Avant de commencer

À propos du partiel

- 2 heures
- une feuille A4 de notes manuscrites autorisée
- au programme : toute la logique propositionnelle
- Exercices type (cf. annales)

Avant le partiel

- Pensez au pré-rapport du projet !

Rappel du planning, annales... voir
`https://wackb.gricad-pages.univ-grenoble-alpes.fr/inf402/`

Logique du premier ordre
Première partie :
Langage et Sens des Formules

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

Février 2025

Plan de l'UE

- Logique propositionnelle : $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Interprétation : fonctions booléennes
- Systèmes de déduction : résolution, déduction naturelle
- Algorithmes : stratégie complète, DPLL, tactiques en DN

- Logique du premier ordre : $\forall, \exists$
- Interprétation
- « Résolution au premier ordre »
- Déduction naturelle au premier ordre

Plan

Introduction

Langage des formules

Être libre ou lié

Sens des symboles
- Déclaration de symbole
- Signature

Interprétation

Interprétation finie

Conclusion

Aperçu de la logique du premier ordre

Un domaine : les *objets* sur lesquels on raisonne

Trois catégories :

- les termes qui représentent des éléments du domaine
- les relations entre éléments du domaine
- les formules qui décrivent les interactions entre les relations

Deux nouveaux symboles (quantificateurs) dans les formules

$\forall$ (quantificateur universel) et $\exists$ (quantificateur existentiel)

Exemples :

- domaine = membres d'une famille
- le terme $pere(x)$ désigne un élément du domaine (le père de x)
- la relation *frere* détermine si deux éléments sont frères
- la formule $\forall x \exists y \; frere(y, x)$ signifie “tout individu a un frère”.

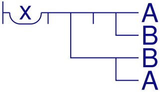
Syllogisme

Tous les hommes sont mortels.
Socrate est un homme.
Donc Socrate est mortel.

$$\forall x(homme(x) \Rightarrow mortel(x))$$
$$homme(Socrate)$$
$$mortel(Socrate)$$

Begriffsschrift (idéographie) de Gottlob Frege (1879)

- Tentative de langage formel « universel »



- *Système* logique du premier ordre
  (contient certaines règles comme le Modus Ponens déjà connues des Stoïciens, mais aussi de nouvelles règles pour les quantificateurs)
- Ne contient que des règles de *raisonnement* mais permettent d'exprimer toutes les *notions mathématiques* (à partir des ensembles)
- Contient également la logique du **second ordre** :
  une variable peut représenter une propriété $\forall R \exists x R(x)$

Plan de la séance

Introduction

Langage des formules

Être libre ou lié

Sens des symboles
- Déclaration de symbole
- Signature

Interprétation

Interprétation finie

Conclusion

Vocabulaire

- Deux constantes propositionnelles : $\bot$ et $\top$
- Connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Quantificateurs : **universel** $\forall$ et **existentiel** $\exists$
- Variables : $u, v, w, x, y, z, x1, x2 \ldots$ ($\neq$ var. propositionnelles)
- Symboles : $a, b, c, p, \mathit{frere}, 12 \ldots$
- Ponctuations : virgule et parenthèses (pour noter les arguments d'un symbole)

Exemple 4.1.1

- $x, x1, x2, y$ sont des variables,
- $f1$, *succ*, *somme*, 12, 24, *homme*, *frere*, *ilPleut* sont des symboles : ils peuvent représenter des valeurs, des opérations, des comparaisons...
- Pour certains symboles (dits *spéciaux*) on s'autorisera à écrire par exemple $x = y$ ou $z > 3$.

Terme

Définition 4.1.2

Un terme peut être :

- un symbole s seul
- ou une variable x
- ou un symbole appliqué à des termes $s(t_1, \ldots, t_n)$

Exemple 4.1.3

x ; a ; $f(x1, x2, g(y))$; $somme(5, produit(x, 42))$ sont des termes.

Par contre $f(\perp, 2, y)$ n'est pas un terme.

Notons que $42(1, y, 3)$ est aussi un terme, mais on utilise rarement 42 pour un nom de fonction ou de relation.

