Ensembles et langage mathématique

L'objectif de ce chapitre est de consolider votre maîtrise du langage mathématique et des objets mathématiques élementaires qu'on appelle les ensembles.

Concernant le langage, il s'agit de reprendre et de comprendre les règles du jeu mathématique, basé sur le raisonnement déductif, ainsi qu'un certain nombre de symboles introduits par les mathématiciens pour rendre plus compactes des expressions mathématiques que l'on utilise fréquemment. Les exemples mettront en jeu des ensembles concrets (ensembles de nombres classiques) ou abstraits.

Cours

2.1. Ensembles. — Un *ensemble* est un objet mathématique primitif qui est une collection d'objets mathématiques, différents les uns des autres, appelés *éléments* de l'ensemble. Deux ensembles coïncident si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Un ensemble est souvent décrit à l'aide des symboles d'accolades $\{,\}$. Selon les cas, il y a trois façons de les utiliser pour une telle description (notations 2.1, 2.8 et **??** ci-dessous).

Notation 2.1

On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en faisant la liste de tous ses éléments, séparés par des virgules.

Exemple 2.2. — $\{1,2,3,4,5\}$ est un ensemble dont les éléments sont les nombres $1,2,3,4,$ et 5.

$\{\texttt{vrai},\texttt{faux}\}$ est un ensemble contenant deux éléments, appelés `vrai` et `faux`.

L'ordre d'apparition n'a pas d'importance. Chaque élément n'apparaît qu'une fois. S'il apparaissait plusieurs fois, ça ne changerait rien : l'ensemble resterait le même. Ainsi $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 3, 2, 5, 1\} = \{1, 2, 3, 1, 3, 4, 5\}$.

Notation 2.3

On utilise le symbole $\in$ pour dire qu'un élément appartient à un ensemble, et $\notin$ pour dire qu'il n'appartient pas à l'ensemble.

Exemple 2.4. — On a $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On abuse parfois de notations en notant "$2, 3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$" au lieu de "$2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$", c'est-à-dire qu'on regroupe plusieurs appartenances en une seule.

Remarque 2.5. — Les ensembles étant aussi des objets mathématiques, on peut faire des ensembles d'ensembles. Ainsi $\{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$ est un ensemble qui contient trois objets : le nombre 1 et les deux ensembles $\{2\}$ et $\{3, 4\}$.

Définition 2.6

On dit qu'un ensemble A est un *sous-ensemble* d'un ensemble B si tous les éléments de A sont aussi dans B. On note alors $A \subset B$. On dit aussi que A est *inclus* dans B.

Si A n'est pas un sous-ensemble de B, on note $A \not\subset B$.

Il y a un ensemble qui ne contient aucun élément. On l'appelle *ensemble vide*, et on le note $\emptyset$.

Si un ensemble ne contient qu'un élément, on dit que c'est un *singleton*.

Exemple 2.7. — On a $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $\{2, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On a aussi $\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $\{1, 2, 3, 4, 5\} \not\subset \emptyset$.

L'ensemble $\{2\}$ est un singleton, dont l'unique élément est le nombre 2.

Notation 2.8

On peut décrire un ensemble comme l'ensemble des éléments d'un autre ensemble satisfaisant une propriété supplémentaire. On utilise une barre pour séparer l'ensemble de départ de la propriété qu'on ajoute. On dit qu'on définit l'ensemble en *compréhension*.

Exemple 2.9. — $\{x \in \{1,2,3,4,5\} \mid x \leqslant 3\}$ est le sous-ensemble de $\{1,2,3,4,5\}$ constitué des nombres inférieurs ou égaux à 3. C'est donc l'ensemble $\{1,2,3\}$.

Si a et b sont des nombres réels, l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid (a \leqslant x) \wedge (x < b)\}$ est un ensemble, c'est l'intervalle $[a, b[$.

Si a et b sont des nombres entiers relatifs, l'ensemble $\{x \in \mathbf{Z} \mid (a \leqslant x) \wedge (x \leqslant b)\}$ est un ensemble de nombre entiers. On le note $[\![a, b]\!]$, c'est un intervalle dans $\mathbf{Z}$[11].

Dans la description précédente, la barre verticale a le sens de « satisfaisant » ou encore de « tel que ». Ainsi on peut lire $\{x \in \{1,2,3,4,5\} \mid x \leqslant 3\}$ comme « l'ensemble des nombres x dans $\{1,2,3,4,5\}$ satisfaisant $x \leqslant 3$ ».

Remarque 2.10. — Résoudre une équation, c'est en général déterminer un ensemble. Ainsi trouver les solutions en nombres réels de l'équation $x^2+x-1=0$, c'est déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2+x-1=0\}$.

Notation 2.11

On peut décrire un ensemble comme un ensemble d'éléments associés (par une *fonction*)[a] à des éléments d'un autre ensemble. On utilise un point-virgule pour séparer les éléments associés et l'autre ensemble. On dit que cet ensemble est défini en *fonction*.

a. Nous vous renvoyons au chapitre 3 pour la définition des fonctions.

Exemple 2.12. — L'ensemble $\{2n+1\,;\, n \in \{1,2,3\}\}$ est l'ensemble des nombres $2n+1$ obtenu lorsque n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. C'est donc l'ensemble $\{3,5,7\}$.

11. Un intervalle est un sous-ensemble I de $\mathbf{R}$ tel que $(x \in I \wedge y \in I \wedge x \leqslant y \wedge y \wedge z) \Rightarrow y \in I$.

Dans la decription précédente, le point-virgule a le sens de « où ». Ainsi on peut lire $\{2n+1\,; n \in \{1,2,3\}\}$ comme « l'ensemble des nombres de la forme $2n+1$, où n appartient à l'ensemble $\{1,2,3\}$ ».

Exemple 2.13. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'*ensemble des multiples de* n, aussi appelé *l'ensemble des entiers divisibles par* n, et noté $n\mathbf{Z}$, est l'ensemble

$$n\mathbf{Z} = \{nq\ ;\ q \in \mathbf{Z}\}.$$

L'ensemble des entiers pairs est, par définition, l'ensemble $2\mathbf{Z}$ des entiers relatifs divisibles par 2.

Exemple 2.14. — L'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ s'écrit

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q}\ ;\ p \in \mathbf{Z} \text{ et } q \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

Définition 2.15

Étant donné deux ensembles A et B, leur *union*, notée $A \cup B$, est l'ensemble qui contient tous les éléments de A et tous les éléments de B.

Leur *intersection*, notée $A \cap B$, est l'ensemble qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

Exemple 2.16. — On a $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$ et $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$.

Définition 2.17

Étant donné deux ensembles A et B, leur *différence*, notée $A \setminus B$, est l'ensemble qui contient tous les éléments de A qui ne sont pas dans B.

Lorsque B est un sous-ensemble de A, la différence $A \setminus B$ est aussi appelée *complémentaire* de B dans A. Si l'ensemble A est suffisamment clair d'après le contexte, on note ${}^cB$ le complémentaire de B dans A.

Exemple 2.18. — On a $\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$.

L'ensemble des entiers impairs est l'ensemble des entiers qui ne sont pas pairs, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z}$. On peut remarquer que $\mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} = \{2q+1\ ;\ q \in \mathbf{Z}\}$.

Les opérations sur les ensembles vérifient un certain nombre de propriétés qui sont parfois utiles.

Théorème 2.19 (admis)

Soient A, B et C trois ensembles. Les égalités ensemblistes suivantes sont toujours vraies.

