Université Grenoble Alpes **Examen**
mat 101 **12 janvier 2022**
durée : 2h00

Dans les exercices 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on identifie les points et leurs affixes.

Exercice 1.—

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{-k} = \left(\frac{6}{5}\right)^n - 1\ .$$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6\ .$$

Correction : (Exo sur 3 points)

1. (1pt) D'après la formule du binôme de Newton, pour tous a et b complexes et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\ .$$
Donc :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{-k} - \binom{n}{0} 5^{-0} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k 1^{n-k} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{5}\right)^n - 1 \\ &= \left(\frac{6}{5}\right)^n - 1\ . \end{aligned}$$
2. (2pts, dont 0,5 pour l'initialisation) Notons, pour $n \geq 1$, $P(n)$ l'assertion « $\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6$ ».
Initialisation. Lorsque $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = \sum_{k=1}^{1} k^2 2^k = 1^2 2^1 = 2$. Par ailleurs, lorsque $n = 1$, $2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6 = 2^2(1 - 2 + 3) - 6 = 8 - 6 = 2$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Montrons que pour tout $n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Pour cela, fixons $n \geq 1$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montrer qu'alors, $P(n+1)$ est vraie. Remarquons que $P(n+1)$ s'écrit :
$$\ll \sum_{k=1}^{n+1} k^2 2^k = 2^{n+2}((n+1)^2 - 2(n+1) + 3) - 6 \gg\ .$$

Comme on a supposé que $P(n)$ est vraie, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k + (n+1)^2 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1}(n^2-2n+3) - 6 + (n+1)^2 2^{n+1} \,, \\
&= 2^{n+1}(n^2-2n+3+(n+1)^2) - 6 \,, \\
&= 2^{n+1}(n^2-2n+3+n^2+2n+1) - 6 \,, \\
&= 2^{n+1}(2n^2+4) - 6 \,, \\
&= 2^{n+2}(n^2+2) - 6 \,, \\
&= 2^{n+2}((n+1)^2-2n+1) - 6 \,, \\
&= 2^{n+2}((n+1)^2-2(n+1)+3) - 6 \,,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $P(n+1)$ est vraie. La preuve de l'hérédité de $(P(n))_{n\geq 1}$ est terminée.
Conclusion. $(P(n))_{n\geq 1}$ est héréditaire et $P(1)$ est vraie, donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.— On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + iz - i \end{array} \right.$$

et on note F la transformation du plan associée à f.

1. Déterminer $|f(0) - f(1)|$ et $|f(0) - f(i)|$.
2. F est-elle une similitude ? Justifier.
3. Déterminer les racines de f (c'est à dire les nombres complexes z tels que $f(z) = 0$) sous forme algébrique.
4. L'application f est-elle injective ? Justifier.
5. L'application f est-elle surjective ? Justifier.

Correction : (Exo sur 6,5)

1. (1pt) On calcule $f(0) = -i$, $f(1) = 1 + i - i = 1$ et $f(i) = i^2 + i^2 - i = -2 - i$. Donc $|f(0) - f(1)| = |-i-1| = \sqrt{2}$ et $|f(0) - f(i)| = |-2| = 2$.
2. (1,5pt ; 1pt seulement si "f n'est pas de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$") Si F était une similitude, il existerait $\lambda > 0$ (le rapport de F) tel que pour tous points A et B, $d(F(A), F(B)) = \lambda d(A, B)$. Or, en notant A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe i, on a $d(O, A) = 1$ et $d(O, B) = 1$, et d'après la question 1, $d(F(O), F(A)) = \sqrt{2}$ et $d(F(O), F(B)) = 2$, ce qui impliquerait à la fois $\lambda = \sqrt{2}$ et $\lambda = 2$, ce qui est absurde. Donc F n'est pas une similitude.
3. (2pts ; dont 0,25 pt pour le calcul correct du discriminant et 1 pt pour le système correctement introduit) f est un polynôme de degré 2. Notons Δ son discriminant :

$$\Delta = i^2 + 4i = -1 + 4i \,.$$

Cherchons les racines carrées complexes de ce discriminant. Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ avec x et

y réels. Alors,

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 + 2ixy = -1 + 4i \\ |\delta^2| = |\Delta| \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{17} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ xy = 2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y^2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x^2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ xy = 2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} |y| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \\ |x| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \\ xy = 2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \text{ et } x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \\ \text{ou} \\ y = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \text{ et } x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$ et $\delta_2 = -\delta_1$. Ainsi, les racines de f sont :

$$z_1 = \frac{-i + \delta_1}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-i - \delta_1}{2}$$

Ce qui donne

$$z_1 = \frac{-i + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-i - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}}{2}$$

Ou encore :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{17}-1} + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{17}-1}\right) \text{ et } z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{17}-1} + i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{17}-1}\right)$$

4. (1pt) D'après la question précédente, il existe deux nombres complexes distincts z_1 et z_2 qui ont la même image par f, donc f n'est pas injective.
5. (1pt) Pour tout nombre complexe $c \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = c$ admet au moins une solution, puisqu'il s'agit d'une équation du type $g(z) = 0$ avec g polynôme de degré 2. Donc f est surjective.