Formule atomique

Définition 4.1.4

Une formule atomique est :

- $\top$ ou $\perp$
- ou un symbole seul
- ou un symbole appliqué à des termes $s(t_1, \ldots, t_n)$

Exemple 4.1.5 :

- $P(x)$, a et $R(1, +(5, 42), g(z))$ sont des formules atomiques
- x et $A \vee f(4, 2, 6)$ ne sont pas des formules atomiques

Attention

L'ensemble des **termes** et l'ensemble des **formules atomiques** ne sont pas disjoints : par exemple $p(x)$ peut être l'un ou l'autre.

Formule

Définition 4.1.6

Une formule est :

- une formule atomique
- $\neg A$
  avec A une formule
- $A \circ B$
  avec A et B des formules et $\circ$ un connecteur $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- $\forall x\ A$ ou $\exists x\ A$
  avec A une formule et x une variable quelconque

Comme en logique propositionnelle, on peut écrire :

- des formules **strictes** (parenthèses sur chaque connecteur)
- des formules **à priorité**

Exemple 4.1.7

- $\boxed{homme(x)\ ;\ \ parent(fils(y), mere(Alice))\ ;\ \ = (x, +(f(x), g(y)))}$
  sont des formules atomiques, donc des formules.
- Par contre
  $\boxed{\forall x\ (homme(x) \Rightarrow homme(Socrate))}$
  est une formule qui n'est pas atomique.

Formule (stricte) : Exemples

Parmi ces expressions, lesquelles sont des formules ?
Des formules strictes ?

- x
  pas une formule
- a
  oui (stricte)
- $(a(x) \Rightarrow b) \wedge a(x) \Rightarrow b$
  oui (mais pas stricte)
- $\exists x((\bot \Rightarrow a(x)) \wedge b(x))$
  oui (stricte)
- $\exists x \exists y < (-(x, y), +(a, y))$
  oui (stricte)

Abréger l'écriture

Écriture infixée : les fonctions $+, -, *, /$ et les relations $=, \neq, <, >, \leq, \geq$ s'écrivent de manière usuelle.

Exemple 4.1.9

- $\leq (*(3, x), +(y, 5))$ s'**abrège** en $3 * x \leq y + 5$
- $+(x, *(y, z))$ s'**abrège** en $x + y * z$

Donner des priorités

- On conserve les priorités choisies sur les connecteurs booléens.
- La priorité des quantificateurs est identique à celle de la négation.
- Les connecteurs sont moins prioritaires que les relations

Tableau 4.1 récapitulatif des priorités

Priorités décroissantes du haut vers le bas.

OPÉRATIONS	
$*, /, +, -$, etc.	
RELATIONS	
$=, \neq, <, \leq, >, \geq$, etc.	
NÉGATION, QUANTIFICATEURS	
$\neg, \forall, \exists$	
CONNECTEURS BINAIRES	
$\wedge$	associatif gauche
$\vee$	associatif gauche
$\Rightarrow$	associatif **droit**
$\Leftrightarrow$	associatif gauche

Représentation en arbre

Exemple 4.1.12 $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$

$\forall$ est prioritaire : l'opérande gauche de l'implication est $\forall x P(x)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \Rightarrow \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\forall x \arrow[d] & & Q \arrow[d] \\
P \arrow[d] & & x \\
x & &
\end{tikzcd}$$

À propos de formalisation

Comment écrire les formules du type

- $\forall x > 1,\ (x^2 > x)$
- $\exists y < 0,\ (y^2 > 0)$

Source d'erreurs fréquentes en formalisation

- $\forall x\ (x > 1 \ \Rightarrow\ x^2 > x)$
- $\exists y\ (y < 0\ \wedge\ y^2 > 0)$

Comment traduisez-vous « Tous les restaurants modernes proposent un plat végétarien » ?

$$\forall x\ \big(restaurant(x) \wedge moderne(x) \Rightarrow \exists y\ (vegetarien(y) \wedge propose(x, y))\big)$$