- Commutativité :

$$\Big(A \cap B\Big) = \Big(B \cap A\Big) . \tag{1}$$

$$\Big(A \cup B\Big) = \Big(B \cup A\Big) . \tag{2}$$

- Associativité :

$$\Big(A \cap (B \cap C)\Big) = \Big((A \cap B) \cap C\Big) . \tag{3}$$

$$\Big(A \cup (B \cup C)\Big) = \Big((A \cup B) \cup C\Big) . \tag{4}$$

- Distributivité :

$$\Big(A \cap (B \cup C)\Big) = \Big((A \cap B) \cup (A \cap C)\Big) . \tag{5}$$

$$\Big(A \cup (B \cap C)\Big) = \Big((A \cup B) \cap (A \cup C)\Big) . \tag{6}$$

- Complémentaires : soient A et B des parties d'un ensemble E. Alors :

$$E \setminus (E \setminus A) = A , \tag{7}$$

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) , \tag{8}$$

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B) . \tag{9}$$

Pour mieux comprendre ces opérations ensemblistes, il est commode de visualiser E par un rectangle et les sous-ensembles de E par des « patates » hachurées dessinées dans ce rectangle. Le résultat s'appelle un *diagramme de Venn*, plutôt qu'un sac de patates (figure 4). Nous conseillons au lecteur de visualiser les égalités ensemblistes du théorème 2.19 sur des diagrammes de Venn. À titre d'exemple, nous avons représenté

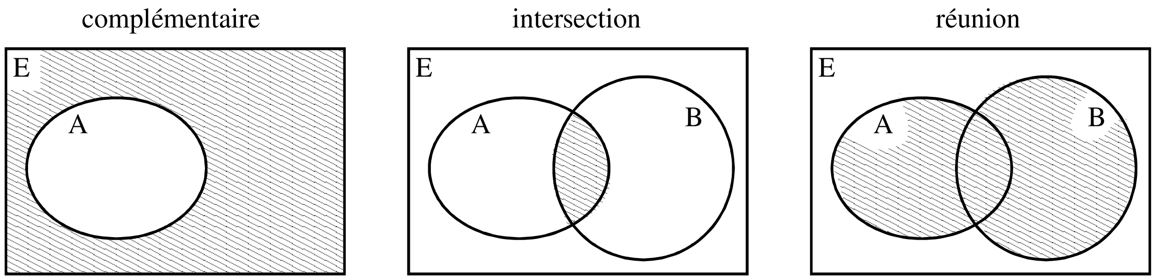

FIGURE 4. Diagrammes de Venn pour le complémentaire, l'intersection et la réunion.

sur la figure 5 le diagramme de Venn qui illustre la formule

$$(E \setminus A) \cup (E \setminus B) = E \setminus (A \cap B).$$

En effet, sur cette figure seule l'intersection $A \cap B$ n'est point hachurée. On prendra

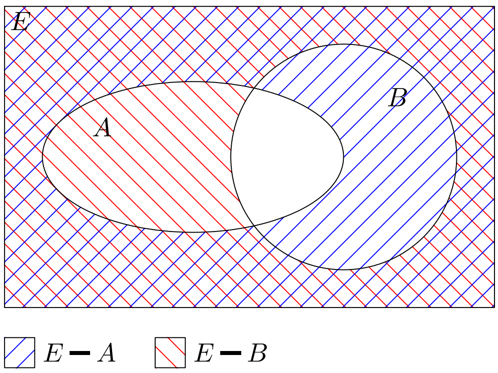

FIGURE 5. $(E \setminus A) \cup (E \setminus B) = E \setminus (A \cap B)$

néanmoins garde au fait que ce diagramme, s'il illustre parfaitement la formule, n'en constitue pas une *preuve*.

Remarque 2.20. — Un diagramme de Venn correspondant à un certain nombre de parties doit montrer toutes les intersections possibles, ce qui complique l'utilisation des diagrammes de Venn au-delà d'un petit nombre de parties. Ainsi un diagramme de Venn pour trois parties peut ressembler au premier dessin de la figure 6. Le deuxième dessin de cette figure représente la construction de A. W. F. Edwards donnant un diagramme de Venn correspondant à cinq parties de l'ensemble E.

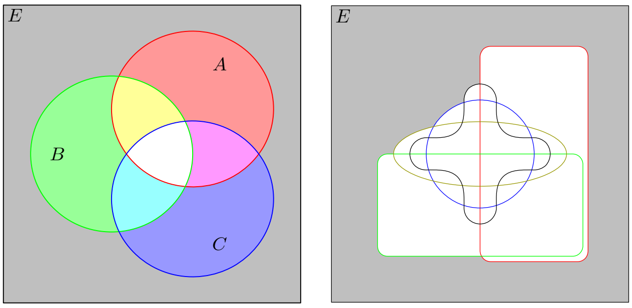

FIGURE 6. Diagrammes de Venn pour trois ou cinq parties.

Nous allons introduire une notation qui permet de faire des intersections ou des unions d'une collection d'ensembles indicée par un autre ensemble.

Notation 2.21

Soit E un ensemble, tel qu'à chaque élément x de E on associe un ensemble E_x. Alors on définit $\bigcup_{x\in E} E_x$ comme la réunion de tous les ensembles E_x, et $\bigcap_{x\in E} E_x$ comme l'intersection de tous les ensembles E_x.

Exemples 2.22. — On a $\bigcup_{x\in\{0,1,2\}} \{2x+1, 2x+2\} = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

On a $\bigcap_{x\in\{0,1,2\}} \{x-1, x, x+1\} = \{-1,0,1\} \cap \{0,1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1\}$.

Remarquer que dans les exemples ci-dessus, on n'a pas besoin de préciser d'ordre dans lequel on effecture les unions (ou les intersections), en vertu de l'associativité de l'union et de l'intersection dans le théorème 2.19.

En faisant de la géométrie dans le plan ou l'espace à l'aide de coordonnées, on ne considère pas des nombres, mais des couples ou des triplets de nombres. On formalise cela avec la notion d'ensemble-produit.

Définition 2.23

Pour n un entier naturel, un *n-uplet* est une collection ordonnée de n objets mathématiques. On le note à l'aide de parenthèse : si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des objets, on peut former le n-uplet $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Deux n-uplets $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ sont déclarés égaux si on a simultanément $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots,$ et $u_n = v_n$.

Un 2-uplet est aussi appelé un *couple*, un 3-uplet un *triplet*.

Attention, ici on considère des *n-uplets* de la forme $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et non des ensembles de la forme $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, la différence tient au fait que l'ordre compte dans un n-uplet, et non dans un ensemble. Par exemple on a $(1, 2) \neq (2, 1)$, tandis que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. De plus, un n-uplet peut contenir deux fois le même élément. Ainsi $(1, 1, 3)$ est un triplet de nombres, différent du couple $(1, 3)$.

Définition 2.24

Étant donnés deux ensembles E et F, l'*ensemble-produit* $E \times F$ est l'ensemble dont les éléments sont les couples de la forme (e, f) où e parcourt tous les éléments de E et f tous les éléments de F.

Pour n un entier naturel, étant donnés n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, l'*ensemble-produit* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble dont les éléments sont les n-uplets de la forme $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ où u_i parcourt tous les éléments de E_i.

Exemples 2.25. — On a $\{1, 2, 3\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$.

On a

$$\begin{aligned} & \{3, 4\} \times \{x, y\} \times \{2, 3\} \\ = \ & \{(3, x, 2), (3, x, 3), (3, y, 2), (3, y, 3), (4, x, 2), (4, x, 3), (4, y, 2), (4, y, 3)\} \end{aligned}$$

2.2. Assertions. — Avant de parler de règles de déduction, on doit s'entendre sur la nature des objets mathématiques, et la nature de ce qu'on produit en mathématiques, à savoir des assertions mettant en jeu ces objets et dont on s'est convaincu qu'elles sont vraies.

Vous connaissez déjà différents objets mathématiques : les *nombres*, qu'ils soient entiers, rationnels, réels, ou complexes, mais aussi les *ensembles*. Une autre classe que vous connaissez déjà et que nous reverrons est constituée des *fonctions* : ce sont des objets qui prennent un élément d'un ensemble et rendent un élément d'un (autre) ensemble.

Tout n'est pas objet mathématique : les objets du monde physique ne sont pas mathématiques. Les seuls objets mathématiques sont ceux qui ont été définis comme tels.

