Chapitre III : Applications linéaires

Comme dans le chapitre précédent, on suppose pour simplifier que tous les espaces vectoriels sont sur le corps $K = \mathbb{R}$.

<u>Déf:</u> Soient E, F deux espaces vectoriels réels. On dit qu'une application $\varphi : E \to F$ est <u>linéaire</u> si elle possède les propriétés suivantes:

i) $\forall\, u, v \in E :\ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;

ii) $\forall\, u \in E\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K} :\ \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$.

<u>Remarques:</u>

1) On peut rassembler les conditions i) et ii) en une seule :

$$\forall\, u, v \in E\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} :\ \varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v).$$

Pour vérifier que cette condition est suffisante, on utilise :

2) Si φ est linéaire, alors $\underline{\varphi(0_E) = 0_F}$ et $\underline{\varphi(-u) = -\varphi(u)}$ $\forall u \in E$.

En effet :

- $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0) \implies \varphi(0) = 0$
- $\varphi(-u) = \varphi((-1)\cdot u) = (-1)\cdot\varphi(u) = -\varphi(u)$ $\forall u \in E$.

3) Si $\varphi : E \to F$ est linéaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall\, v_1, \dots, v_n \in E$ $\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ on a :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i).$$

La démonstration est une simple récurrence sur n. Ainsi, l'image par φ d'une <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$.

<u>Terminologie</u> : Une application linéaire est un <u>morphisme d'espaces vectoriels</u>. Comme dans le cas des groupes, on dit que :

- Une application linéaire $\varphi : E \to E$ est un <u>endomorphisme</u>
- Une application linéaire bijective $\varphi : E \to F$ est un <u>isomorphisme</u>
- une application linéaire bijective $\varphi : E \to E$ est un <u>automorphisme</u>.

On dit par ailleurs qu'une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une <u>forme linéaire</u> sur E. (Cas particulier où $F = \mathbb{R}^1$)

<u>Exemples</u>

a) Une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire ssi $\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(x) = ax \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- si $\varphi(x) = ax$, on vérifie immédiatement que φ est linéaire ;
- si φ est linéaire, on pose $a = \varphi(1) \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(x) = \varphi(1 \cdot x) = \varphi(x \cdot 1) = x\,\varphi(1) = ax.$$

b) Soit X un ensemble non vide et $E = \mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$.

Si $x_0 \in X$, l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(x_0)$ est une forme linéaire sur E.

1) <u>Opérations sur les applications linéaires</u>

<u>Prop</u> : Soient E, F, G des espaces vectoriels réels et $\varphi : E \to F$, $\psi : F \to G$ des applications linéaires. Alors l'application composée $\psi \circ \varphi : E \to G$ est linéaire.

<u>Dém</u> : $\forall u, v \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$(\psi \circ \varphi)(\lambda u + v) = \psi(\varphi(\lambda u + v)) = \psi(\lambda \varphi(u) + \varphi(v)) = \lambda \psi(\varphi(u)) + \psi(\varphi(v))$$
$$= \lambda (\psi \circ \varphi)(u) + (\psi \circ \varphi)(v). \quad \square$$

<u>Prop:</u> Soient E, F des espaces vectoriels réels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors l'application réciproque $\psi = \varphi^{-1} : F \to E$ est encore linéaire.

<u>Dém:</u> Soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme φ est bijective, il existe $\hat{u}, \hat{v} \in E$ <u>uniques</u> t.q. $\varphi(\hat{u}) = u$, $\varphi(\hat{v}) = v$. Ainsi

$$\varphi(\lambda\hat{u} + \hat{v}) = \lambda\varphi(\hat{u}) + \varphi(\hat{v}) = \lambda u + v, \text{ donc}$$
$$\psi(\lambda u + v) = \lambda\hat{u} + \hat{v} = \lambda\psi(u) + \psi(v) : \psi \text{ est linéaire. } \square$$

Dans la situation ci-dessus, on dit que φ est un <u>isomorphisme</u> de E sur F, et que les espaces vectoriels E, F sont donc <u>isomorphes</u>.

