TD 2 – Syntaxe de la logique des propositions

Exercice 1 – Pour chacune des formules suivantes construites sur l'ensemble de symboles propositionnels S={p,q,r,s}, les connecteurs $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$, les constantes $\{\perp,\top\}$ et les parenthèses {(,)}, vous donnerez :

a) son statut vis-à-vis de la logique des propositions : sont-elles ou non des propositions (i.e. des formules bien formées du langage propositionnel) ?
b) l'arborescence associée à la formule (si la formule n'est pas bien formée vous proposerez une correction) ;
c) une expression fonctionnelle de la formule ;
d) une expression infixée débarrassée des parenthèses superflues en considérant les priorités entre connecteurs vues en cours :

$\neg((q\rightarrow r)\vee p)$	$(((p\wedge q)\neg r)\rightarrow p)$
$((\neg p\rightarrow(\neg r\vee q))\rightarrow p)$	$(\neg\neg(q\rightarrow r)\vee(\neg q\rightarrow\neg r))$
$(p\vee(\neg q\wedge(r\wedge s)))$	$(\perp\wedge(\neg p\vee\top))$

Exercice 2 - Donner tous les arborescences pouvant correspondre aux formules suivantes sans tenir compte des conventions de priorité entre connecteurs, puis préciser quel arborescence correspond aux conventions d'écriture infixée données dans le cours :

$p\wedge q\vee r$ $\quad$ $p\wedge\neg q$ $\quad$ $\neg p\wedge q$ $\quad$ $\neg p\rightarrow\neg q\wedge r$ $\quad$ $p\rightarrow q\rightarrow r\rightarrow s$

Rem : dans la suite on supposera que l'on tient compte des conventions de priorité du cours.

Exercice 3 – Que faudrait-il modifier dans la définition inductive du langage des propositions pour prendre en compte un connecteur binaire « ou exclusif » noté ⊗ ? Même question avec un connecteur binaire « non et » noté *nand* et avec un connecteur ternaire « Si Alors Sinon » noté *?;* (exemple : *(p?q;r)*).

Exercice 4 – Soit S l'ensemble des symboles propositionnels et *PROP(S)* l'ensemble des fbf construites à partir de S et soit A et B les fbf suivantes :

$A = (\neg p\rightarrow(p \rightarrow (r \vee p)))$

$B = (((p \wedge \perp) \vee (\neg r \rightarrow p)) \leftrightarrow r)$

a) Dessiner les arborescences associées à A et B
b) Calculer les ensembles *SP(A)* et *SP(B)* où SP est l'application vue en cours qui définit l'ensemble des symboles propositionnels d'une formule.
c) Soit l'application *Prof* de *PROP(S)* dans l'ensemble des entiers naturels qui, à toute fbf *P*, associe la profondeur de l'arborescence syntaxique associée à *P* (c'est-à-dire le nombre maximum d'arêtes d'un chemin dans cette arborescence). Donner une définition par induction structurelle de l'application Prof.
d) Calculer les entiers *Prof(A)* et *Prof(B)*

Exercice 5 – Une sous-formule d'une fbf A est une fbf B qu'il est nécessaire de produire lors de la construction de A par le processus d'induction.

a) Dites si les formules suivantes sont des sous-formules de la formule $((\neg p\rightarrow q\wedge r)\leftrightarrow((s\rightarrow\neg p\wedge r)\leftrightarrow\neg q\wedge s))$:
$\neg p$, $\quad p\rightarrow q$, $\quad p\rightarrow q\wedge r$, $\quad \neg p\rightarrow q$, $\quad \neg p\rightarrow q\wedge r$, $\quad \neg p\wedge r$, $\quad (s\rightarrow\neg p\wedge r)\leftrightarrow\neg q\wedge s$
b) Quel est l'ensemble des sous-formules de la formule de la formule $((\neg p\wedge r) \rightarrow\neg p)$
c) Donnez une définition par induction de l'application *Sub* qui associe à une proposition l'ensemble des sous-formules d'une formule.

