# Limites de suites

## Réels et approximation

### Exercice 4.1. (*)

Dans chacun des cas suivants, dire si on a bien une approximation avec la marge indiquée, ou sinon la corriger.

1. $3,14$ est une approximation de $\pi$ à 0,01 près.
2. $3,1416$ est une approximation de $\pi$ à 0,001 près.
3. $3,1416$ est une approximation de $\pi$ à $10^{-5}$ près.
4. $1,41$ est une approximation de $\sqrt{2}$ à $10^{-3}$ près.
5. $2,72$ est une approximation de e à $10^{-2}$ près.

**Solution de l'exercice 4.1**

1. Comme les trois premiers chiffres de $\pi$ en écriture décimale sont $3,14$, on a $3,14 \leq \pi < 3,15$, et donc $0 \leq \pi - 3,14 < 3,15 - 3,14 = 0,01$, et donc $|\pi - 3,14| < 0,01$. Ainsi $3,14$ est bien une approximation de $\pi$ à 0,01 près.
2. Comme les cinq premiers chiffres de $\pi$ en écriture décimale sont $3,1415$, on a $3,1415 \leq \pi < 3,1416$, et donc $3,1415 - 3,1416 = -0,0001 \leq \pi - 3,1416 < 0$, et donc $|\pi - 3,1416| \leq 0,0001$. Comme on a $0,0001 < 0,001$, le nombre $3,1416$ est bien une approximation de $\pi$ à 0,001 près.
3. On sait que les premiers chiffres de $\pi$ sont $3,141592$, donc on a $3,141592 \leq \pi < 3,141593$. Ainsi on a $3,1416 - \pi < 3,1416 - 3,141592 = 0,000008 < 10^{-5}$. Par conséquent on a $|3,1416 - \pi| > 10^{-5}$, et donc $3,1416$ n'est pas une approximation de $\pi$ à $10^{-5}$ près.
4. Les premiers chiffres de $\sqrt{2}$ sont $1,414$, donc on a $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$, et donc $\sqrt{2} - 1,41 \geq 1,414 - 1,41 = 0,004 > 10^{-3}$. Par conséquent on a $|\sqrt{2} - 1,41| > 10^{-3}$, et donc $1,41$ n'est pas une approximation de $\sqrt{2}$ à $10^{-3}$ près.

5. Les premiers chiffres de e sont 2,71 donc on a $2,71 \leq \mathrm{e} < 2,72$, et donc $2,71-2,72 = 0,01 \leq \mathrm{e}-2,72 < 0$. Par conséquent on a $|\mathrm{e}-2,72| \leq 0,01 = 10^{-2}$, et donc $2,72$ est une approximation de e à $10^{-2}$ près.

**Exercice 4.2.** **(*)** Soit $x$ un réel strictement positif.

1. Montrer que $x > 10 \Rightarrow \left|\frac{2\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{5}$
2. La réciproque est-elle vraie ?

**Solution de l'exercice 4.2**

1. Si $x > 10$, alors $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{10}$. De plus, pour tout $x$ réel, $|\sin x| \leqslant 1$ et ces nombres sont positifs. Donc, pour tout $x > 10$,
$$\left|\frac{2\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{2}{10} = \frac{1}{5} .$$
2. Si $x = \pi$, on a $\left|\frac{2\sin x}{x}\right| = 0 \leqslant \frac{1}{5}$ mais $x \leqslant 10$. Donc la réciproque est fausse.

**Exercice 4.3.** **(*)** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels de $[1, +\infty[$.

1. Montrer que
$$a \geqslant b \Rightarrow 1 - \frac{1}{b} \leqslant 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \leqslant 1 + \frac{1}{b}$$
2. La réciproque est-elle vraie ?

**Solution de l'exercice 4.3**

1. Supposons que $a \geqslant b$. Tout d'abord, comme $a \geqslant 1$, $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{a^2}$, donc
$$1 - \frac{1}{b} \leqslant 1 \leqslant 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\,; .$$
Puis, comme $a \geqslant b > 0$, on a $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$. De plus, $\frac{1}{a^2} \geqslant 0$. Donc :
$$1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \leqslant 1 + \frac{1}{a} \leqslant 1 + \frac{1}{b} .$$
2. En prenant $a = 1$ et $b = 2$, on remarque que $a < b$, et pourtant les deux inégalités sont vérifiées. Donc la réciproque est fausse.

**Exercice 4.4. (*)** Soit $a \in [0, 1/2]$. Montrer que

$$|b| \leqslant \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{3} \leqslant \frac{a+b}{1+a} \leqslant \frac{3a}{2}$$

## Solution de l'exercice 4.4

Soit $a \in [0, 1/2]$. Supposons que $|b| \leqslant \frac{a}{2}$. Alors, $-\frac{a}{2} \leqslant b \leqslant \frac{a}{2}$. Donc, en utilisant le fait que $1 + a > 0$,

$$\frac{a - \frac{a}{2}}{1+a} \leqslant \frac{a+b}{1+a} \leqslant \frac{a + \frac{a}{2}}{1+a} ,$$

donc

$$\frac{a}{2(1+a)} \leqslant \frac{a+b}{1+a} \leqslant \frac{3a}{2(1+a)} .$$

De plus, $0 < (1 + a) \leqslant 3/2$, donc :

$$\frac{a}{2 \times \frac{3}{2}} \leqslant \frac{a+b}{1+a} \leqslant \frac{3a}{2} ,$$

d'où le résultat.

