**Travaux dirigés 2 - MAP201, thème équation différentielles**

## Exercice 1 - Une meilleure méthode d'approximation

Afin de limiter le nombre de calculs nécessaires pour atteindre une bonne approximation des solutions, il est pratique d'utiliser plutôt la méthode de Runge-Kutta.

1) Écrire une fonction prenant en entrée les paramètre suivants :
   - une fonction $f = f(t, x)$. *On rappelle que l'on peut mettre une fonction en argument d'une autre fonction, comme dans le deuxième code d'exemple, ligne 31.*
   - une condition initiale $x^{init} \in \mathbb{R}$.
   - un temps final $T^{fin} > 0$.
   - un nombre de pas $N \in \mathbb{N}^*$.

   et renvoie les tableaux $T = [t_0, t_1, \dots, t_N]$ et $X = [x_0, \dots, x_N]$ obtenus par la méthode d'Euler explicite (on pourra réutiliser l'exercice 2 du premier TD) appliquée à l'équation $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x^{init} \end{cases}$.

2) Écrire une fonction prenant en entrée les même paramètres, et qui renvoie les tableaux $T = [t_0, t_1, \dots, t_N]$ et $X = [x_0, \dots, x_N]$ où on a toujours $t_i = \frac{iT^{fin}}{N}$, mais cette fois la suite $(x_i)_{0 \le i \le N}$ est obtenue par récurrence de la manière suivante ; on pose $x_0 = x^{init}$ et $x_{i+1}$ est défini à partir de $x_i$ ainsi : on pose

$$\begin{cases} k_{i,1} = f(t_i, x_i) \\ k_{i,2} = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{i,1}\right) \\ k_{i,3} = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} k_{i,2}\right) \\ k_{i,4} = f\left(t_i + \Delta t, x_i + \Delta t\ k_{i,3}\right) \end{cases} \quad \left(\text{on rappelle que } \Delta t = \frac{T^{fin}}{N}\right)$$

   et on pose enfin

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \frac{k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4}}{6}$$

3) On prend l'équation $\dot{x} = 5x$, $x^{init} = 1$, $T^{fin} = 1$. Écrire une fonction qui prend en entrée un nombre de pas $N \in \mathbb{N}^*$ et affiche sur un même graphe les solutions obtenu avec la première méthode, la seconde méthode, et la solution explicite $t \mapsto e^{5t}$. On pensera à mettre une légende sur le graphe pour savoir qui est qui (voir le premier code d'exemple).

4) Écrire une fonction faisant le schéma d'approximation de Runge-Kutta pour un système de deux équations. Puis appliquer cela au pendule linéarisé

$$\ddot{x} + 9x = 0,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$$

   En comparant la solution trouvée avec Runge-Kutta, celle trouvée avec la méthode d'Euler, et la solution exacte $x(t) = \cos(3t)$.

   *On commencera par mettre l'équation sous la forme d'un système* $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$ *puis à écrire une fonction qui résout ce système par méthode de Runge-Kutta.*

   On pourra tracer pour plusieurs valeurs de $N$ l'erreur entre la solution approchée $(x_i)_{i=0,\dots,N}$ (donnée par une des deux méthodes) et la solution exacte.

## Exercice 2 - Modèle d'épidémie de Kermack–McKendrick

On considère une population de $S$ individus sains où l'on introduit à l'instant $t = 0$, une population de $m$ individus malades. On suit ensuite l'évolution de l'épidémie en divisant la population en trois parties distinctes :

- $x(t)$ : la population d'individus sains, qui vérifie $x(0) = S(> 0)$.
- $y(t)$ : la population d'individus malades, qui vérifie $y(0) = m(> 0)$.

- $z(t)$ : la population d'individus qui sont soit guéris et immunisés, soit décédés de la maladie. A l'instant $t = 0$ on a $z(0) = 0$.

On suppose que $x, y, z$ suivent une évolution du type

$$\begin{cases} \dot{x} = -k\frac{y}{x+y+z}x & (1) \\ \dot{y} = k\frac{y}{x+y+z}x - ly & (2) \\ \dot{z} = ly & (3) \end{cases}$$

où $k, l > 0$ sont des paramètres de la maladie.

1) Tracer le graphe de $x(t), y(t), z(t)$ en fonction de $t$, pour les paramètres suivants :

$$S = 100, m = 1, l = 4, k = 7$$

On utilisera une méthode de Runge-Kutta comme définie précédemment, avec un nombre de pas $N$ suffisamment grand. On pensera a bien annoter chaque courbe, et à afficher le graphe sur un temps suffisamment grand pour voir l'ensemble du comportement de $x, y, z$.

Décrire le tableau de variation de chaque quantité $x, y, z$, et donner une valeur limite de la limite de chaque population $x, y, z$ quand $t \to +\infty$.

On comparera aussi avec le cas où $m = 0.1, 0.01$ : comment évolue la limite de la population saine ?

