Nombres complexes

Exercice 1.1. (*)

Mettre sous forme algébrique (c'est à dire $x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels) les nombres complexes suivants (a et b sont des réels).

1. $1 - 2\mathrm{i} - (-4 + 7\mathrm{i})$,
2. $\overline{1 + 2\mathrm{i}} + \overline{-4 + 6\mathrm{i}}$,
3. $(1 + 2\mathrm{i})(-4 + 6\mathrm{i})$,
4. $(2 - 3\mathrm{i})(-3 + 2\mathrm{i})$,
5. $(a + \mathrm{i}b)^2$,
6. $(a - \mathrm{i}b)^2$,
7. i^{50},
8. $\overline{\left(\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{-4 + 6\mathrm{i}}\right)}$,
9. $\dfrac{3 + 6\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}}$,
10. $\dfrac{5 + 2\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$,
11. $\dfrac{(5 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i}) - (\mathrm{i} - 1)}$,
12. $\dfrac{-2}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$,
13. $\left(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)^2 + \dfrac{3 + 6\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}}$,
14. $\dfrac{2 + 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} + \dfrac{2 - 5\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$,
15. $\left(\dfrac{1 + \mathrm{i} - \sqrt{3}(1 - \mathrm{i})}{1 + \mathrm{i}}\right)^2$.

Solution de l'exercice 1.1

1.
$$\begin{aligned} 1 - 2\mathrm{i} - (-4 + 7\mathrm{i}) &= 1 + 4 - 2\mathrm{i} - 7\mathrm{i} \\ &= 5 - 9i \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \overline{1 + 2\mathrm{i}} + \overline{-4 + 6\mathrm{i}} &= 1 - 2\mathrm{i} - 4 - 6\mathrm{i} \\ &= -3 - 8\mathrm{i} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} (1 + 2\mathrm{i})(-4 + 6\mathrm{i}) &= -4 + 6\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 12\mathrm{i}^2 \\ &= -16 - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})(-3+2\mathrm{i}) &= -6+4\mathrm{i}+9\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2\\ &= 13\mathrm{i}\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}(a+\mathrm{i}b)^2 &= a^2+\mathrm{i}^2b^2+2\mathrm{i}ab\\ &= a^2-b^2+2\mathrm{i}ab\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}(a-\mathrm{i}b)^2 &= a^2+\mathrm{i}^2b^2-2\mathrm{i}ab\\ &= a^2-b^2-2\mathrm{i}ab\end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned}\mathrm{i}^{50} &= (\mathrm{i}^2)^{25}\\ &= (-1)^{25}\\ &= -1\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1+2\mathrm{i}}{-4+6\mathrm{i}}\right)} &= \overline{\left(\frac{(1+2\mathrm{i})(-4-6\mathrm{i})}{(-4+6\mathrm{i})(-4-6\mathrm{i})}\right)}\\ &= \overline{\left(\frac{8-14\mathrm{i}}{52}\right)}\\ &= \frac{2}{13}-\frac{7\mathrm{i}}{26}\end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned}\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} &= \frac{(3+6\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}\\ &= \frac{(9-24)+(18+12)\mathrm{i}}{3^2+4^2}\\ &= \frac{-15+30\mathrm{i}}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\frac{5+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} &= \frac{(5+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}\\ &= \frac{(5-4)+(2+10)\mathrm{i}}{1^2+2^2} = \frac{1}{5}+\frac{12}{5}\mathrm{i}\end{aligned}$$

11.

$$\frac{(5+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})-(\mathrm{i}-1)} =$$

12.

$$\begin{aligned}\frac{-2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}} &= \frac{-2(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}\\ &= \frac{-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}}{1^2+\sqrt{3}^2}\\ &= \frac{-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2+\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} &= \frac{(1+\mathrm{i})^2}{(2-\mathrm{i})^2}+\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\\ &= \frac{1^2-1^2+2\mathrm{i}}{2^2-1^1-2\cdot 2\mathrm{i}}+\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\\ &= \frac{2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}+\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \frac{3+8\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\\ &= \frac{(3+8\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}\\ &= \frac{(9-32)+(12+24)\mathrm{i}}{3^2+4^2} = \frac{-23}{25}+\frac{36}{25}\mathrm{i}\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}\frac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} &= \frac{(2+5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}+\frac{(2-5\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\\ &= \frac{(2-5)+(2+5)\mathrm{i}}{1^2+1^2}+\frac{(2-5)+(-2-5)\mathrm{i}}{1^2+1^2}\\ &= \frac{-3-3}{2}=-3\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2 &= \left(\frac{(1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i}))(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\right)^2\\ &= \left(\frac{(1+1)-\sqrt{3}(1-1-2\mathrm{i})}{1+1}\right)^2\\ &= \left(\frac{2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^2\\ &= (1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2=(1-3)+2\sqrt{3}\mathrm{i}=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}\end{aligned}$$

Exercice 1.2. (*) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$:

1. $z(\mathrm{i}-3)=2$,
2. $3\mathrm{i}+1-\mathrm{i}z=4-\mathrm{i}$,
3. $(1-\mathrm{i})z+\bar{z}=4-3\mathrm{i}$,
4. $3\mathrm{i}z+2z=6\mathrm{i}$,
5. $\dfrac{2z+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}z}=2+3\mathrm{i}$,
6. $\overline{\dfrac{2z+\mathrm{i}}{1-\bar{z}}}=2+\mathrm{i}$.

