Corrigé des exos vus en TD de la Feuille n.2 - MAT201

Exercice 1 (*). Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? (justifier la réponse)

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Solution : Rappelons d'abord la définition d'amphi :

Déf : Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$). On dit qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si :

i) F n'est pas vide : $F \neq \emptyset$

ii) F est stable pour l'addition : $\forall v, w \in F$ on a $v + w \in F$

iii) F est stable pour la multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall v \in F$ on a $\lambda v \in F$.

Rem : De façon équivalente, une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel ssi F (munie des lois héritées de E) est encore un espace vectoriel. Noter que F est nécessairement non vide car $0 \in F$.

(a) A n'est pas un sous-espace de $E = \mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable pour multiplication par les scalaires (propriété (iii))

Exemple : $v = (1,2) \in A$ car $1 \leq 2$

mais si $\lambda = -1$, $-1 \cdot v = (-1,-2) \notin A$ car $-1 \nleq -2$.

(b) B n'est pas un sous-espace de $E=\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par l'addition (propriété (ii))

<u>Exemple</u>: $v=(1,0)$ et $w=(0,1)$ appartiennent à B (car $1\cdot 0=0\cdot 1=0$) mais $v+w=(1,1)\notin B$ car $1\cdot 1\neq 0$.

(c) C est un sous-espace de $E=\mathbb{R}^2$. Vérifions les 3 propriétés :

(i) $C\neq\emptyset$ car $(0,0)\in C$

(ii) C est stable par l'addition : si $v=(x,x)$ et $w=(x',x')$ sont dans C, alors $v+w=(x+x',x+x')\in C$

(iii) C est stable par la multiplication par des scalaires : si $v=(x,x)\in C$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\lambda\cdot v=(\lambda x,\lambda x)\in C$

(d) D n'est pas un sous-espace de $E=\mathbb{R}^2$ car $(0,0)\notin D$ (on a que $0+0\neq 1$), ce qui contredit la remarque.

(e) E n'est pas un sous-espace de $E=\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par sommes

<u>Exemple</u>: $v=(1,1)$, $w=(-1,1)\in E$, mais $v+w=(0,2)\notin E$ car $0^2-2^2\neq 0$.

(f) F est un sous-espace de $E=\mathbb{R}^2$, car F contient seulement le vecteur $(0,0)$. En effet si $x\neq 0$ (ou $y\neq 0$) on a que $x^2+y^2>0$. Donc $F=\{(0,0)\}$ est le sous-espace triviale.

Exercice 2 (*). Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

a) L'ensemble B des suites bornées.

b) L'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

c) L'ensemble des suites constantes à partir d'un certain rang.

d) L'ensemble des suites décroissantes à partir d'un certain rang.

e) L'ensemble des suites convergeant vers 0.

f) L'ensemble des suites monotones.

g) L'ensemble des suites dont la valeur est $\leqslant 1$ à partir d'un certain rang.

h) L'ensemble des suites 3-périodiques.[1]

i) L'ensemble des suites périodiques.[2]

Solution: Rappelons que $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\text{suites réelles}\}$ est muni de la structure de espace vectoriel réel où :

- Addition : si $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow (u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- Multiplication par scalaires : si $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot (u_n)_n = (\lambda u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- Vecteur nul : $0_E = (0)_n = (0, 0, \dots)$ suite constante nulle.

(a) $B = \{\text{suites réelles bornées}\}$

Rappelons qu'une suite $(u_n)_n \in B \Longleftrightarrow \exists C > 0$ tel que $|u_n| \leq C$, $\forall n \geq 0$.

B est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car :

(i) $0_E = (0, 0, \dots) \in B$ (la suite nulle est bornée par 0)

(ii) Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in B$, alors $\exists C_u, C_v > 0$ tels que, $\forall n \geq 0$, $|u_n| \leq C_u$ et $|v_n| \leq C_v$. Donc $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq C_u + C_v$ et $(u_n + v_n)_n \in B$.

(iii) Si $(u_n)_n \in B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\exists C > 0$ tel que $|u_n| \leq C$. Alors $|\lambda \cdot u_n| = |\lambda| \cdot |u_n| \leq |\lambda| \cdot |C|$. Donc $(\lambda \cdot u_n)_n \in B$.