<u>Illustration:</u> Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \end{aligned} \qquad (*)$$

Alors φ est linéaire, et:

i) φ est <u>injective</u> ssi la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est <u>libre</u>;
ii) φ est <u>surjective</u> ssi la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est <u>génératrice</u>
iii) φ est <u>bijective</u> ssi la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une <u>base de E</u>.

En effet:

i) φ injective $\Rightarrow \varphi^{-1}(\{0\}) = 0 \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ libre
$(v_1, \dots, v_n)$ libre $\Rightarrow \{$si $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu)$, alors $\varphi(\lambda - \mu) = 0$ donc $\lambda - \mu = 0\} \Rightarrow \varphi$ injective

ii) évident par définition iii) Suit de i) et ii). $\square$

Corollaire: Tout espace vectoriel réel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Dém: Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ définie par $(*)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E. □

Remarque: Supposons que $\varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, et soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_m)$ une famille de vecteurs de E. Notons $\mathcal{V}' = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_m))$ la famille image dans F. Alors :

- $\mathcal{V}$ est <u>libre</u> ssi $\mathcal{V}'$ est <u>libre</u>
- $\mathcal{V}$ est <u>génératrice</u> dans E ssi $\mathcal{V}'$ est <u>génératrice</u> dans F
- $\mathcal{V}$ est une <u>base de E</u> ssi $\mathcal{V}'$ est une <u>base de F</u>.

Vérifier !

En particulier, deux espaces vectoriels E, F de dimension finie <u>sont isomorphes ssi $\dim(E) = \dim(F)$</u>. En effet :

a) Si $\dim(E) = \dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$, il existe (corollaire ci-dessus) des isomorphismes $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ et $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow F$. Ainsi $\psi \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme.

b) Si $\varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, et si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, alors $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ est une base de F, donc $\dim(E) = \dim(F)$.

Prop. Si E, F sont deux espaces vectoriels réels, l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel réel, muni des opérations :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}(E,F) : \quad (\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) \quad \forall u \in E$$
$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F)\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad (\lambda \varphi)(u) = \lambda \varphi(u) \quad \forall u \in E. \qquad (**)$$

Dém : On vérifie aisément que les applications $\varphi+\psi$ et $\lambda\varphi$ définies par (**) sont linéaires. On a donc une addition interne et une multiplication externe sur $\mathcal{L}(E,F)$, et les propriétés d'espace vectoriel sont faciles à vérifier. □

2) Sous-espaces, noyau et image

Prop : Soient E, F deux espaces vectoriels réels, et $\varphi : E \to F$ une application linéaire.

a) Si $E' \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors son image par φ

$$\varphi(E') := \{\varphi(u) \in F \,;\, u \in E'\}$$

est un sous-espace vectoriel de F.

b) Si $F' \subset F$ est un sous-espace vectoriel, alors son image réciproque par φ

$$\varphi^{-1}(F') := \{u \in E \,;\, \varphi(u) \in F'\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

⚠ L'image réciproque (appelée aussi préimage) est définie même si φ n'est pas un isomorphisme ! Mais si φ est bijective, alors la préimage $\varphi^{-1}(F')$ coïncide avec l'image de F' par l'application réciproque $\varphi^{-1} : F \to E$.

Dém :

a) Soient $v_1, v_2 \in \varphi(E')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe $u_1, u_2 \in E'$ t.q. $\varphi(u_1) = v_1$, $\varphi(u_2) = v_2$. Comme E' est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda u_1 + u_2 \in E'$ et $\varphi(\lambda u_1 + u_2) = \lambda\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda v_1 + v_2 \Rightarrow \lambda v_1 + v_2 \in \varphi(E')$.

b) Soient $u_1, u_2 \in \varphi^{-1}(F')$, de sorte que $v_1 := \varphi(u_1) \in F'$ et $v_2 := \varphi(u_2) \in F'$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(\lambda u_1 + u_2) = \lambda\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda v_1 + v_2 \in F'$ (car F' sous-espace de F), donc par définition $\lambda u_1 + u_2 \in \varphi^{-1}(F')$. □

Deux cas particuliers ($E' = E$ et $F' = \{0\}$) jouent un rôle important et justifient la définition suivante:

<u>Déf:</u> Soient E, F deux espaces vectoriels réels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On appelle:

- <u>noyau de φ</u> le sous-espace
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\}) = \{u \in E \,;\, \varphi(u) = 0\} \subset E.$$
- <u>image de φ</u> le sous-espace
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(E) = \{\varphi(u) \in F \,;\, u \in E\} \subset F.$$

<u>Prop:</u> Une application linéaire $\varphi : E \to F$ est

i) injective ssi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$

ii) surjective ssi $\mathrm{Im}(\varphi) = F$.