Solution de l'exercice 1.2

1. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a
$$\begin{aligned} z(\mathrm{i}-3)=2 &\Leftrightarrow z=\frac{2}{(\mathrm{i}-3)}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{2(-\mathrm{i}-3)}{(\mathrm{i}-3)(-\mathrm{i}-3)}=\frac{-6-2\mathrm{i}}{10}\\ &\Leftrightarrow z=-\frac{3}{5}-\frac{\mathrm{i}}{5}. \end{aligned}$$
Il y a donc une unique solution, qui vaut $-\frac{3}{5}-\frac{\mathrm{i}}{5}$.
2. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a
$$\begin{aligned} 3\mathrm{i}+1-\mathrm{i}z=4-\mathrm{i} &\Leftrightarrow -\mathrm{i}z=4-\mathrm{i}-3\mathrm{i}-1=3-4\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{3-4\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\frac{3\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}\times\mathrm{i}}=\frac{3\mathrm{i}+4}{1}=4+3\mathrm{i}. \end{aligned}$$
Il y a donc une unique solution, qui vaut $4+3\mathrm{i}$.
3. La présence d'un z et d'un $\bar{z}$ suggère d'écrire $z=a+\mathrm{i}b$. Pour $a,b\in\mathbf{R}$, et $z=a+\mathrm{i}b$, on a donc
$$\begin{aligned} (1-\mathrm{i})z+\bar{z}=4-3\mathrm{i} &\Leftrightarrow (1-\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=4-3\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow a+b\mathrm{i}-a\mathrm{i}+b+a-b\mathrm{i}=4-3\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=4\\ -a\mathrm{i}=-3\mathrm{i}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=4-2a\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}. \end{aligned}$$
Il y a donc une unique solution, à savoir $z=3-2\mathrm{i}$.
4. Pour tout $z\in\mathbf{C}$, on a
$$\begin{aligned} 3\mathrm{i}z+2z=6\mathrm{i} &\Leftrightarrow (3\mathrm{i}+2)z=6\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{6\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+2}=\frac{6\mathrm{i}(2-3\mathrm{i})}{2^2+3^2}=\frac{18+12\mathrm{i}}{13}. \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution, qui vaut $\frac{18}{13} + \frac{12}{13}\mathrm{i}$.

5. Pour que l'équation ait du sens, on doit avoir $1 - 3\mathrm{i}z \neq 0$. Pour tout $z \in \mathbf{C}$ satisfaisant cette contrainte, on a

$$\begin{aligned}
\frac{2z+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}z} = 2+3\mathrm{i} \quad &\Leftrightarrow \quad 2z+\mathrm{i} = (2+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}z) = 2 - 6\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 9z \\
&\Leftrightarrow \quad 2z + 6\mathrm{i}z - 9z = -\mathrm{i} + 2 + 3\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad (-7+6\mathrm{i})z = 2+2\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{2+2\mathrm{i}}{-7+6\mathrm{i}} = \frac{(2+2\mathrm{i})(-7-6\mathrm{i})}{(-7)^2+6^2} \\
&\qquad\quad = \frac{-14+12-12\mathrm{i}-14\mathrm{i}}{49+36} = \frac{-2-26\mathrm{i}}{85}.
\end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution, qui vaut $-\frac{2}{85} - \frac{26}{85}\mathrm{i}$.

6. Ici on pourrait écrire $z = a + \mathrm{i}b$, mais ce n'est en fait pas nécessaire. En effet, pour $z \in \mathbf{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{2z+\mathrm{i}}{1-\bar{z}}} = 2+\mathrm{i} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\overline{\frac{2z+\mathrm{i}}{1-\bar{z}}}\right)} = \overline{2+\mathrm{i}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2z+\mathrm{i}}{\overline{\overline{1-\bar{z}}}} = 2-\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2z+\mathrm{i}}{1-z} = 2-\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad 2z+\mathrm{i} = (2-\mathrm{i})(1-z) = 2 - 2z - \mathrm{i} + \mathrm{i}z \\
&\Leftrightarrow \quad 2z + 2z - \mathrm{i}z = -\mathrm{i} + 2 - \mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad (4-\mathrm{i})z = 2-2\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{2-2\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}} = \frac{(2-2\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{4^2+1^2} = \frac{8+2\mathrm{i}-8\mathrm{i}+2}{17} = \frac{10-6\mathrm{i}}{17}.
\end{aligned}$$

Il y a donc une seule solution, à savoir $z = \frac{16}{17} - \frac{6}{17}\mathrm{i}$.

Exercice 1.3. (*)

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

1. $1+\mathrm{i}$,
2. $3+3\mathrm{i}$,
3. $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$,
4. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$,

5. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$,
6. $-\frac{4}{3}\mathrm{i}$,
7. $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,
8. $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$,
9. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4$,
10. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5+(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5$,
11. $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$,
12. $\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2-2\mathrm{i}}$,
13. $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

Solution de l'exercice 1.3

1. On a $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

   Soit θ un argument 1+i, alors on a $\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Une solution est alors $\theta=\pi/4$.

   (Les autres arguments sont alors de la forme $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, avec $k\in\mathbf{Z}$.)
2. On a $|3+3\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

   Soit θ un argument 3+3i, alors on a $\cos(\theta)=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Une solution est alors $\theta=\pi/4$.
3. On a $|1+\mathrm{i}\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$.

   Soit θ un argument de $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. Alors on a $\cos(\theta)=\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Une solution est alors $\theta=\pi/3$.
4. On a $|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$.

   Soit θ un argument de $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. Alors on a $\cos(\theta)=\frac{-1}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Une solution est alors $\theta=2\pi/3$.
5. On a $|\sqrt{3}+\mathrm{i}|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$.

   Soit θ un argument de $\sqrt{3}+\mathrm{i}$. Alors on a $\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{2}$. Une solution est alors $\theta=\pi/6$.
6. On a directement $|\frac{4}{3}\mathrm{i}|=\frac{4}{3}$, et un argument est $-\pi/2$.
7. On peut simplifier la fraction pour arriver à i qui est de module 1 et d'argument $\pi/2$.

