Université Joseph Fourier **Frédérique Leblanc**
L2/STA351 **frederique.leblanc@univ-grenoble-alpes.fr**

CC de STA351 2018

Documents autorisés : calculatrice programmable,tables statistiques et une page recto-verso manuscripte et personnelle.

Consignes : il sera tenu compte de la rédaction dans la notation et au delà de cinq fautes d'orthographes il y aura un malus sur la note. Lorsque la calculette est utilisée pour produire un résultat numérique, indiquer le nom de la calculette (TI ou Casio) de la fonction utilisée et la liste des entrées utilisées pour appliquer le programme choisi. Lorsqu'un résultat de cours est utilisé, l'énoncer de façon formelle avant de faire l'application numérique. Le barême n'est qu'indicatif.

Exercice 1 (10 pts) : calculs de probabilités

Soit U une variable normale centrée réduite, X une variable normale d'espérance μ et variance σ^2, T_8 une variable de Student à 8 degrés de liberté et Z_8 une variable du Chi-deux à 8 degrés de liberté. On notera Φ la fonction de répartition de U et Φ^{-1} sa réciproque (fonction quantile).

1. Donner l'expression du quantile d'ordre $1-\alpha$ de U en fonction de α. Le lire sur les tables ou le calculer avec le programme adapté de votre calculette pour $\alpha = 0.05$. Tracer à main levée la densité de U et y placer le quantile et la surface de valeur α.
2. Donner les quantiles (lus ou calculés avec la calculette) d'ordre 0.95 de T_8 et Z_8.
3. Calculer $P(|X-\mu| \leq 2\sigma)$.
4. Donner l'expression de a tel que $P(X > a) = \alpha$ (en fonction de α, μ, σ et Φ^{-1}).
5. Même question pour b tel que $P(X < b) = \alpha$
6. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$?
7. Déduire des questions précédentes les expressions de c et d tels que $P(\bar{X}_n > c) = P(\bar{X}_n < d) = \alpha$ (en fonction de α, μ, σ, n et Φ^{-1}) .
8. Quel est le niveau de fluctuation de l'intervalle $[d, c]$?
9. On suppose à présent que $\sigma = 1$. Donner l'expression de c lorsque $\mu = \mu_0$. On la notera c_0. Lorsque $\mu = \mu_1 = 1$ que l'on notera c_1. Que vaut la probabilité que $\bar{X}_n$ dépasse c_0 lorsque $\mu = \mu_0$ (elle est notée $P(\bar{X}_n > c_0 | \mu = \mu_0)$ ou $P_{\mu=\mu_0}(\bar{X}_n > c_0)$)?

10. Exprimer la probabilité que $\bar{X}_n$ dépasse c_0 lorsque $\mu = \mu_1$ notée $P_{\mu=\mu_1}(\bar{X}_n > c_0)$ (On pourra exprimer $\bar{X}_n > c_0$ avec la centrée réduite de $\bar{X}_n$ lorsque $\mu = \mu_1$) en fonction de μ_0, μ_1, n et α.

11. Calculer cette probabilité pour $n = 100$, $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\sigma = 1$ et $\alpha = 0,05$.

Exercice 2 (5 pts) : Une industrie pharmaceutique qui produit un certain médicament déclare que la substance active est une variable aléatoire X de loi normale de moyenne $\mu = 15mg$ et d'écart-type $\sigma = 1mg$.

1. Calculer l'intervalle de fluctuation de $\bar{X}_n$ autour de μ au niveau 98%.

2. Un expert chargé de valider les affirmations de l'industriel a pesé une centaine de comprimé et obtenu un échantillon où $\sum x_i = 1,48g$. Quelle conclusion donnera-t-il au niveau 98% ?

3. Calculer p la probabilité que le poids en substance active soit compris entre $14mg$ et $16mg$.

4. Donner l'expression de l'intervalle de fluctuation de l'estimateur sans biais $\hat{p}$ autour de p de niveau 98%. Le calculer.

5. Sur la centaine de comprimés précédemment pesés 55 ont un poids en substance active compris entre $14mg$ et $16mg$. L'échantillon est-il dans la norme au niveau 98% ?

Exercice 3 (7 pts) : On s'intéresse ici au taux de glycémie (en g/l) de patients atteints d'une maladie M. Sur un échantillon de 10 patients on a observé les résultats suivants :

$$0.51, 0.52, 0.52, 0.54, 0.6, 0.75, 0.81, 0.92, 1.01, 1.2$$

. On supposera que le taux de glycémie X suit une loi normale de moyenne μ et écart-type σ inconnus.

1. Donner les moyennes, variances et écart-type empiriques de l'échantillon.

2. Donner les estimations sans biais de μ, σ^2 et σ.

3. Calculer l'intervalle de confiance de niveau 95% pour μ.

4. Calculer l'intervalle de confiance de niveau 95% pour σ^2 puis pour σ.

5. On suppose à présent que σ est connu et vaut $0.25g/l$.

   (a) Donner l'expression formelle de l'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour le paramètre μ.

   (b) Quel est le niveau de confiance de l'intervalle de confiance de précision plus ou moins $0.1mg$ (c'est à dire de longueur $0.2mg$) ?

   (c) Pour quelle taille d'échantillon minimum peut-on garantir que la précision de l'intervalle de niveau 95% sera de $0.1mg$?