Ensembles et langage mathématique

Ensembles, nombres entiers, rationnels et réels

Exercice 2.1. (*)

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $\{1,2,3\} \cup \{4,5,6\}$,
2. $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$,
3. $\{1,2,3\} \cup \{1,3,4\}$,
4. $\{1,2,3\} \cap \{4,5,6\}$,
5. $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}$,
6. $(\{1,2\} \cup \{1,3\}) \cap \{3,4\}$,
7. $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \cup \{5,6\}$,
8. $(\{1,2\} \cup \{3,4\}) \cap \{2,4\}$,
9. $(\{1,\{2\}\} \cup \{2,3\}) \cap \{\{2\},\{3\}\}$,
10. $(\{1,\{2\}\} \cap \{\{2\},\{3\}\}) \cap \{\{2\},3\}$,
11. l'ensemble des nombres entiers compris entre $\sqrt{2}$ et 2π.

Solution de l'exercice 2.1

Dans cet exercice, on ne demande pas de justifier. Il faut appliquer les définitions du cours. En particulier un élément est dans l'union de deux ensembles si et seulement si il est dans au moins un des deux ensembles, et il est dans l'intersection de deux ensembles si et seulement si il est dans les deux à la fois. Pour les questions 9 et 10, il faut être vigilant au fait qu'il y a une différence entre un nombre et le singleton qui contient ce nombre : c'est la même différence qu'entre une chaussure et une boite contenant cette chaussure. Ici la réponse est à chaque fois un singleton contenant un singleton contenant un nombre. Pour reprendre l'image précédente, c'est donc une boite contenant une boite contenant une chaussure.

1. $\{1,2,3,4,5,6\}$,
2. $\{1,2,3,4,5\}$,
3. $\{1,2,3,4\}$,

4. $\emptyset$,
5. $\{2,3\}$,
6. $(\{1,2\}\cup\{1,3\})\cap\{3,4\}=\{1,2,3\}\cap\{3,4\}=\{3\}$,
7. $(\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\})\cup\{5,6\}=\{2,3\}\cup\{5,6\}=\{2,3,5,6\}$,
8. $(\{1,2\}\cup\{3,4\})\cap\{2,4\}\{1,2,3,4\}\cap\{2,4\}=\{2,4\}$,
9. $(\{1,\{2\}\}\cup\{2,3\})\cap\{\{2\},\{3\}\}=\{1,2,3,\{2\}\}\cap\{\{2\},\{3\}\}=\{\{2\}\}$,
10. $(\{1,\{2\}\}\cap\{\{2\},\{3\}\})\cap\{\{2\},3\}=\{\{2\}\}\cap\{\{2\},3\}=\{\{2\}\}$.
11. $\{2,3,4,5,6\}$.

Exercice 2.2. (*)

On note A l'ensemble $\{1,2,3\}$ et B l'ensemble $\{-1,0,1\}$. Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $A\cap B$,
2. $A\cup B$,
3. $A\setminus B$,
4. $B\setminus A$,
5. $\{x\in A \mid x\geq 2\}$,
6. $\{x\in B \mid x\geq 2\}$,
7. $\{y\in A \mid y\leq 5\}$,
8. $\{z\in A\cup B \mid z\geq 0\}$,
9. $A\cap 2\mathbf{Z}$,
10. $B\cap 3\mathbf{Z}$,

Solution de l'exercice 2.2

Ici encore il faut appliquer les définitions du cours.

1. $A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{-1,0,1\}=\{1\}$,
2. $A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{-1,0,1\}=\{-1,0,1,2,3\}$,
3. $A\setminus B=\{1,2,3\}\setminus\{-1,0,1\}=\{2,3\}$,
4. $B\setminus A=\{1,2,3\}\setminus\{-1,0,1\}=\{-1,0\}$,
5. $\{2,3\}$,
6. $\emptyset$,
7. $\{1,2,3\}$,
8. $\{0,1,2,3\}$,
9. $\{2\}$,
10. $\{0\}$.

Exercice 2.3. (*)
Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (aucune justification n'est attendue).

1. $[0,1] \cup [1,2]$,
2. $[0,1] \cap [1,2]$,
3. $[0,1] \cap \mathbf{Z}$,
4. $2\mathbf{Z} \cap 3\mathbf{Z}$,

Solution de l'exercice 2.3

1. $[0,2]$,
2. $\{1\}$,
3. $\{0,1\}$,
4. $6\mathbf{Z}$.

Exercice 2.4. (*)
Écrire les ensembles suivants comme intervalles ou réunions d'intervalles de $\mathbf{R}$:

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x < 6\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 0,5\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| < 0,1\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-5| \leq 0,01\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-0,1| < 0,2\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 3\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \geq 1\}$,
8. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x \geq 0\}$.

Solution de l'exercice 2.4

1. $[2,6[$,
2. $]-0,5\ ,\ 0,5[=]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$,
3. $]1,9\ ,\ 2,1[$,
4. $]4,99\ ,\ 5,01[$,
5. $]-0,1\ ,\ 0,3[$,
6. $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$,
7. $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$,
8. $\mathbf{R}_- \cup [1,+\infty[$.

Exercice 2.5. (*)
On note A l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et B l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Écrire en extension les ensembles suivants :

1. $\{x + 2; x \in A\}$,
2. $\{2x; x \in B\}$,
3. $\{\frac{1}{x}; x \in A\}$,
4. $\{x+y; (x, y) \in A\times B\}$,
5. $\{x+y; (x, y) \in A\times A\}$,
6. $\{x + x; x \in A\}$,
7. $\{xy; (x, y) \in A \times B\}$,

Solution de l'exercice 2.5

1. $\{x + 2; x \in A\} = \{1 + 2, 2 + 2, 3 + 2\} = \{3, 4, 5\}$,
2. $\{2x; x \in B\} = \{2 \times (-1), 2 \times 0, 2 \times 1\} = \{-2, 0, 2\}$,
3. $\{\dfrac{1}{x}; x \in A\} = \{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\}$,
4. $\{x+y; (x, y) \in A\times B\} = \{1-1, 1+0, 1+1, 2-1, 2+0, 2+1, 3-1, 3+0, 3+1\} = \{0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
5. $\{x+y; (x, y) \in A\times A\} = \{1+1, 1+2, 1+3, 2+1, 2+2, 2+3, 3+1, 3+2, 3+3\} = \{2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,
6. $\{x + x; x \in A\} = \{2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3\} = \{2, 4, 6\}$,
7. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 2.6. (*/)**
Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (justifier).

1. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, \lfloor x\rfloor = 3\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, 2 \leq \lfloor x\rfloor \leq 6\}$,
3. $\{x \in \mathbf{Q} \,|\, |x| \leq 3\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| = \lfloor x\rfloor\}$.
5. $\bigcup_{i\in[\![1,3]\!]} \bigcap_{j\in\{2,3\}} [i + j, i + 2j]$

Solution de l'exercice 2.6

Il est conseillé de procéder en deux étapes : d'abord deviner la solution, c'est-à-dire la forme la plus simple possible pour décrire l'ensemble, puis démontrer l'égalité entre l'ensemble de l'énoncé et celui proposé comme solution. Souvent on raisonne alors par double inclusion : pour justifier l'égalité $A = B$, on montre plutôt $A \subset B$ d'une part, et $B \subset A$ d'autre part. Et pour montrer une inclusion de type $A \subset B$, on prend un élément quelconque de A et on montre qu'il est dans B (ce qui correspond bien à la définition de l'inclusion $A \subset B$).

1. Les nombres dont la partie entière vaut 3 sont les nombres dont l'écriture décimale commence par 3, il s'agit donc de l'intervalle $[3, 4[$.
2. Il s'agit des nombres dont l'écriture décimale commence par 2, 3, 4, 5, ou 6, donc c'est l'intervalle $[2, 7[$.
3. L'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geqslant 3\}$ est l'intervalle $[-3, 3]$. Ici on rajoute la contrainte que x est rationnel, donc c'est l'ensemble $\mathbf{Q} \cap [-3, 3]$.
4. Pour x un nombre réel le nombre $\lfloor x \rfloor$ est toujours un entier relatif, donc si $x \in \mathbf{R}$ vérifie $|x| = \lfloor x \rfloor$, alors $|x|$ est un entier relatif, et donc x aussi. De plus $|x|$ est positif, donc x est dans $\mathbf{N}$. On a donc démontré l'inclusion $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| = \lfloor x \rfloor\} \subset \mathbf{N}$.

   Pour l'inclusion réciproque, si y est dans $\mathbf{N}$, alors on a $|y| = y$, et $\lfloor y \rfloor = y$, donc $y \in \{x \in \mathbf{R} \mid |x| = \lfloor x \rfloor\}$. On a bien démontré l'inclusion réciproque, et donc on a $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| = \lfloor x \rfloor\} = \mathbf{N}$.
5. On a :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in [\![1,3]\!]} \bigcap_{j \in \{2,3\}} [i+j, i+2j] &= \bigcup_{i \in [\![1,3]\!]} ([i+2, i+4] \cap [i+3, i+6]) \\ &= \bigcup_{i \in [\![1,3]\!]} [i+3, i+4] \\ &= [4,5] \cup [5,6] \cup [6,7] \\ &= [4,7] \end{aligned}$$

Exercice 2.7. (*/)**

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (aucune justification n'est attendue).

1. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\}$,
2. $\{2n+1; n \in [\![2,5]\!]\}$,
3. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\} \cup \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
4. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\} \cap \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
5. $\left\{\frac{p}{q}; p \in \{1,2,3,4\}, q \in \{1,2,3,4\}\right\}$.

Solution de l'exercice 2.7

1. $\{5, 8, 11\}$,
2. $\{5, 7, 9, 11\}$,
3. $\{5, 7, 8, 11, 15, 19\}$,
4. $\{11\}$,
5. $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2.8. (**)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont inclus dans lesquels ?

1. $[0, 1]$,
2. $]-1, 1[$,
3. $[0, \frac{1}{2}]$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - x = 0\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| < \dfrac{1}{5}\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x - 0,2| < 0,1\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0\}$.