8. En simplifiant la fraction, on arrive à $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, qui est de module 1 et d'argument $-\pi/2$.
9. On a vu à la quesiton 3 que $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ est de module 2 et d'argument $\pi/3$. Donc sa puissance 4-ième est de module $2^4 = 16$ et d'argument $4\pi/3$.
10. En passant par la forme polaire, on a $1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, donc $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^5 = 2^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,5\pi/3}$, et de même on a $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^5 = 2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,5\pi/3}$. On a alors $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^5 + (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^5 = 32(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,5\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,5\pi/3}) = 32$. Ce dernier nombre est de module 32 et d'argument 0.
11. On peut remarquer que $\sqrt{3} - \mathrm{i} = -\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$, donc cette fraction est égale à $\frac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, qui est de module 1 et d'argument $\pi/2$.
12. En passant par la forme polaire, on a $\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$, et $2 - 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\mathrm{i}\pi/4}$, donc le quotient est égal à $\frac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}}{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6+\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.

   Ainsi le module est 1 et un argument est $\pi/12$.
13. On a
$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)} = \mathrm{e}^{\cos(\theta)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin(\theta)}.$$
   Le module est donc $\mathrm{e}^{\cos(\theta)}$ et l'argument $\sin(\theta)$.

Exercice 1.4. (*)

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. tout nombre réel a pour argument 0.
2. tout nombre réel strictement négatif a pour argument π.
3. tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument $\pi/2$ ou $3\pi/2$.
4. le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
5. si deux nombres complexes ont le même argument alors leur produit est réel.
6. le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
7. si deux nombres complexes non nuls ont le même argument alors leur quotient est réel.
8. si deux nombres complexes non nuls ont le même module alors leur quotient a pour module 1.

Solution de l'exercice 1.4

1. C'est faux : tout nombre réel a pour argument 0 s'il est strictement positif, et π s'il est strictement négatif.
2. C'est vrai. En effet tout nombre réel strictement négatif $-x$ s'écrit aussi $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.
3. C'est vrai. Tout nombre imaginaire pur non nul est de la forme $\mathrm{i}x$ ou $-\mathrm{i}x$ avec $x \in \mathbf{R}_+$. Dans le premier cas, on peut l'écrire $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, et dans le second cas $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/2}$.
4. C'est vrai. Si un nombre est de la forme $\mathrm{i}x$ avec x réel, alors son opposé et son conjugué sont tous deux égaux à $-\mathrm{i}x$.
5. C'est faux. Par exemple on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$.
6. C'est vrai. S'ils sont imaginaires purs, ils sont de la forme $\mathrm{i}x$ et $\mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. On a alors $\mathrm{i}x \cdot \mathrm{i}y = -xy$, qui est réel.
7. C'est vrai. On peut les écrire sous la forme $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbf{R}_+^*$, et leur quotient vaut alors r_1/r_2, qui est réel (positif).
8. C'est vrai. On peut les écrire sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, et leur quotient vaut alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$ qui est bien de module 1.

Exercice 1.5. (*)

Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. le module de z est égal au module de son conjugué.
2. l'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.
3. le produit de z par une racine n-ième de l'unité a le même module que z.
4. l'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z.
5. si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π.
6. l'argument de z^2 est le double de l'argument de z.
7. l'argument de $z/\overline{z}$ est égal à l'argument de z^2.

Solution de l'exercice 1.5

1. C'est vrai. Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $\bar{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, et z et $\bar{z}$ sont tous deux de module r.
2. C'est vrai. Avec les notations précédentes les deux arguments sont θ et $-\theta$, qui sont bien opposés.
3. C'est vrai. Comme une racine n-ième de l'unité est de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2k\pi/n}$ avec k et n entiers, c'est un nombre de module 1, et donc multiplier par celle-ci ne change pas le module.
4. C'est faux. Par exemple si z est un réel strictement positif, il a 0 pour argument, tandis que $-z$ est un réel négatif qui n'a pas $-0 = 0$ pour argument.
5. C'est vrai. Si θ est un argument de z compris dans $[0, 2\pi[$ et si z est de partie imaginaire positive, alors on a $\sin(\theta) \geqslant 0$, ce qui implique que θ est entre 0 et π.
6. C'est vrai. Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $z^2 = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\theta}$, et donc 2θ est un argument de z^2.
7. C'est vrai. Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $\bar{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, et donc $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-(-\theta))} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\theta}$. Comme $z^2 = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\theta}$, les deux nombres ont bien le même argument.

Exercice 1.6. (**) Soient $a = \rho e^{i\theta}$ et $b = \rho e^{i\theta'}$ deux nombres complexes de même module.

1. Montrer que

$$a + b = 2\rho \cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} .$$

2. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants (θ est un paramètre réel).

(a) $1 + \mathrm{i}(1 + \sqrt{2})$

(b) $(1 + \sqrt{2}) - \mathrm{i}$,

(c) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$,

(d) $1 + \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Solution de l'exercice 1.6

1. On a
$$\begin{aligned} a+b &= \rho(e^{i\theta}+e^{i\theta'}) \\ &= \rho e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}\right) \\ &= 2\rho\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\,. \end{aligned}$$

2. (a) On a $|1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2})| = \sqrt{1^2+(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+1+2+2\sqrt{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Pour l'argument, on utilise la question précédente : $1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2}) = a+b$ avec
$$a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } b=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\,.$$
Donc,
$$a+b=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}e^{i\frac{3\pi}{8}}\,.$$
Comme $\cos\frac{3\pi}{8}\geqslant 0$ ($3\pi/8$ est dans $[0,\pi/2]$), on en déduit que la forme ci-dessus est la forme exponentielle de $a+b$ et que $\frac{3\pi}{8}$ est l'argument de $a+b$, donc de $1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2})$.

   (b) La même stratégie que dans la question précédente donne $|(1+\sqrt{2})-\mathrm{i}] = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$, et un argument est $-\pi/8$.

   (c) La même stratégie donne :
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\theta/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\theta/2}2\cos(\theta/2) = 2\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\theta/2}\,. \end{aligned}$$
Si $\theta/2$ est dans $[-\pi/2,\pi/2]$ modulo 2π, le module vaut donc $2\cos(\theta/2)$, et un argument $3\theta/2$.
Si $\theta/2$ est dans $[\pi/2,3\pi/2]$ modulo 2π, le module vaut donc $-2\cos(\theta/2)$, et un argument $3\theta/2+\pi$.

