Corrigé première session 2019

Exercice 1. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=j}^{3}\frac{k}{j}\right)$,

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right)$,

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right)$ en fonction de $n\in\mathbf{N}$.

Solution de l'exercice 1. 1. (1 point, 0,5 si bonne stratégie mais erreur de calcul)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=j}^{3}\frac{k}{j}\right) &= \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{k}{1}\right)+\left(\sum_{k=2}^{3}\frac{k}{2}\right)+\left(\sum_{k=3}^{3}\frac{k}{3}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}\right)+\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{3}\right)\\ &= 1+2+3+1+1,5+1=9,5.\end{aligned}$$

2. (1 point, 0,5 si bonne stratégie mais erreur de calcul)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right) &= \left(\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}2^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}2^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}2^k\right)\\ &= \left(1\times2^0+1\times2^1\right)+\left(1\times2^0+2\times2^1+1\times2^2\right)\\ &\quad+\left(1\times2^0+3\times2^1+3\times2^2+1\times2^3\right)\\ &= (1+2)+(1+4+4)+(1+6+12+8)\\ &= 3+9+27=39.\end{aligned}$$

3. (2 points : 1 pour l'identité du binôme et 1 pour la somme géométrique)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k1^{j-k}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(2+1)^j = \sum_{j=1}^{n}3^j\\ &= \frac{3^{n+1}-3}{3-1} = \frac{3^{n+1}-3}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2. Écrire une assertion mathématique traduisant l'affirmation : "Tout nombre réel peut être approché à 10^{-5} près par un nombre rationnel."

Solution de l'exercice 2. (1 point, pas de pénalité si l'inégalité est stricte ou large, 0,5 si les quantificateurs sont corrects)

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Q}, |x-y| \leq 10^{-5}.$$

Exercice 3. Pour chaque assertion ci-dessous, traduire l'assertion par une phrase française. Écrire la négation sous forme d'assertion. Dire si l'assertion initiale est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, |x-y| < \frac{1}{2}$,
2. $\forall x \in [0,1], (|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$,
3. $\forall z \in \mathbf{C}, \exists a, b \in \mathbf{Z}, |z-a-ib| < 2$.

Solution de l'exercice 3.

1. (3 points : 0,5 pour la traduction, 1 pour la négation, à savoir 0,5 pour les quantificateurs et 0,5 pour nier l'inégalité, 1,5 pour la preuve)

   Pour tout réel x, il existe un entier relatif y tel que $|x-y|$ est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

   La négation est

   $$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Z}, |x-y| \geq \frac{1}{2}.$$

   L'assertion initiale est fausse. Démontrons sa négation.

   Prenons $x = \frac{1}{2}$. Soit $y \in \mathbf{Z}$ quelconque. Alors si $y \geq 1$ on a $|\frac{1}{2}-y| = y - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Et si on a $y \leq 0$ on a $|\frac{1}{2}-y| = \frac{1}{2} - y \geq \frac{1}{2}$. Dans tous les cas, on a bien $|\frac{1}{2}-y| \geq \frac{1}{2}$, et donc on a démontré la négation.

2. (3 points : 0,5 pour la traduction, 1 pour la négation, 1,5 pour la preuve)

   Pour tout réel x, on a $|x| \leq \frac{1}{2}$ ou $|x-1| \leq \frac{1}{2}$.

La négation est

$$\exists x \in [0,1], (|x| > \frac{1}{2}) \wedge (|x-1| > \frac{1}{2}).$$

L'assertion initiale est vraie. Démontrons-la.

Soit $x \in [0,1]$ quelconque. Séparons deux cas.

Cas 1 : si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, alors on a $|x| = x \leq \frac{1}{2}$, et donc $(|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$.

Cas 2 : si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, alors on a $|x-1| = 1-x < 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, et donc $(|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$.

Dans les deux cas, on a bien démontré $(|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$.

3. (3 points : 0,5 pour la traduction, 1 pour la négation, 1,5 pour la preuve)

Pour tout complexe z, il existe deux entiers relatifs a et b tels que $|z-a-\mathrm{i}b| < 2$.

La négation est

$$\exists z \in \mathbf{C}, \forall a, b \in \mathbf{Z}, |z-a-\mathrm{i}b| \geq 2.$$

L'assertion initiale est vraie. Démontrons-la.

Soit $z \in \mathbf{C}$ quelconque. Alors la forme algébrique de z s'écrit $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Posons a la partie entière de x et b la partie entière de y. Alors on a $|x-a| < 1$ et $|y-b| < 1$. On a alors $|z-a-\mathrm{i}b| = |(x-a) + \mathrm{i}(y-b)| \leq |x-a| + |\mathrm{i}(y-b)| = |x-a| + |y-b| < 1+1 = 2$, grâce à l'inégalité triangulaire.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes, en mettant la ou les solutions sous forme algébrique.