Plan de la séance

Introduction

Langage des formules

Être libre ou lié

Sens des symboles
- Déclaration de symbole
- Signature

Interprétation

Interprétation finie

Conclusion

Idée

- Le sens de la formule $x + 2 = 4$ dépend de x.
  La formule n'est vraie (en arithmétique) que si $x = 2$.
  x est libre dans cette formule
- $\forall x(x + 2 = 4)$ est insatisfaisable (en arithmétique).
  $\forall x(x + 0 = x)$ est valide.
  Il n'y a pas à choisir de valeur pour x.
  Ces deux formules n'ont pas de variables libres.
- Le nom de la variable n'a alors plus d'importance.
  Situation courante en mathématiques $\int_0^1 f(x)dx$
  ... et en informatique

```
int Toto(int x) {
  return x + 1;
}
```

Occurences libres et liées

Définition 4.2.1

Un quantificateur lie une variable localement.

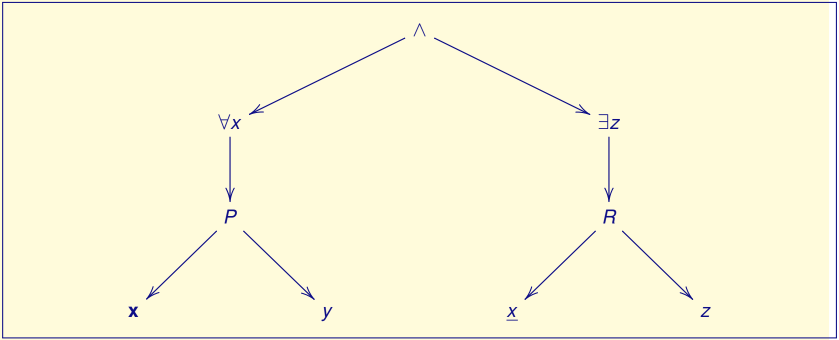
- Dans $\forall x\ A$ ou $\exists x\ A$, la portée de la liaison de x est A.
- Une occurrence de x est liée si elle est dans la portée d'une liaison pour x.
- Sinon elle est dite libre.

Si nous représentons une formule par un arbre :

- Une occurrence de x est liée si elle est en dessous d'un nœud $\exists x$ ou $\forall x$.
- Toute autre occurrence de x est libre.

Exemple 4.2.2

$$\forall x P(\mathbf{x}, y) \land \exists z R(\underline{x}, z)$$



- L'occurrence de z est liée et celle de y est libre.
- L'occurrence en gras de x est liée.
- L'occurrence soulignée de x est libre.

Variables libres, liées

Définition 4.2.3

Une formule sans variable libre est dite formule fermée.

Remarque

Dans $\forall x P(x) \vee Q(x)$, la variable x est à la fois libre et liée
(donc la formule n'est pas fermée).

Remarque

Les variables liées disparaissent souvent quand on lit la formule en français :
$\forall x(\mathit{homme}(x) \Rightarrow \mathit{mortel}(x))$ se lit « Tous les hommes sont mortels ».

Plan de la séance

Introduction

Langage des formules

Être libre ou lié

Sens des symboles
- Déclaration de symbole
- Signature

Interprétation

Interprétation finie

Conclusion

Déclaration de symbole

Définition 4.3.1

Une déclaration de symbole est un triplet noté s^{gn} où :

- s est un symbole
- g est une des lettres f (signifiant fonction) ou r (signifiant relation)
- n est un entier naturel.

Remarque 4.3.3

g et n sont facultatifs s'ils sont clairs étant donné le contexte.

Exemple : **égal** est toujours une relation à 2 arguments.
On écrit donc $=$ au lieu de $=^{r2}$.

Déclaration de symbole : Exemple

Exemple 4.3.2

- *frere*^{r2} est une **(r)elation** avec **2** arguments
- $*^{f2}$ est une **(f)onction** avec **2** arguments
- *homme*^{r1} est une **relation** unaire

Signature

Définition 4.3.4

Une signature Σ est un ensemble de déclarations de symboles.

