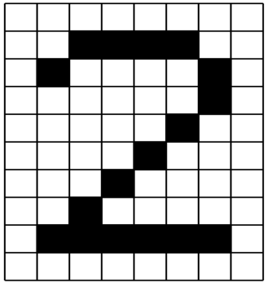
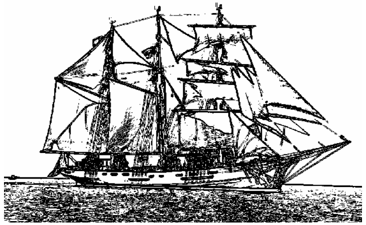
MAP201 : Découverte des Mathématiques Appliquées

Images

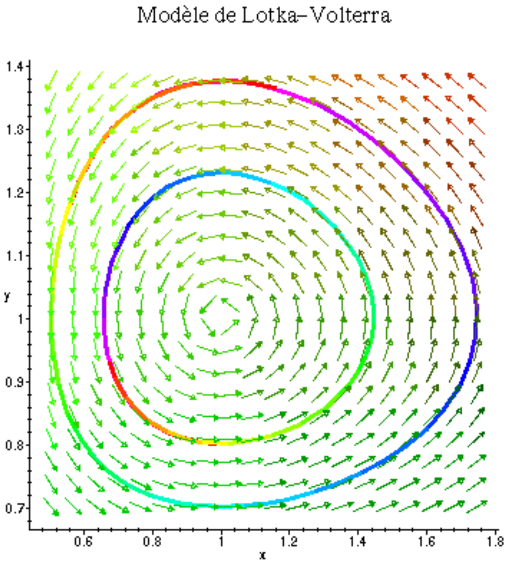
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1





Jérome Lesaint

Equa Diff



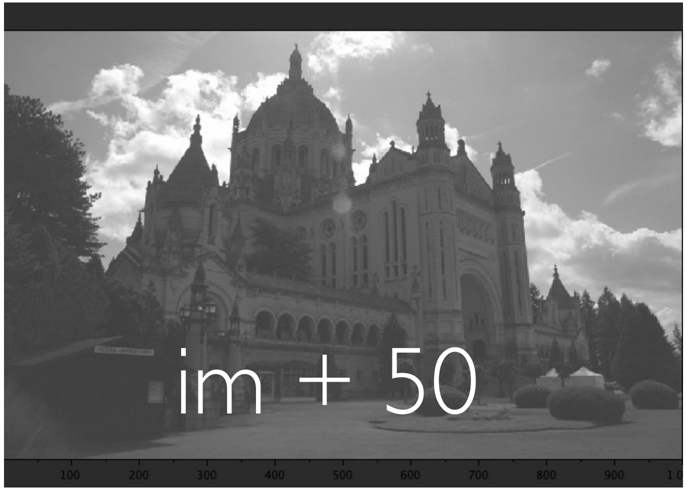
Mickael Nahon

2ÈME COURS : HISTOGRAMMES, CORRECTION DU CONTRASTE

Plan de la séance

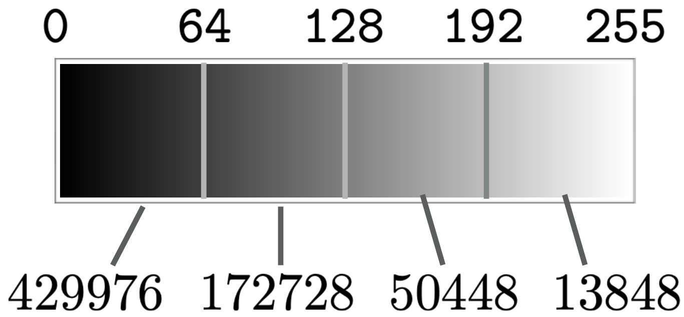
- 1. L'histogramme, un outil de diagnostic
  - Définition
  - Exposition
  - Contraste
- 2. Correction du contraste
  - Fonctions affines
  - Familles de fonctions
  - Egalisation d'histogramme
  - Spécification d'histogramme

Images de la fin de la dernière séance



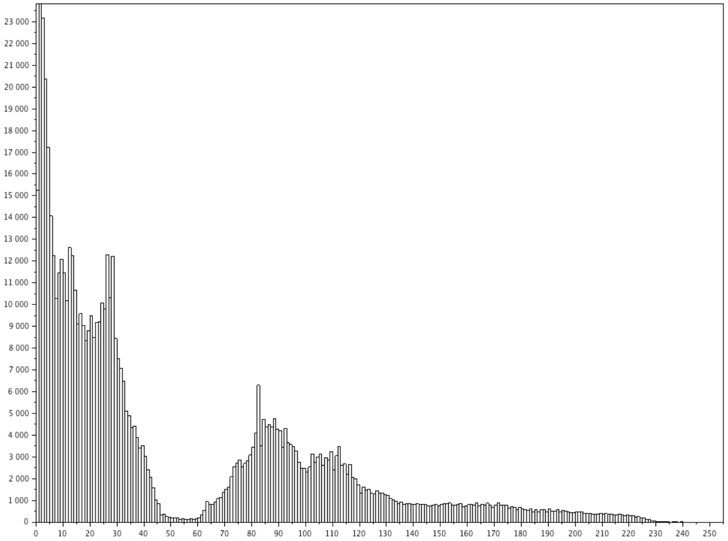
Un outil de diagnostic : l'histogramme

- Idée: compter les pixels suivant leur valeur



Total = 667000 = 1000x667

Un outil de diagnostic : l’histogramme



0 (sombre) 255 (clair)

Histogramme : représente la répartition d'une variable en fonction de sa valeur

Histogramme et Histogramme cumulé

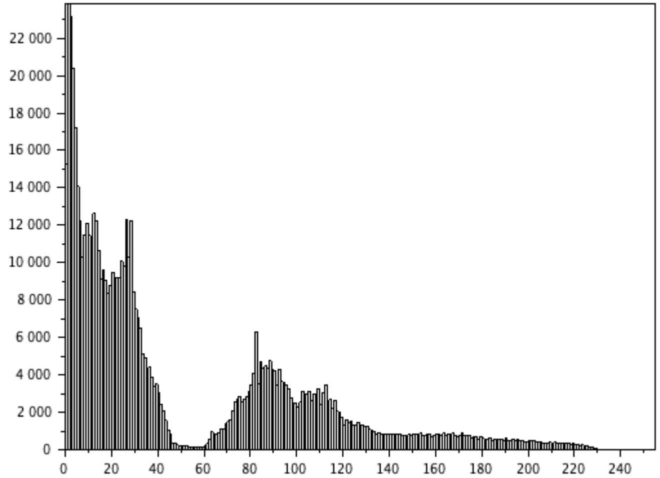
- Histogramme $\mathtt{h(p)}$ = nombre de pixels ayant la valeur $\mathtt{p}$
- Histogramme cumulé

$$\boxed{\begin{aligned}\mathtt{H(p)} &= \text{nombre de pixels ayant une valeur } \leq p \\ &= \mathtt{h(0)} + \ldots + \mathtt{h(p)} = \sum_{\mathtt{j=0}}^{\mathtt{p}} \mathtt{h(j)} \\ &\Rightarrow \mathtt{H(255)} = \text{nombre total de pixels}\end{aligned}}$$

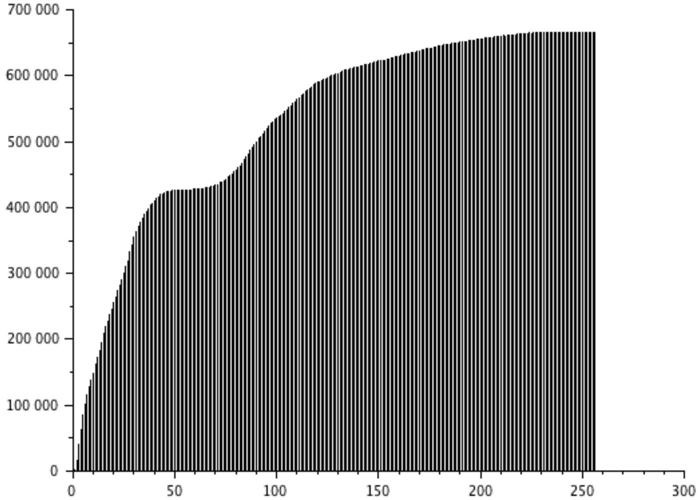
- Définition récursive $\mathtt{H(0)} = \mathtt{h(0)}$ puis $\mathtt{H(p+1)} = \mathtt{H(p)} + \mathtt{h(p+1)}$
- Fonction Croissante $\mathtt{H(p)} \geq \mathtt{H(p-1)}$

Exemple

Histogramme



Histogramme cumulé



Exemple

Histogramme

Histogramme cumulé

Interprétation statistique

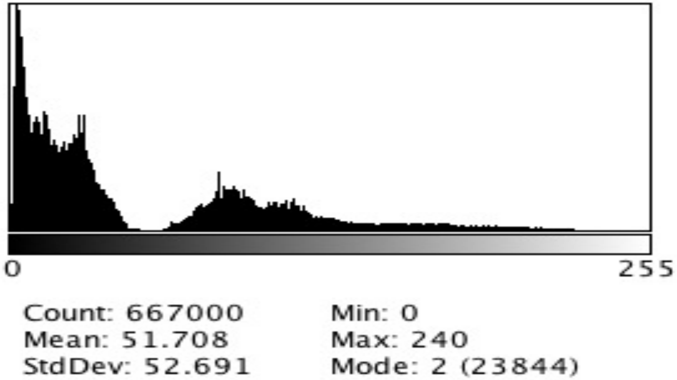
- h(p)/(HxL)
  = “probabilité qu’un pixel ait la valeur p”
  = “fréquence de la valeur p”

- H(p)/(HxL) = “fréquence cumulée jusqu’à p”

Sur et sous-exposition

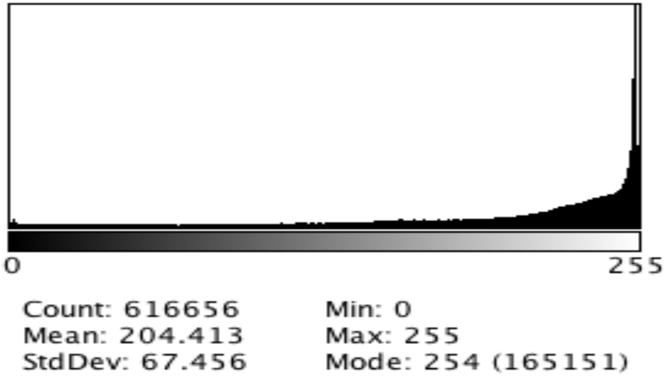
Equilibré

Sur et sous-exposition



Sous-exposé
pic vers 0, peu grandes val.

