Examen terminal - MAP101 - janvier 2023

Durée 2h - documents et calculette interdits

Les différentes parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque

Le barème pour chaque partie est indicatif

Justifier au mieux chaque réponse

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation

---

Partie 1 (4 pt)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2+2\,x}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer les deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$$

3. Pour $x > 0$, déterminer F, la primitive de la fonction f vérifiant $F(1) = 2$.

Partie 2 (3 pt)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f(t) = \frac{1}{t+\sqrt{t}}$$

Calculer l'intégrale définie

$$A = \int_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t$$

en effectuant le changement de variable correspondant à $u = \sqrt{t}$.

(suite du sujet au verso) →

Partie 3 (3 pt)
Déterminer les solutions y de l'équation différentielle (E_3) suivante :

$$y'(x) - \tan(x)\, y(x) = x \qquad \text{avec } x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\tag{E_3}$$

Partie 4 (4 pt)
Soit l'équation différentielle (E_4) suivante :

$$y''(x) - 3\, y'(x) + 2\, y(x) = \mathrm{e}^x, \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R} \tag{E_4}$$

1. Déterminer y_0 une solution particulière de l'équation différentielle (E_4) sous la forme

$$y_0(x) = \alpha\, x\, \mathrm{e}^x \qquad \text{avec } \alpha \text{ constante réelle}$$

2. En déduire la solution y de l'équation différentielle (E_4) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Partie 5 (3 pt)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

et soit c une constante réelle strictement supérieure à 1.
On considère l'intégrale définie suivante :

$$A_c = \int_1^c f(x)\, \mathrm{d}x$$

1. Déterminer (en fonction de c) la valeur de A_c.
2. Dans le cas $c = 6$, par intégration numérique, calculer $\overline{A}_6$, approximation de A_6 en utilisant la méthode des rectangles (valeur à gauche), et un découpage de l'intervalle $[1; 6]$ en $n = 5$ sous-intervalles.
   La valeur de $\overline{A}_6$ devra être donnée sous la forme la plus simple possible.

(suite du sujet) →

Partie 6 (5 pt)
On rappelle l'algorithme de la méthode d'Euler pour résoudre numériquement le problème de Cauchy (P) suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x) \quad , \quad x \in I = [\,\alpha ; \beta\,] \\ y(\alpha) = v \end{array}\right\} \tag{P}$$

On connait α et β les deux bornes réelles de l'intervalle I, deux fonctions a et f définies et continues sur I, v la valeur de la solution y en $x = \alpha$, et n un entier strictement positif.

L'algorithme d'Euler consiste alors à calculer deux suites de réels $(\mathsf{T}_k)_{1\leq k\leq n+1}$ et $(\mathsf{Y}_k)_{1\leq k\leq n+1}$ ainsi :

```
h ← (β − α)/n   // calcul du pas h
// initialisation
T₁ ← α
Y₁ ← v
// boucle de récurrence
pour k de 1 à n faire
    T_{k+1} ← T_k + h
    Y_{k+1} ← Y_k + h (f(T_k) − a(T_k) Y_k)
fin_pour
```

Y_1 est égale à $y(\alpha)$, et pour k entre 1 et n, Y_{k+1} est une approximation de :

$$y(\mathsf{T}_{k+1}) = y(\alpha + k\,h) = y\left(\alpha + k\,\frac{\beta - \alpha}{n}\right)$$

où y est la fonction solution du problème de Cauchy (P).

• • •

Par la suite, on considère le problème de Cauchy (P_6) suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y'(x) - y(x) = 0 \quad , \quad x \in I = [0; 1] \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \tag{P_6}$$

dont la solution est la fonction y définie par $y(x) = \mathrm{e}^x$.

1. Dans le cas particulier du problème de Cauchy (P_6), que deviennent les instructions

   $\mathsf{Y}_1 \leftarrow v$

   et

   $\mathsf{Y}_{k+1} \leftarrow \mathsf{Y}_k + h\,\big(f(\mathsf{T}_k) - a(\mathsf{T}_k)\,\mathsf{Y}_k\big)$

   c'est à dire, quelle est la récurrence qui permet de calculer la suite $(\mathsf{Y}_k)_{1\leq k\leq n+1}$?
2. En déduire (en fonction de n) les valeurs de Y_2, Y_3 et Y_4.
3. En calculant Y_{n+1} et $y(\beta) = y(\mathsf{T}_{n+1})$, montrer que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ est une approximation de $\mathrm{e} = \exp(1)$.

Corrigé - Examen terminal - janvier 2023

Partie 1

1. $f(x)$ est définie si et seulement si

$$x^2 + 2\,x \neq 0 \iff x\,(x+2) \neq 0 \iff \{x \neq -2 \;\; \text{ET} \;\; x \neq 0\}$$

donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\;;\;0\} =]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]-2\,;\,0\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[}$.

