Luu Nguyen Phuoc Loc

COMPTE RENDU

Présentation du jeu:

Le jeu de la course à 20 est un jeu à 2 joueurs avec quelque règle suivante:

- Chacun leur tour les joueurs écrivent un nombre suivant la règle qui suit
- Le jeu commence à 0. Puis les joueurs rajoutent à tour de rôle 1 ou 4 au nombre précédent et écrivent le résultat et ce qui écrit 20 gagne.

On fait quelque essais

0 1 5 6 10 11 15 16 20 (Victoire de J2)

0 4 5 9 10 14 15 19 20 (Victoire de J2)

Après quelque essais, on se rend compte que celui écrit 15 a une stratégie pour gagner car:

- Si l'autre joueur écrit 16 (+1), il va écrire 20 (+4)
- Si l'autre joueur écrit 19 (+4), il écrit 20 (+1)

Donc, on se rend compte rapidement que:

- Si on écrit 10, alors on peut écrire 15
- Si on écrit 5, alors on pourra écrire 10

Et donc, on peut conclure qu'il existe la stratégie pour J2 et qu'elle est la suivante: écrire 5, puis 10, puis 15, puis 20

Le joueur 2 peut garantir qu'il peut écrire $n+5$ au tour suivant:

- Si l'autre joueur écrit $n+1$, le joueur 2 écrit $n+5=(n+1)+4$
- Si l'autre joueur écrit $n+4$, le joueur 2 écrit $n+5=(n+4)+1$

* La course à n.

On va tester les autres cas pour trouver la conjectures du règle de gagner de J1 ou J2

On peut faire des essais sur des petits nombres, par exemple 21 et 22

Pour n = 21

À partir de la même stratégie de +5 d'un tour à l'autre, dans ce cas, J1 a une stratégie gagnante. C'est d'écrire 1, puis 1+5 = 6, puis 6+5 = 11, puis 11+5 = 16, puis 16+5 = 21.

Pour n = 22

Avec la même stratégie de +5, dans ce cas, J2 a une stratégie gagnante. C'est d'écrire 5 (après le nombre écrit par J1 (1 ou 4), cela force le jeu est comme le cas n = 20, où le 2e joueur occupe 20, puis J1 écrit forcément 21 et J2 pourra écrire 22

On va tester sur le brouillon et obtenir le résultat suivant:

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Gagnant	J1	J2	J1	J1	J2	J1	J2	J1	J1	J2	J1

Conjecture : Si n a pour reste r par la division euclidienne par 5, cad $n = 5k + r$ avec k positif ou nul et $r = 0, 1, 2, 3, 4$, alors:

* Si $r = 0$, le J2 a une stratégie gagnante qui consiste à écrire tous les multiple de 5 jusqu'à n

* Si $r = 1$, le joueur a une stratégie gagnante qui consiste à écrire 1 puis ajouter à chaque tour 5 au nombre qu'il a écrit au tour d'avant, jusqu'à n. Il écrit dans l'ordre tous les nombres congrus à 1 modulo 5 de 1 jusqu'à n.

* Si $r = 2$, le J2 a une stratégie gagnante qui consiste à faire la même chose que la course à $5k + 0$, puis le J1 est forcément à écrire $5k+1$ et J2 pourra écrire $5k + 2$ (+1)

* $n = 3$, dans ce cas, J1 a une stratégie gagnante qui consiste à : écrire 1, puis ajouter à chaque tour 5 au nombre qu'il a écrit au tour d'avant, jusqu'à $n = 5k+1$. Dès lors, J1 peut forcer J2 à écrire $5k+2\ (+1)$. J1 pourra écrire $5k+2+1 = 5k+3$

* $n = 4$, le joueur J1 a une stratégie gagnante qui consiste à écrire 4, puis ajouter à chaque tour 5 au nombre qu'il a écrit au tour d'avant, jusqu'à $n = 5k+4$. Il écrit ainsi dans l'ordre tous les nombres qui modulo 5 égal à 4.

Démonstration

On va montrer la conjecture par récurrence.

Si $n = 0$, nous voulons montrer que si $n = 5k$, le joueur J2 a une stratégie gagnante qui consiste à écrire tous les multiples de 5 jusqu'à $5k$

* Initialisation : $k = 1$
- Si J1 écrit 1, J2 écrit $5\ (+4)$
- Si J1 écrit 4, J2 écrit $5\ (+1)$

Donc, $H(1)$ est vrai

* Hérédité :

On veut mq $5(k+1)$ est vrai ou $5k+5$ est vrai.

Au début, J2 suit la stratégie pour $5k$ qui écrit tous les multiples de 5, jusqu'à $5k$. Puis
- Si J1 écrit $5k+1$, J2 écrit $5k+5\ (+4)$
- Si J1 écrit $5k+4$, J2 écrit $5k+5\ (+1)$

Donc, Hérédité est vraie aussi

Alors, le cas $n = 0$, la stratégie gagnante de J2 est prouvée.

Pour $n = 1$, $n = 4$, le preuve est la même sauf qu'il faut pour écrire 1 pour $n = 1$ et 4 pour $n = 4$ et qu'il faut montrer par récurrence que J1 pourra écrire tous les nombres de la forme $1+5k$ jusqu'à $n=1+5k$ pour le cas $r=1$ et de la forme $4+5k$ jusqu'à $n=4+5k$ pour le cas $r=4$

Pour le cas $r=2$, le J2 a toujours une stratégie gagnante

* Initialisat°:

$n=5k+r$ où $k=0$ et $r=2$; $n=2$:

- Si J1 écrit 1, J2 écrit 2
- J1 n'a pas le droit d'écrire 4

Donc, l'initialisat° est vrai

* Hérédité:

On veut mq $n=5(k+1)+r$ où $r=2$, J2 gagne

$n=5(k+1)+r=5k+5+2=5k+7$.

Au début, J2 écrit tous les nombres qui sont multiples de 5. Puis :

- Si J1 écrit $5k+1$ $(+1)$, J2 écrit $5k+5$ $(+4)$, J1 dois écrire $5k+6$ $(+1)$ J2 écrit $5k+7$ $(+1)$
- Si J2 écrit $5k+4$ $(+4)$, J2 écrit $5k+5$ $(+1)$, J1 forcé à écrire $5k+6$ $(+1)$, puis J2 écrit $5k+7$

Donc, pour le cas $r=2$; la conjecture que J2 a une stratégie gagnante est vraie.

* Pour $r=3$, la conjecture est J1 a une stratégie gagnante, pour montrer cette conjecture, on va montrer par récurrence comme le cas $r=0$, sauf que la partie de Hérédité :

$n=5(k+1)+3=5k+8$, puis

- J1 écrit $5k+1$, J2 peut écrire $5k+2$ $(+1)$ ou $5k+5$ $(+4)$, J1 peut écrire $5k+6$ ($+1$ pour le cas $5k+5$, $+4$ pour le cas $5k+2$).

Dès lors, J2 est forcé à écrire $5k+7$ $(+1)$, J1 écrit $5k+8$.

Donc, la conjecture pour $r=3$ est vrai.

Donc, on a montré tous les cas de la conjecture ci-dessus