L'enjeu des mathématiques est de déterminer des propriétés des objets mathématiques. Ces propriétés sont décrites par des assertions (auxquelles on donne différents noms et statuts pour marquer, ou pas, leur importance).

Définition 2.26 (Assertion)

Une assertion est une affirmation mathématique ne mettant en jeu que des objets mathématiques.

Exemples 2.27. — « 2 est un nombre pair » est une assertion mathématique (vraie).

- « Martin a cinq ans » n'est pas une assertion mathématique, puisque Martin n'est (sauf mention explicite du contraire) pas un objet mathématique, tout comme la notion d'âge.
- « Il y a cinq pommes dans ce sac » n'est pas une assertion mathématique, puisque les pommes sont des objets physiques et non mathématiques.
- « -5 est un nombre réel positif » est une assertion mathématique qui est fausse.
- « $3 = 5$ » est une assertion fausse.
- « π est-il égal à 3 ? » n'est pas une assertion mathématique, car c'est une question et non une affirmation.
- « Si x est un nombre réel tel que $x^2 - x = 0$, alors $x = 0$ ou $x = 1$ » est une assertion mathématique qui est vraie.
- « Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ est premier » est une assertion mathématique (les nombres premiers sont les entiers naturels différents de 1 qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes), dont nul ne sait aujourd'hui si elle est vraie ou fausse.

On utilise parfois (souvent) d'autres termes pour désigner les assertions mathématiques, pour marquer leur importance ou leur difficulté.

Terminologie 2.28

- *Théorème :* c'est une assertion importante, dont on démontre ou on admet qu'elle est vraie, et qui doit être connue par cœur ;
- *Proposition :* c'est le terme que nous utiliserons le plus souvent pour désigner une assertion qui est vraie, sans être aussi importante qu'un théorème ;
- *Lemme :* c'est une assertion démontrée, qui constitue une étape dans la démonstration d'un théorème ;
- *Corollaire :* c'est une conséquence facile d'un théorème.
- *Axiome :* c'est une assertion dont on s'entend pour dire qu'elle est vraie. On dit aussi *postulat*. Ces assertions sont les fondations de l'édifice mathématique. *Conjecture :* c'est une assertion dont certains mathématiciens pensent qu'elle est vraie, mais personne ne l'a encore démontré. Une fois démontrée, une conjecture devient un théorème.

Remarque 2.29. — Il est tentant de dresser une liste d'axiomes, et de redémontrer tout ce que l'on sait à partir de ces axiomes. C'est un processus très fastidieux qui a été tenté au cours du XXe siècle, en particulier sous l'impulsion du groupe Bourbaki. Si l'enthousiasme initial est un peu retombé, les progrès récents de l'informatique ont relancé ce programme. Ainsi des ordinateurs sont capables aujourd'hui de *certifier* des preuves. Récemment, plusieurs théorèmes très difficiles dont peu d'humains comprennent la preuve complète ont été vérifiés par ordinateur (classification des groupes finis simples, preuve par Hales de la conjecture de Kepler).

Retenons qu'il est possible, mais pénible, de tout reconstruire à partir de rien. Dans la pratique, on est satisfait d'une démonstration lorsqu'elle part d'axiomes admis par tous, et que chaque étape élémentaire est comprise par tous.

Remarque 2.30. — Comme exemple de conjectures célèbres, il y a eu pendant plus de 300 ans le (mal-nommé) *Grand théorème de Fermat* qui est devenu en 1994 le *théorème de Wiles*, car démontré par le mathématicien anglais Andrew Wiles. De même la *conjecture de Poincaré* est devenue au cours de la décennie 2000-2010 le *théorème de Perelman*, car démontrée par le mathématicien russe Grigory Perelman. Noter que dans ce cas, il est difficile de mettre une date précise, car il y a fallu presque dix ans pour que la preuve de Perelman convainque le reste de la communauté mathématique.

Il est difficile de concevoir qu'il reste des conjectures en mathématiques, mais c'est bien le cas. Un exemple particulièrement simple est la *conjecture de Goldbach*, selon laquelle tout nombre entier pair plus grand que 6 est la somme de deux nombres premiers.

Une classe d'objets importants est constituée des *variables*. C'est un moyen de parler d'un objet (nombre, ensemble, fonction) sans forcément le connaître parfaitement. Par exemple lorsqu'on cherche à résoudre une équation comme $x^2-3x+1=0$, on introduit une variable x, sans dire plus que le fait que x est un nombre réel qui satisfait $x^2-3x+1=0$. Parfois, on dira même « Soit t un nombre réel quelconque. » Dans ce cas, on ne sait rien de plus que le fait que t soit réel. À l'inverse lorsqu'on dit « Posons $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ». On vient de donner un nom à un nombre un peu compliqué. Dans ce cas la valeur de ϕ est bien définie.

Définition 2.31 (Variable)

Une variable est un symbole représentant un objet mathématique dont la valeur n'est pas connue.

Lorsqu'une variable est introduite dans un énoncé en disant à quel ensemble elle appartient, on dit que la variable est *liée*. Sinon elle est dite *libre*.

Ainsi, dans les exemples précédents, les variables sont liées puisqu'on a donné l'ensemble des valeurs possibles pour la variable (les solutions de l'équation $x^2-3x+1=0$ dans le premier cas, n'importe quel réel dans le second cas, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dans le troisième cas). En revanche dans l'expression $y^3-3y=0$, on n'a rien précisé sur y, c'est donc une variable libre. Notons que si on ne sait rien sur y, on ne sait pas si l'assertion « $y^3-3y=0$ » est vraie ou fausse. Plus généralement, une assertion contenant une variable libre n'est ni vraie, ni fausse : tant qu'on ne sait rien de plus sur cette variable, on ne peut déterminer sa vérité.

Terminologie 2.32

Une assertion ne contenant que des variables liées est dite *close*. Elle est vraie ou fausse. [a]

Une assertion contenant au moins une variable libre est dite *ouverte*. On dit qu'elle dépend des *paramètres* que sont les variables libres. Une telle assertion n'est ni vraie ni fausse.

a. En fait, ce n'est pas le cas, et ça a été une révolution mathématique et philosophique de comprendre qu'il existe des assertions qui sont indémontrables, c'est-à-dire ni vraies ni fausses (théorèmes d'incomplétudes de Gödel, 1931). Cependant, les énoncés indémontrables ne sont pas si fréquents, et la plupart des assertions que nous pourrons écrire sont en effet vraies ou fausse.

Exemples 2.33. —

— « n est plus grand que 3 » est une assertion ouverte. On ne sait si elle est vraie ou fausse, puisque n est une variable libre.

— « Pour tout entier naturel n, n est plus grand que 3 » est une assertion close, qui est fausse. La variable n est liée, et on se convainc que l'assertion est fausse puisqu'il existe des entiers strctement inférieurs à 3.

— En revanche, « Pour tout entier naturel n, si n est plus grand que 5, alors n est plus grand que 3 » est une assertion close, qui est vraie. La variable n est encore liée.

2.3. Valeurs de vérité et tables de vérité. — En mathématiques, on combine des assertions entre elles à l'aide d'opérateurs (ou connecteurs) logiques. Une façon de décrire la signification de ces opérateurs est de décrire la valeur de vérité de l'assertion obtenue pour toutes les valeurs de vérité possibles des assertions auxquelles on applique cet opérateur.

Définition 2.34 (Opérateurs logiques)

Étant donné deux assertions P et Q, on peut former de nouvelles assertions :

- la *négation* de P, notée $\neg P$ (« non P »), qui est vraie si et seulement si P est fausse,
- la *conjonction* de P et Q, notée $P \wedge Q$ (« P et Q »), qui est vraie si et seulement si à la fois P et Q sont vraies,
- la *disjonction* de P et Q, notée $P \vee Q$ (« P ou Q »), qui est vraie si et seulement au moins l'une parmi les deux assertions P et Q est vraie.