2.
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} = \frac{a\,(x+2) + b\,x}{x^2+2\,x} = \frac{(a+b)\,x + 2\,a}{x^2+2\,x} = \frac{x+4}{x^2+2\,x} = \frac{1 \times x + 2}{x^2+2\,x},\; \forall x \in \mathcal{D}_f$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ 2\,a & = & 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 2 \;\; \text{et} \;\; b = -1} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}}$$

3. Pour $x > 0$, les primitives de $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+2}$ sont

$$F(x) = 2\,\ln|x| - \ln|x+2| + C = \boxed{2\,\ln(x) - \ln(x+2) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

On détermine ensuite la constante C telle que $F(1) = 2$:

$$F(1) = 2\,\ln(1) - \ln(1+2) + C = -\ln(3) + C = 2 \iff \boxed{C = \ln(3) + 2}$$

Remarque : si les valeurs de a et b n'ont pas été calculées dans la question précédente, le résultat peut être donné en fonction de a et b :

$$f(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+2} \Rightarrow F(x) = \boxed{a\,\ln(x) + b\,\ln(x+2) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

On détermine ensuite la constante C telle que $F(1) = 2$:

$$F(1) = a\,\ln(1) + b\,\ln(1+2) + C = b\,\ln(3) + C = 2 \iff \boxed{C = -b\,\ln(3) + 2}$$

Partie 2

(1) A partir de $u = \sqrt{t}$, il faut trouver l'expression de t en fonction de u :

$$\sqrt{t} = u \iff \boxed{t = \varphi(u) = u^2}$$

(2) On en déduit $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \boxed{2\,u\,\mathrm{d}u}$

(3) Pour les bornes, on a $\boxed{\begin{array}{l} t = 1 \iff u = \sqrt{1} = 1 \\ t = 4 \iff u = \sqrt{4} = 2 \end{array}}$

(4)
$$A = \int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{u^2+u}\,2\,u\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{u}{u\,(u+1)}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\left[\ln|u+1|\right]_1^2 = 2\,\ln|3| - 2\,\ln|2| = \boxed{2\,\ln(3) - 2\,\ln(2)}$$

On peut aussi donner le résultat sous la forme A $= \boxed{2\,\ln(3/2)} = \boxed{\ln(9/4)}$.

Partie 3

Pour l'E.D. (E_3), on a $a(x) = -\tan(x)$ et $f(x) = x$.

(1) $a(x) = -\tan(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos(x)$.
Donc une primitive de $a(x)$ est $A(x) = \ln\big|\cos(x)\big| = \ln\big(\cos(x)\big)$ car $x \in \,]-\pi/2;\pi/2\,[$ et donc $\cos(x) > 0$.
Les solutions y_H de l'E.D. homogène associée sont donc :

$$y_H(x) = C\,\exp(-A(x)) = C\,\exp(-\ln(\cos(x))) = \frac{C}{\exp(\ln(\cos(x)))} = \boxed{\frac{C}{\cos(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

(2) Une solution particulière y_0 vérifie :

$$\forall x \in \,]-\pi/2;\pi/2\,[,\ y_0(x) = \frac{g(x)}{\cos(x)} \text{ avec } g'(x) = f(x)\,\exp(+A(x)) = x\,\exp(\ln(\cos(x))) = x\,\cos(x)$$

Pour déterminer une primitive de $g'(x) = x\,\cos(x)$, il faut effectuer une intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{rcccrcl} u(x) & = & x & \Rightarrow & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \cos(x) & \Rightarrow & v(x) & = & \sin(x) \end{array}\right.$$

donc une primitive de $g'(x)$ est $u(x)\,v(x) - H(x) = x\,\sin(x) - H(x)$
avec $H(x)$ primitive de $u'(x)\,v(x) = \sin(x)$:

$$H(x) = -\cos(x) \Rightarrow g(x) = x\,\sin(x) + \cos(x) \Rightarrow \boxed{y_0(x) = \frac{g(x)}{\cos(x)} = x\,\tan(x) + 1}$$

(3) Les solutions de l'E.D. (E_3) sont donc :

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_0(x) = \frac{C}{\cos(x)} + x\,\tan(x) + 1 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