Selon la déclaration du symbole s, on dira qu'il est :

1. pour s^{fn} : un symbole de fonction à n arguments
2. pour s^{f0} : une constante
3. pour s^{rn} : une relation à n arguments
4. pour s^{r0} : une variable propositionnelle

Exemple en mathématiques

Définissons une signature pour l'arithmétique :

- Constantes $0^{f0}, 1^{f0}$
- Fonctions $+^{f2}, -^{f2}, *^{f2}$
- Relations $=^{r2}$

Remarques :

- Le contexte étant clair, on écrira plutôt 0, 1, $+$, $-$, $*$ et $=$.
- On peut cependant préciser que $-$ attend deux arguments (car il existe en version unaire).

Relation unaire : une relation à 1 argument est simplement une propriété d'un terme (par exemple ici $\mathit{premier}^{r1}$).

Terme sur une signature

Définition 4.3.8

Un terme sur Σ est :

- une variable,
- ou une constante s^{f0}
- ou un terme de la forme $s(t_1, \ldots, t_n)$ avec
  - s^{fn}
  - $n \geq 1$
  - $t_1, \ldots, t_n$ des termes sur Σ

Formule atomique sur une signature

Définition 4.3.9

Une formule atomique sur Σ est :

- une constante $\top$ ou $\bot$
- ou une variable propositionnelle $s^{r\,0}$
- ou une expression de la forme $s(t_1, \dots, t_n)$ avec
  - $s^{r\,n}$
  - $n \geq 1$
  - $t_1, \dots, t_n$ des **termes** sur Σ

Formule sur une signature

Définition 4.3.10

Une formule sur Σ est une formule dont les sous-formules atomiques sont correctes pour Σ.

Exemple 4.3.11

$\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y))$ est une formule sur $\Sigma = \{p^{r1}, q^{r2}\}$

La signature associée à une formule est la plus petite signature Σ qui convient pour cette formule.

Plan de la séance

Introduction

Langage des formules

Être libre ou lié

Sens des symboles
- Déclaration de symbole
- Signature

Interprétation

Interprétation finie

Conclusion

Interprétation

Définition 4.3.16

Une interprétation I sur une signature Σ est définie par :

- un domaine D non vide
- à chaque symbole s^{gn} on associe sa valeur s_I^{gn} comme suit :

(constante)	s_I^{f0} est un élément de D
(fonction)	s_I^{fn} est une fonction de $D^n \rightarrow D$
(variable propositionnelle)	s_I^{r0} vaut *vrai* ou *faux*
(relation)	s_I^{rn} est un ensemble de n-uplets dans D (ceux qui vérifient cette relation)

Exemple 4.3.17

Soit une relation binaire *ami* et le domaine $D = \{1, 2, 3\}$.
On considère l'interprétation I donnée par
$ami_I^{r2} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Dans cette interprétation, on dira que la formule $ami(2,3)$ est vraie mais que la formule $ami(2,1)$ est fausse.

Remarque 4.3.18

Dans toute interprétation I,
la valeur du symbole $=$ est l'ensemble $\{(d,d) \mid d \in D\}$,
autrement dit le sens de l'égalité est l'identité sur le domaine D.

Exemple 4.3.31

Soit l'interprétation I de domaine $D = \{1,2,3\}$ donnée par $ami_I^{r2} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

Comment interpréter la formule $ami(1,2) \wedge ami(2,3) \Rightarrow ami(1,3)$ dans I ?
On sait interpréter les formules atomiques :

- $[ami(1,2)]_I = vrai$
- $[ami(2,3)]_I = vrai$
- $[ami(1,3)]_I = vrai$

On peut alors procéder comme d'habitude avec les connecteurs, d'où $[ami(1,2) \wedge ami(2,3) \Rightarrow ami(1,3)]_I = vrai$:
Cette formule est vraie dans l'interprétation I.

Plan de la séance

Introduction

Langage des formules

Être libre ou lié

Sens des symboles
- Déclaration de symbole
- Signature

Interprétation

Interprétation finie

Conclusion

Modèle fini

Définition

Un modèle fini d'une formule fermée est une interprétation de la formule de *domaine fini*, qui rend vraie la formule.

Remarque

- Le nom des éléments du domaine est sans importance.
- Ainsi pour un modèle avec n éléments, nous utiliserons le domaine des entiers naturels inférieurs à n.