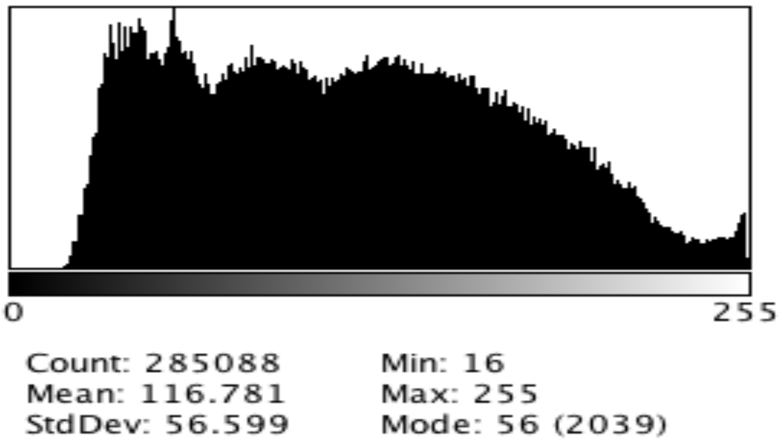
Sur et sous-exposition



Sur-exposé - pic vers 255

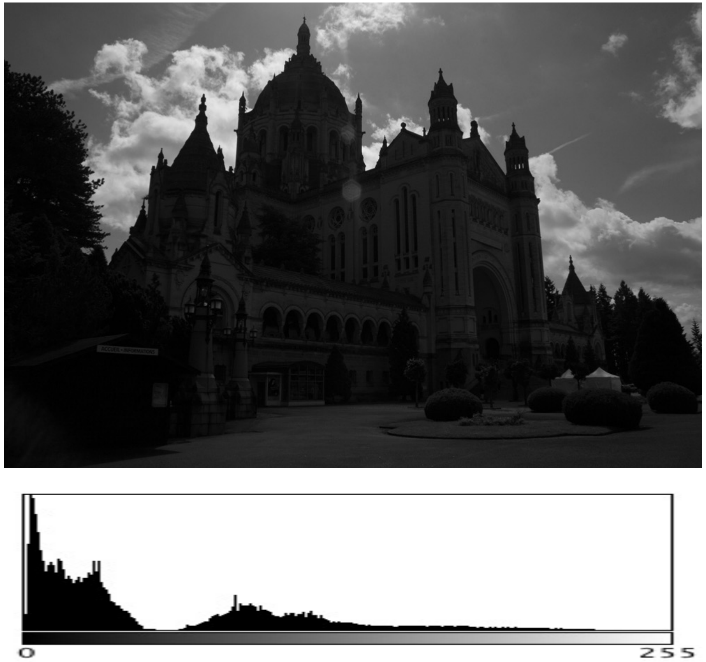
Sur et sous-exposition

Equilibré

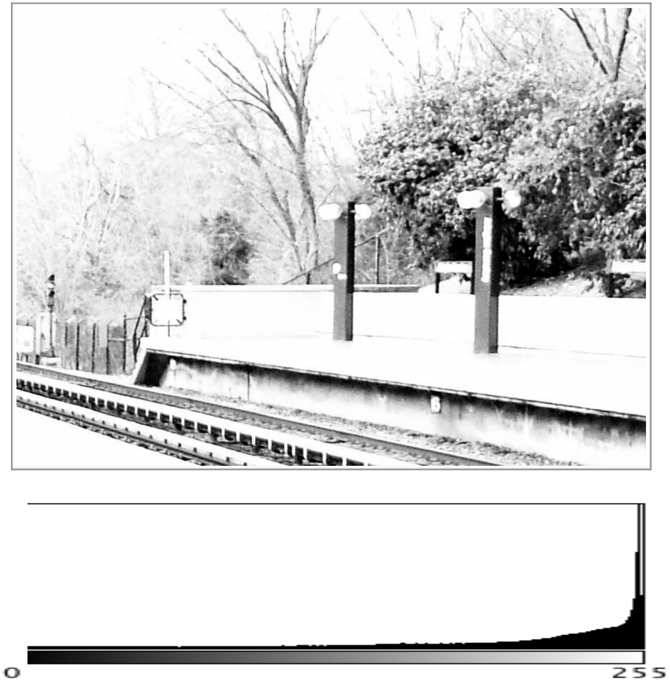


Sur et sous-exposition

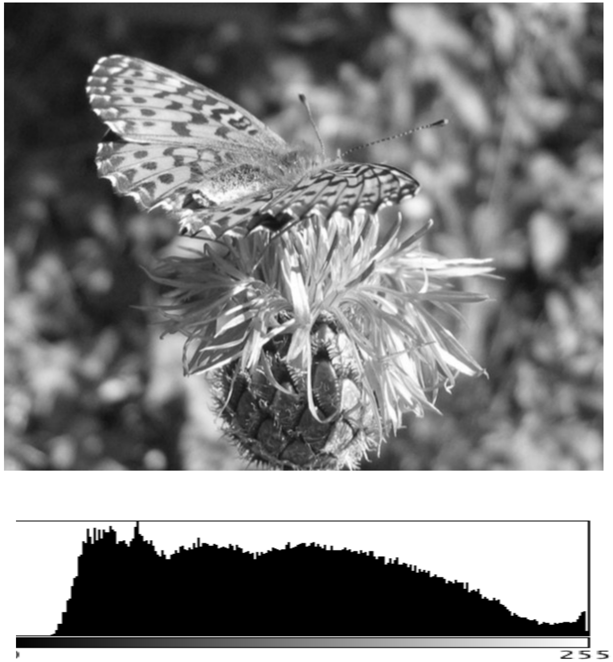
Sous-exp.



Sur-exp.