<u>Dém:</u> Le second point est évident par définition; montrons le premier.

- Comme φ est linéaire, on a nécessairement $\varphi(0) = 0$. Si φ est injective, il n'existe aucun $u \in E, u \neq 0$ t.q. $\varphi(u) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
- Supposons que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Si $u, v \in E$ sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors $\varphi(u-v) = \varphi(u) - \varphi(v) = 0$, donc $u - v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, i.e. $u - v = 0$. Ainsi φ est injective. □

<u>Exemple:</u> Si φ est l'application linéaire $(*)$ en p.36, alors:

- $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$;
- $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \,;\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \right\}$.

$\mathrm{Im}(\varphi) = E$ ssi $(v_1, \ldots, v_n)$ génératrice; $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ssi $(v_1, \ldots, v_n)$ libre.

3) Rang d'une application linéaire

Déf : Soient E, F des espaces vectoriels réels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On dit que φ est de rang fini si $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace de F de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de φ l'entier naturel

$$\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \in \mathbb{N}.$$

Bien sûr, si $\dim(F) < \infty$, toute application linéaire $\varphi : E \to F$ est de rang fini, et on a : φ surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = F \Leftrightarrow \mathrm{rang}(\varphi) = \dim(F)$.
Il est moins évident que toute application linéaire $\varphi : E \to F$ est de rang fini si $\dim(E) < \infty$, mais on a l'énoncé important suivant :

Proposition (théorème du rang)
Soient E, F deux espaces vectoriels réels avec $\dim(E) < \infty$. Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, alors φ est de rang fini et

$$\mathrm{rang}(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E). \qquad (**)$$

Dém : Notons $n = \dim(E)$ et $k = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) \in \{0, \dots, n\}$.
Par le théorème de la base incomplète, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, si $k \geq 1$, $(e_1, \dots, e_k)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. On prétend que la famille $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ où $v_j = \varphi(e_j)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Rem : Il n'y a rien à montrer si $k = n$, car alors $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E)$
$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = E \Leftrightarrow \varphi \equiv 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(\varphi) = 0$.
On suppose donc dans la suite que $k < n$.

- La famille $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ est libre dans F.

Supposons en effet que $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ pour certains $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Alors, en notant $w = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$, on a :

$$\varphi(w) = \varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \implies w \in \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Comme $(v_1, \dots, v_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, il existe $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ t.q.

$$w = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i \qquad (w = 0 \text{ si } k = 0).$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = w - w = 0$, donc

$\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$ et $\underline{\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0}$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E.

- La famille $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ engendre $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Soit $v \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Il existe donc $w \in E$ t.q. $\varphi(w) = v$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut écrire $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ pour certains $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$v = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i$$

car $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$ et $\varphi(e_j) = v_j$ pour $j = k+1, \dots, n$.

On a ainsi montré que $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Alors
$$\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n - k \qquad (\text{vrai aussi si } k=0 \text{ ou } k=n)$$

$$\implies \mathrm{rang}(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = (n-k) + k = n = \dim(E). \ \square$$

Remarque : Par les mêmes arguments, on montre aussi que, si $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont de dimension finie, alors $\dim(E) < \infty$ et $(**)$ est vrai.
En effet : si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ dans E
$(v_1, \ldots, v_\ell)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ dans F
alors $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_\ell)$ est une base de E, où $\varphi(f_j) = v_j$, $j = 1, \ldots, \ell$.

Corollaire 1 : Soient E, F deux espaces vectoriels réels avec $\dim(E) = \dim(F) < \infty$. Si $\varphi : E \to F$ est linéaire, alors

φ injective $\iff$ φ surjective $\iff$ φ est un isomorphisme.

