Université Grenoble Alpes
L2 - DLST - UGA **Année 2023**

STA401 - Examen terminal - SUJET B (MIN-MAT) - 1ère session

Durée : 2 heures
Documents autorisés : Tables statistiques non annotées - Calculatrice - Fiche formulaire partiel
Formulaire des tests joint avec ce sujet

Exercice 1: ***Autour du cours*** ..... *Toutes les questions sont indépendantes*

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(20; 11^2)$.
   Sur un échantillon de 10 individus, on obtient les résultats suivants : $\sum x_i = 198$ et $\sum x_i^2 = 3930$
   Recopier et remplir le tableau avec les valeurs obtenues à partir de toutes les données de l'énoncé :

Espérance de X	Moyenne empirique de l'échantillon	Moyenne estimée sans biais de X	Variance de X	Variance empirique de l'échantillon	Variance estimée sans biais de X
?	?	?	?	?	?

2. Soit X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(20; 16)$. Déterminer la valeur a telle que :
   $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0,98$.

3. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Sur un échantillon de taille $n = 37$, on trouve une moyenne empirique de 20 et un écart type empirique 3.
   Calculer un encadrement de la moyenne μ vérifiant $P(a \leq \mu \leq b) = 0,99$. Que repésente cet intervalle ?

Exercice 2 :

On désire faire l'étude complète d'une pièce de monnaie (dont on ignore si elle est truquée ou pas), on étudie l'évènement A: “ tomber sur pile”. On note $P(A) = p$

PARTIE A

1. On construit une variable aléatoire S qui vaut 1 si A réussit, et 0 sinon. Quelle est la loi de S ?

2. On lance 400 fois la pièce. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenu sur les 400 lancers.
   a) Justifier précisément la loi exacte de X.
   b) Justifier précisément une approximation de cette loi.

3. On considère les 400 lancers et p inconnue. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer les valeurs possibles de p pour que l'on ait une probabilité supérieure à 95% d'observer le nombre de piles entre 190 et 210.

4. Si la pièce est équilibrée (donc si elle n'est pas truquée) alors on devrait obtenir $p = 1/2$.
   a) Quel devrait être le modèle de X obtenue en 2.b) dans ce cas.
   b) On a lancé 400 fois cette pièce, et on a obtenu 220 piles. Calculer un intervalle adéquat permettant de vérifier si cette pièce est truquée avec un niveau de confiance de 99%. Conclure.

PARTIE B

On veut maintenant analyser une pièce de monnaie, et déterminer **si cette pièce est équilibrée ou pas**. On lance donc 400 fois cette pièce, on obtient 220 piles.

1. Donnez une estimation de la fréquence de piles obtenue pour cet échantillon.
2. Donnez un intervalle d'une probabilité de 0,99 qui encadre la valeur de p. Interprétez cet intervalle.
3. On se demande si le pourcentage de piles est de 0,6 ou de 0,5.
   a) Poser les hypothèses du test qui minimise le risque de déclarer le nombre de piles trop grand à tort.
   b) Démontrer la règle de décision de ce test (utiliser les questions précédemment démontrées).
   c) Mettre en oeuvre ce test pour un risque $\alpha = 2\%$
   d) Calculer le risque de 2eme espèce, et la puissance du test. Conclure.
   e) Calculer la p_{valeur} de ce test. Conclure selon tous les risques possibles.

Exercice 3 :

On étudie la durée de vie X d'un composant électronique. On considère que X suit une loi normale, de moyenne μ et de variance σ^2.

PARTIE A

On prend un échantillon de 11 composants sur lesquels on mesure X :

X_1	3,28	2,94	3,5	3,07	3,04	3,12	2,85	3,05	3,32	2,89	3,11

1. Calculer des estimations sans biais de la moyenne et de la variance de X.
2. On veut tester si la variance σ^2 est égale ou différente de 0,05 au seuil de 1%. Poser les hypothèses du test, le mettre en oeuvre et conclure.
3. En ne tenant pas compte du résultat obtenu en 2), on veut tester si la moyenne est supérieure à 3 au seuil de 1%. Poser les hypothèses du test, le mettre en oeuvre et conclure.

PARTIE B

Les composants de ce premier échantillon de la partie A avaient subi un certain traitement.

Afin de savoir si ce traitement augmente la durée de vie X, on prend un second échantillon de 11 composants différents n'ayant subi aucun traitement, dont on donne les valeurs de X ci-dessous :

X_2	1,65	1,5	1,18	2,19	1,11	1,48	1,75	2,07	1,44	1,85	2,21

On veut vérifier qu'en moyenne la durée de vie X ***augmente*** avec le traitement.

1. Préciser et justifier la méthode appropriée qui permet de répondre à ce problème.
2. (a) Faire le test de comparaison des variances au seuil de α= 1%. Vous préciserez la statistique de ce test et sa loi, puis vous conclurez.
   (b) Montrer que la p_{valeur} de ce test est $0,0477$. Discuter selon les valeurs possibles de α. Que concluez-vous pour α= 1% ? [Vérifier la cohérence avec (a)].
3. Posez les hypothèses du test des moyennes qui répond au problème. Précisez la statistique de ce test et sa loi. Calculez la p_{valeur}. Conclure votre test pour un risque α= 1%, et donner votre conclusion de façon explicite.