Exercice 6 – Soit l'application *Sub* précédente et l'application *nbc* de *PROP* dans $\mathbb{N}$ qui, à toute fbf *P*, associe le nombre de connecteurs de *P*, et soit la fbf $A = ((p \wedge q) \rightarrow (\neg r \vee p))$.

a) Donner *Sub(A)* et *nbc(A)*, puis vérifier que $|Sub(A)| \leq 2.nbc(A) + 1$.
b) Donner une définition par induction de l'application *nbc*.
c) Montrer par induction structurelle qu'une fbf *P* ayant *n* occurrences de connecteurs a au plus $2n + 1$ sous-fbf (autrement dit, que pour toute fbf *P*, $|Sub(P)| \leq 2.nbc(P) + 1$).

TD 3 – Sémantique de la logique des propositions

Exercice 1 – Soit les fbf : $A = p \wedge (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p))$ et $B = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

a) Soit I une interprétation. Déterminer (si c'est possible) v(A,I) et v(B,I) dans chacun des 4 cas suivants :
   1. on sait que I(p) = 0 et I(q) = 1 ;
   2. on sait que I(p) = 1 et I(q) = 0 ;
   3. on sait que I(p) = 0 ;
   4. on sait que I(q) = 1 ;
   5. on ne sait rien sur I(p) et I(q).

b) Les fbf A et B sont-elles satisfiables ? Valides ?

c) L'ensemble {A,B} est-il consistant ?

Exercice 2 – La sémantique d'une formule est déterminée par celle des symboles propositionnels qui la composent. Combien d'interprétations différentes peut-on donner aux symboles propositionnels de chaque formule suivante. Pour chacune d'elles, donnez la valeur de vérité de la formule.

$p\vee\neg p$ $\quad$ $p\wedge p$

$p\wedge\neg p$ $\quad$ $p\vee q$

$p\vee(q\vee\neg q)$ $\quad$ $(p\rightarrow\neg\neg p)\wedge(\neg\neg p\rightarrow p)$

$(\neg p\vee q)\leftrightarrow(p\rightarrow q)$ $\quad$ $\neg(\neg p\vee q)\vee(r\rightarrow(p\leftrightarrow q))$

Exercice 3 - Démontrez pour chaque couple de formules suivantes qu'elles sont « sémantiquement équivalentes » (c'est-à-dire que leur valeur de vérité est identique quelque soit l'interprétation des symboles propositionnels) :

p et $\neg\neg p$ $\quad$ $p\vee\neg\bot$ et $\neg\bot$

$p\rightarrow q$ et $\neg p\vee q$ $\quad$ $\neg(p\wedge q)$ et $\neg p\vee\neg q$

$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ et $p\leftrightarrow q$ $\quad$ $p\wedge(q\vee r)$ et $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\wedge\neg p$ et $\bot$ $\quad$ $p\wedge(q\vee\neg q)$ et p

$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee((p\wedge s)\wedge\neg p)$ et $((p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s\vee r))\wedge(\neg p\rightarrow\neg q)$

Exercice 4 - Le connecteur $\vee$ correspond au « ou inclusif ». Nous n'avons pas introduit de connecteur pour exprimer le « ou exclusif ». Donnez un connecteur vérifonctionnel pour ce connecteur. Quelles formules de la logique des propositions correspondent à ce connecteur c'est à dire ont la même sémantique que « p ou exclusif q » ? Même question avec le connecteur ternaire « si p alors q sinon r » dont la sémantique est celle de l'instruction correspondante des langages de programmations.

Exercice 5 – Dites parmi les formules suivantes lesquelles sont équivalentes en vous aidant des formulaires de bases donnés en cours : $(A\wedge B)\rightarrow C$, $(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)$, $(A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C)$, $(A\vee B)\rightarrow C$, $A\rightarrow(C\wedge D)$, $A\rightarrow(C\vee D)$, $(A\rightarrow C)\wedge(A\rightarrow D)$, $(A\rightarrow C)\vee(A\rightarrow D)$

Exercice 6 - Donnez des formules correspondant à la table de vérité suivante, en particulier les FNC et FND :

p	*q*	*r*	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 7 – Dire si les formules suivantes sont valides, insatisfiables ou contingentes

$((p\rightarrow q)\rightarrow p)$, $(p\rightarrow(q\rightarrow p))$, $((p\wedge q)\leftrightarrow(p\rightarrow\neg q))$, $(p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee s)$

Exercice 8 – Que pensez-vous des affirmations suivantes :

– si une formule est contingente, sa négation l'est également ;
– si G et H sont 2 formules contingentes, alors $G\vee H$ et $G\wedge H$ sont 2 formules contingentes ;
– si $G\vee H$ est insatisfiable alors G et H sont 2 formules insatisfiables ;
– si $G\vee H$ est valide alors G et H sont 2 formules valides.