Solution de l'exercice 2.8

On peut simplifier les écritures pour commencer : on a
$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - x = 0\} = \{0, 1\}$,
$\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| < \dfrac{1}{5}\} =]-0,2\ ,\ 0,2[$,
$\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x - 0,2| < 0,1\} =]0,1\ ,\ 0,3[$,
et $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0\} =]-1, 1[\cup]2, +\infty[$.
Ainsi l'ensemble (1) n'est inclus dans aucun autre,
(2) est inclus dans (7),
(3) est inclus dans (1),
(4) est inclus dans (1),
(5) est inclus dans (2) et (7),
(6) est inclus dans (1), (2), (3), et (7),
et (7) n'est inclus dans aucun autre.

Exercice 2.9. (**)

Les ensembles suivants coïncident-ils ?

1. $\{1, 1, 2\}$ et $\{2, 1\}$;

2. $\{1,(1,2)\}$ et $\{(1,1)\}$;
3. $\{(1,1),(1,2)\}$ et $\{(1,1),(2,1)\}$;
4. $\{\{1\},\{1,2\}\}$ et $\{\{1\},\{2,1\}\}$;
5. $\{0,1,2,3\}$ et $\{x \in \mathbf{Z} \mid x \leqslant 3\}$;
6. $\{0,1,2,3\}$ et $\{x \in \mathbf{N} \mid x \leqslant 3\}$;
7. $[\![1,3]\!] \times [\![0,3]\!]$ et $\{(x,y) \in \mathbf{N}^2 \,\big|\, 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 3\}$;
8. $\{(x,y) \in \mathbf{N}^2 \,\big|\, 0 \leqslant x < y \leqslant 3\}$ et $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Solution de l'exercice 2.9

1. Puisque ni l'ordre, ni les répétitions ne changent un ensemble, les deux ensembles peuvent se réécrire $\{1,2\}$, ils coïncident donc.
2. Le premier ensemble contient deux éléments (le nombre 1 et le couple $(1,2)$) tandis que le second ensemble ne contient qu'un élément (le couple $(1,1)$. Les deux ensembles sont donc différents.
3. Comme le couple $(1,2)$ est différent du couple $(2,1)$, les deux ensembles ne coïncident pas.
4. Comme l'ensemble $\{1,2\}$ est égal à l'ensemble $\{2,1\}$, les deux ensembles coïncident.
5. Le second ensemble contient tous les entiers négatifs, tandis que le premier n'en contient pas. Les deux ensembles sont donc différents.
6. Les deux ensembles coïncident.
7. Les deux ensembles coïncident.
8. Les deux ensembles coïncident.

Exercice 2.10. (**)
Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifier l'expression $(A \cap B \cap C) \cup ({}^{c}\!A \cap B \cap C) \cup {}^{c}\!B \cup {}^{c}C$.
2. Démontrer que $(A \cap {}^{c}\!B) \cap {}^{c}C = A \cap {}^{c}(B \cup C) = (A \cap {}^{c}C) \cap {}^{c}\!B$.
3. A-t-on toujours $(A \cup B) \cap ({}^{c}\!A \cup {}^{c}C) \cap {}^{c}\!B \cap ({}^{c}\!A \cup B \cup C) = \emptyset$?

Solution de l'exercice 2.10

1. On a $A \cup {}^c A = E$, donc $(A \cap B \cap C) \cup ({}^c A \cap B \cap C) = (A \cup {}^c A) \cap B \cap C = B \cap C$. Ensuite on a ${}^c(B \cap C) = E \setminus (B \cap C) = (E \setminus B) \cup (E \setminus C) = {}^c B \cup {}^c C$. Par conséquent on a $(B \cap C) \cup {}^c B \cup {}^c C = (B \cap C) \cup {}^c(B \cap C) = E$.

   Ainsi on a $(A \cap B \cap C) \cup ({}^c A \cap B \cap C) \cup {}^c B \cup {}^c C = E$.
2. On a ${}^c(B \cup C) = E \setminus (B \cup C) = (E \setminus B) \cap (E \setminus C) = {}^c B \cap {}^c C$. Par conséquent on a $A \cap {}^c(B \cup C) = A \cap ({}^c B \cap {}^c C)$. Comme $\cap$ est associatif est commutatif, on a $A \cap ({}^c B \cap {}^c C) = (A \cap {}^c B) \cap {}^c C = (A \cap {}^c C) \cap {}^c B$.
3. Comme on a ${}^c B \cap B = \emptyset$, et en utilisant la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$, on a $(A \cup B) \cap {}^c B = (A \cap {}^c B) \cup (B \cap {}^c B) = A \cap {}^c B$. D'autre part on a

$$\begin{aligned}({}^c A \cup {}^c C) \cap ({}^c A \cup B \cup C) &= {}^c A \cup ({}^c C \cap (B \cup C)) \\ &= {}^c A \cup ({}^c C \cap B)\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}& (A \cup B) \cap ({}^c A \cup {}^c C) \cap {}^c B \cap ({}^c A \cup B \cup C) \\ =\ & A \cap {}^c B \cap ({}^c A \cup ({}^c C \cap B)) \\ =\ & (A \cap {}^c B \cap {}^c A) \cup (A \cap {}^c B \cap {}^c C \cap B) \\ =\ & \emptyset\end{aligned}$$

Langage mathématique

Exercice 2.11. (*) Lorsque T est un tableau de nombres, on note $T(i,j)$ le contenu de la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On considère les 4 assertions suivantes, portant sur des tableaux ayant au moins 4 lignes et 4 colonnes.

$A : \forall i \in \{1,\dots,4\}, \forall j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$
$B : \forall i \in \{1,\dots,4\}, \exists j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$
$C : \exists i \in \{1,\dots,4\}, \forall j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$
$D : \exists i \in \{1,\dots,4\}, \exists j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$

Pour chacun des tableaux ci-dessous, dire quelles sont les assertions vérifiées parmi A, B, C, et D.

$$\text{(a) } T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

(b) $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}$

(c) $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\\hline 0&0&0&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline\end{array}$

(d) $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&1\\\hline 0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}$

Solution de l'exercice 2.11

Il peut être utile de noter $P(i,T)$ l'assertion "$\forall j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$" et $Q(i,T)$ l'assertion "$\exists j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$". Ainsi, $P(i,T)$ signifie que la i-ème ligne de T est remplie de 1, alors que $Q(i,T)$ signifie que la i-ème ligne de T contient au moins un 1. On trouve alors la liste suivante d'assertions vérifiées :

(a) B,D

(b) A,B,C,D

(c) C,D

(d) B,C,D

Exercice 2.12. (*)

Écrire des assertions à l'aide de quantificateurs traduisant les énoncés suivants.

1. Tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel.
2. Tout élément de $\mathscr{P}$ est le double d'un entier.
3. Pour tout entier relatif, il existe un entier relatif plus grand.
4. Pour tout nombre réel, il existe un nombre rationnel tel que la différence des deux est plus petite que 0,1 en valeur absolue.
5. Tout nombre complexe non nul est le carré de deux nombres complexes distincts.
6. Il existe deux nombres réels irrationnels dont le produit est rationnel.

Solution de l'exercice 2.12

1. $\forall x \in \mathbf{R}_+, \exists y \in \mathbf{R},\ x = y^2$
2. $\forall n \in \mathscr{P}, \exists m \in \mathbf{Z}, n = 2m$
3. $\forall n \in \mathbf{Z}, \exists m \in \mathbf{Z}, m > n$
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Q}, |x - y| < 0,1$

5. $\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists y_1, y_2 \in \mathbf{C}, (y_1 \neq y_2) \wedge (z = y_1^2 = y_2^2)$
6. $\exists x, y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, xy \in \mathbf{Q}$

Exercice 2.13. (*)

Soit P, Q, R trois assertions, et a, b, c trois nombres réels. Écrire la négation des assertions suivantes.

1. $P \wedge (\neg Q)$
2. $(P \Longrightarrow Q) \wedge R$
3. $\exists x \in [1, +\infty[, a \geq b + x$
4. $\exists x \in \mathbf{R}_+, a = b + x$
5. $a = b = c$

Solution de l'exercice 2.13

1. On utilise la loi de De Morgan, nier un $\wedge$ le remplace par un $\vee$ et on prend la négation des sous-assertions, d'où
$$(\neg P) \vee Q$$
2. On utilise la même loi que ci-dessus pour obtenir $\neg(P \Longrightarrow Q) \vee (\neg R)$, puis on remplace la négation de $P \Longrightarrow Q$ par $P \wedge \neg Q$, d'où
$$(P \wedge \neg Q) \vee \neg R$$
3. Pour nier un quantificateur existentiel, on le remplace par un quantificateur universel, et on nie la suite, d'où
$$\forall x \in [1, +\infty[, a < b + x$$
4. Selon le même principe on obtient
$$\forall x \in \mathbf{R}_+, a \neq b + x$$
5. Attention, $a \neq b \neq c$ est ambigü : qui est différent de qui ? $a = b = c$ se réécrit plutôt $(a = b) \wedge (b = c)$ est qui plus simple à nier, on obtient
$$(a \neq b) \vee (b \neq c)$$
qui n'est pas ambigü.

Exercice 2.14. (**)

Pour chacune des assertions ci-dessous, dire quelles variables sont liées. Dire ensuite si l'assertion dépend d'un paramètre. Écrire chaque assertion en français. On rappelle qu'une assertion est *close* si elle ne dépend pas d'un paramètre. Dire pour chaque assertion close si elle est vraie ou fausse.

1. $x \geqslant y$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geqslant y$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, x \geqslant y$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, (x \geqslant y \text{ et } (\forall z \in \mathbf{Z}, x \geqslant z \Rightarrow y \geqslant z))$.