⚠ L'hypothèse $\dim(E) = \dim(F)$ est cruciale dans cet énoncé !

Dém : Si $n = \dim(E) = \dim(F)$, alors :

$$\varphi \text{ injective} \iff \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0 \underset{\dim(E)=n}{\overset{(**)}{\iff}} \mathrm{rang}(\varphi) = n \underset{}{\overset{\dim(F)=n}{\iff}} \varphi \text{ surjective.} \quad \square$$

Corollaire 2 : Soit E un espace vectoriel réel. Si F_1, F_2 sont des sous-espaces de E de dimension finie, alors $F_1 + F_2$ est aussi de dimension finie, et on a :

$$\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

Dém : Notons $n_1 = \dim(F_1)$, $n_2 = \dim(F_2)$. On peut supposer que $n_1, n_2 \geq 1$, sans quoi la conclusion est évidente.

a) Le produit cartésien $F_1 \times F_2$ muni des opérations

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) ; \quad \lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$$

est un <u>espace vectoriel de dimension m_1+m_2</u>. En fait, si

- $(e_1, \dots, e_{m_1})$ est une base de F_1
- $(f_1, \dots, f_{m_2})$ est une base de F_2

alors $((e_1,0), \dots, (e_{m_1},0), (0,f_1), \dots, (0,f_{m_2}))$ est une base de $F_1 \times F_2$.

b) On considère l'application linéaire

$$\varphi : F_1 \times F_2 \longrightarrow E$$
$$(u_1,u_2) \longmapsto u_1+u_2 .$$

On a :

- $\mathrm{Im}(\varphi) = F_1 + F_2$ (par définition de la somme de sous-espaces)
- $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(u_1,u_2) \in F_1 \times F_2 \,;\, u_1+u_2 = 0\}$
$$= \{(u,-u) \in F_1 \times F_2 \,;\, u \in F_1 \cap F_2\}.$$

L'application $\psi : F_1 \cap F_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi)$, $u \longmapsto (u,-u)$ est un isomorphisme,

donc $\dim \ker(\varphi) = \dim(F_1 \cap F_2)$.

Par le théorème du rang (appliqué dans $F_1 \times F_2$) on a donc

$$\mathrm{rang}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(F_1+F_2) + \dim(F_1 \cap F_2)$$
$$= \dim(F_1 \times F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2). \quad \square$$

<u>Exemple:</u> $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

- $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$, φ surjective.
- Thm du rang $\Longrightarrow \dim(\ker(\varphi)) = 3 - \mathrm{rang}(\varphi) = 3-2 = 1$.
- Calcul direct : $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Formes linéaires et hyperplans

Déf : Soit E un espace vectoriel réel.

i) On appelle forme linéaire sur E une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de toutes les formes linéaires sur E est un espace vectoriel appelé espace dual de E. On le note E^*.

ii) On dit qu'un sous-espace $F \subset E$ est un hyperplan vectoriel si F est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Rem : Si une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ n'est pas identiquement nulle, alors $\operatorname{rang}(\varphi) = 1 \Rightarrow \operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

Prop : Un sous-espace $F \subset E$ est un hyperplan vectoriel ssi il existe un sous-espace $G \subset E$ de dimension 1 t.q. $E = F \oplus G$.

Rem : On dit parfois que F est un sous-espace de codimension 1 s'il admet un supplémentaire de dimension 1.

Dém :

1) Supposons que $F = \operatorname{Ker}(\varphi)$ avec $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Par la remarque, il existe $u \in E$ t.q. $\varphi(u) = 1$. Notons $G = \operatorname{Vect}(u)$. Alors $\dim(G) = 1$, et

- $G \cap F = \{0\}$: si $\lambda u \in F = \operatorname{Ker}(\varphi)$, alors $0 = \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = \lambda$.
- $E = F + G$: si $v \in E$, alors $v - \varphi(v)u \in F$ car $\varphi(v - \varphi(v)u) = \varphi(v) - \varphi(v)\underbrace{\varphi(u)}_{=1} = 0 \Rightarrow v = \underbrace{\varphi(v)u}_{\in G} + \underbrace{(v - \varphi(v)u)}_{\in F}$.

