Intégrales et primitives

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = 6\,x^2 + 8\,x + 3$	b) $f(x) = x(x+a)(x+b)$
c) $f(x) = \mathrm{e}^x + 3\,\sin(x)$	d) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{x}$	f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
g) $f(x) = (5\,x - 3)^7$	h) $f(x) = \dfrac{3}{4 - 2\,x}$
i) $f(x) = \exp(5\,x)$	j) $f(x) = 2\,\cos(3\,x + \pi)$
k) $f(x) = 2\,x\,\cos(x^2 - 1)$	l) $f(x) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$
m) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$	n) $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Réponse :
Primitives a) à f) : utiliser les primitives des fonctions de base .

a) $\boxed{F(x) = 2\,x^3 + 4\,x^2 + 3\,x + C}$

b) $f(x) = x^3 + (a+b)\,x^2 + a\,b\,x \Rightarrow F(x) = \boxed{\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{(a+b)x^3}{3} + \dfrac{a\,b\,x^2}{2} + C}$

c) $\boxed{F(x) = \mathrm{e}^x - 3\,\cos(x) + C}$

d) $f(x) = x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \dfrac{1}{x} + C}$

e) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{1+1/2}}{1+1/2} + C = \boxed{\dfrac{2\,x^{3/2}}{3} + C}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{1-1/2}}{1-1/2} + C = \boxed{2\,\sqrt{x} + C}$

Primitives `g)` à `j)` : écrire $f(x)$ sous la forme $K\,u'(\alpha\,x+\beta)$.

`g)` $f(x)=\frac{1}{8}\,8\,(5\,x-3)^7=K\,u'(\alpha\,x+\beta)$ avec $u(x)=x^8$, $\alpha=5$, $\beta=-3$ et $K=\frac{1}{8}$
$\Rightarrow F(x)=\dfrac{K}{\alpha}\,u(\alpha\,x+\beta)=\boxed{\dfrac{1}{40}\,(5\,x-3)^8+C}$

`h)` $f(x)=K\,u'(\alpha\,x+\beta)$ avec $u(x)=\ln|x|$, $\alpha=-2$, $\beta=4$ et $K=3$
$\Rightarrow F(x)=\dfrac{K}{\alpha}\,u(\alpha\,x+\beta)=\boxed{-\dfrac{3}{2}\,\ln|4-2\,x|+C}$

`i)` $f(x)=K\,u'(\alpha\,x+\beta)$ avec $u(x)=\exp(x)$, $\alpha=5$, $\beta=0$ et $K=1$
$\Rightarrow F(x)=\dfrac{K}{\alpha}\,u(\alpha\,x+\beta)=\boxed{\dfrac{1}{5}\,\exp(5\,x)+C}$

`j)` $f(x)=K\,u'(\alpha\,x+\beta)$ avec $u(x)=\sin(x)$, $\alpha=3$, $\beta=\pi$ et $K=2$
$\Rightarrow F(x)=\dfrac{K}{\alpha}\,u(\alpha\,x+\beta)=\boxed{\dfrac{2}{3}\,\sin(3\,x+\pi)+C}$

Primitives `k)` à `n)` : écrire $f(x)$ sous la forme $K\,u'(x)\,g'\big(u(x)\big)$ ou $K\,u'(x)\,u(x)^a$ ou $K\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

`k)` $f(x)=K\,u'(x)\,g'(u(x))$ avec $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2\,x$, $g'(u)=\cos(u)\Rightarrow g(u)=\sin(u)$ et $K=1\Rightarrow F(x)=K\,\sin(u(x))+C=\boxed{\sin(x^2-1)+C}$

`l)` $f(x)=K\,u'(x)\,\exp\big(u(x)\big)$ avec $u(x)=\dfrac{1}{x}$, $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ et $K=-1$
$\Rightarrow F(x)=K\,\exp\big(u(x)\big)+C=\boxed{-\exp(1/x)+C}$

`m)` $f(x)=K\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-4$, $u'(x)=2\,x$ et $K=1/2$
$\Rightarrow F(x)=K\,\ln|u(x)|+C=\boxed{\dfrac{1}{2}\,\ln|x^2-4|+C}$

`n)` $f(x)=u'(x)\,u^2(x)$ avec $u(x)=\sin(x)$
$\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{3}\,u(x)^3+C=\boxed{\dfrac{1}{3}\,\sin^3(x)+C}$ $\boxed{\mathcal{D}_F=\mathbb{R}}$

Exercice 2.
a) *Déterminer la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = 4\,x + 2\,\sin(x)$ vérifiant $F(0) = 1$.*
j b) *Pour $x > 0$, déterminer la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{2\,x^2 + 3\,x + 4}{x^3}$ vérifiant $F(1) = 0$.*

Réponse :
a) Les primitives de $f(x) = 4\,x + 2\,\sin x$ sont

$$F(x) = 4\,\frac{x^2}{2} + 2\,(-\cos(x)) + C = 2\,x^2 - 2\,\cos(x) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

On détermine ensuite la constante C telle que $F(0) = 1$:

$$F(0) = 2 \times 0^2 - 2\,\cos(0) + C = -2 + C = 1 \iff C = 3$$

La primitive recherchée est donc $\boxed{F(x) = 2\,x^2 - 2\,\cos(x) + 3}$.

b) Les primitives de $f(x) = \dfrac{2\,x^2 + 3\,x + 4}{x^3} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} = 2\,x^{-1} + 3\,x^{-2} + 4\,x^{-3}$ sont

$$F(x) = 2\,\ln|x| + \frac{3}{-2+1}x^{-2+1} + \frac{4}{-3+1}x^{-3+1} + C = 2\,\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Comme $x > 0$, les primitives sont $F(x) = 2\,\ln(x) - \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + C$.
On détermine ensuite la constante C telle que $F(1) = 0$:

$$F(1) = 2\,\ln(1) - \frac{3}{1} - \frac{2}{1^2} + C = -3 - 2 + C = 0 \iff C = 5$$

La primitive recherchée est donc $\boxed{F(x) = 2\,\ln(x) - \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + 5}$.

