Université Grenoble Alpes
L2/STA351 **Frédérique Leblanc**

TD2 : Variables aléatoires - Lectures Tables - Loi Normale

Objectifs : Savoir manipuler des inégalités élémentaires des valeurs absolues, calculer des probabilités d'évènements définis par une variable discrète ou continue (avec les tables stats. et avec la calculette du bac), des quantiles... et savoir utiliser les propriétés de la loi normale.

Exercice 2.1 : inégalités, réunions intersections
Donner les ensembles de points qui satisfont les conditions proposées et les dessiner sur la droite réelle

1. $\{x \in I\!R \mid 2x+1 > 3 \;\; et \;\; 3x-2 < 1\}$
2. $\{x \in I\!R \mid 2x+1 > 3 \;\; ou \;\; 3x-2 < 1\}$
3. $\overline{\{x \in I\!R \mid 2x+1 \leq 3 \;\; et \;\; 3x-2 \geq 1\}}$
4. $\overline{\{x \in I\!R \mid 2x+1 \leq 3 \;\; ou \;\; 3x-2 \geq 1\}}$

Exercice 2. 2 : valeur absolue
Tracer le graphe de la fonction $|x|$ et représenter les ensembles de points qui satisfont la ou les conditions proposée(s) sur la droite réelle ou dans le plan

1. $\{x \in I\!R \mid \; |x-1| \leq 3\}$
2. $\{x \in I\!R \mid \; |2x+1| > 3\}$
3. $\overline{\{x \in I\!R \mid \; |2x+1| \leq 3 \;\; et \;\; |3x-2| \geq 1\}}$
4. $\overline{\{(x,y) \in I\!R^2 \mid \; x < 1 \;\; et \;\; y > |x|\}}$

Exercice 2.3 : Quel est le chiffre des dizaine de la somme suivante :

$$5 + 55 + 555 + 5555 + ... + \underbrace{5.....5}_{55 \quad fois}$$

Exercice 2.4 :

1. soit X une variable normale centrée réduite calculer $E(X^2)$.
2. soit X_1 et X_2 deux variables centrées réduites indépendantes calculer $E(X_1^2 + X_2^2)$.
3. Etendre le résultat précédent au cas de n variables normales centrées réduite indépendantes.

Exercice 2.5 :

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Calculer les probabilités suivantes $P(X < 1.45)$, $P(X < 2.01)$, $P(-1.65 < X < 1.34)$, $P(|X| < 2.05)$.
   (b) Calculer les valeurs de u telles que $P(X < u) = 0.63$, $P(X > u) = 0.63$, $P(|X| < u) = 0.63$
   (c) Soit $Y = 2X + 3$. Quelle est la loi de Y ? Calculer les probabilités : $P(Y < 4)$, $P(-2 < Y < 1)$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(3, 25)$.
   (a) Calculer les probabilités suivantes : $P(X < 6), P(X > -2), P(-1 < X < 1.5)$
   (b) Déterminer la valeur de u dans les cas suivants : $P(X < u) = 0.63, P(X > u) = 0.63, P(|X - 3| < u) = 0.63$

Exercice 2.6 On note X la variable représentant le rythme cardiaque humain. Cette variable est le nombre de pulsations par minute. On suppose que X suit une loi Gaussienne de moyenne $\mu = 79$ et de variance $\sigma^2 = 144$.

1. Quelle proportion d'humains ont un rythme cardiaque d'au plus 73 ?
2. Quelle est la probabilité pour que X soit compris entre 77 et 80 ?
3. Calculer x tel que $P(|X - 79| < x) = 0.9$. Que peut-on dire de x vérifiant $P(|X| < x) = 0.9$?

Exercice 2.7 Une usine fabrique des fioles jaugées de laboratoire de contenance théorique 500 mL. On s'intéresse à la qualité de la calibration à l'aide d'un contrôle gravimétrique. On refuse toutes les fioles pour lesquelles le volume mesuré par ce contrôle est supérieur à 500.2 mL ou bien inférieur à 499.8 mL On sait qu'il y a 5% des fioles rejetées dans cette usine. On effectue un contrôle sur 20 fioles choisies au hasard. On appelle alors Y la variable aléatoire représentant le nombre de fioles rejetées.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune fiole défectueuse dans le lot ?
3. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque fiole, associe le résultat du contrôle gravimétrique en mL. On considère que X suit une loi Normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart type $\sigma = 0.1$.
   (a) Calculer la probabilité pour que le résultat du contrôle soit compris entre 499.8 et 500.2 mL.
   (b) Déterminer le nombre positif h tel que 90 % des résultats soient dans l'intervalle $[500-h; 500+h]$

Exercice 2.8 : On s'intéresse à la taille chez les femmes et à la taille chez les hommes en France et on sait que X (taille des femmes) et Y taille des hommes sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyennes resp. $\mu_X = 165$, $\mu_Y = 175$ et de même écart-type $\sigma = 10$ (en cm).

1. Quelle est la proportion de femmes dépassant 180 chez les femmes, celle des hommes dépassant 190 chez les hommes ?
2. On choisit un homme et une femme dans la population, quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux grands (> 180 pour elle et > 190 pour lui) ?
3. On choisit un homme au hasard et une femme au hasard (et indépendamment de l'homme choisi) : quelle est la probabilité qu'elle soit plus grande que lui ?
4. Parmi 5 hommes choisis au hasard dans la population masculine qu'elle est la probabilité qu'aucun ne soit grand (> 190) ?