(b) $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq. } u_n = 0, \forall n \geq N\}$

F est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car :

(i) la suite nulle $0_E = (0, 0, \dots) \in F$ (avec $N = 0$)

(ii) Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in F$ alors $\exists N_u, N_v \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = 0$ $\forall n \geq N_u$ et $v_n = 0$ $\forall n \geq N_v$. Donc si $N = \max(N_u, N_v)$, $u_n + v_n = 0$ $\forall n \geq N$. Donc $(u_n)_n + (v_n)_n \in F$.

(iii) Si $(u_n)_n \in F$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ $\forall n \geq N \Rightarrow \lambda \cdot u_n = 0$ $\forall n \geq N$. Donc $\lambda \cdot (u_n)_n \in F$.

(c) $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N}, \exists C \in \mathbb{R} \text{ tq. } u_n = C \ \forall n \geq N\}$

F est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car :

(i) la suite nulle $0_E = (0, 0, \dots) \in F$ (avec $N = 0$ et $C = 0$)

(ii) Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in F$ alors $\exists N_u, N_v \in \mathbb{N}$ et $\exists C_u, C_v \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = C_u$ $\forall n \geq N_u$ et $v_n = C_v$ $\forall n \geq N_v$. Si $N = \max(N_u, N_v)$, alors $u_n + v_n = C_u + C_v$ $\forall n \geq N \Rightarrow (u_n)_n + (v_n)_n \in F$.

(iii) Si $(u_n)_n \in F$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}$ tq. $u_n = C \ \forall n \geq N$.

Donc $\lambda \cdot u_n = \lambda \cdot C \ \forall n \geq N$. et $\lambda \cdot (u_n)_n \in F$.

(d) $F = \{(u_n)_n \mid \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $u_{n+1} \leq u_n \ \forall n \geq N\}$

F n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car il n'est pas stable par la multiplication par scalaires.

Ex La suite $(u_n)_n = (-n)_n \in F$, mais $-1 \cdot (u_n)_n = (n)_n \notin F$

(e) $F = \{(u_n)_n \mid (u_n)_n$ converge vers $0\}$

Rappelons que : une suite réelle $(u_n)_n$ est convergente vers 0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| < \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon$.

· F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car :

(i) la suite nulle $0_E = (0, 0, \dots) \in F$

(ii) Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in F \Rightarrow$ Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $\varepsilon' = \varepsilon/2$.

Alors $\exists n_{\varepsilon',u}, n_{\varepsilon',v} \in \mathbb{N}$ tq.

$|u_n| \leq \varepsilon' \ \forall n \geq n_{\varepsilon',u}$ et $|u_n| \leq \varepsilon' \ \forall n \geq n_{\varepsilon',v}$.

Donc si $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon',u}, n_{\varepsilon',v})$ on a que $\forall n \geq n_\varepsilon$

$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \varepsilon' + \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Donc $(u_n)_n + (v_n)_n \in F$.

(iii) Si $(u_n)_n \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors si $\varepsilon > 0$ et on pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$,

on a que $\exists n_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tq. $|u_n| \leq \varepsilon' \ \forall n \geq n_{\varepsilon'}$.

Donc $|\lambda u_n| = |\lambda| \cdot |u_n| < |\lambda| \cdot \varepsilon' = \varepsilon \ \forall n \geq n_{\varepsilon'}$

On a donc que $\lambda \cdot (u_n)_n \in F$.

(f) $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n$ est croissante ou décroissante$\}$

F n'est pas un sous-espace car pas stable par la somme :

Exemple:

$(u_n)_n = (0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, \dots) \in F$ car croissante

$(v_n)_n = (0, -1, -3, -4, -6, -7, -8, -9, \dots) \in F$ car décroissante

$(u_n)_n + (v_n)_n = (0, 0, -1, -1, -2, 1, 1, 1, \dots) \notin F$

(g) $F=\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $u_n \leq 1 \ \forall n \geq N\}$

F n'est pas un sous-espace car pas stable par multiplication par des scalaires.

<u>Exemple</u>: $(u_n)_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right) \in F$, mais $4 \cdot (u_n)_n = (2, 2, 2, \dots) \notin F$

(h) $F=\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+3} = u_n \ \forall n \geq 0\}$

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(i) la suite nulle $0_E = (0, 0, \dots) \in F$

(ii) Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in F \Rightarrow u_{n+3} = u_n$ et $v_{n+3} = v_n \ \forall n \geq 0 \Rightarrow$
$u_n + v_n = u_{n+3} + v_{n+3} \ \forall n \geq 0 \Rightarrow (u_n)_n + (v_n)_n \in F$.

(iii) Si $(u_n)_n \in F$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot u_{n+3} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\lambda \cdot (u_n)_n \in F$.