Remarque : Comme on recherche la primitive qui s'annule en $x = 1$, une autre possibilité est de calculer l'intégrale de $f(t)$ de 1 à x pour déterminer $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[2\,\ln|t| - \frac{3}{t} - \frac{2}{t^2}\right]_1^x = \left(2\,\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right) - \left(2\,\ln(1) - \frac{3}{1} - \frac{2}{1^2}\right) \\ &= 2\,\ln(x) - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - 2\,\ln(1) + \frac{3}{1} + \frac{2}{1^2} \qquad (\text{car } x > 0) \\ &= 2\,\ln(x) - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + 5 \end{aligned}$$

Exercice 3. *Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$ par*

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2+2\,x} = \frac{x+4}{x\,(x+2)}$$

a) *Déterminer les deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.*

b) *Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Réponse :

a) $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$

$$= \frac{a\,(x+2)+b\,x}{x^2+2\,x} = \frac{(a+b)\,x+2\,a}{x^2+2\,x} = \frac{x+4}{x^2+2\,x}$$

$$\Rightarrow (a+b)\,x + 2\,a = x+4 = 1\,x+4$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ 2\,a & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 2 \\ b & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}}$$

b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x$

$$= \Big[2\,\ln|x| - \ln|x+2|\Big]_1^2 = \underbrace{2\,\ln(2)}_{=\ln(4)} - \ln(4) - 2\,\underbrace{\ln(1)}_{=0} + \ln(3) = \boxed{\ln(3)}$$

Exercice 4. *Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ par*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - x^2} = \frac{x+1}{x^2\,(x-1)}$$

a) *Déterminer les trois réels a, b et c tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x-1}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.*
b) *Pour $x > 1$, en déduire $F(x)$, la primitive de $f(x)$ vérifiant $F(2) = 0$.*

Réponse :
a) $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x-1}$

$$= \frac{a\,x\,(x-1) + b\,(x-1) + c\,x^2}{x^3 - x^2} = \frac{x^2\,(a+c) + (-a+b)\,x - b}{x^3 - x^2} = \frac{x+1}{x^3 - x^2}$$

$$\Rightarrow (a+c)\,x^2 + (-a+b)\,x - b = x + 1 = 0\,x^2 + 1\,x + 1$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+c & = & 0 \\ -a+b & = & 1 \\ -b & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & -2 \\ b & = & -1 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}}$$

b) Les primitives de $f(x)$ sont

$$F(x) = -2\,\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,\ln|x-1| + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour $x > 1$, on a $x > x - 1 > 0$, et l'expression de $F(x)$ est donc :

$$F(x) = -2\,\ln(x) + \frac{1}{x} + 2\,\ln(x-1) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$F(2) = -2\,\ln(2) + \frac{1}{2} + 2\,\ln(1) + C = -2\,\ln(2) + \frac{1}{2} + C = 0 \iff C = 2\,\ln(2) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \boxed{-2\,\ln(x) + \frac{1}{x} + 2\,\ln(x-1) + 2\,\ln(2) - \frac{1}{2}}$$

Comme on recherche la primitive qui s'annule en $x = 2$, une autre possibilité est de calculer l'intégrale de $f(t)$ de 2 à x pour déterminer $F(x)$:

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^x \left(-\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t-1}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-2\,\ln(t) + \frac{1}{t} + 2\,\ln(t-1)\right]_2^x = -2\,\ln(x) + \frac{1}{x} + 2\,\ln(x-1) + 2\,\ln(2) - \frac{1}{2} - 2\,\ln(1)$$

$$= -2\,\ln(x) + \frac{1}{x} + 2\,\ln(x-1) + 2\,\ln(2) - \frac{1}{2}$$

Exercice 5. *En utilisant l'intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $x\,\sin(x)$	b) $x^2\,\cos(x)$	c) $x\,\mathrm{e}^{2\,x}$	d) $\ln(x)$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Réponse :

a) $\displaystyle\int x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$:

on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=x \\ v'(x)=\sin(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=1 \\ v(x)=-\cos(x) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x\,\cos(x) - \int\Big(-\cos(x)\Big)\,\mathrm{d}x = -x\,\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{-x\,\cos(x)+\sin(x)+C} \text{ avec } C\in\mathbb{R}$$

b) $\displaystyle\int x^2\,\cos(x)\,\mathrm{d}x$:

on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=x^2 \\ v'(x)=\cos(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=2\,x \\ v(x)=\sin(x) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int x^2\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^2\,\sin(x) - 2\int x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

En utilisant le résultat de la primitive précédente *1.* :

$$\int x^2\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^2\,\sin(x) - 2\Big(-x\,\cos(x)+\sin(x)\Big)+C$$

$$= \boxed{x^2\,\sin(x)+2\,x\,\cos(x)-2\,\sin(x)+C} \text{ avec } C\in\mathbb{R}$$

c) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{d}x$:

on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=x \\ v'(x)=\mathrm{e}^{2\,x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=1 \\ v(x)=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\,x} \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{2\,x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{2\,x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\,x}\right)+C$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{2\,x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2\,x}+C} = \boxed{\frac{2\,x-1}{4}\,\mathrm{e}^{2\,x}+C} \text{ avec } C\in\mathbb{R}$$

d) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$:

on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=x \end{array}\right\}$ (et on a alors $u'(x)\,v(x)=1$)

$$\Rightarrow \int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\,\ln(x) - \int \mathrm{d}x = \boxed{x\,\ln(x)-x+C} \text{ avec } C\in\mathbb{R}$$

Exercice 6. *Calculer les intégrales définies suivantes*

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^3 - 2x + 5)\ \mathrm{d}x$	b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \Big(\cos(x) + \sin(3\,x)\Big)\ \mathrm{d}x$	c) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x$
d) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{3}{x+1}\ \mathrm{d}x$	e) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{t+2}}\ \mathrm{d}t$	f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x)\ \mathrm{d}x$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 12

Réponse :

