Université Grenoble Alpes - DLST
L2 Licence Sciences et Technologies - STA401 **Mars 2024**

STA401 : CC2-Partiel

Durée : 1 heure 30
Documents autorisés : Tables statistiques - Calculatrice (lycée)
Fiche de formules jointe avec ce sujet

Exercice 1 :

On veut étudier la liaison entre 2 évènements, F : «être fumeur» (plus de 20 cigarettes par jour, pendant 10 ans) et C : «avoir un cancer de la gorge».

On relève les données de 1000 personnes, dont la moitié est atteinte d'un cancer de la gorge, on sait de plus que 600 sont des fumeurs. On compte 242 individus qui n'ont pas de cancer et qui ne sont pas fumeurs.

1. Remplir le tableau qui croise ces 2 évènements C et F.
2. Calculer $P(F \mid C)$ et $P(C \mid F)$
3. Les deux évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier
4. Construire en justifiant l'arbre pondéré qui commence par F.

Exercice 2 :

1. Soit X une variable aléatoire dont on a mesuré les valeurs suivantes : 1; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4. Calculez la variance estimée sans biais de X. Donnez la commande exacte du logiciel R qui permet de retrouver cette variance.
2. Soient X et Y deux variables de lois Normales indépendantes, X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(3;9)$ et Y $\rightsquigarrow \mathcal{N}(4;16)$
   a) Quelle est la loi de $\frac{1}{4}(Y-4)$?
   b) Quelle est la loi de $3X-2Y$? En déduire $P(3X > 2Y)$.
3. On suppose que X suit une loi Normale de moyenne $\mu = 30$ et de variance $\sigma^2 = 64$.
   a) Calculez $P(X < 35)$. (Justifiez en donnant la valeur à 10^{-4} près avec les tables statistiques, puis avec la calculatrice à 10^{-6}près)
   b) Calculez la valeur a telle que $P(X > a) = 0,98$.
4. Lors d'une élection en France, un candidat vous demande de faire un test statistique pour savoir s'il sera élu ou pas. On rappelle qu'il lui faut **plus de 50%** des votes pour être élu. Vous voulez minimiser le risque de faire une "fausse joie au candidat" à tort, quelles sont les hypothèses du test paramétrique à poser ? Raisonner sur le risque de 1ère espèce pour cela.

Exercice 3 (filières MIN-MAT)

On note A l'évènement "tomber sur pile" en lançant une pièce de monnaie non truquée. On réalise n lancers de cette pièce, et on note X la variable "nombre de pile obtenus sur les n lancers".

1. a) Déterminer en justifiant minutieusement la loi exacte de X. Calculer l'espérance et la variance de X
   b) Si n est grand, justifier une loi approchée de X (préciser le théorème, et les paramètres de cette loi)
2. On note F la fréquence du nombre de « pile » obtenu. Exprimez F en fonction de X. Soit p la probabilité que la fréquence du nombre de « pile » obtenu soit comprise entre 0,4 et 0,6. Si $n = 100$, calculez p.
3. On suppose maintenant n inconnu. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, combien de fois doit-on lancer la pièce de monnaie pour que p soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 3 (filière INM) *- Les 2 questions 1 et 2 sont indépendantes -*

1. On note A l'évènement "tomber sur pile" en lançant une pièce de monnaie non truquée. On réalise 100 lancers de cette pièce, et on note X la variable "nombre de pile obtenus sur les 100 lancers".

   a) Déterminer en justifiant minutieusement la loi exacte de X. Calculer l'espérance et la variance de X. Calculez la probabilité qu'il y ait entre 40 et 60 piles obtenus sur 100 lancers.

   b) Justifier une loi approchée de X (préciser le théorème, et les paramètres de cette loi). Calculez $P(40 < X < 60)$ selon cette loi.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi inconnue, mais dont on sait que la moyenne est égale à 16 et l'écart type 4.

   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, calculez une **minoration** de $P(10 < Y < 22)$.

Exercice 4 :

Partie A :

On étudie la variable X, de loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues.

On mesure cette variable sur un échantillon de 10 individus :

5,4	6,9	3,6	4,7	4,3	4,1	2,4	5,9	6,5	3,4

1. Calculer la moyenne et variance empiriques. Donnez la moyenne et variance estimées sans biais de X.
2. Calculez un intervalle de niveau 0,95 qui encadre la moyenne μ.
3. Calculez un intervalle de niveau 0,95 qui encadre σ.
4. On suppose maintenant que l'écart type de X est connu et égal à 1,4. La moyenne est toujours inconnue Quelle taille d'échantillon devrait-on prendre pour estimer μ au niveau de confiance de 99% avec une précision de plus ou moins 0,5 ?

Partie B :

Suite à des études supplémentaires, il a été établi que X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(4.5; 2)$.

On prend maintenant un groupe particulier qui contient 100 individus. On cherche à déterminer si ce groupe est conforme à la population totale.

Sur cet échantillon, on trouve une moyenne estimée de 4,7.

1. Calculez la loi de $\overline{X}$.
2. Calculez $P(\overline{X} \leq 5)$.
3. Calculez $P(\mid \overline{X} - 4,5 \mid \leq 1)$.
4. Calculez l'intervalle qui permet de justifier si cet échantillon est conforme ou pas, au niveau de 0,98. Conclure.