Correction des exos vus en TD - Feuille TD 3 - MAT201

Exercice 1 (*). Déterminer si les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont les expressions sont données ci-dessous sont linéaires.

Rappel d'amphi

Déf : Soient E, F deux espaces vectoriels réels. On dit qu'une application $\varphi : E \to F$ est linéaire si elle possède les propriétés suivantes :

i) $\forall\, u, v \in E$: $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;

ii) $\forall\, u \in E$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$.

Rem : Si φ est linéaire, alors $\varphi(0_E) = 0_F$ et $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ $\forall u \in E$.

a) $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Sol Cette application est linéaire car, si $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ alors

$$f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = (x+x'+y+y', x+x'-y-y') \stackrel{!}{=} (x+y, x-y) + (x'+y', x'-y') = f(x,y) + f(x',y')$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$f(\lambda(x,y)) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) = \lambda(x+y, x-y) = \lambda f(x,y).$$

b) $f(x, y) = (|x| + |y|, 2)$.

Sol f n'est pas linéaire car $f(0,0) = (0,2) \neq (0,0)$

c) $f(x, y) = (x, -y)$.

Sol f est linéaire. À la place de montrer que f se comporte bien par rapport aux sommes et aux multipl. par scalaire, on peut montrer que : si $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$f((x,y) + \lambda(x',y')) = f(x,y) + \lambda f(x',y').$$

Nous avons en effet que :

$f((x,y)+\lambda(x',y')) = f(x+\lambda x', y+\lambda y') = (x+\lambda x', -y-\lambda y') \stackrel{!}{=}$
$(x,-y)+\lambda(x',-y') = f(x,y)+\lambda f(x',y')$.

Donc f est linéaire.

d) $f(x,y) = (xy, y)$.

Sol f n'est pas linéaire (même si $f(0,0)=(0,0)$).
En effet on a que, par exemple :
$f(2,2) = (4,2) \neq 2 \cdot f(1,1) = 2\cdot(1,1) = (2,2)$

e) $f(x,y) = (x+y-1, x)$.

Sol f pas linéaire car $f(0,0) = (-1,0) \neq (0,0)$.

f) $f(x,y) = (\frac{1}{x^2+1}, \frac{1}{1+y^2})$.

Sol f pas linéaire car $f(0,0) = (1,1) \neq (0,0)$.

Exercice 2 (*)**.** Démontrer que les applications définies ci-dessous sont linéaires, puis déterminer leur noyau, leur image et donner une base de ces sous-espaces vectoriels.

Rappels d'amphi :

Déf : Soient E, F deux espaces vectoriels réels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On appelle :

- noyau de φ le sous-espace
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\}) = \{u \in E \,;\, \varphi(u) = 0\} \subset E.$$
- image de φ le sous-espace
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(E) = \{\varphi(u) \in F \,;\, u \in E\} \subset F.$$

On a aussi le résultat suivant qui lie $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{rang}(\varphi)$ et $\dim \ker(\varphi)$.

Proposition (Théorème du rang)
Soient E, F deux espaces vectoriels réels avec $\dim(E) < \infty$. Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, alors φ est de rang fini et

$$\operatorname{rang}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(E). \qquad (**)$$

Ce théorème utilise, entre autres, le résultat suivant :

Prop Si $\varphi : E \to F$ application linéaire entre espaces vect., $\dim(E) = n < \infty$ et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base de E $\Rightarrow$ $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille génératrice pour $\operatorname{Im}\varphi$ (mais pas nécessairement une base).

Un des corollaires du thm du rang est le résultat suivant :

Corollaire 1 : Soient E, F deux espaces vectoriels réels avec $\dim(E) = \dim(F) < \infty$. Si $\varphi : E \to F$ est linéaire, alors

$$\varphi \text{ injective} \iff \varphi \text{ surjective} \iff \varphi \text{ est un isomorphisme.}$$

Nous pouvons maintenant procéder à résoudre l'exercice.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x - y)$.

