1 Modélisation par programme linéaire

Exercice 1 : **Production de vins** (G. Finke)

Dans une distillerie américaine on produit trois sortes de vin allemands authentiques : Heidelberg sweet, Heidelberg regular et Deutschland extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	raisin - type A (boisseau)	raisin - type B (boisseau)	sucre (kg)	main d'œuvre (heures)	profit (€)
Heidelberg sweet	1	1	2	2	10
Heidelberg regular	2	0	1	3	12
Deutschl. extra dry	0	2	0	1	20

La distillerie possède 150 boisseaux de raisin de type A, 150 boisseaux de raisin de type B, 80 kg de sucre et peut fournir 225 heures de travail. Quelles quantités faut-il produire de ces trois vins pour obtenir un profit maximum ?

Question 1 – Formuler comme programme linéaire.

Exercice 2 : **Publicité**

Une entreprise dispose d'un budget publicitaire de 4800 (unités monétaires) pour le lancement de son nouveau produit. Sa campagne publicitaire utilisera à la fois des spots télévisés et des pages dans la presse quotidienne. On pense que chaque minute de télévision va atteindre 100 000 nouveaux spectateurs et chaque page dans un journal va être lue par 80 000 nouveaux lecteurs. Une minute de télévision coûte 800 et une page dans un journal 600. La direction de l'entreprise souhaite diffuser au moins trois minutes de spot et une page dans un journal. Son objectif est de maximiser le nombre total de cibles (spectateurs et lecteurs).

Question 1 – Modéliser ce problème en programme linéaire.

Question 2 – Représenter l'espace des solutions réalisables.

Question 3 – Quelle est la combinaison optimale si le budget est augmenté de 4800 à 6000 ?

Question 4 – Quelle est la décision optimale s'il n'y a pas de contrainte de temps de télévision ?

Exercice 3 : **Compagnie aérienne** (traduit de Hillier et Lieberman)

Une compagnie aérienne, en pleine expansion, est en train d'organiser son service clientèle et a besoin de savoir le nombre d'employés dont elle aura besoin pour les prochaines années. L'équipe RO doit donc étudier les besoins pour déterminer le nombre minimum de personnel nécessaire afin de satisfaire les demandes des clients. Basé sur l'ordonnancement des vols, un nouveau planning du personnel est préparé pour les différents créneaux horaires de la journée. Les informations nécessaires pour la planification sont données dans le tableau suivant.

Créneaux	Créneaux couverts poste 1	poste 2	poste 3	poste 4	poste 5	Nb min pers
6h-8h	x					48
8h-10h	x	x				79
10h-12h	x	x				65
12h-14h	x	x	x			87
14h-16h		x	x			64
16h-18h			x	x		73
18h-20h			x	x		82
20h-22h				x		43
22h-24h				x	x	52
24h-6h					x	15
Coût/1j,1p	170 €	160 €	175 €	180 €	195 €	

Table 1: Données pour la planification du personnel

Chaque employé doit travailler 8h par jour et 5 jours par semaine. Les postes autorisés comprennent les créneaux suivants (montré aussi dans le tableau par des croix):

Poste 1: 6h à 14h Poste 2: 8h à 16h Poste 3: 12h à 20h
Poste 4: 16h à 24h Poste 5: 22h à 6h

Pour chaque poste, le coût associé est donné dans la dernière ligne du tableau (Coût/1j,1p: Coût pour une journée, pour une personne). La question est de savoir combien d'employés il faut affecter dans chaque poste, chaque jour, afin de minimiser le coût total du personnel et en respectant le nombre minimum du personnel nécessaire (dernière colonne dans le tableau).

Question 1 – Modéliser ce problème en programme linéaire. Trouver les contraintes redondantes.

Exercice 4 : **Fabrication d'huile d'olives** (J.-F. Hêche)

Une entreprise fabrique trois qualités différentes d'huile d'olive. Les quantités maximales pouvant être vendues chaque mois ainsi que les prix de vente sont donnés dans la table suivante :

Produit	Ventes maximales (en litres)	Prix de vente (en €/litre)
Huile A	3000	4
Huile B	3000	6
Huile C	2000	10

L'entreprise paie 1000€ pour une tonne d'olives. Chaque tonne d'olives fournit soit 300 litres d'huile A soit 200 litres d'huile B (les coûts de ces transformations ne sont pas modélisés). Chaque litre d'huile A peut être raffiné pour produire 6 dl d'huile B et 3 dl d'huile C. Le coût d'un tel raffinement est de 0.5 € par litre. De même, chaque litre d'huile B peut être raffiné pour obtenir 8 dl d'huile C. Le coût de ce raffinement et de 0.3€ par litre.