Equilibré



Contraste

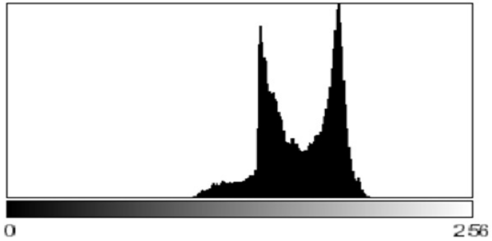
Faible

Equilibré

Fort

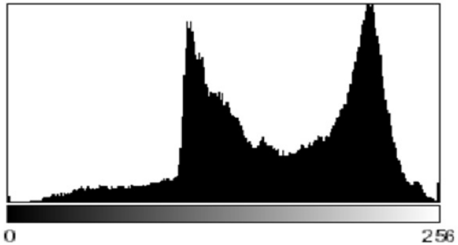
Contraste

Faible



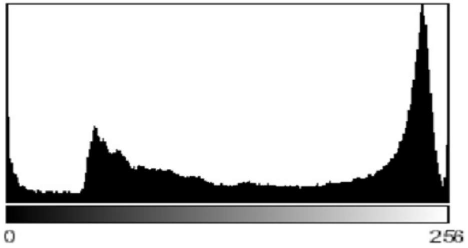
Contraste

Equilibré



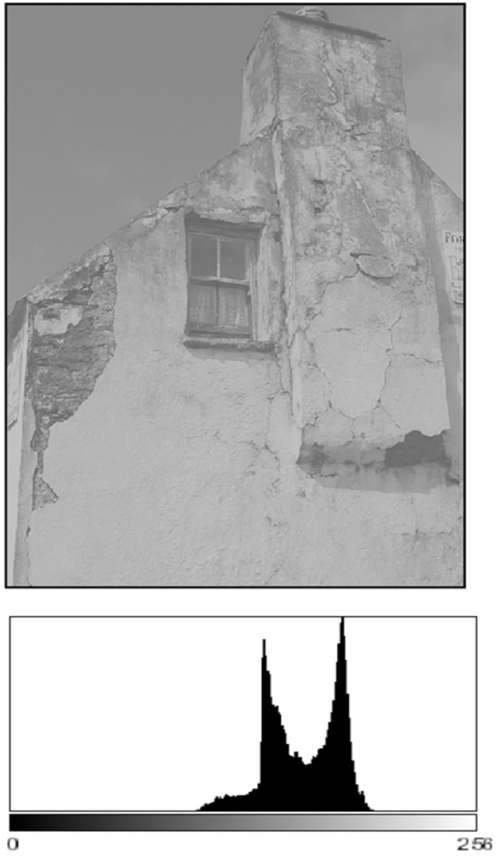
Contraste

Fort

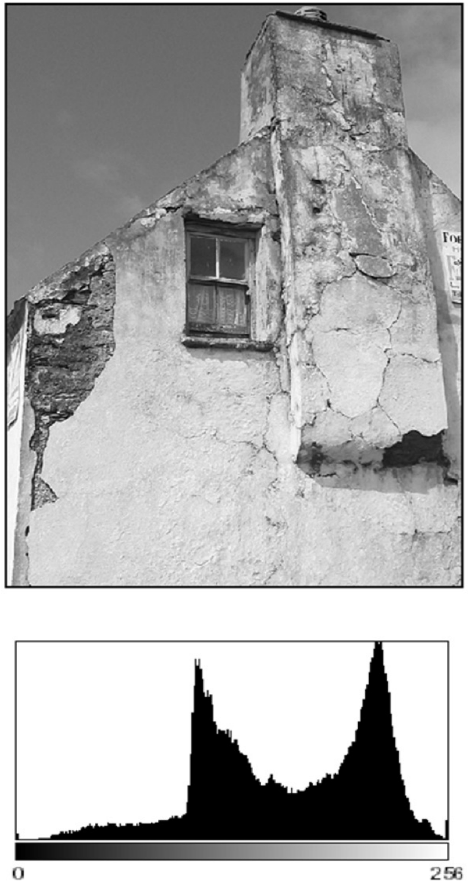


Contraste

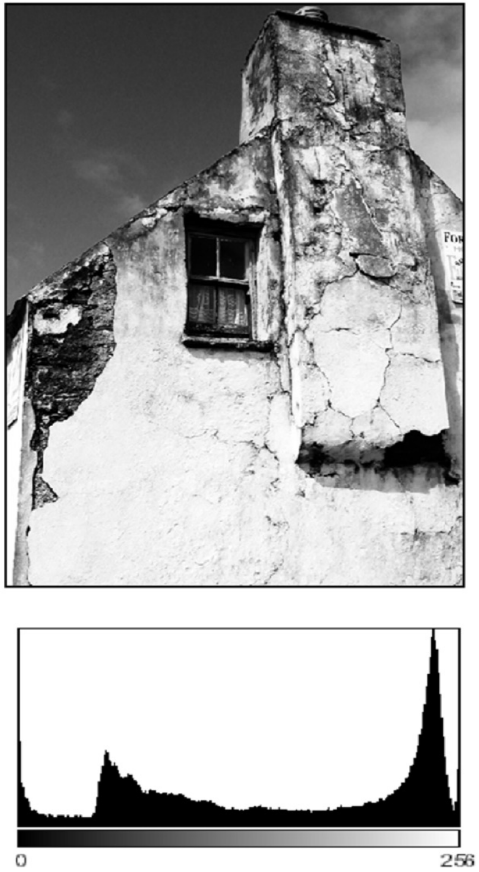
Faible



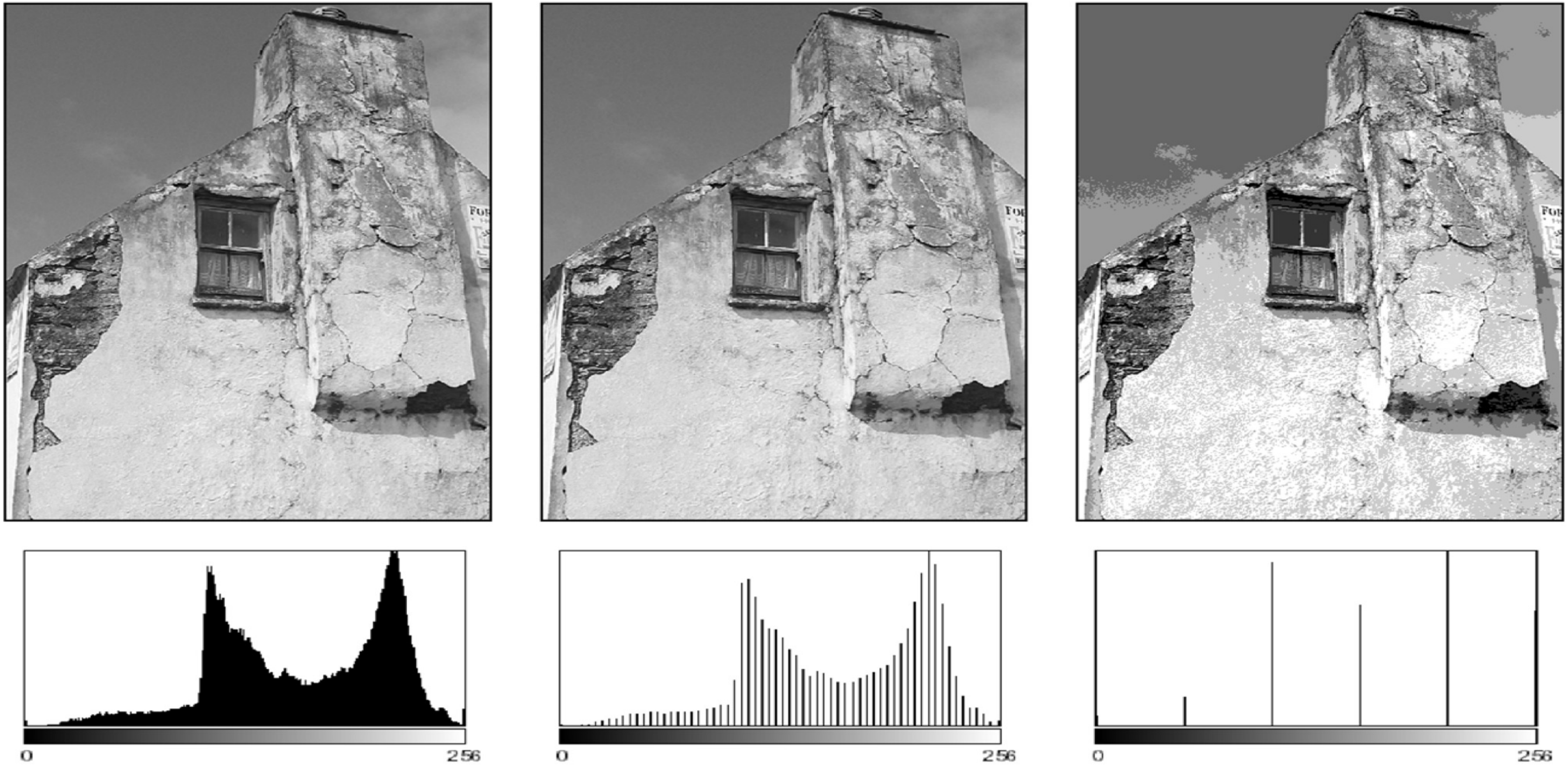
Equilibré



Fort

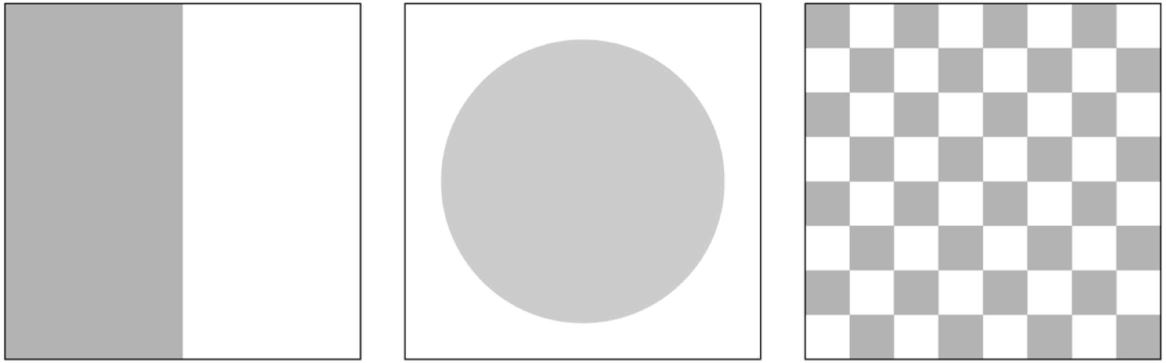


Modification d’une image : échantillonnage



L’histogramme comme diagnostic

Que peut-on dire des histogrammes de ces 3 images ?



- Information statistique
  - Aucune information sur la position des pixels
- Deux images peuvent avoir le même histogramme
  - Ce n’est pas une “signature”
  - Information limitée (256 “nombres” seulement)

Plan de la séance

- 1. L'histogramme, un outil de diagnostic
  - Définition
  - Exposition
  - Contraste
- 2. Correction du contraste
  - Fonctions affines
  - Familles de fonctions
  - Egalisation d'histogramme
  - Spécification d'histogramme

Transformations point par point

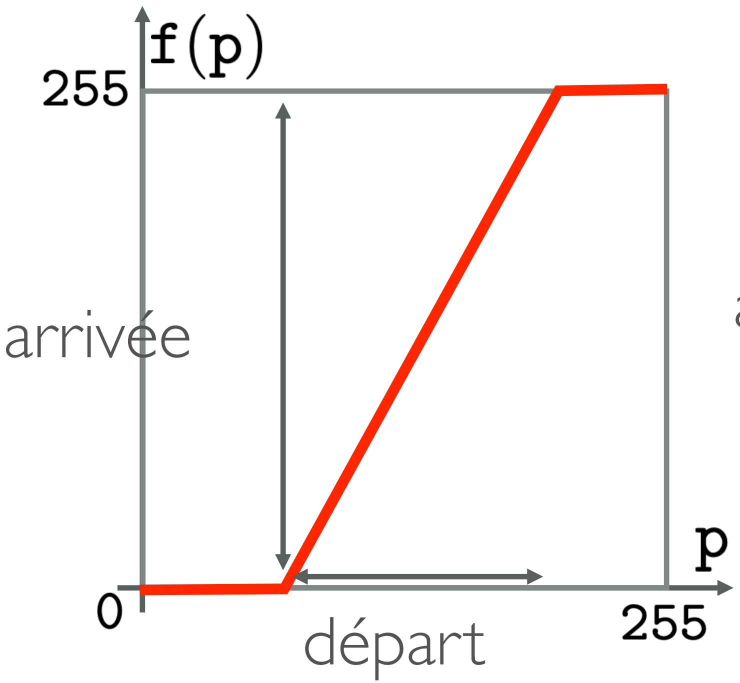
- On considère des fonctions **croissantes** sur $\mathbb{P} = \{0, \ldots, 255\}$

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{P} \\ p & \mapsto & f(p) \end{array} \right.$$

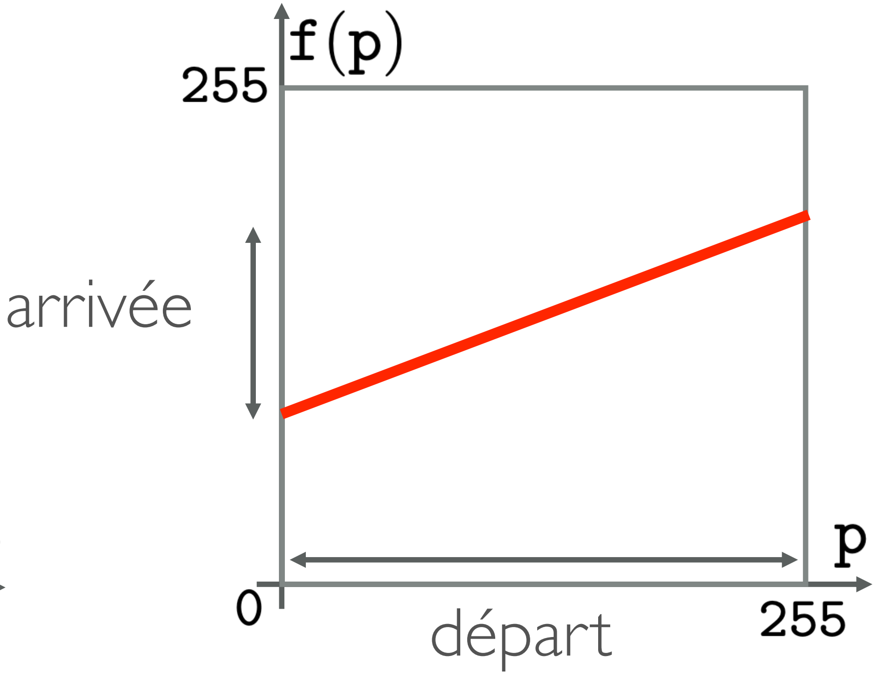
```
for i in range(256):
    for j in range(256):
        image[i,j] = f(image[i,j])
```

- La nouvelle valeur d'un pixel ne dépend que de sa **valeur** précédente
  - **pas de la position ou du voisinage**
- Perte d'information possible
  - Saturation à 0 ou 255
  - Echantillonage