(i) $F=\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $u_{n+N} = u_n \ \forall n \geq 0\}$

F est un espace vectoriel:

(i) la suite $0_E = (0, 0, 0, \dots) \in F$

(ii) Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in F \Rightarrow \exists N_u, N_v \in \mathbb{N}$ tq. $u_n = u_{n+N_u}$ et
$v_n = v_{n+N_v} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Or si $N = ppcm(N_u, N_v)$ on a que $\forall n \geq N$
$u_n + v_n = u_{n+N} + v_{n+N} \Rightarrow (u_n + v_n)_n \in F$

(iii) Si $(u_n)_n \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $u_n = u_{n+N} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\lambda \cdot u_n = \lambda \cdot u_{n+N} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda \cdot (u_n)_n \in F$.

Exercice 4 (*). Soit E un K-espace vectoriel, et soient $v_1, \dots, v_n \in E$.

a) Soit $\lambda \in K$ non nul. Montrer que $\text{Vect}_K(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \text{Vect}_K(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)$.

b) Soit $1 \leq i \leq n-1$, et soit $\lambda \in K$. Montrer que l'on a

$$\text{Vect}_K(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \text{Vect}_K(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_i).$$

c) Si v_n est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{n-1}$, alors $\text{Vect}_K(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \text{Vect}_K(v_1, \dots, v_{n-1})$.

<u>**Solution:**</u> Rappelons la définition et proposition d'amphi suivantes:

Déf : Si $v_1, \dots, v_n \in E$ on note $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

Prop : $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_n$. Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1, \dots, v_n$.

(a) Montrons que $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda \cdot v_n)$

- On a que $\lambda \cdot v_n \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ car
  $\lambda \cdot v_n = 0 \cdot v_1 + \dots + 0\, v_{n-1} + \lambda \cdot v_n$
  Aussi $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$
  Donc, $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda \cdot v_n) \subseteq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ (*)
- D'autre part $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda \cdot v_n)$ et, comme $\lambda \neq 0$
  $v_n = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{n-1} + \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda v_n) \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)$ aussi.
  Donc $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subseteq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)$ (**)
- Enfin on obtient égalité en combinant (*) et (**)

(b)
- Comme $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda \cdot v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ on a
  $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda \cdot v_i) \subseteq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.
- D'autre part $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_i)$ et aussi
  $v_n = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + (-\lambda) \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 1 \cdot (v_n + \lambda v_i)$
  Donc $v_n \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_i)$ et on a que :
  $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subseteq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_i)$
- On a donc l'égalité souhaitée.

(c) Supposons que $v_n =$ combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{n-1}$.
Alors $v_n \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}) \Rightarrow \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) \subseteq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$
D'autre part $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}) \subseteq \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ et on a égalité.

Exercice 6 (*). On considère les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

1) $((1,1,0),(0,1,1))$,

2) $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$,

3) $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$,

4) $((0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$,

5) $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$,

6) $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$.

Parmi ces familles de vecteurs (justifier les réponses données) :

a) Déterminer lesquelles sont des familles libres. Compléter chacune de ces familles libres en une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer lesquelles sont des familles génératrices. Extraire une base de $\mathbb{R}^3$ de chacune de ces familles génératrices.

c) Déterminer lesquelles sont des bases de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées d'un triplet arbitraire $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ dans chacune de ces bases.

Solution: Rappelons les définitions suivantes :

Déf : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E.

a) On dit que la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est libre si elle vérifie la condition suivante : $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

b) On dit que la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est liée si elle n'est pas libre.

Déf. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E. On dit que :

- la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est génératrice si $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_m) = E$
- la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Proposition : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension m. Une famille $(v_1, \dots, v_m)$ d'éléments de E est libre si et seulement si elle est génératrice. Dans ce cas elle forme une base de E.

(1) La famille est libre car les deux vecteurs ne sont pas un multiple de l'autre.