Solution de l'exercice 2.14

1. Les variables x et y sont libres, l'assertion dépend donc des deux paramètres x et y. Elle signifie « x est strictement plus grand que y ». On ne peut dire si elle est vraie ou fausse sans information supplémentaire sur x et y.
2. La variable x est liée puisqu'introduite par $\forall x \in \mathbf{R}$, tandis que y est libre. L'assertion dépend du paramêtre y. Elle signifie « Pour tout réel x, x est supérieur ou égal à y ».
3. La variable x est liée, il n'y a donc pas de paramètre, et donc l'assertion est close. Elle signifie « Pour tout réel x, le nombre x est positif ou nul ». Elle est fausse puisque par exemple -1 est un réel négatif.
4. Les variables x et y sont liées, il n'y a pas de paramètre, donc l'assertion est close. Elle signifie « Pour tout réel x il existe un réel y tel que x est supérieur ou égal à y ». Cette assertion est vraie puisqu'une fois x fixé, il suffit de choisir $y = x - 1$ pour qu'on ait bien $x \geqslant y$.
5. Les variables x et y sont liées, il n'y a pas de paramètre, donc l'assertion est close. Elle signifie « Il existe un réel x tel que pour tout réel y le nombre x est supérieur ou égal à y ». Cette assertion est fausse puisqu'il n'existe aucun réel qui soit plus grand que tous les autres.
6. Les variables x et y sont liées, il n'y a pas de paramètre, donc l'assertion est close. Elle signifie « Pour tout réel x il existe un nombre entier naturel y tel que x est supérieur ou égal à y ». Cette assertion est fausse puisque par exemple pour $x = -1$, il n'y a aucun entier naturel plus petit que x.

7. Les variables x et y sont liées, il n'y a pas de paramètre, donc l'assertion est close. Elle signifie « Pour tout réel x il existe un nombre entier relatif y tel que x est supérieur ou égal à y ». Cette assertion est vraie. Pour un réel x fixé quelconque, il suffit de prendre $y = \lfloor x \rfloor$ pour avoir un entier relatif y tel que $x \geqslant \lfloor x \rfloor = y$.
8. Les variables x, y et z sont liées, il n'y a pas de paramètre, donc l'assertion est close. Elle signifie « Pour tout réel x il existe un nombre entier relatif y tel que x est supérieur ou égal à y et pour tout entier relatif z, si z est inférieur ou égal à x, alors z est inférieur ou égal à y. ». Cette assertion est vraie. Pour un réel x fixé quelconque, il suffit de prendre $y = \lfloor x \rfloor$ pour avoir un entier relatif y tel que $x \geqslant \lfloor x \rfloor = y$, et de plus pour tout entier relatif z, si z est plus petit que x, alors z est aussi plus petit que $\lfloor x \rfloor = y$.

Exercice 2.15. (**)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. $1 + 1 = 2 \Longrightarrow 1 + 1 = 3$;
2. $1 + 1 = 3 \Longrightarrow 1 + 1 = 2$;
3. $1 = 0 \Longrightarrow (\exists a, b \in \mathbf{N}^*, a^2 + b^2 = 0)$;
4. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 2 \Longrightarrow x \geq 3$;
5. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 3 \Longrightarrow x \geq 3$;
6. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2, 3] \Longrightarrow x \in [0, 4]$;
7. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2, 3] \Longrightarrow x \leq 3$;
8. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2, 3] \Longrightarrow x \geq 3$;
9. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2, +\infty[\Longrightarrow x \leq 3$;
10. $\forall x, y \in \mathbf{R}^*, x > y \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$;
11. $\exists x \in \mathbf{R}_+^*, x < \sqrt{x}$;
12. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
13. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
14. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
15. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
16. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |x| < \varepsilon$;
17. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
18. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
19. $\exists t \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, |x| < t \Rightarrow x^2 < 3$;

Solution de l'exercice 2.15

1. L'assertion « $1 + 1 = 2$ » est vraie, tandis que « $1 + 1 = 3$ » est fausse. Or l'implication « vrai $\Longrightarrow$ faux » est fausse, donc l'assertion « $1 + 1 = 2 \Longrightarrow 1 + 1 = 3$ » est **fausse**.

2. L'assertion « $1 + 1 = 3$ » est fausse, tandis que « $1 + 1 = 2$ » est vraie. Or l'implication « faux $\Longrightarrow$ vrai » est vraie, donc l'assertion « $1 + 1 = 3 \Longrightarrow 1 + 1 = 2$ » est **vraie.**
3. L'assertion « $1 = 0$ » est fausse, ainsi que l'assertion « $\exists a, b \in \mathbf{N}^*, a^2 + b^2 = 0$ ». Comme l'implication « faux $\Longrightarrow$ faux » est vraie, l'assertion « $1 = 0 \Longrightarrow (\exists a, b \in \mathbf{N}^*, a^2 + b^2 = 0)$ » est **vraie.**
4. L'assertion est **fausse.** En effet sa négation est « $\exists x \in \mathbf{R}, (x > 2) \wedge (x < 3)$ », qui affirme l'existence d'un réel x satisfaisant $2 < x < 3$. Cette dernière assertion est vraie puisqu'il suffit de prendre $x = 2,5$. Puisque la négation est vraie, l'assertion de départ est vraie.
5. L'assertion est **vraie.** En effet, soit $x \in \mathbf{R}$. Supposons qu'on a $x > 3$. Alors on a en particulier $x \geqslant 3$.
6. L'assertion est **vraie.** En effet, soit $x \in \mathbf{R}$. Supposons qu'on a $x \in [2, 3]$. Alors on a $2 \leqslant x \leqslant 3$, et donc $1 \leqslant 2 \leqslant x \leqslant 3 \leqslant 4$, d'où $1 \leqslant x \leqslant 4$, et donc $x \in [1, 4]$.
7. L'assertion est **vraie.** En effet, soit $x \in \mathbf{R}$. Supposons qu'on a $x \in [2, 3]$. Alors on a $2 \leqslant x \leqslant 3$, donc en particulier $x \leqslant 3$.
8. L'assertion est **fausse.** Sa négation est « $\exists x \in \mathbf{R}, (x \notin [2, +\infty[) \wedge (x < 3)$ », dont on montre qu'elle est vraie. En effet, il suffit de prendre $x = 1$ pour vérifier $x \notin [2, +\infty[$ et $x < 3$.
9. L'assertion est **vraie.** En effet, soit $x \in \mathbf{R}$. Supposons qu'on a $x \notin [2, +\infty[$. Alors on a $x \in]-\infty, 2[$, et donc $x < 2$. On en déduit $x < 2 < 3$, donc $x \leqslant 3$.
10. L'assertion est **fausse.** (Il y a ici une sorte de piège, car on pourrait penser que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante, mais elle ne l'est que sur $\mathbf{R}_+$ et sur $\mathbf{R}_-$, pas sur $\mathbf{R}^*$ tout entier. D'ailleurs dessiner le graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ aide à trouver un contre-exemple : la fonction n'est pas décroissante car l'image de $\mathbf{R}_-$ est $\mathbf{R}_-$ et l'image de $\mathbf{R}_+$ est $\mathbf{R}_+$, donc il faut prendre $x > 0$ et $y < 0$ pour faire un contre-exemple.)

    Démontrons donc que l'assertion est fausse. Sa négation est « $\exists x, y \in \mathbf{R}^*, (x > y) \wedge (\frac{1}{x} > \frac{1}{y})$ ». Il suffit alors de prendre $x = 1$ et $y = -1$ pour avoir en effet $x = 1 > -1 = y$, et $\frac{1}{x} = 1 > -1 = \frac{1}{y}$.
11. L'assertion est **vraie.** (Là encore, ce peut être contre-intuitif car on a tendance à croire que $\sqrt{x}$ est toujours plus petit que x. Dessiner le graphe de $\sqrt{\cdot}$ aide à se convaincre que c'est faux sur l'intervalle $[0, 1]$.)

Démontrons que l'assertion est vraie. Il suffit de poser $x = \frac{1}{4}$. On a alors $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = x$.

12. L'assertion est **vraie**. En effet il suffit de prendre $x = 1$ et $y = 1$ pour avoir $x + y = 1 + 1 = 2 > 0$.
13. L'assertion est **fausse**. Sa négation est « $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y \leq 0$, dont on démontre qu'elle est vraie. En effet, soit $x \in \mathbf{R}$ quelconque. Posons $y = -x - 1$. Alors on a $x + y = x + (-x - 1) = -1 \leqslant 0$.
14. L'assertion est **vraie**. En effet, soit $x \in \mathbf{R}$ quelconque. Posons $y = -x + 1$. Alors on a $x + y = x + (-x + 1) = 1 > 0$.
15. L'assertion est **fausse**. Sa négation est « $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y \leqslant 0$ », dont on démontre qu'elle est vraie. En effet, posons $x = -1$ et $y = -1$. Alors on a $x + y = -2 \leqslant 0$.
16. L'assertion est **fausse** (ici il faut faire attention aux signes, puisque ε est de signe quelconque, tandis que $|x|$ est toujours positif). Sa négation est « $\exists \varepsilon \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, |x| \geqslant \varepsilon$ ». Démontrons que cette négation est vraie. Prenons $\varepsilon = -1$. Soit $x \in \mathbf{R}$ quelconque. Comme une valeur absolue est toujours positive ou nulle, on a $|x| \geqslant 0 > -1$.
17. L'assertion est **vraie** (cette fois-ci les valeurs absolues ne sont pas contre nous). En effet, soit $\varepsilon \in \mathbf{R}$ quelconque. Posons $x = -1$. Alors comme une valeur absolue est toujours positive ou nulle, on a $x = -1 < 0 \leqslant |\varepsilon|$.
18. L'assertion est **vraie**, et la preuve précédente s'adapte facilement.
19. L'assertion est **vraie**. En effet, prenons $t = \sqrt{3}$, qui est bien dans l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbf{R}$ quelconque. Supposons qu'on a $|x| < \sqrt{3}$. Alors on a $x^2 = (|x|)^2 < \sqrt{3}^2 = 3$, car la fonction $y \mapsto y^2$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 2.16. (*)

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire en fonction de A, B, C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.
3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.

5. x appartient à deux d'entre eux au moins.