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^3 - 2\,x + 5)\ \mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + 5\,x\right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2^2 + 5\times 2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^2 + 5\times 1\right) = \frac{16}{4} - 4 + 10 - \frac{1}{4} + 1 - 5 = \boxed{\frac{23}{4}}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \Big(\cos(x) + \sin(3\,x)\Big)\ \mathrm{d}x$

$$= \left[\sin(x) - \frac{1}{3}\ \cos(3\,x)\right]_0^{\pi/3} = \left(\sin(\pi/3) - \frac{1}{3}\ \cos(\pi)\right) - \left(\sin(0) - \frac{1}{3}\ \cos(0)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}}$$

c) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\,4^{3/2} - \frac{2}{3}\,1^{3/2} = \frac{2}{3}\,8 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$$

d) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{3}{x+1}\ \mathrm{d}x$

$$= \Big[3\ln|x+1|\Big]_{-3}^{-2} = 3\ln|-1| - 3\ln|-2| = 3\ln(1) - 3\ln(2) = \boxed{-3\ln(2)} = \boxed{3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{t+2}}\ \mathrm{d}t$

$$= \int_{-1}^{2} (t+2)^{-1/2}\ \mathrm{d}t = \Big[2\,(t+2)^{1/2}\Big]_{-1}^{2} = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = \boxed{2}$$

f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x)\ \mathrm{d}x$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ \mathrm{d}x = \Big[-\ln|\cos(x)|\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = -\ln(\cos(\pi/4)) + \ln(\cos(-\pi/4))$$

$$= -\ln(\cos(\pi/4)) + \ln(\cos(\pi/4)) = \boxed{0}$$

Exercice 7. *Calculer les intégrales définies suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.*

a) $\displaystyle\int_1^2 t\,(t-1)^{1/3}\ \mathrm{d}t$ *avec* $t = u^3+1$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ *avec* $t=(u-1)^2 \iff u = 1+\sqrt{t}$.

c) $\displaystyle\int_0^{7/2} \sqrt[3]{2\,t+1}\ \mathrm{d}t$ *avec* $u=\sqrt[3]{2\,t+1}$.

d) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ *avec* $x=\sqrt{t}$.

Questions facultatives supplémentaires : exercice 13

Réponse :

a) Pour cette intégrale, le changement de variable indiqué est dans "le bon sens", donc on a bien la variable de *départ* t exprimée en fonction de la variable d'*arrivée* u.

(1) $t=\varphi(u)=u^3+1$

(2) $\mathrm{d}t=\varphi'(u)\ \mathrm{d}u = 3\,u^2\ \mathrm{d}u$

(3) il faut trouver les bornes de la variable d'*arrivée* u correspondant aux bornes de variable de *départ* t). La fonction $\varphi(u)=u^3+1$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$t=u^3+1 \iff t-1=u^3 \iff u=(t-1)^{1/3}=\sqrt[3]{t-1}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} t=1 & \iff & u=(1-1)^{1/3}=0^{1/3}=0 \\ t=2 & \iff & u=(2-1)^{1/3}=1^{1/3}=1 \end{array} \right\}$$

(4) $\displaystyle\int_1^2 t\,(t-1)^{1/3}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (u^3+1)\,u\,3\,u^2\ \mathrm{d}u$

$$= 3\int_0^1 (u^6+u^3)\,\mathrm{d}t = 3\left[\frac{u^7}{7}+\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = 3\left[\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\right] = \boxed{\frac{33}{28}}$$

b) Pour cette intégrale, le changement de variable indiqué est dans "les deux sens", donc on a bien la variable de *départ* t exprimée en fonction de la variable d'*arrivée* u, et réciproquement.

(1) $t=\varphi(u)=(u-1)^2 \iff u=\varphi^{-1}(t)=1+\sqrt{t}$

(2) $\mathrm{d}t=\varphi'(u)\ \mathrm{d}u=2\,(u-1)\ \mathrm{d}u$

(3) il faut trouver les bornes de la variable d'*arrivée* u correspondant aux bornes de variable de *départ* t).

$$\left\{ \begin{array}{lll} t=0 & \iff & u=1+\sqrt{0}=1 \\ t=1 & \iff & u=1+\sqrt{1}=2 \end{array} \right\}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{u}\,2\,(u-1)\ \mathrm{d}u$

$$= 2\int_1^2 \left(1-\frac{1}{u}\right)\ \mathrm{d}t = 2\Big[u-\ln|u|\Big]_1^2 = 2\Big[2-\ln(2)-1+\ln(1)\Big] = \boxed{2-2\,\ln(2)}$$

`c)` Pour cette intégrale, le changement de variable est donné dans "le mauvais sens" car on a la variable d'*arrivée* u exprimée en fonction de la variable de *départ* t, c'est à dire qu'on a la fonction réciproque de la fonction φ :

$$u = \varphi^{-1}(t) = \sqrt[3]{2\,t+1}$$

(1) il faut exprimer t (variable de *départ*) en fonction de u (variable d'*arrivée*) :

$$u = \varphi^{-1}(t) = \sqrt[3]{2\,t+1} \iff u^3 = 2\,t+1 \iff t = \frac{u^3-1}{2} = \varphi(u)$$

(2) $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \dfrac{3\,u^2}{2}\ \mathrm{d}u$

(3) il faut trouver les bornes de la variable d'*arrivée* u correspondant aux bornes de variable de *départ* t). Connaissant $u = \varphi^{-1}(t)$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} t=0 & \Leftrightarrow & u=\varphi^{-1}(0)=\sqrt[3]{2\times 0+1}=\sqrt[3]{1} & = & 1 \\ t=7/2 & \Leftrightarrow & u=\varphi^{-1}(7/2)=\sqrt[3]{2\times 7/2+1}=\sqrt[3]{8} & = & 2 \end{array}\right\}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{7/2} \sqrt[3]{2\,t+1}\ \mathrm{d}t = \int_1^2 u\,\frac{3}{2}u^2\ \mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_1^2 u^3\ \mathrm{d}u = \frac{3}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{45}{8}}$