(a) Completons $F = ((1,1,0),(0,1,1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$ en ajoutant $(1,0,1)$.
Nous avons que la famille $((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ est libre car
$\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,0,1)=(0,0,0)$ avec $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$(\lambda_1+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-\lambda_3 \\ \lambda_1=-\lambda_2 \\ \lambda_2=-\lambda_3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-\lambda_3 \\ \lambda_2=\lambda_3 \\ \lambda_2=-\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

(b) La famille F n'est pas génératrice, car toute famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ a cardinal $\geq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

(2) La famille $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ est libre, car si

(a) $\lambda_1(0,0,1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,1,1)=(0,0,0)$ avec $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$(\lambda_3, \lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$

(b) Comme la famille est libre dans $\mathbb{R}^3$ et elle est formée de 3 vecteurs, alors elle est aussi génératrice.
Donc elle est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Cherchons les coordonnées du vecteur générique $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base. c.à.d. cherchons 3 réels $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que
$(a,b,c)=\lambda_1(0,0,1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,1,1) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a=\lambda_3 \\ b=\lambda_2+\lambda_3 \\ c=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3=a \\ \lambda_2=b-a \\ \lambda_1=c-b \end{cases}$

(3) La famille $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$, n'est pas libre car $1\cdot(0,1,-1)-1\cdot(1,0,-1)+1\cdot(1,-1,0)=(0,0,0)$
est une combinaison linéaire non triviale des 3 vecteurs.
Comme elle est formée par 3 vecteurs, elle est nonplus génératrice donc elle n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

(4) La famille $((0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$, est libre car
$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(1,2,1)=(0,0,0)$ avec $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases} \underset{l_2-l_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2=0\\ \lambda_3=0\\ \lambda_1=0\end{cases}$$

Comme elle est libre et elle a 3 éléments elle est aussi génératrice, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Cherchons les coordonnées du vecteur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ dans cette base.
On a que : $\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(1,2,1)=(a,b,c)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=a\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=b\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2=a-\lambda_3\\ \lambda_3=b-c\\ \lambda_1+a=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2=a-b+c\\ \lambda_3=b-c\\ \lambda_1=c-a\end{cases}$$

(5) La famille $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ n'est pas libre car
$\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(4,5,6)+\lambda_3(7,8,9)=(0,0,0)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+5\lambda_2+8\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+6\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-4\lambda_2-7\lambda_3\\ -8\lambda_2-14\lambda_3+5\lambda_2+8\lambda_3=0\\ -12\lambda_2-21\lambda_3+6\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-4\lambda_2-7\lambda_3\\ -3\lambda_2-6\lambda_3=0\\ -6\lambda_2-12\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\lambda_1=8\lambda_3-7\lambda_3=\lambda_3\\ \lambda_2=-2\lambda_3\\ \lambda_2=-2\lambda_3\end{cases}\right\}$$ le système a des solutions non triviales!

En effet si $\lambda_3=1$, $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=-2$ on a :
$(1,2,3)-2(4,5,6)+(7,8,9)=(0,0,0)$
Comme elle a 3 éléments et elle n'est pas libre, elle n'est pas génératrice non-plus.

(6) La famille $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$ ne peut pas être libre dans $\mathbb{R}^3$ car elle contient 4 vecteurs (et $4>3=\dim(\mathbb{R}^3)$).
Par contre elle est génératrice car les 3 vecteurs $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$ forment déjà une base de $\mathbb{R}^3$, donc une famille génératrice.

Pour montrer ceci, il suffit de montrer qu'ils forment une famille libre (car ils sont 3 vecteurs), ce qui a été déjà montré au point (1).

Exercice 9 (**). Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles libres ?

a) $(f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto \sin(x), f_3 : x \mapsto 1)$,

b) $(f_1 : x \mapsto \cos^2(x), f_2 : x \mapsto \cos(2x), f_3 : x \mapsto 1)$,

c) $(f_1 : x \mapsto |x-1|, f_2 : x \mapsto |x|, f_3 : x \mapsto |x+1|)$,

<u>**Solution**</u> : Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
La famille (f_1, f_2, f_3) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ les seuls $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(a) Supposons $\lambda_1 \cdot \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
En particulier :
- si $x = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \cos(0) + \lambda_2 \sin(0) + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_1$
- si $x = \pi \Rightarrow -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_1$
- si $x = \pi/2 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_2$
- si $x = 3\pi/2 \Rightarrow -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2$

Si on met toutes les conditions ensemble on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

(b) Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}$:
$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \Rightarrow$
$2\cos^2(x) - 1 \cdot \cos(2x) - 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la famille est donc liée (ou pas libre) car
$2 \cdot f_1(x) + (-1) f_2(x) + (-1) f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(c) Supposons $\lambda_1 |x-1| + \lambda_2 |x| + \lambda_3 |x+1| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* Si $x = 1$ on obtient : $\lambda_2 = -2\lambda_3$
* Si $x = -1$ on obtient $\lambda_2 = -2\lambda_1$ $\Big\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3$
* Si $x = 0$ on obtient $\lambda_1 = -\lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3$

En mettant ensemble les conditions on a $\lambda_1 = \lambda_3 = 0 = \lambda_2$.
Donc la famille est libre.