Exemples 2.35. — Voici quelques assertions composées et leur traduction.

$$\begin{array}{rl} \neg(n<5) & n \text{ n'est pas strictement inférieur à } 5 \\ (n<5)\wedge(n\leqslant 2) & n \text{ est strictement inférieur à 5 et inférieur ou égal à } 2 \\ (n\geqslant 2)\vee(n\leqslant 0) & n \text{ est supérieur ou égal à 2 ou } n \text{ est inférieur ou égal à } 0 \end{array}$$

Observez l'usage des parenthèses qui permettent d'identifier les énoncés dont l'assertion est composée.

Dans la vie courante le mot « ou » a deux significations possibles : dans un menu de restaurant il est « exclusif » : parmi les entrées proposées, vous n'en choisissez qu'une seule. En mathématiques, par contre, le « ou » est toujours inclusif : P ou Q signifie que l'une *au moins* des deux assertions est vraie (peut-être les deux). Par opposition, le « ou exclusif » est vrai quand exactement une des deux assertions est vraie.

Définition 2.36

Une assertion composée est appelée une *tautologie* si elle est vraie quelle que soit la valeur de vérité des assertions qui la composent.

Exemple 2.37. — L'assertion $P \vee (\neg P)$ est une tautologie.

Lorsqu'on combine des assertions à l'aide de connecteurs, il peut être utile d'utiliser des *tables de vérité*. Dans l'exemple ci-dessous, on décrit l'effet des connecteurs sur deux assertions P et Q, selon qu'elles sont vraies (V) ou fausses (F), en disant dans chacun des 4 cas si l'assertion composée est elle-même vraie ou fausse.

		négation non	conjonction et	disjonction ou
P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Lorsqu'on a une assertion dépendant de 3 ou 4 assertions de base, on peut établir ainsi à l'aide d'une table à 8 ou 16 lignes si l'assertion composée est vraie ou fausse, selon la valeur de vérité de chaque assertion de base.

Exemple 2.38. — On veut savoir si l'assertion $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$ est vraie selon que P, Q et R sont vraies ou fausses. On dresse la table ci-dessous, où les 8 lignes correspondent aux huit possibilités.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$\neg(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V

Ainsi l'assertion $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$ est fausse si P et R sont vraies et Q fausse, et elle est vraie dans tous les autres cas.

2.4. Quantificateurs. — Les quantificateurs permettent de réaliser une conjonction et une disjonction d'une famille d'assertion indicée par un paramètre parcourant un ensemble. Il y en a deux, selon que l'on veut réaliser une conjonction ou une disjonction.

Définition 2.39 (Quantificateurs)

Les quantificateurs sont les deux symboles $\forall$ « quel que soit » et $\exists$ « il existe ». Si A est un ensemble et $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x, alors

— l'assertion $(\forall x \in A, P(x))$ est vraie si et seulement si l'assertion $P(x)$ est vraie pour n'importe quel x dans A.

— l'assertion $(\exists x \in A, P(x))$ est vraie si et seulement si l'assertion $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x dans A.

On dit aussi que $\forall$ est le quantificateur *universel* et $\exists$ le quantificateur *existentiel*. On les utilise pour des énoncés du type :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N}, \quad n < m. \tag{10}$$

Cette formule se lit : quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$, il existe m appartenant à $\mathbf{N}$ tel que $n < m$. Soit encore : pour tout entier n, il existe un entier m strictement plus grand que n. Il est crucial de retenir que dans ce cas l'entier m peut dépendre de l'entier n. Cette assertion est vraie : pour tout n, le nombre $m = n + 1$ vérifie bien $n < m$.

Noter que l'assertion « $n < m$ » contient deux variables libres, et donc elle n'est ni vraie ni fausse. De même l'assertion « $\exists m \in \mathbf{N}, n < m$ » contient une variable libre n, et donc elle n'est ni vraie ni fausse. En revanche l'assertion « $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\quad n < m$ » contient deux variables qui sont maintenant liées, puisqu'introduites par un quantificateur.

De façon générale, si $P(x)$ est une assertion ouverte dépendant d'un unique paramètre x, les assertions $(\forall x \in A, P(x))$ et $(\exists x \in A, P(x))$ sont des assertions closes.

Remarque 2.40. — Le nom ou la lettre qu'on utilise pour désigner une variable n'a pas d'importante en général. On peut donc le changer, du moment qu'on le change à chaque fois que la variable intervient. Ainsi les deux assertions

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\quad n < m \tag{11}$$

et

$$\forall x \in \mathbf{N},\ \exists y \in \mathbf{N},\quad x < y \tag{12}$$

sont équivalentes. Par contre elles ne sont pas équivalentes à

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists n \in \mathbf{N},\quad n < n \tag{13}$$

qui n'a pas de sens, car la variable n est introduite deux fois dans la même assertion !

L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs est très important. Échangeons dans (11) les deux quantificateurs.

$$\exists m \in \mathbf{N},\quad \forall n \in \mathbf{N},\quad n < m\ .$$

Cette assertion se lit : il existe un entier m tel que tout entier n vérifie $n < m$ (ce qui est faux).

Nous commettrons souvent l'abus de notation consistant à regrouper des quantificateurs de *même nature* et portant sur les *mêmes ensembles*. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N},\quad m + n \in \mathbf{N},$$

sera plutôt écrit :

$$\forall n, m \in \mathbf{N},\quad m + n \in \mathbf{N}.$$

(La somme de deux entiers naturels est un entier naturel.)

Ou encore,

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\quad n + m < 10,$$

deviendra :

$$\exists n, m \in \mathbf{N},\quad n + m < 10.$$

(Il existe deux entiers dont la somme est strictement inférieure à 10.)

Une règle importante est que la négation échange les deux quantificateurs.

Proposition 2.41

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x et soit A un ensemble. alors les assertions

$$\neg(\forall x \in A,\ P(x)) \quad \text{et} \quad (\exists x \in A,\ \neg P(x))$$

sont équivalentes. De façon semblable, les assertions

$$\neg(\exists x \in A,\ P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A,\ \neg P(x))$$

sont équivalentes.

Remarques 2.42. — i) Pour écrire la négation d'une assertion comportant des quantificateurs on change donc les $\forall$ en $\exists$ et les $\exists$ en $\forall$, puis on écrit la négation de l'assertion qui suit la liste des quantificateurs. Ceci est tout à fait conforme à l'intuition. La négation de « tout les x vérifient $P(x)$ » est bien « il existe un x qui ne vérifie pas $P(x)$ ». La négation de « il existe un x qui vérifie $P(x)$ » est bien « aucun x ne vérifie $P(x)$ » soit encore « tous les x vérifient $\neg P(x)$ ». Ecrivons par exemple la négation de l'assertion (10).

$$\exists n \in \mathbf{N}, \quad \forall m \in \mathbf{N},\ (n \geqslant m)\ .$$

Il existe un entier n supérieur ou égal à tout entier m (ce qui est faux).

ii) La première assertion permet en fait de définir le quantificateur universel à partir du quantificateur existentiel : $\forall x \in A,\ P(x)$ peut être défini comme $\neg(\exists x \in A,\ \neg P(x))$. la seconde assertion découle aussi de cette définition.

Pour les deux autres opérateurs logiques, il faut se méfier : il y a deux cas où l'on peut *distribuer*, et deux cas où l'on ne peut pas.

Proposition 2.43

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des assertions dépendant d'un paramètre et soit A un ensemble. Les assertions

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

et

$$(\exists x \in A,\ P(x)) \vee (\exists y \in A,\ Q(y))$$

sont équivalentes. De même, les assertions

$$\forall x \in A, \quad P(x) \wedge Q(x)$$

et

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \wedge (\forall y \in A,\ Q(y))$$

sont équivalentes.