`d)` Pour cette intégrale, le changement de variable est donné dans "le mauvais sens" car on a la variable d'*arrivée* x exprimée en fonction de la variable de *départ* t, c'est à dire qu'on a la fonction réciproque de la fonction φ :

$$x = \varphi^{-1}(t) = \sqrt{t}$$

(1) il faut exprimer t (variable de *départ*) en fonction de u (variable d'*arrivée*) :

$$x = \varphi^{-1}(t) = \sqrt{t} \iff t = x^2 = \varphi(x)$$

(2) $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\ \mathrm{d}x = 2\,x\ \mathrm{d}x$

(3) il faut trouver les bornes de la variable d'*arrivée* x correspondant aux bornes de variable de *départ* t). Connaissant $x = \varphi^{-1}(t)$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} t=0 & \Leftrightarrow & x=\varphi^{-1}(0)=\sqrt{0} & = & 0 \\ t=4 & \Leftrightarrow & x=\varphi^{-1}(4)=\sqrt{4} & = & 2 \end{array}\right\}$$

(4) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^2 \mathrm{e}^x\,2\,x\ \mathrm{d}x = 2\int_0^2 x\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x.$

Pour cette intégrale, il faut faire une intégration par parties :

on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=x \\ v'(x)=\mathrm{e}^x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=1 \\ v(x)=\mathrm{e}^x \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow 2\int_0^2 x\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = 2\Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^2 - 2\int_0^2 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = 2\Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^2 - 2\Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^2$$

$$= 4\,\mathrm{e}^2 - 0\,\mathrm{e}^0 - 2\,\mathrm{e}^2 + 2\,\mathrm{e}^0 = \boxed{2\,\mathrm{e}^2+2}$$

Exercice 8. *Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.*

a) $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}\ \mathrm{d}t \quad \textit{avec } u=\sqrt{t+1}$	b) $\displaystyle\int \left(\ln(x)\right)^2\ \mathrm{d}x \quad \textit{avec } x=\mathrm{e}^t$

Réponse :

a) La fonction $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$ est définie pour $t\in]-1\,;+\infty[$.

Pour cette primitive, le changement de variable indiqué est $u=\sqrt{t+1}$ donc on a la variable d'*arrivée* u exprimée en fonction de la variable de *départ* t, c'est à dire qu'on a la fonction réciproque de la fonction φ :

$$u=\varphi^{-1}(t)=\sqrt{t+1}$$

(1) il faut exprimer t (variable de *départ*) en fonction de u (variable d'*arrivée*) :

$$u=\sqrt{t+1}\Rightarrow u^2=t+1 \iff t=\varphi(u)=u^2-1$$

(2) $\mathrm{d}t=\varphi'(u)\ \mathrm{d}u=2\,u\ \mathrm{d}u$

(3) pas de correspondances de bornes à faire.

(4) $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}\ \mathrm{d}t=\int\frac{u^2-1}{u}\,2\,u\ \mathrm{d}u=\int 2\,(u^2-1)\ \mathrm{d}u=2\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+C$

$$=\boxed{2\left(\frac{\sqrt{t+1}^{\,3}}{3}-\sqrt{t+1}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}}=\boxed{\frac{2}{3}\,(t-2)\sqrt{t+1}\ +C,\ C\in\mathbb{R}}$$

b) La fonction $f(x)=\left(\ln(x)\right)^2$ est définie pour $t\in]\,0\,;+\infty[$.

Pour cette intégrale, le changement de variable indiqué est $x=\mathrm{e}^t$ donc on a bien la variable de *départ* x exprimée en fonction de la variable d'*arrivée* t.

(1) $x=\varphi(t)=\mathrm{e}^t$ et donc $t=\varphi^{-1}(x)=\ln(x)$

(2) $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$

(3) pas de correspondances de bornes à faire.

(4) $\displaystyle\int\left(\ln(x)\right)^2\ \mathrm{d}x=\int t^2\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t.$

On intègre par parties deux fois :

1. on pose $\left\{\begin{array}{l} u(t)=t^2\\ v'(t)=\mathrm{e}^t\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u'(t)=2\,t\\ v(t)=\mathrm{e}^t\end{array}\right\}$

$$I_1=\int t^2\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t=t^2\,\mathrm{e}^t-2\underbrace{\int t\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t}_{I_2}$$

2. pour $I_2=\displaystyle\int t\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$, on pose $\left\{\begin{array}{l} u(t)=t\\ v'(t)=\mathrm{e}^t\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u'(t)=1\\ v(t)=\mathrm{e}^t\end{array}\right\}$ d'où

$$I_2=t\,\mathrm{e}^t-\int\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t=t\,\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t+C_2$$

donc au final :

$$I_1=t^2\,\mathrm{e}^t-2\,I_2=t^2\,\mathrm{e}^t-2\,t\,\mathrm{e}^t+2\,\mathrm{e}^t-2\,C_2=\boxed{x\left(\ln(x)\right)^2-2\,x\,\ln(x)+2\,x+C,\ C\in\mathbb{R}}$$

Exercice 9.

a) *Déterminer les trois constantes réelles a, b et c tel que :*

$$\forall u > 1,\ \frac{2\,u^2}{u^2-1} = \frac{2\,u^2}{(u-1)(u+1)} = a + \frac{b}{u-1} + \frac{c}{u+1}$$

b) *Soit l'intégrale définie* $A = \int_{\ln(5/4)}^{\ln(3)} \sqrt{\mathrm{e}^t+1}\ \mathrm{d}t$.

En utilisant le changement de variable correspondant à $u = \sqrt{\mathrm{e}^t+1}$, *puis le résultat de la question précédente, calculer A.*

Réponse :

a) $a + \dfrac{b}{u-1} + \dfrac{c}{u+1} = \dfrac{a\,(u^2-1) + b\,(u+1) + c\,(u-1)}{u^2-1}$

$$= \frac{a\,u^2 + (b+c)\,u + (-a+b-c)}{u^2-1} = \frac{2\,u^2}{u^2-1} = \frac{2\,u^2 + 0\,u + 0}{u^2-1}$$

En identifiant les deux polynômes au numérateur, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b+c & = & 0 \\ -a+b-c & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 1 \\ c & = & -1 \end{array}}$$

b) Pour cette intégrale, le changement de variable est donné dans le "mauvais sens".