Exercice 9 – Montrez que pour toute formule H, il existe une formule H' équivalente à H et n'ayant comme connecteurs logiques que la négation et l'implication. Appliquer à la formule $((p\vee q)\leftrightarrow(r\wedge s))$.

Exercice 10 – Soit le connecteur *nand* défini par p *nand* q $\equiv \neg(p\wedge q)$. Montrez que toute formule est équivalente à une formule ayant *nand* comme seul connecteur. Appliquez à la formule $p\rightarrow q$.

TD 4 – Modélisation

Exercice 1 – Le lieutenant Colombo enquête sur le crime ayant eu lieu dans la nuit du 1 au 2 octobre. Il dispose des informations suivantes :

A : Jacques ou Martin est coupable
B : si Martin est coupable alors le crime a eu lieu avant minuit
C : si le crime a eu lieu à partir de minuit alors Jacques est coupable
D : le crime a eu lieu avant minuit

a) Que peut-il en déduire sur l'identité du (ou des) coupable(s) ?
b) Même question s'il dispose de l'information supplémentaire :
E : si Jacques est coupable alors le crime a eu lieu à partir de minuit.

Exercice 2 – On considère les énoncés suivants, où p, q, r, s et t représentent eux-mêmes des énoncés. Les écrire sous forme de fbf.

A : si p alors q
B : pour que p, il suffit que q
C : pour que p, il faut que q
D : p est une CNS pour que q
E : soit p, soit q, mais pas les deux
F : si p alors q sinon r
G : si p alors q à moins que r
H : si p alors q sauf si r
I : si p alors si q alors r sinon s
J : si p alors si q alors r sinon s sinon t

Exercice 3 – Modélisez les énoncés suivants en logique des propositions :

1. *Il suffit à Eric d'assister aux cours et aux TD pour qu'il ait la moyenne.*
2. *R est une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive, symétrique et transitive.*
3. *Si Rose n'est pas vaccinée, il suffit d'une coupure pour qu'elle attrape le tétanos.*
4. *Si Pierre est chez lui, il lit ou il écoute de la musique.*
5. *Le Sida ne sera pas éradiqué à moins qu'un nouveau vaccin ne soit découvert.*
6. *Il est nécessaire d'avoir du courage et de l'habileté pour escalader cette paroi.*

Exercice 4 –

1- Modélisez en logique des propositions les phrases suivantes :

(1) Jean est à son bureau, à moins qu'il soit en train de déjeuner.
(2) Jean a un fils ou deux filles.
(3) Jean n'a ni fils, ni filles
(4) Ni Jean ni Bernard ne possède à la fois un lecteur MP3 et un graveur.

2- En vous aidant de cette modélisation, proposez pour chaque phrase, une phrase exprimant la négation de la phrase d'origine.

Exercice 5 –: Enigme

Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégories de gens : les Purs, qui ne disent que des choses vraies, et les Pires, qui ne disent que des choses fausses. Alice et Bernard sont deux habitants de l'île de Puro-Pira. Il se peut qu'ils soient deux Purs, deux Pires, une Pure et un Pire,... Tout est possible ! ».

1- Déterminez dans chacune des situations indépendantes suivantes si Alice et Bernard sont des Purs ou des Pires. Vous justifierez votre réponse en modélisant et résolvant ce problème en logique des propositions.

- Situation 1 : Vous rencontrez Bernard qui vous dit *: « Alice et moi sommes tous les deux des Pires »*
- Situation 2 : Vous rencontrez Alice qui vous dit : *"Si je suis une Pure alors Bernard est un Pire".*
- Situation 3 : Vous rencontrez Alice et Bernard : Alice dit : *"Je suis une Pure ou Bernard est un Pur."* et Bernard dit : *"Nous ne sommes pas du même type."*

2- Trouvez une phrase que ni un Pur ni un Pire ne peut dire.

3- Trouvez une phrase qui peut-être dite à la fois par un Pur et un Pire.

Exercice 6 – On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale possédant 2 lignes, appelées *a* et *b*, et 3 colonnes, appelées *1*, *2*, *3*. Pour cela on dispose des informations suivantes :

- Il y a au moins un bateau sur la ligne *b*
- Il y a au moins un bateau sur la ligne *a*
- Il n'y a pas 2 bateaux sur une même colonne
- Il n'y a pas de bateau en *(b,1)*
- Si il y a un bateau sur la ligne *a* alors il n'y a pas de bateau en *(b,3)*.