**Exercice 4.5. (**)** Soit $c \geqslant 1$.

1. Montrer que si $y$ est tel que $0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{1}{c}$, alors
$$\frac{1}{1-y} \leqslant 1 + cy$$
2. Soit $b$ un réel supérieur à 10. Montrer que
$$a \geqslant b \Rightarrow a \leqslant \frac{a^2 + a + 1}{a - 5} \leqslant a\left(1 + \frac{13}{b}\right)$$
3. Lorsqu'on approche un réel $A$ par un autre réel $B$, on appelle erreur relative la valeur $|B - A|/|A|$. Montrer que si $a \geqslant 13.10^k$, avec $k$ un entier naturel, on peut approcher $\frac{a^2+a+1}{a-5}$ par $a$ avec une erreur relative inférieure ou égale à $10^{-k}$.

## Solution de l'exercice 4.5

1. Soit $y$ tel que $0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{1}{c}$. Remarquons que $y$ est dans $[0, 1[$, donc $1 - y > 0$. Donc,
$$\frac{1}{1-y} \leqslant 1 + cy \Leftrightarrow 1 \leqslant (1 + cy)(1 - y) \Leftrightarrow 0 \leqslant (1 + cy)(1 - y) - 1 .$$

Or

$$(1+cy)(1-y)-1 = 1+cy-y-cy^2-1 = y(c-1-cy) = cy(1-\frac{1}{c}-y)\ .$$

Donc si $0 \leqslant y \leqslant 1-\frac{1}{c}$, alors $cy(1-\frac{1}{c}-y) \geqslant 0$ (on utilise aussi le fait que $c \geqslant 0$), et par l'équivalence écrite plus haut, on en déduit le résultat.

2. Supposons que $a \geqslant b \geqslant 10$. Tout d'abord, $a \geqslant 0$ et $0 \leqslant a-5 \leqslant a$, donc

$$\frac{a^2+a+1}{a-5} \geqslant \frac{a^2+a+1}{a} \geqslant \frac{a^2}{a} = a\ ,$$

ce qui donne une des inégalités voulues. Remarquons maintenant que

$$\frac{a^2+a+1}{a-5} = \frac{a+1+\frac{1}{a}}{(1-\frac{5}{a})}$$

Or $\frac{5}{a} \leqslant \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2}$ donc on peut utiliser la question 1 avec $c=2$ et $y=\frac{5}{a}$. Cela nous donne :

$$\frac{1}{1-\frac{5}{a}} \leqslant 1+2\frac{5}{a}$$

d'où

$$\frac{a^2+a+1}{a-5} \leqslant (a+1+\frac{1}{a})(1+\frac{10}{a}) = a\left(1+\frac{11}{a}+\frac{11}{a^2}+\frac{10}{a^3}\right)$$

Remarquons maintenant que $a^2 \geqslant 10b$ et $a^3 \geqslant 100b$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+a+1}{a-5} &\leqslant a\left(1+\frac{11}{a}+\frac{11}{a^2}+\frac{10}{a^3}\right)\\
&\leqslant a\left(1+\frac{11}{b}+\frac{11}{10b}+\frac{1}{10b}\right)\\
&\leqslant a\left(1+\frac{122}{10b}\right)\\
&\leqslant a\left(1+\frac{13}{b}\right)
\end{aligned}$$

3. Posons $b = 13.10^k$ et supposons que $a \geqslant b$. Alors, comme $a$ et $b \geqslant 10$, on peut appliquer la question précédente. En posant $A = \frac{a^2+a+1}{a-5}$ et $B = a$, on

a tout d'abord $A \geqslant B$. Puis, par la question précédente,

$$A \leqslant a\left(1+\frac{13}{b}\right) \leqslant B(1+10^{-k})$$

donc

$$A-B \leqslant B10^{-k} \leqslant A10^{-k}$$

d'où

$$0 \leqslant \frac{A-B}{A} \leqslant 10^{-k}\,,$$

ce qui implique le résultat voulu.

**Quantifications successives**

**Exercice 4.6. (**)** Pour tous $i$ et $j$ entiers naturels non nuls, on note $P(i,j)$ l'assertion "$j$ est un multiple de $i$".

1. Pour visualiser les choses, représenter $P$ sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes.
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
   (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^*, j \geqslant J \Rightarrow P(i,j)$
   (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^*$ tel que $(j \geqslant J$ et $P(i,j))$

**Solution de l'exercice 4.6**

1. (Sol non rédigée)
2. (a) Cette assertion est fausse. En effet, elle signifie que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, à partir d'un certain $J$, tous les entiers supérieurs ou égaux à $J$ sont des multiples de $J$. Par exemple, en prenant $i = 2$, on sait que pour tout entier $J$, $2J+1$ est supérieur à $J$ mais non divisible par 2.
   (b) Cette assertion est vraie. En effet, elle signifie que pour tout $i$, il existe des multiples aussi grands que l'on veut. Plus précisément, pour tout $J \in \mathbf{N}^*$, on remarque que $iJ \geqslant J$ et $iJ$ est un multiple de $i$.

