

**Examen - MAP201**

La note de l'examen sera la moyenne sur 20 des deux thèmes

*Une feuille A4 manuscrite recto-verso est autorisée. Calculatrice autorisée.*

## Thème IMAGE – 20 points

**Exercice 1** (10 points).

Dans cet exercice, nous considérons l'image ci-dessous correspondant à la matrice *im*.



*im* =

50.	60.	100.	200.	215.
50.	70.	70.	200.	210.
50.	60.	120.	200.	215.
60.	150.	100.	200.	255.

- 1) Tracer l'histogramme de l'image *im* ainsi que son histogramme cumulé.
- 2) Proposez une transformation affine pour améliorer le contraste de l'image.

Nous allons maintenant appliquer la technique d'égalisation d'histogramme à l'image *im*.

- 3) Rappeler le principe de l'égalisation d'histogramme vue en cours et en TP.
- 4) Quelle sera la nouvelle valeur d'un pixel valant 100?
- 5) Appliquer l'égalisation d'histogramme à l'image *im* et donner la matrice de l'image obtenue, que l'on appellera *im2*.
- 6) Tracer l'histogramme cumulé de *im2*. Que peut-on observer?

Nous allons maintenant appliquer des filtres  $3 \times 3$  à l'image *im*.

- 7) Le filtre  $F = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  est-il un filtre d'augmentation de contraste, moyennage, ou dérivation ? Justifiez votre réponse.
- 8) Appliquer le filtre *F* à l'image *im*. Les pixels ne pouvant pas être traités par le filtre seront laissés à leur valeur initiale.

- 9) Appliquer le filtre  $D_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  à l'image `im`. Les pixels ne pouvant pas être traités par le filtre seront mis à 0.
- 10) Calculer la norme du gradient de l'image `im`. Interpréter le résultat.

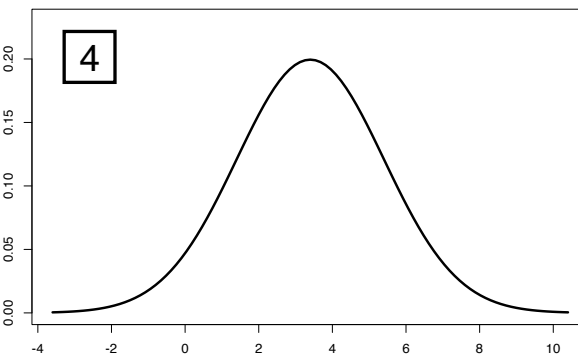
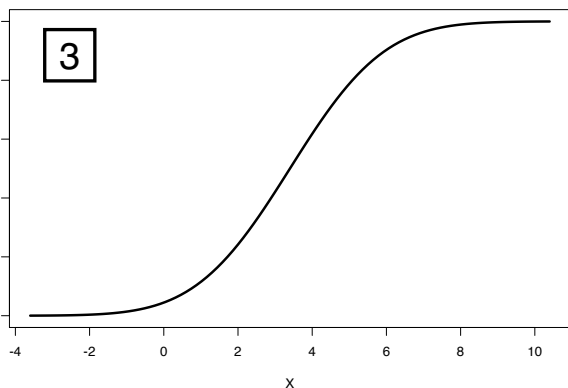
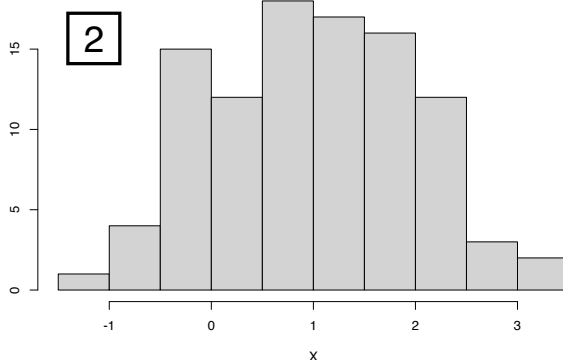
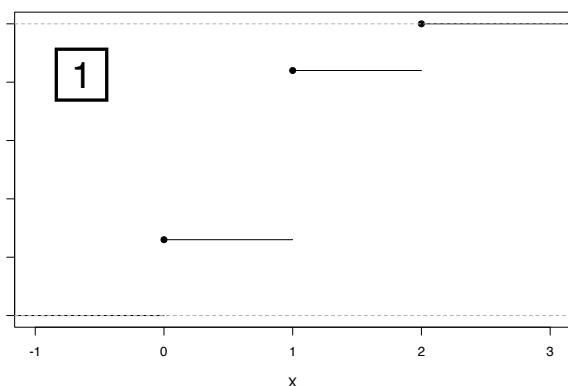
**Exercice 2** (10 points).