Exemple : fonctions affines

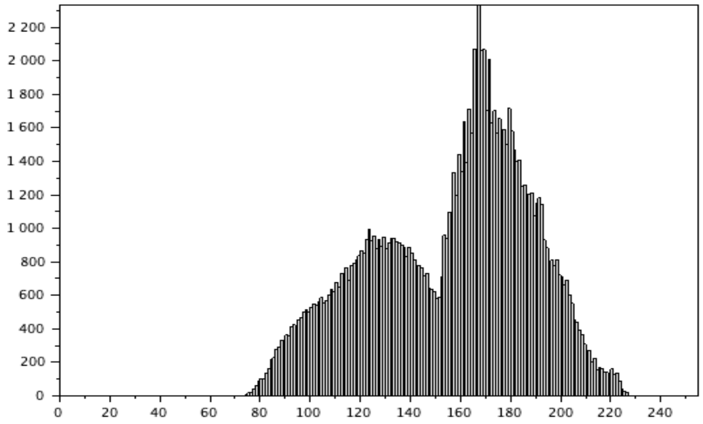


Augmente le contraste

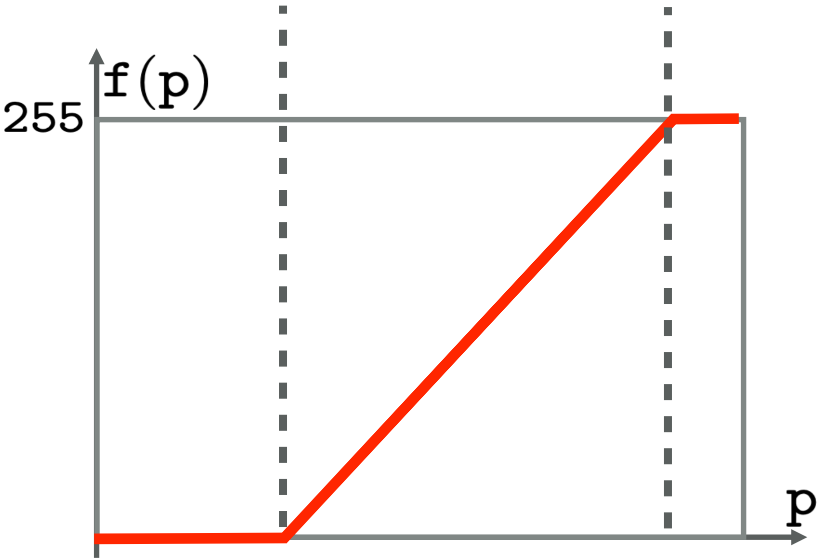


Diminue le contraste

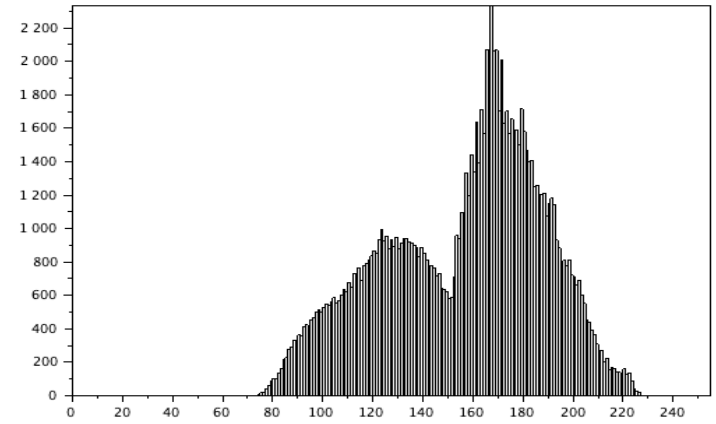
Correction de contraste et histogramme

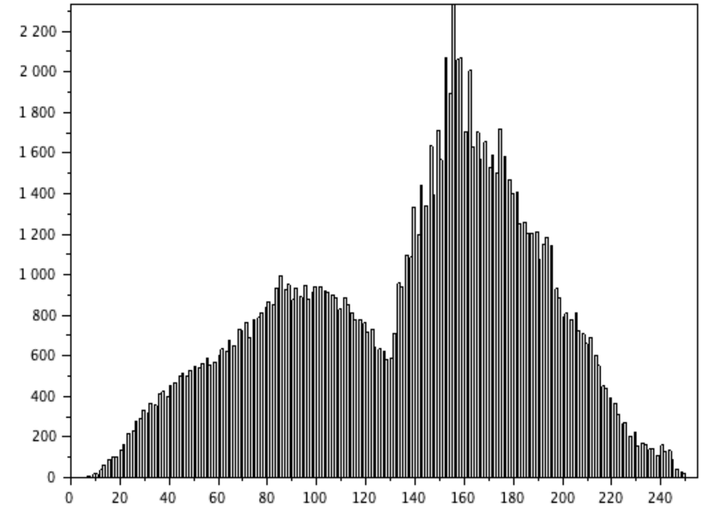


Choix des bornes à l'aide de l'histogramme:
- valeurs min et max dans h
- percentile (cf TP2)

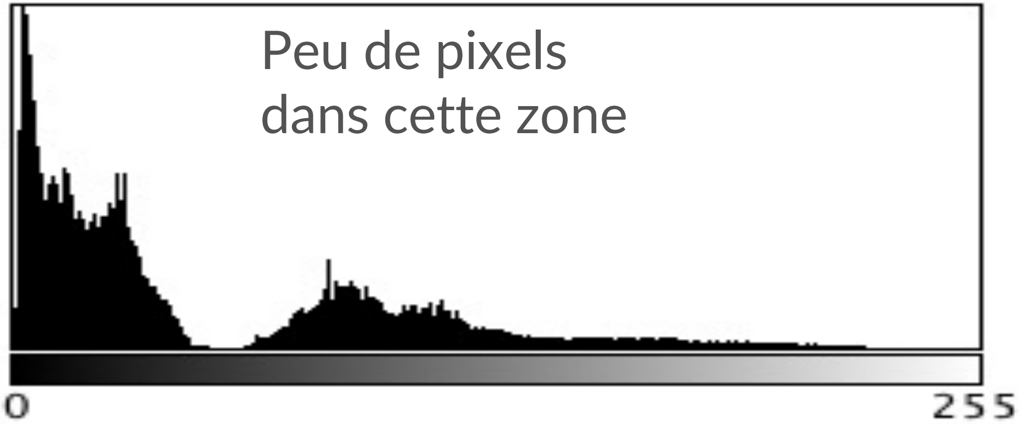


Correction de contraste et histogramme





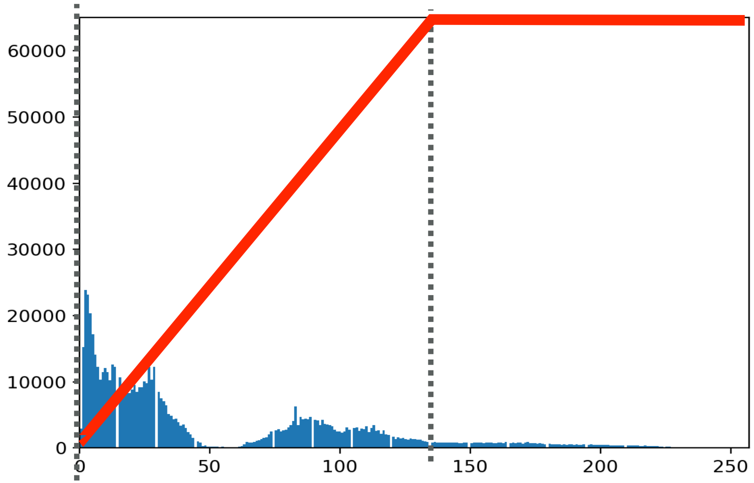
Correction de contraste & histogramme

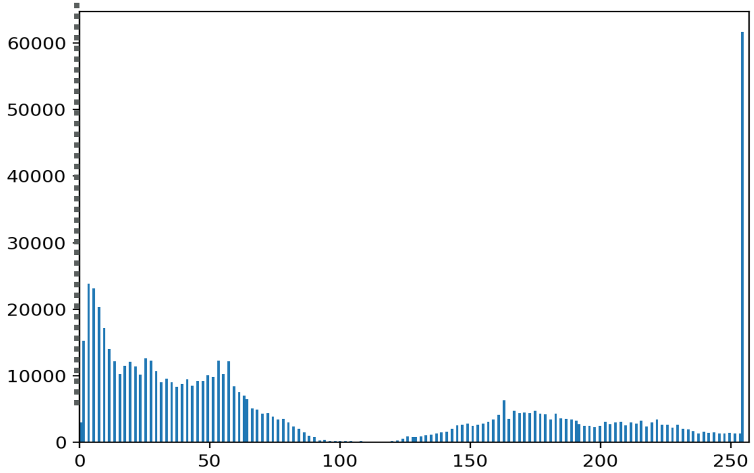


Count: 667000
Mean: 51.708
StdDev: 52.691

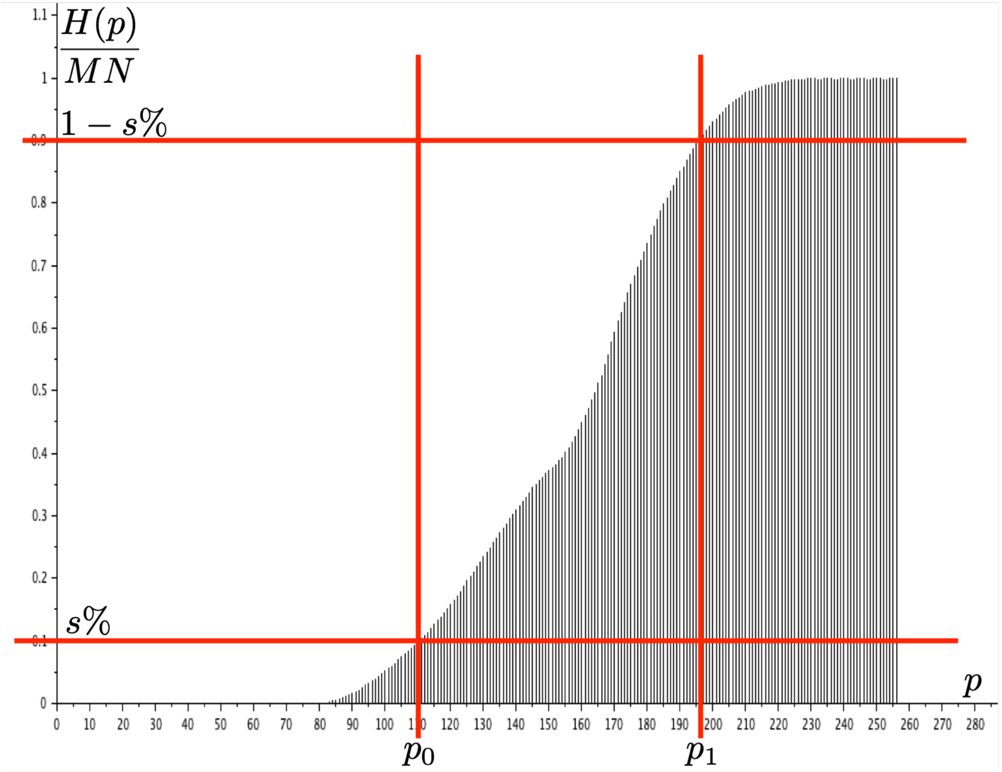
Min: 0
Max: 240
Mode: 2 (23844)