**Exercice 4.7. (**)** Pour tous $i$ et $j$ entiers naturels non nuls, on note $P(i,j)$ l'assertion "$\frac{1}{j^2} \leqslant \frac{1}{i}$".

1. Représenter $P$ sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes.

2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse (c'est-à-dire démontrer l'assertion ou sa négation).
   (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^*, j \geqslant J \Rightarrow P(i,j)$
   (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^*$ tel que ($j \geqslant J$ et $P(i,j)$)

**Solution de l'exercice 4.7**

1. (Solution non rédigée)
2. (a) Cette assertion est vraie. En effet, elle signifie que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, à partir d'un certain $J$, toutes les valeurs $1/j^2$ pour $j \geqslant J$ sont inférieures ou égales à $1/i$. Pour cela, $i$ étant donné, il suffit de poser $J = i$.
   (b) Cette assertion est vraie. En effet, elle signifie que pour tout $i$, il existe une infinité de valeurs $j$ telles que $1/j^2$ soit inférieur ou égal à $1/i$ or c'est une conséquence de la réponse précédente.

**Exercice 4.8. (**)** Soit $u$ une suite de nombres entiers dont toutes les valeurs sont dans $\{0,1,2\}$. Pour tout entier $j \geqslant 3$ et tout entier $i \geqslant 1$, on note $P(i,j)$ l'assertion "$\left|\frac{1}{j-u_j}\right| \leqslant \frac{1}{i}$".

1. Représenter $P$ sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes (si on ne peut mettre vrai ou faux à coup sûr, on mettra un point d'interrogation).
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse (c'est-à-dire démontrer l'assertion ou sa négation).
   (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^* \cap [3,+\infty[, j \geqslant J \Rightarrow P(i,j)$
   (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^* \cap [3,+\infty[$ tel que ($j \geqslant J$ et $P(i,j)$)
3. La suite $j \mapsto \frac{1}{j-u_j}$ admet-elle une limite ? Si oui, que vaut-elle ?

**Solution de l'exercice 4.8**

1. (Solution non rédigée)
2. (a) On remarque que pour tous les entiers $i$ et $j$,
$$P(i,j) \Leftrightarrow j \geqslant i + u_j$$

et comme $u_j \in \{0,1,2\}$,

$$j \geqslant i+2 \Rightarrow P(i,j)$$

et

$$j < i \Rightarrow \neg P(i,j)\ .$$

L'assertion signifie que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, à partir d'un certain $J$, $P(i,j)$ est vérifiée pour tous les $j \geqslant J$. Cette assertion est donc vraie : $i$ étant fixé, si on pose $J = i+2$, $P(i,j)$ est vraie dès que $j \geqslant J$.

(b) Cette assertion est vraie. En effet, elle signifie que pour tout $i$, il existe une infinité de valeurs $j$ telles que $P(i,j)$ soit vraie, or c'est une conséquence de la réponse précédente.

**Exercice 4.9. (**)** Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (Justifier rigoureusement, en montrant séparément deux inclusions).

1. $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbf{R}} \{x^2\}$,
2. $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[$,
3. $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[$,
4. $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]} [x-1, x+1]$,
5. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$,
6. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

## Solution de l'exercice 4.9

1. On considère une union de singletons qui contiennent tous un nombre réel, donc l'ensemble considéré contient des nombres réels. Comme $x^2$ est toujours positif, l'ensemble considéré est inclus dans $\mathbf{R}_+$. On a donc montré $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbf{R}} \{x^2\} \subset \mathbf{R}_+$.

   Réciproquement, soit $y$ un nombre réel positif. Pour $x = \sqrt{y}$, on a $\{x^2\} = \{(\sqrt{y})^2\} = \{y\}$. Donc on a $y \in \displaystyle\bigcup_{x\in\mathbf{R}} \{x^2\}$. Comme $y$ était un réel positif quelconque, on a $\mathbf{R}_+ \subset \displaystyle\bigcup_{x\in\mathbf{R}} \{x^2\}$.

Par double-inclusion, on a montré l'égalité $\bigcup_{x\in\mathbf{R}}\{x^2\} = \mathbf{R}_+$.

2. Comme on considère une réunion d'intervalles de $\mathbf{R}$, l'ensemble considéré est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Pour $x = 0$, on a $]x-1, x+1[=]-1,1[$. Pour $x = 1$, on a $]x-1, x+1[=]0,2[$. En prenant la réunion de ces deux-ensembles, on a l'intervalle $]-1,2[$, et on devine que c'est la solution.

   Montrons alors par double-inclusion qu'on a $\bigcup_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[ =]-1,2[$.

   Soit $y \in \bigcup_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[$. Alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $y \in ]x-1, x+1[$. Comme on a $x \geqslant 0$, on a $x - 1 \geqslant -1$, et donc $y > -1$. Comme on a $x \leqslant 1$, on a $x + 1 \leqslant 2$, et donc $y < 2$. Par conséquent on a $-1 < y < 2$, donc $y \in ]-1,2[$, et donc $\bigcup_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[ \subset ]-1,2[$.