*Dans cet exercice, répondez vrai ou faux aux affirmations suivantes et argumentez votre réponse.*

- 1) Le filtre  $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ne modifie pas l'image.
- 2) Le filtre  $F_2 = \begin{bmatrix} 0.025 & 0.1 & 0.025 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.025 & 0.1 & 0.025 \end{bmatrix}$  est un filtre de moyennage local.
- 3) Soient `im1 = 2*im - conv(im, F2)` et `im2 = conv(im, F3)` avec  $F_3 = \begin{bmatrix} -0.025 & -0.1 & -0.025 \\ -0.1 & 1.5 & -0.1 \\ -0.025 & -0.1 & -0.025 \end{bmatrix}$ .  
Les images `im1` et `im2` sont identiques.
- 4) Le filtre  $F_3$  (défini plus haut) est un filtre de moyennage local.
- 5) Le filtre  $F_3$  (défini plus haut) est un filtre qui rehausse les contours.
- 6) L'application du filtre  $F_3$  augmente la luminosité générale de l'image.
- 7) Le gradient d'une image est une matrice de la même taille que l'image de départ.
- 8) Afin d'améliorer la localisation des contours, il est intéressant d'enlever les maxima locaux de la norme du gradient.
- 9) La transformation affine  $T(p) = -p$  va retourner une image intégralement noire.
- 10) Lors d'une transformation affine, la valeur d'un pixel ne dépend que de sa valeur précédente et de la fonction de transformation.

**Exercice 3** (Questions de cours (3 points)). Pour chacune des représentations graphiques ci-dessous, donner les informations suivantes : nom du graphe (histogramme, diagramme en bâtons, etc.), dire si c’est un graphe empirique et/ou théorique, dire si cela correspond à une variable discrète ou continue.

De plus, pour les graphiques 1 et 3, donner les valeurs minimales et maximales de l’axe des ordonnées.



**Exercice 4** (Table de distribution (4 points)). On s’intéresse à deux variables : “Classe du passager” (1ère, 2e ou 3e), et “Genre” (Homme ou Femme) pour les passagers du Titanic. Le tableau de contingence des données se trouve dans la feuille réponse à la fin du sujet.

1. Est-ce que les variables d’intérêt sont quantitatives ou qualitatives ?
2. Compléter le tableau de la feuille réponse.
3. Quelle est la taille de l’échantillon ?
4. (a) Quelle est la fréquence des hommes en première classe parmi tous les passagers ?  
 (b) Quelle est la fréquence des passagers de première classe parmi les hommes ?  
 (c) Quelle est la fréquence des hommes parmi les passagers de première classe ?

**Exercice 5** (Mention au BAC (5 points)). On s’intéresse à la variable “Mention au baccalauréat”. Au niveau national, 30% des candidats au baccalauréat obtiennent une mention. Nous avons des données obtenues sur un échantillon de candidats grenoblois : 292 ont obtenu une mention et 608 n’en ont pas obtenu. Les questions (A.N.) se résolvent à l’aide des valeurs numériques données sur la feuille réponse.

