EX4.1 (Solution dans le workbook) Fiche 4

EX4.3 + EX4.7 + EX 3.7

EX4.3.

1) A : ordinateur infecté malgré l'antivirus.

$\underline{P}(A) = 10\%$.

X : nombre d'ordi infectés parmi $n=400$ équipés de l'antivirus.

X est le nbre de succès parmi $n=400$ expériences indépendantes avec une proba de succès $p=10\%$

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n=400$ et $p=0{,}1$.

On sait que par le TCL $\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{N}(np, n(1-p))$

En effet $X = \sum X_i = n\bar{X}_n$ et le TCL indique que

$$\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - p)/\sqrt{p(1-p)} \simeq \mathcal{N}(0,1) \quad \text{puisque } E(X_i)=p \text{ et } V(X_i)=p(1-p)$$

donc $\bar{X}_n - p \simeq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,U$ où $U \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow \bar{X}_n \simeq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,U + p$ et $n\bar{X}_n \simeq \sqrt{np(1-p)}\,U + np$

or pour $U \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\sqrt{np(1-p)}\,U + np \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$

Donc la loi de $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ peut être approchée par une $\mathcal{B}(np, np(1-p))$.

2) $\underline{P}(X \leq 20) \simeq \underline{P}(V \leq 20)$ avec $V \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$

$$= \underline{P}\Big(\underbrace{\frac{V-np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{\mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{20-np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) = \phi\left(\frac{20-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

A.N. : $n=400$, $p=0{,}1$: $\underline{P}(X\leq 20) = \phi\left(-\frac{20}{\sqrt{36}}\right) = \phi\left(-\frac{20}{6}\right)$

$$= 1 - \phi\left(\frac{20}{6}\right) = 1 - 99{,}96\%$$

$\underline{P}(X \leq 20) = 0{,}04\ \%$

3) D'après le cours l'IF pour $\underline{p}$ de niveau de fluctuation $1-\alpha$ est donné par

$$IF(p,\alpha) = \left[p \pm \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\, u_{1-\alpha/2}\right]$$

pour $n=400$ et $\alpha=0{,}01$, $p=0{,}1$ $u_{1-\alpha/2} = u_{99{,}5\%} = \phi^{-1}(0.995)$

$= 2.5758$

$IF(0.1, 1\%) = [6{,}14\%, 13{,}86\%]$

4) $\bar{x}_n = \frac{48}{400} = 12\% \in IF(0.1, 1\%)$ est conforme au niveau 99% c'est donc dans la norme

EX4.1 (Solution dans le workbook) Fiche 4

EX4.3 + EX4.7 + EX 3.7

EX4.3.

1) A: ordinateur infecté malgré l'antivirus.

$P(A) = 10\%$.

X: nombre d'ordi infectés parmi $n=400$ équipés de l'antivirus.

X est le nbre de succès parmi $n=400$ expériences indépendantes avec une proba de succès $p = 10\%$

$X \sim B(n,p)$ avec $n = 400$ et $p = 0,1$.

On sait que par le TCL $B(n,p) \simeq \mathcal{N}(np, n(1-p))$

En effet $X = \sum X_i = n\bar{X}_n$ et le TCL indique que

$$\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - p)/\sqrt{p(1-p)} \simeq \mathcal{N}(0,1) \quad \text{puisque } E(X_i) = p \text{ et } V(X_i) = p(1-p)$$

donc $\bar{X}_n - p \simeq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, U$ où $U \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow \bar{X}_n \simeq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, U + p$ et $n\bar{X}_n \simeq \sqrt{np(1-p)}\, U + np$

or pour $U \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\sqrt{np(1-p)}\, U + np \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$

Donc la loi de $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ peut être approchée par une $B(np, np(1-p))$.

2) $P(X \leq 20) \simeq P(V \leq 20)$ avec $V \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{V - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{\mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{20 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) = \phi\left(\frac{20 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

A.N: $n = 400$, $p = 0,1$: $P(X \leq 20) = \phi\left(-\frac{20}{\sqrt{36}}\right) = \phi\left(-\frac{20}{6}\right)$

$= 1 - \phi\left(\frac{20}{6}\right) = 1 - 99,96\%$

$P(X \leq 20) = 0,04\%$

3) D'après le cours l'IF pour p de niveau de fluctuation $1-\alpha$ est donné par

$$IF(p, \alpha) = \left[p \pm \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\, u_{1-\alpha/2}\right]$$

pour $n=400$ et $\alpha = 0,01$, $u_{1-\alpha/2} = u_{99,5\%} = \phi^{-1}(0.995)$
$p = 0,1$ $= 2.5758$

$IF(0.1, 1\%) = [6,14\%, 13,86\%]$

4) $\bar{x}_n = \frac{48}{400} = 12\% \in IF(0.1, 1\%)$ est conforme au niveau 99% c'est donc dans la norme

Ex 4.7

$X \sim \mathcal{T}_9$ de FdR F_9

a) $P(X < 1.833) = F_9(1.833)$ et on lit page 3 les quantiles de la $\mathcal{T}_9$ en ligne 9.