En notant x_i (pour *x=a ou b* et *i=1 ou 2 ou 3*) l'affirmation « Il y a un bateau à la position *(x,i)* », modélisez par une formule de la logique des propositions les 5 affirmations ci-dessus. Puis traduisez sous forme logique le problème posé.

Exercice 7 – On dispose de 3 cases alignées notées 1, 2 et 3 (la case 1 est à gauche, la 2 au centre et la 3 à droite) et d'autre part de pions de formes différentes : triangle, rond ou carré. Les pions peuvent être placés dans les cases. On notera *c_1* l'affirmation : *« L'emplacement 1 contient un pion carré »* et on fera de même pour les autres formes et les autres numéros de case.

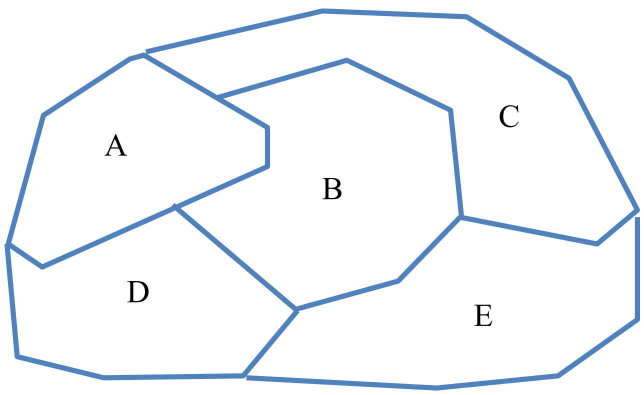
Modélisez les deux phrases suivantes : « Il y a un pion rond immédiatement à droite d'un pion carré. » et « Chaque emplacement contient soit un pion rond soit un pion carré soit un pion triangulaire. ». Donnez les modèles communs à ces 2 formules. Que peut-on en conclure quant au pion situé dans la case 2 ?

Exercice 8 – Soient les énoncés suivants :

A. « Si Robert a mal au genou, il ne peut pas jouer à la fois les matchs 1 et 2. »
B. « L'équipe de Bouzols perd le match 1 si et seulement si Robert ne joue pas lors du match 1. »
C. « Si Robert ne participe pas au second match alors il est nécessaire qu'il fasse chaud pour que Bouzols gagne le match 2. »
D. « Pour être qualifiée, l'équipe de Bouzols doit nécessairement gagner les 2 matchs 1 et 2. »
E. « Si l'équipe de Bouzols est qualifiée et qu'il ne fait pas chaud alors Robert n'a pas mal au genou. »

Modélisez les phrases A, B, C, D, E en logique des propositions. Vous modéliserez chaque phrase telle qu'elle est énoncée. Le sport pratiqué par Robert et les habitants de Bouzols n'admet pas de résultat nul. En conséquence dire qu'un match est perdu est équivalent à dire qu'il n'est pas gagné.

Exercice 9 – Coloration de carte : peut-on colorier la carte ci-dessous avec 3 couleurs (par exemple Rouge, Vert, Jaune) de manière à ce que 2 régions adjacentes aient des couleurs différentes ? Modélisez ce problème en logique des propositions.



TD 5 – Formes clausales et Méthodes de preuve

Exercice 1 – Soit la fbf : F = $((r \rightarrow p) \rightarrow (\neg(q \vee r) \rightarrow p))$, dessinez l'arborescence syntaxique de F puis mettez F sous forme conjonctive. Finalement donnez sa forme clausale.

Exercice 2 – Mettez sous forme clausale les fbf suivantes :

$(p \leftrightarrow (q \vee \neg(r \wedge p)))$ $\qquad\qquad$ $\neg((b \rightarrow a) \rightarrow \neg c \wedge \neg(d \rightarrow e \wedge f))$

Exercice 3 – « Subsomption » : Soit deux clauses C1 et C2, on dit que C1 subsume C2 (i.e. C2 est une clause subsumée par C1) ssi $C1 \subseteq C2$. Montrez que si C1 subsume C2 et que C1 est satisfiable alors C2 est satisfiable. En déduire qu'une forme clausale F est insatisfiable ssi F débarrassée des clauses subsumées est insatisfiable.