Il convient d'être extrèmement prudent dans l'utilisation de cette propriété. En effet, le quantificateur existentiel n'est pas distributif par rapport à « et » et le quantificateur universel ne l'est pas par rapport à « ou » ! Par exemple, « il existe un entier supérieur à 7 et inférieur à 6 » (faux) n'est pas équivalent à « il existe un entier supérieur à 7 et il existe un entier inférieur à 6 » (vrai). De même « tout entier est inférieur ou égal à 7, ou supérieur ou égal à 6 » (vrai) n'est pas équivalent à « tout entier est inférieur ou égal à 7 ou tout entier est supérieur ou égal à 6 » (faux).

Idée de la preuve de la proposition. — Démontrons la première équivalence. Supposons

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

On se donne donc un élément $a \in A$ tel que $P(a)$ ou $Q(a)$. Dans le premier cas, $\exists x \in A,\ P(x)$, dans le second $\exists y \in A,\ Q(y)$ ce qui implique l'assertion

$$(\exists x \in A, \quad P(x)) \vee (\exists y \in A, \quad Q(y))$$

Réciproquement, on raisonne de façon similaire en distinguant deux cas. La deuxième équivalence peut se déduire de la première en utilisant la proposition 2.41. ☐

2.5. Implication et raisonnement déductif. — Vous avez déjà l'habitude d'utiliser l'implication et l'équivalence. Ce sont des mécanismes fondamentaux de raisonnement. Ces notions peuvent être vues comme des opérateurs logiques.

Définition 2.44 (Implication)

Pour des assertions P et Q, l'*implication* $P \implies Q$ est définie comme $(\neg P) \vee Q$ (« non P ou Q »).

Remarque 2.45. — Par définition, l'implication $P \implies Q$ est vraie soit si P est fausse soit si P et Q sont vraies toutes les deux. Autrement dit, l'implication $P \implies Q$ est définie comme $(\neg P) \vee Q$.

Notons que si $P \Rightarrow Q$ et P sont vraies alors Q est vraie. Cela fait de l'implication la base du raisonnement mathématique : l'assertion Q est démontrée dès lors qu'on a démontré P et $P \Rightarrow Q$.

Pour bien comprendre l'implication, reprenez chacune des formulations ci-dessous en remplaçant P par « $n > 3$ » et Q par « $n > 2$ ».

$P \implies Q$
P implique Q
P entraîne Q
si P est vrai alors Q est vrai
pour que Q soit vrai il suffit que P le soit
P est une condition suffisante pour Q
pour que P soit vrai il faut que Q le soit
Q est une condition nécessaire pour P

Remarque 2.46. — Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$, la technique la plus simple consiste à supposer l'assertion P et à faire un raisonnnement qui démontre Q. On parle de raisonnement *direct*. C'est le plus utilisé. Nous verrons plus tard d'autres méthodes (raisonnement par contraposée ou par l'absurde).

Le raisonnement déductif consiste à démontrer une implication en enchainant les implications. Il est fondé sur le résultat suivant.

Proposition 2.47

Soit P, Q, R trois assertions. Alors l'assertion $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie.

Pour le démontrer il suffit (par exemple) de faire une table de vérité.

Autrement dit si l'implication $P \implies Q$ est vraie, ainsi que l'implication $Q \implies R$, alors l'implication $P \implies R$ est également vraie.

Définition 2.48 (Réciproque)

Étant donné une implication $P \implies Q$, l'*implication réciproque* est $Q \implies P$.

Définition 2.49 (Équivalence)

Soit P et Q deux assertions (dépendant éventuellement de paramètres). On définit $P \iff Q$ comme $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Exemple 2.50. —

— Si n est un entier, les assertions « $n \geqslant 5$ » et « $n > 4$ » sont équivalentes.

— Si n est réel, les assertions « $n \geqslant 5$ » et « $n > 4$ » ne sont pas équivalentes (par exemple $n = 9/2$ rend la première assertion vraie, mais la seconde fausse).

Pour bien comprendre l'équivalence, reprenez chacune des formulations en remplaçant P par « $n \geqslant 3$ » et Q par « $n > 2$ », où n est un nombre entier.

$P \iff Q$
P est équivalent à Q
P équivaut à Q
P entraîne Q et réciproquement
si P est vrai alors Q est vrai et réciproquement
P est vrai si et seulement si Q est vrai
pour que P soit vrai il faut et il suffit que Q le soit
P est une condition nécessaire et suffisante pour Q

Voici la table de vérité de l'implication, de l'implication réciproque, et de l'équivalence, entre deux assertions P et Q. Constatez que l'équivalence $P \iff Q$ est vraie quand P et Q ont la même valeur de vérité et fausse sinon.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Remarque 2.51. — Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, On peut, dans les cas faciles, démontrer une chaine d'équivalences

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n \Leftrightarrow Q$$

C'est souvent ainsi qu'on résoud un système d'équations par exemple.

Quand on ne peut pas faire ainsi, une méthode générale consiste à démontrer successivement une implication $P \Rightarrow Q$ puis sa *réciproque* $Q \Rightarrow P$. On introduit souvent la démonstration de la réciproque par le mot « réciproquement ».

Dans le cas des équations, on parle aussi d'*analyse* et *synthèse* : on démontre d'abord que les équations impliquent que les valeurs cherchées appartiennent à un certain ensemble ; c'est la phase d'*analyse* de l'équation. On vérifie ensuite que les solutions trouvées conviennent, c'est la phase de *synthèse*.

Parmi les propriétés fondamentales de l'implication, on peut donner les énoncés suivants.

Axiomes 2.52

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x, soit A un ensemble et a un élément de A. Alors les assertions

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \Longrightarrow P(a)$$

et

$$P(a) \Longrightarrow (\exists x \in A,\ P(x))$$

sont des tautologies.

Exemple 2.53. — L'assertion

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

implique l'assertion

$$\pi^2 - 2\pi + 1 \geqslant 0,$$

car π est un nombre réel.

Les deux énoncés des axiomes 2.52 sont conformes à l'intuition. Notons que le deuxième correspond à la façon « standard » de démontrer une assertion d'existence : pour démontrer que $\exists x \in A,\ P(x)$, il suffit d'exhiber un élément $a \in A$ tel qu'on puisse démontrer $P(a)$. Une telle démonstration est dite *constructive* ou *effective* si on explique comment construire l'élément a. En particulier, pour démontrer qu'une assertion

$$\forall x \in A,\ P(x)$$

est *fausse*, il suffit d'exhiber un *contre-exemple* c'est-à-dire un élément $a \in A$ tel que $\neg P(a)$.

Remarque 2.54. — Pour démontrer une assertion avec un quantificateur universel

$$\forall x \in A,\ P(x), \tag{14}$$

on commence le plus souvent par écrire « Soit $x \in A$ ». Cela signifie que dans la démonstration qui suit x désigne un élément *arbitraire* et *fixé* de l'ensemble A. Si on démontre $P(x)$, alors, comme cela vaut pour un x arbitraire, on a démontré (14).

Exemple 2.55. — Démontrons l'assertion

$$\forall t \in \mathbf{R},\ t^2 + 2t + 2 > 0. \tag{15}$$

Soit $t \in \mathbf{R}$. On a l'égalité $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1$. Comme le carré d'un nombre réel est positif, $(t+1)^2 \geqslant 0$. Donc $(t+1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Cela conclut la preuve de (15).

2.6. Autres modes de raisonnement. — Il ne s'agit pas de proposer ici une théorie du raisonnement mathématique. Nous avons déjà mentionné (*cf.* remarque 2.51) le raisonnement *direct*, qu'on utilise le plus souvent, ainsi que les raisonnements *par analyse et synthèse*. Nous allons maintenant donner quelques exemples de démonstrations, pour illustrer quatre types de raisonnements supplémentaires : par contraposée, par l'absurde, par disjonction de cas et par récurrence.

Raisonnement par contraposée

Il consiste, plutôt que de démontrer l'implication $P \Longrightarrow Q$, à démontrer sa contraposée $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$. En effet ces deux implications sont équivalentes, comme on peut le vérifier sur une table de vérité.