   Pour l'inclusion réciproque, soit $y \in ]-1,2[$. Séparons en deux cas selon que $y$ est plus petit ou plus grand que 1. Si on a $y < 1$, alors $y \in ]-1,1[$, donc pour $x = 0$ on a $y \in ]x-1, x+1[$, et donc $x \in \bigcup_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[$. Si maintenant on a $1 \leq y < 2$, alors on a $y \in ]0,2[$, donc pour $x = 1$ on a $y \in ]x-1, x+1[$, et donc $x \in \bigcup_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[$.

3. Pour $x = 0$, on a $]x-1, x+1[=]-1,1[$. Pour $x = 1$, on a $]x-1, x+1[=]0,2[$. On peut donc penser que l'intersection est $]-1,1[\cap]0,2[=]0,1[$. Démontrons-le par double-inclusion.

   Pour l'inclusion $\bigcap_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[ \subset ]0,1[$, on a

$$\bigcap_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[ \ \subset\ ]-1,1[\cap]0,2[ = ]0,1[\ .$$

   Pour l'inclusion réciproque, soit $y \in ]0,1[$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $|y - x| < 1$, donc $y \in ]x-1, x+1[$, et par conséquent $y \in \bigcap_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[$. On a donc $]0,1[ \subset \bigcap_{x\in[0,1]} ]x-1, x+1[$, et on a démontré la double-inclusion.

4. La raisonnement est le même que dans la question précédente, on trouve l'ensemble $[0,1]$,

5. Soit $A = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right]$. Un dessin peut laisser penser que $A=\{0\}$.

   Démontrons-le par double inclusion : soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right]$, et montrons qu'alors on a $x=0$. On a en particulier $x\in[0,1]$, donc $x\geq 0$. Supposons $x\neq 0$. Alors on a $\frac{1}{x}>0$. Il existe un entier $m$ strictement plus grand que $\frac{1}{x}$ (il suffit par exemple de prendre $m=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+1$). Pour cet entier $m$, on a $m>\frac{1}{x}>0$, donc $\frac{1}{m}<\frac{1}{1/x}=x$. Par conséquent on a $x\notin[0,\frac{1}{m}]$, et donc $x\notin\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right]$. On a démontré l'inclusion $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right]\subset\{0\}$.

   Pour l'inclusion réciproque, pour tout entier naturel $n$, on a $\{0\}\subset[0,\frac{1}{n}]$ , et donc $\{0\}\subset\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right]$.

6. Soit $A=\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$. Un dessin nous laisse penser que $A=]0,1]$.

   Montrons tout d'abord que $A\subset]0,1]$. Si $n$ appartient à $\mathbf{N}^*$, alors $0<\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}\leqslant 1$. Donc $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\subset]0,1]$. On en déduit que $A\subset]0;1]$, puisque tout élément de $A$ est dans au moins un intervalle de la forme $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ avec $n\in\mathbf{N}^*$.

   Montrons maintenant que $]0,1]\subset A$. Soit $x$ un élément de $]0,1]$. On cherche un entier $n$ de $\mathbf{N}^*$ tel que $x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, ou encore, ce qui revient au même, tel que $\frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$ Remarquons que pour tout $n$ de $\mathbf{N}^*$,
$$\frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\quad\Leftrightarrow\quad n\leqslant\frac{1}{x}\leqslant n+1$$
   On voit donc qu'en prenant $n=\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$, $n$ est bien un entier, et $\frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$. De plus, si $x\in]0,1]$, $\frac{1}{x}\geqslant 1$ et donc $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\geqslant 1$. Donc pour tout $x\in]0;1]$, il existe bien un entier $n$ dans $\mathbf{N}^*$ tel que $x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, ce qui montre l'inclusion voulue.

**Limites de suites**

**Exercice 4.10. (*)**

Pour chacune des suites suivantes, trouver deux entiers $N_{10}$ et $N_{100}$ tels que les assertions

$$\forall n \geq N_{10}, |u_n| < \frac{1}{10}$$
$$\forall n \geq N_{100}, |u_n| < \frac{1}{100}$$

soient vraies.

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$,
4. $u_n = 2^{-n}$,
5. $u_n = 10^{-n}$,
6. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,
7. $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,
8. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{3^n}$.

## Solution de l'exercice 4.10

1. Pour $n$ un nombre entier strictement positif, on a $\frac{1}{n} > 0$, donc $|u_n| = \frac{1}{n}$. L'inégalité $|\frac{1}{n}| < \frac{1}{10}$ est alors équivalente à $n > 10$. Par conséquent on peut prendre $N_{10} = 11$. Pour tout entier $n \geq N_{10} = 11$, on a bien $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$.

   De même façon posons $N_{100} = 101$. On a alors, pour tout $n \geqslant N_{100}$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$.
2. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = \frac{1}{n^2}$. Or, pour $n > 0$,
   $$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow n^2 > 10 \Leftrightarrow n > \sqrt{10}$$
   Posons $N_{10} = 4$, de sorte que $N_{10}^2 > 10$. Donc si $n \geqslant N_{10}$, $|u_n| < \frac{1}{10}$ grâce à l'équivalence ci-dessus.