1. $z^2 - 2\mathrm{i}z - 2 = 0$,
2. $z^2 - (3+\mathrm{i})z + 3\mathrm{i} = 0$,
3. $z^4 + 4 = 0$.

Solution de l'exercice 4. 1. (1 point)

Posons $\Delta = (-2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times (-2) = -4 - (-8) = 4$. Posons alors $\delta = 2$, de sorte que $\delta^2 = \Delta$. Les solutions de l'équation sont alors $\frac{2i+2}{2} = 1+i$ et $\frac{2i-2}{2} = -1+i$.

2. (2 points : 0,5 pour Δ, 1 pour δ et 0,5 pour la fin)

Posons $\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(3\mathrm{i}) = 8 + 6\mathrm{i} - 12\mathrm{i} = 8 - 6\mathrm{i}$.

On cherche alors δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Si on cherche δ sous la forme $x + \mathrm{i}y$, alors on a $x^2 - y^2 = 8, 2xy = -6$, et $x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, d'où $2x^2 = 18$, et donc $x = \pm 3$. On obtient alors $y = \pm 1$, et comme x et y sont de signes opposés, on peut prendre $\delta = 3 - \mathrm{i}$. Les solutions de l'équation sont donc $\frac{3+\mathrm{i}+3-\mathrm{i}}{2} = 3$ et $\frac{3+\mathrm{i}-3+\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$.

3. (2 points : 1 pour la forme trigo, et 1 pour la forme algébrique, ou pour la 2e solution 1 point pour $\pm 2\mathrm{i}$ et 1 point pour la fin)

   L'équation se réécrit $z^4 = -4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, dont les solutions sont les nombres $\sqrt[4]{4}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}+\frac{k\mathrm{i}2\pi}{4}}$ pour $k = 0, 1, 2$, et 3. En simplifiant, cela donne $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}3\pi}{4}}$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}5\pi}{4}}$, et $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}7\pi}{4}}$, ce qui sécrit sous forme algébrique $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + \mathrm{i}$, $\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \mathrm{i}$, $\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 - \mathrm{i}$, et $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - \mathrm{i}$.

   Une autre solution est de d'abord résoudre $y^2 = -4$, qui a pour solutions $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$, puis de résoudre $z^2 = 2\mathrm{i}$ et $z^2 = -2\mathrm{i}$ séparément. On trouve $1 + \mathrm{i}$ et $-1 - \mathrm{i}$ pour la première, et $-1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$ pour la seconde.

Exercice 5. Linéariser l'expression $\cos(x)^4$ (c'est-à-dire l'écrire comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'expressions de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, avec $k \in \mathbf{N}$).

Solution de l'exercice 5. (3 points : 1 point pour l'équation d'Euler, 1 point pour la formule du binôme, 1 point pour la formule finale)

$$\begin{aligned}
\cos(x)^4 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}((e^{\mathrm{i}x})^4 + 4(e^{\mathrm{i}x})^3(e^{-\mathrm{i}x}) + 6(e^{\mathrm{i}x})^2(e^{-\mathrm{i}x})^2 + 4(e^{\mathrm{i}x})(e^{-\mathrm{i}x})^3 + (e^{-\mathrm{i}x})^4) \\
&= \frac{1}{16}(e^{\mathrm{i}4x} + 4e^{\mathrm{i}2x} + 6 + 4e^{-\mathrm{i}2x} + e^{-\mathrm{i}4x}) \\
&= \frac{1}{16}(e^{\mathrm{i}4x} + e^{-\mathrm{i}4x} + 4e^{\mathrm{i}2x} + 4e^{-\mathrm{i}2x} + 6) \\
&= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) \\
&= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Exercice 6. On considère l'application $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$.

1. Soit $x, y \in \mathbf{R}_+$. Simplifier la fraction $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ en utilisant une identité remarquable.

2. Trouver un réel M strictement positif tel que, pour tous $x, y \in [1, 2]$, on a $\left|\frac{x^4 - y^4}{x - y}\right| \geq M$.

3. En déduire une constante $C \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tous $x, y \in [1, 16]$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$
4. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1, 16]$ est continue.

Solution de l'exercice 6.

