MAP101 - Partiel - octobre 2023

Durée 1h30 - documents et calculette interdits
Le barème est donné à titre indicatif
Justifiez au mieux chaque réponse
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation
Indiquez votre groupe sur votre copie en haut à gauche

Partie 1 (3 pt)
Simplifier l'expression suivante :

$$\log_4\left(\frac{4^{2x+y}}{2^{2y+4}}\right) - \log_2\left(\frac{4^{x+2y}}{2^{3x-1}}\right)$$

Partie 2 (8 pt)
Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + 1$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

• • •

Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
3. Calculer l'expression de $g'(x)$, dérivée de la fonction $g(x)$.

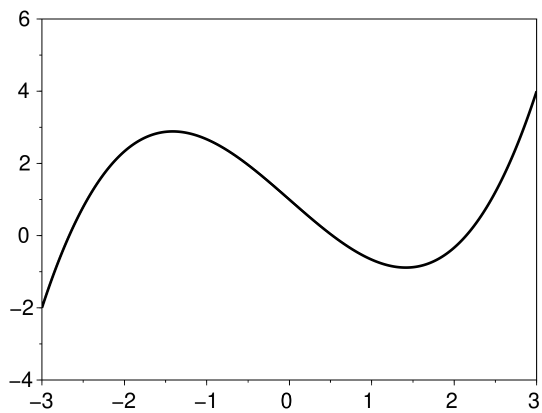
• • •

4. Ecrire les instructions Scilab afin de tracer le graphe de la fonction f avec les bornes suivantes pour le repère : $-5 \leq x \leq 5$ et $-2 \leq y \leq 4$.

Indication : le script Scilab suivant

```
// définition de h(x) = x^3/3 - 2x + 1
deff("y=h(x)","y = x**3./3-2.*x+1");
x = linspace(-3,3,1000);
y = h(x);
scf();
plot(x,y,"k-");
replot([-3,-4,3,6]);
```

permet d'obtenir la figure ci-contre.



---

suite du sujet au verso →

Partie 3 (4 pt)
Soit la fonction suivante f définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x + c & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Déterminer les coefficients réels a, b et c afin que les trois conditions suivantes soient remplies :

(a) la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$,

(b) la fonction f', dérivée de f, est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et prolongeable par continuité en $x = 1$,

(c) $f(0) = 0$.

Partie 4 (5 pt)
Dans cette partie, on s'intéresse au problème de recherche de zéros de fonction.

• • •

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$f(x) = \exp(x) + x^4 + x^3 + x - 2$$

et soit l'intervalle $I = [\,a\,;\,b\,] = [\,0\,;\,1\,]$

1. Montrer qu'on peut utiliser la méthode *par dichotomie* pour la fonction f sur l'intervalle I.

• • •

Par rapport à la méthode *par dichotomie*, pour pouvoir appliquer la méthode *de Newton*, la fonction f doit vérifier en plus les propriétés suivantes :

(a) f est deux fois dérivable sur I (f est dérivable sur I et f' est dérivable sur I),

(b) f est strictement monotone sur I,

(c) f' est monotone sur I.

Par exemple, les propriétés qui ont été utilisées en TP sont les suivantes :

(a) f est deux fois dérivable sur I,

(b) $f'(x) > 0$, pour tout $x \in I$,

(c) $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.

2. Montrer qu'on peut appliquer la méthode *de Newton* pour la fonction f sur l'intervalle I.

Corrigé du partiel - octobre 2023

Partie 1

Solution 1 : revenir au logarithme népérien (ln), puis utiliser les propriétés du logarithme.

$$\log_4\left(\frac{4^{2\,x+y}}{2^{2\,y+4}}\right)-\log_2\left(\frac{4^{x+2\,y}}{2^{3\,x-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&=\left[\log_4\left(4^{2\,x+y}\right)-\log_4\left(2^{2\,y+4}\right)\right]-\left[\log_2\left(4^{x+2\,y}\right)-\log_2\left(2^{3\,x-1}\right)\right]\\
&=\log_4\left(4^{2\,x+y}\right)-\log_4\left(2^{2\,y+4}\right)-\log_2\left(4^{x+2\,y}\right)+\log_2\left(2^{3\,x-1}\right)\\
&=(2\,x+y)\log_4(4)-(2\,y+4)\log_4(2)-(x+2\,y)\log_2(4)+(3\,x-1)\log_2(2)\\
&=(2\,x+y)\frac{\ln(4)}{\ln(4)}-(2\,y+4)\frac{\ln(2)}{\ln(4)}-(x+2\,y)\frac{\ln(4)}{\ln(2)}+(3\,x-1)\frac{\ln(2)}{\ln(2)}=E
\end{aligned}$$

Comme $4=2^2$, on a $\ln(4)=\ln(2^2)=2\,\ln(2)$

$$\Rightarrow E=(2\,x+y)\frac{\ln(4)}{\ln(4)}-(2\,y+4)\frac{\ln(2)}{2\,\ln(2)}-(x+2\,y)\frac{2\,\ln(2)}{\ln(2)}+(3\,x-1)\frac{\ln(2)}{\ln(2)}$$

$$\begin{aligned}
&=(2\,x+y)-\frac{1}{2}(2\,y+4)-2\,(x+2\,y)+(3\,x-1)\\
&=(2\,x+y)-(y+2)-(2\,x+4\,y)+(3\,x-1)\\
&=2\,x+y-y-2-2\,x-4\,y+3\,x-1\\
&=\boxed{3\,x-4\,y-3}
\end{aligned}$$

Solution 2 : utiliser les propriétés des puissances, puis $\log_a(a)=1$.

