Equations différentielles

Fiche exercices

Exercices essentiels

Exercice 1. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, déterminer une solution particulière, et en déduire l'ensemble des solutions.*

a) $y'(x) - 4\,y(x) = 3$ *pour* $x \in \mathbb{R}$

b) $y'(x) + y(x) = 2\,\mathrm{e}^{x}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$

c) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 6

Réponse :
a) L'équation est $y'(x) - 4\,y(x) = 3$: $a(x) = -4$ et $f(x) = 3$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - 4\,y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -4$ donc une primitive est $A(x) = -4\,x$.
   La solution générale de l'équation homogène est $\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{4\,x},\ C \in \mathbb{R}}$.

2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - 4\,y_0(x) = 3$.

   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 3\,\mathrm{e}^{-4\,x}$

   $$\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = -\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,x}\,\mathrm{e}^{4\,x} = -\frac{3}{4}}$$

3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{4x} - \frac{3}{4},\ C \in \mathbb{R}}$

b) L'équation est $y'(x) + y(x) = 2\,\mathrm{e}^x$: $a(x) = 1$ et $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x$.

1. L'équation homogène est $y'(x) + y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = 1$ donc une primitive est $A(x) = x$.
   La solution générale de l'équation homogène est $\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}}$.

2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) + y_0(x) = 2\,\mathrm{e}^x$.

   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x = 2\,\mathrm{e}^{2\,x}$
   $$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{2\,x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x}$$

3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x,\ C \in \mathbb{R}}$

c) L'équation est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x$: $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $f(x) = x$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 0$.
   Ici $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc une primitive est $A(x) = -\ln|x| = -\ln(x)$ car on est sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   La solution générale de l'équation homogène est
   $$\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{\ln(x)} = C\,x,\ C \in \mathbb{R}}$$

2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{y_0(x)}{x} = x$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $x\mathrm{e}^{A(x)} = \dfrac{x}{x} = 1$
   $$\Rightarrow g(x) = x \Rightarrow \boxed{y_0(x) = x\,\mathrm{e}^{\ln(x)} = x\,x = x^2}$$

3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\,x + x^2,\ C \in \mathbb{R}}$

Exercice 2. *Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :*

a) $y'(x) - 2\,y(x) = 4$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $y(0) = 0$

b) $y'(x) = \dfrac{y(x)+1}{x}$ *pour* $x > 0$ *avec* $y(1) = 0$

c) $y'(x) - 2\,y(x) = 2\,x$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $y(0) = \dfrac{1}{4}$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 7

Réponse :

a) L'équation est $y'(x) - 2\,y(x) = 4$: $a(x) = -2$ et $f(x) = 4$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - 2\,y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -2$ donc une primitive est $A(x) = -2\,x$.
   La solution générale de l'équation homogène est $\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{2\,x}}$, $C \in \mathbb{R}$

2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - 2\,y_0(x) = 1$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\mathrm{e}^{A(x)} = 4\,\mathrm{e}^{-2\,x}$
   $$\Rightarrow g(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2\,x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2\,x}\,\mathrm{e}^{2\,x} = -2}$$

3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{2\,x} - 2,\ C \in \mathbb{R}}$.

4. $y(0) = 0 \iff C - 2 = 0 \iff C = 2$.
   La solution est donc $\boxed{y(x) = 2\,\mathrm{e}^{2\,x} - 2}$

b) L'équation est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{1}{x}$: $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 0$.
   Ici $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc une primitive est $A(x) = -\ln|x| = -\ln(x)$ car $x \in\,]0, +\infty[$.
   La solution générale de l'équation homogène est
   $$\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{\ln(x)} = C\,x,\ C \in \mathbb{R}}$$

2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{y_0(x)}{x} = \dfrac{1}{x}$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}$
   $$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = -\tfrac{1}{x}\,x = -1}$$

3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\,x - 1,\ C \in \mathbb{R}}$.

4. $y(1) = 0 \iff C - 1 = 0 \iff C = 1$. La solution est donc $\boxed{y(x) = x - 1}$

c) L'équation est $y'(x) - 2\,y(x) = 2\,x$: $a(x) = -2$ et $f(x) = 2\,x$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - 2\,y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -2$ donc une primitive est $A(x) = -2x$.
   La solution générale de l'équation homogène est

$$\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{2x},\ C \in \mathbb{R}}$$

2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - 2\,y_0(x) = 2\,x$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}$

$$\Rightarrow g(x) = \int_c^x 2\,t\,\mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t$$

   Posons $u(t) = t$, $v'(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow u'(t) = 1$, $v(t) = -\mathrm{e}^{-2t}$:

$$g(x) = \left[-t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_c^x + \int_c^x \mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t = \left[-t\,\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_c^x = -x\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{2x+1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = -\frac{2x+1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{2x} = -\frac{2x+1}{2},\ C \in \mathbb{R}}$$

3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{2x+1}{2}}$.