   (d) La même stratégie que précédemment donne
$$1+\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta) = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}) = 2\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$
Si $\theta/2$ est dans $[-\pi/2,\pi/2]$ modulo 2π, le module est donc $2\cos(\theta/2)$ et un argument $\theta/2$.

Si $\theta/2$ est dans $[\pi/2, 3\pi/2]$ modulo 2π, le module est donc $-2\cos(\theta/2)$ et un argument $\theta/2+\pi$.

Exercice 1.7. (**) Soit a un paramètre complexe. Résoudre en l'inconnue z complexe les équations suivantes :

1. $az+3=2z+i$
2. $az^2+bz=0$

Solution de l'exercice 1.7

1. Pour tous a et z complexes, on a :
$$az+3=2z+i \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)z=i-3$$
On distingue deux cas :
— Premier cas : $a=2$. Dans ce cas,
$$az+3=2z+i \quad \Leftrightarrow \quad 0=i-3$$
qui est toujours faux. Dans ce cas, l'équation n'a pas de solution.
— Deuxième cas : $a\neq 2$. Dans ce cas,
$$az+3=2z+i \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{i-3}{a-2}$$
Dans ce cas, l'équation admet une unique solution, qui est $\frac{i-3}{a-2}$.
2. Pour tous a, b et z complexes, on a :
$$\begin{aligned} az^2+bz=0 \quad &\Leftrightarrow \quad z(az+b)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=0 \\ \text{ou} \\ az+b=0 \end{cases} \end{aligned}$$
On distingue trois cas :
— Premier cas : $a=0$ et $b=0$. Dans ce cas, $az+b$ est nul pour tout z complexe, et donc az^2+bz est nul pour tout z complexe, donc l'ensemble des solutions est $\mathbf{C}$ tout entier.
— Deuxième cas : $a=0$ et $b\neq 0$. Dans ce cas, pour tout z complexe, $az+b$ est égal à b, qui est différent de 0, et donc
$$az^2+bz=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=0\ .$$

Il y a donc une unique solution, qui est 0.

— Troisième cas : $a \neq 0$. Alors,

$$az^2 + bz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ z = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Dans ce cas, l'équation admet deux solutions, qui sont 0 et $-\frac{b}{a}$. Ces deux nombres sont distincts si et seulement si $b \neq 0$.

Exercice 1.8. (**)

Calculer les racines carrées (complexes), sous forme algébrique, des nombres suivants

1. -1,
2. i,
3. $1 + \mathrm{i}$,
4. $-1 - \mathrm{i}$,
5. $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$,
6. $3 + 4\mathrm{i}$,
7. $8 - 6\mathrm{i}$,
8. $7 + 24\mathrm{i}$,
9. $3 - 4\mathrm{i}$,
10. $24 - 10\mathrm{i}$.

Solution de l'exercice 1.8

En dehors des solutions évidentes (pour (1)) et des situations où passer sous forme exponentielle est possible (pour (2)), la stratégie est toujours la même (voir le cours) : pour chercher les racines de $a + \mathrm{i}b$, on résout l'équation $(x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b$, où x et y sont deux inconnues réelles. En séparant parties réelle et imaginaire, on a le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{cases}.$$

Plutôt que de le résoudre comme ça, on écrit une autre équation en passant au module : on a $|x + \mathrm{i}y|^2 = |a + \mathrm{i}b|$, ce qui devient

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a alors deux équations en x^2 et y^2, ce que l'on peut résoudre.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= a \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x^2 &= \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ y^2 &= \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{cases}, \text{ et donc } \begin{cases} x &= \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{cases}.$$

Maintenant, cela donne deux solutions pour x et deux pour y. Mais les $2 \times 2 = 4$ choix de signes ne marchent pas tous : en effet, la condition $2xy = a$ impose que si a est positif, alors x et y sont de même signe, et si a est négatif, x et y sont de signes opposés.
Voici les réponses détaillées :

1. i et $-$i.
2. On a $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, donc les racines carrées sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $1 + \mathrm{i}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ 2xy & = 1 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{2} \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, d'où $x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$, et $y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Comme le produit xy est positif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}})$ et $(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}})$. Comme on sait qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $z^2 = 1 + \mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.
4. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $-1 - \mathrm{i}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = -1 \\ 2xy & = -1 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{2} \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, d'où $x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, et $y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$. Comme le produit xy est négatif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}})$ et $(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}})$. Comme on sait qu'il y a exactement deux solutions

à l'équation $z^2 = -1 - \mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$.

5. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ 2xy & = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{1+3} = 2 \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ et $y^2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, d'où $x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $-\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, et $y = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme le produit xy est positif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Comme on sait qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $z^2 = -1-\mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $\frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $3 + 4\mathrm{i}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 3 \\ 2xy & = 4 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{3+5}{2} = 4$ et $y^2 = \frac{5-3}{2} = 1$, d'où $x = \sqrt{4} = 2$ ou $-\sqrt{2} = -2$, et $y = \sqrt{1} = 1$ ou $-\sqrt{1} = -1$. Comme le produit xy est positif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(2, 1)$ et $(-2, -1)$. Comme on sait qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $z^2 = -1 - \mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $2 + \mathrm{i}$ et $-2 - \mathrm{i}$.

7. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $8 - 6\mathrm{i}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 8 \\ 2xy & = 6 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{8^2+6^2} = 10 \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{8+10}{2} = 9$ et $y^2 = \frac{10-8}{2} = 1$, d'où $x = \sqrt{9} = 3$ ou $-\sqrt{9} = -3$, et $y = \sqrt{1} = 1$ ou $-\sqrt{1} = -1$. Comme le produit xy est négatif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(3, -1)$ et $(-3, 1)$. Comme

on sait qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $z^2 = -1 - \mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $3 - \mathrm{i}$ et $-3 + \mathrm{i}$.

8. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $7 + 24\mathrm{i}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 7 \\ 2xy & = 24 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25 \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{7+25}{2} = 16$ et $y^2 = \frac{25-7}{2} = 9$, d'où $x = \sqrt{16} = 4$ ou $-\sqrt{16} = -4$, et $y = \sqrt{9} = 3$ ou $-\sqrt{9} = -3$. Comme le produit xy est positif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(4, 3)$ et $(-4, -3)$. Comme on sait qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $z^2 = -1 - \mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $4 + 3\mathrm{i}$ et $-4 - 3\mathrm{i}$.

9. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $3 - 4\mathrm{i}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 3 \\ 2xy & = -4 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{5+3}{2} = 4$ et $y^2 = \frac{5-3}{2} = 1$, d'où $x = \sqrt{4} = 2$ ou $-\sqrt{4} = -2$, et $y = \sqrt{1} = 1$ ou $-\sqrt{1} = -1$. Comme le produit xy est négatif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(2, -1)$ et $(-2, 1)$. Comme on sait qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $z^2 = -1 - \mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $2 - \mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$.

10. Si $x + \mathrm{i}y$ est une racine carrée de $24 - 10\mathrm{i}$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 24 \\ 2xy & = -10 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \end{cases},$$
et donc $x^2 = \frac{26+24}{2} = 25$ et $y^2 = \frac{26-24}{2} = 1$, d'où $x = \sqrt{25} = 5$ ou $-\sqrt{25} = -5$, et $y = \sqrt{1} = 1$ ou $-\sqrt{1} = -1$. Comme le produit xy est négatif, on a donc deux possibilités pour le couple (x, y), à savoir $(5, -1)$ et $(-5, 1)$. Comme on sait qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $z^2 = -1 - \mathrm{i}$, ces deux solutions sont donc $5 - \mathrm{i}$ et $-5 + \mathrm{i}$.

Exercice 1.9. (**)

1. Calculer les racines carrées de $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$ sous forme algébrique.

   En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, exprimées à l'aide des quatre opérations standards et du signe $\sqrt{\ }$.

2. Calculer les racines carrées de $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/2$ sous forme algébrique.

   En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Solution de l'exercice 1.9

Pour la recherche des racines carrées, la stratégie est expliquée dans la correction de l'exercice précédent.

1. Soit $x+\mathrm{i}y$ une racine de $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$. On a alors $x^2-y^2 = 1/\sqrt{2}$ et $x^2+y^2 = 1$, donc $x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme on a $2xy = 1/\sqrt{2}$, les réels x et y sont de même signe, et donc on a

   $$x+\mathrm{i}y = \pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right).$$

   Le lien avec les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ est le suivant. On a $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, et donc les racines carrées de $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$ sont $\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$. Par conséquent la partie réelle des racines carrées vaut $\pm\cos(\pi/8)$ et la partie imaginaire $\pm\sin(\pi/8)$. Pour ce qui est des signes, puisqu'on a $0 < \pi/8 < \pi/2$, le cosinus et le sinus de $\pi/8$ sont tous deux positifs. On obtient alors

   $$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

2. C'est la même stratégie. On a $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, et donc les racines carrées de $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/2$ sont $\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$. Par conséquent la partie réelle des racines carrées vaut $\pm\cos(\pi/12)$ et leur partie imaginaire $\pm\sin(\pi/12)$. Pour ce qui est des signes, puisqu'on a $0 < \pi/12 < \pi/2$, le cosinus et le sinus de $\pi/12$ sont tous deux positifs.

   Soit $x+\mathrm{i}y$ une racine carrée de $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/2$. On a alors $x^2-y^2 = \sqrt{3}/2$ et $x^2+y^2 = 1$, donc $x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ et $y^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$. Comme on a $2xy = 1/2$, les réels x et y sont de même signe, et donc on a

   $$x+\mathrm{i}y = \pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right),$$

et par conséquent

$$\cos(\pi/12) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \quad \text{et} \quad \sin(\pi/12) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice 1.10. (**)

Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, en donnant les solutions sous forme algébrique

1. $z^2 + z + 1 = 0$,
2. $z^2 - z + 1 = 0$,
3. $z^2 + 2z + 4 = 0$,
4. $z^2 + 4z + 5 = 0$,
5. $4z^2 - 2z + 1 = 0$,
6. $z^2 + (1+2\mathrm{i})z + \mathrm{i} - 1 = 0$,
7. $z^2 - (3+4\mathrm{i})z - 1 + 5\mathrm{i} = 0$,
8. $z^2 - (1-\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$,
9. $z^2 - (11-5\mathrm{i})z + 24 - 27\mathrm{i} = 0$.

Solution de l'exercice 1.10

On utilise à chaque fois la formule du cours : les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont les deux complexes $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ où δ est une racine carrée (complexe a priori) de $b^2 - 4ac$. La principale difficulté est donc l'extraction d'une racine carrée.

1. $z = -\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
2. $z = \dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
3. $z = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$,
4. $z = -2 \pm \mathrm{i}$,
5. $z = \dfrac{1}{4}(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$,
6. $z = -1 - \mathrm{i}$ ou i,
7. $z = 1 + \mathrm{i}$ ou $2 + 3\mathrm{i}$,
8. $z = -\mathrm{i}$ ou 1,
9. $z = 5 - 2\mathrm{i}$ ou $6 - 3\mathrm{i}$.

À chaque fois, on peut bien vérifier que la somme des deux racines est $-b/a$ et leur produit c/a.

Exercice 1.11. (**)

1. Montrer que si P est un polynôme à coefficients réels et que z est une racine de P, alors $\bar{z}$ est également une racine de P.