   De même,
   $$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n^2 > 100 \Leftrightarrow n > 10$$
   Donc en posant $N_{100} = 11$, on a bien que pour tout $n \geqslant N_{100}$, $|u_n| < \frac{1}{100}$.
3. $|u_n| = \frac{1}{n^2}$, donc la question précédente montre que $N_{10} = 4$ et $N_{100} = 11$ conviennent.

4. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n = 2^{-n}$. Or, pour $n > 0$,
$$2^{-n} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 2^n > 10 \Leftrightarrow n \ln 2 > \ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 10}{\ln 2}$$
où on a utilisé le fait que $\ln 2 > 0$ car $2 > 1$ et ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Remarquons que : $\frac{\ln 10}{\ln 2} < \frac{\ln 16}{\ln 2} = \frac{\ln(2^4)}{\ln 2} = \frac{4 \ln 2}{\ln 2} = 4$

   Posons $N_{10} = 4$. Donc si $n \geqslant N_{10}$, $|u_n| < \frac{1}{10}$ grâce aux équivalences et inégalités ci-dessus.

   De même,
$$|u_n| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 2}$$
et remarquons que : $\frac{\ln 100}{\ln 2} < \frac{\ln 2^7}{\ln 2} = \frac{7 \ln 2}{\ln 2} = 7$ Donc en posant $N_{100} = 7$, on a bien que pour tout $n \geqslant N_{100}$, $|u_n| < \frac{1}{100}$.

5. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n = 10^{-n}$. Or, pour $n > 0$,
$$10^{-n} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10^{-n} < 10^{-1} \Leftrightarrow n > 1$$
Posons $N_{10} = 2$. Donc si $n \geqslant N_{10}$, $|u_n| < \frac{1}{10}$ grâce aux équivalences et inégalités ci-dessus.

   De même,
$$|u_n| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 2$$
Donc en posant $N_{100} = 3$, on a bien que pour tout $n \geqslant N_{100}$, $|u_n| < \frac{1}{100}$.

6. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n$. Or, d'après la question 1, si $n \geqslant 11$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ et d'après la question 2 si $n \geqslant 4$, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10}$. Posons donc $N_{10} = \max\{11, 4\} = 11$. Si $n \geqslant N_{10}$, on a à la fois $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ et $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10}$. Ainsi, que $n$ soit pair ou impair, si $n \geqslant N_{10}$ avec $N_{10} = 11$, on a $|u_n| < \frac{1}{10}$.

   Le même raisonnement montre qu'en prenant $N_{100} = \max\{101, 11\} = 101$, on aura (en utilisant les questions 1 et 2) que $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ et $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{100}$. Ainsi, que $n$ soit pair ou impair, si $n \geqslant N_{100}$, avec $N_{100} = 101$, on a $|u_n| < \frac{1}{100}$.

7. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n$. D'après la question 4, si $n \geqslant 4$, $2^{-n} < \frac{1}{10}$. Cherchons un rang $n$ à partir duquel $3^{-n} < \frac{1}{10}$. On a :
$$3^{-n} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3^n > 10 \Leftrightarrow n \ln 3 > \ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 10}{\ln 3}$$

où on a utilisé le fait que $\ln 3 > 0$ car $3 > 1$ et ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Remarquons que : $\frac{\ln 10}{\ln 3} < \frac{\ln 27}{\ln 3} = \frac{\ln(3^3)}{\ln 3} = \frac{3\ln 3}{\ln 3} = 3$ Donc si $n \geqslant 3$, $3^{-n} < \frac{1}{10}$. Finalement, posaons $N_{10} = 4$, de sorte que si $n \geq N_{10}$, on a à la fois $2^{-n} < \frac{1}{10}$ et $3^{-n} < \frac{1}{10}$, que $n$ soit pair ou impair. Donc dans tous les cas, si $n \geqslant N_{10}$, $|u_n| < \frac{1}{10}$.

Pour $N_{100}$, remarquons que $3^5 = 243 > 100$, donc si $n \geqslant 5$, $3^{-n} < \frac{1}{100}$. De même, d'après la question 4, si $n \geqslant 7$, $2^{-n} < \frac{1}{100}$. Donc $N_{100} = 7$ convient.

8. On remarque que pour tout $n \geqslant 1$,
$$|u_n| = \frac{|\cos n|}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$$
donc la question précédente montre que l'on peut prendre $N_{10} = 3$ et $N_{100} = 5$.

**Exercice 4.11. (*/**)**

Pour chacune des suites suivantes et pour tout réel strictement positif $\varepsilon$, trouver un entier $N_\varepsilon$ tel que l'assertion
$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| < \varepsilon$$
soit vraie.

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$,
4. $u_n = 2^{-n}$,
5. $u_n = 10^{-n}$,
6. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,
7. $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,
8. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{3^n}$.