4. $y(0) = \dfrac{1}{4} \iff C - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \iff C = \dfrac{3}{4}$. La solution est donc $\boxed{y(x) = \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{2x+1}{2}}$

Exercice 3. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions :*

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = 0$

b) $y''(x) + 4\,y'(x) + 4\,y(x) = 0$

c) $y''(x) + 4\,y'(x) + 13\,y(x) = 0$

Questions facultatives supplémentaires : exercice 10

Réponse :
a) L'équation caractéristique est $r^2 - 5\,r + 6 = 0$:

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2 \text{ et } r_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{3\,x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

b) L'équation caractéristique est $r^2 + 4\,r + 4 = 0$:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = \frac{-4}{2} = -2$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^{-2\,x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

c) L'équation caractéristique est $r^2 + 4\,r + 13 = 0$:

$$\Delta = -36 < 0 \Rightarrow r = \frac{-4 \pm i\sqrt{36}}{2} = -2 \pm 3\,i \qquad (\alpha = -2 \text{ et } \omega = 3)$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-2\,x}\Big(C_1\,\cos(3\,x) + C_2\,\sin(3\,x)\Big),\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

Exercice 4. *Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes :*

a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 4\,y(x) = 0$ *avec* $y(0) = 5$ *et* $y'(0) = 8$

b) $y''(x) - 4\,y(x) = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 6$

c) $y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$

Réponse :

a) L'équation caractéristique est $r^2 - 5\,r + 4 = 0$:

$$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 4$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{4\,x} \Rightarrow y'(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + 4\,C_2\,\mathrm{e}^{4\,x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcccc} y(0) & = & C_1 + C_2 & = & 5 \\ y'(0) & = & C_1 + 4\,C_2 & = & 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & 4 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = 4\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{4\,x}}$

b) L'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0$:

$$\Delta = 16 > 0 \Rightarrow r_1 = -2 \text{ et } r_2 = 2$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1\,\exp(-2\,x) + C_2\,\exp(2\,x) \Rightarrow y'(x) = -2\,C_1\,\exp(-2\,x) + 2\,C_2\,\exp(2\,x)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcccc} y(0) & = & C_1 + C_2 & = & 1 \\ y'(0) & = & -2\,C_1 + 2\,C_2 & = & 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & -1 \\ C_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = -\exp(-2\,x) + 2\,\exp(2\,x)}$

c) L'équation caractéristique est $r^2 + 2\,r + 1 = 0$:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = -1$$

La solution générale est

$$y(x) = (C_1\,x + C_2)\,\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow y'(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} - (C_1\,x + C_2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcccc} y(0) & = & C_2 & = & 1 \\ y'(0) & = & C_1 - C_2 & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = (x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}}$

Exercice 5. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $y''(x) - 4\,y'(x) + 5\,y(x) = 6\,\mathrm{e}^x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,\mathrm{e}^x$

b) $y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = -2\,x^2 + 1$ *avec* $y(0) = 3$ *et* $y'(0) = 0$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,x^2 + B\,x + C$

c) $y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 4\,x\,\mathrm{e}^x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 2$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = (A\,x + B)\,\mathrm{e}^x$

d) $y''(x) + y(x) = \cos(x)$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,x\,\sin(x)$
Questions facultatives supplémentaires : exercice 11

Réponse :
a)

1. L'équation homogène est $y''(x) - 4\,y'(x) + 5\,y(x) = 0$
   l'équation caractéristique est $r^2 - 4\,r + 5 = 0$:

   $$\Delta = 4^2 - 4\times 5 = -4 < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + i\,\omega \text{ et } r_2 = \alpha - i\,\omega \text{ avec } \alpha = -(-4)/2 = 2 \text{ et } \omega = \sqrt{4}/2 = 1$$

   La solution générale de l'équation homogène est

   $$\boxed{y_H(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\Big(C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)\Big),\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

2. $y_0(x) = A\,\mathrm{e}^x \Rightarrow y_0'(x) = A\,\mathrm{e}^x \Rightarrow y_0''(x) = A\,\mathrm{e}^x$

   $$\Rightarrow y_0''(x) - 4\,y_0'(x) + 5\,y_0(x) = A\,\mathrm{e}^x - 4\,A\,\mathrm{e}^x + 5\,A\,\mathrm{e}^x = 2\,A\,\mathrm{e}^x = 6\,\mathrm{e}^x$$

   $$\Rightarrow A = 3 \Rightarrow \boxed{y_0(x) = 3\,\mathrm{e}^x}$$

3. La solution générale de l'équation est

   $$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\Big(C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)\Big) + 3\,\mathrm{e}^x,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

4. $y'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2\,x}\Big(C_1\,\cos(x) + C_2\,\sin(x)\Big) + \mathrm{e}^{2\,x}\Big(-C_1\,\sin(x) + C_2\,\cos(x)\Big) + 3\,\mathrm{e}^x$
   $y(0) = C_1 + 3 = 1$ et $y'(0) = 2\,C_1 + C_2 + 3 = 0$
   $\Rightarrow C_1 = -2$ et $C_2 = 1$: $\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\Big(-2\,\cos(x) + \sin(x)\Big) + 3\,\mathrm{e}^x}$

b)

1. L'équation homogène est $y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = 0$
   l'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$:
   $$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = -2 \text{ et } r_2 = 1$$
   La solution générale de l'équation homogène est $\boxed{y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

2. $y_0(x) = A\,x^2 + B\,x + C \Rightarrow y_0'(x) = 2\,A\,x + B \Rightarrow y_0''(x) = 2\,A$
   $$\Rightarrow y_0''(x) + y_0'(x) - 2\,y_0(x) = -2\,A\,x^2 + (2\,A - 2\,B)\,x + 2\,A + B - 2\,C = -2\,x^2 + 1$$
   $$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2\,A &=& -2 \\ 2\,A - 2\,B &=& 0 \\ 2\,A + B - 2\,C &=& 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A &=& 1 \\ B &=& 1 \\ C &=& 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = x^2 + x + 1}$$

3. La solution générale de l'équation est
   $$\boxed{y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + x^2 + x + 1,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

4. $y'(x) = -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + 2\,x + 1$
   $y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 3$ et $y'(0) = -2\,C_1 + C_2 + 1 = 0$
   $\Rightarrow C_1 = 1$ et $C_2 = 1$: $\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2\,x} + x^2 + x + 1}$

c)

1. L'équation homogène est $y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 0$
   l'équation caractéristique est $r^2 + 2\,r + 1 = 0$:
   $$\Delta = 0 \Rightarrow r = -1$$
   La solution générale de l'équation homogène est $\boxed{y_H(x) = (C_1\,x + C_2)\,\mathrm{e}^{-x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

2. $y_0(x) = (A\,x + B)\,\mathrm{e}^{x}$
   $$\Rightarrow y_0'(x) = A\,\mathrm{e}^{x} + (A\,x + B)\,\mathrm{e}^{x} = (A\,x + A + B)\,\mathrm{e}^{x}$$
   $$\Rightarrow y_0''(x) = A\,\mathrm{e}^{x} + (A\,x + A + B)\,\mathrm{e}^{x} = (A\,x + 2\,A + B)\,\mathrm{e}^{x}$$
   $$\Rightarrow y_0''(x) + 2\,y_0'(x) + y_0(x) = \Big((A\,x + 2\,A + B) \;+\; 2(A\,x + A + B) \;+\; (A\,x + B)\Big)\,\mathrm{e}^{x}$$
   $$= (4\,A\,x + 4\,A + 4\,B)\,\mathrm{e}^{x} = 4\,x\,\mathrm{e}^{x}$$
   $$\iff 4\,A\,x + 4\,A + 4\,B = 4\,x$$
   En identifiant les coefficients des polynomes on a $4\,A = 4$ et $4\,A + 4\,B = 0$ donc $A = 1$ et $B = -1$.
   Une solution particulière est donc :
   $$\boxed{y_0(x) = (x - 1)\,\mathrm{e}^{x}}$$

3. La solution générale de l'équation est
   $$\boxed{y(x) = (C_1\,x + C_2)\,\mathrm{e}^{-x} + (x - 1)\,\mathrm{e}^{x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

4. $y'(x) = -(C_1\,x + C_2)\,\mathrm{e}^{-x} + C_1\,\mathrm{e}^{-x} + (x - 1)\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} = (-C_1\,x + C_1 - C_2)\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{x}$
   $\Rightarrow y(0) = C_2 - 1 = 1 \iff C_2 = 2$ et $y'(0) = C_1 - C_2 = 2 \iff C_1 = 4$
   $\boxed{y(x) = (4\,x + 2)\,\mathrm{e}^{-x} + (x - 1)\,\mathrm{e}^{x}}$

d)

1. L'équation homogène est $y''(x) + y(x) = 0$
   l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$:
   $$\Delta = -4 < 0 \Rightarrow r = \pm i \qquad (\alpha = 0 \text{ et } \omega = 1)$$
   La solution générale de l'équation homogène est $\boxed{y_H(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x),\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

2. $y_0(x) = A\, x\, \sin(x)$
   $$\Rightarrow y_0'(x) = A\, \sin(x) + A\, x\, \cos(x) \Rightarrow y_0''(x) = 2\, A\, \cos(x) - A\, x\, \sin(x)$$
   $$\Rightarrow y_0''(x) + y_0(x) = \cos(x) \iff 2\, A\, \cos(x) = \cos(x) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$
   $$\boxed{y_0(x) = \frac{x\, \sin(x)}{2}}$$

3. La solution générale de l'équation est
   $$\boxed{y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \frac{x\, \sin(x)}{2},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

4. $y'(x) = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + \dfrac{\sin(x)}{2} + \dfrac{x\, \cos(x)}{2}$
   $\Rightarrow y(0) = C_1 = 1$ et $y'(0) = C_2 = 1$: $\boxed{y(x) = \cos(x) + \sin(x) + \dfrac{x\, \sin(x)}{2}}$

Exercices supplémentaires

Exercice 6. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, déterminer une solution particulière, et en déduire l'ensemble des solutions.*

a) $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = \sin(x)$ *pour* $x \in \,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$

b) $(x^2+1)\, y'(x) + x\, y(x) = 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}$

Réponse :
a) L'équation est $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = \sin(x)$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 0$: $a(x) = -\tan(x)$ et $f(x) = \sin(x)$.
   Ici $a(x) = -\tan(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ donc une primitive est $A(x) = \ln|\cos(x)| = \ln(\cos(x))$ car on est sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et donc $\cos(x) > 0$.
   La solution générale de l'équation homogène est
   $$y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = C\mathrm{e}^{-\ln(\cos(x))} = \frac{C}{\mathrm{e}^{\ln(\cos(x))}} = \boxed{\frac{C}{\cos(x)}}$$

2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \tan(x) y_0(x) = \sin(x)$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $\sin(x)\mathrm{e}^{A(x)}$:
   $$\sin(x)\mathrm{e}^{A(x)} = \sin(x)\cos(x) = u'(x)\, u(x) \text{ avec } u(x) = \sin(x)$$
   $$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) \Rightarrow \boxed{y_0(x) = \frac{g(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{2\,\cos(x)}}$$

3. La solution générale est $\boxed{y(x) = \dfrac{C}{\cos(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{2\,\cos(x)} = \dfrac{C_1 + \sin^2(x)}{2\,\cos(x)},\ C_1 \in \mathbb{R}}$

Remarque : d'autres solutions particulières sont possibles.
Par exemple, on obtient une autre solution particulière $y_0(x)$ en prenant :

$$g'(x) = \sin(x)\cos(x) = -u'(x)\,u(x) \text{ avec } u(x) = \cos(x) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)} \text{ et } \boxed{y(x) = \frac{C_2}{2\,\cos(x)} - \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{C_2 - \cos^2(x)}{2\,\cos(x)},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

et en posant $C_2 = C_1 + 1$, on retrouve la première expression pour $y(x)$:

$$\frac{C_2 - \cos^2(x)}{2\,\cos(x)} = \frac{C_1 + 1 - \cos^2(x)}{2\,\cos(x)} = \frac{C_1 + \cos^2(x) + \sin^2(x) - \cos^2(x)}{2\,\cos(x)} = \frac{C_1 + \sin^2(x)}{2\,\cos(x)}$$

b) L'équation est $y'(x) + \dfrac{x}{x^2+1}y(x) = 0$ qui est une équation homogène.
Ici $a(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ donc une primitive est $A(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
La solution générale de l'équation (homogène) est donc

$$y(x) = y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = \boxed{C\,(x^2+1)^{-1/2} = C\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ C \in \mathbb{R}}$$

Exercice 7. *Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :*

a) $x^2\,y'(x) - (2x-1)\,y(x) = x^2$ *pour* $x > 0$ *avec* $y(1) = 1$

b) $(x+1)\,y'(x) - x\,y(x) + 1 = 0$ *pour* $x > -1$ *avec* $y(0) = 2$

Réponse :

a) L'équation est $y'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y(x) = 1$: $a(x) = -\dfrac{2x-1}{x^2}$ et $f(x) = 1$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -\dfrac{2x-1}{x^2} = -\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ donc une primitive est $A(x) = -2\ln|x| - \frac{1}{x} = -2\ln(x) - \frac{1}{x}$ car $x > 0$.
   La solution générale de l'équation homogène est
   $$\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{2\ln(x)+1/x} = C\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x},\ C \in \mathbb{R}}$$
2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y_0(x) = 1$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$.
   $g'(x)$ est de la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = -1/x$:
   $$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{-1/x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = \mathrm{e}^{-1/x}\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x} = x^2}$$
3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x} + x^2,\ C \in \mathbb{R}}$.
4. $y(1) = 1 \iff C\,e + 1 = 1 \iff C = 0$. La solution est donc $\boxed{y(x) = x^2}$

b) L'équation est $y'(x) - \dfrac{x}{x+1}y(x) = -\dfrac{1}{x+1}$: $a(x) = -\dfrac{x}{x+1}$ et $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$.

1. L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{x}{x+1}y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} - 1$ donc une primitive est $A(x) = \ln|x+1| - x = \ln(x+1) - x$.
   La solution générale de l'équation homogène est
   $$\boxed{y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = C\mathrm{e}^{-\ln(x+1)+x} = C\tfrac{\mathrm{e}^x}{x+1},\ C \in \mathbb{R}}$$
2. Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{x}{x+1}y_0(x) = -\dfrac{1}{x+1}$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$
   avec $g(x)$ primitive de $-\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^{A(x)} = -\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x+1} = -\mathrm{e}^{-x}$.
   $$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{x+1} = \frac{1}{x+1}}$$
3. La solution générale est $\boxed{y(x) = C\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{C\mathrm{e}^x + 1}{x+1},\ C \in \mathbb{R}}$.
4. $y(0) = 2 \iff C + 1 = 2 \iff C = 1$. La solution est donc $\boxed{y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{x+1}}$

Exercice 8. *Soit λ un réel non nul, on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle*

$$y'(x) - \lambda\, y(x) = f(x)$$

avec $f(x)$ une fonction particulière.
Déterminer l'expression de la solution générale lorsque :

a) $f(x) = c_0$ *avec la constante* $c_0 \in \mathbb{R}^*$

b) $f(x) = c_1\, x + c_0$ *avec les constantes* $c_1 \in \mathbb{R}^*$ *et* $c_0 \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\omega x}$ *avec les constantes* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\omega \in \mathbb{R}^*$

Réponse :
(1) Solutions de l'équation homogène associée
On a $a(x) = -\lambda \Rightarrow A(x) = -\lambda x \Rightarrow \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{\lambda x}$.
La solution de l'équation homogène $y'(x) - \lambda y(x) = 0$ est $\boxed{y_H(x) = C\, \mathrm{e}^{\lambda x},\ C \in \mathbb{R}}$

(2) Calcul d'une solution particulière
$y_0(x) = g(x)\, \mathrm{e}^{-A(x)} = g(x)\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\, \mathrm{e}^{A(x)} = f(x)\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$

a) $f(x) = c_0$: $g(x)$ primitive de $c_0\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$

$$g(x) = -\frac{c_0}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = -\frac{c_0}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{\lambda x} = -\frac{c_0}{\lambda}}$$

b) $f(x) = c_1\, x + c_0$: $g(x)$ primitive de $(c_1\, x + c_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$
On intégre par parties :

$$u(x) = c_1\, x + c_0 \text{ et } v'(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \Rightarrow u'(x) = c_1 (\neq 0) \text{ et } v(x) = -\frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda}\,(c_1\, x + c_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{c_1}{\lambda} \int \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\lambda}\,(c_1\, x + c_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{c_1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = -\frac{1}{\lambda}\,(c_1\, x + c_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{c_1}{\lambda^2}\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= -\left(\frac{c_1}{\lambda}\, x + \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2}\right)\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ \Rightarrow y_0(x) &= -\left(\frac{c_1}{\lambda}\, x + \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2}\right)\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{\lambda x} = \boxed{-\left(\frac{c_1}{\lambda}\, x + \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2}\right)} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\omega x}$: $g(x)$ primitive de $\alpha\, \mathrm{e}^{(\omega - \lambda)\, x}$
— si $\omega = \lambda$, $g(x)$ primitive de α :

$$g(x) = \alpha\, x \Rightarrow \boxed{y_0(x) = \alpha\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x}}$$

— si $\omega \neq \lambda$,

$$g(x) = \frac{\alpha}{\omega - \lambda}\, \mathrm{e}^{(\omega - \lambda)\, x} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = \frac{\alpha}{\omega - \lambda}\, \mathrm{e}^{(\omega - \lambda)\, x} \mathrm{e}^{\lambda\, x} = \frac{\alpha}{\omega - \lambda}\, \mathrm{e}^{\omega\, x}}$$

Récapitulatif :

a) $\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{c_0}{\lambda},\ C \in \mathbb{R}}$

b) $\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x} - \left(\frac{c_1}{\lambda}\,x + \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2}\right),\ C \in \mathbb{R}}$

c) Deux cas à distinguer :

– si $\omega = \lambda$: $\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \alpha\,x\,\mathrm{e}^{\lambda x},\ C \in \mathbb{R}}$

– si $\omega \neq \lambda$: $\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \frac{\alpha}{\omega - \lambda}\,\mathrm{e}^{\omega\,x},\ C \in \mathbb{R}}$

Exercice 9. *On considère l'équation différentielle* $|x|\, y'(x) + (x-1)\, y(x) = x^3$.

a) *Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour* $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$.

b) *Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour* $x \in \,]-\infty\,;0\,[$.

Réponse :

a) pour $x \in]0,+\infty[$, l'équation est

$$x\, y'(x) + (x-1)\, y(x) = x^3 \iff y'(x) + \frac{x-1}{x}\, y(x) = x^2$$

1. l'équation homogène est $y'(x) + \dfrac{x-1}{x}\, y(x) = 0$

$$a(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = x - \ln|x| = x - \ln(x)$$

   Les solutions de l'équation homogène sont
   $\boxed{y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{\ln(x)-x} = C\,x\,\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}}$

2. une solution particulière est $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$
   avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = x^2\,\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = x\,\mathrm{e}^x$
   Avec une intégration par parties, on obtient $g(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$
   et $\boxed{y_0(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x\, x\,\mathrm{e}^{-x} = x\,(x-1)}$

3. les solutions sont $\boxed{y(x) = C\,x\,\mathrm{e}^{-x} + x\,(x-1),\ C \in \mathbb{R}}$

b) pour $x \in]-\infty, 0[$, l'équation est

$$-x\, y'(x) + (x-1)\, y(x) = x^3 \iff y'(x) + \frac{1-x}{x}\, y(x) = -x^2$$

1. l'équation homogène est $y'(x) + \dfrac{1-x}{x}\, y(x) = 0$

$$a(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow A(x) = \ln|x| - x = \ln(-x) - x$$

   Les solutions de l'équation homogène sont

$$\boxed{y_H(x) = C\, \mathrm{e}^{-A(x)} = C\, \mathrm{e}^{x - \ln(-x)} = C\, \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{e}^{-\ln(-x)} = C\, \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\ln(-x)}} = C\, \frac{\mathrm{e}^x}{-x} = -C\, \frac{\mathrm{e}^x}{x},\ C \in \mathbb{R}}$$

2. une solution particulière est $y_0(x) = g(x)\, \mathrm{e}^{-A(x)}$
   avec $g(x)$ primitive de $f(x)\, \mathrm{e}^{A(x)} = -x^2\, (-x\, \mathrm{e}^{-x}) = x^3\, \mathrm{e}^{-x}$
   Avec trois intégrations par parties, on obtient $g(x) = -(x^3 + 3\, x^2 + 6\, x + 6)\, \mathrm{e}^{-x}$
   et $\boxed{y_0(x) = -(x^3 + 3\, x^2 + 6\, x + 6)\, \mathrm{e}^{-x} \left(-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \dfrac{x^3 + 3\, x^2 + 6\, x + 6}{x}}$

3. les solutions sont $\boxed{y(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6 - C\mathrm{e}^x}{x},\ C \in \mathbb{R}}$

Exercice 10. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions :*

a) $y''(x) - y(x) = 0$

b) $y''(x) - y'(x) = 0$

Réponse :
a) L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$:

$$\Delta = 4 > 0 \Rightarrow r_1 = -1 \text{ et } r_2 = 1$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

b) L'équation caractéristique est $r^2 - r = 0$:

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 0 \text{ et } r_2 = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{r_1 x} = \mathrm{e}^{0} = 1$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

Exercice 11. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $y''(x) + 4\,y(x) = 0$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $y(\pi/4) = 2$

b) $y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = 9\,\mathrm{e}^x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$
Indication *: chercher la solution particulière sous la forme* $y_0(x) = A\,x\,\mathrm{e}^x$

c) $y''(x) + y'(x) = x$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 2$
Indication *: revenir à une équation différentielle d'ordre 1 en posant* $z(x) = y'(x)$

Réponse :
a) L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$:

$$\Delta = -16 < 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \omega = 2$$

La solution générale est

$$y(x) = \mathrm{e}^{0\,x}\Big(C_1\,\cos(2\,x) + C_2\,\sin(2\,x)\Big) = C_1\,\cos(2\,x) + C_2\,\sin(2\,x)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rclcrcl} y(0) & = & C_1\,\cos(0) + C_1\,\sin(0) & = & C_1 & = & 0 \\ y(\pi/4) & = & C_1\,\cos(\pi/2) + C_1\,\sin(\pi/2) & = & C_2 & = & 2 \end{array}\right\}$$

La solution est $\boxed{y(x) = 2\,\sin(2\,x)}$

b)

1. L'équation homogène est $y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = 0$
   l'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$:

   $$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = -2 \text{ et } r_2 = 1$$

   La solution générale de l'équation homogène est $\boxed{y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C_2\,\mathrm{e}^x,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

2. $y_0(x) = A\,x\,\exp(x)$

   $$\Rightarrow y_0'(x) = A\,\mathrm{e}^x + A\,x\,\mathrm{e}^x$$

   $$\Rightarrow y_0''(x) = A\,\mathrm{e}^x + A\,\mathrm{e}^x + A\,x\,\mathrm{e}^x = 2\,A\,\mathrm{e}^x + A\,x\,\mathrm{e}^x$$

   $$\Rightarrow y_0''(x) + y_0'(x) - 2\,y_0(x) = 3\,A\,\mathrm{e}^x \text{ et } y_0''(x) + y_0'(x) - 2\,y_0(x) = 9\,\mathrm{e}^x \Rightarrow A = 3$$

   On a donc $\boxed{y_0(x) = 3\,x\,\mathrm{e}^x}$

3. La solution générale de l'équation est donc

   $$\boxed{y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C_2\,\mathrm{e}^x + 3\,x\,\mathrm{e}^x,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

4. On détermine C_1 et C_2 avec les conditions initiales :

   $$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

   $$y'(x) = -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C_2\,\mathrm{e}^x + 3\,x\,\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^x \Rightarrow y'(0) = -2\,C_1 + C_2 + 3 = 1$$

   $$\left\{\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 1 \\ -2\,C_1 + C_2 & = & -2 \end{array}\right\} \iff C_1 = 1 \text{ et } C_2 = 0\ :\ \boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-2\,x} + 3\,x\,\mathrm{e}^x}$$

`c)` On peut se ramener à une équation différentielle du 1er ordre en posant $z(x) = y'(x)$ et donc $z'(x) = y''(x)$:

$$y''(x) + y'(x) = x \iff z'(x) + z(x) = x$$

On résout $z'(x) + z(x) = x$:

1. solution de l'équation homogène $z'(x) + z(x) = 0$:

$$a(x) = 1 \Rightarrow A(x) = x \text{ et } \boxed{z_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C_1\,\mathrm{e}^{-x},\ C_1 \in \mathbb{R}}$$

2. solution particulière $z_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $g'(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{+x} = x\,\mathrm{e}^{x}$.
   En intégrant par parties, on trouve $g(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$ d'où $\boxed{z_0(x) = x - 1}$.

3. Les solutions de $z'(x) + z(x) = x$ sont $\boxed{z(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + x - 1,\ C_1 \in \mathbb{R}}$
   et donc les solutions $y(x)$ sont les primitives de $z(x)$:

$$\boxed{y(x) = -C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + C_2,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}}$$

4. On détermine les constantes C_1 et C_2 pour que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$:

$$y(0) = -C_1 + C_2 = 0 \text{ et } y'(0) = z(0) = C_1 - 1 = 2 \Rightarrow C_1 = C_2 = 3$$

   La solution est $\boxed{y(x) = -3\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 3}$

Exercice 12. *Soit l'équation différentielle* (E) *:*

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)$$

avec a, b *constantes réelles, et* f *fonction définie et continue sur un intervalle* I.
Quelles que soient les constantes a *et* b, *les solutions de l'équation homogène associée* (H) *:*

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0$$

sont toujours de la forme $y_H(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ *avec* C_1, C_2 *constantes réelles.*
Soient g_1 *et* g_2 *deux fonctions dérivables sur* I *et vérifiant :*

$$\text{pour tout } x \in I \ , \ \left\{ \begin{array}{rcl} g_1'(x)\,y_1(x) \ + \ g_2'(x)\,y_2(x) & = & 0 \\ g_1'(x)\,y_1'(x) \ + \ g_2'(x)\,y_2'(x) & = & f(x) \end{array} \right.$$

a) *Montrer que la fonction* y_0 *définie par* $y_0(x) = g_1(x)\,y_1(x) + g_2(x)\,y_2(x)$ *est une solution particulière de* (E).

b) *Application : déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :*

$$y''(x) - y(x) = 2\,\mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Réponse :
a) Démontrons que pour tout $x \in I$, $y_0''(x) + a\,y_0'(x) + b\,y_0(x) = f(x)$.
Dans un premier temps, on peut remarquer que les deux fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène associée (H) car :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) & \text{avec } C_1 = 1 \text{ et } C_2 = 0 \\ y_2(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) & \text{avec } C_1 = 0 \text{ et } C_2 = 1 \end{array} \right.$$

Ensuite, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & y_0(x) & = & g_1(x)\,y_1(x) + g_2(x)\,y_2(x) \\ \Rightarrow & y_0'(x) & = & g_1'(x)\,y_1(x) + g_1(x)\,y_1'(x) \ + \ g_2'(x)\,y_2(x) + g_2(x)\,y_2'(x) \\ & & = & \underbrace{g_1'(x)\,y_1(x) + g_2'(x)\,y_2(x)}_{=0} \ + g_1(x)\,y_1'(x) + g_2(x)\,y_2'(x) \\ & & = & g_1(x)\,y_1'(x) + g_2(x)\,y_2'(x) \\ \Rightarrow & y_0''(x) & = & g_1'(x)\,y_1'(x) + g_1(x)\,y_1''(x) \ + \ g_2'(x)\,y_2'(x) + g_2(x)\,y_2''(x) \\ & & = & \underbrace{g_1'(x)\,y_1'(x) + g_2'(x)\,y_2'(x)}_{=f(x)} \ + g_1(x)\,y_1''(x) + g_2(x)\,y_2''(x) \\ & & = & g_1(x)\,y_1''(x) + g_2(x)\,y_2''(x) \ + \ f(x) \end{array}$$

Puis :

$$
\begin{array}{ll}
 & y_0''(x) + a\,y_0'(x) + b\,y_0(x) \\
= & g_1(x)\,y_1''(x) + g_2(x)\,y_2''(x) \ + \ f(x) \\
+ & a\,g_1(x)\,y_1'(x) + a\,g_2(x)\,y_2'(x) \\
+ & b\,g_1(x)\,y_1(x) + b\,g_2(x)\,y_2(x) \\
= & g_1(x)\,y_1''(x) + a\,g_1(x)\,y_1'(x) + \ b\,g_1(x)\,y_1(x) \\
+ & g_2(x)\,y_2''(x) + a\,g_2(x)\,y_2'(x) + \ b\,g_2(x)\,y_2(x) \\
+ & f(x) \\
= & g_1(x)\,\underbrace{\Big(y_1''(x) + a\,y_1'(x) + \ b\,y_1(x)\Big)}_{=0 \text{ car } y_1 \text{ solution de } (H)} + g_2(x)\,\underbrace{\Big(y_2''(x) + a\,y_2'(x) + \ b\,y_2(x)\Big)}_{=0 \text{ car } y_2 \text{ solution de } (H)} + f(x) \\
= & f(x)
\end{array}
$$

Donc y_0 est bien une solution particulière de (E).

b) Ici on a $a = 0$, $b = -1$ et $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x$.

1. On résout l'équation homogène associée $y''(x) - y(x) = 0$.
   L'équation caractèristique est $r^2 - 1 = 0$ avec deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$.
   Donc les solutions de l'équation homogène associée sont :
   $$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^x$$
2. On a donc $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $y_2(x) = \mathrm{e}^x$.
   On résout le système dont les "inconnues" sont $g_1'(x)$ et $g_2'(x)$:
   $$\left\{\begin{array}{lcrcr} g_1'(x)\,y_1(x) & + & g_2'(x)\,y_2(x) & = & 0 \\ g_1'(x)\,y_1'(x) & + & g_2'(x)\,y_2'(x) & = & f(x) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} g_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} & + & g_2'(x)\,\mathrm{e}^x & = & 0 & (\mathbf{1}) \\ -g_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} & + & g_2'(x)\,\mathrm{e}^x & = & 2\,\mathrm{e}^x & (\mathbf{2}) \end{array}\right\}$$
   $$\left\{\begin{array}{lcrcrcrcr} (\mathbf{1}) - (\mathbf{2}) & : & 2\,g_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} & = & -2\,\mathrm{e}^x & \Rightarrow & g_1'(x) & = & -\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ (\mathbf{1}) + (\mathbf{2}) & : & 2\,g_2'(x)\,\mathrm{e}^{x} & = & 2\,\mathrm{e}^x & \Rightarrow & g_2'(x) & = & 1 \end{array}\right\}$$
   En intégrant, on obtient $g_1(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\,x}$ et $g_2(x) = x$.
   Donc une solution particulière de (E) est :
   $$y_0(x) = g_1(x)\,y_1(x) + g_2(x)\,y_2(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^x = \boxed{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x}$$
3. Les solutions de (E) sont $y(x) = y_H(x) + y_0(x)$:
   $$y(x) = \boxed{C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x} = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{\left(C_2 - \frac{1}{2}\right)}_{\text{constante } C_3}\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = \boxed{C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x}$$
   avec C_1, C_2 et C_3 des constantes réelles.