Question 1 – Formuler un programme linéaire afin d'aider l'entreprise à déterminer un plan de production mensuel maximisant son profit. Préciser clairement les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.

Exercice 5 : **Bergamote** (J.-F. Hêche)

Une distillerie produit de l'essence de bergamote pour les parfumeurs de la région. La fabrication d'un litre d'essence de bergamote génère 0.4 litres de déchets polluants liquides.

La distillerie peut soit faire traiter ces déchets par une station d'épuration avant de les déverser dans la rivière, soit les déverser directement dans la rivière. La station d'épuration traite au plus 8000 litres de déchets par semaine. Le processus d'épuration n'est pas parfait : 20% des déchets traités par la station d'épuration et déversés ensuite dans la rivière sont encore polluants. Pour chaque litre de déchets transitant par la station d'épuration, 5 euros sont facturés à la distillerie. L'état perçoit une taxe de 15 euros par litre de déchets polluants déversé dans la rivière, qu'on ait tenté de les traiter ou non. La loi limite à 2800 le nombre de litres de déchets polluants pouvant être déversés dans la rivière chaque semaine. Le prix de vente d'un litre d'essence de bergamote est de 110 euros et le coût des matières premières pour cette essence est de 20 euros/litre.

Question 1 – La distillerie souhaite maximiser son profit hebdomadaire. En supposant que la distillerie réussit toujours à vendre tout ce qu'elle produit, énoncer ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

2 Formes linéaire et canonique

Exercice 6 : **Formes linéaires et canoniques** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous formes canonique et standard.

1. Maximiser $z = 2x_1 - x_2$

$$\text{s.c.} \quad \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 7 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

2. Minimiser $z = -3x_1 + x_3$

$$\text{s.c.} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & 3x_3 & \geq & 2 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & & , & & x_3 & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \leq & 0 \end{array}$$

3. Minimiser $z = 2x_1 - 3x_2$

$$\text{s.c.} \quad \begin{array}{rcrcl} & & x_2 & \geq & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Exercice 7 : **Linéarisation** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous forme canonique.

1. Minimiser $z = \max(2x_1 - 3x_2, x_1 - 2x_2 + 4x_3)$

$$\text{s.c.} \quad \begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & & & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 5 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Minimiser $z = |x_1 - 2x_3| + |-x_1 + 3x_2 + x_3|$

$$\text{s.c.} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 5x_2 & - & 3x_3 & \leq & 6 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

3. Minimiser $z = |x_1 - 10| + \max(2x_2 - 4, |3x_1 - 4x_3|)$

$$\begin{array}{llcl} \text{s.c.} & |x_1| + x_2 & \leq & 1 \\ & \max(-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - 2x_3) & \leq & 7 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

3 Résolution graphique

Exercice 8 : **Résolution graphique** (J.-F. Hêche)

Soit le programme linéaire

$$\begin{array}{lrcrcr} \max z & = & 3x & + & 2y & \\ \text{s.c.} & x & - & y & \geq & -2 \\ & 2x & + & y & \leq & 8 \\ & x & + & y & \leq & 5 \\ & x & & & \geq & 0 \\ & & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Question 1 – Dessiner la région admissible R du problème.

Question 2 – Résoudre le problème graphiquement.

Exercice 9 : **Toujours plus de bénéfices !**
(*Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle - 3. Programmation linéaire et extensions, problèmes classiques* de Roseaux. Dunod, 2004.)

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2. Le marché est porteur et toute la production de la semaine sera vendue. Chacun des ces produits demande des heures de fabrications sur les machines A, B, C, D, E comme indiqué dans le tableau 3

	A	B	C	D	E
P_1	0h	1,5h	2h	3h	3h
P_2	3h	4h	3h	2h	0h
Disponibilité totale de chaque machine	39h	60h	57h	70h	57h

Table 2: Temps d'usinage des produits par machine

Les marges brutes de chaque produit sont respectivement :

- $M_1 = 1700$ euros
- $M_2 = 3200$ euros

Question 1 – Donner une formalisation du problème dans l'optique de maximiser le gain obtenu par la vente des deux produits tout en tenant compte des contraintes de fabrication.