Exercice 3.— On pose :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1+i}{\sqrt{2}}(z - 2i) + 2i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 1 - \overline{z} \end{array} \right.$$

1. Préciser la nature de g (type de transformation et éléments caractéristiques).

2. Préciser la nature de h (type de transformation et éléments caractéristiques).
3. Soient M, N, P et Q quatre points du plans tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$. Soit F une similitude indirecte. On note $M' = F(M)$, $N' = F(N)$, $P' = F(P)$ et $Q' = F(Q)$. Montrer que :
$$(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) .$$
4. On note $f = h \circ g$. Déterminer l'expression de f et préciser si f est une similitude directe ou indirecte (on ne demande pas la nature exacte de cette similitude).
5. On note A le point d'affixe $z_A = 3$ et B le point d'affixe $z_B = 3 - 4i$. On note $A' = f(A)$, $O' = f(O)$ et $B' = f(B)$. Quelle est la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{A'O'}, \overrightarrow{A'B'})$?

Correction : (Exo sur 6pts)

1. (1pt) On remarque que $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$. En notant $c = 2i$, on a donc, pour tout z complexe :
$$g(z) = e^{i\pi/4}(z - c) + c$$
Donc g est la rotation de centre C, le point d'affixe c, et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. (2 pts ; 1 pt s'il n'y a que la détermination des points fixes) Déterminons l'ensemble des points fixes de h. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec x et y réels,
$$\begin{aligned} h(z) = z &\Leftrightarrow z = 1 - \overline{z} \\ &\Leftrightarrow x + iy = 1 - x + iy \\ &\Leftrightarrow x = 1/2 . \end{aligned}$$
Notons D la droite d'équation $x = 1/2$, qui passe par le point A d'affixe $z_A = 1/2$. On a alors :
$$h(z) = z_A + e^{i\pi}\overline{z - z_A} .$$
Donc h est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et dirigée par le vecteur d'affixe $e^{i\pi/2}$, qui est bien la droite D.
3. (2pts) Puisque F est une similitude indirecte, il existe a et b complexes, avec a non nul, tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$F(z) = a\bar{z} + b .$$

En notant z_M l'affixe d'un point M, on a alors :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) &= Arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{P'Q'}}}{z_{\overrightarrow{M'N'}}}\right) \\
&= Arg\left(\frac{z_{Q'} - z_{P'}}{z_{N'} - z_{M'}}\right) \\
&= Arg\left(\frac{F(z_Q) - F(z_P)}{F(z_N) - F(z_M)}\right) \\
&= Arg\left(\frac{a\bar{z_Q} + b - a\bar{z_P} - b}{a\bar{z_N} + b - a\bar{z_M} - b}\right) \\
&= Arg\left(\frac{a(\bar{z_Q} - \bar{z_P})}{a(\bar{z_N} - \bar{z_M})}\right) \\
&= Arg\left(\frac{\overline{z_Q - z_P}}{\overline{z_N - z_M}}\right) \\
&= Arg\left(\overline{\left(\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}\right)}\right) \\
&= -Arg\left(\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}\right) \\
&= -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) .
\end{aligned}$$

4. (1pt dont 0,5 pour le calcul de $h \circ g$) Pour tout z complexe,

$$f(z) = h(g(z)) = 1 - \overline{e^{i\pi/4}(z - 2i) + 2i} = e^{-i\pi/4}\overline{z} + 1 - 2i(1 + e^{-i\pi/4})$$

donc f est une similitude indirecte (car de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec a et b complexes).

5. (1pt dont 0,75 s'ils oublient qu'une similitude indirecte renverse les angles) Comme f est une similitude indirecte, elle préserve les angles non orientés et renverse leur orientation. Donc la mesure de $(\overrightarrow{A'O'}, \overrightarrow{A'B'})$ est la même que celle de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$. Or la mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$ est

$$Arg(\frac{z_O - z_A}{z_B - z_A}) = Arg(\frac{-3}{-4i}) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2} .$$

Donc $(\overrightarrow{A'O'}, \overrightarrow{A'B'})$ a pour mesure $-\pi/2$.

TSVP $\hookrightarrow$

Exercice 4.— On définit une application f par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} [0,4] & \to & [0,3[\\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x}{2}+2 & \text{si} & x \in [0,2[\\ \frac{x}{2}-1 & \text{si} & x \in [2,4] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Tracer le graphe de f (i.e sa courbe représentative).
2. Déterminer $f([1,2])$ (une réponse par lecture graphique est insuffisante).
3. Montrer que f est injective.
4. Déterminer $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[)$ (une réponse par lecture graphique est insuffisante).
5. $f \circ f$ est-elle injective ? Justifier.
6. L'application f est-elle surjective ? Justifier.