(1) $u = \sqrt{\mathrm{e}^t+1}$

$$\iff u^2 = \mathrm{e}^t + 1 \iff \mathrm{e}^t = u^2 - 1 \iff t = \ln(u^2-1) = \varphi(u)$$

(2) $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \dfrac{2\,u}{u^2-1}\ \mathrm{d}u$

(3) On a $u = \sqrt{\mathrm{e}^t+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t = \ln(5/4) & \iff & u = \sqrt{5/4+1} = 3/2 \\ t = \ln(3) & \iff & u = \sqrt{3+1} = 2 \end{array} \right\}$$

(4) $\displaystyle\int_{\ln(5/4)}^{\ln(3)} \sqrt{\mathrm{e}^t+1}\ \mathrm{d}t = \int_{3/2}^{2} u\,\frac{2\,u}{u^2-1}\ \mathrm{d}u = \int_{3/2}^{2} \frac{2\,u^2}{u^2-1}\ \mathrm{d}u.$

On utilise le résultat de la question précédente :

$$= \int_{3/2}^{2} \frac{2\,u^2}{u^2-1}\ \mathrm{d}u = \int_{3/2}^{2} \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\ \mathrm{d}u = \Big[2\,u + \ln|u-1| - \ln|u+1|\Big]_{3/2}^{2}$$

$$= 4+\ln(1)-\ln(3)-3-\ln(1/2)+\ln(5/2) = 1-\ln(3)+\ln(2)+\ln(5)-\ln(2) = \boxed{1-\ln(3)+\ln(5)}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 10. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \sqrt{2\,x}$	b) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$
c) $f(x) = \dfrac{1}{(2\,x+1)^3}$	d) $f(x) = 3^x$
e) $f(x) = \dfrac{6\,x}{(x^2+1)^3}$	f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Réponse :

a) $f(x) = \sqrt{2}\,\sqrt{x} = \sqrt{2}\,x^{1/2}$

$$\Rightarrow F(x) = \sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \boxed{\frac{2\,\sqrt{2}\,x^{3/2}}{3} + C} = \boxed{\frac{\sqrt{8\,x^3}}{3} + C}$$

b) $f(x) = \dfrac{2}{\left(x^2\right)^{1/3}} = \dfrac{2}{x^{2/3}} = 2\,x^{-2/3}$

$$\Rightarrow F(x) = 2\,\frac{1}{1-2/3}x^{1-2/3} + C = \boxed{6\,x^{1/3} + C} = \boxed{6\,\sqrt[3]{x} + C}$$

c) $f(x) = (2\,x+1)^{-3} = K\,u'(\alpha\,x+\beta)$ avec $u(x) = x^{-2}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et $K = \frac{1}{-2}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{K}{\alpha}\,u(\alpha\,x+\beta) = \boxed{-\frac{1}{4}\,(2\,x+1)^{-2} + C} = \boxed{-\frac{1}{4\,(2\,x+1)^2} + C}$$

d) $f(x) = e^{x\,\ln(3)} = \dfrac{1}{\ln(3)}\,\ln(3)\,e^{x\,\ln(3)} = K\,u'(\alpha\,x+\beta)$

avec $u(x) = \exp(x)$, $\alpha = \ln(3)$, $\beta = 0$ et $K = \dfrac{1}{\ln(3)}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{K}{\alpha}\,u(\alpha\,x+\beta) = \boxed{\frac{e^{x\,\ln(3)}}{\ln(3)} + C = \frac{3^x}{\ln(3)} + C}$$

e) $f(x) = \dfrac{3\,u'(x)}{u(x)^3} = 3\,u'(x)\,u(x)^{-3}$ avec $u(x) = x^2+1$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{1-3}\,u(x)^{1-3} + C = \frac{3}{-2}\,u(x)^{-2} + C = \boxed{-\frac{3}{2\,(x^2+1)^2} + C}$$

f) $f(x) = u'(x)\,u(x)$ avec $u(x) = \ln(u)$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{u(x)^{1+1}}{1+1} + C = \frac{u(x)^2}{2} + C = \boxed{\frac{\ln^2(x)}{2} + C}$$

Exercice 11. *En utilisant l'intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

a) $x\ \ln(x)$	b) $x^3\ \sin(x^2)$	c) $\exp(x)\ \sin(x)$

Réponse :

a) $\displaystyle\int x\ \ln(x)\ \mathrm{d}x$:

on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int x\ \ln(x)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2\ \ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2\ \ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \boxed{\frac{x^2\ \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

b) $\displaystyle\int x^3\ \sin(x^2)\ \mathrm{d}x$

on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=\dfrac{x^2}{2} \\ v'(x)=2\,x\ \sin(x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=x \\ v(x)=-\cos(x^2) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int x^3\ \sin(x^2)\ \mathrm{d}x = -\frac{x^2\ \cos(x^2)}{2} - \int\Big(-x\ \cos(x^2)\Big)\ \mathrm{d}x = -\frac{x^2\ \cos(x^2)}{2} + \frac{1}{2}\int 2\,x\ \cos(x^2)\ \mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\frac{-x^2\ \cos(x^2)+\sin(x^2)}{2} + C} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

c) $\displaystyle\int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x$. Pour cette primitive, il va falloir faire deux intégrations par parties, en choisissant à chaque fois $u(x)=\exp(x)$.

