Tests paramétriques

Chap. 5 du polycopié

Chargés de cours
V. Léger & F. Leblanc (resp. UE)

- **objet du test :** un paramètre inconnu (μ ou σ)
- **deux options possibles :** $\mathcal{H}_0$ (hyp. nulle) ou $\mathcal{H}_1$ (hyp. alternative) qui portent sur le paramètre testé
- **deux décisions possibles :** Conserver $\mathcal{H}_0$ (soit rejeter $\mathcal{H}_1$) ou pas (soit accepter $\mathcal{H}_1$)
- **Risques de bonnes ou mauvaises décisions**

Décision / Vérité	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$
$\mathcal{H}_0$	$P(\mathcal{H}_0 \vert \mathcal{H}_0) = 1 - \alpha$	$P(\mathcal{H}_1 \vert \mathcal{H}_0) = \alpha$
$\mathcal{H}_1$	$P(\mathcal{H}_0 \vert \mathcal{H}_1) = \beta$	$P(\mathcal{H}_1 \vert \mathcal{H}_1) = 1 - \beta$

α : risque de 1ère espèce ; β : risque de sde espèce

X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec σ connu
Choix entre hypothèses simples : soient $\mu_1 > \mu_0$ connus et le problème de test :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu = \mu_1$$

Un test : si $\bar{X}_n > C$ alors conclure $\mathcal{H}_1$
Les risques :

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(C - \mu_0)\right) \quad \text{et} \quad \beta = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(C - \mu_1)\right)$$

Ex : le montrer

Exercice : $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\sigma = 1.5$ et $n = 9$

- Exprimer α et β en fonction de C
- Les calculer pour $C = 1/2$, $C = 1/4$ et $C = 3/4$ et renseigner le tableau suivant :

C	$1/2$	$1/4$	$3/4$
α			
β			
hyp. favorisée			

- Commentaires

Définition : On dira qu'un test défini par la région de rejet W est de niveau α lorsque son risque de première espèce vaut α.

Soit $C_\alpha = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$ alors $W_\alpha = \{\bar{X}_n > C_\alpha\}$ est un test de niveau α pour le test

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$$

Remarque : C_α ne dépend pas de la valeur μ_1 donc pour tout $\mu_1 > \mu_0$ il fournit un test de niveau α.
On peut donc l'utiliser aussi pour tester :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$$

Ainsi au niveau α on utilisera le test défini par la région de rejet :

$$W_\alpha = \left\{ \bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \right\} = \{T > u_{1-\alpha}\} \text{ pour } \quad T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

On reprend l'exemple $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\sigma = 1.5$ et $n = 9$. Quelle décision prendra t-on avec $\bar{x} = 1/4$ pour :

- $\alpha = 10\%$? : $\bar{x} \notin W_{10\%} = \{\bar{X} > 0.641\}$ on ne rejette pas $\mathcal{H}_0$
- $\alpha = 31\%$? : $\bar{x} \in W_{31\%} = \{\bar{X} > 0.248\}$ on accepte $\mathcal{H}_1$
- $\alpha = 40\%$? : $\bar{x} \in W_{40\%} = \{\bar{X} > 0.127\}$ on accepte $\mathcal{H}_1$

On définit la p-valeur d'un test par α^* tel que

- si $\alpha > \alpha^*$ on conclut $\mathcal{H}_1$
- si $\alpha \leq \alpha^*$ on conclut $\mathcal{H}_0$

c'est le plus grand risque pour lequel on ne rejette pas $\mathcal{H}_0$.
Que vaut la p-valeur du précedent test si on a observé $\bar{x} = 1/4$? :
$\alpha^* = 1 - \Phi(0.5) = 30.9\%$

Trois formes de problèmes de tests :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu < \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

- région de rejet de même forme que l'alternative
- bord de la région de rejet dépend de α,μ_0, n et σ (si connu) ou $\hat{\sigma}$ (si σ inconnu).
- les régions de rejet sont exprimées soit sur $\bar{X}$ l'estimateur de μ soit sur sa version centrée et reduite sous $\mathcal{H}_0$ notée T et appelée statistique du test.

Les tests usuels sur μ dans le modèle normal σ inconnu et de niveau α

la valeur prise par T pour l'échantillon observé est notée t_{calc}

$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	T	$T\|\mathcal{H}_0$	rejet $\mathcal{H}_0$	$p-val$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}}$	$\mathcal{T}_{n-1}$	$T > t_{n-1,1-\alpha}$	$P(T > t_{calc})$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}}$	$\mathcal{T}_{n-1}$	$T > t_{n-1,1-\alpha}$	$P(T > t_{calc})$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}}$	$\mathcal{T}_{n-1}$	$T < -t_{n-1,1-\alpha}$	$P(T \leq t_{calc})$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}}$	$\mathcal{T}_{n-1}$	$T < -t_{n-1,1-\alpha}$	$P(T \leq t_{calc})$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}}$	$\mathcal{T}_{n-1}$	$\|T\| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	$P(\|T\| > \|t_{calc}\|)$

Les tests usuels sur μ dans le modèle de Bernoulli : $\mu = p$ de niveau asymptotique α

la valeur prise par T pour l'échantillon observé est notée t_{calc}

$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	T	$T\|\mathcal{H}_0$	rejet $\mathcal{H}_0$	$p - val$
$p = p_0$	$p > p_0$	$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	$T > u_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(t_{calc})$
$p \leq p_0$	$p > p_0$	$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	$T > u_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(t_{calc})$
$p = p_0$	$p < p_0$	$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	$T < -u_{1-\alpha}$	$\Phi(t_{calc})$
$p \geq p_0$	$p < p_0$	$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	$T < -u_{1-\alpha}$	$\Phi(t_{calc})$
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\|T\| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2 - 2\Phi(\|t_{calc}\|)$

la valeur prise par T pour l'échantillon observé est notée t_{calc}

$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	T	$T\|\mathcal{H}_0$	rejet $\mathcal{H}_0$	$p - val$
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$	$\mathcal{X}_{n-1}^2$	$T > z_{n-1,1-\alpha}$	$P(T > t_{calc})$
$\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$	$\mathcal{X}_{n-1}^2$	$T > z_{n-1,1-\alpha}$	$P(T > t_{calc})$
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$	$\mathcal{X}_{n-1}^2$	$T < z_{n-1,\alpha}$	$P(T < t_{calc})$
$\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$	$\mathcal{X}_{n-1}^2$	$T > z_{n-1,\alpha}$	$P(T < t_{calc})$
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$	$\mathcal{X}_{n-1}^2$	$T < z_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ *ou* $T > z_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	$min(2P(T < t_{calc}), 2P(T > t_{calc}))$