Exercice 10 (**). Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on note e_i la suite de nombre réels $(\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-il de dimension finie ?

c) On définit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ comme l'ensemble des suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0\}$ est fini.

  a) Démontrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

  b) Ce sous-espace vectoriel est-il de dimension finie ?

<u>**Solution**</u> Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $e_i = (\delta_{in})_n$ où $\delta_{in} = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$

<u>Exemple</u>: $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$
$e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$
$\vdots$

(a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Supposons qu'ils existent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = \text{suite nulle} = (0, 0, 0, \ldots) \Rightarrow$
$(\lambda_1, 0, \ldots) + (0, \lambda_2, 0, \ldots) + \cdots + (0, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0. \Rightarrow (e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

<u>Rem</u> Formellement, on a que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ est la suite $(y_m)_m$ où
$y_m = \lambda_m$ si $1 \leq m \leq n$ et $y_m = 0$ si $m > n$

(b) Non, $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = +\infty$. On va le démontrer par l'absurd.
Supposons que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ soit de dimension finie, disons $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = N$. Alors, d'après la théorie, toute famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $N+1$ éléments serait liée.
Mais la famille $(e_1, .., e_{N+1})$ est libre d'après (a).
Absurd! Donc $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = +\infty$.

(c) Soit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \# \{ n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq 0 \} < \infty \}$
Rem $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \Leftrightarrow \exists N_u \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0 \ \forall n \geq N_u$.

(a) • la suite nulle $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ appartient à $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

• Si $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\exists N_u, N_v \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = 0 \ \forall n \geq N_u$ et $v_n = 0 \ \forall n \geq N_v \Rightarrow$
$u_n + v_n = 0 \quad \forall n \geq \max(N_u, N_v) \Rightarrow (u_n + v_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

• Si $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u_n = 0 \ \forall n \geq N_u \Rightarrow$
$(\lambda u_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

Donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est bien un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) $\dim(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}) = +\infty$ car, $\forall n \geq 1$, la famille $(e_1, .., e_n)$ appartient à $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ aussi et elle est libre. $\Rightarrow$
Par le même argument que au point (b) précédent, un espace vectoriel de dimension finie ne peut pas contenir de familles libres de cardinal arbitrairement grand.

MAT 201 - Feuille TD 2 (EXOS EXTRA)

Exercice 8 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que les familles suivantes soient des bases de $\mathbb{R}^3$.

Remarque générale : il s'agit à chaque fois d'une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Il suffira donc de trouver les conditions sur $a, b \in \mathbb{R}$ telles que la famille soit libre. On utilisera en fait le thm. de cours suivant :

Théorème : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $\mathcal{F} = (v_1, .., v_n)$ une famille de vecteurs dans E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{F}$ est génératrice pour E
(ii) $\mathcal{F}$ est libre dans E
(iii) $\mathcal{F}$ est une base de E.

(a) $\mathcal{F} = ((1,1,1), (0,a,1), (0,0,b))$

La famille $\mathcal{F}$ est une base $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ le système $\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(0,a,1) + \lambda_3(0,0,b) = (0,0,0)$ a seulement la solution triviale c.à.d. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. $\Leftrightarrow$ En écrivant les équations du système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + a\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + b\cdot\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ a\cdot\lambda_2 = 0 & (2) \\ \lambda_2 + b\cdot\lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0 \Rightarrow$ l'équation (2) donne $\lambda_2 = 0$ et (3) donne $\lambda_3 = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{F}$ est libre, car la seule solution du système est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Viceversa si $b = 0 \Rightarrow$ le 3ème vecteurs de la famille est nul $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ pas libre
Si $b \neq 0$ et $a = 0 \Rightarrow$ $(0,a,1) = (0,0,1) = \frac{1}{b}(0,0,b) \Rightarrow$ le 2ème vecteur de la famille est multiple du 3ème $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ pas libre.

