Corrigé première session 2017

Question de cours. L'image de A par f est

$$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \} = \{ f(x),\ x \in A \}.$$

L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

Exercice 1.

1. Supposons $g \circ f$ injective, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, \quad g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y.$$

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors on a l'égalité $g(f(x)) = g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Par hypothèse, cela implique $x = y$. Donc f est injective.

2. Supposons maintenant que $g \circ f$ est surjective, c'est-à-dire

$$\forall z \in G, \exists x \in E, \quad z = g \circ f(x).$$

Soit $z \in G$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Posons $y = f(x)$ Alors $y \in F$ et $z = g(y)$. Donc g est surjective.

Exercice 2. Démontrons par récurrence sur n la validité pour $n \in \mathbf{N}$ de l'assertion

$$P(n) : \qquad \sum_{k=0}^{n} k5^k = \frac{4n-1}{16} 5^{n+1} + \frac{5}{16}.$$

Initialisation Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} k5^k = 0 \times 5^0 = 0 = -\frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{4 \times 0 - 1}{16} 5^{0+1} + \frac{5}{16}$$

ce qui démontre $P(0)$.
Hérédité Supposons $P(n)$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k5^k = \left(\sum_{k=0}^{n} k5^k \right) + (n+1)5^{n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, cela est égal à

$$\begin{aligned}\frac{4n-1}{16}5^{n+1}+\frac{5}{16}+(n+1)5^{n+1} &= \frac{4n-1+16n+16}{16}5^{n+1}+\frac{5}{16}\\ &= \frac{20n+15}{16}5^{n+1}+\frac{5}{16}=\frac{4(n+1)-1}{16}5^{n+2}+\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve P(n+1). Par récurrence on obtient que $P(n)$ vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 3. 1. Si $x \in [0,1]$, alors $0 \leqslant x \leqslant \pi$, donc $0 \leqslant \sin(x)$ Par conséquent l'inégalité $\sin(x) \leqslant x$ équivaut dans ce cas à l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Si $x \geqslant 1$ alors comme $\sin(x) \in [-1,1]$, on a les inégalités $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant |x|$.

Enfin, si $x \leqslant 0$, alors $-x \geqslant 0$ et les cas précédents donnent

$$|\sin(x)| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|.$$

Donc dans tous les cas, $|\sin(x)| \leqslant |x|$ ce qui prouve l'assertion demandée.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon$, alors $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-0| < \eta$ on a, par la question 1, les inégalités

$$|\sin(x) - 0| \leqslant |x| < \eta = \varepsilon.$$

Donc la fonction sinus admet la limite $\sin(0) = 0$ en 0.

3. (a) Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos(x) \geqslant 0$. Par conséquent

$$\cos(x) = \sqrt{\cos(x)^2} = \sqrt{1-\sin(x)^2}.$$

(b) L'application $x \mapsto 1-x^2$ est polynomiale et donc continue. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue. Donc, par le théorème sur la limite d'applications composées et la question 2, $\cos(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

4. (a) La relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ s'écrit

$$\begin{aligned}&\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\\ &= (\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))\\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))\end{aligned}$$

ce qui fournit, en considérant la partie imaginaire, l'égalité

$$\sin(\theta+\theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta').$$

(b) Soit $a \in \mathbf{R}$. Par la question précédente, si $t \in \mathbf{R}$,

$$\sin(t) = \sin(a)\cos(t-a) + \cos(a)\sin(t-a).$$

Par la question 2, $\sin(t-a)$ tend vers 0 lorsque t tend vers a et par la question 3.(b), $\cos(t-a)$ tend vers 1 lorsque t tend vers a. Donc $\sin(t)$ tend vers $\sin(a)$ lorsque t tend vers a. Comme cela vaut pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'application sinus est continue.

Exercice 4. 1. Le module de $-3-4i$ est donné par

$$|-3-4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Donc si $x+iy$ est une racine carrée de $-3-4i$, alors les nombres réels x et y vérifient les conditions

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2-y^2 = -3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Donc $(x,y) = (1,-2)$ ou $(x,y) = (-1,2)$. Les racines carrées de $-3-4i$ sont donc $1-2i$ et $-1+2i$.

2. Calculons le discriminant pour l'équation $z^2-3z+3+i = 0$. Il vaut

$$\Delta = 9-4(3+i) = -3-4i.$$

Donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{3-(-1+2i)}{2} = 2-i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+(-1+2i)}{2} = 1+i$$

Exercice 5. 1. Les vecteurs ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} : (3-1, 2-1, 1-1) = (2,1,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} : (1-1, 1-1, 3-1) = (0,0,2).$$

2. On calcule les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$(1\times 2 - 0\times 0, 0\times 0 - 2\times 2, 2\times 0 - 1\times 0) = (2,-4,0).$$

Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

3.
$$d(C,(AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2.$$

4. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$. Celui-ci admet donc une équation de la forme
$$2x - 4y + d = 0.$$
Comme A appartient à ce plan, on a $2 - 4 + d = 0$ et donc $d = 2$. Une équation implicite de $\mathscr{P}$ est donc $2x - 4y + 2 = 0$ ou encore $x - 2y + 1 = 0$. Comme $-1 - 2 \times 0 + 1 = 0$, le point D appartient au plan $\mathscr{P}$.
5. Comme les points A, B, C et D appartiennent au plan $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$ sont tous les deux orthogonaux à ce plan. Ils sont donc colinéaires. En calculant les coordonnées de $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$, on constate qu'il sont en fait égaux.
6. En remplaçant dans l'équation implicite de $\mathscr{P}$ les coordonnées données par les équations paramétriques de $\mathscr{D}$, on obtient l'équation
$$(1 + \lambda) - 2(4 + 2\lambda) + 1 = 0$$
Soit $\lambda = -2$. L'unique point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ a donc pour coordonnées
$$(1 - 2, 4 - 4, 1 - (-2)) = (-1, 0, 3),$$
c'est donc le point D.