Il est difficile de donner une règle générale d'utilisation de ce raisonnement. Un bon conseil avant de se lancer dans la démonstration d'une implication, est d'écrire d'abord sa contraposée. Avec un peu d'expérience, on arrive vite à sentir laquelle des deux est la plus facile à démontrer. Si le résultat désiré est Q, on cherche les conséquences de non Q pour arriver aux bonnes hypothèses. Notre premier exemple est un résultat facile, mais très utile.

Proposition 2.56

Soit x un nombre réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leqslant \varepsilon$. Alors $x \leqslant 0$.

Démonstration. — Nous devons démontrer l'implication :

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \,,\quad x \leqslant \varepsilon\right) \Longrightarrow (x \leqslant 0)\ .$$

Ecrivons sa contraposée :

$$(x > 0) \Longrightarrow \left(\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \ ;\qquad x > \varepsilon\right)\ .$$

« Si x est strictement positif, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$ ». C'est vrai : il suffit de choisir $\varepsilon = x/2$. □

Étant donné deux assertions P et Q et l'implication $P \Longrightarrow Q$, il ne faut pas confondre la contraposée qui est l'implication $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ et la réciproque qui est l'implication $Q \Longrightarrow P$. La contraposée $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ est équivalente à $P \Longrightarrow Q$, et donc se démontre à la place de $P \Longrightarrow Q$. En revanche la réciproque $Q \Longrightarrow P$ n'est PAS équivalente à $P \Longrightarrow Q$.
Insistons : lorsque $P \Longrightarrow Q$ est vraie, alors automatiquement la contraposée $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ est vraie. En revanche, la réciproque $Q \Longrightarrow P$ peut être vraie ou fausse, selon les cas.

***Exemple 2.57.* —** L'implication $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 2) \Longrightarrow (x > 1)$ est vraie.
Sa contraposée est $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leqslant 1) \Longrightarrow (x \leqslant 2)$, elle est aussi vraie.
Par contre l'implication réciproque est $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 1) \Longrightarrow (x > 2)$, elle est fausse.

Raisonnement par l'absurde
Il consiste à démontrer une assertion en vérifiant que sa négation conduit à une contradiction avec les hypothèses. Formellement, si P désigne les hypothèses, plutôt que de démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre $(P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (1 = 0)$. S'il n'y a pas d'hypothèse et qu'on veut démontrer une assertion Q, cela revient plutôt à démontrer $\neg Q \Rightarrow (1 = 0)$.

Dans certains cas il se distingue mal du raisonnement par contraposée : si P désigne la conjonction des hypothèses et Q la conclusion, nier Q et aboutir à une contradiction, revient à démontrer $\neg P$ à partir de $\neg Q$, ce qui est la contraposée de $P \Longrightarrow Q$.

Voici un résultat classique.

Proposition 2.58

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. — Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers ; un nombre irrationnel n'est pas rationnel. Nous devons donc démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux entiers. Supposons le contraire : il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$. Quitte à simplifier la fraction, nous pouvons supposer que p et q n'ont pas de facteur commun. Multiplions par q et élevons au carré :

$$2q^2 = p^2 .$$

Le nombre $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est également pair. Mais si p est pair, alors p^2 est multiple de 4. Donc q^2 est multiple de 2, donc q est pair. Mais alors 2 est un facteur commun à p et q, ce qui est une contradiction. □

Raisonnement par disjonction de cas
Dans certains raisonnements, il peut être pratique de considérer successivement deux cas. Ainsi, si on veut démontrer une assertion $P(x)$ pour tout élément x d'un ensemble E qui est la réunion de deux parties A et B, on démontre d'abord l'assertion $P(x)$ pour $x \in A$ puis l'assertion $P(x)$ pour $x \in B$ et, comme $E = A \cup B$, on peut conclure que l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

À titre d'exemple, démontrons le résultat suivant :

Proposition 2.59

Pour tout entier n, le nombre rationnel $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier.

Démonstration. — Nous allons distinguer deux cas suivant la parité de l'entier n.

Premier cas. Si n est pair alors ce nombre est le produit de l'entier $\frac{n}{2}$ par l'entier $n+1$. C'est donc un entier.

Deuxième cas. Si n est impair, alors $n+1$ est pair et le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est le produit de l'entier n par l'entier $\frac{n+1}{2}$; c'est donc également un entier.

Comme tout nombre entier est soit pair soit impair, l'assertion « $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier » est démontrée pour tout entier n. □

Raisonnement par récurrence
Pour démontrer qu'une assertion $H(n)$ dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, on démontre :

1. $H(0)$ « initialisation »,
2. $\forall n \in \mathbf{N}\,,\ (\,H(n) \Longrightarrow H(n+1)\,)$ « hérédité ».

L'assertion $H(n)$ est *l'hypothèse de récurrence.* Il peut se faire qu'elle ne soit vraie que pour $n \geqslant 1$ ou $n \geqslant 2$, auquel cas, on la démontre pour la plus petite valeur pour laquelle elle est vraie. Voici la démonstration d'une formule à connaître :

Proposition 2.60

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des entiers de 1 à n vaut $n(n+1)/2$.

Démonstration. — L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) \quad : \quad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

1. *Initialisation.* Pour $n = 1$:
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \ .$$
2. *Hérédité.* Soit n un entier strictement positif quelconque. Supposons que $H(n)$ est vraie. Ecrivons :
$$1+2+\cdots+n+(n+1) = (1+2+\cdots+n)+(n+1) \ .$$
En appliquant $H(n)$, on obtient
$$(1+2+\cdots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \ ,$$
Le membre de droite s'écrit
$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ ,$$
Nous avons donc démontré que
$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ ,$$
c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie.

□

On pourra noter au passage que la proposition donne un nouvelle preuve du fait que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier !

On peut être amené, pour démontrer $H(n+1)$ à utiliser $H(m)$ pour $m \in \{0,\ldots,n\}$, ce qui ne change rien au principe de la récurrence. L'hérédité est remplacée par

$$\forall n \in \mathbf{N} \, , \, \Big((\forall m \in \{0,\ldots,n\} \, , \quad H(m)\,) \implies H(n+1) \Big) \ .$$

Pour deviner quelle est la bonne hypothèse $H(n)$, on doit souvent essayer plusieurs valeurs successives de n : $n = 0$, puis $n = 1$, $n = 2$,... C'est parfaitement inutile pour la démonstration. Attention, ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour quelques valeurs de n qu'elle est vraie pour tout n. Voici deux exemples.

1. Les nombres 31, 331, 3 331,..., 33 333 331 sont tous premiers. Mais $333\,333\,331 = 17 \times 19\,607\,843$ ne l'est pas.
2. Pour toutes les valeurs de n allant de 0 à 39, le nombre $n^2 + n + 41$ est premier. Mais le nombre $40^2 + 40 + 41 = 41^2$ ne l'est pas.

Exercices

Ensembles, nombres entiers, rationnels et réels

Exercice 2.1. (*)

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $\{1,2,3\} \cup \{4,5,6\}$,
2. $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$,
3. $\{1,2,3\} \cup \{1,3,4\}$,
4. $\{1,2,3\} \cap \{4,5,6\}$,
5. $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}$,
6. $(\{1,2\} \cup \{1,3\}) \cap \{3,4\}$,
7. $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \cup \{5,6\}$,
8. $(\{1,2\} \cup \{3,4\}) \cap \{2,4\}$,
9. $(\{1,\{2\}\} \cup \{2,3\}) \cap \{\{2\},\{3\}\}$,
10. $(\{1,\{2\}\} \cap \{\{2\},\{3\}\}) \cap \{\{2\},3\}$,
11. l'ensemble des nombres entiers compris entre $\sqrt{2}$ et 2π.

Exercice 2.2. (*)

On note A l'ensemble $\{1,2,3\}$ et B l'ensemble $\{-1,0,1\}$. Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $A \cap B$,
2. $A \cup B$,
3. $A \setminus B$,
4. $B \setminus A$,
5. $\{x \in A \mid x \geq 2\}$,
6. $\{x \in B \mid x \geq 2\}$,
7. $\{y \in A \mid y \leq 5\}$,
8. $\{z \in A \cup B \mid z \geq 0\}$,
9. $A \cap 2\mathbf{Z}$,
10. $B \cap 3\mathbf{Z}$,

Exercice 2.3. (*)

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (aucune justification n'est attendue).