Sol. • f est linéaire car si $v=(x,y)$, $v'=(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a que

$$
\begin{aligned}
f(v+\lambda v') &= f(x+\lambda x', y+\lambda y') = \\
&= (2(x+\lambda x')+3(y+\lambda y'), 3(x+\lambda x')-(y+\lambda y')) = \\
&= (2x+3y, 3x-y)+\lambda(2x'+3y', 3x'-y') = \\
&= f(v)+\lambda f(v')
\end{aligned}
$$

• $$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(0,0)\} = \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}\right\} = \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} y=3x \\ 2x+9x=0 \end{cases}\right\} = \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right\} = \{(0,0)\}
\end{aligned}
$$

• $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ car, d'après le théorème du rang :

$\dim \operatorname{Im} f = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim \operatorname{Ker} f$

Comme $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow$
$\dim \operatorname{Im} f = 2$ et comme $\operatorname{Im} f$ SEV de $\mathbb{R}^2$ ceci implique $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

• Une base de $\operatorname{Im} f$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^2$ (eg. $\mathcal{B}=((1,0),(0,1))$) et $\operatorname{Ker} f$ est l'espace triviale.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 3y, -3x - 9y)$.

• f est linéaire (même vérifications que dans (a), laissé aux lecteurs et lectrices).

- $\ker f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+3y, -3x-9y) = (0,0)\} \overset{!}{=}$

$\overset{!}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} x+3y=0 \\ -3x-9y=0 \end{cases}\right\} \overset{!}{=}$

$\overset{!}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} x=-3y \\ x=-3y \end{cases}\right\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-3y\}$

$\overset{!}{=} \{(-3y,y) \mid y\in\mathbb{R}\} = \{y(-3,1) \mid y\in\mathbb{R}\} =$

$\overset{!}{=} \mathrm{Vect}(-3,1)$

Une base de $\ker f$ est $((-3,1))$ et $\dim \ker f = 1$

- On sait donc par le thm. du rang que $\mathrm{Im} f$ a dimension 1
On sait aussi que si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$
$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.

Nous avons que, par ex., si $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$
$\mathrm{Im} f \overset{!}{=} \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{Vect}((1,-3),(3,-9)) =$
$\overset{!}{=} \mathrm{Vect}(1,-3)$

Donc une base de $\mathrm{Im} f$ est $((1,-3))$ et $\dim \mathrm{Im} f = 1$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto 2x - y + 3z.$

- f est linéaire (même vérifications que dans (a), laissé aux lecteurs et lectrices).
- $\ker f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\} =$

$\overset{!}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+3z=0\} =$

$\overset{!}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y = 2x+3z\} =$

$= \{(x, 2x+3z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,2,0) + z(0,3,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \mathrm{Vect}\,((1,2,0), (0,3,1))$

La famille $\mathcal{B} = ((1,2,0), (0,3,1))$ est génératrice pour $\mathrm{Ker} f$ (car $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$) et elle est libre (deux vecteurs non colinéaires) et donc une base de $\mathrm{Ker} f$.

- Donc $\dim \mathrm{Ker} f = 2$ et, d'après le thm. du rang, $\dim \mathrm{Im} f = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}$ (car $\mathrm{Im} f$ SEV de $\mathbb{R}$ de dimension 1).

Une base de $\mathrm{Im} f$ est (1) (ou (α) avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x + y - z)$.

- f est linéaire (même vérifications que dans (a), laissé aux lecteurs et lectrices).
- $\mathrm{Ker} f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}\right\} =$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} z = 2x+y \\ 3x+2y=0 \end{cases}\right\} =$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} y = -\frac{3x}{2} \\ z = \frac{x}{2} \end{cases}\right\} =$

$= \{(x, -\frac{3x}{2}, \frac{x}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}\,(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

Donc une base de $\ker f$ est $((1,-3/2,1/2))$ et $\dim \ker f = 1$.

- $\mathrm{Im} f$ a donc dimension $3-1=2$ d'après le thm. du rang. et comme $\mathrm{Im} f$ SEV de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (x-y, y-x, 0)$.

- f est linéaire (même vérifications que dans (a), laissées aux lecteurs et lectrices).
- $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (0,0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \\ 0=0 \end{cases}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\}$
$= \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,1)$ et $\dim \ker f = 1$.
- D'après le thm. du rang : $\dim \mathrm{Im} f = 2-1 = 1$
D'autre part on sait que la famille $\mathcal{F} = (f(1,0), f(0,1))$ est génératrice pour $\mathrm{Im} f$.
Comme $\dim \mathrm{Im} f = 1$, un seul vecteur non-nul de $\mathcal{F}$ suffit pour former une base de $\mathrm{Im} f$ et, comme $f(1,0) = (1,-1,0)$ est non nul, une base de $\mathrm{Im} f$ est $((1,-1,0))$.

Exercice 3 (*). Soit $m, n \geq 1$ des entiers, et soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

a) (cours) Démontrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.

b) Supposons que $n = m$. Démontrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

c) Prouver que si f est injective, alors $n \leq m$.

d) Prouver que si f est surjective, alors $n \geq m$.

e) Les réciproques des deux implications ci-dessus sont-elles vraies?

Solution

(a) f injective, par définition, si et seulement si, pour tout $v, w \in \mathbb{R}^n$, $f(v) = f(w)$ implique $v = w$.

- Supposons f injective.
  Comme f est linéaire, si $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$ vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, alors $f(0_{\mathbb{R}^n}) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^m}$. Donc $0_{\mathbb{R}^n} \in \ker f$.
  Mais alors, si $v \in \ker f$, $f(v) = f(0_{\mathbb{R}^n}) \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^n}$ car f injective $\Rightarrow \ker f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
- Supposons $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Soient $v, w \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(v) = f(w)$.
  Comme f linéaire, cela revient à dire que
  $f(v) - f(w) = f(v - w) = 0_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow v - w \in \ker f \Rightarrow v - w = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow v = w \Rightarrow f$ injective.

(b) On utilisera ici le thm. du rang.

$$f \text{ injective} \underset{(a)}{\Leftrightarrow} \ker f = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Leftrightarrow \dim \ker f = 0 \overset{\text{Thm du rang}}{\Leftrightarrow} \dim \operatorname{Im} f = n$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

(c) Si f injective $\Rightarrow \dim \ker f = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n$
Mais comme $\operatorname{Im} f$ sous-espace de $\mathbb{R}^m$ on a $n \leq m$.

(d) Si f est surjective $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = m \Rightarrow \dim \ker f = n - m$
et comme $\dim \ker f \geq 0$, on a $n - m \geq 0 \Rightarrow n \geq m$.

(e) Non, aucune est vraie.

① Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$$(x, y) \mapsto (0, x, x)$$

On a bien que $n = 2 \leq m = 3$ et f est linéaire mais pas injective car
$\ker f = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(0, 1)$

② Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \mapsto (x+y,0)$

On a que f est linéaire, $n=3 \geq m=2$ mais f n'est pas surjective car le vecteur $(0,1) \notin \mathrm{Im} f$.

Exercice 4 (*). Soient E et F des espaces vectoriels. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $u_1, \ldots, u_n \in F$. On note $\varphi : E \to F$ l'unique application linéaire telle que $\varphi(e_i) = u_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

a) Déterminer l'image par φ d'un vecteur v de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

b) Démontrer que φ est injective si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

c) Démontrer que φ est surjective si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice.

Sol (a) Si v a coordonnées $(x_1, .., x_n)$ dans la base $(e_1, .., e_n)$ alors $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Donc, comme f est linéaire:
$f(v) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) \stackrel{!}{=} x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$.

(b) ($\Rightarrow$) Supposons φ injective. Soient $\lambda_1, .., \lambda_n \in K$ des scalaires tels que $\lambda_1u_1 + \cdots + \lambda_nu_n = 0_F$.
D'après (a) nous avons que:
$\lambda_1u_1 + \cdots + \lambda_nu_n = f(\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_ne_n)$
Donc $f(\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_ne_n) = 0_F \Rightarrow$
$\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_ne_n \in \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0_E\}$ car φ injective.
Donc $\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_ne_n = 0_E$, mais $(e_1, .., e_n)$ base donc famille libre $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que la famille $(u_1, .., u_n)$ soit libre.
Soit $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. On veut montrer que $v = 0_E$.

Comme $(e_1, .., e_n)$ base de E, $\exists \lambda_1, .., \lambda_n \in K$ tels que $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Donc

$0_F = f(v) \underset{a}{=} \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

Mais, comme la famille $(u_1, .., u_n)$ est libre, ceci implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et donc $v = 0_E$.

(c) Remarquons que, en générale, nous avons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(u_1, .., u_n)$

En effet, si $w \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists v \in E$ tq. $w = f(v)$

En écrivant v dans la base $(e_1, .., e_n)$ on a :

$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ pour des scalaires $x_i \in K$.

Donc, d'après (a) : $w = f(v) = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$.

On a montré que $\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{Vect}(u_1, .., u_n)$

D'autre part $u_i = f(e_i) \in \mathrm{Im} f$ $\forall i = 1, .., n$.

Donc $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_n) \subseteq \mathrm{Im} f$ car $\mathrm{Im} f$ sous espace et donc stable par combinaisons linéaires.

Maintenant, on remarque que f surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} f = F \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(u_1, .., u_n) = F \Leftrightarrow (u_1, .., u_n)$ famille génératrice pour F.

Exercice 6 (*). Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que la dérivation de polynômes $\varphi\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer l'image de φ.

c) Déterminer le noyau de φ.

d) L'endomorphisme φ est-il injectif, surjectif, bijectif?

e) Déduire du point précédent que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.

Sol (a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons que
$\varphi(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)' = P' + \lambda Q' = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$
Donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $Q(X) = q_0 + q_1 X + \dots + q_n X^n \in \mathbb{R}[X]$.
Alors si $P(X) = q_0 X + \frac{q_1}{2} X^2 + \dots + \frac{q_n}{n+1} \cdot X^{n+1} \in \mathbb{R}[X]$
on a que
$Q(X) = \varphi(P(X)) \in \operatorname{Im}\varphi$.
Donc $\mathbb{R}[X] \subseteq \operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}[X]$.
Donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}[X]$.

(c) $\ker\varphi = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' = 0\} =$
$= \{\text{polynômes constants}\}$

(d) L'endomorphisme φ n'est pas injectif (car d'après (c) $\ker\varphi \neq \{0\}$), il est surjectif (car d'après (b) $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}[X]$), il n'est pas bijectif (car pas injectif).

(e) Si $\dim \mathbb{R}[X] = n < \infty$, par le thm. du rang on aurait que $\dim\ker\varphi = n - \underbrace{\dim \operatorname{Im}\varphi}_{\text{"}n\text{" car } \varphi \text{ surjective}} = 0$
Mais $\dim\ker\varphi \neq 0$.
Donc $\dim \mathbb{R}[X] = +\infty$.

Exercice 9 (*). Considérons les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y=0\}; \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x=y\};$$
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}; \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x=y=0\}.$$

a) Justifier rapidement pourquoi ces parties sont des sous-espaces vectoriels, puis en donner la dimension et en trouver une base.

b) Démontrer que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$ et que $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.

c) Donner explicitement l'image d'un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ par la projection sur H parallèlement à G.

d) Donner explicitement l'image d'un vecteur v de $\mathbb{R}^2$ par la symétrie par rapport à F parallèlement à E.

Sol (a) • E est un sous-espace vectoriel car il s'agit d'une droite qui passe par l'origine. En effet
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\} = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,-1)$
Donc une base de E est $\mathcal{B}_E = ((1,-1))$, $\dim E = 1$.

• F est aussi une droite passant par l'origine. On a
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,1)$
Donc une base de F est $\mathcal{B}_E = ((1,1))$, $\dim F = 1$

• G est un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine. On a:
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x-y\} = \{(x,y,-x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} =$
$= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \mid x,y \in \mathbb{R}\} =$
$= \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$
Donc une base de G est $\mathcal{B}_G = ((1,0,-1),(0,1,-1))$
et $\dim G = 2$

• H est une droite passant par l'origine. En effet
$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} =$
$= \mathrm{Vect}((0,0,1))$.
Donc une base de H est $\mathcal{B}_H = ((0,0,1))$ est $\dim H = 1$

b) **Rappel d'amphi**

Déf (Somme directe) Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est la somme directe de F_1 et F_2, et on écrit $E = F_1 \oplus F_2$, si et seulement si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Rém Si $\dim E$ est finie, alors $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Pr ($\Rightarrow$) Vu en amphi

($\Leftarrow$) Soit $\mathcal{B}_{F_1} = (u_1, \dots, u_m)$ base de F_1,

$\mathcal{B}_{F_2} = (v_1, \dots, v_r)$ base de F_2.

Nous avons $\dim F_1 + \dim F_2 = m + r = \dim E = n$.

Montrons que $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r)$ est une base de E.

Il suffit de montrer que la famille est libre.

Supposons $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$ tels que

$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r = 0_E$

Alors $\underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m}_{\in F_1} = \underbrace{-\beta_1 v_1 - \dots - \beta_r v_r}_{\in F_2} \in F_1 \cap F_2$

Donc, comme $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, on a que

$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = -\beta_1 v_1 - \dots - \beta_r v_r = 0_E$

Mais les familles $(u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_r)$ sont libres $\Rightarrow$

$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ et $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$

Donc $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r)$ base de $E \Rightarrow$ pour chaque vecteur $v \in E$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$ tq.

$v = \underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m}_{\in F_1} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r}_{\in F_2} \Rightarrow v \in F_1 + F_2$

Donc on a montré que $E = F_1 + F_2$ et comme $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ par hypothèse, on a $E = F_1 \oplus F_2$. $\square$

- D'après le rappel, pour montrer que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$, comme dans (a) on a montré que $\dim E = \dim F = 1$ et donc $\dim E + \dim F = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, il nous suffit de montrer que $E \cap F = \{(0,0)\}$.

  Or, $(x,y) \in E \cap F \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x=y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

  On a donc $E \cap F = \{(0,0)\}$.

- Comme dans (a) on a montré que $\dim G = 2$ et $\dim H = 1$, donc $\dim G + \dim H = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il nous suffit de montrer que $G \cap H = \{(0,0,0)\}$.

  Or $(x,y,z) \in G \cap H \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=-x-y \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=z=0$

  Donc $G \cap H = \{(0,0,0)\}$

  et $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.

(c) **Rappel d'amphi:**

Def Soit E un espace vectoriel; F_1 et F_2 deux sous-espaces de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$.

La projection sur F_1 parallèlement à F_2 est l'application linéaire $p : E \to E$ telle que si $v \in E$ et $v = u + w$ avec $u \in F_1$, $w \in F_2$, alors $p(v) = u$.

La symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est l'appl. linéaire $s : E \to E$ telle que si $v \in E$ et $v = u + w$ avec $u \in F_1$, $w \in F_2$, alors $s(v) = u - v$

• Rappelons que, d'après (a), on a :

$G = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$ et $H = \mathrm{Vect}((0,0,1))$

Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Écrivons v comme somme d'un vecteur de G et un de H :

on cherche pour cela $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq.

$$(x,y,z) = \lambda_1 (1,0,-1) + \lambda_2 (0,1,-1) + \lambda_3 (0,0,1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = \lambda_2 \\ z = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y \\ \lambda_3 = x+y+z \end{cases}$$

Donc si $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$v = \underbrace{x(1,0,-1) + y(0,1,-1)}_{\substack{\| \\ u \in G}} + \underbrace{(x+y+z)(0,0,1)}_{\substack{\| \\ w \in H}} = u + w \in G + H$$

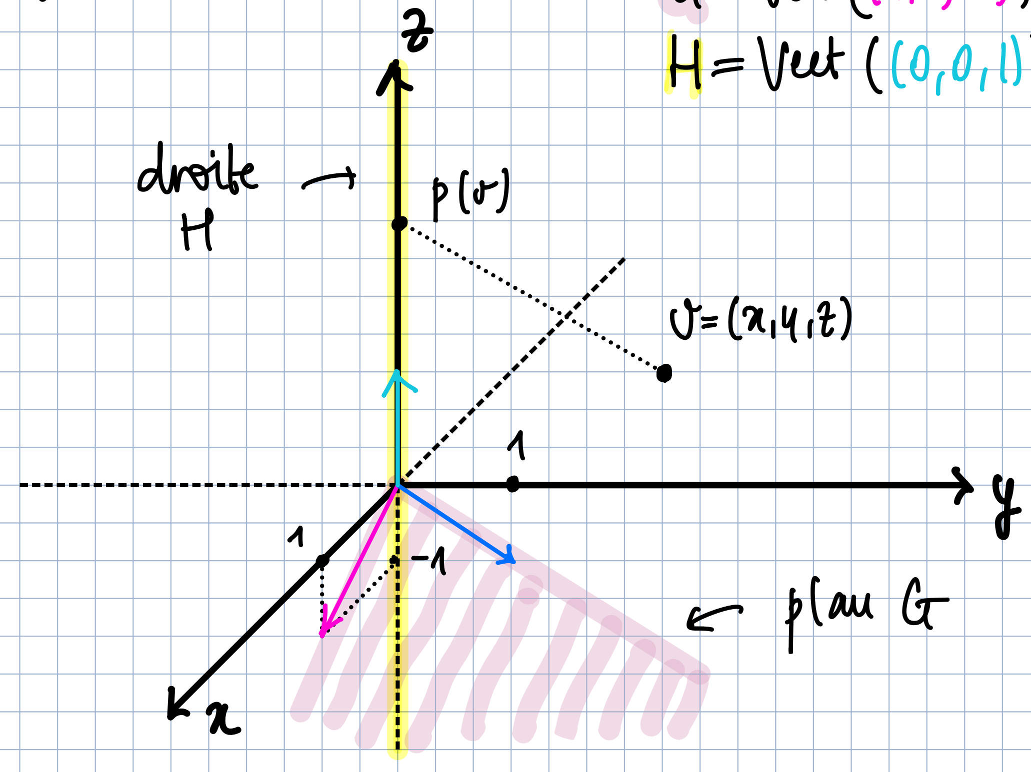
Donc la projection de $v = (x,y,z)$ sur H parallèlement à G est

$$p(v) = p(u+w) = w = (x+y+z)(0,0,1) = (0,0,x+y+z)$$

Géométriquement :

$G = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$

$H = \mathrm{Vect}((0,0,1))$



(d) Rappelons que d'après (a) on a :

$E = \mathrm{Vect}(1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}(1,1)$

Soit $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Écrivons $v = u + w$ avec $u \in E$, $w \in F$.

On doit trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y) = \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(1,1) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = x - \lambda_2 \\ \lambda_2 - x + \lambda_2 = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 = (x+y)/2 \\ \lambda_1 = (x-y)/2 \end{cases}$$

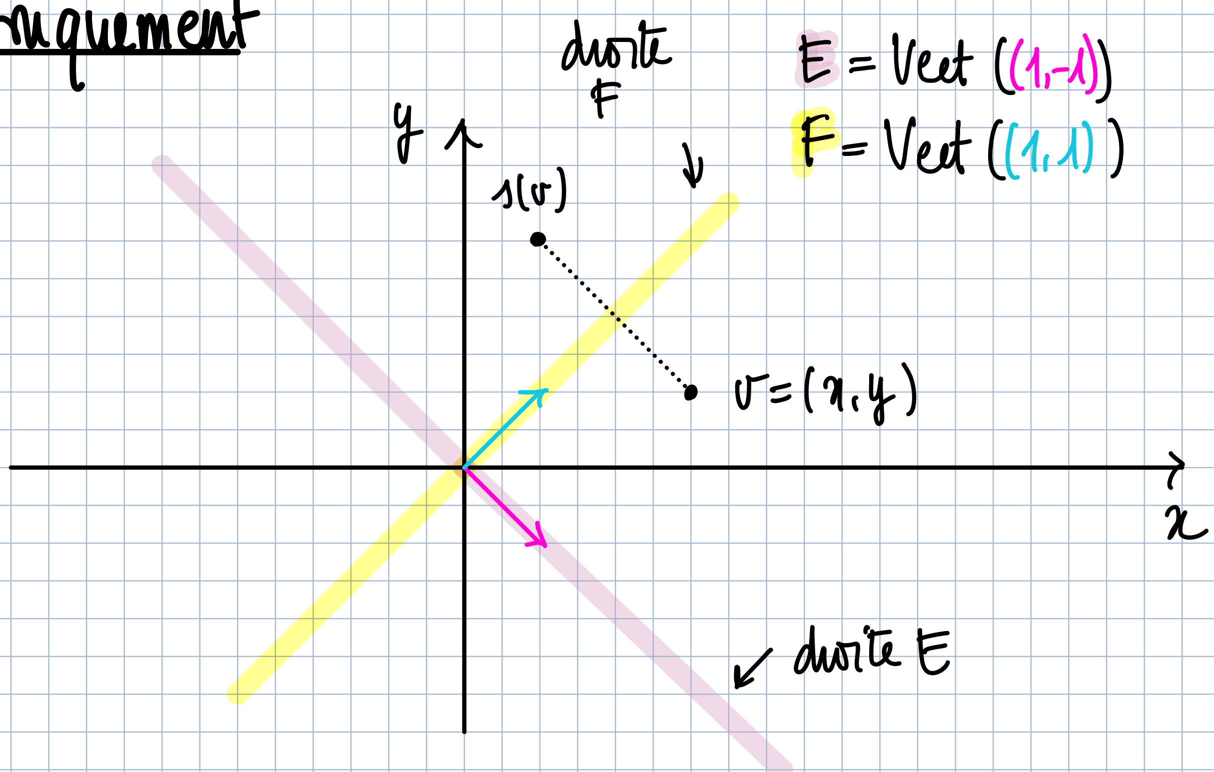
Donc $(x,y) = \underbrace{\frac{(x-y)}{2}(1,-1)}_{\substack{\shortparallel \\ u \in E}} + \underbrace{\frac{(x+y)}{2}\cdot(1,1)}_{\substack{\shortparallel \\ w \in F}} = u + w \in E + F$

Donc le symétrique de $v = (x,y)$ par rapport à F

et parallèlement à E est :

$$s(v) = s(u+w) = w - u = \frac{(x+y)}{2}(1,1) - \frac{(x-y)}{2}(1,-1) = (y,x)$$

<u>Géométriquement</u>



EXO10 Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$, $F=\{P\in E \mid \int_0^1 P(t)\,dt=0\}\subset E$ et $G=\mathrm{Vect}(1+X)$.

a) Démontrons que $E=F\oplus G$.

Sol Calculons la dimension de F et G et une base de ces espaces.

- Pour G c'est facile : la famille $(1+X)$ est libre (un seul polynôme non-nul) et génératrice pour G, donc une base pour G & $\dim G=1$.
- Traitons maintenant l'espace F.

On a que $p(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ est dans $F \iff$
$\int_0^1 p(t)\,dt=0$ c.à.d. $\int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt=\left[a\frac{t^3}{3}+b\frac{t^2}{2}+ct\right]_0^1=0$
c.à.d. $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$.

Donc $F=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R},\ c=-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\}=$
$=\{ax^2+bx-\frac{a}{3}-\frac{b}{2} \mid a,b\in\mathbb{R}\}=$
$=\{a(x^2-\frac{1}{3})+b(x-\frac{1}{2}) \mid a,b\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left((x^2-\frac{1}{3}),(x-\frac{1}{2})\right)$

La famille $\left((x^2-\frac{1}{3}),(x-\frac{1}{2})\right)$ est donc génératrice pour F et elle est libre (les deux polyn. sont non nuls et pas un multiple de l'autre, car ils ont degrés différents).
Donc $\dim(F)=2$.

- On a donc $\dim F+\dim G=2+1=3=\dim E$.
- Donc, pour montrer que $E=F\oplus G$, il suffit de montrer que $F\cap G=\{0_E\}$.

Soit $p(x)\in F\cap G$. Comme $p(x)\in G$, $p(x)=\alpha\cdot(x+1)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Comme $p(x)\in F$ aussi on doit avoir

$\int_0^1 \alpha(t+1)\,dt=0$ c.à.d. $\left[\alpha\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\right]_0^1=\alpha\left(\frac{1}{2}+1\right)=\alpha\cdot\frac{3}{2}=0$

On déduit donc $\alpha = 0$ et $p(X) = 0$ polynôme nul.

(b) Soit $P(X) = aX^2 + bX + C \in E$

Écrivons $P(X) = u(X) + v(X)$ avec $u(X) \in F$, $v(X) \in G$.

On cherche donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq.

$$aX^2 + bX + C = \lambda_1\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + \lambda_2\left(X - \frac{1}{2}\right) + \lambda_3(X+1)$$

Ceci correspond au système :

$$\begin{cases} a = \lambda_1 \\ b = \lambda_2 + \lambda_3 \\ c = -\frac{\lambda_1}{3} - \frac{\lambda_2}{2} + \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = b - \lambda_3 \\ \lambda_3 = c + \frac{\lambda_1}{3} + \frac{\lambda_2}{2} = c + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - \frac{\lambda_3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_3 = \frac{2}{3}\left(c + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right) \\ \lambda_2 = \frac{2}{3}\left(b - c - \frac{a}{3}\right) \end{cases}$$

Donc on obtient

$$ax^2 + bx + c = \overbrace{a\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(b - c - \frac{a}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}^{u(x) \in F} + \overbrace{\frac{2}{3}\left(c + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)(x+1)}^{v(x) \in G}$$

Donc la projection de $p(X) = aX^2 + bX + C$ sur F parallèlement à G est $\pi(p(x)) = u(X) = a\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(b - c - \frac{a}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

(c) le symétrique de $p(X) = aX^2 + bX + C$ par rapport à F parallèlement à G est

$$s(p(x)) = u(X) - v(X) =$$
$$= a\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(b - c - \frac{a}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\left(c + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)(x+1)$$

$\square$