2) Supposons que $E = F \oplus G$ avec $\dim(G) = 1$. Prenons $u \in E$, $u \neq 0$, t.q. $G = \mathrm{Vect}(u)$. Par hypothèse tout vecteur $v \in E$ admet une décomposition unique

$$v = \varphi(v)\, u + w \quad \text{avec } \varphi(v) \in \mathbb{R} \text{ et } w \in F.$$

Il est facile de vérifier que l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ ainsi définie est linéaire, et que $\varphi(u) = 1 \Rightarrow \varphi$ n'est pas identiquement nulle. En outre $v \in F \Leftrightarrow \varphi(v) = 0 \Rightarrow F = \ker(\varphi)$. □

<u>Corollaire:</u> Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, alors un sous-espace $F \subset E$ est un hyperplan vectoriel ssi $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

<u>Dém:</u> Notons $n = \dim(E)$, et supposons que $n \geq 1$.

i) Si F est un hyperplan vectoriel, la prop. ci-dessus montre que $E = F \oplus G$ avec $\dim(G) = 1$, donc $n = \dim(E) = \dim(F) + 1$.

ii) Supposons que $\dim(F) = n - 1$. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Si $n \geq 2$, soit $(v_1, \dots, v_{n-1})$ une base de F, que l'on peut compléter en une base $(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ de E. En notant $G = \mathrm{Vect}(v_n)$, on a alors $E = F \oplus G$ donc (par la prop.) F est un hyperplan vectoriel. □

<u>Exemple</u> (hyperplans de $\mathbb{R}^n$).

Si $a \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur <u>non nul</u>, l'application

$$\varphi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \varphi_a(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

est une forme linéaire non nulle (notez que $\varphi_a(a) \neq 0$).
Son noyau $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \}$ peut s'interpréter comme l'hyperplan orthogonal à a pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Inversement, si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle, on définit :

$$a_1 = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad a_2 = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \dots, \quad a_n = \varphi\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

et on remarque que $\varphi = \varphi_a$ pour ce choix de $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$.

Rem : l'application
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \varphi_a\end{array}$$
ainsi définie est un isomorphisme permettant d'identifier $\mathbb{R}^n$ à son dual $(\mathbb{R}^n)^*$.

La notion de codimension peut se généraliser de la façon suivante :

Prop : Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $k \in \{1, \dots, n\}$. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\dim(F) = n - k$

ii) F admet dans E un sous-espace supplémentaire de dimension k

iii) $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$, où $\varphi : E \to \mathbb{R}^k$ est linéaire et surjective.

Dém : Laissée en exercice ! Notez que l'équivalence ii) $\Rightarrow$ iii) est également vraie $\forall\, k \geq 1$ si E n'est pas de dimension finie.

5) Applications linéaires en dimension finie

Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on sait que tout vecteur $v \in E$ admet une décomposition unique

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) e_i , \quad \text{où } \lambda_1(v), \dots, \lambda_n(v) \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

On dit que les réels $\lambda_1(v), \dots, \lambda_n(v)$ définis par $(*)$ sont les composantes du vecteur v dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Lemme: Les applications $\lambda_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $(*)$ sont des formes linéaires sur E.

Dém: Soient $v, w \in E$. On a

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) e_i , \quad w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(w) e_i \implies v+w = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(v) + \lambda_i(w)) e_i .$$

Mais par ailleurs

$$v+w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v+w) e_i .$$

Par unicité de la décomposition du vecteur $v+w$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, on en déduit que $\lambda_i(v+w) = \lambda_i(v) + \lambda_i(w)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

De même, si $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\mu v = \sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_i(v) e_i \quad \text{et} \quad \mu v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu v) e_i$$

d'où par unicité $\lambda_i(\mu v) = \mu \lambda_i(v)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Rem: Par construction on a

$$\lambda_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} . \qquad (**)$$

Prop: Les formes linéaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ définies par $(*)$ forment une base de l'espace dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Rem: Ce résultat montre en particulier que, si $\dim(E) < \infty$, alors le dual E^* a la même dimension que E. On dit souvent que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la base duale associée à $(e_1, \dots, e_n)$, et on la note $(e_1^*, \dots, e_n^*)$.