Donc $\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ et $b \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{ab \neq 0.}$

(b) On procède comme dans (a) :

$\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ le système $\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(a,b,1) + \lambda_3(b,a,1) = (0,0,0)$ a seulement la solution triviale. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On réécrit le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\cdot\lambda_2 + b\lambda_3 = 0 \\ b\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\lambda_2 - \lambda_3) + a\lambda_2 + b\lambda_3 = 0 \\ b\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 \\ b\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ (a-1)\lambda_2 + (b-1)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Supp. $b \neq 0$: $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 = (-a/b)\lambda_3 \\ \underbrace{\left((a-1)\left(-\frac{a}{b}\right) + (b-1)\right)}_{(*)}\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ On a seulement la solution triviale $\Leftrightarrow$ la quantité $(*)$ est $\neq 0$ $\Leftrightarrow$

$(a-1)(-a) + b(b-1) \neq 0$ $\Leftrightarrow$
$b(b-1) \neq a(a-1)$

Si $b=0$: le système devient

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 = 0 \\ a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

Donc on a seulement la solution triviale $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ (dans ce cas la ligne 2 du système donne $\lambda_3=0$) et $a \neq 1$ (sinon on trouve la solution $\lambda_1 = -\lambda_2$). Donc encore une fois $a(a-1) \neq \underset{0}{\underset{\shortparallel}{b(b-1)}}$

Dans tous les cas, pour résumer:

$\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ $\boxed{b(b-1) \neq a(a-1)}$

(c) $\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 = 0 \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + b\lambda_3 = 0 \\ b\lambda_1 + a\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

a seulement la solution triviale $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

On essaye de résoudre le système: $(L_1 \to L_1,\ L_2 \to L_2 - L_1,\ L_3 \to L_3 - L_1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 = 0 & (1) \\ (a-1)\lambda_1 + (1-a)\lambda_2 = 0 & (2) \\ (b-1)\lambda_1 + (1-b)\lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Supposons $a-1 \neq 0 \Rightarrow$ l'équation (2) du système donne $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$

* Si $b-1 \neq 0 \Rightarrow$ l'équation (3) donne aussi $\lambda_1 = \lambda_3 \Rightarrow$
  En remplaçant dans l'équation (1) on a: $\lambda_1(1+a+b)=0 \Rightarrow$
  On doit avoir $1+a+b \neq 0$
* Si $b=1 \Rightarrow$ le système devient:

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 - a\lambda_2 = -\lambda_2(1+a) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Donc le système a une (infinité de) solutions non triviales. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ pas libre.

Supposons $a-1=0 \Rightarrow$ le système devient:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + b\lambda_3 = 0 \\ 0=0 \\ (b-1)\lambda_1 = (b-1)\lambda_3 \end{cases}$$

Si $b \neq 1$: on a une infinité de solutions non triviales pour $\lambda_1 = \lambda_3$ et $\lambda_2 = -(1+b)\lambda_3 \Rightarrow \mathcal{F}$ pas libre

Si $b=1$: les 3 vecteurs de la famille sont les mêmes $\Rightarrow \mathcal{F}$ pas libre.

* Enfin, si $1+a+b=0$: on a que la famille devient
$(1, a, -1-a)$, $(a, 1, a)$, $(-1-a, -1-a, 1) \Rightarrow$
la somme des 3 vecteurs donne $(0,0,0) \Rightarrow \mathcal{F}$ pas libre.

Donc $\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow a \neq 1, b \neq 1$ et $1+a+b \neq 0 \Leftrightarrow$
$\boxed{(a-1)(b-1)(1+a+b) \neq 0}$

(d) $\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ le système $\begin{cases} a\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 = 0 \\ a\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ b\lambda_1 + a\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \end{cases}$
a seulement la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On étudie le système :

$$\begin{cases} a\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 = 0 \\ a\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3 = a\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 \\ b\lambda_1 + a\lambda_2 + a\lambda_3 = a\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 = 0 & (1) \\ (b-a)\lambda_2 = (b-a)\lambda_3 & (2) \\ (b-a)\lambda_1 = (b-a)\lambda_3 & (3) \end{cases}$$

Si $b \neq a$: le système devient $\begin{cases} (2a+b)\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow$ On doit avoir $2a+b \neq 0$ pour avoir seulement la solution triviale.

Si $b=a$: les 3 vecteurs de la famille sont les mêmes donc $\mathcal{F}$ n'est pas libre

Si $b=-2a$: la famille $\mathcal{F}$ devient $((a,a,-2a), (a,-2a,a), (-2a,a,a))$ et la somme des 3 vecteurs de $\mathcal{F}$ donne $(0,0,0) \Rightarrow$ $\mathcal{F}$ pas libre.