1. (1 point)
On a $x^4 - y^4 = (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$, d'où $\dfrac{x^4-y^4}{x-y} = x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
2. (1 point)
Pour $x, y \in [1, 2]$, on a $x, y \geq 1$, donc $x^3 \geq 1, x^2y \geq 1, xy^2 \geq 1$, et $y^3 \geq 1$. Par conséquent on a $\left|\dfrac{x^4-y^4}{x-y}\right| = |x^3+x^2y+xy^2+y^3| \geq 4$.
3. (1 point)
Soit $x, y \in [1, 16]$. Alors on a $f(x), f(y) \in [1, 2]$. D'après la question précédente on a $\left|\dfrac{f(x)^4 - f(y)^4}{f(x)-f(y)}\right| \geq 4$, et donc $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|f(x)^4 - f(y)^4| = \frac{1}{4}|x-y|$. On peut donc prendre $C = \frac{1}{4}$.
4. (2 points : 1 pour l'assertion, 1 pour la démonstration. On s'adapte à la constante de 3, mais si ce n'est pas $\frac{1}{4}$ qui est pris)
La continuité de la restriction de f à l'intervalle $[1, 16]$ se traduit par l'assertion
$$\forall x \in [1, 16], \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in [1, 16], (|x-y| < \eta) \implies (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$
Prouvons-la. Soit $x \in [1, 16]$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = 4\varepsilon$. Soit $y \in [1, 16]$ tel que $|x-y| < \eta$. Alors d'après la question précédente, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y| < \frac{1}{4}\eta = \frac{1}{4}4\varepsilon = \varepsilon$, ce qui conclut.

Exercice 7. On travaille dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère affine orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(2, 4, -3)$, $(4, 3, -4)$, $(2, 3, -2)$,

1. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan contenant les points A, B, C. Donner une équation cartésienne (aussi appelée équation implicite) de $\mathscr{P}$.
3. Soit D le point de coordonnées $(-1, -1, -1)$.
Le point D appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
4. Soit M de coordonnées (x, y, z) un point quelconque de l'espace affine.
Déterminer la distance de M à $\mathscr{P}$, notée $d(M, \mathscr{P})$, et la distance de M à D, notée $|MD|$.

Solution de l'exercice 7. 1. (1 point)

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2,-1,-1)$ et le vecteur $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(0,-1,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (ce qu'on peut vérifier en voyant que le déterminant $2\times(-1)-(-1)\times 0=-2$ est non nul). Par conséquent les points A,B,C ne sont pas alignés.

2. (2 points : 1 pour la formule, qui peut être donnée par cœur, et 1 pour le calcul)

Le plan $\mathscr{P}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= \{D \mid \vec{AB},\vec{AC},\vec{AD} \text{ sont coplanaires.}\}\\
&= \{D \mid \text{Dét}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid \text{Dét}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}((2,-1,-1),(0,-1,1),(x-2,y-4,z+3))=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid (x-2)(-1-1)+(y-4)(0-2)+(z+3)(-2+0)=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid -2(x-2)-2(y-4)-2(z+3)=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid -2x-2y-2z+6=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid x+y+z-3=0\}.
\end{aligned}$$

3. (1 point)

Comme les coordonnées de D vérifient $-1-1-1-6=-6\neq 0$, le point D n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

4. (4 points : 1 pour le vecteur normal, 1 pour la formule de la distance, 1 pour le calcul, et 1 pour la distance MD)

D'après l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, le vecteur $\vec{n}=(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Le point A appartient à $\mathscr{P}$. Par conséquent la distance d'un point M de coordonnées (x,y,z) à $\mathscr{P}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned}
d(M,\mathscr{P}) &= \frac{|\vec{AM}\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||}\\
&= \frac{|(x-2,y-4,z+3)\cdot(1,1,1)|}{||\vec{(1,1,1)}||}\\
&= \frac{|x-2+y-4+z+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\\
&= \frac{|x+y+z-3|}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

D'autre part la distance de M à D est donnée par
$$|MD| = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2} = \sqrt{x^2+y^2+y^2+2x+2y+2z+3}.$$

Exercice 8. Trouver une formule sans symbole $\sum$ pour la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos(k)$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$, puis montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \cos(k) \right| < M.$$

Solution de l'exercice 8. (3 points : 0,5 pour la partie réelle, 0,5 pour la somme géométrique, 1 pour l'inégalité triangulaire, 1 pour la conclusion que le dernier terme est indépendant de n)

On a
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k) = \sum_{k=0}^{n} \Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right) = \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1}\right).$$
On peut simplifier cette formule, mais ce n'est pas nécessaire pour la suite : soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque, on a alors
$$\left| \sum_{k=0}^{n} \cos(k) \right| = \left| \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1}\right) \right| \leq \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1} \right| = \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)}-1|}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1|} \leq \frac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1|}.$$
On peut donc prendre $M = \dfrac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1|}$.