Dém:

- La famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est libre dans E^*. Si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i = 0 \qquad \text{avec } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},$$

alors en appliquant au vecteur $e_j \in E$ on trouve:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

- La famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ engendre E^*. Si $\varphi \in E^*$, notons

$$\alpha_i = \varphi(e_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad \text{Alors } \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i.$$

En effet la différence $\psi := \varphi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i$ vérifie $\forall j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\psi(e_j) = \varphi(e_j) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i(e_j) = \varphi(e_j) - \alpha_j = 0.$$

Ainsi ψ s'annule sur tous les éléments de la base $(e_1, \dots, e_n)$, donc par linéarité sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. Ainsi $\psi = 0$.

Conclusion: $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une base de E. $\square$

On termine par un résultat qui revêt une grande importance en pratique, et motive largement le calcul matriciel que l'on abordera au chapitre suivant.

<u>Prop</u>: Soient E, F deux espaces vectoriels réels, avec $\dim(E) < \infty$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille quelconque dans F, il existe une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ t.q.

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad \varphi(e_i) = f_i. \qquad (***)$$

En d'autre termes:
- une application linéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie est entièrement déterminée par ses valeurs sur une base de E;
- les valeurs en question peuvent être choisies arbitrairement.

<u>Dém</u>:

- <u>Existence</u>: On définit $\varphi : E \to F$ par

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) f_i, \qquad \forall v \in E,$$

où comme dans $(*)$ les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les formes linéaires constituant la base duale associée à $(e_1, \dots, e_n)$. Il est clair que φ est linéaire, et en utilisant $(**)$ on voit que $\varphi(e_j) = f_j \; \forall j = 1, \dots, n$.

- <u>Unicité</u>: Si $\varphi_1, \varphi_2 : E \to F$ sont deux applications linéaires vérifiant $(***)$, la différence $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ s'annule sur tous les vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_n)$, donc par linéarité sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. Ainsi $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

6) Projections et symétries

Dans tout ce paragraphe E désigne un espace vectoriel réel.

Déf: On dit qu'une application linéaire $p: E \to E$ est une projection si $p \circ p = p$. ("p est idempotente")

Cette définition est intimement liée à la possibilité de décomposer E en une somme directe de deux sous-espaces, comme le montre le résultat suivant.

Prop:

a) Si $p: E \to E$ est une projection, alors $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

b) Inversement, si $E = F \oplus G$ où F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E, il existe une projection unique $p: E \to E$ t.q. $\ker(p) = F$ et $\mathrm{Im}(p) = G$. On dit que p est la projection de E sur G le long de F (ou parallèlement à F).

Dém:

a) On remarque d'abord que, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = x$. En effet, par définition il existe $y \in E$ t.q. $x = p(y)$, donc $p(x) = p(p(y)) \underset{\uparrow\, p \text{ projection}}{=} p(y) = x$.

On en déduit aisément que $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$. En effet, si $x \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) \underset{\uparrow\, x \in \ker(p)}{=} 0$ et $p(x) \underset{\uparrow\, x \in \mathrm{Im}(p)}{=} x \Rightarrow x = 0$.

Par ailleurs tout $x \in E$ se décompose en $x = \underbrace{(x - p(x))}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}$.

[On a $x - p(x) \in \ker(p)$, car

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) \overset{p \text{ projection}}{=} p(x) - p(x) = 0.]$$

On conclut que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

b) Supposons que $E = F \oplus G$, où F, G sont des sous-espaces vectoriels. Tout vecteur $x \in E$ se décompose donc de façon unique en

$$x = y + z, \quad \text{avec } y \in F,\ z \in G. \qquad (*)$$

On définit $p : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto z \end{array}$ (avec z comme ci-dessus).