**Solution de l'exercice 4.11**

1. Pour $n$ un nombre entier strictement positif, on a $\frac{1}{n} > 0$, donc $|u_n| = \frac{1}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ est alors équivalente à $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Par conséquent on peut prendre $N_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, qui est le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$, on a bien $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

2. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = \frac{1}{n^2}$. Or, pour $n > 0$, et $\varepsilon > 0$,
$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
Posons $N_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$. Donc si $n \geqslant N_\varepsilon$, $|u_n| < \varepsilon$.
3. $|u_n| = \frac{1}{n^2}$, donc la question précédente montre que $N_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$.
4. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n = 2^{-n}$. Or, pour $n > 0$,
$$2^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$$
où on a utilisé le fait que $\ln 2 > 0$ car $2 > 1$ et ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

   Posons $N_\varepsilon = \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \rfloor + 1$. Donc si $n \geqslant N_\varepsilon$, $|u_n| < \varepsilon$ grâce aux équivalences et inégalités ci-dessus.
5. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n = 10^{-n}$. Or, pour $n > 0$,
$$10^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow 10^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 10}$$
   Posons $N_\varepsilon = \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 10} \rfloor + 1$. Donc si $n \geqslant N_\varepsilon$, $|u_n| < \varepsilon$ grâce aux équivalences et inégalités ci-dessus.
6. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n$. Or, d'après la question 1, si $n \geqslant \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ et d'après la question 2 si $n \geqslant \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$, $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Posons donc $N_{10} = \max\{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1, \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1\}$. Si $n \geqslant N_\varepsilon$, on a à la fois $\frac{1}{n} < \varepsilon$ et $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Ainsi, que $n$ soit pair ou impair, si $n \geqslant N_\varepsilon$, on a $|u_n| < \varepsilon$.
7. Comme $u_n > 0$, on a $|u_n| = u_n$. D'après la question 4, si $n \geqslant \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \rfloor + 1$, $2^{-n} < \varepsilon$. Cherchons un rang $n$ à partir duquel $3^{-n} < \varepsilon$. On a :
$$3^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \ln 3 > \ln \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3}$$
Donc si $n \geqslant \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3} \rfloor + 1$, $3^{-n} < \varepsilon$. Finalement, posons $N_\varepsilon = \max\{\lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3} \rfloor + 1, \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \rfloor + 1\} = \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \rfloor + 1$. Si $n \geq N_\varepsilon$, on a à la fois $2^{-n} < \varepsilon$ et $3^{-n} < \varepsilon$, que $n$ soit pair ou impair. Donc dans tous les cas, si $n \geqslant N_\varepsilon$, $|u_n| < \varepsilon$.

8. On remarque que pour tout $n \geqslant 1$,
$$|u_n| = \frac{|\cos n|}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$$
donc la question précédente montre que l'on peut prendre $N_\varepsilon = \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 3} \rfloor + 1$.

**Exercice 4.12. (**)** La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

*Si une suite de nombre réels est périodique, alors elle est bornée.*

### Solution de l'exercice 4.12

**Exercice 4.13. (**)**

Pour chacune des suites suivantes, dire si la suite est périodique, majorée, minorée, bornée, convergente, si elle tend vers $\pm\infty$, ou si elle diverge (démontrez toutes vos réponses). Si elle est convergente, déterminer sa limite.

1. $u_n = (-1)^n$,
2. $u_n = \dfrac{1}{n}$,
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,
4. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$,
5. $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$,
6. $u_n = \cos(n)$,
7. $u_n = 2^{-n}$,
8. $u_n = n + (-1)^n$,
9. $u_n = n + (-1)^n n$,
10. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.
11. $u_n = \dfrac{2n^2+n+3}{n^2}$.

### Solution de l'exercice 4.13

1. On remarque que pour tout $n$ entier naturel, $u_{n+2} = (-1)^2 u_n = u_n$. Donc $u$ est périodique (de période 2 car elle n'est pas constante). Toute suite périodique est bornée. Plus précisément, ici, on peut remarquer que $|u_n| = 1$ pour tout $n$. Enfin, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ converge vers $-1$ et $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ converge vers 1. Donc $u$ possède deux sous-suites ayant des limites différentes, donc $u$ diverge.
2. Montrons que $u_n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Pour tout $n \geqslant N$, on a $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$.

   Donc $u$ est convergente. Toute suite convergente est bornée, donc $u$ est bornée. Plus précisément, ici, on peut remarquer que pour tout $n \geqslant 1$,

$0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Comme $u$ est strictement décroissante, elle prend une infinité de valeurs distinctes, et donc elle ne peut être périodique.

