,]$.
2. Quelle est la valeur de $f(7)$?

Corrigé du partiel - novembre 2022

Exercice 1

1. $f(x)$ est définie si et seulement si $1-x \geq 0$ et $2-\sqrt{1-x} \geq 0$:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 & \iff \quad x \leq 1 \\ 2-\sqrt{1-x} \geq 0 & \iff \quad \sqrt{1-x} \leq 2 \quad \iff \quad 1-x \leq 4 \quad \iff \quad x \geq -3 \end{cases}$$

$\boxed{\mathcal{D}_f = [\,-3\,;\,1\,]}$

2. $f(x) = \sqrt{g(x)}$ avec $g(x) = 2-\sqrt{1-x}$.

$$g'(x) = 0 - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{1-x}}} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{1-x}\,\sqrt{2-\sqrt{1-x}}}}$$

Exercice 2

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \\ a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(1) f continue en $x = 0$:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos(x) = \sin(0) = f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = d \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{d = 0}$$

(2) f' continue en $x = 0$:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos(x) = \cos(0) = f'(0) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c = c \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

(3) f continue en $x = 1$:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = a + b + c + d \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} -\ln(x) = -\ln(1) = f(1) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow a + b + c + d = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = -1}$$

(4) f' continue en $x = 1$:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c = 3\,a + 2\,b + c \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} -\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{1} = f'(1) = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow 3\,a + 2\,b + c = -1 \Rightarrow \boxed{3\,a + 2\,b = -2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0, b = -1, c = 1 \text{ et } d = 0}$$

Exercice 3

1. la fonction *taux d'accroissement* de f en $a = 0$ est définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \boxed{x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. La fonction f est dérivable en $x = 0$ si et seulement si la fonction *taux d'accroissement* de f en $a = 0$ admet une limite finie quand x tend vers 0, et cette limite est alors $f'(0)$.
   Comme $-1 \leq \cos(t) \leq 1$, pour tout réel t alors :

   $$g(x) = -|x| \leq \tau_0(x) \leq h(x) = +|x|$$

   et comme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, on en déduit (par le théorème des gendarmes) que

   $$\lim_{x\to 0} \tau_0(x) = 0$$

   et donc f est dérivable en $x = 0$: $f'(0) = 0$.

Exercice 4

Pour résoudre, il faut poser $X = \mathrm{e}^x$ (en notant que $X > 0$ et $x = \ln(X)$).

$$\begin{array}{rc}
 & \mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x} = 4 \\
\iff & \mathrm{e}^x + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 4 \\
\iff & X + \dfrac{2}{X} = 4 \\
\iff & X^2 + 2 = 4\,X \\
\iff & X^2 - 4\,X + 2 = 0
\end{array}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 = 8 > 0$.
Donc l'équation admet deux racines distinctes :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
X_1 & = & \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{4-\sqrt{4\times 2}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{2} & = \; 2-\sqrt{2} \\
X_2 & = & \dfrac{4+\sqrt{8}}{2} & = \; 2+\sqrt{2}
\end{array}\right.$$

Ces deux racines sont strictement positives car $2 = \sqrt{4} > \sqrt{2}$. Donc l'équation admet deux solutions :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
x_1 & = & \ln(X_1) = \boxed{\ln\left(2-\sqrt{2}\right)} \\
x_2 & = & \ln(X_2) = \boxed{\ln\left(2+\sqrt{2}\right)}
\end{array}\right.$$

Exercice 5

La fonction f n'étant pas définie en $x = 2$, il faut la tracer en deux parties, l'une sur $[\,-1\,,\,2-\varepsilon\,]$ et l'autre sur $[\,2+\varepsilon\,,\,5\,]$:

```
deff("y=f(x)" , "y = (x - 1)  ./ (x .^ 2 - 4)")
eps = 10^(-8)
scf()
// partie 1 : x ∈ [-1;2-eps]
x = linspace(-1,2-eps,1000)
y = f(x)
plot(x,y,"k-")
// partie 2 : x ∈ [2+eps;5]
x = linspace(2+eps,5,1000)
y = f(x)
plot(x,y,"k-")
// bornes du repere
replot([-1,-3,5,3])
```

Exercice 6

Sur chaque intervalle $[t_k; t_{k+1}]$, la fonction f est de la forme $f(t) = a\,t + b$.

1. L'intervalle $[0;3]$ correspond à $[t_1;t_2]$ donc

$$\left\{\begin{array}{rclcl} f(t_1) & = & a\,t_1+b & = & y_1 \\ f(t_2) & = & a\,t_2+b & = & y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rclcrcl} b & = & 5 & & & & \\ 3\,a+b & = & 2 & \Rightarrow & a & = & -1 \end{array}\right\}$$

   Sur l'intervalle $[0;3]$, $\boxed{f(t) = 5-t}$.

2. $t = 7$ appartient à l'intervalle $[5;8]$ qui correspond à $[t_3;t_4]$ donc

$$\left\{\begin{array}{rclcl} f(t_3) & = & a\,t_3+b & = & y_3 \\ f(t_4) & = & a\,t_4+b & = & y_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 5\,a+b & = & 4 \\ 8\,a+b & = & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 2 \\ b & = & -6 \end{array}\right\}$$

   Sur l'intervalle $[5;8]$, $f(t) = 2\,t-6$ et donc $\boxed{f(7) = 8}$.