Correction : (Exo sur 7,5 pts)

1. (0,5 pt)
2. (1pt dont 0,75 s'ils se trompent sur l'image de 2) Par définition,
$$\begin{aligned} f([1,2]) = \{f(x); x \in [1,2]\} &= \{f(2)\} \cup f([1,2[) \\ &= \{0\} \cup \left\{ \frac{x}{2}+2; x \in [1,2[\right\} \\ &= \{0\} \cup \left[\frac{5}{2}, 3 \right[. \end{aligned}$$
3. (2pts) On remarque que f est strictement croissante sur $[0,2[$. Notamment, si $x \in [0,2[$, $f(x) \geq f(0) = 2$. De même, $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$ est strictement croissante. Donc si $x \in [2,4]$, $f(x) \leq 4/2 - 1 = 1 < 2$. Donc si un réel x est dans $[0,2[$ et un autre réel x' est dans $[2,4]$, alors ils ont nécessairement deux images distinctes.
Soient x et x' dans $[0,4]$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors, par ce qui précède, x et x' appartiennent tous les deux à $[0,2[$ ou tous les deux à $[2,4]$. Si x et x' sont dans $[0,2[$ alors $x = x'$ par croissance stricte. De même, si x et x' sont dans $[2,4]$, alors $x = x'$ par croissance stricte.
On a donc montré que pour tous x et x' de $[0,4]$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Donc f est injective.
4. (2pts) Par définition,
$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right[\right) = \left\{ x \in [0,4] \mid f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right[\right\} .$$
Nous avons vu que si $x \in [0,2[$, $f(x) \geq 2$ et si $x \in [2,4]$, $f(x) \leq 1$. Donc :
$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right[\right) &= \left\{ x \in [2,4] \mid f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\} \cup \left\{ x \in [0,2[\mid f(x) \in \left[2, \frac{5}{2} \right[\right\} \\ &= \left\{ x \in [2,4] \mid \frac{x}{2} - 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\} \cup \left\{ x \in [0,2[\mid \frac{x}{2} + 2 \in \left[2, \frac{5}{2} \right[\right\} . \end{aligned}$$
Or pour tout x réel,
$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 .$$
Et
$$2 \leq \frac{x}{2} + 2 < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 .$$
Donc
$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right[\right) = ([2,4] \cap [3,4]) \cup ([0,2[\cap [0,1[) = [0,1[\cup [3,4] .$$

5. (1pt) Soient x et x' dans $[0,4]$, tels que $f \circ f(x) = f \circ f(x')$. Ainsi, $f(f(x)) = f(f(x'))$. Comme f est injective, $f(x) = f(x')$. Et comme f est injective, $x = x'$. On a donc montré que pour tous x et x' de $[0,4]$, $f \circ f(x) = f \circ f(x') \Rightarrow x = x'$. Donc $f \circ f$ est injective.
6. (1pt) On remarque que $3/2$ appartient à l'ensemble d'arrivée de f, mais n'a pas d'antécédent, puisque si $x \in [2,4]$, $f(x) \leq f(4) = 1$ et si $x \in [0,2[$, $f(x) \geq f(0) = 2$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 5.— Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On note $P(u)$ l'assertion « $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ », c'est à dire l'assertion :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n > A\ .$$

1. Ecrire la négation de $P(u)$.
2. Pour tout nombre réel A, on note
$$\mathcal{B}(A) := \{n \in \mathbb{N} \,|\, u_n \geq A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(A) := \{N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geq N,\ u_n \geq A\}\ .$$
Montrer que pour tous les nombres réels A et A',
$$A \leq A' \Rightarrow \mathcal{B}(A') \subset \mathcal{B}(A)\ .$$
3. Montrer que pour tout nombre réel A,
$$\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{B}(A)\ .$$
4. Rappeler la définition d'une suite minorée.
5. Dans cette question, on suppose que $P(u)$ est vraie et que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite minorée de nombres réels. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

Correction : (Exo sur 6 pts)

1. (1pt) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \wedge (u_n < A)$.
2. (1pt) Soient $A \leq A'$ deux réels et $n \in \mathcal{B}(A')$. Alors, $u_n \geq A'$. Or $A' \geq A$, donc $u_n \geq A$. Donc $n \in \mathcal{B}(A)$. On a montré que tout élément de $\mathcal{B}(A')$ est dans $\mathcal{B}(A)$ donc $\mathcal{B}(A') \subset \mathcal{B}(A)$.
3. (1pt) Soit $A \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathcal{C}(A)$. Alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$. Comme $N \geq N$, on en déduit que $u_N \geq A$. Donc $N \in \mathcal{B}(A)$. On a montré que tout élément de $\mathcal{C}(A)$ est dans $\mathcal{B}(A)$ donc $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{B}(A)$.
4. (1pt) On dit que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq m\ .$$
5. (2pt) Notons m un réel tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq m\ .$$
Un tel réel existe puisque v est minorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors $A - m \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, il existe un entier N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n \geq N \Rightarrow u_n \geq A - m\ .$$
Alors, pour tout $n \geq N$, on a :
$$u_n + v_n \geq u_n + m \geq A - m + m = A\ .$$
On a donc montré que :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n + v_n \geq A$$
ce qui montre que $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

FIN