6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Solution de l'exercice 2.16

1. L'assertion est équivalente à $x \in A \cap B \cap C$.
2. L'assertion est équivalente à $x \in A \cup B \cup C$.
3. « Être dans deux des ensembles au plus » signifie « ne pas être dans les trois à la fois », donc l'assertion est équivalente à $x \in E \setminus (A \cap B \cap C)$.
4. Être dans A mais ni dans B ni C se traduit par $x \in (A \setminus (B \cup C))$, donc l'assertion est équivalente à $x \in (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (C \cup A)) \cup (C \setminus (A \cup B)$.
5. Être dans A et B au moins se traduit par $x \in A \cap B$, donc l'assertion est équivalente à $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
6. Être dans l'un au plus des ensembles est le contraire d'être dans deux au moins, donc d'après la question précédente, l'assertion est équivalente à $x \in E \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$.

Assertions et tables de vérité

Exercice 2.17. (*)

Soient P, Q et R des assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifiez que l'implication

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$$

est toujours vraie.

Solution de l'exercice 2.17

Dressons la table (de vérité).

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La dernière colonne n'a que des "V", donc l'implication $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est toujours vraie.

Exercice 2.18. (*)

Soit P et Q deux assertions, l'assertion $P \oplus Q$ (dire "P ou exclusif Q") est vraie si exactement l'une des deux assertions P et Q est vraie.

1. Donner la table de vérité de $P \oplus Q$ selon les vérités de P et Q.
2. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
3. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

Solution de l'exercice 2.18

1.

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2. On peut simplement dresser la table de vérité de $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$:

P	$\neg P$	Q	$\neq Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F

On voit que la dernière colonne coïncide avec celle de $P \oplus Q$, donc on a bien l'équivalence demandée.

3. Faisons comme à la question précédente :

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

On voit que la dernière colonne coïncide avec celle de $P \oplus Q$, donc on a bien l'équivalence demandée.

Raisonnements

Exercice 2.19. (**) Soit a un paramètre réel. Résoudre l'inéquation suivante, en l'inconnue x réelle :

1. $ax + 3 \leqslant 2x + 1$
2. $|3x - 1| \leqslant |x + 4|$

Solution de l'exercice 2.19

1. Tout d'abord,

$$ax + 3 \leqslant 2x + 1 \Leftrightarrow (a-2)x \leqslant -2 \ .$$

On distingue plusieurs cas :

— Premier cas : $a < 2$. Dans ce cas, $a - 2 < 0$, donc :

$$ax + 3 \leqslant 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{-2}{a-2}$$

Donc l'ensemble des solutions est $[\frac{2}{2-a}, +\infty[$.

— Deuxième cas : $a = 2$. Dans ce cas,

$$ax + 3 \leqslant 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant -2$$

qui est toujours faux, donc il n'y a pas de solution.

— Troisième cas : $a > 2$. Alors, $a - 2 > 0$, donc :

$$ax + 3 \leqslant 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{-2}{a-2}$$

Donc l'ensemble des solutions est $]-\infty, -\frac{2}{a-2}]$.

2. Pour se ramener à une inéquation de degré 1, on s'intéresse au signe de $3x - 1$ et de $x + 4$, en fonction de x.

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	

On distingue alors plusieurs cas :

— Premier cas : $x \leqslant -4$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |3x-1| \leqslant |x+4| &\Leftrightarrow 1 - 3x \leqslant -x - 4 \\ &\Leftrightarrow 5 \leqslant 2x \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{5}{2}\ . \end{aligned}$$

Or x ne peut être inférieur ou égal à -4 et supérieur à $\frac{5}{2}$, donc il n'y a pas de solution inférieure ou égal à -4.

— Deuxième cas : $x \in]-4, \frac{1}{3}]$.

$$\begin{aligned} |3x-1| \leqslant |x+4| &\Leftrightarrow 1 - 3x \leqslant x + 4 \\ &\Leftrightarrow -3 \leqslant 4x \\ &\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{4}\ . \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions comprises dans $]-4, \frac{1}{3}]$ est l'ensemble $\{x \in]-4, \frac{1}{3}] | x \geqslant -\frac{3}{4}\} = [-\frac{3}{4}, \frac{1}{3}]$.

— Troisième cas : $x > \frac{1}{3}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |3x-1| \leqslant |x+4| &\Leftrightarrow 3x-1 \leqslant x+4 \\ &\Leftrightarrow 2x \leqslant 5 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \frac{5}{2} . \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions strictement supérieures à $\frac{1}{3}$ est l'ensemble $\{x \in]\frac{1}{3}, +\infty[| x \leqslant \frac{5}{2}\} =]\frac{1}{3}, \frac{5}{2}]$.

En conclusion, l'ensemble des solutions est $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{3}] \cup]\frac{1}{3}, \frac{5}{2}] = [-\frac{3}{4}, \frac{5}{2}]$.

Exercice 2.20. (**) Soit a un nombre réel. On note $\mathscr{D}_a$ la droite d'équation $y = x+2a$ et $\mathscr{C}_a$ le cercle de centre $(a, 1)$ et de rayon 1.

1. Pour quelles valeurs de a existe-t-il des points communs à $\mathscr{D}_a$ et $\mathscr{C}_a$?
2. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{D}_a$ est tangente à $\mathscr{C}_a$?

Solution de l'exercice 2.20

1. Un point M de coordonnées (x, y) appartient à $\mathscr{C}_a$ si et seulement si $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$. Donc il existe des points communs à $\mathscr{D}_a$ et $\mathscr{C}_a$ si et seulement s'il existe un couple de réels (x, y) tels que $y = x+2a$ et $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$. Cela revient à dire qu'il existe un réel y tel que $(y+a)^2 + (y-1)^2 = 1$. Or, en développant le binôme, on obtient :
$$(y+a)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2 + 2(a-1)y + a^2 = 0$$
Ce polynôme (en y) admet des racines réelles si et seulement si son discriminant, notons-le Δ_a, est positif ou nul. Or,
$$\Delta_a = -4a^2 - 8a + 4 = -4(a^2 + 2a - 1) .$$
Donc il existe des points communs à $\mathscr{D}_a$ et $\mathscr{C}_a$ si et seulement si $Q(a) := a^2 + 2a - 1 \leqslant 0$. Or ce nouveau polynôme Q (polynôme en a) a pour discriminant $\Delta' = 8$, il a pour racines réelles :
$$a_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ et } a_2 = -1 + \sqrt{2} ,$$
et Q est positif entre ses racines (coefficient positif devant a^2). Donc :
$$\Delta_a \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in [a_1, a_2] .$$

Par conséquent, il existe des points communs à $\mathscr{D}_a$ et $\mathscr{C}_a$ si et seulement si $a \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$.

2. En reprenant l'analyse précédente, $\mathscr{D}_a$ est tangente à $\mathscr{C}_a$ si et seulement si il y a un unique point d'intersection entre $\mathscr{D}_a$ et $\mathscr{C}_a$, ce qui est équivalent au fait qu'il y ait un unique réel y tel que $(y+a)^2 + (y-1)^2 = 1$. Ceci revient à dire que Δ_a est nul, ce qui est équivalent à $a = -1-\sqrt{2}$ ou $a = -1+\sqrt{2}$.

Exercice 2.21. (*)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

1. Le produit de 3 nombres réels est négatif si et seulement si l'un d'entre eux est négatif, les deux autres étant positifs.
2. Le produit de n nombres réels est positif si et seulement si un nombre pair d'entre eux sont négatifs, les autres étant positifs.

Solution de l'exercice 2.21

— Si on a un réel négatif et deux réels positifs, leur produit est bien négatif. Mais ce n'est pas la seule possibilité. En effet si on a trois réels négatifs, leur produit est également négatif. Donc on n'a pas équivalence entre les deux assertions, mais une implication :

Le produit de 3 nombres réels est négatif si (mais pas seulement si) l'un d'entre eux est négatif, les deux autres étant positifs.

— Cette fois-ci, on a bien une équivalence.

En effet, si on a un nombre pair de nombres négatifs, leur produit est positif, et les multiplier par des positifs laisse le produit positif. Et si on a un nombre impair de nombres négatifs, leur produit est négatif, et les multiplier par des positifs laisse le produit négatif.

Comme le nombre n de termes négatifs dans un produit de n réels est soit pair, soit impair, on a couvert tous les cas possibles, et on a bien montré que le produit de n nombres réels est positif si et seulement si un nombre pair d'entre eux sont négatifs, les autres étant positifs.

Exercice 2.22. (*)

1. Écrire la contraposée de l'assertion $\forall x, y \in \mathbf{R}, (x+y) > 2 \Rightarrow (x > 1 \lor y > 1)$.
2. Démontrer l'assertion ou sa contraposée.

3. Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Solution de l'exercice 2.22

1. On rappelle que la contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Attention, les quantificateurs ne font ici pas partie de l'implication (ils sont à l'extérieur). La contraposée est donc
$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \leqslant 1 \ \wedge \ y \leqslant 1) \Rightarrow (x+y) \leqslant 2$$
2. On rappelle qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes. Il suffit donc de démontrer l'une pour démontrer l'autre. Il faut donc choisir laquelle des deux est la plus simple à démontrer. Ici c'est la contraposée qui est plus simple (car on part de quelque chose sur x et de quelque chose sur y pour arriver à quelque chose sur la somme). Démontrons donc la contraposée.

   Soit $x, y \in \mathbf{R}$ quelconques. On suppose qu'on a $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$. Alors on a $x + y \leqslant 1 + y \leqslant 1 + 1 = 2$ (car l'addition préserve l'ordre sur $\mathbf{R}$, voir la règle (2) de l'exercice 19).
3. La réciproque d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$. Rappelons qu'il n'y a aucun rapport a priori entre la vérité des deux implications : selon les cas, l'une ou l'autre des deux implications peut être vraie, ou les deux à la fois, ou aucune.

   Ici l'implication réciproque est
$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x > 1 \ \vee \ y > 1) \Rightarrow (x+y) > 2$$
   Montrons qu'elle est fausse. Pour cela on écrit sa négation (on rappelle que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \neg Q$) qui est l'assertion $\exists x, y \in \mathbf{R}, (x > 1 \ \vee \ y > 1) \wedge (x+y) \leqslant 2$. Posons alors $x = 1,5$ et $y = 0$. Alors x et y sont bien deux nombres réels. On a $x > 1$, et donc on a $(x > 1 \vee y > 1)$. D'autre part on a bien $x + y = 1,5 < 2$. On a donc démontré que la réciproque est (dans cet exercice) fausse.