1. $[0,1] \cup [1,2]$,
2. $[0,1] \cap [1,2]$,
3. $[0,1] \cap \mathbf{Z}$,
4. $2\mathbf{Z} \cap 3\mathbf{Z}$,

Exercice 2.4. (*)

Écrire les ensembles suivants comme intervalles ou réunions d'intervalles de $\mathbf{R}$:

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x < 6\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 0,5\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| < 0,1\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-5| \leq 0,01\}$,

5. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 0,1| < 0,2\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 3\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \geq 1\}$,
8. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x \geq 0\}$.

Exercice 2.5. (*)

On note A l'ensemble $\{1,2,3\}$ et B l'ensemble $\{-1,0,1\}$. Écrire en extension les ensembles suivants :

1. $\{x+2; x \in A\}$,
2. $\{2x; x \in B\}$,
3. $\{\frac{1}{x}; x \in A\}$,
4. $\{x+y; (x,y) \in A \times B\}$,
5. $\{x+y; (x,y) \in A \times A\}$,
6. $\{x+x; x \in A\}$,
7. $\{xy; (x,y) \in A \times B\}$,

Exercice 2.6. (*/)**

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (justifier).

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid \lfloor x \rfloor = 3\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq \lfloor x \rfloor \leq 6\}$,
3. $\{x \in \mathbf{Q} \mid |x| \leq 3\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| = \lfloor x \rfloor\}$.
5. $\bigcup_{i \in [\![1,3]\!]} \bigcap_{j \in \{2,3\}} [i+j, i+2j]$

Exercice 2.7. (*/)**

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (aucune justification n'est attendue).

1. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\}$,
2. $\{2n+1; n \in [\![2,5]\!]\}$,
3. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\}$ $\cup \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
4. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\}$ $\cap \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
5. $\left\{\dfrac{p}{q}; p \in \{1,2,3,4\}, q \in \{1,2,3,4\}\right\}$.

Exercice 2.8. (**)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont inclus dans lesquels ?

1. $[0,1]$,
2. $]-1,1[$,
3. $[0,\frac{1}{2}]$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x = 0\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < \dfrac{1}{5}\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 0,2| < 0,1\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0\}$.

Exercice 2.9. (**)

Les ensembles suivants coïncident-ils ?

1. $\{1, 1, 2\}$ et $\{2, 1\}$;
2. $\{1, (1, 2)\}$ et $\{(1, 1)\}$;
3. $\{(1, 1), (1, 2)\}$ et $\{(1, 1), (2, 1)\}$;
4. $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2, 1\}\}$;
5. $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\{x \in \mathbf{Z} \mid x \leqslant 3\}$;
6. $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\{x \in \mathbf{N} \mid x \leqslant 3\}$;
7. $[\![1, 3]\!] \times [\![0, 3]\!]$ et $\{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 3\}$;
8. $\{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid 0 \leqslant x < y \leqslant 3\}$ et $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Exercice 2.10. (**)
Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
1. Simplifier l'expression $(A \cap B \cap C) \cup ({}^c\!A \cap B \cap C) \cup {}^c\!B \cup {}^c\!C$.
2. Démontrer que $(A \cap {}^c\!B) \cap {}^c\!C = A \cap {}^c(B \cup C) = (A \cap {}^c\!C) \cap {}^c\!B$.
3. A-t-on toujours $(A \cup B) \cap ({}^c\!A \cup {}^c\!C) \cap {}^c\!B \cap ({}^c\!A \cup B \cup C) = \emptyset$?

Langage mathématique

Exercice 2.11. (*) Lorsque T est un tableau de nombres, on note $T(i, j)$ le contenu de la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On considère les 4 assertions suivantes, portant sur des tableaux ayant au moins 4 lignes et 4 colonnes.

$A : \forall i \in \{1, \ldots, 4\}, \forall j \in \{1, \ldots, 4\},\ T(i, j) = 1$
$B : \forall i \in \{1, \ldots, 4\}, \exists j \in \{1, \ldots, 4\},\ T(i, j) = 1$
$C : \exists i \in \{1, \ldots, 4\}, \forall j \in \{1, \ldots, 4\},\ T(i, j) = 1$
$D : \exists i \in \{1, \ldots, 4\}, \exists j \in \{1, \ldots, 4\},\ T(i, j) = 1$

Pour chacun des tableaux ci-dessous, dire quelles sont les assertions vérifiées parmi A, B, C, et D.

$$\text{(a) } T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\\hline 1&1&0&0\\\hline 0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0\\\hline\end{array} \qquad \text{(c) } T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\\hline 0&0&0&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline\end{array}$$

$$\text{(b) } T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array} \qquad \text{(d) } T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&1\\\hline 0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}$$

Exercice 2.12. (*)

Écrire des assertions à l'aide de quantificateurs traduisant les énoncés suivants.

1. Tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel.
2. Tout élément de $\mathscr{P}$ est le double d'un entier.
3. Pour tout entier relatif, il existe un entier relatif plus grand.
4. Pour tout nombre réel, il existe un nombre rationnel tel que la différence des deux est plus petite que 0,1 en valeur absolue.
5. Tout nombre complexe non nul est le carré de deux nombres complexes distincts.
6. Il existe deux nombres réels irrationnels dont le produit est rationnel.

Exercice 2.13. (*)

Soit P, Q, R trois assertions, et a, b, c trois nombres réels. Écrire la négation des assertions suivantes.

1. $P \wedge (\neg Q)$
2. $(P \Longrightarrow Q) \wedge R$
3. $\exists x \in [1, +\infty[, a \geq b + x$
4. $\exists x \in \mathbf{R}_+, a = b + x$
5. $a = b = c$

Exercice 2.14. (**)

Pour chacune des assertions ci-dessous, dire quelles variables sont liées. Dire ensuite si l'assertion dépend d'un paramètre. Écrire chaque assertion en français. On rappelle qu'une assertion est *close* si elle ne dépend pas d'un paramètre. Dire pour chaque assertion close si elle est vraie ou fausse.

1. $x \geqslant y$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geqslant y$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, x \geqslant y$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, (x \geqslant y \text{ et } (\forall z \in \mathbf{Z}, x \geqslant z \Rightarrow y \geqslant z))$.

Exercice 2.15. (**)

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. $1+1=2 \Longrightarrow 1+1=3$;
2. $1+1=3 \Longrightarrow 1+1=2$;
3. $1=0 \Longrightarrow (\exists a, b \in \mathbf{N}^*, a^2+b^2=0)$;
4. $\forall x \in \mathbf{R}, x>2 \Longrightarrow x \geq 3$;
5. $\forall x \in \mathbf{R}, x>3 \Longrightarrow x \geq 3$;
6. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2,3] \Longrightarrow x \in [0,4]$;
7. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2,3] \Longrightarrow x \leq 3$;
8. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2,3] \Longrightarrow x \geq 3$;
9. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2,+\infty[\Longrightarrow x \leq 3$;
10. $\forall x, y \in \mathbf{R}^*, x>y \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$;
11. $\exists x \in \mathbf{R}_+^*, x < \sqrt{x}$;
12. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x+y>0$;
13. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x+y>0$;
14. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x+y>0$;
15. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x+y>0$;
16. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |x| < \varepsilon$;
17. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
18. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
19. $\exists t \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, |x| < t \Rightarrow x^2 < 3$;

Exercice 2.16. (*)

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire en fonction de A, B, C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.
3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.
5. x appartient à deux d'entre eux au moins.
6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Assertions et tables de vérité

Exercice 2.17. (*)

Soient P, Q et R des assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifiez que l'implication

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$$

est toujours vraie.

Exercice 2.18. (*)

Soit P et Q deux assertions, l'assertion $P \oplus Q$ (dire "P ou exclusif Q") est vraie si exactement l'une des deux assertions P et Q est vraie.

