Université Grenoble Alpes | **Examen**
mat 101 | **5 janvier 2022**
durée : 2h00

Exercice n° 1. Question de cours.
Démontrer, en utilisant l'écriture algébrique de z_1 et z_2 que pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

Solution de l'exercice 1

Cf. poly de cours.

Exercice n° 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = \frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1}) \ .$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n+1-k} = n! \ .$$
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n + n \end{cases}$$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - n - 1$.

Solution de l'exercice 2

1. On utilise la formule du cours qui affirme que pour tous a et b complexes et tout n entier naturel, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$. Donc (avec $a = 5$ et $b = 2$) :
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = \frac{1}{5-2}(5^{n+1} - 2^{n+1}) = \frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1}) \ .$$

2. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n+1-k} &= \frac{(\prod_{k=1}^{n} k)^2}{\prod_{k=1}^{n}(n+1-k)} \\
&= \frac{(n!)^2}{(n+1-1)(n+1-2)\dots(n+1-n)} \\
&= \frac{(n!)^2}{n!} \\
&= n!
\end{aligned}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion "$u_n = 2^{n+1} - n - 1$".
   — Initialisation. $P(0)$ est l'assertion "$u_0 = 2^1 - 0 - 1$". Or $u_0 = 1$, et $2^0 - 0 - 1 = 2 - 1 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2u_n + n \\
&= 2(2^{n+1} - n - 1) + n \\
&= 2^{n+2} - 2n - 2 + n \\
&= 2^{n+1+1} - (n+1) - 1
\end{aligned}$$

   Or $P(n+1)$ est justement l'assertions "$u_{n+1} = 2^{n+1+1} - (n+1) - 1$". Donc $P(n+1)$ est vraie. On a montré que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
   — Conclusion. On a montré que $P(0)$ est vraie et que $(P(n))_{n \geq 0}$ est héréditaire, donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 3.

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $-3\sqrt{3} + 3i$.
2. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes de $1 + 4i$.
3. Déduire de la question précédente les racines du polynôme $P(z) = z^2 + (2-i)z + \frac{1}{2} - 2i$.

Solution de l'exercice 3

1. Soit $z = -3\sqrt{3} + 3i$. On calcule $|z| = |3|.| - \sqrt{3} + i| = 3\sqrt{3+1} = 6$. Puis $\frac{Re(z)}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{Im(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$. Donc :

$$\frac{Re(z)}{|z|} = \cos\frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{Im(z)}{|z|} = \sin\frac{5\pi}{6} \text{ ,}$$

ce qui montre que z admet $\frac{5\pi}{6}$ pour argument.

2. Soit δ appartenant à $\mathbb{C}$. On note $\delta = x + iy$ avec x et y réels. On remarque que $|1+4i| = \sqrt{17}$. On a :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = 1+4i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = 1+4i \\ |\delta^2| = |1+4i| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{17} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 = 1 + \sqrt{17} \\ xy = 2 \\ 2y^2 = \sqrt{17} - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \\ xy = 2 \\ |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \\ \text{ ou} \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \text{ et } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc les racines carrées de $1+4i$ sont $\delta := \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ et $-\delta = -\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$.

3. On calcule le discriminant Δ du polynôme P. On trouve $\Delta = 1 + 4i$. Avec les notations de la question précédente, on a trouvé δ tel que $\delta^2 = \Delta$, et les racines de P sont alors $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$ avec $a = 1$ et $b = (2-i)$. On obtient deux racines z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-2+i+\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-2+i-\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{2} \; .$$

Exercice n° 4.

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On rappelle que "f est injective" signifie que l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \; .$$

1. Énoncer la négation de l'assertion précédente.
2. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

3. Énoncer la réciproque de l'assertion précédente, puis montrer qu'elle est fausse (donner un contre-exemple).

