Examen L1 IMA

V. Garnero *INF202 - INF253 2021*

Consignes générales :

- *Toute réponse devra être justifiée*
  (référence à un théorème, à un algorithme, démonstration, trace d'algorithme, etc.).
- *Hormis une feuille manuscrite, tout autre document est interdit.*
- *Tout appareil électronique est interdit (sauf aménagement d'examen).*
- *La clarté de la rédaction pourra être prise en compte dans la notation.*
- *En cas de suspicion d'erreur ou de doute d'interprétation, indiquer les choix faits.*

Symétrie 4pt.

On considère la relation interne R définie sur $A = \{a, b, c, d\}$ par sa matrice :

$$R = \begin{matrix} V & V & V & F \\ F & V & V & F \\ V & V & V & F \\ F & F & V & V \end{matrix}$$

1. Donner le graphe de R^{-1}.
2. Calculer $R \cap R^{-1}$.
3. Justifier que $R \cap R^{-1}$ est symétrique.
4. Démontrer que pour toute relation interne S définit sur A ; $S \cap S^{-1}$ est symétrique.

Calcul booléen 3pt.

On considère les deux formules logiques suivantes :

$P = (\neg q \Rightarrow \neg p)$;

$Q = \neg(q \wedge p) \vee (r \Rightarrow q)$;

1. Calculer la table de P.
2. Calculer Q pour l'affectation de variable suivants :
   $$\mathcal{A} : \begin{array}{l} p \mapsto 0 \\ q \mapsto 1 \\ r \mapsto 1 \end{array}$$

Algorithme récursif 4pt.

On s'intéresse au nombre de fois qu'apparaît une variable dans une formule.

1. Rédiger un algorithme récursif calculant le nombre d'occurrences de q présent dans une formule P donnée.

2. Donner la liste des appels récursifs et leurs résultats dans le cas d'une exécution sur la variable q et la formule $P = q \Rightarrow (p \vee q)$.

Égalité et équivalence 6pt.

On considère les deux formules logiques suivantes :

$F = (p \wedge q) \wedge r$
$G = p \vee (q \vee r)$

$H = (\neg p \wedge F) \vee (p \vee (q \vee r))$
$I = G \vee (\ (r \wedge ((p \wedge q) \wedge \neg p)\ )$
$J = (\ \neg p \wedge ((p \wedge q) \wedge r)\ ) \vee G$

1. Tracer les arbres complets des formules H, I, J.
2. Démontrer que $a \wedge b \equiv b \wedge a$ (pour toutes variables booléennes a, b, c).
3. Indiquer quelles sont les formules sémantiquement équivalentes parmi H, I, J.
4. Indiquer quelles sont les formules syntaxiquement égales parmi H, I, J.

Indication : utiliser les arbres pour comparer les structures des formules ; identifier des sous-formules apparaissant plusieurs fois.

Nombre de connecteurs et de variables 3pt.

Étant donné une formule F, on souhaite comparer le nombre d'apparition d'un symbole de connecteur $c(F)$ avec le nombre d'apparition d'un symbole de variables $v(F)$; et cela indépendamment du type de symbole (autrement dit, un symbole apparaissant plusieurs fois est compté plusieurs fois).

1. Calculer $c(G)$ et $v(G)$ pour le cas particulier de $G = (p \vee q) \Rightarrow \neg q$.
2. Démontrer par récurrence que pour toute formule F ; $v(F) \leq 2^{c(F)}$