Exercice 2.23. (*)

(Conjectures de Goldbach). La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair $\geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

1. Traduire les deux énoncés par des assertions mathématiques à l'aide de symboles.

2. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible. La conjecture faible implique-t-elle la conjecture forte ?

Remarque : En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.

Solution de l'exercice 2.23

1. Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers (on rappelle qu'un nombre naturel supérieur ou égal à 2 est dit premier s'il n'est divisible au sens des entiers que par 1 et lui-même), soit $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$. Remarquons que l'ensemble des nombres pairs supérieurs ou égaux à 4 est $\{2n + 4\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$, et que l'ensemble des nombres impairs supérieux ou égaux à 7 est $\{2n + 7\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$.

   On peut alors traduire la conjecture de Goldbach forte par
   $$\forall m \in \{2n + 4\ ;\ n \in \mathbf{N}\},\ \exists p, q \in \mathscr{P},\ m = p + q\ ,$$
   et la conjecture faible par
   $$\forall m \in \{2n + 7\ ;\ n \in \mathbf{N}\},\ \exists p, q, r \in \mathscr{P},\ m = p + q + r\ .$$

2. Supposons la conjecture forte vraie, et démontrons la conjecture faible. Soit $m \in \{2n + 7\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $m = 2n + 7$. D'après la conjecture forte, il existe $p, q \in \mathscr{P}$ tels que $2n + 4 = p + q$. Posons $r = 3$. Alors on a bien $r \in \mathscr{P}$ car 3 est un nombre premier, et on a alors $m = 2n + 7 = (2n + 4) + 3 = p + q + r$.

   En revanche il n'y a pas d'argument simple selon lequel la conjecture faible implique la conjecture forte. D'ailleurs, depuis 2013, on sait que la conjecture faible est vraie, car démontrée, mais on ne sait toujours pas si la conjecture forte est vraie.

Exercice 2.24. (*) Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{10^n-1}{9}$ est entier. (On pourra faire une récurrence.)

Solution de l'exercice 2.24

Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbf{N}, \dfrac{10^n - 1}{9} \in \mathbf{N}$.

Initialisation. Au rang 0, $\dfrac{10^0 - 1}{9} = \dfrac{1 - 1}{9} = 0 \in \mathbf{N}$.

Hérédité. Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $n \in \mathbf{N}$. Montrons qu'alors on a $\dfrac{10^{n+1}-1}{9} \in \mathbf{N}$.

$$\frac{10^{n+1}-1}{9} = \frac{10 \times 10^n - 10 + 9}{9} = 10 \times \frac{10^n - 1}{9} + 1 \in \mathbf{N}$$

car par hypothèse de récurrence, $\dfrac{10^n-1}{9} \in \mathbf{N}$. Cela entraîne le résultat voulu, par principe de récurrence.

Exercice 2.25. (***) On dispose d'un jeu de $2n$ cartes rangées en un tas où toutes les cartes sont initialement face vers le bas. On considère deux types d'opérations sur ce jeu :

A) on prend les deux cartes du dessus entre deux doigts, on retourne cet ensemble de deux cartes sans les séparer, puis on replace les deux cartes sur le dessus du paquet (la première carte devient ainsi la deuxième carte, mais retournée, et la deuxième carte devient la première carte, retournée)

B) on coupe le jeu (c'est à dire qu'on prend le paquet des k cartes du dessus, pour un k dans $\{1, \ldots, 2n-1\}$ et on le met en-dessous du reste du paquet, sans retourner les cartes).

Montrer qu'après n'importe quel nombre d'opérations comme au-dessus, le jeu vérifie la propriété suivante[1] :

($\mathscr{P}$) Le nombre de cartes de position paire tournées « face vers le haut » est égal au nombre de cartes de position impaire tournées « face vers le haut ».

Solution de l'exercice 2.25

On considère une suite quelconque d'opérations élémentaires (A ou B) et on note $P(n)$ la propriété "après la n-ème opération, la propriété ($\mathscr{P}$) est vérifiée". On note également u_n le nombre de cartes de position paire tournées « face vers le haut » après la n-ème opération et v_n le nombre de cartes de position impaire tournées « face vers le haut » après la n-ème opération. Ainsi, $P(n)$ peut s'écrire "$u_n = v_n$".

1. Cette propriété est à la base du tour de magie "Royal Hummer" présenté dans le livre de Diaconis et Graham "Magical mathematics", chapitre 1

Initialisation. Au rang $n = 0$, on a $u_n = 0$ et $v_n = 0$ par hypothèse, puisqu'on commence avec un jeu où toutes les cartes sont initialement face vers le bas. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant 0$ un entier. Supposons que $P(n)$ est vraie.

- Si la $(n+1)$-ème opération est l'opération B, on peut faire une disjonction de cas sur le nombre k de cartes du dessus qui sont passées en-dessous du paquet :
  - Si k est pair, alors $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$. Or $u_n = v_n$, donc $u_{n+1} = v_{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
  - Si k est impair, alors $u_{n+1} = v_n$ et $v_{n+1} = u_n$. Or $u_n = v_n$, donc $u_{n+1} = v_{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
- Si la $(n+1)$-ème opération est l'opération A, on peut faire une disjonction de cas sur la configuration à l'étape n des deux cartes du dessus du paquet :
  - si les faces visibles de ces deux cartes sont BB (première et seconde carte faces visibles vers le Bas), alors après avoir appliqué l'opération A, les faces visibles de ces deux cartes sont HH (faces visibles toutes deux vers le Haut). On a donc $u_{n+1} = u_n + 1$ et $v_{n+1} = v_n + 1$. Or $u_n = v_n$, donc $u_{n+1} = v_{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
  - si les faces visibles de ces deux cartes sont HH, alors après avoir appliqué l'opération A, les faces visibles de ces deux cartes sont BB. On a donc $u_{n+1} = u_n - 1$ et $v_{n+1} = v_n - 1$. Or $u_n = v_n$, donc $u_{n+1} = v_{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
  - si les faces visibles de ces deux cartes sont HB, alors après avoir appliqué l'opération A, les faces visibles de ces deux cartes sont encore HB. On a donc $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$. Or $u_n = v_n$, donc $u_{n+1} = v_{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
  - si les faces visibles de ces deux cartes sont BH, alors après avoir appliqué l'opération A, les faces visibles de ces deux cartes sont encore BH. On a donc $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$. Or $u_n = v_n$, donc $u_{n+1} = v_{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Dans tous les cas, $P(n+1)$ est vraie, on a montré l'hérédité.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et $(P(n))_{n \geqslant 0}$ est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout n entier, donc $(\mathscr{P})$ est vraie après n'importe quel nombre d'opérations.

Exercice 2.26. (*) Soient a et b deux nombres réels. Montrer que si la somme $a+b$ est irrationnelle (c'est-à-dire $a+b \notin \mathbf{Q}$), alors a ou b est irrationnel. (On pourra considérer la contraposée.)

Solution de l'exercice 2.26

Supposons que a et b soient rationnels, et notons $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$, avec p, q, p' et q' des entiers relatifs (q et q' non nuls). Alors,

$$a + b = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

qui est bien un nombre rationnel : qq' est un entier relatif, ainsi que $pq' + p'q$. Nous avons montré :

$$(a \in \mathbf{Q} \text{ et } b \in \mathbf{Q}) \Rightarrow a + b \in \mathbf{Q}.$$

Donc, la contraposée de cet énoncé est vraie, c'est l'énoncé demandé.

Exercice 2.27. (*) Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$ pour $x \geq -2$.

Solution de l'exercice 2.27

Pour tout $x \geqslant 2$, $x+2$ est positif ou nul donc $\sqrt{x+2}$ est bien défini. On est tenté de mettre au carré les deux membres de l'équation $\sqrt{x+2} = x$, mais il faut se poser la question de l'équivalence. En effet, pour des nombres réels a et b, $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ mais la réciproque est fausse. On sait par contre que $a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|$. Néanmoins, ici, on sait que $\sqrt{x+2}$ est nécessairement positif ou nul. Donc si $\sqrt{x+2} = x$, alors x est positif ou nul. Et si a et b sont deux nombres positifs ou nuls, alors $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$. On a donc, pour $x \geq -2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} = x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} = x \text{ et } x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 2 = x^2 \text{ et } x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \text{ et } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le discriminant Δ du polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$ est 9, P admet pour racines 2 et -1. Donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}=x &\Leftrightarrow (x=2 \text{ ou } x=-1) \text{ et } x\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation a une unique solution, qui est 2.

Exercice 2.28. (**)

On considère les propriétés suivantes de l'ordre total sur $\mathbf{R}$, valables pour tous a, b et c réels :

$$\begin{array}{lrcl}(1) & (a\leqslant b \text{ et } b\leqslant c) & \Rightarrow & a\leqslant c\\ (2) & a\leqslant b & \Rightarrow & a+c\leqslant b+c\\ (3) & (a\leqslant b \text{ et } c\geqslant 0) & \Rightarrow & ac\leqslant bc\end{array}$$

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $3x+2\leqslant -2x+1$ d'inconnue x en utilisant uniquement (en ce qui concerne les propriétés de l'ordre total) les règles ci-dessus. À chaque étape, on indiquera la règle utilisée.
2. Montrer, en utilisant uniquement les règles (1) et (2), la règle suivante, valable pour tous réels a, b, c et d :
$$(a\leqslant b \text{ et } c\leqslant d)\Rightarrow a+c\leqslant b+d$$
3. Montrer, en utilisant uniquement les règles (1), (2) et (3), la règle suivante :
$$(a\leqslant b \text{ et } c\leqslant 0)\Rightarrow ac\geqslant bc$$
4. Montrer, en utilisant uniquement la règle (3), la règle suivante :
$$(a< b \text{ et } c> 0)\Rightarrow ac< bc$$

Solution de l'exercice 2.28

1. Soit x satisfaisant $3x+2\leqslant -2x+1$. Alors par (2) on a $3x+2x+2\leqslant -2x+2x+1$, c'est-à-dire $5x+2\leqslant 1$. Par (2) encore on a $5x\leqslant 1-2=-1$. Comme $\frac{1}{5}$ est positif, par (3) on a $x=\frac{1}{5}5x\leqslant\frac{1}{5}(-1)=\frac{-1}{5}$.