Solution de l'exercice 4

1. $$\exists x \in E, \exists y \in E,\ f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y\ .$$
2. Montrons l'assertion contraposée, c'est à dire f non injective $\Rightarrow g \circ f$ non injective. Supposons que f n'est pas injective. Il existe alors x et y dans E tels que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Par conséquent $g(f(x)) = g(f(y))$. Donc $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ et $x \neq y$, donc $g \circ f$ n'est pas injective.
3. La réciproque est : "f injective $\Rightarrow g \circ f$ injective". Cette affirmation est fausse. En effet, on peut prendre $E = F = \{1, 2\}$, $G = \{1\}$, f qui associe 1 à 1 et 2 à 2 (donc f est injective), g qui associe 1 à 1 et 2. Alors, $g \circ f$ n'est pas injective, puisque $g \circ f(1) = g \circ f(2)$, mais f est injective.

Exercice n° 5.
Si $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels, on note $M(u)$ l'assertion "u est majorée". Autrement dit, $M(u)$ est l'assertion suivante :

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A\ .$$

On note $Q(u)$ l'assertion "u admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$", autrement dit $Q(u)$ est l'assertion suivante :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n > A\ .$$

1. Écrire la négation de $M(u)$.
2. Montrer que $Q(u) \Rightarrow$ non $M(u)$.
3. La réciproque de l'assertion précédente est-elle vraie ?

Solution de l'exercice 5

1. $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}, u_n > A\ .$$
2. Supposons que $Q(u)$ est vraie. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$. Donc en particulier $u_N > A$. On a montré :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, u_N > A$$
ce qui est précisément non $M(u)$.
3. La réciproque est fausse, nous allons donner un exemple de suite u telle que non $M(u)$ soit vraie et $Q(u)$ soit fausse. C'est à dire un exemple de suite non majorée mais qui ne tend pas vers $+\infty$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 0 \text{ si } n \text{ est pair} \quad u_n = n \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Alors, (u_n) ne tend pas vers $+\infty$: pour tout N entier, il existe un entier (pair) supérieur à N tel que $u_n \leq 0$. Mais u n'est pas majorée. En effet, pour tout $A \in \mathbb{R}$, $u_{2\lceil |A|+2\rceil} = 2\lceil |A| + 2 > A$.

Exercice n° 6.
Soit f la fonction définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x & \text{si} & x \in]-\infty, 0] \\ x^2 - 1 & \text{si} & x \in]0, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f.
2. Montrer que $\mathbb{R} \subset f(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si $x \leq 0$, alors
$$x \in f^{-1}([-1, 1]) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] .$$
4. Montrer que si $x > 0$, alors
$$x \in f^{-1}([-1, 1]) \Leftrightarrow x \in]0, \sqrt{2}] .$$
5. En déduire que $f^{-1}([-1, 1]) = [-\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$.

Solution de l'exercice 6

1. Figure.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Si $y > 0$, alors $\sqrt{y+1} \geq 0$ et $f(\sqrt{y+1}) = y + 1 - 1 = y$, donc $y \in f(\mathbb{R})$. Si $y \leq 0$, alors $y/2 \leq 0$, donc $f(y/2) = 2 \times y/2 = y$, donc $y \in f(\mathbb{R})$. On a bien montré que $\mathbb{R} \subset f(\mathbb{R})$.
3. Si $x \leq 0$,
$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}([-1, 1]) & \Leftrightarrow & f(x) \in [-1, 1] \\ & \Leftrightarrow & 2x \in [-1, 1] \\ & \Leftrightarrow & x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}] \\ & \Leftrightarrow & x \in [-\dfrac{1}{2}, 0] \end{array}$$
puisque $x \leq 0$.

4. Si $x > 0$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([-1,1]) &\Leftrightarrow f(x) \in [-1,1] \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 \in [-1,1] \\ &\Leftrightarrow x^2 \in [0,2] \\ &\Leftrightarrow x \in]0, \sqrt{2}] \end{aligned}$$

   puisque $x > 0$.
5. $f^{-1}([-1,1]) = (f^{-1}([-1,1]) \cap \mathbb{R}_-) \cup (f^{-1}([-1,1]) \cap \mathbb{R}_+) = [-\frac{1}{2}, 0] \cup]0, \sqrt{2}] = [-\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$.

FIN