2. Soit z un nombre complexe non réel. Trouver deux nombres réels p, q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Solution de l'exercice 1.11

1. Si $P(z) = 0$, avec $P(z) = a_d z^d + \ldots + a_0$, alors $\overline{P(z)} = \bar{0} = 0$, or comme P est à coefficients réels, en utilisant les propriétés des conugués,
$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_d z^d + \ldots + a_0} \\ &= \overline{a_d z^d} + \ldots + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_d}\,\overline{z^d} + \ldots + \overline{a_0} \\ &= a_d \overline{z^d} + \ldots + \overline{a_0} \\ &= P(\bar{z})\end{aligned}$$
Donc $P(\bar{z}) = 0$, donc $\bar{z}$ est une racine de P.
2. Il s'agit de trouver une équation du second degré à coefficients réels dont z est solution. D'après la question précédente, lorsqu'un nombre complexe z est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors $\bar{z}$ est aussi solution. Puisque le polynôme qu'on cherche est de degré 2, si z n'est pas réel, z et $\bar{z}$ sont distincts, et donc P aura pour uniques racines z et $\bar{z}$. Le seul polynôme qui peut convenir est alors $P(x) = (x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - (z+\bar{z})x + z \cdot \bar{z}$. Il faut alors prendre $p = -z - \bar{z} = -2\mathrm{Re}(z)$ et $q = z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Enfin, on vérifie que ce polynôme convient.

Exercice 1.12. (**)

Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, en donnant les solutions sous la forme que vous voulez

1. $z^3 = \mathrm{i}$
2. $z^3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{4}$,
3. $z^3 = 2 - 2\mathrm{i}$,
4. $z^4 = 1$,
5. $z^4 = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$,
6. $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

Solution de l'exercice 1.12

Comme ce sont des équations de degré au moins 3, la seule chose que l'on sait faire, c'est résoudre des équations de type $z^k = a$ en passant sous forme trigonométrique. En écrivant $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec r, θ réels, les solutions sont $\sqrt[k]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/k}$, $\sqrt[k]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)/k}$, $\sqrt[k]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+4\pi)/k}, \ldots, \sqrt[k]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2(k-1)\pi)/k}$.

1. On a $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, donc les solutions sont $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}9\pi/6}$.
2. On a $\dfrac{-1+\mathrm{i}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/4}$, donc les solutions sont $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,11\pi/12}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,19\pi/12}$.
3. On a $2-2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$ donc les solutions sont $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/12}$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,7\pi/12}$ ou $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,15\pi/12}$,
4. Les solutions sont $z = 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/2}$, ou plus simplement $z = 1, \mathrm{i}, -1$ ou $-\mathrm{i}$.
5. On a $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$, donc les solutions sont $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4\pi/6}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,7\pi/6}$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,10\pi/6}$.
6. De $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ on déduit $\dfrac{2z+1}{z-1} = 1, \mathrm{i}, -1$ ou $-\mathrm{i}$. On a alors quatre équations possibles.
   - $\dfrac{2z+1}{z-1} = 1 \iff 2z+1 = z-1 \iff z = -2,$
   - $\dfrac{2z+1}{z-1} = \mathrm{i} \iff 2z+1 = \mathrm{i}z - \mathrm{i} \iff z = \dfrac{-1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}},$
   - $\dfrac{2z+1}{z-1} = -1 \iff 2z+1 = -z+1 \iff z = 0,$
   - $\dfrac{2z+1}{z-1} = -\mathrm{i} \iff 2z+1 = -\mathrm{i}z + \mathrm{i} \iff z = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}.$

   L'équation admet donc quatre solutions, à savoir les nombres -2, $\frac{-1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$, 0, et $\frac{-1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

Exercice 1.13. (**)

Montrer les égalités suivantes, en utilisant la formule de Moivre

1. $\cos(4x) = 8\cos(x)^4 - 8\cos(x)^2 + 1$,
2. $\sin(4x) = 8\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)$.

Solution de l'exercice 1.13

1. En utilisant la formule du binôme (ou en développant $((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4)$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4x}) = \mathrm{Re}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^4)\\
&= \mathrm{Re}((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4)\\
&= \mathrm{Re}(\cos(x)^4 + 4\mathrm{i}\cos(x)^3\sin(x) - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 - 4\mathrm{i}\cos(x)\sin(x)^3 + \sin(x)^4)\\
&= \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4\\
&= \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2(1-\cos(x)^2) + (1-\cos(x)^2)^2\\
&= 8\cos(x)^4 - 8\cos(x)^2 + 1.
\end{aligned}$$

2. En utilisant la formule du binôme (ou en développant $((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4)$, on a

$$\begin{aligned}
\sin(4x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4x}) = \mathrm{Im}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^4)\\
&= \mathrm{Im}((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4)\\
&= \mathrm{Im}(\cos(x)^4 + 4\mathrm{i}\cos(x)^3\sin(x) - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 - 4\mathrm{i}\cos(x)\sin(x)^3 + \sin(x)^4)\\
&= 4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3\\
&= 4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)(1-\cos(x)^2)\sin(x)\\
&= 8\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x).
\end{aligned}$$

Exercice 1.14. (**)

Linéariser les expressions suivantes (c'est-à-dire les écrire comme sommes d'expressions de type $a\cos(kx)$ et $b\sin(kx)$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$).

1. $\cos(x)^3$,
2. $\sin(x)^3$,
3. $\cos(x)^4$,
4. $\sin(x)^4$,
5. $\cos(x)^2\sin(x)^2$,
6. $\cos(x)\sin(x)^3$,
7. $\cos(x)^3\sin(x)$,
8. $\cos(x)^3\sin(x)^2$,
9. $\cos(x)^2\sin(x)^3$,
10. $\cos(x)\sin(x)^4$.

Solution de l'exercice 1.14

1. On a

$$\begin{aligned}
\cos(x)^3 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3\\
&= \frac{1}{8}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3+3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3)\\
&= \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3x})\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3x}}{2}+3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x)).
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\sin(x)^3 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3\\
&= \frac{1}{-8\mathrm{i}}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3+3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2+(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3)\\
&= \frac{-1}{8\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3x}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3x})\\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3x}}{2\mathrm{i}}+3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)\\
&= \frac{1}{4}(-\sin(3x)+3\sin(x)).
\end{aligned}$$

Les autres questions se traitent de la même façon.