Donc : $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow \boxed{(a-b)(2a+b) \neq 0.}$

(e) $\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ le système $\begin{cases} a\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ a\lambda_1 + b\lambda_3 = 0 \\ b\lambda_1 + b\lambda_2 = 0 \end{cases}$
a seulement la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ le système devient : $\begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -b/a\,\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases}$

Donc on a $\begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_3 = -b/a \cdot \lambda_3 \end{cases}$

Donc on a la solution triviale $\Leftrightarrow -b/a \neq 1$
$\Leftrightarrow a+b \neq 0$

- Si $a=0$: $\mathcal{F}$ pas libre car deux premiers vecteurs égaux
- Si $b=0$: $\mathcal{F}$ pas libre car deux derniers vecteurs égaux.
- Si $a=-b$: $\mathcal{F}$ devient $((0,-b,b),(-b,0,b),(-b,b,0))$

et le 3ème vecteur est la différence entre le deuxième et le 1er.
Donc, $\mathcal{F}$ pas libre.
On a donc $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow \boxed{ab(a+b) \neq 0}$

Exercice 11

(a) On veut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, où $f_k(x) = \sin(kx)$

Démo. L'énoncé est vrai pour $n=1$, car $\sin(x)$ n'est pas la fonction nulle.

- Supposons l'énoncé vrai jusqu'à l'index $n-1$.

Considérons une combinaison linéaire:

$$\lambda_1 \sin(x) + \dots + \lambda_{n-1} \sin((n-1)x) + \lambda_n \sin(nx) = 0 \quad (*) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En dérivant 2 fois $(*)$ on obtient:

$$-\lambda_1 \sin(x) - \lambda_2 \cdot 2^2 \sin(2x) - \dots - \lambda_{n-1} (n-1)^2 \sin((n-1)x) - \lambda_n \cdot n^2 \sin(nx) = 0 \quad (**)$$

En faisant $n^2 \cdot (*) + (**)$ on a:

$$\lambda_1 (n^2-1) \sin(x) + \lambda_2 (n^2-4) \sin(2x) + \dots + \lambda_{n-1} (n^2-(n-1)^2) \sin((n-1)x) = 0$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a que:

$$\begin{cases} \lambda_1 (n^2-1) = 0 \\ \lambda_2 (n^2-4) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} (n^2-(n-1)^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} = 0 \end{cases}$$

(car $(n^2-k^2) \neq 0$ si $1 \leq k \leq n-1$)

Donc (*) devient : $\lambda_n \sin(nx) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ si $x = \frac{\pi}{2n}$ on a $\lambda_n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0$.

Donc la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

(b) On veut montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre où $f_k(x) = e^{\lambda_k \cdot x}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont à deux à deux distincts.

- L'énoncé est vrai pour $n=1$ car $f(x) = e^{\lambda_1 x}$ n'est pas la fonction nulle $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$.
- Soit $n \geq 2$. Supposons l'énoncé vrai jusqu'à l'indice $n-1$.

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \gamma_n e^{\lambda_n x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

En dérivant on obtient :

$$\gamma_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \gamma_n \lambda_n e^{\lambda_n x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (**)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $\lambda_n \neq 0$ (au moins un des λ_i est $\neq 0$ car ils sont $n \geq 2$ nombres réels distincts à deux à deux).

En faisant $\lambda_n(*) - (**)$ on obtient :

$$\gamma_1(\lambda_n - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} + \dots + \gamma_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{\lambda_{n-1} x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a que

$$\gamma_1(\lambda_n - \lambda_1) = \gamma_2(\lambda_n - \lambda_2) = \dots = \gamma_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

Comme les λ_i sont deux à deux distincts ceci implique
$\gamma_1 = \dots = \gamma_{n-1} = 0 \Rightarrow$ $(*)$ devient $\gamma_n e^{\lambda_n x} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\gamma_n = 0$ aussi $\Rightarrow$ la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 12

Soient $u, v, w \in E$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,w) \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq.
$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ et $\beta\gamma \neq 0$.

Démo : $(\Leftarrow)$ Supposons $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_E$ avec $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0 \Rightarrow$
$w = (-\alpha/\gamma) u - (\beta/\gamma) \cdot v \in \mathrm{Vect}(u,v) \Rightarrow \mathrm{Vect}(u,w) \subseteq \mathrm{Vect}(u,v)$
$v = (-\alpha/\beta) u - (\gamma/\beta) w \in \mathrm{Vect}(u,w) \Rightarrow \mathrm{Vect}(u,v) \subseteq \mathrm{Vect}(u,w)$
Donc $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,w)$.