Exercice 4 – « Tautologie » : Montrez qu'une forme clausale F est insatisfiable ssi F débarrassée des clauses tautologiques (valides) est insatisfiable.

Notation : *Soit F une forme clausale et l un littéral, on note F[l] la forme clausale obtenue à partir de F en supprimant les clauses contenant le littéral l et en supprimant le littéral opposé à l des autres clauses.*

Exercice 5 – Un littéral pur d'une forme clausale F est un littéral qui n'apparaît que sous une seule forme dans F, i.e. F contient des occurrences de l mais aucune occurrence de $\bar{l}$. Soit F une forme clausale et l un littéral pur de F, montrez que F[l] est insatisfiable si et seulement si F est insatisfiable.

Exercice 6 – Une clause unitaire est une clause ne contenant qu'un seul littéral. Montrez que si {l} est une clause unitaire d'une forme clausale F alors F est insatisfiable ssi F[l] est insatisfiable.

Exercice 7 – Soit F une forme clausale et l un littéral de F (et soit $\bar{l}$ le littéral opposé), montrez que F est insatisfiable ssi F[l] et $F[\bar{l}]$ sont insatisfiables.

Exercice 8 – Soit la forme clausale suivante (correspondant à la description de la bataille navale du TD4) :

$D=\{\{a1,a2,a3\},\{b1,b2,b3\},\{\neg a1,\neg b1\},\{\neg a2,\neg b2\},\{\neg a3,\neg b3\},\{\neg b1\}\{\neg a1,\neg b3\}\{\neg a2,\neg b3\}\}$

Prouve que l'on peut déduire qu'il y a un bateau en b2 et pas de bateau en a2, en montrant que $D \cup \{\{\neg b2,a2\}\}$ est insatisfiable :

a) par la méthode précédente (cf. exercice 8)
b) par la méthode de résolution

Exercice 9 – Démontrez en utilisant exclusivement la méthode de résolution que : $\{a \rightarrow b, (c \wedge d) \rightarrow a, e \rightarrow c, d \wedge e\} \models b$

Exercice 10 - Dites en utilisant la méthode des tableaux sémantiques si les fbfs suivantes sont satisfiables :

$$((\neg(b \wedge a) \rightarrow (a \leftrightarrow b)) \wedge \neg(\neg a \vee b))$$
$$((\neg p \wedge (\neg q \vee r)) \vee (p \rightarrow (q \wedge \neg r))) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$$

Exercice 11 – Montrez que les formules suivantes sont valides à l'aide de la méthode des tableaux :

$$((A \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \rightarrow C))$$
$$((A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow D) \rightarrow ((\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D))$$
$$((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Exercice 12 – Montrez à l'aide de la méthode de résolution puis à l'aide de la méthode des tableaux que le raisonnement suivant n'est pas valide : $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow (r \rightarrow s)), \neg s\} \models \neg p$.

Exercice 13 –Soit les formules bien formées suivantes de la logique des propositions :

$A = \neg(q \wedge \neg r) \wedge (p \rightarrow q \vee (r \wedge \neg p))$
$B = \neg(r \rightarrow s) \vee \neg p \vee (r \wedge s)$

1- Calculez les valeurs de vérité de A et B pour l'interprétation I suivante : I(p)=1, I(q)=0, I(r)=1 et I(s)=1. Que peut-on en conclure sur A et B ?
2- Mettre A sous forme clausale.
3- Montrez par la méthode de résolution que B se déduit logiquement de A ($A \models B$).
4- Montrez cette déduction par la méthode des tableaux sémantiques.

Exercice 14 – Le résultat de la méthode de résolution est : « une forme clausale *FC* est insatisfiable ssi il existe une résolution de FC terminant par la clause vide (une telle résolution est appelée réfutation) ». Mais comment obtenir une réfutation ? Un moyen simple consiste à calculer toutes les résolvantes possibles. L'ensemble des résolvantes possibles étant fini cette stratégie garantit de ne pas rater la clause vide (on dit que la stratégie est complète). Mais elle est coûteuse. Nous proposons ici d'autres stratégies

- Une première stratégie est la unit-résolution qui ne calcule les résolvantes qu'entre une clause unitaire et une clause quelconque.
  - Appliquez l'unit-résolution aux clauses $\{a \vee c, \neg a \vee b, \neg c, \neg b\}$
  - L'unit-résolution est-elle complète ?
- Une seconde stratégie possible construit à partir d'une forme clausale FC, la séquence de formes clausales $S_0, S_1, \ldots S_n$ où :

- o S_0 = FC,
- o Pour tout i appartenant à [0..n-1], S_{i+1} est l'ensemble des résolvantes de clauses de S_i.