Exercice 1.15. (*)

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 3+\mathrm{i} \text{ et } z_B = 1+2\mathrm{i}$$

On note O l'origine.

1. Les points O, A et B sont-ils alignés ?
2. On note C le point d'affixe $-1-\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Quelle est l'affixe du centre de ce parallélogramme ?

Solution de l'exercice 1.15

1. Les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\arg(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O})$ est un multiple entier de π, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{z_B}{z_A} \in \mathbf{R}$, ce qui n'est pas le cas (soit on le voit directement, soit on met $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique pour s'en convaincre), donc les points O, A et B ne sont pas alignés.

2. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire si et seulement si $z_C - z_D = z_B - z_A$, soit $z_D = z_C - z_B + z_A = (-1-\mathrm{i}) - (1+2\mathrm{i}) + (3+\mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i}$.

3. Notons I le centre du parallélogramme. C'est le milieu du segment $[A, C]$ donc $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = 1$.

Exercice 1.16. (*)

Soient A, B, C, D quatre points du plan. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$, $[A, C]$, $[B, D]$.

1. En utilisant les nombres complexes, montrer que les segments $[I, K]$, $[J, L]$ et $[M, N]$ ont le même milieu.
2. Montrer que le quadrilatère de sommets I, J, K, L est un parallélogramme.

Solution de l'exercice 1.16

1. Notons E, F et G les milieux respectifs de $[I, K]$, $[J, L]$ et $[M, N]$. Alors

$$z_E = \frac{z_I + z_K}{2} = \frac{\frac{z_A + z_B}{2} + \frac{z_C + z_D}{2}}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4},$$

$$z_F = \frac{z_J + z_L}{2} = \frac{\frac{z_B + z_C}{2} + \frac{z_D + z_A}{2}}{2} = z_E$$

et

$$z_G = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{\frac{z_A + z_C}{2} + \frac{z_B + z_D}{2}}{2} = z_E = z_F$$

donc les segments $[I, K]$, $[J, L]$ et $[M, N]$ ont le même milieu.

2. Les diagonales $[I, K]$ et $[J, L]$ du quadrilatère $IJKL$ se coupent en leur milieu donc $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 1.17. (**)

On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$. Soit A, B, C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si on a $z_A + j\,z_B + j^2\,z_C = 0$ ou $z_A + j^2\,z_B + j\,z_C = 0$.

Solution de l'exercice 1.17

Commençons par remarquer que $1 + j + j^2 = 0$. Donc en retranchant $0 = z_A + jz_A + j^2 z_A$ de part et d'autre des égalités, on obtient

$$\begin{aligned}
z_A + jz_B + j^2 z_C = 0 &\text{ ou } z_A + j^2 z_B + jz_C = 0 \\
&\Leftrightarrow j(z_B - z_A) + j^2(z_C - z_A) = 0 \text{ ou } j^2(z_B - z_A) + j(z_C - z_A) = 0 \\
&\Leftrightarrow A = B = C \text{ ou } z_B - z_A = -j(z_C - z_A) = e^{-\mathrm{i}2\pi/3}(z_C - z_A) \\
&\qquad \text{ou } z_C - z_A = e^{-\mathrm{i}2\pi/3}(z_B - z_A) \\
&\Leftrightarrow A = B = C \text{ ou } C \text{ est l'image de } B \text{ par la rotation de centre } A \text{ et d'angle } 2\pi/3 \\
&\qquad \text{ou } B \text{ est l'image de } C \text{ par la rotation de centre } A \text{ et d'angle } 2\pi/3 \\
&\Leftrightarrow A = B = C \text{ ou ABC est un triangle équilatéral.}
\end{aligned}$$

Exercice 1.18. (***)

Le but de l'exercice est d'exprimer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ à l'aide des opération usuelles. On en déduira une façon de construire un pentagone régulier à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

1. Soit P le polynome défini par $P(z) = z^5 - 1$. Quelles sont les racines complexes de P, exprimées sous forme polaire ?
2. Soit Q le polynome défini par $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Montrer qu'on a $Q(z) \times (z-1) = P(z)$. En déduire que les racines complexes de Q sont les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$.
3. Pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{2\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$? et pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$?
4. En utilisant l'égalité $Q(z) = z^2(z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2})$, montrer que si z est racine de Q, alors $(z + z^{-1})$ est racine du polynôme R défini par $R(y) = y^2 + y - 1$.
5. Déterminer les racines de R et montrer qu'elles sont réelles. On les note y_1, y_2 avec $y_1 > 0$.
6. En utilisant les questions 3, 4, 5 et 6, montrer qu'on a $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

7. Étant donné un segment dont la longueur est 1, comment construire un segment dont la longueur est $\sqrt{5}$ à l'aide d'une règle non graduée, d'une équerre, et d'un compas ? (penser à Pythagore)
8. En déduire comment construire un segment dont la longueur est $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
9. En déduire comment construire à partir d'un repère orthonormé le point de coordonnées $(\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5}))$ à la règle et au compas.
10. Comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas?

