Corrigé partiel 2018

Question de cours. Soient $a, b \in \mathbf{R}$, soit $n \in \mathbf{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Les colonnes correspondant à $\neg(P \Rightarrow Q)$ et $P \wedge (\neg Q)$ coïncident. Donc l'équivalence

$$(\neg(P \Rightarrow Q)) \Longleftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$$

est une tautologie.

Exercice 2.
1. L'application f est injective.
2. L'application f est surjective.
3. L'application f est majorée.
4. L'application f est continue.

Exercice 3. On démontre la formule par récurrence sur n :
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} k(k-1) = 0 \times (-1) = 0 = \frac{(0+1)0(0-1)}{3}$. La formule est donc vraie dans ce cas.
Hérédité : On suppose la formule vérifiée pour n, on a alors

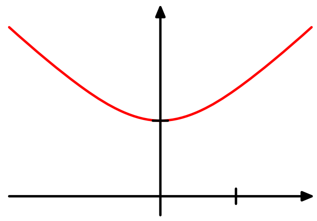
$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k-1) = \left(\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\right) + (n+1)(n+1-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + (n+1)n$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1+3)}{3} = \frac{((n+1)+1)(n+1)((n+1)-1)}{3}.$$

La formule est donc vraie pour $n+1$.

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Problème 4.



1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $x^2+1 \geqslant 0$, il existe un unique nombre réel y tel que $y^2 = x^2+1$ et $y \geqslant 0$, à savoir $\sqrt{x^2+1}$. Donc Γ est le graphe d'une fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}$.
2. (a) Soit $(x, y) \in \Gamma$. Alors $y^2 = x^2 + 1$ et $y \geqslant 0$. De $x^2 \geqslant 0$ on déduit les relations $y^2 = x^2 + 1 \geqslant 1$. Or $y \geqslant 0$ et la fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ définie par $t \mapsto t^2$ est strictement croissante. Donc la relation $y < 1$ impliquerait $y^2 < 1$, ce qui contredit l'inégalité $y^2 \geqslant 1$. Donc $y \geqslant 1$.

   (b) Comme $(0, 1) \in \Gamma$, on a $f(0) = 1$. Par la question (a),
   $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \geqslant 1.$$
   Donc 1 est le minimum des valeurs de la fonction f.
3. (a) Par la question 2.(a), on a les inégalités $y_1 \geqslant 1$ et $y_2 \geqslant 1$ donc $y_1 + y_2 \geqslant 2$ et $y_1 + y_2 \neq 0$.

   (b) On a les égalités :
   $$y_1^2 = x_1^2 + 1 \quad \text{et} \quad y_2^2 = x_2^2 + 1$$
   Donc
   $$y_2^2 - y_1^2 = x_2^2 - x_1^2.$$
   Comme $y_1 + y_2 \neq 0$, il en résulte que
   $$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$
4. Soient $x, x' \in [-M, M]$. Alors $|x| \leqslant M$ et $|x'| \leqslant M$. Par la question 2.(b), $f(x) \geqslant 1$ et $f(x') \geqslant 1$. Par la question 3.(b), comme, par définition de f, $(x, f(x)) \in \Gamma$ et $(x', f(x')) \in \Gamma$, on a la relation
   $$f(x) - f(x') = (x - x')\frac{x + x'}{f(x) + f(x')}.$$
   Il en résulte que $|f(x) + f(x')| = f(x) + f(x') \geqslant 2$ et
   $$|f(x) - f(x')| \leqslant \frac{|x| + |x'|}{2}|x - x'| \leqslant \frac{2M}{2}|x - x'| = M|x - x'|.$$

5. Comme $3 < \pi < 3.9$ et $|x - \pi| < 10^{-6}$, on a que $x, \pi \in [-4, 4]$ et par la question 4,
$$|f(x) - f(\pi)| < 4 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$
6. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < 1$. Alors $|x| \leqslant |a| + |x-a| = |a| + 1$ donc $x \in [-|a| - 1, |a| + 1]$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons
$$\eta = \min\left(1, \frac{1}{|a|+1}\varepsilon\right).$$
Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - a| < \eta$. Comme $|x - a| < 1$, par ce qui précède, $x \in [-|a| - 1, |a| + 1]$. Or $a \in [-|a| - 1, |a| + 1]$. En appliquant la question 4 avec $M = |a| + 1$ on obtient
$$|f(x) - f(a)| \leqslant (|a| + 1)|x - a|.$$
Comme $|x - a| < \frac{1}{|a|+1}\varepsilon$, on obtient que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La fonction f admet donc la limite $f(a)$ en tout $a \in \mathbf{R}$, c'est donc une fonction continue.
7. L'application f est donnée par $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. C'est donc la composée de deux fonctions continues. Elle est donc continue.
8. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R} - \{a\}$. Par la question 4, le taux d'accroissement de f est donné par
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x + a}{f(x) + f(a)}.$$
Comme f est continue et $f(a) \neq 0$ la propriété sur la limite de quotients donne que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ converge vers $\frac{2a}{2f(a)} = \frac{a}{f(a)}$ lorsque x tend vers a. Donc f est dérivable en a de dérivé $f'(a) = \frac{a}{f(a)}$.