   Réciproquement, si on a $x\leqslant\frac{-1}{5}$, alors comme 5 est positif, on a $5x\leqslant -1$, puis par (2) on a $5x+2\leqslant -1+2=1$, puis par (2) on a $3x+2=5x-2x+2\leqslant -2x+1$.

En conclusion on a $3x+2 \leqslant -2x+1$ pour x dans $\mathbf{R}$ si et seulement si on a $x \in]-\infty, -\frac{1}{5}]$.

(On aurait ici pu raisonner par équivalence, mais puisque les règles (1), (2) et (3) sont données comme des implications, on ne peut que raisonner par double-implication, qu'on appelle plutôt ici analyse-synthèse.)

2. Supposons qu'on a $(a \leqslant b)$ et $(c \leqslant d)$. Alors par (2) on a $a+c \leqslant b+c$. Ensuite par (2) appliqué aux nombres c, d, b on a $c+b \leqslant d+b$, comme $b+c = c+b$ et comme $d+b = b+d$, en appliquant la règle (1) à $a+c, b+c$ et $b+d$, on obtient $a+c \leqslant b+d$.
3. À l'aide de (2) et à partir de $c \leqslant 0$, on déduit $0 = c-c \leqslant 0-c = -c$. À l'aide de (3) appliqué à a, b et $-c$ on a $a(-c) \leqslant b(-c)$, soit $-ac \leqslant -bc$. En ajoutant $ac+bc$ des deux côtés et à l'aide de (2), on a donc $bc = -ac+ac+bc \leqslant -bc+ac+bc = ac$, c'est-à-dire $ac \geqslant bc$.
4. Supposons qu'on a $(a < b)$ et $(c > 0)$. Alors on a en particulier $(a \leqslant b)$ et $(c \geqslant 0)$, donc par la règle (3) on a $ac \leqslant bc$. Comme on a $c > 0$, le nombre $\frac{1}{c}$ est défini et positif. Supposons par l'absurde qu'on a $ac = bc$, alors en multipliant par $\frac{1}{c}$, on a $a = b$. Comme on a supposé $a < b$, c'est impossible, et donc on a bien $ac < bc$.

Exercice 2.29. (**)

En utilisant un raisonnement direct, montrer que

1. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et paire, alors sa dérivée f' est impaire.
2. Pour tout élément $x > 0$ de $\mathbf{Q}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$.

Solution de l'exercice 2.29

1. Pour cette question, il faut rappeler certaines définitions : f est dite dérivable en $x \in \mathbf{R}$ si le taux d'accroissement $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ a une limite quand y tend vers x. Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée de f en x, notée $f'(x)$.

   Supposons donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbf{R}$, et que f est paire, c'est-à-dire vérifie $f(-x) = f(x)$ pour tout réel x. On veut montrer que f' est impaire, c'est-à-dire vérifie $f'(-x) = -f'(x)$ pour tout réel x.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors par définition on a

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{y \to -x} \frac{f(y) - f(-x)}{y - (-x)} \\ &= \lim_{-z \to -x} \frac{f(-z) - f(-x)}{-z + x} \\ &= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{-(z - x)} \\ &= -\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = -f'(x) , \end{aligned}$$

où le passage de la 1e à la 2e ligne vient du changement de variable $z = -y$, et l'égalité entre la 2e et la 3e ligne repose sur le fait que f est paire. On a bien montré que f' est impaire.

2. Soit $x \in \mathbf{Q}_+^*$. Par définition il existe deux entiers relatifs p, q avec q non nuls tels que $x = \frac{p}{q}$. Comme x est positif, on a $p \neq 0$, et quitte à multiplicier p et q par -1, on a $p > 0$ et $q > 0$. On peut aller poser $n = p + 1$. Comme on a $q \geqslant 1$, on a alors $n = p + 1 > p \geqslant \frac{p}{q} = x$.

Exercice 2.30. (**)

En utilisant un raisonnement par *disjonction des cas* (ou *cas par cas*),

1. Montrer l'assertion $\forall x \in \mathbf{R}, (x \notin \mathbf{Q}) \vee (\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$.
2. Soient a et b deux réels, montrer qu'on a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

3. Montrer que, quelque soit l'entier naturel $n \in \mathbf{N}$, 3 divise $n(n + 1)(2n + 1)$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que la somme $n + m$ soit impaire et le produit nm soit pair.
5. Trouver tous les réels x tels que $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

Solution de l'exercice 2.30

1. Soit x un nombre réel quelconque. Comme on a $\mathbf{R} = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{Q}$, on sépare deux cas :

   1er cas : $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Dans ce cas, on a $x \notin \mathbf{Q}$, et donc l'assertion $(x \notin \mathbf{Q}) \vee (\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$ est vraie.

   2e cas : $x \in \mathbf{Q}$. Alors par définition de $\mathbf{Q}$, il existe $p, q \in \mathbf{Z}$ avec $q \neq 0$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Alors en posant $n = |q|$, on a bien $n \in \mathbf{N}^*$ et on obtient $nx = |q|\frac{p}{q} = p\frac{|q|}{q}$. Comme $\frac{|q|}{q}$ vaut 1 ou -1, on a donc $nx \in \mathbf{Z}$. On a donc démontré $\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z}$ dans ce cas.

   Dans tous les cas, on a bien montré $(x \notin \mathbf{Q}) \vee (\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$.
2. Par définition, on a $\max(a, b) = a$ si $a \geqslant b$ et b si $a < b$. Séparons deux cas.

   1er cas : $a \geqslant b$. Dans ce cas, on a $|a - b| = a - b$, et alors on a
   $$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = \frac{1}{2}(2a) = a = \max(a, b).$$
   2e cas : $a < b$. Dans ce cas, on a $|a - b| = -(a - b)$, et alors on a
   $$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - (a - b)) = \frac{1}{2}(2b) = b = \max(a, b).$$
   Dans les deux cas, on a bien montré
   $$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \max(a, b).$$
   L'autre formule se montre de la même façon.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque. Alors en considérant la division euclidienne par 3, on trouve deux entiers q, r tels que $n = 3q + r$, avec $r \in \{0, 1, 2\}$. Séparons trois cas selon la valeur de r :

   1er cas : $r = 0$. Alors on a $n = 3q$, et donc $n(n + 1)(2n + 1) = 3 \times q(3q + 1)(6q + 1)$ qui est bien divisible par 3.

   2e cas : $r = 1$. Alors on a $n = 3q + 1$, et donc $n(n + 1)(2n + 1) = (3q+1)(3q+2)(6q+3) = (3q+1)(3q+2)\times 3\times(2q+1)$ qui est bien divisible par 3.

   3e cas : $r = 2$. Alors on a $n = 3q + 2$, et donc $n(n + 1)(2n + 1) = (3q+2)(3q+3)(6q+5) = (3q+2)\times 3\times(q+1)(6q+5)$ qui est bien divisible par 3.

   Dans tous les cas on voit que $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 3.

4. Séparons deux cas selon que n est pair ou impair.

   1er cas : si n est pair. Alors on pose $m = 1$, et dans ce cas on a $n+m = n+1$ qui est impair et $mn = n$ qui est pair.

   2e cas : si n est impair. Alors on pose $m = 0$, et dans ce cas on a $n+m = n$ qui est impair et $mn = 0$ qui est pair.

   Dans tous les cas, on a bien montré l'existence de m.

5. Pour décider quels cas considérer, il faut voir quand les expression à l'intérieur des valeurs absolues sont positives ou négatives, pour pouvoir simplifier l'expression.

   Supposons donc qu'on a trouvé x satisfaisant $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

   1er cas : $x + 1 \geqslant 0$ et $3x - 2 \geqslant 0$. Dans ce cas l'équation devient $x + 1 = 3 - (3x - 2) = 5 - 3x$, d'où $4x = 4$, et donc $x = 1$. Réciproquement on vérifie que pour $x = 1$, on a $|x+1| = |1+1| = 2$ et $3-|3x-2| = 3-1 = 2$, donc 1 est bien solution.

   2e cas : $x + 1 \geqslant 0$ et $3x - 2 < 0$. Dans ce cas l'équation devient $x + 1 = 3 - (-3x + 2) = 1 + 3x$, donc $x = 3x$, et donc $x = 0$. Réciproquement on vérifie que pour $x = 0$, on a $|x + 1| = 1$ et $3 - |3x - 2| = 3 - 2 = 1$, donc 0 est bien solution.

   3e cas : $x+1 < 0$ et $3x-2 \geqslant 0$. Dans ce cas l'équation devient $-x-1 = 3-(3x-2) = 5-3x$, d'où $2x = 6$ et donc $x = 3$. Réciproquement on vérifie que pour $x = 3$, on a $|3 + 1| = 4$ et $3 - |3x - 2| = 3 - 7 = -4$, donc 3 n'est en fait pas solution : en effet pour $x = 3$ on n'a pas $x+1 < 0$, donc la solution est hors du cas considéré.

   4e cas : $x+1 < 0$ et $3x-2 < 0$. Dans ce cas l'équation devient $-x-1 = 3-(-3x+2) = 1+3x$, donc $4x = -2$, et donc $x = -1/2$. Cependant, pour $x = -1/2$, $|x+1| = 1/2$ et $3-|3x-2| = 3-7/2 = -1/2$, donc $-1/2$ n'est pas solution. On constate en effet que pour $x = -1/2$, on n'a pas $x+1 < 0$, donc nous ne sommes pas dans le cas considéré.

   En conclusion, on a trouvé deux solutions pour x, à savoir 0 et 1, et il n'y en a pas d'autre.

Exercice 2.31. (**)

En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que

1. $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas un rationnel.

2. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels de somme égale à 1. Alors un de ces réels est plus petit que $\frac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 2.31

1. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est rationnel. Alors il existe $p, q \in \mathbf{Z}^*$ tels que $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$. Comme $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est positif, on peut supposer p, q positifs, donc $p, q \in \mathbf{N}^*$.