On ne calcule donc les résolvantes qu'entre clauses produites à l'étape précédente.

- o Calculez la séquence produite par les clauses précédentes ;
- o Cette stratégie est-elle complète ?

Exercice 15 – Définition : une clause est une clause de Horn si elle contient au plus un littéral positif. Une forme clausale est de Horn si elle ne contient que des clauses de Horn. Exemple $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge p \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ est une forme clausale de Horn.

- Donnez un exemple de forme clausale de Horn insatisfiable.
- Donnez un modèle de la forme clausale de Horn : $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)$.
- Montrez que si toutes les clauses d'une forme clausale de Horn contiennent au moins 2 littéraux, alors cette forme clausale possède au moins un modèle.
- Soient C1 et C2 2 clauses de Horn « résolvables ». Que peut-on dire de la résolvante de C1 et C2 ?
- Que peut-on alors conclure de l'utilisation de la unit-résolution sur une forme clausale de Horn ?

Exercice 16 - Bientôt les vacances…

Jules n'est jamais en vacances quand il lit le journal.
Pour que Jules soit à la mer, il suffit qu'on soit en été.
Si Jules est à la mer mais qu'il n'est pas en forme alors il lit le journal.
Il est impossible qu'on ne soit pas en été et que Jules ne soit pas à la mer.
Quand Jules n'est pas en vacances alors il ne lit pas le journal.

1- Modélisez ce problème en logique des propositions :
   a. Identifiez les propositions simples de ce texte et associez y des symboles propositionnels,
   b. Traduisez chaque énoncé par une formule de la logique des propositions utilisant ces symboles.
2- Montrez à l'aide de la méthode de résolution que *« Jules est en forme »*.

Exercice 17 - *Evolution sentimentale…*

1- On interroge un logicien (qui dit toujours la vérité) sur sa vie sentimentale. Il répond par les deux affirmations suivantes :
   – *J'aime Marie ou j'aime Anne*
   – *Si j'aime Marie, j'aime Anne*

   Que peut-on conclure : aime-t-il Marie ? Anne ? Ou les deux ?

2- Le même logicien est à nouveau interrogé un an plus tard par un autre logicien de la façon suivante *: « Est-il vrai que si vous aimez Marie, alors vous aimez Anne ? ».* Ce à quoi il répond :
   – *Si c'est vrai alors j'aime Marie*
   – *Si j'aime Marie, alors c'est vrai*

   Quelles conclusions en tirer : aime-t-il toujours Marie ? Anne ? Les deux ? Ou plus personne ?

Modélisez ces deux problèmes en logique des propositions, et précisez quel problème de la logique des propositions vous vous posez ?

Exercice 18 – Soit le règlement suivant d'un club écossais.

1- Tout membre non écossais porte des chaussettes orange ;
2- Tout membre porte une jupe ou ne porte pas de chaussettes orange ;
3- Les membres mariés ne sortent pas le dimanche ;
4- Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais ;
5- Tout membre qui porte une jupe est écossais et marié ;
6- Tout membre écossais porte une jupe ;

Peut-il y avoir un membre dans ce club ?

Exercice 19 – Vous êtes perdu dans le désert depuis trop longtemps. Vous arrivez à une bifurcation. Les deux pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert (au mieux elles mènent toutes deux à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux). Chaque piste est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Votre but bien sûr est d'atteindre une oasis.

– L'un des sphinx vous répond A : « une au moins des deux pistes conduit à un oasis ».
– L'autre sphinx vous répond B : « la piste de droite se perd dans le désert ».

De source sûre vous savez que C : les deux sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.
Résoudre l'énigme : peut-on déduire à partir de l'énoncé qu'une piste conduit à une oasis et si oui quelle est-elle ?

Exercice 20 – « L'énigme du masque de fer »
On a trouvé les inscriptions suivantes dans la cellule de l'homme au masque de fer :

- Je ne suis pas le frère jumeau de Louis XIV
- Une seule de ces deux propositions est vraie

Que peut-on en déduire ? Sous quelles conditions ?