1. Quelle est la taille de l'échantillon ?
2. Donner le nom d'un estimateur sans biais de la probabilité d'obtenir une mention. En déduire une estimation sans biais de cette probabilité pour les grenoblois.
3. Donner la formule de l'intervalle de confiance que vous utiliseriez pour estimer la probabilité d'obtenir une mention pour un candidat grenoblois au niveau de confiance  $1 - \alpha$ . Justifier ce choix.
4. Donner l'intervalle de confiance à 95% de la probabilité d'obtenir une mention pour un candidat grenoblois fourni par le logiciel R (**A.N.**).
5. Comparer cet intervalle avec le pourcentage de mention au niveau national.
6. Est-ce que la formule utilisée par le logiciel R est celle que vous avez donnée à la question 3 ?

**Exercice 6** (Soda et adolescents (8 points)). On s'intéresse à la variable "Consommation de soda" (en litre par an). Nous avons recueilli des données auprès de  $n = 100$  adolescents et elles sont stockées dans l'objet X1 dans le logiciel R.

*Les questions (**A.N.**) se résolvent à l'aide des valeurs numériques données sur la feuille réponse.*

1. Donner le nom et l'expression mathématique d'un estimateur sans biais de la moyenne. Donner une estimation sans biais de la moyenne de la consommation de soda des adolescents (**A.N.**).
2. Donner le nom et l'expression mathématique d'un estimateur sans biais de la variance. Donner une estimation sans biais de la variance de la consommation de soda des adolescents (**A.N.**).
3. Donner la formule de l'intervalle de confiance que vous utiliseriez pour estimer la consommation moyenne de soda des adolescents au niveau de confiance  $1 - \alpha$ . Justifier ce choix et rappeler le nom ou la définition de toutes les quantités intervenant dans l'intervalle.
4. Calculer l'intervalle de confiance à 95% de la consommation moyenne de soda des adolescents (**A.N.**).

Dix ans plus tard, les adolescents de l'échantillon sont devenus des adultes et nous relevons la même variable "Consommation de soda" (en litre par an) sur ces individus. Ces données sont stockées dans l'objet X2 dans le logiciel R.

Dans la suite, nous souhaitons utiliser un test statistique pour voir si la consommation moyenne de soda est différente pour les adolescents et les adultes.

5. Quelles hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  doit-on poser ?
6. Quel est le test que vous utiliseriez (en précisant la statistique et la règle de décision du test au niveau de risque  $\alpha$ ) ?
7. Y a-t-il des conditions de validité à vérifier ?
8. Calculer la p-valeur du test (**A.N.**). Conclure.

# Feuille réponse

n° anonymat :

## Exercice 4.

Classe Genre \	1	2	3	Total
Femme	133	103	152	
Homme	151	158	349	
Total				

## Valeurs numériques.

```
> qnorm(c(0.9, 0.95, 0.975))
[1] 1.28 1.64 1.96
```

```
> pnorm(c(-2.1, 1.86, 2.07, 3.11))
[1] 0.018 0.969 0.981 0.999
```

```
> mean(X1)
[1] 10.4
```

```
> median(X1)
[1] 10.6
```

```
> var(X1)
[1] 4.27
```

```
> (100/99)*var(X1)
[1] 4.31
```

```
> sd(X1)
[1] 2.07
```

```
> mean(X2)
[1] 10.1
```

```
> median(X2)
[1] 10.2
```

```
> var(X2)
[1] 3.94
```

```
> (100/99)*var(X2)
[1] 3.98
```

```
> sd(X2)
[1] 1.98
```

```
> mean(X1-X2)
[1] 0.3
```

```
> var(X1-X2)
[1] 0.931
```

```
> sd(X1-X2)
[1] 0.965
```

```
> prop.test(292, 900)
X-squared = 110, df = 1, p-value <2e-16
95 percent confidence interval:
0.294 0.356
sample estimates:
p
0.324
```

```
> prop.test(292, 608)
X-squared = 70, df = 1, p-value <2e-16
95 percent confidence interval:
0.321 0.388
sample estimates:
p
0.354
```