Université Grenoble Alpes — **Partiel**
mat 101 — **10 nov. 2022**
durée : 2h00

Exercice n° 1. Question de cours.
Soient a, b et c trois nombres complexes. On note $P(z) = az^2 + bz + c$, $\Delta = b^2 - 4ac$ et on suppose que $a \neq 0$. Montrer que si δ est un nombre complexe vérifiant $\delta^2 = \Delta$, alors les racines de P sont les nombres z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\ .$$

Solution de l'exercice 1

Cf. poly de cours.

Exercice n° 2.

1. Mettre sous forme algébrique ($a + ib$, avec a et b réels) le nombre complexe $z = \frac{2-i}{i+6}$.
2. Montrer que $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
3. Résoudre l'équation $z^4 = -16i$ en donnant les solutions sous forme polaire, puis représenter les solutions dans le plan complexe.
4. Résoudre l'équation $z + \overline{2(z-1+i)} = 2 + i$ en l'inconnue z complexe.

Solution de l'exercice 2

1.
$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-i)(-i+6)}{(i+6)(-i+6)} \\ &= \frac{-2i+12-1-6i}{37} \\ &= \frac{11}{37} - i\frac{8}{37} \end{aligned}$$

2. Par définition, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})$, or $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$. D'où le résultat.
3. On remarque que $-16i = 2^4 e^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^4$. Dans la suite, on note $\mathbb{U}_4$ les racines quatrièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_4 = \{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\} = \{1, i, -1, -i\}\ .$$

Donc, pour tout z complexe :

$$\begin{aligned} z^4 = -16i &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{2e^{-i\frac{\pi}{8}}}\right)^4 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{2e^{-i\frac{\pi}{8}}} \in \mathbb{U}_4 \\ &\Leftrightarrow z \in \{2e^{-i\frac{\pi}{8}}, 2ie^{-i\frac{\pi}{8}}, -2e^{-i\frac{\pi}{8}}, -2ie^{-i\frac{\pi}{8}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{2e^{-i\frac{\pi}{8}}, 2e^{i\frac{3\pi}{8}}, 2e^{i\frac{7\pi}{8}}, 2e^{i\frac{11\pi}{8}}\} \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions est $\{2e^{-i\frac{\pi}{8}}, 2e^{i\frac{3\pi}{8}}, 2e^{i\frac{7\pi}{8}}, 2e^{i\frac{11\pi}{8}}\}$. Pour les placer dans le plan complexe, on remarque qu'elles sont toutes sur le cercle de centre l'origine et de rayon 2, et on utilise leurs arguments (elles forment les sommets d'un carré).

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$. Alors :

$$\begin{aligned} z + \overline{2(z-1+i)} = 2+i &\Leftrightarrow x + iy + 2(x - iy - 1 - i) = 2 + i \\ &\Leftrightarrow 3x - iy - 2 - 2i = 2 + i \\ &\Leftrightarrow 3x = 4 \text{ et } -y = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ et } y = -3 \end{aligned}$$

Où on a utilisé à l'avant dernière ligne que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales. Il y a donc une unique solution, $\frac{4}{3} - 3i$.

Exercice n° 3.
Résoudre en l'inconnue x réelle l'inéquation :

$$|-2x-1| + |x+1| \geq 3 \; .$$

Solution de l'exercice 3

On étudie d'abord le signe de $-2x-1$ et $x+1$ en fonction de x :

$$-2x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

$$x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$$

On fait ensuite une disjonction de cas.

— Si $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$, alors

$$\begin{aligned} |-2x-1| + |x+1| \geq 3 &\Leftrightarrow -2x - 1 + x + 1 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -3 \end{aligned}$$

Or si $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$, $x > -3$. Il n'y a donc pas de solution dans l'intervalle $[-1, -\frac{1}{2}]$.

— Si $x \in]-\infty, -1[$, alors

$$\begin{aligned} |-2x-1| + |x+1| \geq 3 &\Leftrightarrow -2x-1-x-1 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -3x \geq 5 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Comme $-\frac{5}{3} < -1$, l'ensemble des solutions dans $]-\infty, -1[$ est $]-\infty, -\frac{5}{3}]$.

— Si $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} |-2x-1| + |x+1| \geq 3 &\Leftrightarrow 2x+1+x+1 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$, l'ensemble des solutions dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ est $[\frac{1}{3}, +\infty[$.

En conclusion, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $]-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[$.

Exercice n° 4.