$$\log_4\left(\frac{4^{2\,x+y}}{2^{2\,y+4}}\right)-\log_2\left(\frac{4^{x+2\,y}}{2^{3\,x-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&=\log_4\left(\frac{4^{2\,x+y}}{\left(4^{1/2}\right)^{2\,y+4}}\right)-\log_2\left(\frac{\left(2^2\right)^{x+2\,y}}{2^{3\,x-1}}\right)\\
&=\log_4\left(\frac{4^{2\,x+y}}{4^{(2\,y+4)/2}}\right)-\log_2\left(\frac{2^{2\,(x+2\,y)}}{2^{3\,x-1}}\right)\\
&=\log_4\left(\frac{4^{2\,x+y}}{4^{y+2}}\right)-\log_2\left(\frac{2^{2\,x+4\,y}}{2^{3\,x-1}}\right)\\
&=\log_4\left(4^{2\,x+y-(y+2)}\right)-\log_2\left(2^{2\,x+4\,y-(3\,x-1)}\right)\\
&=\log_4\left(4^{2\,x-2}\right)-\log_2\left(2^{4\,y-x+1}\right)\\
&=(2\,x-2)\,\log_4(4)-(4\,y-x+1)\,\log_2(2)\\
&=(2\,x-2)-(4\,y-x+1)\\
&=2\,x-2-4\,y+x-1\\
&=\boxed{3\,x-4\,y-3}
\end{aligned}$$

Partie 2

1. $f(x)$ est définie si et seulement si $x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$.
   $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]-1\,,\,+\infty\,[}$

2. $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \geq 0$.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + 1 = \frac{1+x+1}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$$

   Faisons un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_g = \,]-\infty\,,\,-2\,]\,\cup\,]-1\,,\,+\infty\,[}$

3.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \boxed{-\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x+1}+1}}} = \boxed{-\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}}}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2}\frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+2}} = -\frac{1}{(x+1)^2}\frac{(x+1)^{1/2}}{2(x+2)^{1/2}} = \boxed{-\frac{1}{2(x+1)^{3/2}(x+2)^{1/2}}}$$

4. La fonction f n'étant pas définie en $x=-1$, il faut la tracer en deux parties, l'une sur $[-5\,,\,-1-\varepsilon\,]$ et l'autre sur $[-1+\varepsilon\,,\,5\,]$:

```
deff("y=f(x)" , "y = 1 ./ (x+1) + 1");
eps = 10^(-8);
scf();
// partie 1 : x ∈ [-5,-1[ : on choisit x ∈ [-5,-1-eps]
x = linspace(-5,-1-eps,1000);
y = f(x);
plot(x,y,"k-");
// partie 2 : x ∈ ]-1,5] : on choisit x ∈ [-1+eps,5]
x = linspace(-1+eps,5,1000);
y = f(x);
plot(x,y,"k-");
// bornes du repere
replot([-5,-2,5,4]);
```

Partie 3

a) f est continue sur $]-\infty\,,\,1\,[$ (car $a\,x^2+b\,x+c$ continue sur $\mathbb{R}$),
et sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$ (car $\ln(x)$ continue sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$).
Faisons en sorte que f soit continue en $x=1$. On calcule les limites à gauche et à droite en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a\,x^2+b\,x+c = a\,1^2+b\,1+c = a+b+c \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = \ln(1) = 0 \end{array}\right\}$$

$$f \text{ continue en } 1 \iff \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \iff a+b+c=0$$

b) f' est continue sur $]-\infty,1[$ car $a\,x^2+b\,x+c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $2\,a\,x+b$ est continue sur $\mathbb{R}$.
f' est continue sur $]1,+\infty[$ car $\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée $1/x$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Faisons en sorte qu'elle soit prolongeable par continuité en $x=1$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 2\,a\,x+b & \text{si} & x<1 \\ 1/x & \text{si} & x>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) & = & 2\,a\,1+b = 2\,a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) & = & 1/1 = 1 \end{array}\right.$$

$$f' \text{ prolongeable par continuité en } 1 \iff \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) \iff 2\,a+b=1$$

c) On écrit la condition $f(0)=0$:

$$f(0) = c = 0$$

Donc $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2\,a & + & b & & & = & 1 \\ & & & & c & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=1\ ,\ b=-1 \text{ et } c=0}$.

Partie 4

1. Il y a deux conditions à vérifier :
   (a) f est continue sur I : c'est le cas car f est la somme de la fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale, ces deux fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, leur somme f est aussi continue sur $\mathbb{R}$, donc sur I.
   (b) $f(a)f(b) < 0$: c'est le cas car

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \exp(0) - 2 = -1 < 0 \\ f(1) & = & \exp(1) + 1 + 1 + 1 - 2 = \exp(1) + 1 > 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

2. Il faut montrer que les trois propriétés supplémentaires pour la méthode *de Newton* sont vérifiées :
   (a) f est deux fois dérivable sur I :
   f est la somme d'une fonction exponentielle et d'un polynome, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur I, ainsi que leur somme f.

$$f'(x) = \exp(x) + 4\,x^3 + 3\,x^2 + 1$$

   Même propriété pour f', somme d'une fonction exponentielle et d'un polynome, donc dérivable.

$$f''(x) = \exp(x) + 12\,x^2 + 6\,x$$

   (b) Pour $x \in I$, x est positif ou nul, donc :

$$f'(x) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} + \underbrace{4\,x^3}_{\geq 0} + \underbrace{3\,x^2}_{\geq 0} + 1 > 1 > 0$$

   (c) Pour $x \in I$, x est positif ou nul, donc :

$$f''(x) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} + \underbrace{12\,x^2}_{\geq 0} + \underbrace{6\,x}_{\geq 0} \geq 0$$