Correction de contraste & histogramme



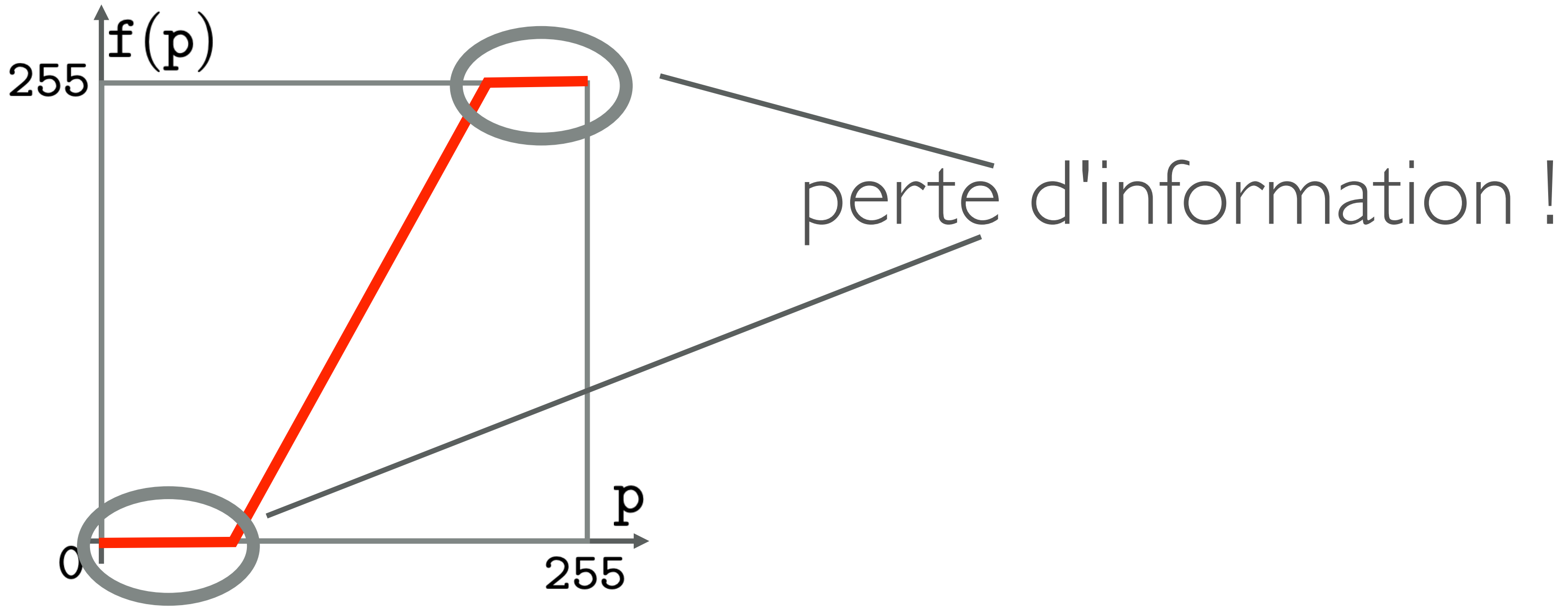


Quantifier le choix des bornes : percentiles

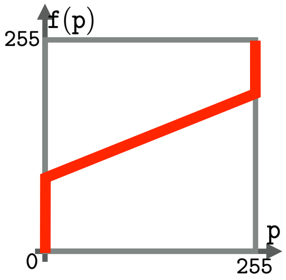


On élimine les s% de pixels les plus sombres et les plus clairs

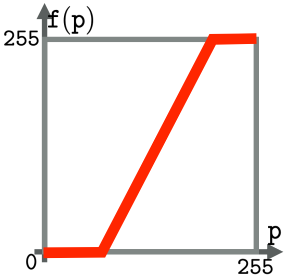
Perte d’information par saturation

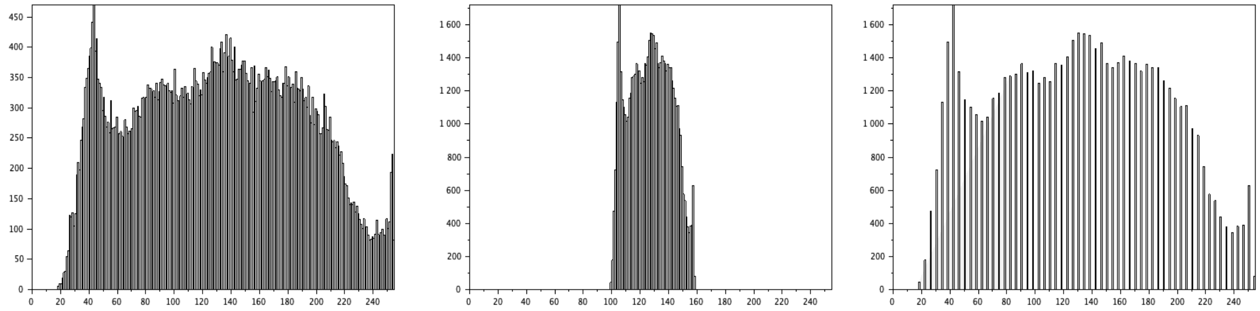


Transformations successives



puis





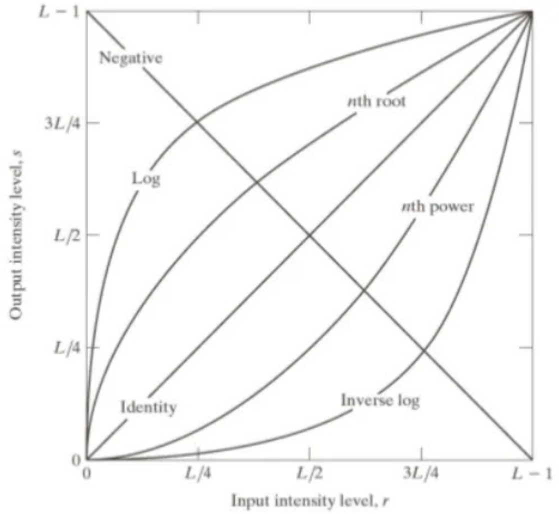
Echantillonage → perte d'information !
→ intérêt de travailler en nombres flottants

Plan de la séance

- 1. L'histogramme, un outil de diagnostic
  - Définition
  - Exposition
  - Contraste
- 2. Correction du contraste
  - Fonctions affines
  - Familles de fonctions
  - Egalisation d'histogramme
  - Spécification d'histogramme

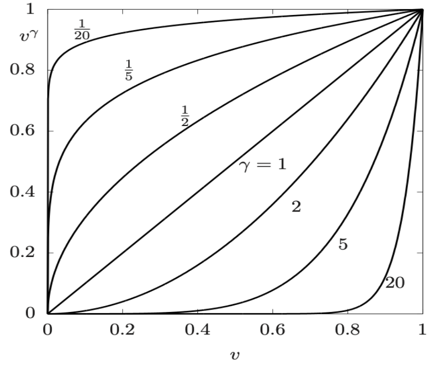
Profils plus complexes

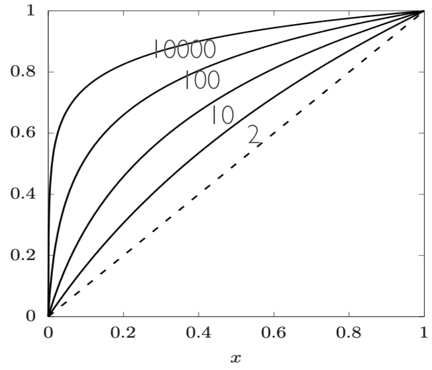
- Familles de fonctions continues
  - On se donne $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$
  - On définit $T(p) = 255 \times f\left(\frac{p}{255}\right)$
  - Exemples:



Fonctions gamma

$$f(x) = x^{\gamma}$$





Fonctions log

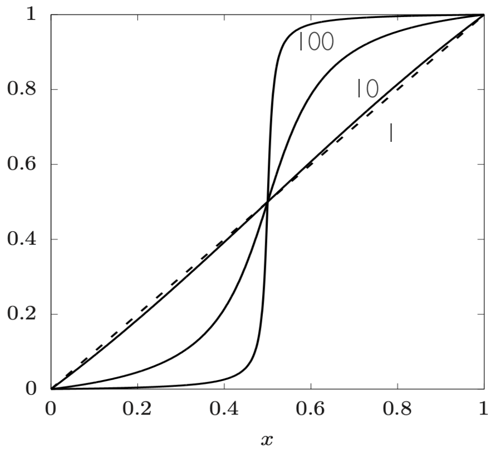
$$f(x) = \frac{\log(1 + \alpha x)}{\log(1 + \alpha)}$$

Fabriquer de nouvelles fonctions

- Fonctions réciproques $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$
  - Ex: x^{γ} et $x^{1/\gamma}$

- A partir d'autres fonctions
  - Ex: fonctions arctan

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\alpha\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) - \arctan\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

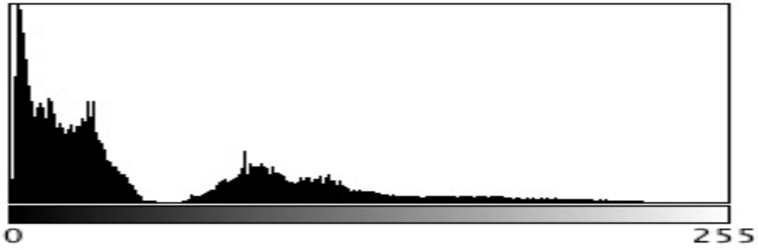


Plan de la séance

- 1. L'histogramme, un outil de diagnostic
  - Définition
  - Exposition
  - Contraste
- 2. Correction du contraste
  - Fonctions affines
  - Familles de fonctions
  - Egalisation d'histogramme
  - Spécification d'histogramme

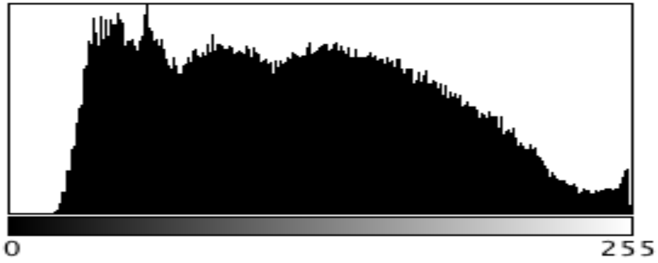
Égalisation d’histogramme

Image équilibrée



Count: 667000 Min: 0
Mean: 51.708 Max: 240
StdDev: 52.691 Mode: 2 (23844)

Histogramme “plat”



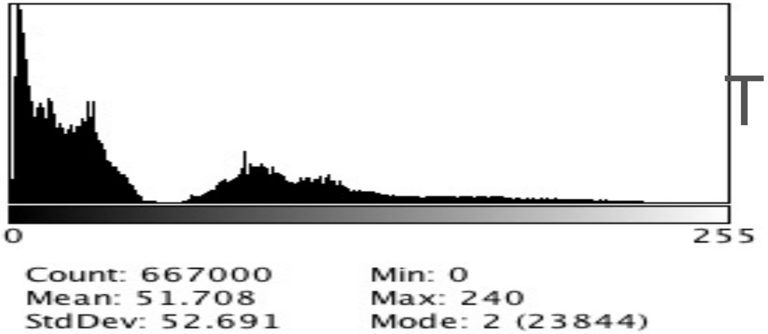
Count: 285088 Min: 16
Mean: 116.781 Max: 255
StdDev: 56.599 Mode: 56 (2039)

Égalisation d'histogramme

Effet ?
⇒

Image équilibrée

On veut rendre "plat" l'histogramme



Transformation ?
⇒

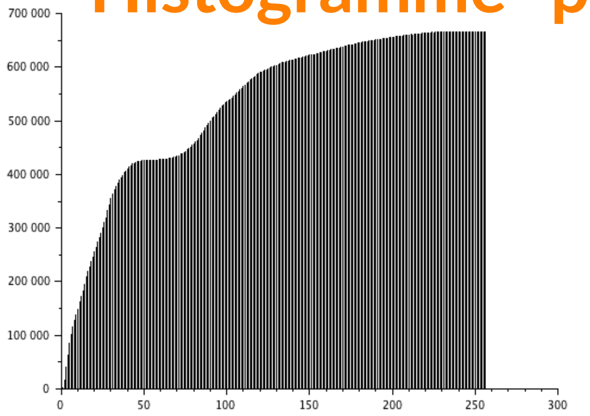
Égalisation d’histogramme

Effet ?

⇒

Image équilibrée

Histogramme “plat” <=> Histogramme cumulé “rampe”



Transformation ?

⇒

Trouver la transformation optimale (cas continu)

- On cherche une transformation croissante T telle que
  - $Y = T(X)$ où X est l'image de départ, Y est la transformée.
  - $H_Y(u)\times\frac{255}{MN} = u$: l'histogramme cumulé **normalisé** de Y est la fonction $u \to u$.