- Cette application est linéaire : si $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2 \quad \text{avec } y_1, y_2 \in F,\ z_1, z_2 \in G$$

donc

$$\lambda x_1 + x_2 = \underbrace{(\lambda y_1 + y_2)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda z_1 + z_2)}_{\in G}.$$

Ceci montre que

$$p(\lambda x_1 + x_2) = \lambda z_1 + z_2 = \lambda p(x_1) + p(x_2) : p \text{ est linéaire.}$$

- Par construction on a $p(x) = 0$ ssi $x \in F$ $(y = x, z = 0)$: $F = \ker(p)$
et $p(x) = x$ ssi $x \in G$ $(y = 0, z = x)$: $G = \mathrm{Im}(p)$

Ainsi avec les notations $(*)$, on a $\forall x \in E$:

$$p(x) = z, \quad p(p(x)) = p(z) \underset{z \in G}{=} z = p(x)$$

$\Longrightarrow$ p est une projection.

- Enfin supposons que $\tilde{p} : E \to E$ est une projection telle que $\ker(\tilde{p}) = F$, $\mathrm{Im}(\tilde{p}) = G$. Pour tout $x \in E$ on a donc

$$x = \underbrace{(x - \tilde{p}(x))}_{\in F} + \underbrace{\tilde{p}(x)}_{\in G}$$

donc par unicité de la décomposition $(*)$ on déduit : $\tilde{p}(x) = z = p(x)$.

Ainsi $\tilde{p} = p$. $\square$

<u>Remarque:</u> Si $p : E \to E$ est une projection, alors $Id - p : E \to E$ est aussi une projection car (Id = application identité)

$$(Id - p)\circ(Id - p) = Id - p - p + p\circ p = Id - p.$$

On vérifie facilement que

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(Id - p) = \{x \in E ;\ p(x) = x\} = \mathrm{Im}(p), \\ \mathrm{Im}(Id - p) = \{x \in E ;\ x = y - p(y) \text{ pour un } y \in E\} = \mathrm{Ker}(p). \end{cases}$$

Ainsi, si p est la projection sur G le long de F, alors $Id - p$ est la projection sur F le long de G.

<u>Exemple:</u> $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $G = \{x \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

F est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in E$,

G est le plan engendré, par exemple, par $v = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Si $x \in E$, on peut décomposer $x = \lambda u + z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in G$:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}, \quad \text{avec } z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

En additionnant les trois composantes aux deux membres, on trouve en effet :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3\lambda + 0 \implies \lambda = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

La décomposition ci-dessus devient donc :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x_1 - x_2 - x_3\\2x_2 - x_1 - x_3\\2x_3 - x_1 - x_2\end{pmatrix}}_{\in G}.$$

On conclut que

$$p\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x_1 - x_2 - x_3\\2x_2 - x_1 - x_3\\2x_3 - x_1 - x_2\end{pmatrix}.$$

La proposition suivante joue un rôle très important dans le cours d'algèbre linéaire en L2 :

Proposition : Si $p : E \to E$ est une projection et $f : E \to E$ un endomorphisme, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f commute avec p : $f \circ p = p \circ f$.

ii) f laisse invariants les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p), \mathrm{Im}(p)$:

$$f(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p), \quad f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p).$$

Dém :

Supposons que $f \circ p = p \circ f$:

- si $x \in \mathrm{Ker}(p)$, alors $p(f(x)) = f(p(x)) = 0$ donc $p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$;
- si $x = p(y) \in \mathrm{Im}(p)$, alors $f(x) = f(p(y)) = p(f(y)) \in \mathrm{Im}(p)$.

Inversement, supposons que f laisse invariants le noyau et l'image de p. Si $x \in E$, on a $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(p)$, $z = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, donc :

$$f(x) = \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{f(z)}_{\in \mathrm{Im}(p)} .$$

Par unicité de la décomposition $(*)$, on a $p(f(x)) = f(z) = f(p(x))$, donc $f \circ p = p \circ f$. $\square$

Sous les hypothèses de la proposition, il suffit (pour étudier l'application f) d'étudier les restrictions de f aux sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. On note :

$$\begin{cases} E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) \\ f = f_1 \oplus f_2 \end{cases} \quad \text{où } f_1 = f|_{\mathrm{Ker}(p)}, \; f_2 = f|_{\mathrm{Im}(p)}.$$

(endomorphisme de $\mathrm{Ker}(p)$) (endomorphisme de $\mathrm{Im}(p)$)

Déf: On dit qu'une application linéaire $s : E \to E$ est une symétrie (ou une involution) si $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Prop:

a) Si $s : E \to E$ est une symétrie, alors $E = F \oplus G$ où

$$F = \{x \in E \,;\, s(x) = -x\}, \quad G = \{x \in E \,;\, s(x) = x\}.$$

b) Inversement, si $E = F \oplus G$ où F, G sont des sous-espaces vectoriels, il existe une symétrie unique $s : E \to E$ t.q.

$$F = \ker(s + \mathrm{Id}), \quad G = \ker(\mathrm{Id} - s).$$

On dit que s est la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Dém:

a) Soit $s : E \to E$ une symétrie et $F = \ker(\mathrm{Id} + s)$, $G = \ker(\mathrm{Id} - s)$. Il est évident que $F \cap G = \{0\}$. Par ailleurs, tout $x \in E$ s'écrit

$$x = y + z \quad \text{avec} \quad y = \frac{x - s(x)}{2}, \quad z = \frac{x + s(x)}{2}.$$

On a

$$s(y) = \frac{1}{2}\left(s(x) - s \circ s(x)\right) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -y \;\Rightarrow\; y \in F$$

$$s(z) = \frac{1}{2}\left(s(x) + s \circ s(x)\right) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = z \;\Rightarrow\; z \in G$$

Ainsi $E = F \oplus G$.

b) Inversement, si $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ se décompose en $x = y + z$ avec $y \in F$, $z \in G$, et cette décomposition est unique. On pose

$$\| \; s(x) = z - y.$$

- l'application $s : E \to E$ ainsi définie est <u>linéaire</u> :

Si $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$ avec $y_1, y_2 \in F$, $z_1, z_2 \in G$, et

$$\lambda x_1 + x_2 = \underbrace{(\lambda y_1 + y_2)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda z_1 + z_2)}_{\in G}$$

$$\Rightarrow \quad s(\lambda x_1 + x_2) = (\lambda z_1 + z_2) - (\lambda y_1 + y_2)$$
$$= \lambda (z_1 - y_1) + (z_2 - y_2) = \lambda s(x_1) + s(x_2).$$

- par construction, on a :

$$s(x) = -x \iff x \in F \quad (y = x, z = 0) \; : \; F = \ker(Id + s)$$
$$s(x) = x \iff x \in G \quad (y = 0, z = x) \; : \; G = \ker(Id - s)$$

En outre si $x = y + z$ comme ci-dessus, on a :

$$s(x) = -y + z, \quad s(s(x)) = y + z = x \Rightarrow s \circ s = Id.$$

Ainsi s est est une symétrie.

- Si $\tilde{s} : E \to E$ est une symétrie t.q. $F = \ker(Id + \tilde{s})$, $G = \ker(Id - \tilde{s})$, alors tout $x \in E$ se décompose :

$$x = \underbrace{\frac{x - \tilde{s}(x)}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{x + \tilde{s}(x)}{2}}_{\in G}$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = \frac{x + \tilde{s}(x)}{2} - \frac{x - \tilde{s}(x)}{2} = \tilde{s}(x) \; : \; \text{unicité.} \; \square$$

<u>Remarque</u> : Si $s : E \to E$ est une symétrie, alors

mêmes espaces F, G !

$$p = \frac{1}{2}(1 + s) \quad \text{et} \quad 1 - p = \frac{1}{2}(1 - s) \quad \text{sont des projections.}$$

Inversement, si p est une projection, $2p - 1$ et $1 - 2p$ sont des symétries.

Remarque : Si $s : E \to E$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F, alors :

- $-s$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
- $p = \frac{1+s}{2}$ est la projection sur G le long de F.
- $1-p$ est la projection sur F le long de G.

Suite de l'exemple p. 52 :

$$s\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2p\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2 - 2x_1 - 2x_3 \\ x_3 - 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

est la symétrie par rapport à G le long de F.