   Alors on a $q \ln 2 = p \ln 3$. En passant à l'exponentielle, on a $\mathrm{e}^{q \ln 2} = \mathrm{e}^{p \ln 3}$. Or on a $\mathrm{e}^{q \ln 2} = (\mathrm{e}^{\ln 2})^q = 2^q$, et $\mathrm{e}^{p \ln 3} = (\mathrm{e}^{\ln 3})^p = 3^p$. On a donc $2^q = 3^p$, avec p, q des entiers positifs. Or 2^q est pair, et 3^p est impair, donc il ne peuvent être égaux. On a une contradiction, et par conséquent l'hypothèse de départ est fausse. Ainsi $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
2. Raisonnons par l'absurde et supposons donc qu'on a n réels de somme égale à 1, et que tous ces réels sont strictement plus grands que $\frac{1}{n}$. Alors on a $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi l'un des réels est inférieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

Exercice 2.32. (**)

En utilisant un raisonnement par analyse et synthèse,

1. Soit a, b deux nombres réels. Démontrer que l'assertion $\forall x \in [0,1], ax + b \geq 0$ est équivalente à l'assertion $(b \geq 0 \wedge a + b \geq 0)$.
2. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et distinctes du plan orienté. Soit A un point du plan n'appartenant ni à D_1, ni à D_2. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartient à D_1 et C appartient à D_2. Combien y a t-il de triangles possibles. (*On supposera qu'un tel triangle existe et on cherchera comment construire B ou C en utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$*)
3. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Solution de l'exercice 2.32

1. Faisons une analyse : supposons qu'on a $\forall x \in [0,1], ax + b \geqslant 0$. Alors en particulier pour $x = 0$ on trouve $b \geqslant 0$ et pour $x = 1$ on trouve $a + b \geqslant 0$.

Faisons maintenant la synthèse : si on a $b \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$. Soit $x \in [0,1]$. Alors on a $ax+b = x(a+b)+(1-x)b$. Comme $x \in [0,1]$, on a $x \geqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$. Ainsi $x(a+b) \geqslant 0$ et $(1-x)b \geqslant 0$, et donc $ax+b = x(a+b)+(1-x)b \geqslant 0$.

On a donc bien montré l'équivalence.

2. Analysons : si on a un tel triangle équilatéral ABC, alors la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$ envoie B en C, ou C en B (selon que ABC est orienté trigonométriquement ou horairement). En notant r_A cette rotation, dans le premier cas B est à l'intersection de la droite D_1 avec $r_A(D_2)$, et dans le second cas C est à l'intersection de D_2 avec $r_A(D_1)$. Comme les deux sommets plus une orientation déterminent le triangle équilatéral, il y a au plus deux solutions.

   Faisons la synthèse. Si on définit le point B_1 comme l'intersection des droites D_1 et $r_A(D_2)$, et C_1 comme l'image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$, alors C_1 est automatiquement sur D_2, et donc le triangle AB_1C_1 est équilatéral avec B_1 sur D_1 et C_1 sur D_2.

   D'autre part si on définit le point C_2 comme l'intersection de D_2 avec $r_A(D_1)$, et B_2 comme l'image de C_2 par la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$, alors B_2 est automatiquement sur D_1, et donc le triangle AB_2C_2 est équilatéral avec B_2 sur D_1 et C_2 sur D_2.

   On a donc montré comment construire un tel triangle, et on a montré qu'il y en a deux possibles.

3. Analysons : si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est la somme d'une fonction paire $f_p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et d'une fonction impaire $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ d'une part, et d'autre part $f_p(-x) = f_p(x)$ et $f_i(-x) = -f_i(x)$ par définition de ce que sont des fonctions paires et impaires. On a alors $f(-x) = f_p(-x) + f_i(-x) = f_p(x) - f_i(x)$. En comparant avec $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$, on obtient par addition $f(-x) + f(x) = 2f_p(x)$ et par soustraction $f(x) - f(-x) = 2f_i(x)$. On voit donc qu'on n'a pas le choix pour f_p et f_i.

   Faisons la synthèse et montrons la propriété demandée. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fixée. Définissons $f_p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par $f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par $f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Alors on vérifie que f_p est paire puisqu'on a $f_p(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_p(x)$, que f_i est impaire puisqu'on a $f_i(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) =$

$-f_i(x)$ et que f est bien la somme de f_p et f_i puisqu'on a $f_p(x) + f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$.

Exercice 2.33. (**)

1. Montrer à l'aide d'une récurrence que tout nombre entier supérieur ou égal à 12 peut s'écrire sous la forme $4a + 5b$, pour des entiers naturels a et b.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n \geq 2, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Solution de l'exercice 2.33

1. Notons $P(n)$ la propriété "$\exists a, b \in \mathbf{N}, n = 4a + 5b$", qui dépend d'un paramètre n entier naturel. Notons que $P(12)$ est vraie puisqu'on a $12 = 4\times 3 + 5 \times 0$, que $P(13)$ est vraie puisqu'on a $13 = 3 \times 3 + 5 \times 1$. Faisons une analyse pour essayer de montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 12$: si $P(n)$ est vraie, alors il existe deux entiers naturels a, b tels que $n = 4a+5b$, et dans ce cas on a $n+1 = 4a+5b+1 = 4(a-1)+4+5b+1 = 4(a-1)+5(b+1)$. Le problème pour une récurrence est que si $a = 0$, alors $a-1$ n'est pas un entier naturel et donc cette formule ne marche pas : il faut traiter séparément le cas $a = 0$. On peut le voir en continuant à tester les cas : pour 14 on a $14 = 4 \times 1 + 5 \times 2$, pour 15 on a $15 = 4 \times 0 + 5 \times 3$, et pour 16 on a $16 = 4 \times 4 + 5 \times 0$. Ainsi pour passer de 15 à 16, on a retranché 3 à b et ajouté 4 à a. On peut maintenant faire la synthèse.

   Montrons que si n est un entier supérieur ou égal à 12, on a $P(n) \implies P(n+1)$. Supposons donc $P(n)$. On a alors deux entiers naturels a, b tels que $n = 4a + 5b$. Séparons deux cas :

   Cas 1 : si $a \neq 0$, alors on a $n+1 = 4(a-1)+5(b+1)$ et comme $a-1, b+1$ sont deux entiers naturels, on a montré $P(n+1)$.

   Cas 2 : si $a = 0$, alors comme $n = 5b \geqslant 12$, on a $b \geqslant \frac{12}{5}$, et comme b est entier on a $b \geqslant 3$. Alors on a $n+1 = 4a+5b = 4(a+4)+5(b-3)$, et comme $a+4$ et $b-3$ sont des entiers, on a bien montré $P(n+1)$ dans ce cas aussi.

   On a donc montré $P(12)$ et $\forall n \geqslant 12, P(n) \implies P(n+1)$, donc par récurrence on a montré $\forall n \geqslant 12, P(n)$.
2. On a bien $u_0 = 0 = 3^0 - 2^0$ et $u_1 = 1 = 3^1 - 2^1$. On voit que pour faire une récurrence on a besoin de connaître u_{n_1} et u_{n_2} pour connaître u_n. Notons

alors $P(n)$ l'assertion "$u_n = 3^n - 2^n \wedge u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. On a vérifié que $P(0)$ est vraie.

Supposons maintenant que $P(n)$ est vraie, et montrons $P(n+1)$. Comme $P(n)$ est vraie, on a $u_n = 3^n - 2^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Alors on a immédiatement $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ et d'autre part $u_{n+2} = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^{-}2^n) = (15-6)3^n - (10-6)3^n = 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}$. Ainsi on a bien montré $P(n+1)$.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, l'assertion $P(n)$ est vraie.

Exercice 2.34. (**)

(Nombres de Fibonacci). On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n \geqslant 1}$ par récurrence de la façon suivante :

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les nombres de Fibonacci (F_n), pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos.
3. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, \forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$ (on pourra fixer un entier $n \geqslant 2$ et démontrer $\forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$ par récurrence double.)
4. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Solution de l'exercice 2.34

1. On calcule F_n de proche en proche. On trouve : $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$, $F_8 = 34$, $F_9 = 55$, $F_10 = 89$.
2. Notons u_n le nombre de façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos de taille 2×1. Nous allons montrer que :

$$u_1 = 1,\ u_2 = 2 \text{ et pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \tag{4}$$

Il est alors facile d'en déduire que $u_n = F_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Le fait que $u_1 = 1$ est évident, puisque l'échiquier a la même taille que le domino. On voit également facilement qu'il y a deux manières de paver l'échiquier de taille 2×2 : soit en disposant deux dominos horizontaux l'un au-dessus de l'autre, soit en les disposant verticalement l'un à côté de l'autre. Ainsi, $u_2 = 2$. Il reste à montrer la relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

Considérons alors $\mathscr{P}_{n+2}$, l'ensemble des pavages de l'échiquier de forme $2 \times (n+2)$, avec $n \geqslant 1$, que l'on imagine disposé horizontalement : il est formé de deux lignes horizontales de $n+2$ cases l'une au-dessus de l'autre. Un pavage appartenant à $\mathscr{P}_{n+2}$ a nécessairement un domino qui recouvre la case en haut à gauche de l'échiquier, que nous appellerons $A1$. Ce domino est soit horizontal (il recouvre alors également la case à droite de $A1$), soit vertical (il recouvre alors également la case en dessous de $A1$). Notons $\mathscr{H}_{n+2}$ l'ensemble des éléments (ces éléments sont donc des pavages) de $\mathscr{P}_{n+2}$ dont le domino qui recouvre $A1$ est horizontal, et $\mathscr{V}_{n+2}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{P}_{n+2}$ dont le domino qui recouvre $A1$ est vertical. $\mathscr{H}_{n+2}$ et $\mathscr{V}_{n+2}$ sont disjoints, et leur réunion forme $\mathscr{P}_{n+2}$. Donc le nombre d'éléments dans $\mathscr{P}_{n+2}$ est égal à la somme du nombre d'éléments de $\mathscr{H}_{n+2}$ et du nombre d'éléments de $\mathscr{V}_{n+2}$. Il suffit maintenant de montrer que le nombre d'éléments de $\mathscr{H}_{n+2}$ est u_n et que le nombre d'éléments de $\mathscr{V}_{n+2}$ est u_{n+1}, et nous aurons fini de montrer (4).