Question 2 – Fournir une solution graphique.

Maintenant, les produits utilisent trois fournitures F1, F2 et F3 dans les conditions indiquées dans le tableau 3.

Question 3 – Ré-écrire sous forme algébrique seulement, le nouveau programme linéaire ainsi créé et éliminer les contraintes redondantes.

Exercice 10 : **Bases** (J.-F. Hêche)

	F1	F2	F3
P1	0	12	8
P2	5	36	0
Unités	Kg	M^3	M^2
Stock disponible	55	432	136

Table 3: Répartition des fournitures par produit

Soit le système d'équations linéaires $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Question 1 – Déterminer toutes les bases de la matrice A.

Question 2 – Calculer la solution de base associée à chacune des bases trouvées au point précédent et décider lesquelles sont admissibles.

Question 3 – Représenter graphiquement les projections des solutions basiques ainsi que les projections des deux équations du système dans le repère (O, x_1, x_2).

Exercice 11 : **Bases** (J.-F. Hêche)

On considère le programme linéaire canonique

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 2x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{s.c.} & 2x_1 & - & 4x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Question 1 – Représenter son domaine admissible.

Question 2 – Pour chacune des bases qui suivent, identifier dans votre dessin le point correspondant à sa solution de base.

$B1 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $\quad B2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ $\quad B3 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$ $\quad B4 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$

Remarque. Les variables x_3, x_4, x_5 et x_6 correspondent aux variables d'écart introduites lors de la mise sous forme standard.

Question 3 – En vous aidant de votre dessin, donner le nombre de bases du P.L., son nombre de bases admissibles ainsi que le nombre de points extrêmes du domaine admissible.

Question 4 – Donner toutes les bases optimales du programme linéaire ainsi que toutes les solutions optimales (et leur valeur).

4 Algorithme du simplex

Exercice 12 : **Simplexe** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{lrcrcl} \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ s.c. & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Spécifier à chaque itération les variables de base et hors base ainsi que le point extrême visité.

Exercice 13 : **Simplexe**

La méthode du simplexe termine avec les équations ci-dessous :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 10 & - & x_1 & & & - & 2x_6 \\ x_4 & = & 3 & - & 2x_1 & - & x_5 & + & x_6 \\ x_2 & = & 9 & - & x_1 & - & 2x_5 & - & 2x_6 \\ x_3 & = & 7 & + & x_1 & - & 2x_5 & - & x_6 \end{array}$$

Question 1 – Indiquer la solution optimale correspondante.

Question 2 – Trouver une deuxième solution de base optimale.

Question 3 – Déterminer une autre solution optimale qui n'est pas une solution de base.

Exercice 14 : (d'après Olivier Briant)

Pour chacun des programmes linéaires suivants, vous devez dire si il est sous la forme d'une étape de l'algorithme du simplexe telle que vue en cours et si c'est possible, donner la solution de base associée. Cette solution de base est elle réalisable ? Est-elle optimale ? Si la solution de base est réalisable mais non optimale, faire une itération du simplexe.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} z & = & -12 & + & x_1 & & & & & + & 2x_4 \\ x_1 & = & 3 & & & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 \\ x_2 & = & 7 & & & & & + & 3x_3 & + & 5x_4 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & -3 & + & 2x_1 & & & + & x_4 \\ x_3 & = & 11 & - & 5x_1 & + & 3x_2 & - & x_4 \\ x_5 & = & 2 & + & 3x_1 & + & x_2 & & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} z & = & 10 & - & 5x_1 & + & 2x_2 \\ x_3 & = & -1 & + & x_1 & + & 7x_2 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & + & 3x_2 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} z & = & 17 & - & x_1 & + & 3x_2 \\ x_3 & = & 6 & + & x_1 & + & 3x_2 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & - & 7x_2 \\ x_5 & = & 4 & + & 8x_1 & + & 2x_2 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & -12 & - & 2x_1 & & & - & 3x_5 \\ x_4 & = & 0 & + & x_1 & & & & \\ x_5 & = & 1 & - & 2x_1 & - & x_2 & & \\ x_3 & = & 4 & - & x_1 & + & 3x_2 & & \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcr} z & = & 3 & + & 3x_1 & - & x_3 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & 2x_3 \\ x_4 & = & 4 & + & 2x_1 & - & 5x_3 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 13 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & x_4 \\ x_1 & = & 1 & - & 2x_2 & & & - & 3x_4 \\ x_3 & = & 4 & + & 8x_2 & & & - & 2x_4 \end{array}$$