3. Complètement similaire à la question précédente : $u$ a pour limite 0, elle est non périodique mais bornée.
4. On peut écrire :
$$u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$
Or
$$1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+0$$
par addition de limites, puis
$$u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1} = 1$$
par quotient (ou inverse, ici), de limites. Donc $u$ est convergente, elle est donc notamment bornée (ici, on peut montrer facilement qu'elle est bornée entre 0 et 1), et non périodique car elle est strictement croissante. On peut aussi dire qu'elle est convergente et non constante (calculer $u_0$ et $u_1$ par exemple), donc non périodique.
5. On remarque que pour tout entier $n > 0$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ et $u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$. Donc $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 1 et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ converge vers $-1$. La suite $u$ possède deux sous-suites qui convergent vers des limites distinctes, donc $u$ diverge. Par contre, $u$ est bornée, car pour $n \geqslant 1$, $|u_n| \leqslant |(-1)^n| + |\frac{1}{n}| \leqslant 2$. Remarquons que $u$ ne peut pas être périodique car $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.
6. On sait que la fonction cos prend des valeurs dans $[-1, 1]$, donc $u$ est bornée. Elle n'est pas périodique et en fait, elle ne prend même jamais deux fois la même valeur. En effet, si $n$ et $m$ sont deux entiers,
$$\cos(n) = \cos(m) \Leftrightarrow (n \equiv m[2\pi] \text{ ou } n \equiv -m[2\pi])$$
Si $n \neq m$, chacune des deux congruences de droite ci-dessus impliquent que $\pi$ est rationnel, ce qui est faux. Donc, $u_n$ ne prend jamais deux fois la même valeur. De plus, $(u_n)$ est divergente **(Solution à rédiger)**.
7. On a montré dans l'exercice 4 que $u$ admettait 0 pour limite. Donc $u$ est convergente et notamment, $u$ est bornée. Plus précisément, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante, bornée entre 0 et 1.

8. On peut écrire, pour tout $n \geqslant 0$ : $n-1 \leqslant u_n$ Or $n-1$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Donc par le théorème des gendarmes, $u$ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$. Elle n'est donc pas bornée, et elle est divergente.
9. On remarque que pour $n \geqslant 0$, $u_{2n} = 4n$ et $u_{2n+1} = 0$. Donc $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers l'infini, et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. La suite $u$ possède deux sous-suites ayant des limites différentes, donc elle diverge. De plus, $u_{2n}$ tend vers $+\infty$, donc $u$ n'est pas bornée.
10. On peut écrire, pour $n \geqslant 1$ :
$$u_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{n}$$
Par somme de limites, le numérateur tend vers 1. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc par quotient de limites, $u_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. Donc $u$ est bornée. De plus, $u$ n'est pas périodique car elle est strictement décroissante.
11. On peut écrire, pour $n \geqslant 1$ :
$$u_n = 2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}$$
On sait que $\frac{1}{n}$ et $\frac{3}{n^2}$ tendent vers 0 quand $n$ tend vers l'infini par quotient de limites. Donc $u_n$ tend vers 2 par somme de limites.

**Exercice 4.14. (*)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs entières. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang (ce qu'on peut traduite par l'assertion $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$).

**Solution de l'exercice 4.14**

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et notons $l$ sa limite. On sait alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On ne sait pas a priori que $l$ est un entier, mais comme tous les $u_n$ sont proches de $l$ pour $n \geqslant N$, ils sont proches de $u_N$, en prenant $\varepsilon$ assez petit, on aura des entiers à distance $< 1$ de $u_N$, ils seront donc tous égaux à $u_N$. En effet, choisissons $\varepsilon = 1/4$. Il existe donc $N$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - l| < 1/4$. Notamment, pour tout

$n \geqslant N$,

$$|u_n - u_N| = |(u_n - l) + (l - u_N)| \leqslant |u_n - l| + |l - u_N| < 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Or $u_n$ et $u_N$ sont entiers, donc s'ils sont à distance strictement inférieure à 1, ils sont égaux. Donc, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = u_N$. Ce qui signifie bien que $u$ est constante à partir du rang $N$.

**Exercice 4.15. (**)***Le nombre d'or*

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   La solution positive, notée $\phi$, est appelée " nombre d'or".
2. Démontrer qu'on a $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

   On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit. On pose $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $|u_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \phi|$. (Utiliser la question 2.)
5. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$|u_n - \phi| \leqslant (\frac{4}{9})^n \ .$$

6. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
7. Déterminer un entier $n$ tel que $u_n$ est une approximation de $\phi$ à $10^{-6}$ près.

**Solution de l'exercice 4.15**

1. Soit $\Delta$ le discriminant du polynôme $x^2 - x - 1$ :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 * 1 * (-1) = 5$$

   Comme $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines, $x_1$ et $x_2$, avec :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

   La solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est donc $\phi = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. $\phi$ vérifie $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, or

$$\begin{aligned}
\phi^2 - \phi - 1 = 0 &\Leftrightarrow \phi^2 = \phi + 1 \\
&\Leftrightarrow \phi = \frac{\phi + 1}{\phi} \\
&\Leftrightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi}
\end{aligned}$$

3. On peut montrer cela par récurrence. On va montrer plus précisément que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(n)$ est vraie, avec $P(n)$ :"$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$". L'initialisation ne pose pas de problème, cas $u_0 = 2$, donc $P(0)$ est vraie.