Choisir un pavage de $\mathscr{V}_{n+2}$ revient à choisir un pavage de la partie de l'échiquier non couverte par le domino vertical recouvrant $A1$. Or cette partie de l'échiquier est un échiquier de forme $2 \times (n+1)$, donc il y a u_{n+1} pavages possibles dans $\mathscr{V}_{n+2}$.

Les pavages de $\mathscr{H}_{n+2}$ possèdent nécessairement un domino horizontal en dessous du domino couvrant $A1$, et le reste des dominos forme alors un pavage du reste de l'échiquier, qui a la forme $2 \times n$. Il y a donc autant d'éléments dans $\mathscr{H}_{n+2}$ que de pavages de l'échiquier de forme $2 \times n$, et ce nombre de pavages est u_n. Ceci finit la preuve.

3. On fixe $n \geqslant 2$ un entier. Notons $P(m)$ l'assertion :

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}$$

Nous allons montrer que $P(m)$ est vraie pour tout $m \geqslant 1$ par récurrence double.

Hérédité. Montrons que pour tout $m \geqslant 1$, $P(m)$ et $P(m+1) \Rightarrow P(m+2)$. Soit $m \geqslant 1$ un entier. Supposons que $P(m)$ et $P(m+1)$ sont vraies. En appliquant la relation de récurrence définissant $(F_n)_{n \geqslant 1}$, on a (en remarquant que $n+m \geqslant 1$) :

$$F_{n+m+2} = Fn + m + 1 + F_{n+m}$$

D'autre part, en utilisant $P(m)$, on a $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$, et en utilisant $P(m+1)$, on a $F_{n+m+1} = F_{n-1}F_{m+1} + F_nF_{m+2}$. Donc :

$$\begin{aligned} F_{n+m+2} &= F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_{m+1} + F_nF_{m+2} \\ &= F_{n-1}(F_m + F_{m+1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m+2}) \\ &= F_{n-1}F_{m+2} + F_nF_{m+3} \end{aligned}$$

en utilisant à la dernière ligne la relation de récurrence définissant $(F_n)_{n\geqslant 1}$ (en remarquant que $m \geqslant 1$ et $m+1 \geqslant 1$). On a bien obtenu le fait que $P(m+2)$ est vraie.

Initialisation. $P(1)$ est vraie car $P(1)$ correspond à « $F_{n+1} = F_{n-1}+F_n$ », qui est vraie grâce à la relation de récurrence définissant $(F_n)_{n\geqslant 1}$ (et le fait que $n-1 \geqslant 1$). $P(2)$ correspond à « $F_{n+2} = F_{n-1} + 2F_n$ ». Or, comme $n-1 \geqslant 1$, on a :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ et } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

donc

$$F_{n+2} = 2F_n + F_{n-1}$$

ce qui montre que $P(2)$ est vraie.

Conclusion. On conclut par récurrence double que $P(m)$ est vraie pour tout $m \geqslant 1$. Comme ceci est vrai pour tout $n \geqslant 2$, cela finit la preuve.

4. Notons $P(n)$ l'assertion « $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$ ». Nous allons montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$ par récurrence.

Hérédité. Montrons que pour tout $n \geqslant 2$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Soit $n \geqslant 2$ un entier et supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors, grâce à la relation de récurrence définissant $(F_n)_{n\geqslant 1}$

$$F_nF_{n+2} = F_n(F_n + F_{n+1}) = F_n^2 + F_nF_{n+1}$$

En utilisant $P(n)$, on en déduit

$$F_nF_{n+2} = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1} + F_nF_{n+1} = (-1)^{n+1} + (F_{n-1} + F_n)F_{n+1}$$

En utilisant à nouveau la relation de récurrence définissant $(F_n)_{n\geqslant 1}$ (et le fait que $n-1 \geqslant 1$), on a alors :

$$F_nF_{n+2} = (-1)^{n+1} + F_{n+1}F_{n+1}$$

Donc :

$$F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} - (-1)^{n+1} = F_nF_{n+2} + (-1)^{n+2}$$

ce qui montre que $P(n+1)$ est vraie.

Initialisation. $P(2)$ signifie « $F_2^2 = F_1F_3 + (-1)^3$ ». Or $F_2^2 = 1$, et

$$F_1F_3 + (-1)^3 = 1 \times 2 - 1 = 1$$

Donc $P(2)$ est vraie.

Conclusion. On conclut, par récurrence simple, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 2.35. (***) Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z telle que $\frac{z^2}{z+i}$ soit imaginaire pur.

Solution de l'exercice 2.35

Soit $z \in \mathbf{C} - \{-i\}$, on a

$$\frac{z^2}{z+i} = \frac{z^2\overline{(z+i)}}{(z+i)\overline{(z+i)}} = \frac{z^2(\overline{z}-i)}{|z+i|^2}.$$

Donc $\frac{z^2}{z+i}$ est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, si et seulement si $\mathrm{Re}(z^2(\overline{z}-i)) = 0$. Écrivons $z = a + ib$ sous forme algébrique, avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2 - \{(0,-1)\}$. On a alors

$$z^2(\overline{z}-i) = (a+ib)^2(a-ib-i) = (a^2-b^2+2iab)(a-i(b+1))$$

et la partie réelle de ce produit est

$$a(a^2-b^2) + 2ab(b+1) = a(a^2-b^2+2b(b+1)) = a(a^2+b^2+2b).$$

Donc il y a deux cas possibles pour que la partie réelle soit nulle :

- soit $a = 0$, et alors $z = ib$ est un imaginaire pur (différent de $-i$).
- soit $a^2+b^2+2b = 0$. Or

$$a^2+b^2+2b = 0 \Leftrightarrow a^2+(b+1)^2-1 = 0 \Leftrightarrow a^2+(b+1)^2 = 1$$

et la dernière équation correspond à l'équation d'un cercle de centre $(0,-1)$ et de rayon 1.

Réciproquement, pour tout nombre z imaginaire pur et pour tout nombre z appartenant au cercle de rayon $(0,-1)$ et de rayon 1 (c'est à dire de la forme $e^{i\theta} - i$ pour $\theta \in \mathbf{R}$), on vérifie que la partie réelle de $\frac{z^2}{z+i}$ est nulle.

En conclusion, l'ensemble des points du plan cherché est la réunion de la droite imaginaire pure privée du point $-i$ et du cercle de centre $(0,-1)$ et de rayon 1.

Exercice 2.36. (**)

Une récurrence boîteuse. La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, ils sont en fait tous égaux.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

« quels que soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, on a $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. »

Montrons $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. S'il n'y a qu'un nombre u_1, il n'y a rien à montrer, ce qui montre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $P(n)$.

Montrons $P(n+1)$.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \in \mathbf{R}$.

D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$.

Par ailleurs, si l'on pose $u'_1 = u_2, u'_2 = u_3, \ldots, u'_n = u_{n+1}$ et que l'on applique $P(n)$ à la famille $(u'_1, \ldots, u'_n)$, on obtient $u'_1 = \cdots = u'_{n-1} = u'_n$, c'est-à-dire $u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$.

Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

Le résultat est évidemment faux. Où est le problème ?

Solution de l'exercice 2.36

La présentation de l'hérédité est trompeuse : en effet, celle-ci "marche" pour $n \geqslant 2$, mais pas pour $n = 1$. Autrement dit $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour $n \geqslant 2$, mais $P(1) \Rightarrow P(2)$ est fausse. En effet, si on réécrit la preuve pour de $P(1) \Rightarrow P(2)$ en remplaçant dans la preuve "foireuse" n par la valeur 1, on s'aperçoit qu'on a d'un côté "Tous les nombres u_i pour i allant de 1 à 1 son égaux" et de l'autre "Tous les nombres u_i pour i allant de 2 à 2 sont égaux", et on ne peut pas déduire de cela que $u_1 = u_2$.
Remarquons qu'ici, l'écriture avec les points de suspension "$u_1 = u_2 = \cdots = u_n$" est trompeuse, car on écrit u_2 alors que celui-ci n'apparaît pas en fait pas lorsque $n = 1$.

Exercice 2.37. (***) *Théorème de Helly en dimension 1*

Soit $n \geq 2$ un entier, et $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des intervalles de $\mathbf{R}$. On considère l'assertion suivante :

si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ l'intersection $I_i \cap I_j$ est non vide,
alors l'intersection globale $\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} I_i$ est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$.

Pour simplifier, on ne considère que des intervalles fermés.

1. Faites un dessin pour $n = 3$ pour vous convaincre que l'assertion est vraie dans ce cas.
2. Montrer que l'assertion est fausse si on suppose seulement que $I_1, \ldots, I_n$ sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ et pas nécessairement des intervalles.
3. En utilisant la notion de min et de max, donner une preuve directe de l'assertion.
4. Le théorème est-il encore vrai s'il y a une infinité d'intervalles ?

Solution de l'exercice 2.37

1. À vous de jouer.
2. On peut prendre $n = 3$, $I_1 = \{0, 2\}$, $I_2 = \{0, 1\}$ et $I_3 = \{1, 2\}$. Ces ensembles sont deux à deux d'intersction non vide, mais l'intersection globale est vide.
3. On note $I_i = [a_i, b_i]$ (pour simplifier on suppose que les intervalles ont des bornes finies, mais la preuve s'adapte sans difficulté au cas où les bornes peuvent être infinies). En posant $a = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $b = \min\{b_1, \ldots, b_n\}$, on montre facilement que $\cap_{i=1}^n I_i = [a, b]$. Or pour tous i et j, $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ et $I_i \cap I_j = [\max\{a_i, a_j\}, \min\{b_i, b_j\}]$. Donc $a_i \leqslant b_j$ pour tous i et j. Ce qui implique que $a \leqslant b$. Donc $[a, b]$ est non vide. Comme $\cap_{i=1}^n I_i = [a, b]$, cela répond à la question.
4. Le théorème n'est plus vrai, comme on peut le voir en prenant $I_i =]-\infty; -i]$ pour $i \geqslant 0$.