$(\Rightarrow)$ Supposons $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,w)$ $(*)$

- Si $u = 0_E$ $(*)$ implique $\mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Vect}(w) \Rightarrow v = \gamma \cdot w$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\Rightarrow -v + \gamma w = 0_E$ et on a la condition avec $\alpha = 0$, $\beta = -1$.
- Si $u \neq 0_E$ alors :
  - * Si $\dim \mathrm{Vect}(u,v) = 1 \Rightarrow (*)$ implique que
  $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u) = \mathrm{Vect}(u,w) \Rightarrow w = \lambda \cdot u$, $v = \mu \cdot u$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
    - Si $w = 0_E \Rightarrow \mu u - v + w = 0_E$ et la condition est vérifiée avec $\alpha = \mu$, $\beta = -1$ et $\gamma = 1$
    - Si $v = 0_E \Rightarrow \lambda u + v - w = 0_E$ et la condition est vérifiée avec $\alpha = \lambda$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$.
    - Si v et w sont non nuls $\Rightarrow \lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0 \Rightarrow$
    $u = w/\lambda$, $u = v/\mu \Rightarrow \lambda v = \mu w \Rightarrow \lambda v - \mu w = 0$ et condition vérifiée avec $\alpha = 0$, $\beta = \lambda$, $\gamma = -\mu$.
  - Si $\dim \mathrm{Vect}(u,v) = 2$, $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,w) \Leftrightarrow$
  $\mathrm{Vect}(u,v) \subseteq \mathrm{Vect}(u,w)$ (dans ce cas on aura égalité car $2 \geq \dim(\mathrm{Vect}(u,w)) \geq \dim \mathrm{Vect}(u,v) = 2$) $\Leftrightarrow$

$\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $v = au + bw$ avec $b \neq 0$ (sinon $v \in \mathrm{Vect}(u)$)

$\Leftrightarrow au - v + bw = 0$ avec $b \neq 0$ (condition vérifiée pour $\alpha = 0$, $\beta = -1$ et $\gamma = b$).

$\square$

Exercice 13 Soit $(x_1, \dots, x_n)$ famille libre de vecteurs dans E.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et soit $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.
Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit $y_i := x_i + y$
Donner une condition nécessaire et suffisante pour les λ_i pour que la famille $(y_1, \dots, y_n)$ soit libre.

Démo: Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_n y_n = 0_E \Leftrightarrow$

$\gamma_1((\lambda_1+1)x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) + \gamma_2(\lambda_1 x_1 + (\lambda_2+1)x_2 + \dots + \lambda_n x_n) +$
$+ \dots + \gamma_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + (\lambda_n+1)x_n) = 0_E \Leftrightarrow$

$x_1(\lambda_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) + \gamma_1) + x_2(\lambda_2(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) + \gamma_2) + \dots$
$+ x_n(\lambda_n(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) + \gamma_n) = 0_E \Leftrightarrow$ (car la fam. $(x_1, \dots, x_n)$ est libre)

$$\begin{cases} \gamma_1 = -\lambda_1(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) \\ \gamma_2 = -\lambda_2(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) \\ \vdots \\ \gamma_n = -\lambda_n(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) \quad (*) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ on remplace la n-ème ligne du système par la somme des n équations

$$\begin{cases} \gamma_1 = -\lambda_1(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) \\ \gamma_2 = -\lambda_2(\gamma_1 + \dots + \gamma_n) \\ \vdots \\ (\gamma_1 + \dots + \gamma_n) = (\gamma_1 + \dots + \gamma_n)(-\lambda_1 - \dots - \lambda_n) \quad (**) \end{cases}$$

* Si $-\lambda_1 - \dots - \lambda_n \neq 1 \Rightarrow (**)$ implique $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 0$
$\Rightarrow \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \dots, \gamma_{n-1} = 0$ dans les autres équations du système $\Rightarrow \gamma_n = 0$ (car $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 0$) $\Rightarrow$

la famille $y_1, \dots, y_n$ est libre.

* Si $-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n = 1$: considérons la somme

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n =$

$= \lambda_1 (y + x_1) + \lambda_2 (y + x_2) + \dots + \lambda_n (y + x_n) =$

$= y (\underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}_{= -1}) + \underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}_{= y} = 0_E \Rightarrow$

La famille $(y_1, \dots, y_n)$ n'est pas libre car $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0_E$ et les λ_i ne sont pas tous nuls (car $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -1$).

$$\boxed{\text{Donc } (y_1, \dots, y_n) \text{ libre} \iff \lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq -1}$$