Construire un modèle fini

Idée naïve : Pour savoir si une formule fermée a un modèle de domaine $\{0,\ldots,n-1\}$, il suffit de

- **énumérer** toutes les interprétations possibles de la signature associée à la formule
- **évaluer** la formule pour chacune de ces interprétations.

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r2}\}$.

Sur un domaine à 5 éléments, combien y a-t-il d' interprétations distinctes ?
$5 \times 5^5 \times 2^{25}$

Cette méthode est inutilisable en pratique.

Méthode pour la recherche d'un modèle fini

Recherche de modèles à n éléments **par réduction au cas propositionnel**

Cas simple : formule n'ayant ni symbole de fonction ni constante.

Construction du modèle à n éléments

1. **Suppression des quantificateurs :**
   remplacer A par sa n-expansion
2. **Suppression des égalités :**
   remplacer $(i = j)$ par *vrai* ssi i et j sont identiques
3. **Chercher un modèle** de la formule obtenue sous la forme d'une assignation propositionnelle de ses formules atomiques.

Expansion d'une formule

Définition 4.3.39

La *n-expansion de A* est obtenue en remplaçant :

- toute sous-formule de A de la forme $\forall x B$ par la conjonction $\bigwedge_{i<n} B < x := i >$
- toute sous-formule de A de la forme $\exists x B$ par la disjonction $\bigvee_{i<n} B < x := i >$

Exemple 4.3.40

La 2-expansion de la formule $\exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$ est la formule

$$\boxed{P(0) \vee P(1) \Rightarrow P(0) \wedge P(1)}$$

Exemple 4.3.45 : recherche de modèle pour

$A = \exists x P(x) \ \wedge \ \exists x \neg P(x) \ \wedge \ \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$

A n'a pas de modèle à un élément :
$P(0) \wedge \neg P(0) \wedge (P(0) \wedge P(0) \Rightarrow 0 = 0)$ est insatisfaisable.

2-expansion de A

$$(P(0)+P(1)).\ (\overline{P(0)}+\overline{P(1)}).\quad (P(0).P(0) \Rightarrow 0=0).(P(0).P(1) \Rightarrow 0=1).$$
$$(P(0)+P(1)).\ (\overline{P(0)}+\overline{P(1)}).\quad (P(1).P(0) \Rightarrow 1=0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1=1)$$

En remplaçant les égalités par leur valeurs

$$(P(0)+P(1)).\ (\overline{P(0)}+\overline{P(1)}).$$
$$(P(0).P(0) \Rightarrow \top).\ (P(0).P(1) \Rightarrow \bot).\ (P(1).P(0) \Rightarrow \bot).\ (P(1).P(1) \Rightarrow \top)$$

Ce qui se simplifie en $(P(0)+P(1)).(\overline{P(0)}+\overline{P(1)})$
L'assignation $P(0) = \mathit{vrai}, P(1) = \mathit{faux}$ en est un modèle propositionnel,
donc l'interprétation I de domaine $\{0,1\}$ où $P_I = \{0\}$ est modèle de A.

Logiciel pour construire un modèle fini

MACE

- **traduction** des formules du premier ordre en formules propositionnelles
- **algorithmes performants pour trouver la satisfaisabilité** d'une formule propositionnelle (par exemple `DPLL`)

`http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4`

Un exemple concret :
`http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/examples/2009-11A/mace4-misc/`

Plan de la séance

Introduction

Langage des formules

Être libre ou lié

Sens des symboles
- Déclaration de symbole
- Signature

Interprétation

Interprétation finie

Conclusion

Aujourd'hui

- La **logique du premier ordre** est une logique pourvue de quantificateurs $\forall$ et $\exists$
- Ces quantificateurs portent sur des variables qui représentent des éléments d'un domaine
- Les **formules atomiques** sont construites à l'aide de symboles de fonctions et de relations entre éléments du domaine
- Pour interpréter une formule :
  - Les symboles doivent être interprétés dans un domaine
- Méthode de recherche d'un **(contre-)modèle** par interprétation finie et expansion

La prochaine fois

- Interprétation d'une formule du premier ordre
- Notion de modèle
- Équivalences remarquables
- Prolongement de la méthode des interprétations finies