1. $\displaystyle\int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x$: on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=\exp(x) \\ v'(x)=\sin(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=\exp(x) \\ v(x)=-\cos(x) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x = -\exp(x)\ \cos(x) + \int \exp(x)\ \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

2. $\displaystyle\int \exp(x)\ \cos(x)\ \mathrm{d}x$: on pose $\left\{\begin{array}{l} u(x)=\exp(x) \\ v'(x)=\cos(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x)=\exp(x) \\ v(x)=\sin(x) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int \exp(x)\ \cos(x)\ \mathrm{d}x = \exp(x)\ \sin(x) - \int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x$$

3. on en déduit :

$$\int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x = -\exp(x)\ \cos(x) + \int \exp(x)\ \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= -\exp(x)\ \cos(x) + \exp(x)\ \sin(x) - \int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow\ 2\int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x = -\exp(x)\ \cos(x) + \exp(x)\ \sin(x) + C_1$$

$$\Longleftrightarrow\ \int \exp(x)\ \sin(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(-\exp(x)\ \cos(x) + \exp(x)\ \sin(x)\Big) + C$$

Exercice 12. *Calculer les intégrales définies suivantes*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\ \mathrm{d}x$	b) $\displaystyle\int_0^{4} \sinh^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$	c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2(x)\ \mathrm{d}x$

Réponse :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\ \mathrm{d}x$

$$\sin^3(x) = \sin(x)\sin^2(x) = \sin(x)(1-\cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\ \mathrm{d}x = \left[-\cos(x) + \frac{1}{3}\ \cos^3(x)\right]_0^{\pi/2} = -0 + \frac{1}{3}\,0^3 + 1 - \frac{1}{3}\,1^3 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

On peut aussi "linéariser" $\sin^3(x)$:

$$\sin^3(x) = \frac{-\sin(3\,x) + 3\ \sin(x)}{4} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\Big(-\sin(3\,x) + 3\ \sin(x)\Big)\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos(3\,x) - 3\ \cos(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cos(3\,\pi/2) - 3\ \cos(\pi/2)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cos(0) - 3\ \cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3} + 3\right) = \frac{1}{4}\,\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

b) $\displaystyle\int_0^{4} \sinh^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$

$$\sinh^2(\varphi) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\varphi} - \mathrm{e}^{-\varphi}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\,\varphi} - 2 + \mathrm{e}^{-2\,\varphi}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\varphi}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-2\,\varphi}}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{4} \sinh^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\mathrm{e}^{2\,\varphi}}{8} - \frac{\mathrm{e}^{-2\,\varphi}}{8} - \frac{\varphi}{2}\right]_0^4$$

$$= \left(\frac{\mathrm{e}^{8}}{8} - \frac{\mathrm{e}^{-8}}{8} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{0}}{8} - \frac{\mathrm{e}^{0}}{8} - \frac{0}{2}\right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{8} - \mathrm{e}^{-8}}{8} - 2} = \boxed{\frac{\sinh(8)}{4} - 2}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\ \cos^2(x)\ \mathrm{d}x$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2\,x)+1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} x\cos^2(x)\ \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{x\cos(2\,x)}{2}\ \mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x}_{I_2}$$

Pour I_1, on intègre par parties en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{\cos(2\,x)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{\sin(2\,x)}{4} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{x\ \cos(2\,x)}{2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x\ \sin(2\,x)}{4}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\,x)}{4}\ \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x\ \sin(2\,x)}{4}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\cos(2\,x)}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\frac{\pi}{2}\ \sin(\pi)}{4} - \frac{0\ \sin(0)}{4} + \frac{\cos(\pi)}{8} - \frac{\cos(0)}{8} = 0 - 0 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$$

Pour I_2 :

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{0^2}{4} = \frac{\pi^2}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}}$$

Exercice 13. *Calculer les intégrales définies suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.*

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^3}{y+2}\,\mathrm{d}y$ *avec* $y = x - 2$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *avec* $x = \tan(t)$.

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ *avec* $t = \sin(u)$.

Réponse : a) Pour cette intégrale, le changement de variable indiqué est $y = x - 2$ donc on a bien la variable de *départ* y exprimée en fonction de la variable d'*arrivée* x.

(1) $y = \varphi(x) = x - 2 \iff x = y + 2$

(2) $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$

(3) il faut trouver les bornes de la variable d'*arrivée* t correspondant aux bornes de variable de *départ* x) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y = 0 & \iff & x = 2 \\ y = 1 & \iff & x = 3 \end{array} \right\}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^3}{y+2}\,\mathrm{d}y = \int_2^3 \frac{(x-2)^3}{x}\,\mathrm{d}y = \int_2^3 \frac{x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 8}{x}\,\mathrm{d}y$

$$= \int_2^3 \left(x^2 - 6\,x + 12 - 8\,\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 3\,x^2 + 12\,x - 8\,\ln|x|\right]_2^3$$

$$= \frac{27}{3} - 27 + 36 - 8\,\ln(3) - \frac{8}{3} + 12 - 24 + 8\,\ln(2) = \boxed{\frac{10}{3} - 8\ln(3) + 8\ln(2)} = \boxed{\frac{10}{3} + 8\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

b) Pour cette intégrale, le changement de variable indiqué est $x = \tan(t)$ donc on a bien la variable de *départ* x exprimée en fonction de la variable d'*arrivée* t.

(1) $\varphi(t) = \tan(t)$

(2) $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (\tan(t)^2 + 1)\,\mathrm{d}t$

(3) il faut trouver les bornes de la variable d'*arrivée* t correspondant aux bornes de variable de *départ* x). La fonction $\varphi(t) = \tan(t)$ est bijective de $]-\pi/2;\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x = 0 = \tan(t) & \iff & t = 0 \\ x = 1 = \tan(t) & \iff & t = \pi/4 \end{array} \right\}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan(t)^2}\,(\tan(t)^2 + 1)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}t = \Big[\,t\,\Big]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

c) Pour cette intégrale, le changement de variable indiqué est $t = \sin(u)$ donc on a bien la variable de *départ* t exprimée en fonction de la variable d'*arrivée* u.

(1) $t = \varphi(u) = \sin(u)$

(2) $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \cos(u)\ \mathrm{d}u$

(3) $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$

et pour $u \in [-\pi/2; \pi/2]$, $\cos(u) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-t^2} = \cos(u)$.