- Poser le problème
  - On a $T(p) \leq u \Leftrightarrow p \leq T^{-1}(u)$ car T est croissante.
  - Or $H_Y(u) = \#\{T(p): T(p) \leq u\} = \#\{p: p \leq T^{-1}(u)\} = H_X\left(T^{-1}(u)\right)$
  - Donc pour avoir $H_Y(u)\frac{255}{MN} = u$, on veut $H_X\left(T^{-1}(u)\right) = \frac{MN}{255}u$.
  - Avec $T(t) = \frac{255}{MN}H_X(t)$ on a $T^{-1}(u) = H_X^{-1}\left(\frac{MN}{255}u\right)$ d'où $H_X\left(T^{-1}(u)\right) = \frac{255}{MN}$

- La tranformation cherchée est l'histogramme cumulé *normalisé* ! $T = H_X\times\frac{255}{MN}$

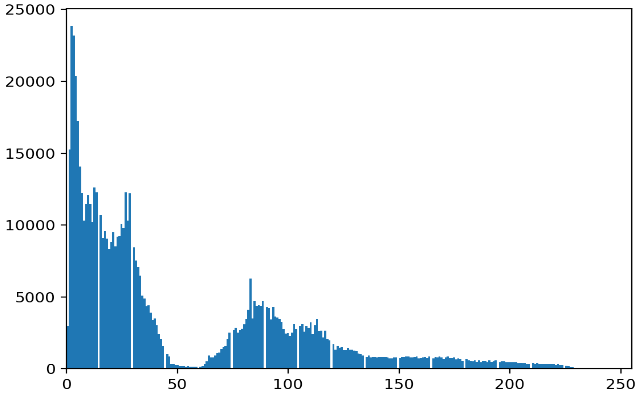
Égalisation d’histogramme

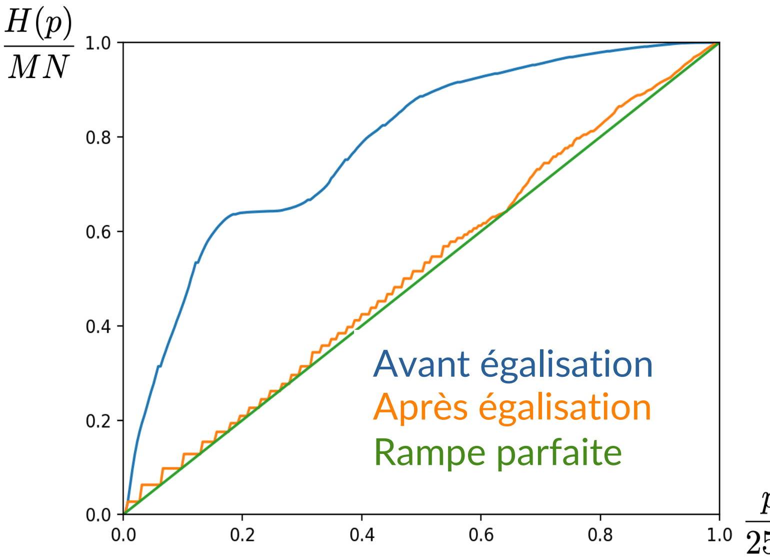
- On considère la transformation suivante:

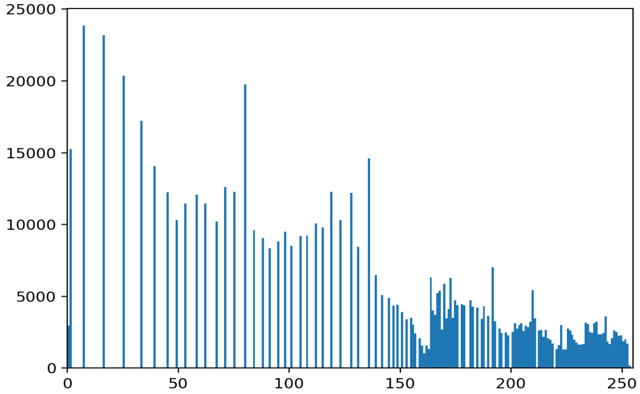
$$T(p) = \frac{255}{MN} H(p)$$

- Propriétés:
  - Croissante
  - $T(255) = 255$ ($T(0)$ est petit mais pas forcément 0)
  - Tend à applatir l’histogramme
  - L’histogramme ne sera pas parfaitement plat car on a discrétisé une formule valable en continu

Résultats (image et histogramme)







Limites de l’égalisation

- Un histogramme égalisé n'est pas toujours idéal…

- On peut souhaiter une autre distribution des pixels

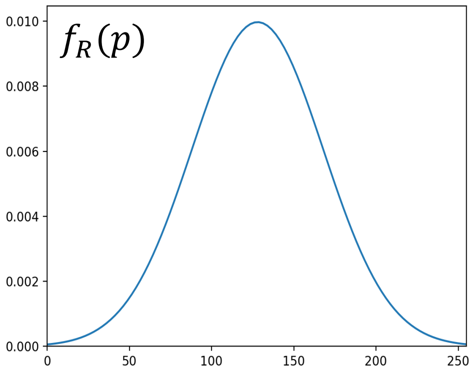
- Comment harmoniser une série d'images par rapport à une référence commune ?

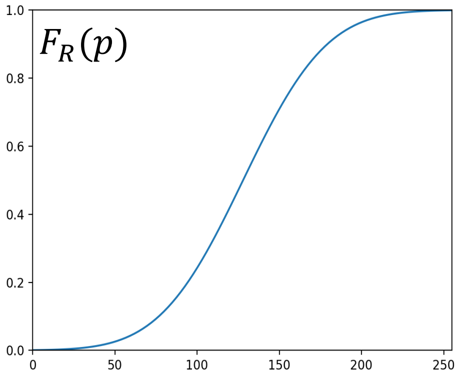
Plan de la séance

- 1. L'histogramme, un outil de diagnostic
  - Définition
  - Exposition
  - Contraste
- 2. Correction du contraste
  - Fonctions affines
  - Familles de fonctions
  - Egalisation d'histogramme
  - Spécification d'histogramme

Spécification d'histogramme

- Histogrammes *normalisés*
  - $f(p) = \frac{h(p)}{MN}$ d'où $\sum_{p=0}^{255} f(p) = 1$: proportion de pixels ayant la valeur p
  - $F(p) = \frac{H(p)}{MN}$ d'où $F(255) = 1$: proportion de pixels ayant une valeur $\leq p$.
- On se donne un histogramme de référence, ex:



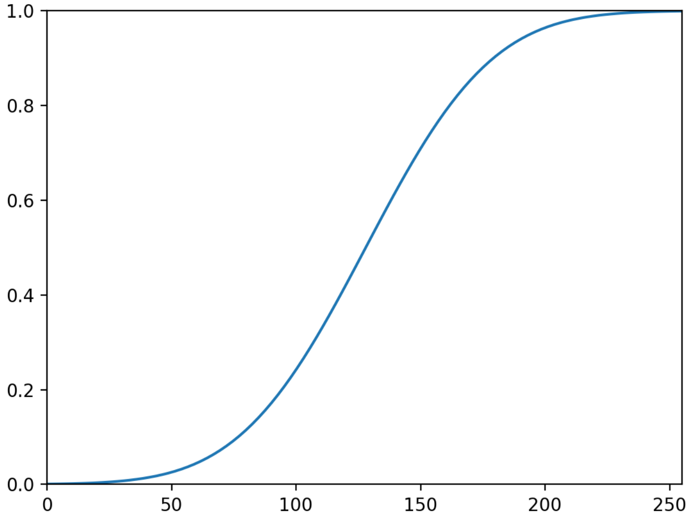


Spécification d'histogramme

- Histogramme **cumulé normalisé** de réference F_R
- Image de départ X, d'histogramme $F_X = \frac{H_X}{MN}$
- On cherche une transformation T telle que $Y = T(X)$ vérifie $F_Y = F_R$
- On a vu précédemment que $F_Y\big(T(t)\big) = F_X(t)$
- Donc si on veut $F_R\big(T(t)\big) = F_Y\big(T(t)\big) = F_X(t)$

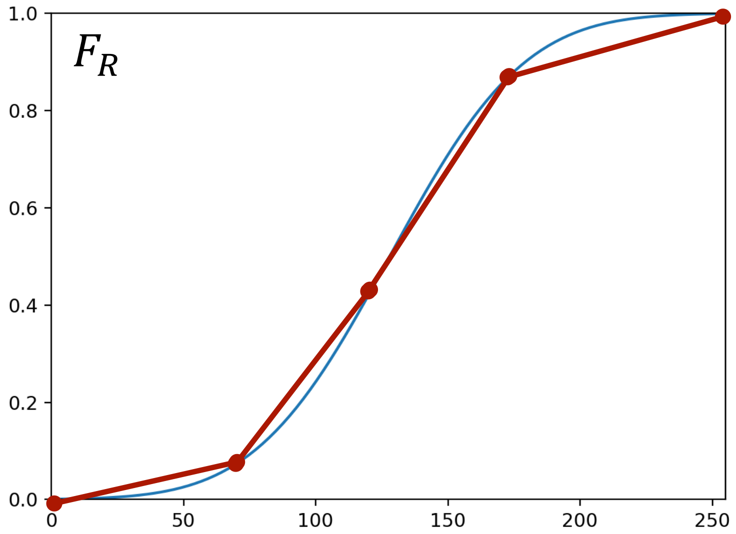
$$T(t) = F_R^{-1}\big(F_X(t)\big)$$

Il faut donc calculer
l'**inverse** de P_R
(potentiellement difficile)



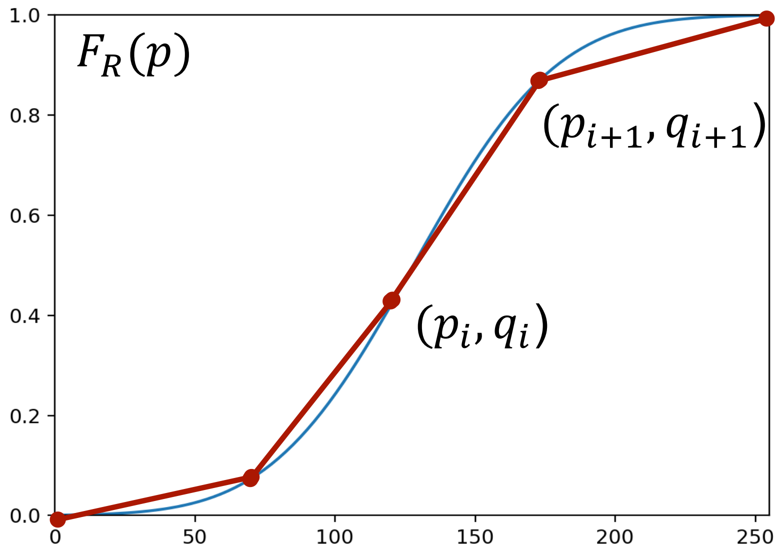
Spécification d'histogramme

- Calcul de l'inverse de F_R
  - Soit on sait le calculer et on peut l'implémenter directement
  - Soit la fonction est inversible mais on ne sait pas forcément calculer son inverse de manière explicite
  - Solution: linéariser



Inverse d'un histogramme linéarisé

- On calcule N valeurs de P_R
  - On choisit $0 = p_1 < p_2 < \cdots < p_N = 255$
  - On calcule $q_i = F_R(p_i)$
  - Pour $y \in [0,1]$ donné, trouver $p \in [0,255]$ tel que $y = F_R(p)$.
  - Si $q_i \leq y < q_{i+1}$, alors
    - $p = F_R^{-1}(y) = p_i + (y - q_i)\,\frac{(p_{i+1} - p_i)}{q_{i+1} - q_i}$