Exercice 15 : **Simplexe**

Question 1 – Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{lrcrcl} \max z = & 7x_1 & + & 3x_2 & & \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Exercice 16 : **Simplexe**

Question 1 – Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min z = & 4x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & & \\ \text{s.c.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

5 Dualité

Exercice 17 :

Une coopérative viticole produit des vins rouges de Bordeaux à partir de différents cépages: cabernet franc, cabernet-sauvignon et merlot. Le tableau ci-dessous donne les stocks (en hl) pour chaque cépage, ainsi que les proportions de chaque cépage (en %) et le profit (en €/litre) pour chaque assemblage A et B.

	Cabernet franc	Cabernet-sauvignon	Merlot	Profit
Bordeaux A	30	20	50	7
Bordeaux B	50	10	40	5
Stocks	5 000	1000	4000	

Quelles quantités de vins faut-il produire pour maximiser le profit de la coopérative ?

Question 1 – Modélisez ce problème comme un programme linéaire.

La coopérative doit faire face à un effondrement des prix du vin. Pour aider l'entreprise en difficulté, l'Union Européenne propose de racheter les stocks de la coopérative. Quel est le prix minimal que doit proposer l'UE pour chaque cépage afin que les profits de l'entreprise restent constants ?

Question 2 – Modélisez ce problème comme un programme linéaire.

Question 3 – Donner la solution optimale du problème de production de vins que se pose la coopérative. Remarquer qu'il est ici inutile de faire tourner un Simplexe !

Question 4 – Quelle est la solution optimale au problème de rachat que se pose l'UE ? Comment se simplifie le programme linéaire par rapport à la question précédente ?

Exercice 18 : On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & & & & & x_3 & \geq & 2 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1 – Écrire son dual.

Question 2 – Écrire le dual du dual. Que remarquez-vous ?

Exercice 19 : **Transport**

Voici la formulation d'un petit problème de transport impliquant 3 entrepôts et 2 clients:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min z = & 3x_{11} & + & 2x_{12} & + & 4x_{21} & + & x_{22} & + & 2x_{31} & + & 3x_{32} \\
 & & & & & & & & & & & \\
s.c. & x_{11} & + & x_{12} & \leq & 60 & & & & & & \\
 & x_{21} & + & x_{22} & \leq & 50 & & & & & & \\
 & x_{31} & + & x_{32} & \leq & 50 & & & & & & \\
 & x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & = & 90 & & & & \\
 & x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & = & 60 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & x_{11}, & & x_{12}, & & x_{21}, & & x_{22}, & & x_{31}, & & x_{32} \geq 0
\end{array}$$

Ce problème a été mis sous forme standard en introduisant des variables d'écart s_1, s_2 et s_3 dans les trois premières contraintes, puis résolu par un logiciel utilisant la méthode du simplexe. Dans la solution optimale, les variables en base à l'optimum sont x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{31} et s_1.

Question 1 – Mettez le problème sous forme standard (comme suggéré ci-dessus).

Question 2 – Utilisez l'information donnée plus haut pour calculer la solution optimale du problème et le coût de transport correspondant (expliquez les étapes du raisonnement).

Question 3 – Formulez le problème dual.

Question 4 – Resolvez le problème dual.

Question 5 – Montrer que la solution obtenue est bien optimale.

Question 6 – Le gestionnaire du troisième entrepôt s'aperçoit qu'il a commis une erreur en évaluant ses stocks: il possède en fait 55 unités en stock. En supposant que la base optimale ne soit pas affectée, quel sera l'effet de cette correction sur le coût de transport optimal?

Exercice 20 : **Four de fusion** (Olivier Briant, C. Rapine)

Une entreprise de métallurgie utilise un four à arc électrique pour faire fondre le minerai. La puissance du four, exprimée en joule par minute, est modulable en cours de fusion selon 4 régimes: un régime à 2 GJ/mn, 3 GJ/mn, 5 GJ/mn et 8 GJ/mn. La vitesse de fonte du minerai, exprimée en tonne par minute, dépend directement de la puissance électrique du régime choisi. Elle est respectivement de 3, 4, 6 et 7 tonnes à la minutes. On peut changer plusieurs fois de régime pendant la fusion. Toutefois, pour garantir un bon fonctionnement du four, la première heure doit se faire en régime 1 ou 2 pour chauffer progressivement les parois du four (on peut mixer les 2 régimes en faisant par exemple 20 mn en régime 1 et 40 mn en régime 2).

L'entreprise souhaite couler 1000 tonnes de minerai en au plus 3 heures. Son problème est de décider les temps d'utilisation de chaque régime du four pour minimiser l'énergie utilisée.

Question 1 – Modélisez ce problème comme un programme linéaire (P). Vous préciserez les variables de décision choisies, les contraintes, et leur signification.

Question 2 – Écrire le programme dual (D) de (P).

Question 3 – Montrer, en utilisant le théorème des écarts complémentaires, que la solution $y^* = (3, -13, 4)$ est optimale pour (D), et donner une solution optimale x^* de (P).

Question 4 – La solution x^* est-elle la seule solution optimale de (P) ?

Question 5 – Donner une interprétation économique de chacune des valeurs de la solution y^* du dual.

L'entreprise dispose d'un second four de fusion d'un modèle plus ancien. Sa puissance n'est pas modulable : il utilise 4 GJ pour faire fondre une tonne de minerai. Il est suffisamment rapide pour traiter 1000 tonnes en 3 heures. L'entreprise se demande quelle quantité de minerai il convient de traiter dans ce second four (et quels régimes utilisés dans le premier four avec le minerai restant).

Question 6 – Comment modifier le programme linéaire (P) pour répondre à ce problème ? On pourra introduire une variable de décision α représentant la quantité de minerai traité dans le second four.

Question 7 – L'on s'interdit de démarrer le second four pour une charge de minerai inférieure à 150 tonnes. Comment modéliser cette contrainte ? On pourra introduire une variable binaire.

Question 8 – L'ingénieur de production vous précise que l'on doit passer au moins 30 minutes en régime 3 avant de pouvoir monter le four en régime 4. Comment modéliser cette contrainte ? On pourra introduire une variable binaire égale à 1 si $x_4 > 0$.

Question 9 – En fait la règle métier exacte pour pouvoir passer en régime 4 est la suivante :

- Soit avoir passé au moins 30 minutes en régime 3,
- Soit ne pas avoir utilisé le régime 3, mais passer au moins 90 minutes en régime 2

Comment modéliser cette contrainte ?

Exercice 21 : La fabrique de jouets (d'après Olivier Briant)

Un fabriquant produit actuellement quatre types de jouets : A, B, C et D vendus respectivement à 53, 56, 62, et 82 € pièce. Ces jouets doivent passer dans deux ateliers, dont les capacités maximales en minutes sont de 1700 et 2600. Les temps de fabrication des quatre types de jouets dans le premier atelier sont respectivement de 2, 3, 1, et 3 minutes, et dans le second atelier de 2, 2, 3, et 4 minutes.

Les quatre type de jouets partagent un composant commun livré par un fournisseur. Les approvisionnements du fabriquant lui permettent de produire exactement 1000 jouets. Il veut donc savoir quels jouets fabriquer pour maximiser son bénéfice.

Question 1 – Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire (P) (on fera abstraction du fait que les variables doivent être entières).

Question 2 – Écrire le programme dual du programme linéaire (P).

Pour résoudre son problème, le fabriquant a utilisé un logiciel commercial basé sur le simplexe. Ce logiciel a fourni les informations suivantes sur la solution optimale (les `xxx.xxxxxx` proviennent d'une mauvaise sortie de l'imprimante) :

```
Objective = 59500.00000

Rows Section
   Number      Row          Value       Slack Value    Dual Value
 L          c1______   1700.000000     xxx.xxxxxx      3.666667
```

```
 L          c2______   2600.000000    xxx.xxxxxx     12.666667
 E          c3______   1000.000000    xxx.xxxxxx     20.333333

Columns Section
   Number   Column        Value      Input Cost   Reduced Cost
 C          X1______    500.000000    53.000000    xxx.xxxxxx
 C          X2______    xxx.xxxxxx    56.000000     -0.666667
 C          X3______    400.000000    62.000000    xxx.xxxxxx
 C          X4______    xxx.xxxxxx    82.000000    xxx.xxxxxx
```

Question 3 – Expliquer la signification des informations fournies, et donner, si possible, les valeurs qui devraient se trouver à la place des `xxx.xxxxxx`.

Question 4 – Donner une interprétation économique des valeurs optimales des variables duales.

Très déçu de ne pas produire le jouet B qui lui tenait à coeur, le fabriquant aimerait savoir à quel prix minimum il doit le vendre pour être rentable et ainsi l'inclure dans son plan de production optimal.

Question 5 – Pouvez-vous lui répondre au vu des résultats de l'optimisation ?

Question 6 – Jusqu'à quelle valeur peut-il augmenter ou diminuer le prix du jouet A sans que la solution optimale ne change ?

En regardant les informations données par son logiciel, il a déterminé le prix maximum qu'il peut payer chaque minute supplémentaire dans le premier atelier sans diminuer son bénéfice.

Question 7 – Quel est ce prix maximum ? Jusqu'à combien de minutes supplémentaires ce prix reste-t-il valable ?

Il souhaite créer un nouveau type de jouet, E, demandant 9 minutes dans le premier atelier et 10 minutes dans le second.

Question 8 – A quel prix minimum a-t-il intérêt à le vendre s'il veut les incorporer parmi les 1000 jouets produits ?

TD Programmation Linéaire, Dualité

RO 2009–2010

Exercice 1 : La fabrique de jouets (corrigé)

Question 1 – Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire (P)

Soient x_1, x_2, x_3, et x_4 les nombres de jouets A, B, C et D produits. Le problème se modélise par :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl} \max & 53x_1 & + & 56x_2 & + & 62x_3 & + & 82x_4 & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 1x_3 & + & 3x_4 & \leq & 1700 & (c_2) \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 2600 & (c_2) \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1000 & (c_3) \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 & \end{array}$$

Les contraintes (c_1) et (c_2) expriment les contraintes de temps sur les deux ateliers. La contrainte (c_3) impose le nombre de jouets produit à 1000 unités.

Question 2 – Écrire le programme dual du programme linéaire (P).

Soient y_1, y_2 et y_3 les variables duales associées aux contraintes (c_1), (c_2) et (c_3). Noter que y_1 et y_2 seront des variables ≥ 0 étant associées à des $\leq$ dans (P), alors que y_3 sera $\in \mathbb{R}$ étant associée à une contrainte $=$. Le programme dual est

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 1700y_1 & + & 2600y_2 & + & 1000y_3 & & \\ \text{s.t.} & 2y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 53 \\ & 3y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 56 \\ & 1y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \geq & 62 \\ & 3y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & \geq & 82 \\ & y_1 & , & y_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & y_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Question 3 – Expliquer la signification des informations fournies, et donner, si possible, les valeurs qui devraient se trouver à la place des `xxx.xxxxxx`.

Toutes les variables d'écart (`Slack Value`) sont à 0 car toutes les variables duales (`Dual Value`) sont non nulles.
Les coûts réduits (`Reduced Cost`) de x_1 et x_3 sont 0 car $x_1^* = 500 \neq 0$ et $x_3^* = 400 \neq 0$, ce qui implique que x_1 et x_3 sont des variables de base.
Inversement, comme le coûts réduits de x_2 est $-0.666 < 0$, on en déduit que x_2 est hors base, et donc $x_2^* = 0$.
Comme x^* est réalisable, on doit avoir $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* = 1000$, donc $x_4^* = 100$.
Le coût réduit de x_4 est donc 0 car $x_4^* = 100 \neq 0$ implique que x_4 est une variable de base.

Question 4 – Donner une interprétation économique des valeurs optimales des variables duales.

y_1^* et y_2^* sont les prix maximum qu'on accepte de payer chaque minute supplémentaire dans les deux ateliers. y_3^* est ce qu'on gagnerait si on augmentait le nombre de jouets de 1 unité (passant alors de 1000 à 1001).

Question 5 – Pouvez-vous lui répondre au vu des résultats de l'optimisation ?

Soit $\bar{c}_2$ le coût réduit de la variable x_2.
On sait que $\bar{c}_2 = c_2 - 3y_1^* - 2y_2^* - y_3^* = c_2 - 56.66666$.
Pour que $x_2^* > 0$ il faut que x_2 entre dans la base, et donc que son coût réduit soit ≥ 0, c'est-à-dire $c_2 \geq 56.66666$.

Question 6 – Jusqu'à quelle valeur peut-il augmenter ou diminuer le prix du jouet A sans que la solution optimale ne change ?

Application du théorème des écarts complémentaires (T.E.C.) :
$x^* = (500, 0, 400, 100)$ est optimale si et seulement il existe un y^* réalisable de (D) vérifiant les E.C., c'est-à-dire y^* tel que

1. $2y_1^* + 2y_2^* + y_3^* = 53 + \varepsilon$ car $x_1^* = 500 \neq 0$
2. $y_1^* + 3y_2^* + y_3^* = 62$ car $x_3^* = 400 \neq 0$
3. $3y_1^* + 4y_2^* + y_3^* = 82$ car $x_4^* = 100 \neq 0$

La seule solution de (a), (b) et (c) est

$$y^* = (\ 3.666\ +\ \frac{1}{3}\,\varepsilon\ ,\ 12.666\ -\ \frac{2}{3}\,\varepsilon\ ,\ 20.333\ +\ \frac{5}{3}\,\varepsilon\ )$$

Cependant pour que y^* soit réalisable, il doit vérifier $3y_1^* + 2y_2^* + y_3^* \geq 56$, $y_1^* \geq 0$ et $y_2^* \geq 0$,
ce qui donne : $\begin{cases} 56.6666\ +\ \frac{4}{3}\,\varepsilon\ \geq 56 \\ 3.666\ +\ \frac{1}{3}\,\varepsilon\ \geq 0 \\ 12.666\ -\ \frac{2}{3}\,\varepsilon\ \geq 0 \end{cases}$
Donc la production ne change pas tant que $-0.5\ \leq\ \varepsilon\ \leq\ 19$, c'est-à-dire tant que le prix de A reste entre 52.5 euros et 72 euros.

Question 7 – Quel est ce prix maximum ? Jusqu'à combien de minutes supplémentaires ce prix reste-t-il valable ?

Application du théorème des écarts complémentaires (T.E.C.) :
$y^* = (500, 0, 400, 100)$ est optimale si et seulement il existe un x^* réalisable de (P) vérifiant le T.E.C., c'est-à-dire x^* tel que

1. $2x_1^* + 3x_2^* + x_3^* + 3x_4^* = 1700 + \varepsilon$ car $y_1^* \neq 0$
2. $2x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* + 4x_4^* = 2600$ car $y_2^* \neq 0$
3. $x_2^* = 0$ car $3y_1^* + 2y_2^* + y_3^* > 56$
4. $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* = 1000$, $x_1^* \geq 0$, $x_2^* \geq 0$, $x_3^* \geq 0$, $x_3^* \geq 0$ car x^* réalisable

La seule solution de (a), (b), (c) et (d-1) est

$$x^* = (\ 500\ +\ \frac{1}{3}\,\varepsilon\ ,\ 0\ ,\ 400\ -\ \frac{2}{3}\,\varepsilon\ ,\ 100\ +\ \frac{1}{3}\,\varepsilon\ )$$

(d) donne $500\ +\ \frac{1}{3}\,\varepsilon\ \geq\ 0$, $400\ -\ \frac{2}{3}\,\varepsilon\ \geq\ 0$, et $100\ +\ \frac{1}{3}\,\varepsilon\ \geq\ 0$
Donc le prix de 3.6666 euros la minute dans le premier atelier ne change pas tant que $-300\ \leq\ \varepsilon\ \leq\ 600$, c'est-à-dire tant que le temps disponible dans le premier atelier reste compris entre 1400 et 2300 minutes.

Question 8 – A quel prix minimum a-t-il intérêt à le vendre s'il veut les incorporer parmi les 1000 jouets produits ?

Pour pouvoir produire le jouet E, il faut que son coût réduit $\bar{c}_5$ soit positif ou nul.
$\bar{c}_5 = c_5 - 9y_1^* - 10y_2^* - y_3^* = c_5 - 180$
Donc il faut vendre E à 180 euros minimum pour avoir une chance de le produire.