   Montrons que $P$ est héréditaire. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Donc, $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, on en déduit $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{2}{3}$. Donc,

$$1 + \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \frac{2}{3}$$

   d'où

$$\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{5}{3} \leqslant 2$$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   On en conclut, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \phi &= 1 + \frac{1}{u_n} - (1 + \frac{1}{\phi}) \\
&= \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\phi} \\
&= \frac{\phi - u_n}{\phi u_n}
\end{aligned}$$

On remarque que $\phi \in [\frac{3}{2}; 2]$ (car $\sqrt{5} \in [2; 3]$) et $u_n \in [\frac{3}{2}; 2]$ d'après la question précédente. Donc :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \phi| &= \frac{|\phi - u_n|}{\phi u_n} \\ &\leqslant \frac{|\phi - u_n|}{(\frac{3}{2})^2} \\ &= \frac{4}{9}|\phi - u_n| \end{aligned}$$

5. La récurrence est très simple. Pour l'initialisation, on utilise l'encadrement donné sur $\phi$ à la question précédente : $\phi \in [\frac{3}{2}; 2]$ et $u_0 = 2$ donc
$$|u_0 - \phi| = 2 - \phi \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$$
. Pour l'hérédité, on utilise la question précédente.
6. Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite $n \mapsto (\frac{4}{9})^n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \phi| \leqslant (\frac{4}{9})^n < \varepsilon$. Donc $n \mapsto u_n$ converge vers $\phi$.
7. D'après la question 5, il suffit de trouver un entier $n$ tel que $(\frac{4}{9})^n \leqslant 10^{-6}$.Or
$$(\frac{4}{9})^n \leqslant 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{6 \ln 10}{\ln \frac{9}{4}}$$
A ce stade-là, on peut utiliser la calculatrice et déterminer le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{6 \ln 10}{\ln \frac{9}{4}}$. Si on n'a pas de calculatrice, on peut chercher de tête une puissance de $\frac{9}{4}$ qui serait supérieure, et pas trop loin d'une puissance de 10. Une façon simple de fonctionner est de minorer $\frac{9}{4}$ par 2. Comme $2^7 = 128$, on en déduit que $(\frac{9}{4})^7 > 10^2$, donc
$$\frac{6 \ln 10}{\ln \frac{9}{4}} < \frac{6 \ln 10}{\ln 10^{\frac{2}{7}}} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$
Donc pour tout $n \geqslant 21$, $u_n$ est une approximation de $\phi$ à $10^{-6}$ près. En fait, l'usage de la calculatrice nous apprend que c'est vrai dès que $n \geqslant 18$.

**Exercice 4.16. (**)***Racines carrées, méthode égyptienne*

On présente un algorithme pour obtenir des approximations de racines carrées. Soit $a$ un nombre réel plus grand que 1 dont on cherche à déterminer la racine carrée. On suppose qu'on sait déterminer la partie entière $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit : on part de $u_0 = \lfloor\sqrt{a}\rfloor + 1$, et on définit par récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et qu'on a $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} > \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer qu'on a $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \dfrac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$ .
3. En déduire que la suite $u_n$ tend vers $\sqrt{a}$.
4. Déterminer un entier $n$ tel que $u_n$ est une approximation de $\sqrt{a}$ à $10^{-6}$ près.

### Solution de l'exercice 4.16

1) On veut montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété

$$P(n) = "u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \text{ et } u_n > \sqrt{a}".$$

**Initialisation :** On a $u_0 = \lfloor\sqrt{a}\rfloor + 1 > \sqrt{a}$. Et

$$u_1 - u_0 = \frac{u_0 + \frac{a}{u_0}}{2} - u_0 = \frac{\frac{a}{u_0} - u_0}{2} < \frac{\sqrt{a} - u_0}{2} < 0.$$

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que la proposition $P(n)$ soit vraie, montrons $P(n+1)$. On a $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \geqslant 0$.
Et $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{\frac{a}{u_{n+1}} - u_{n+1}}{2} < \frac{\sqrt{a} - u_{n+1}}{2} < 0$. Ce qui fini de montrer $P(n+1)$ et achève la récurrence.
2) Soit $n \in \mathbf{N}$, alors on a $|u_{n+1} - \sqrt{a}| = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3) Posons $v_n = u_n - \sqrt{a}$, ainsi $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \sqrt{a}$ si et seulement si $v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Par la question précédente on a $|v_{n+1}| \leqslant \frac{|v_n|^2}{2\sqrt{a}}$. Montrons par récurrence que $|v_n| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}$.
**Initialisation :** On a $|v_0| = \lfloor\sqrt{a}\rfloor + 1 - \sqrt{a} < 1$.
**Hérédité :** On a $|v_{n+1}| \leqslant \frac{v_n^2}{2\sqrt{a}} \leqslant \frac{v_n^2}{2} \leqslant \frac{1}{2\times(2^{2^n-1})} = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$.
Comme $\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, on déduit que $v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ et donc $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \sqrt{a}$.
4) On a $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n-1}}$, et $\frac{1}{2^{2^n-1}} \leqslant 10^{-6}$ dès que $n \geqslant 5$. Donc $u_5$ est une $10^{-6}$ approximation de $\sqrt{a}$.

**Exercice 4.17. (**)**

Soit $u_0$ un entier positif quelconque. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?
2. Montrez que, pour toute valeur initiale $u_0 \in \mathbf{N}^*$, l'assertion

   $$\exists N \in \mathbf{N}, u_N = 1.$$

   est vraie.

(Si on remplace $u_n + 1$ par $3u_n + 1$ dans la définition, alors c'est un problème ouvert de savoir si l'assertion est vraie. Cela s'appelle le *problème de Syracuse*.)

**Solution de l'exercice 4.17**