1. Donner la table de vérité de $P \oplus Q$ selon les vérités de P et Q.

2. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
3. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

Raisonnements

Exercice 2.19. (**) Soit a un paramètre réel. Résoudre l'inéquation suivante, en l'inconnue x réelle :

1. $ax + 3 \leqslant 2x + 1$
2. $|3x - 1| \leqslant |x + 4|$

Exercice 2.20. (**) Soit a un nombre réel. On note $\mathscr{D}_a$ la droite d'équation $y = x+2a$ et $\mathscr{C}_a$ le cercle de centre $(a, 1)$ et de rayon 1.

1. Pour quelles valeurs de a existe-t-il des points communs à $\mathscr{D}_a$ et $\mathscr{C}_a$?
2. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{D}_a$ est tangente à $\mathscr{C}_a$?

Exercice 2.21. (*)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

1. Le produit de 3 nombres réels est négatif si et seulement si l'un d'entre eux est négatif, les deux autres étant positifs.
2. Le produit de n nombres réels est positif si et seulement si un nombre pair d'entre eux sont négatifs, les autres étant positifs.

Exercice 2.22. (*)

1. Écrire la contraposée de l'assertion $\forall x, y \in \mathbf{R}, (x + y) > 2 \Rightarrow (x > 1 \ \vee \ y > 1)$.
2. Démontrer l'assertion ou sa contraposée.
3. Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Exercice 2.23. (*)
(Conjectures de Goldbach). La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair $\geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

1. Traduire les deux énoncés par des assertions mathématiques à l'aide de symboles.
2. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible. La conjecture faible implique-t-elle la conjecture forte ?

Remarque : En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.

Exercice 2.24. (*) Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{10^n-1}{9}$ est entier. (On pourra faire une récurrence.)

Exercice 2.25. (***) On dispose d'un jeu de $2n$ cartes rangées en un tas où toutes les cartes sont initialement face vers le bas. On considère deux types d'opérations sur ce jeu :

A) on prend les deux cartes du dessus entre deux doigts, on retourne cet ensemble de deux cartes sans les séparer, puis on replace les deux cartes sur le dessus du paquet (la première carte devient ainsi la deuxième carte, mais retournée, et la deuxième carte devient la première carte, retournée)

B) on coupe le jeu (c'est à dire qu'on prend le paquet des k cartes du dessus, pour un k dans $\{1, \dots, 2n-1\}$ et on le met en-dessous du reste du paquet, sans retourner les cartes).

Montrer qu'après n'importe quel nombre d'opérations comme au-dessus, le jeu vérifie la propriété suivante[12] :

($\mathscr{P}$) Le nombre de cartes de position paire tournées « face vers le haut » est égal au nombre de cartes de position impaire tournées « face vers le haut ».

Exercice 2.26. (*) Soient a et b deux nombres réels. Montrer que si la somme $a+b$ est irrationnelle (c'est-à-dire $a+b \notin \mathbf{Q}$), alors a ou b est irrationnel. (On pourra considérer la contraposée.)

Exercice 2.27. (*) Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$ pour $x \geq -2$.

Exercice 2.28. (**)

On considère les propriétés suivantes de l'ordre total sur $\mathbf{R}$, valables pour tous a, b et c réels :

$$(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c \tag{16}$$

$$a \leqslant b \Rightarrow a+c \leqslant b+c \tag{17}$$

$$(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) \Rightarrow ac \leqslant bc \tag{18}$$

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $3x+2 \leqslant -2x+1$ d'inconnue x en utilisant uniquement (en ce qui concerne les propriétés de l'ordre total) les règles ci-dessus. À chaque étape, on indiquera la règle utilisée.

12. Cette propriété est à la base du tour de magie "Royal Hummer" présenté dans le livre de Diaconis et Graham "Magical mathematics", chapitre 1

2. Montrer, en utilisant uniquement les règles (16) et (17), la règle suivante, valable pour tous réels a, b, c et d :
$$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \Rightarrow a + c \leqslant b + d$$
3. Montrer, en utilisant uniquement les règles (16), (17) et (18), la règle suivante :
$$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) \Rightarrow ac \geqslant bc$$
4. Montrer, en utilisant uniquement la règle (18), la règle suivante :
$$(a < b \text{ et } c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

Exercice 2.29. (**)

En utilisant un raisonnement direct, montrer que

1. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et paire, alors sa dérivée f' est impaire.
2. Pour tout élément $x > 0$ de $\mathbf{Q}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$.

Exercice 2.30. (**)

En utilisant un raisonnement par *disjonction des cas* (ou *cas par cas*),

1. Montrer l'assertion $\forall x \in \mathbf{R}, (x \notin \mathbf{Q}) \vee (\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$.
2. Soient a et b deux réels, montrer qu'on a
$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$
$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$
3. Montrer que, quelque soit l'entier naturel $n \in \mathbf{N}$, 3 divise $n(n + 1)(2n + 1)$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que la somme $n + m$ soit impaire et le produit nm soit pair.
5. Trouver tous les réels x tels que $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

Exercice 2.31. (**)

En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que

1. $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas un rationnel.

2. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels de somme égale à 1. Alors un de ces réels est plus petit que $\frac{1}{n}$.

Exercice 2.32. (**)
En utilisant un raisonnement par analyse et synthèse,

1. Soit a, b deux nombres réels. Démontrer que l'assertion $\forall x \in [0,1], ax+b \geq 0$ est équivalente à l'assertion $(b \geq 0 \wedge a+b \geq 0)$.
2. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et distinctes du plan orienté. Soit A un point du plan n'appartenant ni à D_1, ni à D_2. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartient à D_1 et C appartient à D_2. Combien y a t-il de triangles possibles. (*On supposera qu'un tel triangle existe et on cherchera comment construire B ou C en utilisant la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$)
3. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 2.33. (**)

1. Montrer à l'aide d'une récurrence que tout nombre entier supérieur ou égal à 12 peut s'écrire sous la forme $4a+5b$, pour des entiers naturels a et b.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n \geq 2, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 2.34. (**)
(Nombres de Fibonacci). On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence de la façon suivante :

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les nombres de Fibonacci (F_n), pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos.
3. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, \forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ (on pourra fixer un entier $n \geqslant 2$ et démontrer $\forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ par récurrence double.)
4. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Exercice 2.35. (***) Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z telle que $\frac{z^2}{z+i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 2.36. (**)

Une récurrence boîteuse. La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, ils sont en fait tous égaux.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

« quels que soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, on a $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. »

Montrons $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. S'il n'y a qu'un nombre u_1, il n'y a rien à montrer, ce qui montre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $P(n)$.

Montrons $P(n+1)$.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \in \mathbf{R}$.

D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$.

Par ailleurs, si l'on pose $u'_1 = u_2, u'_2 = u_3, \ldots, u'_n = u_{n+1}$ et que l'on applique $P(n)$ à la famille $(u'_1, \ldots, u'_n)$, on obtient $u'_1 = \cdots = u'_{n-1} = u'_n$, c'est-à-dire $u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$.

Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

Le résultat est évidemment faux. Où est le problème ?

Exercice 2.37. (***) *Théorème de Helly en dimension 1*

Soit $n \geq 2$ un entier, et $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des intervalles de $\mathbf{R}$. On considère l'assertion suivante :

si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ l'intersection $I_i \cap I_j$ est non vide,
alors l'intersection globale $\displaystyle\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} I_i$ est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$.

Pour simplifier, on ne considère que des intervalles fermés.

1. Faites un dessin pour $n = 3$ pour vous convaincre que l'assertion est vraie dans ce cas.
2. Montrer que l'assertion est fausse si on suppose seulement que $I_1, \ldots, I_n$ sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ et pas nécessairement des intervalles.
3. En utilisant la notion de min et de max, donner une preuve directe de l'assertion.
4. Le théorème est-il encore vrai s'il y a une infinité d'intervalles ?