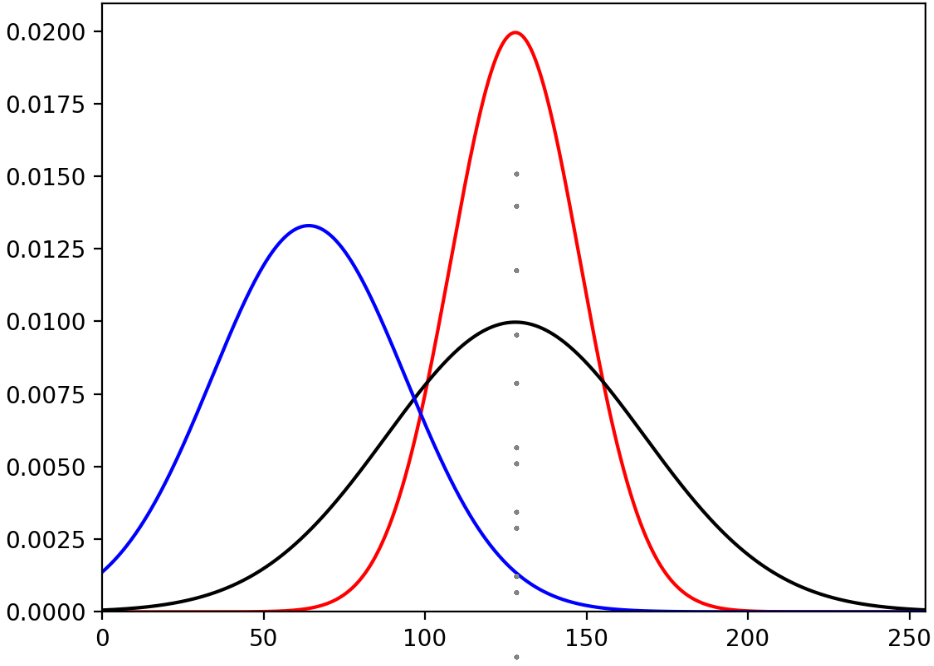
Exemple avec les fonctions Gaussiennes

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

μ : “moyenne”

σ : “écart-type”

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$



$\mu = 128,$
$\sigma = 40$

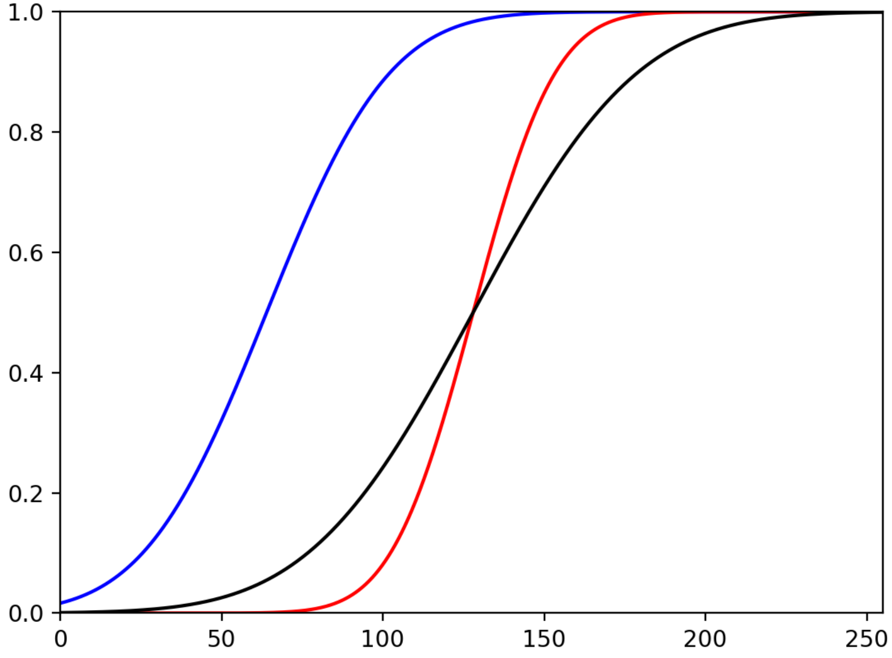
$\mu = 128,$
$\sigma = 20$

$\mu = 64,$
$\sigma = 30$

μ

Exemple avec les fonctions Gaussiennes

On prend $$P_R(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$



$\mu = 128,$
$\sigma = 40$

$\mu = 128,$
$\sigma = 20$

$\mu = 64,$
$\sigma = 30$

En pratique

- Pas de calcul explicite de

$$F_R(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dt$$

- Fonction erf de numpy/python

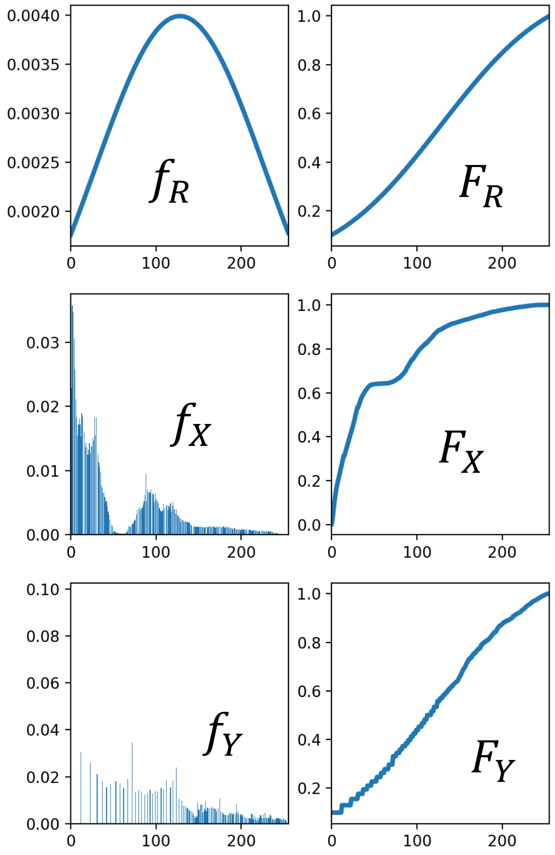
$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} \, dt$$

- Calcul de F_R :

$$F_R(x) = \frac{1}{2}\left(1 + g\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

Application

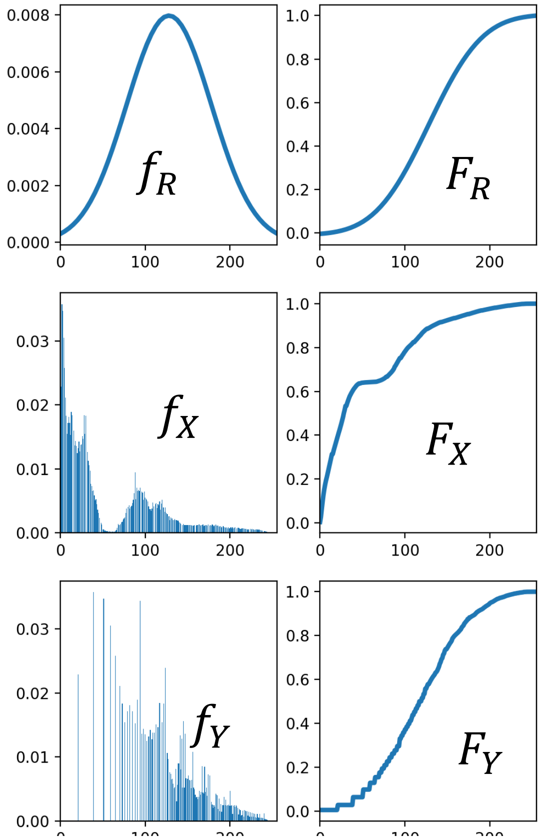
- Linéarisation de P_R par morceaux pour l'inv.



$\mu = 128, \sigma = 100$

Application

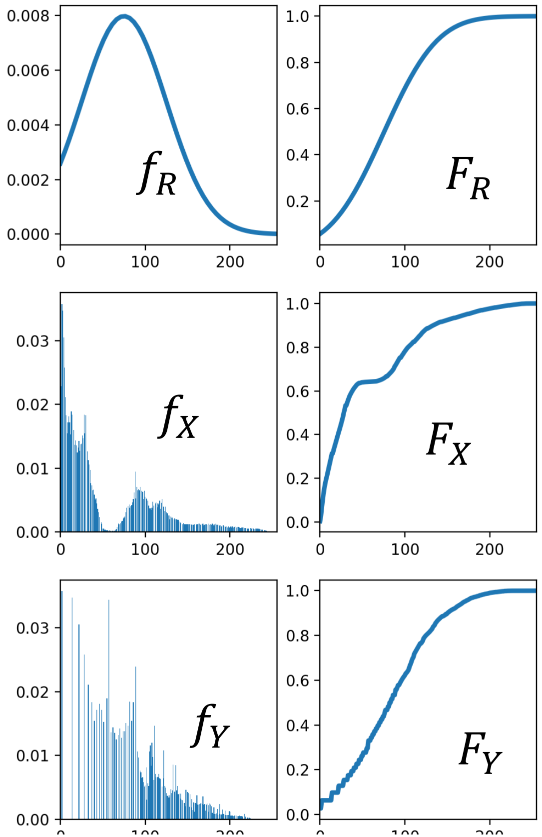
- Linéarisation de P_R par morceaux pour l'inv.



$$\mu = 128, \sigma = 50$$

Application

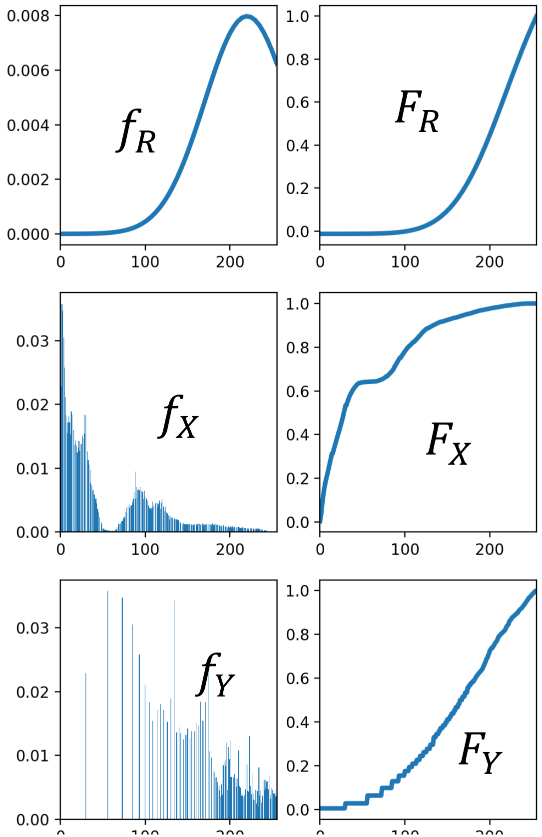
- Linéarisation de P_R par morceaux pour l'inv.