Pour ajuster les bornes en u, on les choisit dans l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} t = \sin(u) = 0 & \iff & u = 0 \\ t = \sin(u) = 1/2 & \iff & u = \pi/6 \end{array} \right\}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(u)\cos(u)}{\cos(u)}\, \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/6} \sin^2(u)\ \mathrm{d}u$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos(2\,u)}{2}\ \mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2\,u)}{4}\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sin(\pi/3)}{4} - \frac{0}{12} + \frac{\sin(0)}{4} = \boxed{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

Exercice 14. *Soit f une fonction impaire, et a un réel strictement positif tel que la fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[-a, a]$.*
Montrer que $\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Réponse :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_{0}^{-a} f(x)\ \mathrm{d}x$$

on fait le changement de variable $t = -x,\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow I_1 = -\int_{0}^{-a} f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_{0}^{-(-a)} -f(-t)\ \mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = -I_2$$

donc $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = I_1 + I_2 = 0}$.

Exercice 15. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par* $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

a) *Déterminer les deux réels a et b tels que* $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

b) *En déduire les primitives de $f(x)$.*

c) *En utilisant le changement de variable $t = \ln(x)$, déterminer les primitives de la fonction g définie pour $t > 0$ par* $g(t) = \dfrac{1}{\sinh(t)}$.

Réponse :

a) $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a\,(x+1) + b\,(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{(a+b)\,x + (a-b)}{x^2-1}$

$$\Rightarrow (a+b)\,x + (a-b) = 0\,x + 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a+b & = & 0 \\ a-b & = & 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 1/2 \\ b & = & -1/2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)}$$

b) Les primitives de $f(x)$ sont

$$F(x) = \boxed{\frac{1}{2}\,\ln|x-1| - \frac{1}{2}\,\ln|x+1| + C} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

c) $g(t) = \dfrac{1}{\sinh(t)} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^t} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t)^2 - 1}$.

a) le changement de variable est $t = \varphi(x) = \ln(x)$, la fonction $\varphi = \ln$ est bijective de $]\,1\,;\,+\infty\,[$ dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$, et sa réciproque est la fonction exp bijective de $]\,0\,;\,+\infty\,[$ dans $]\,1\,;\,+\infty\,[$: $x = \exp(t)$.

(Ici on choisit φ bijective de $]\,1\,;\,+\infty\,[$ dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$ car t doit etre strictement positif.)

b) on a $\mathrm{d}t = \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x$.

c) donc $\displaystyle\int g(t)\ \mathrm{d}t$

$$= \int g(\varphi(x))\,\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2\,x}{x^2-1}\,\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x^2-1}\ \mathrm{d}x = 2\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln(x-1) - \ln(x+1) + C \text{ car } x > 1$$

Donc $\displaystyle\int g(t)\ \mathrm{d}t = \boxed{\ln(\exp(t)-1) - \ln(\exp(t)+1) + C}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 16.
a) *Soit a une constante réelle, résoudre l'équation* $e^x - e^{-x} = a$
(indication : poser $X = e^x > 0$)
b) *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{t^2 + 2\,t + 5}\ dt$$

avec le changement de variable $t = e^x - e^{-x} - 1$.

Réponse :
a) Posons $X = e^x > 0$:

$$e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x} = a \iff X - \frac{1}{X} = a \iff X^2 - 1 = a\,X \iff X^2 - a\,X - 1 = 0$$

On a une équation du second degré donc l'inconnue est X.
Son discriminant est $\Delta = a^2 + 4 > a^2 \geq 0$ donc deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} < 0 \text{ et } X_2 = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} > 0$$

D'où la solution $\boxed{x = \ln(X_2) = \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}\right)}$

b) $t = \varphi(x) = e^x - e^{-x} - 1 \Rightarrow dt = \varphi'(x)\ dx = \Big(e^x + e^{-x}\Big)\ dx$

$$t^2 + 2\,t + 5 = \Big(e^x - e^{-x} - 1\Big)^2 + 2\,\Big(e^x - e^{-x} - 1\Big) + 5$$

$$= e^{2\,x} + e^{-2\,x} + 1 - 2\,\underbrace{e^x\,e^{-x}}_{=1} - 2\,e^x + 2\,e^{-x} + 2\,e^x - 2\,e^{-x} - 2 + 5$$

$$= e^{2\,x} + e^{-2\,x} + 2 = (e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2\,e^x\,e^{-x} = \Big(e^x + e^{-x}\Big)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + 2\,t + 5}\ dt = \Big(e^x + e^{-x}\Big)\Big(e^x + e^{-x}\Big)\ dx = \Big(e^{2\,x} + e^{-2\,x} + 2\Big)\ dx$$

Il faut trouver ensuite la correspondance des bornes pour t et x.

$$t = e^x - e^{-x} - 1 \iff e^x - e^{-x} = t + 1 \iff x = \ln\left(\frac{t + 1 + \sqrt{(t+1)^2 + 4}}{2}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} t = -1 & \iff & x = \ln(1) = 0 \\ t = 1 & \iff & x = \ln(1 + \sqrt{2}) \end{array}\right\}$$

On peut alors calculer l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{t^2 + 2\,t + 5}\ dt = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \Big(e^{2\,x} + e^{-2\,x} + 2\Big)\ dx = \left[\frac{e^{2\,x} - e^{-2\,x}}{2} + 2\,x\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{e^{2\,\ln(1+\sqrt{2})} - e^{-2\,\ln(1+\sqrt{2})}}{2} + 2\,\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{e^{2\times 0} - e^{-2\times 0}}{2} - 2 \times 0$$

$$= \frac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{2})^{-2}\Big) + 2\,\ln(1+\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right) + 2\,\ln(1+\sqrt{2})$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right) + 2\,\ln(1+\sqrt{2})}$$

On peut encore simplifier car le terme $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ est égal à

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-2^2\sqrt{2}^2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3-2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right) + 2\,\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\Big(3+2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}\Big) + 2\,\ln(1+\sqrt{2})$$
$$= \boxed{2\sqrt{2} + 2\,\ln(1+\sqrt{2})}$$

Exercice 17. *La fonction* $f(x) = \sinh(x)$ *est continue et bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, et sa fonction réciproque est* $f^{-1}(x) = \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

a) *Calculer la dérivée de la fonction* $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ *puis la dérivée de* $\operatorname{argsinh}(x)$.

b) *En déduire les primitives de* $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$*, puis déterminer les primitives de* $\sqrt{x^2+1}$ *en utilisant l'intégration par parties.*

c) *Calculer les deux intégrales définies suivantes :*

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\,x^2+1}} \qquad \textit{et} \qquad B = \int_0^1 \sqrt{x^2+4}\;\mathrm{d}x$$

Réponse :

a) La dérivée de $g(x) = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{h(x)}$ avec $h(x) = x^2+1$ est

$$g'(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{g(x)}$$

$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + g(x))$

$$\Rightarrow \operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1+g'(x)}{x+g(x)} = \frac{1+\dfrac{x}{g(x)}}{x+g(x)} = \frac{\dfrac{g(x)+x}{g(x)}}{x+g(x)} = \frac{1}{g(x)} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

b) Donc les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sont $\operatorname{argsinh}(x) + C$.

Calculons les primitives de $\sqrt{x^2+1}$. On note $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\;\mathrm{d}x$.

$$I = \int g(x) \times 1\;\mathrm{d}x$$

On pose $\left\{\begin{array}{l} u(x) = g(x) = \sqrt{x^2+1} \\ v'(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x) = g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ v(x) = x \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow I = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\;\mathrm{d}x$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow I = x\sqrt{x^2+1} - \left(\int \sqrt{x^2+1}\;\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\;\mathrm{d}x\right) = x\sqrt{x^2+1} - I + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\;\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow\; 2\,I = x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{argsinh}(x) + C_1$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2+1}\;\mathrm{d}x = \boxed{\frac{x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{argsinh}(x)}{2} + C} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

c) Pour calculer A :

1. on fait le changement de variable $x = \varphi(u) = \dfrac{u}{2} \iff u = 2\,x$
2. $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$
3. $(x = 0 \iff u = 0)$ et $(x = 1 \iff u = 2)$
4. $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\,x^2+1}}$

$$= \int_0^2 \frac{\mathrm{d}u}{2\,\sqrt{u^2+1}} = \left[\frac{\operatorname{argsinh}(u)}{2}\right]_0^2 = \frac{\operatorname{argsinh}(2) - \operatorname{argsinh}(0)}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{argsinh}(2)}{2}} = \boxed{\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}}$$

Pour calculer B :

1. on fait le changement de variable $x = \varphi(u) = 2\,u \iff u = x/2$
2. $\mathrm{d}x = 2\ \mathrm{d}u$
3. $(x = 0 \iff u = 0)$ et $(x = 1 \iff u = 1/2)$
4. $B = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\ \mathrm{d}x$

$$= \int_0^{1/2} 2\,\sqrt{4\,u^2+4}\ \mathrm{d}u = 4\int_0^{1/2} \sqrt{u^2+1}\ \mathrm{d}u = 4\left[\frac{u\sqrt{u^2+1} + \operatorname{argsinh}(u)}{2}\right]_0^{1/2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\operatorname{argsinh}\left(\frac{1}{2}\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\ \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Exercice 18. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et les deux intégrales définies suivantes :*

$$C_n = \int_0^\pi t^n \cos(t)\ \mathrm{d}t \qquad\qquad S_n = \int_0^\pi t^n \sin(t)\ \mathrm{d}t$$

a) *Cas $n = 0$: calculer C_0 et S_0.*
b) *Cas $n \geq 1$: en utilisant l'intégration par parties, exprimer C_n en fonction de S_{n-1}, et S_n en fonction de C_{n-1}.*
c) *En déduire les valeurs de C_3 et S_3.*

Réponse :
a)

$$C_0 = \int_0^\pi \cos(t)\ \mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

$$S_0 = \int_0^\pi \sin(t)\ \mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

$\boxed{C_0 = 0}$ et $\boxed{S_0 = 2}$.

b) Relation entre C_n et S_{n-1} :
on pose $\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & t^n \\ v'(t) & = & \cos(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & n\,t^{n-1} \\ v(t) & = & \sin(t) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow C_n = \int_0^\pi t^n \cos(t)\ \mathrm{d}t = \Big[t^n \sin(t)\Big]_0^\pi - n \int_0^\pi t^{n-1} \sin(t)\ \mathrm{d}t$$

$$= \pi^n \sin(\pi) - 0^n \sin(0) - n\,S_{n-1} = -n\,S_{n-1}$$

Relation entre S_n et C_{n-1} :
on pose $\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & t^n \\ v'(t) & = & \sin(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & n\,t^{n-1} \\ v(t) & = & -\cos(t) \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow S_n = \int_0^\pi t^n \sin(t)\ \mathrm{d}t = \Big[-t^n \cos(t)\Big]_0^\pi + n \int_0^\pi t^{n-1} \cos(t)\ \mathrm{d}t$$

$$= -\pi^n \cos(\pi) + 0^n \cos(0) + n \int_0^\pi t^{n-1} \cos(t)\ \mathrm{d}t = \pi^n + n\,C_{n-1}$$

$\boxed{C_n = -n\,S_{n-1}}$ et $\boxed{S_n = \pi^n + n\,C_{n-1}}$.

c)

$$\begin{array}{rclcrcl} C_1 & = & -S_0 = -2 & \qquad & S_1 & = & \pi + C_0 = \pi \\ C_2 & = & -2\,S_1 = -2\,\pi & & S_2 & = & \pi^2 + 2\,C_1 = \pi^2 - 4 \\ C_3 & = & -3\,S_2 = 12 - 3\,\pi^2 & & S_3 & = & \pi^3 + 3\,C_2 = \pi^3 - 6\,\pi \end{array}$$

$\boxed{C_3 = 12 - 3\,\pi^2}$ et $\boxed{S_3 = \pi^3 - 6\,\pi}$.