2) Donner une interprétation de chaque terme du modèle. Que représentent les quantités $k, l$ ?
3) Un pic d'épidémie est un maximum local du nombre d'individus infecté. On les caractérise de la manière suivante : l'instant $t_i$ ($i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$) est un pic d'épidémie si

$$y_{i-1} \leq y_i \text{ et } y_i > y_{i+1}$$

où $(y_i)_{0 \leq i \leq N}$ est la suite d'approximation.
Dans le cas $m = 1$, combien y a-t-il de pics ? Quel est le nombre d'individus infecté au moment des pics ?
4) Refaire la même simulation, en posant cette fois $k = 3$. Quelle différence constate-t-on, dans la tableau de variation des fonctions $x, y, z$ ?

On comparera aussi avec les cas $m = 0.1, 0.01$ : comment évolue la limite de la population saine ? Combien y a-t-il de pic d'épidémie ?
*Si la variation des courbes n'est pas lisible sur un même graphe on pourra les afficher séparément avec des échelles adaptées.*

5) Montrer que la population totale $x(t) + y(t) + z(t)$ est constante (selon $t$) égale à $S + m$. Puis trouver tous les points d'équilibres de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \text{ t.q. } x+y+z = S+m\}$. *Indication : pour montrer qu'une quantité est constante, on peut montrer que sa dérivée est nulle..*
6) Expérimenter différentes valeurs de $k$ et $l$ pour trouver un critère sur la présence de pic d'épidémie.

*Conseil : on pourra fixer $l$, et faire varier $k$, pour trouver le seuil de changement de comportement, par exemple en traçant un graphe du pic du nombre de malade en fonction du paramètre $k$ que l'on fait varier dans un intervalle.*

## Exercice 3 - Modèle d'épidémie de Kermack–McKendrick (autre approche)

On reprend les notations de l'exercice ci-dessus. On admet que pour tout $t > 0$, on a $x(t), y(t), z(t) > 0$, où $x, y, z$ suivent l'équation

$$\begin{cases} \dot{x} = -k\frac{y}{x+y+z}x & (1) \\ \dot{y} = k\frac{y}{x+y+z}x - ly & (2) \\ \dot{z} = ly & (3) \end{cases}$$

avec $x(0)=S$, $y(0)=m$, $z(0)=0$.

Il est possible de combiner ces trois équations et le fait que $x(t)+y(t)+z(t)=S+m$ pour tout $t$ pour arriver au fait que

$$\dot{z}=f(z)$$

où

$$f(z)=l\left(S+m-S\exp\left(-\frac{k}{l(S+m)}z(t)\right)-z(t)\right)$$

1) Montrer que $f(0)>0$ et $f(S+m)<0$. En déduire l'existence d'une racine de $f$ entre 0 et $S+m$ (on admet que c'est la seule. question bonus : le montrer).

2) Écrire une fonction qui prend une entrée les paramètres suivants : une fonction d'un paramètre réel $f(=f(x))$, deux nombres $a<b$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés, $\epsilon>0$ un nombre petit, et qui renvoie en sortie un nombre $c$ tel que $a<c<b$ et $c$ est à distance $\epsilon$ d'une racine de $f$.
*On procédera par dichotomie grâce à l'algorithme suivant :*
   1- On pose $x\leftarrow a, y\leftarrow b$.
   2- Si $f(x)f((x+y)/2)<0$, alors on pose $y\leftarrow(x+y)/2$, sinon on pose $x\leftarrow(x+y)/2$.
   3- On répète l'étape 2 tant que $|y-x|>\epsilon$.
   4 - On renvoie $(x+y)/2$.

3) Grâce à la question précédente, calculer numériquement le nombre d'individus sains restant après une épidémie ayant pour paramètres $S=100, m=1, k=1.5, l=1$, à $10^{-3}$ près.

4) Sous les mêmes paramètres, comment évolue ce nombre lorsqu'on augmente légèrement $l$ ? Et lorsqu'on diminue ? Quel est l'interprétation de cela en terme de transmission de la maladie ?

5) Refaire les question 3,4 avec $l=2$.

*On va maintenant montrer l'équation de $z$ qui a été admise.*

6) Montrer en combinant les équations (1),(3) que pour tout $t\geq 0$ :

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}=-\frac{k}{l(x(t)+y(t)+z(t))}\dot{z}(t)$$

*On pourra utiliser les équations de $\dot{x}$ et $\dot{z}$.*

7) Intégrer l'équation ci-dessus de 0 à $t$ et en déduire que

$$\ln(x(t)/S)=-\frac{k}{l(S+m)}z(t)$$

Puis exprimer $x(t)$ en fonction de $z(t)$. *On rappelle que $x(t)+y(t)+z(t)=S+m$ pour tout $t$, comme montré dans l'exercice précédent.*

8) En combinant cette équation et l'équation (3), déduire que

$$\dot{z}(t)=l\left(S+m-S\exp\left(-\frac{k}{l(S+m)}z(t)\right)-z(t)\right)$$