On pose

$$\mathcal{A} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y \in \mathbb{Z}\} \ ,$$

et

$$\mathcal{B} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y \in \mathbb{N}\} \ .$$

1. Montrer que $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \in \mathcal{A}$ et que $(1, \frac{5}{2}) \notin \mathcal{A}$.
2. Montrer que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in \mathcal{A} \text{ et } (y,z) \in \mathcal{A} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{A} \ .$$

3. On considère l'assertion P suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \in \mathcal{B} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{B} \ .$$

Écrire la négation de P.

4. P est-elle vraie ? Justifier.

Solution de l'exercice 4

1. Si on pose $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, on remarque que $x - y = -2$ or $-2 \in \mathbb{Z}$, donc $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \in \mathcal{A}$.
   Si on pose $(x,y) = (1, \frac{5}{2})$, on remarque que $x - y = -\frac{3}{2}$ or $-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc

$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \notin \mathcal{A}$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $(x, y) \in \mathcal{A}$ et $(y, z) \in \mathcal{A}$. Alors, $x - y \in \mathbb{Z}$ et $y - z \in \mathbb{Z}$. Or $x - z$ est égal à $(x - y) + (y - z)$ et la somme de deux entiers (relatifs) est un entier (relatif), donc $x - z$ est un entier (relatif). Donc $(x, z) \in \mathcal{A}$. On a bien montré que
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \mathcal{A} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{A} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{A}\ .$$
3. $$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \in \mathcal{B} \text{ et } (y, x) \notin \mathcal{B}\ .$$
4. Nous allons montrer que P est fausse en montrant que sa négation est vraie. Posons $(x, y) = (2, 1)$. On a $x - y = 1 \in \mathbb{N}$, donc $(x, y) \in \mathcal{B}$. De plus, $y - x = -1 \notin \mathbb{N}$ donc $(y, x) \notin \mathcal{B}$. Nous avons montré qu'il existe $(x, y) \in$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) \in \mathcal{B}$ et $(y, x) \notin \mathcal{B}$. Nous avons donc montré que la négation de P est vraie. Donc P est fausse.

Exercice n° 5.

Lorsque F est un ensemble, on note $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des sous-ensembles de F. Par exemple, une écriture de $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ en extension est la suivante :
$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}\ .$$
Dans la suite, on pose $E := \{1, 2, 3\}$. Pour tout $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on note $Q(\mathcal{C})$ l'assertion suivante :
$$\forall A \in \mathcal{C}, \forall B \in \mathcal{C},\ A \cap B \in \mathcal{C}$$
et $R(\mathcal{C})$ l'assertion suivante :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{C},\ A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{C}\ .$$

1. Écrire $\mathcal{P}(E)$ en extension.
2. Écrire la négation de $Q(\mathcal{C})$.
3. On pose
$$\mathcal{D} := \{\{x, y\};\ (x, y) \in E^2\} \cup \{\emptyset\}\ .$$
   (a) Une seule de ces assertions est vraie, laquelle (dans cette question, on ne demande pas de justification) ?
      (A) $\mathcal{D} = \emptyset$
      (B) $\mathcal{D} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1), \emptyset\}$
      (C) $\mathcal{D} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset\}$
      (D) $\mathcal{D} = \mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$

(b) $R(\mathcal{D})$ est-elle vraie ou fausse (justifier) ?

4. Montrer que pour tout $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$,

$$R(\mathcal{C}) \Rightarrow Q(\mathcal{C}) \ .$$

Solution de l'exercice 5

1. $$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \ .$$

2. $$\exists A \in \mathcal{C}, \exists B \in \mathcal{C},\ A \cap B \notin \mathcal{C}$$

3. (a) La (D).

   (b) Montrons que $R(\mathcal{D})$ est vraie. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{D}$. D'après la question précédente, $\mathcal{D} = \mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$. Donc $B \neq E$, et comme $A \subset B$, on en déduit que $A \neq E$. Or $\mathcal{D} = \mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$, donc $A \in \mathcal{D}$. On a bien montré que $R(\mathcal{D})$ est vraie.

4. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. Supposons que $R(\mathcal{C})$ est vraie.
   Soient A et B dans $\mathcal{C}$. Alors $A \cap B \subset A$. On peut donc appliquer $R(\mathcal{C})$: comme $A \cap B \in \mathcal{P}(E)$ et $A \in \mathcal{C}$, on en déduit que $A \cap B \in \mathcal{C}$. On a montré que pour tous A et B dans $\mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$. On a donc montré $Q(\mathcal{C})$.
   En résumé, on a montré $R(\mathcal{C}) \Rightarrow Q(\mathcal{C})$.

FIN