On cherche donc sur cette ligne les deux valeurs qui encadrent 1.833

On a $F_9(1.8331) = 0.95$

et $F_9(1.5737) = 0.925$ $\Rightarrow F(1.833) \in [0.925, 0.95]$

et comme $1.8331 \simeq 1.833$ on peut conclure que $P(X < 1.833) \simeq 95\%$

$P(X < -2.821) = F_9(-2.821) = 1 - F_9(2.821)$

puisque la densité d'une Student $\mathcal{T}_n$ est symétrique on sait que $F_n(x) + F_n(-x) = 1$

D'après la table des quantiles de la Student (page 3) on lit (ligne 9)

$$F_9(2.821) \simeq F_9(2.8214) = 0.99$$

d'où $P(X < -2.821) = 1 - 0.99 = 1\%$.

b) $P(X > x) = 0.9 \Rightarrow P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 0.1$

soit x tq $F_9(x) = 0.1$ et $x = F_9^{-1}(0.1)$

et on sait que par symétrie de la densité de la $\mathcal{T}_n$

$$F_n^{-1}(1-p) = -F_n^{-1}(p)$$

d'où $x = F_9^{-1}(0,1) = -F_9^{-1}(0.9) = -1.383$

$$P(|X| < x) = 0.95 \Leftrightarrow P(-x < X < x) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow F_9(x) - F_9(-x) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow F_9(x) - (1 - F_9(x)) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow 2F_9(x) = 1 + 0.95 \Leftrightarrow F_9(x) = \frac{1+0.95}{2}$$

soit $x = F_9^{-1}(0.975) = 2.2622$

2). $X \sim \chi^2_7$ et FdR notée F_7

a). $P(X < 12.02) = F_7(12.02)$

La table page 4 des quantiles d'un χ^2_ν (notée $\chi^2(\nu)$) donne (p, z) tels que

$$F_7(z) = P(X < z) = p = F_7(z) \iff z = F^{-1}(p)$$

On cherche donc sur la ligne $\nu = 7$ la valeur la plus proche de 12.02 et on lit p en tête de colonne.

ici $F_7(12.02) = 0.9$. donc $P(X < 12.02) = 0.9$

. $P(X \in [2.833, 6.346]) = F_7(6.346) - F_7(2.833)$

$$\simeq F_7(6.35) - F_7(2.83) = 0.5 - 0.1 = 0.4$$

b) $P(X > x) = 0.9 \iff F_7(x) = 1 - 0.9 = 0.1 \iff x = F_7^{-1}(0.1)$

ligne 7 / colonne $p = 0.1$: $x = 2.83$.

~

EX3.7 X complexité d'un mot de passe

2) On suppose que $X \sim \mathcal{N}(23, 6^2)$

a) $P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - P\left(\frac{X-23}{6} \leq \frac{40-23}{6}\right)$

$$= 1 - \phi\left(\frac{7}{6}\right) = 1 - \phi(1.167) \simeq 1 - \phi(1.17) = 1 - 0.879$$

$$= 12,10\%$$

b) si $X < c_{min}$ alors mot de passe refusé

on veut que $P(X < c_{min}) \leq 0,5\%$.

or $P(X < c_{min}) = P\left(\frac{X-23}{6} < \frac{c_{min} - 23}{6}\right) = \phi\left(\frac{c_{min}-23}{6}\right)$

On cherche finalement c_{min} tq $\phi\left(\frac{c_{min}-23}{6}\right) \leq 0.5\%$

soit $\frac{c_{min} - 23}{6} \leq \phi^{-1}(0,5\%)$

et $c_{min} \leq 6\phi^{-1}(0,5\%) + 23$

Rappelons que $-\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(1-p)$ donc $\phi^{-1}(0,5\%) = -\phi^{-1}(99,5\%)$
$= -2.5758$

et $c_{min} \leq 7.54 \iff$ Proba de refus $\leq 0.5\%$

c) on cherche h tq $P(X \in [23-h, 23+h]) = 95\% = 1 - \alpha$

$\iff P(23 - h \leq X \leq 23 + h) = 1 - \alpha$

$\iff P\left(\frac{X-23}{6} \in \left[-\frac{h}{6}, \frac{h}{6}\right]\right) = \phi\left(\frac{h}{6}\right) - \phi\left(-\frac{h}{6}\right) = 1 - \alpha$

h est tel que $\phi\left(\frac{h}{6}\right) - \left(1 - \phi\left(\frac{h}{6}\right)\right) = 1 - \alpha$ avec $\alpha = 5\%$

$\iff 2\phi\left(\frac{h}{6}\right) = 2 - \alpha$

$\iff \phi\left(\frac{h}{6}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff h = 6 \cdot \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

et pour $\alpha = 5\%$ $\quad h = 6 \cdot \phi^{-1}(0.975) = 6.$

$h = 6.1{,}96 \approx 11.76.$

donc $P(X \in [11{,}24\ ,\ 34.76]) = 95\%.$

l'intervalle $[11.24, 34.76]$ ~~est~~ de niveau de fluctuation 95% pour X