Partie 4

1.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Soit} & y_0(x) & = & \alpha\, x\, \exp(x) \\ \Rightarrow & y_0'(x) & = & \alpha\, \exp(x) + \alpha\, x\, \exp(x) \\ \Rightarrow & y_0''(x) & = & \alpha\, \exp(x) + \alpha\, \exp(x) + \alpha\, x\, \exp(x) \\ & & = & 2\,\alpha\, \exp(x) + \alpha\, x\, \exp(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow y_0''(x) - 3\, y_0'(x) + 2\, y_0(x)$$

$$= 2\,\alpha\, \exp(x) + \alpha\, x\, \exp(x) - 3\,\Big(\alpha\, \exp(x) + \alpha\, x\, \exp(x)\Big) + 2\,\alpha\, x\, \exp(x)$$

$$= 2\,\alpha\, \exp(x) - 3\,\alpha\, \exp(x) \quad + \quad \alpha\, x\, \exp(x) - 3\,\alpha\, x\, \exp(x) + 2\,\alpha\, x\, \exp(x)$$

$$= -\alpha\, \exp(x) = \exp(x)$$

donc $\alpha = -1$ et une solution particulière est $\boxed{y_0(x) = -x\, \exp(x)}$

2. (1) L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3\,r + 2 = 0$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1 = 1^2 > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ et } r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

les solutions de l'équation homogème associée sont
$\boxed{y_H(x) = C_1\, \exp(x) + C_2\, \exp(2\,x) \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}}$

(2) Une solution particulière est $\boxed{y_0(x) = -x\, \exp(x)}$

(3) Donc les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = \boxed{C_1\, \exp(x) + C_2\, \exp(2\,x) - x\, \exp(x) \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}}$$

(4) $y'(x) = C_1\, \exp(x) + 2\,C_2\, \exp(2\,x) - \exp(x) - x\, \exp(x)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcccl} y(0) & = & C_1 + C_2 & = & 0 \\ y'(0) & = & C_1 + 2\,C_2 - 1 & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & -1 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right\}$$

Donc la solution est :

$$\boxed{y(x) = -\exp(x) + \exp(2\,x) - x\, \exp(x) = \exp(2\,x) - (x+1)\, \exp(x)}$$

Partie 5

1.
$$A_c = \int_1^c \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_1^c$$
$$= \ln|c| = \ln|c+1| - \ln|1| + \ln|2| = \boxed{\ln(c) - \ln(c+1) + \ln(2)} = \boxed{\ln\left(\frac{2\,c}{c+1}\right)}$$

2. On a l'intervalle $[a;b] = [1;6]$ et $n = 5$ donc $h = \dfrac{b-a}{n} = 1$.
Formule de la méthode des rectangles (valeur à gauche) :
$$\overline{A} = h\sum_1^k f\big(a + (k-1)\,h\big) = h\,\Big(f(a) + f(a+h) + f(a+2\,h) + \cdots + f(b-2\,h) + f(b-h)\Big)$$
L'approximation de A_6 se calcule donc ainsi :
$$\overline{A}_6 = h\,\Big(f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)\Big) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
L'expression la plus simple est $\boxed{\overline{A}_6 = \dfrac{5}{6}}$

Partie 6

1. Pour l'E.D. du problème de Cauchy (P_6), on a $a(x) = -1$, $f(x) = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $v = 1$.
Donc $h = \dfrac{\beta - \alpha}{n} = \dfrac{1}{n}$.
L'instruction $\mathsf{Y}_1 \leftarrow v$ donne $\boxed{\mathsf{Y}_1 \leftarrow 1}$
et l'instruction $\mathsf{Y}_{k+1} \leftarrow \mathsf{Y}_k + h\,\Big(f(\mathsf{T}_k) - a(\mathsf{T}_k)\,\mathsf{Y}_k\Big)$ donne $\boxed{\mathsf{Y}_{k+1} \leftarrow \mathsf{Y}_k + \dfrac{1}{n}\,\mathsf{Y}_k = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\,\mathsf{Y}_k}$
La récurrence est $\boxed{\mathsf{Y}_1 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour } k \geq 1,\ \mathsf{Y}_{k+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\,\mathsf{Y}_k}$

2. On a donc :
$$\mathsf{Y}_2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\,\mathsf{Y}_1 = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \qquad \mathsf{Y}_3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\,\mathsf{Y}_2 = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}$$
$$\mathsf{Y}_4 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\,\mathsf{Y}_3 = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}$$

3. On a donc $\boxed{y(\beta) = y(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}}$ et $\boxed{\mathsf{Y}_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}$.

En effet par récurrence on a $\mathsf{Y}_1 = 1$ et supposons que $\mathsf{Y}_k = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ alors
$$\mathsf{Y}_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\,\mathsf{Y}_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\,\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \qquad \textit{CQFD}$$
Donc pour $k = n$, on a $\mathsf{Y}_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ est une approximation de
$\mathsf{Y}_{n+1} = y(\mathsf{T}_{n+1}) = y(\alpha + n\,h) = y(\beta) = y(1) = \mathrm{e}$.