$\mu = 75, \sigma = 50$

Application

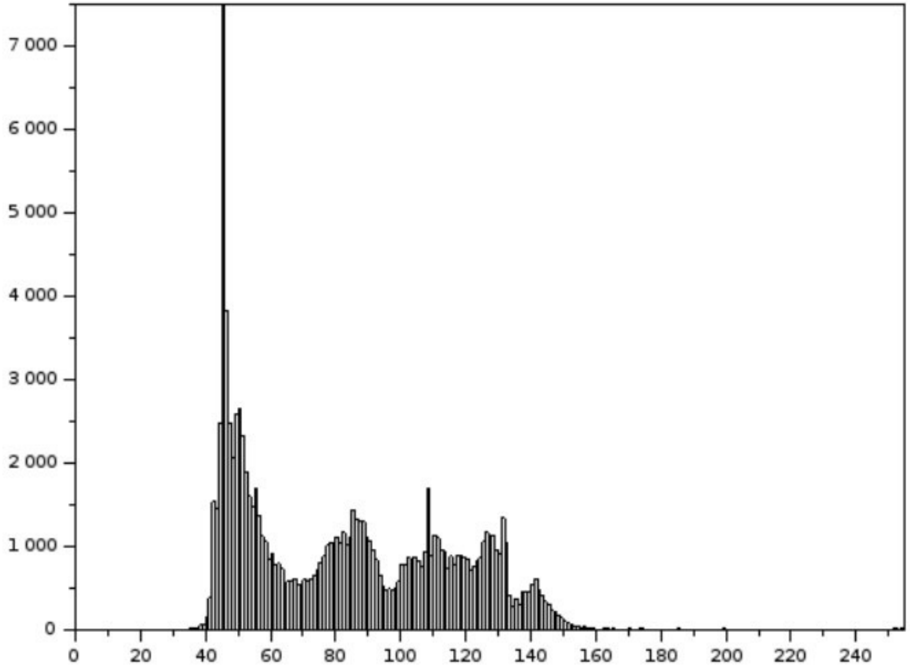
- Spécification exacte pas toujours facile à cause de l'échantillonage ("arrondi") des valeurs des pixels

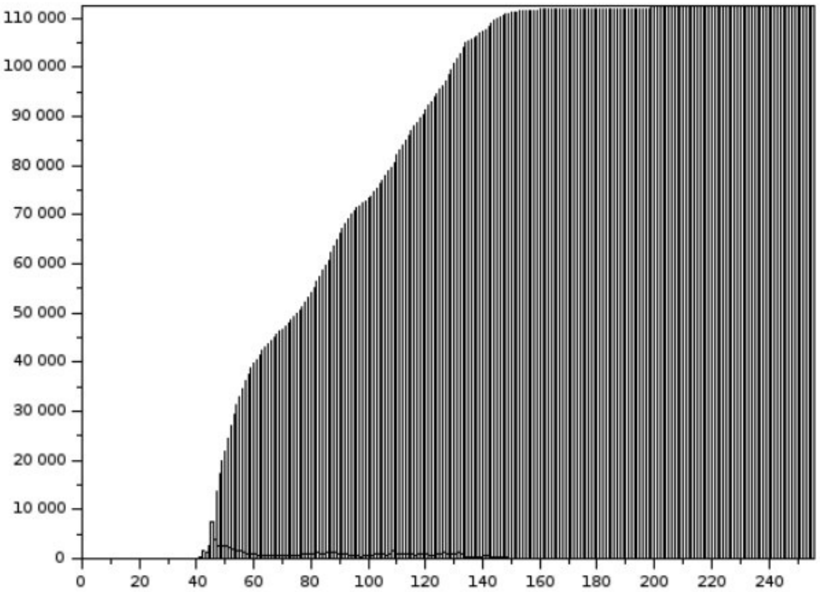


Exercices récapitulatifs

Ex. 1:

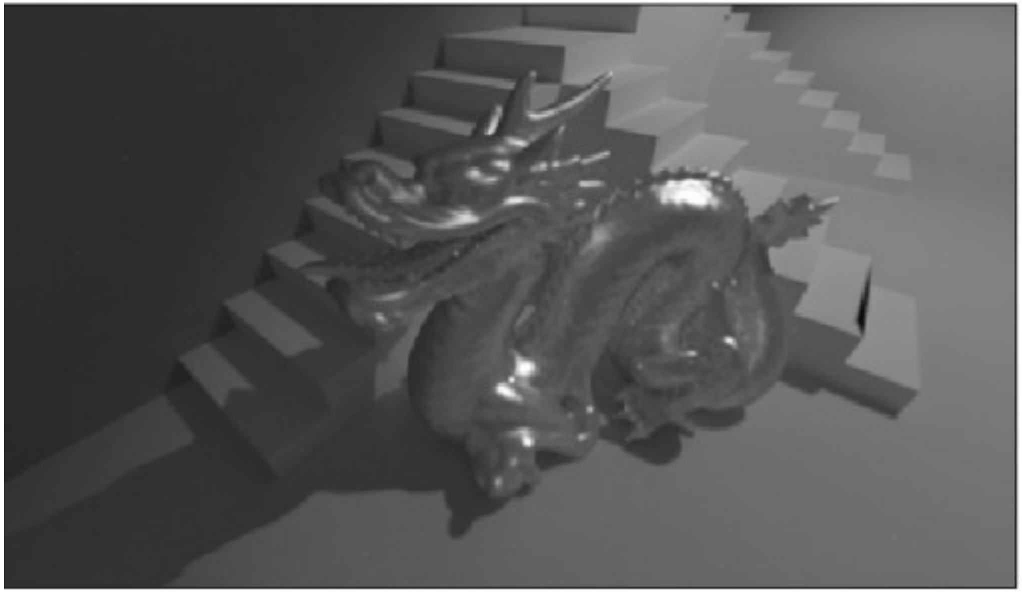
En utilisant l'histogramme et l'histogramme cumulé ci-dessous, pouvez-vous dire si l'image est plutôt claire ou plutôt foncée? Quel est le nombre de pixels dans l'image?

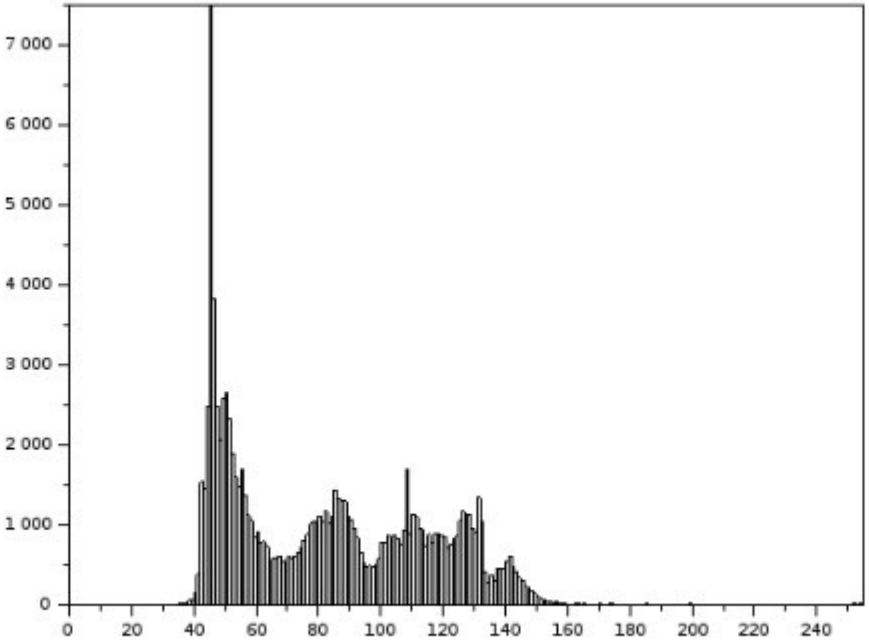




Ex. 2:

Quels sont les défauts de l'image ci-dessous et comment les voit-on sur l'histogramme?



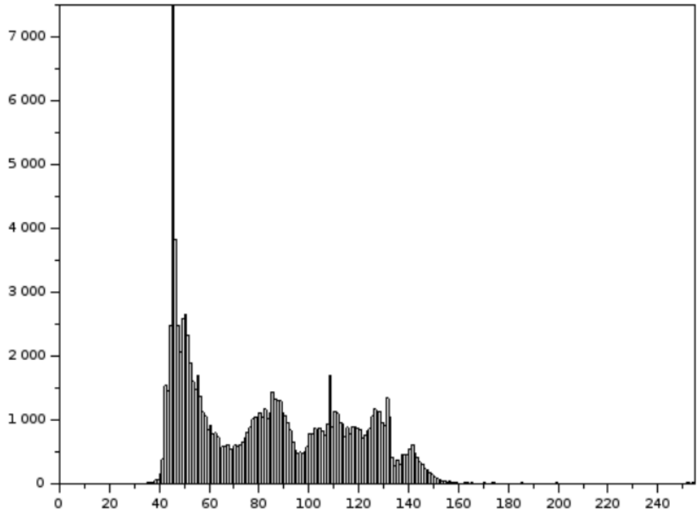


Proposer une transformation affine pour corriger l'image ci-dessous. Justifiez votre réponse. Que

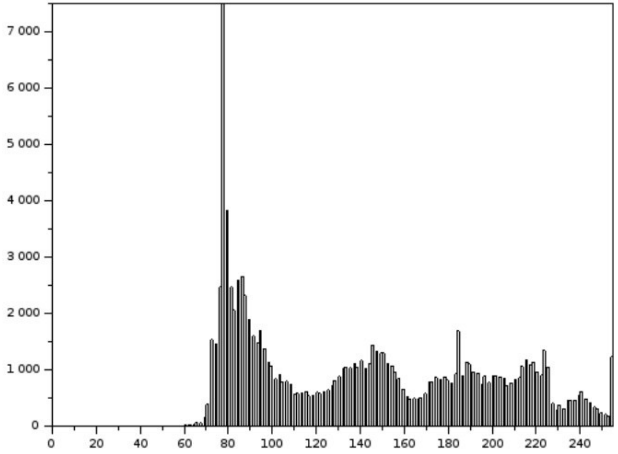
Ex. 3:

Parmi les histogrammes ci-dessous (A , B , C et D), lequel a été obtenu par transformation de l'histogramme ci-dessus par $T_1(p) = p + 100$? Par $T_2(p) = 1.7p$?

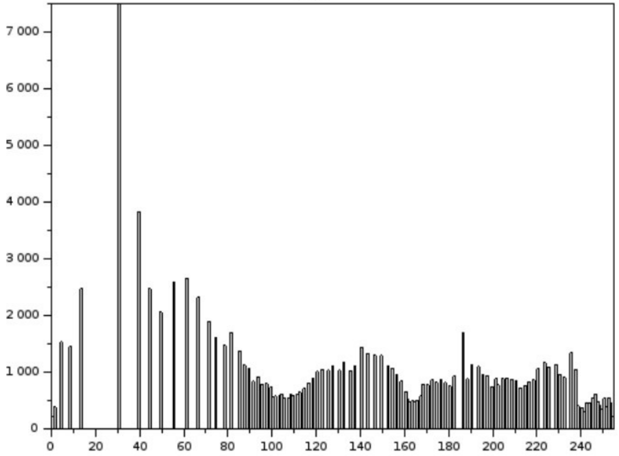
Lequel des histogrammes ci-dessous (A , B , C et D) est le plus satisfaisant en termes de contraste selon vous? A quelle transformation est-il associé?



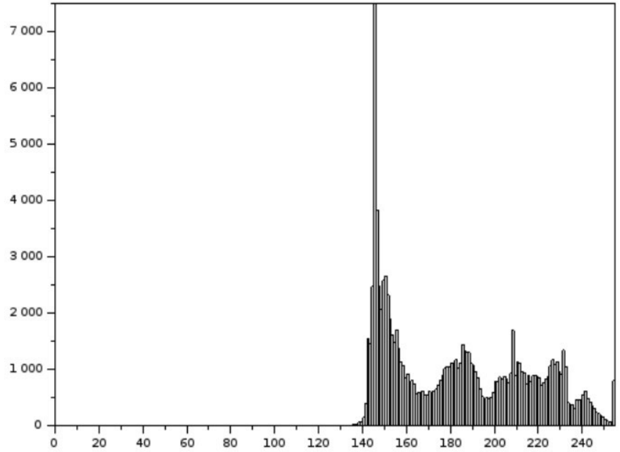
A:



B:



C:



D: