Exercices 7.2&8.2 :

Soit X le niveau de bruit causé par les avions mesuré en db. On suppose que X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma = 7db$ et μ inconnu.
On dispose de l'observation de X pour un échantillon de taille $n = 100$ et on veut décider entre deux valeurs possibles de μ soit $\mu \in \{80, 78\}$.
Dans le cas où $\mu = 80db$ la limite définie par les normes est dépassée et l'aéroport doit indemniser les riverains et dans le cas où $\mu = 78db$ la limite définie par les normes est respectée et il n'y a pas lieu d'indemniser les riverains. Donc en résumé :

- $\mu = 80$: indémnisation des riverains
- $\mu = 78$: pas d'indémnisation

On propose ici deux tests d'une hypothèse simple $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ contre l'alternative simple $\mathcal{H}_1 : \mu = \mu_1$. Le test de la question 1 correspond au choix $\mu_0 = 80$ et $\mu_1 = 78$ tandis que dans la question 2 on teste avec $\mu_0 = 78$ et $\mu_1 = 80$. ´ Le risque de première espèce est le risque que l'on peut limiter et c'est le risque de refuser $\mathcal{H}_0$ à tort (donc quand elle est vraie).

- Dans le premier test c'est le risque de refuser l'indémnisation alors que le niveau de nuisance est dépassé. C'est donc plutôt l'association de riverains qui voudra limiter ce risque.
- Dans le second test c'est le risque de refuser la non-indémnisation à tort qu'il est plus dans l'intérêt de l'aéroport de contrôler.

Donc de ce point de vue qui est celui de prendre peu de risque de rejet de $\mathcal{H}_0$ à tort on peut dire que le premier test est plutôt dans l'intérêt des riverains et le second dans celui de l'aéroport.

Par contre si on choisit plutôt d'abord $\mathcal{H}_1$ l'hypothèse que l'on voudrait voir valider de façon statistiquement significative :

- Si l'aéroport veut montrer que $\mu = 78$ avec un faible risque d'erreur (autrement dit de façon statistiquement significative) il choisira :

  $$\mathcal{H}_0 : \mu = 80 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu = 78.$$

  Autrement dit il fera le test 1.

- Si l'association des riverains veut montrer que $\mu = 80$ avec un faible risque d'erreur (autrement dit de façon statistiquement significative) il choisira :

  $$\mathcal{H}_0 : \mu = 78 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu = 80.$$

  Autrement dit il fera le test 2.

Le choix de $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ dépend vraiment du point de vue adopté pour faire le test et de ce que l'on en attend.

1) Etude du test 1 :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = 80 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu = 78.$$

La région de rejet au seuil α est donnée par $W_\alpha = \{T < -u_{1-\alpha}\}$ où $T = (\bar{X}_n - 0)\sqrt{n}/\sigma$.

A.N. : $\alpha = 0.05, u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$, $\bar{x} = 79.1$, σ_7 et $T_{calc} = (79.1 - 80) \cdot 10/7 = -1.286$.

Comme $-1.286 \notin W_{5\%} = \{T < -1.645\}$, dans un test de seuil 5% on ne refuse pas $\mu = 80$.

L'aéroport ne peut montrer avec un risque d'erreur de 5% que $\mu = 78$ c'est à dire qu'il n'a pas à indémniser les riverains et il doit donc les indemniser.

On peut à présent se poser deux questions :

- Que vaut le risque de seconde espèce du test de seuil α ? Ce risque est défini par
$$\beta = 1 - P_{\mu=78}(W_\alpha)$$
.
- Jusqu'à quel seuil α^* les données observées conduisent-elles à ne pas rejeter $\mathcal{H}_0$ (soit ne pas valider $\mathcal{H}_1$) ? α^* est la p-valeur du test et satisfait
$$T_{calc} = -u_{1-\alpha^*} \iff P(T < T_{calc}) = \alpha^*$$
.

Calcul du risque de seconde espèce :
On suppose ici que $\mathcal{H}_1 : \mu = \mu_1$ avec $\mu_1 = 78$ et $\mu_0 = 80$.
Sous $\mathcal{H}_1$,$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_1)/\sigma = T + \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma$ suit une loi normale centrée réduite, d'où :

$$\begin{aligned}\beta &= 1 - P_{\mu=\mu_1}(T < -u_{1-\alpha}) = 1 - P_{\mu=\mu_1}(T + \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma < \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma - u_{1-\alpha}) \\ &= \Phi(\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma + u_{1-\alpha}) = \Phi(u_{1-\alpha} - \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma)\end{aligned}$$

A.N : $\alpha = 0.05, u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$, $\bar{x} = 79.1$, σ_7, $\mu_1 = 78$ et $\mu_0 = 80$. $\beta = \Phi(1.645 - 10(80 - 78)/7) = \Phi(-1.212) = 11.27\%$

Le risque de seconde espèce étant plus élevé que celui de première espèce ce test privilégie $\mathcal{H}_0$ à $\mathcal{H}_1$.
Calcul de la p-valeur :
On a que
$$\alpha^* = P(T < T_{calc}) = \Phi(T_{calc}) = \Phi(-1.286) = 9.92\%$$
Donc à moins de prendre un risque de conclure à tort supérieur à 9.92% on ne peut pas conclure que les riverains n'ont pas à être pas être indemnisés. En particulier pour $\alpha = 5\%$ on retrouve bien qu'on ne peut rejeter l'indémnisation des riverains.

1) Etude du test 2 :
$$\mathcal{H}_0 : \mu = 78 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu = 80$$
La région de rejet au seuil α est donnée par $W_\alpha = \{T > u_{1-\alpha}\}$ où $T = (\bar{X}_n - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma$, puisque $\mu_0 = 78 < \mu_1$.
A.N. : $\alpha = 0.05, u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$, $\bar{x} = 79.1$, σ_7 et $T_{calc} = (79.1 - 78) \cdot 10/7 = 1.571$.

Comme $1.571 \notin W_{5\%} = \{T > 1.645\}$, dans un test de seuil 5% on ne refuse pas $\mu = 78$. L'assocation de riverains ne peut montrer avec un risque d'erreur de 5% que $\mu = 80$ c'est à dire qu'ils doivent être indemnisés par l'aéroport.
Calcul du risque de seconde espèce :
On suppose ici que $\mathcal{H}_1 : \mu = \mu_1$ avec $\mu_1 = 80$ et $\mu_0 = 78$.
Sous $\mathcal{H}_1$,$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_1)/\sigma = T + \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma$ suit une loi normale centrée réduite, d'où :

$$\begin{aligned}\beta &= P_{\mu=\mu_1}(T < u_{1-\alpha}) = P_{\mu=\mu_1}(T + \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma < \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma + u_{1-\alpha}) \\ &= \Phi(u_{1-\alpha} + \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)/\sigma)\end{aligned}$$

A.N : $\alpha = 0.05, u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$, $\bar{x} = 79.1$, σ_7, $\mu_1 = 80$ et $\mu_0 = 78$. $\beta = \Phi(1.645 + 10(78-80)/7) = \Phi(-1.212) = 11.27\%$

Calcul de la p-valeur :
On a que
$$\alpha^* = P(T > T_{calc}) = 1 - \Phi(T_{calc}) = 1 - \Phi(1.571) = 5.8\%$$
Donc on peut valider $\mu = 80$ pour tout rique de le valider à tort supérieur à 5.8%, soit de façon assez significative.

Le raisonnement sur les p-valeurs des tests permet de sortir de la contradiction produite par les deux conclusions des tests au seuil de $\alpha = 5\%$ où dans le premier test on ne pouvait pas valider $\mu = 78$ et dans le second on ne pouvait pas non plus valider $\mu = 80$.

Exercices 8.5 :
Soit X le temps de téléchargement d'un film supposée aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ inconnus.
Sur un échantillon de taille $n = 15$ de X on a observé $\sum x_i = 318.8$ et $\sum x_i^2 = 6782.7$.

1) moyenne empirique $\bar{x} = 21.25$; variance empirique $s^2 = \sum x_i^2/n - (\sum x_i/n)^2 = 0.4816$.

2) Test sur la variance σ^2 avec $\sigma_0^2 = 0.5$:
$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0$$
La région de rejet au seuil α est $W_\alpha = \{T > z_{n-1,1-\alpha/2}\} \cup \{T < z_{n-1,\alpha/2}\}$ avec $T = nS^2/\sigma_0^2$.

A.N. : $T_{calc} = 15 \cdot 0.4816/0.5 = 14.45, \alpha = 0.05$, $z_{14,0.975} = 26.12$ et $z_{14,0.025} = 5.63$. Comme $14.45 \in W_{5\%}$ on ne refuse pas σ^2 dans un test au seuil 5%.

3) On peut à présent se demndre à partir de quel risque α on pourrait refuser $\sigma^2 = 0.5$ c'est à dire calculer la p-valeur du test. Avec les tables staistiques on ne peut donner qu'un encadrement de cette valeur. Ici comme $T_{calc} > n - 1$ on l'obtient comme α^* tel que $T_{calc} = z_{n-1,1-\alpha^*/2}$.
Avec les tables on a que :
$$z_{14,0.5} = 13.34 < 14.45 < 21.06 = z_{14,0.9} \Longleftarrow 0.5 < 1 - \alpha^*/2 < 0.9 \Longleftrightarrow 0.2 < \alpha^* < 1.$$
Avec R ou une calculatrice on obtient $\alpha^* = 2(1 - P(T < T_{calc})) = 83.35\%$. Ainsi à moins de prendre un risque d'erreur supérieur à 83.35% on ne peut rejeter $\sigma^2 = 0.5$. Il est donc très raisonnable de supposer $\sigma^2 = 0.5$ pour faire un test sur μ.

4) On fait un test sur μ avec σ^2 connu et valant 0.5. Soit $\mu_0 = 21$ on teste :
$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \qquad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0.$$
Au seuil α la région de rejet est $W_\alpha = \{T > u_{1-\alpha}\}$ avec $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$.

A.N. : $T_{calc} = \sqrt{15}(21.25 - 21)/\sqrt{0.5} = 1.37$ et $u_{0.95} = 1.645$. Comme $T_{calc} \notin \{T > 1.645\}$ on ne refuse pas $\mu = 21$ au seuil $\alpha = 5\%$.

5) La p-valeur de ce test est α^* tel que
$$u_{1-\alpha^*} = T_{calc} \Longleftrightarrow \alpha^* = 1 - P(T < T_{calc}) = 1 - \Phi(1.37) = 8,5\%.$$

6) A moins de prendre un risque d'erreur supérieur à 8.5% on ne peut pas rejeter $\mu = 21$.

Exercices 8.9 :

Soit $p_0 = 40.4\%$ la proportion de voyelles dans un texte anglais. On dispose d'un échantillon de taille n de la variable X de loi de Bernoulli de paramètre inconnu p.

1) L'intervalle de fluctuation de $\bar{X}_n = F_n$ au niveau approximatif $1 - \alpha$ est donné par

$$\left[p_0 - \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}, p_0 + \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right],$$

à condition que $np_0 > 10$ et $n(1 - p_0) > 10$.

Dans la chanson Yesterday qui contient $n = 483$ lettres on a décompté 223 voyelles, soit $f_n = 46.17\%$ de voyelles. Or l'intervalle de fluctuation (utilisable car $483p_0 > 10$ et $483(1 - p_0) > 10$) est $[36.02\%, 44.78\%]$. Comme $f_n \notin [36.02\%, 44.78\%]$, on peut déclarer avec un risque de se tromper de 5% que la proportion de voyelles de la chanson Yesterday n'est pas conforme à celle habituellement observée dans un texte anglais.

2) Dans le livre de Lewis Carol où on a dénombré 49871 voyelles sur $n = 122990$ lettres on a donc $f_n = 40.55\%$ et l'intervalle de fluctuation est $[40.12\%, 40.6\%]$ (attention il est différent de l'intervalle pour $n = 483$ et est beaucoup plus précis). Ici $f_n \in [40.12\%, 40.6\%]$ donc on dira que la proportion de voyelles dans le texte de Lewis Carol est conforme à celle attendue dans un texte anglais.

3) Attention car les deux échantillons sont de tailles très différentes.