Solution de l'exercice 1.18

1. Les racines complexes de P sont les racines cinquièmes de l'unité, à savoir : 1, $e^{\mathrm{i}2\pi/5}$, $e^{\mathrm{i}4\pi/5}$, $e^{\mathrm{i}6\pi/5}$ et $e^{\mathrm{i}8\pi/5}$.
2. L'égalité $Q(z) \times (z-1) = P(z)$ se vérifie en développant :

$$Q(z)\times(z-1) = zQ(z)-Q(z) = (z^5+z^4+z^3+z^2+z)-(z^4+z^3+z^2+z+1) = z^5-1 = P(z).$$

On a ainsi

$$Q(z) \times (z-1) = P(z) = \prod_{k=0}^{4}(z - e^{i2k\pi/5}) = (z-1)\prod_{k=1}^{4}(z - e^{i2k\pi/5})$$

donc $Q(z) = \prod_{k=1}^{4}(z - e^{i2k\pi/5})$ et donc les racines de Q sont $e^{\mathrm{i}2\pi/5} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{5})$, $e^{\mathrm{i}4\pi/5} = \cos(\frac{4\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{4\pi}{5})$, $e^{\mathrm{i}6\pi/5} = e^{-\mathrm{i}4\pi/5} = \cos(\frac{4\pi}{5}) - \mathrm{i}\sin(\frac{4\pi}{5})$ et $e^{\mathrm{i}8\pi/5} = e^{-\mathrm{i}2\pi/5} = \cos(\frac{2\pi}{5}) - \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{5})$.
3. De façon générale, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{-\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta)} = 1$ par propriété de l'exponentielle, donc l'inverse de $e^{\mathrm{i}\theta}$ est $e^{-\mathrm{i}\theta}$, et on obtient les égalités voulues en appliquant ceci, ainsi que la parité de cos et l'imparité de sin à $\theta = \frac{2\pi}{5}$ et $\theta = \frac{4\pi}{5}$.
4. On a bien $z^2(z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2}) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = Q(z)$ pour tout $z \neq 0$. Si z est une racine de Q, $z \neq 0$ (sinon, 0 serait racine de P) et donc $Q(z) = 0$ entraîne $z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} = 0$, ou encore $0 = (z+z^{-1}) + (z^2+2+z^{-2}) - 1 = (z+z^{-1}) + (z+z^{-1})^2 - 1 = R(z+z^{-1})$, donc $(z+z^{-1})$ est bien une racine de R.
5. Le discriminant de R est $\Delta = 1-(-4) = 5$ donc les racines de R sont réelles et égales à $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} =: y_1$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} =: y_2$.
6. D'après les questions 3 et 4, $e^{i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ (resp. $e^{i4\pi/5} + e^{-i4\pi/5} = 2\cos(\frac{4\pi}{5})$) est racine de R, et comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$ (resp. $\cos(\frac{4\pi}{5}) <$

0) car $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ (resp. $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$), d'après la question 5, $2\cos(\frac{2\pi}{5}) = y_1$ (resp. $2\cos(\frac{4\pi}{5}) = y_2$), et donc $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (resp. $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$).

7. Notons $[A, B]$ le segment de longueur 1 considéré. Traçons à l'aide de l'équerre la perpendiculaire Δ à (AB) passant par B, et notons C l'un des deux points de Δ à distance 2 de B, obtenu en reportant sur Δ, en partant de B, 2 fois la longueur de $[A, B]$ à l'aide du compas. Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1 + 2^2 = 5$, donc $AC = \sqrt{5}$.
8. Pour construire un segment $[A, D]$ de longueur $-1 + \sqrt{5}$, il suffit de retrancher à $[A, C]$ un segment de longueur 1 à l'aide du compas (et du segment de longueur 1 initial). Pour construire à partir de là un segment de longueur $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, on pourrait utiliser le théorème de Thalès (ce qui nécessiterait de construire des parallèles) mais il y a ici plus simple. On construit le milieu I du segment $[A, D]$ en traçant sa médiatrice à l'aide du compas (pour construire deux points équidistants des extrémités du segment) et de la règle (pour tracer la droite passant par ces deux points, qui coupe $[A, D]$ en son milieu). De la même façon, on construit le milieu M de $[A, I]$. On a alors $AM = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos(\frac{2\pi}{5})$.
9. On trace à l'aide du compas et d'un vecteur unitaire le cercle de centre l'origine O et de rayon 1. Grâce aux questions 6 et 7, on construit un segment de longueur $\cos(\frac{2\pi}{5})$. On reporte cette longueur sur l'axe des abscisses pour obtenir le point P d'abscisse $\cos(\frac{2\pi}{5})$, et on dresse à l'aide de l'équerre la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par P. Elle intersecte le cercle unité en deux points, celui d'ordonnée positive étant le point recherché, de coordonnées $(\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5}))$.

   Dans cette construction, on a utilisé deux fois une équerre, or ici, l'énoncé nous demande de n'utiliser qu'une règle et un compas. Mais ce n'est pas un problème car on peut tracer la perpendiculaire à une droite Δ en un point A donné à l'aide d'une règle et d'un compas : on trace deux points de Δ équidistants de A (de part-et-d'autre), appelés B et C, on construit un point D équidistant de B et C et différent de A (à l'aide du compas). La droite (AD) est alors la médiatrice de $[B, C]$ donc elle est perpendiculaire à $(BC) = \Delta$ en A, ce qu'on voulait.
10. Une fois qu'on a construit le cercle unité et son point Q_1 de coordonnées $(\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5}))$ comme décrit dans la question précédente, si on note Q_0 le

point de coordonnées $(1,0)$, $[Q_0, Q_1]$ constitue un côté de notre pentagone. Pour construire les trois sommets manquants, on reporte la longueur Q_0Q_1 3 fois sur le cercle, c'est à dire qu'on trace la deuxième intersection Q_2 du cercle de centre Q_1 et de rayon Q_0Q_1 avec le cercle unité, puis la deuxième intersection Q_3 du cercle de centre Q_2 et de rayon Q_0Q_1 avec le cercle unité, puis enfin la deuxième intersection Q_4 du cercle de centre Q_3 et de rayon Q_0Q_1 avec le cercle unité.

Exercice 1.19. (***)

On va démontrer le théorème de Napoléon (pour savoir si l'empereur a effectivement démontré ce théorème, rendez-vous sur Wikipedia ou sur https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/pe/node19.html).

Soient A, B, C trois points quelconques du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. On suppose qu'on tourne autour de ABC dans le sens trigonométrique direct. On construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux ABI, BCJ et CAK. On note P, Q, R les centres de ces triangles équilatéraux.

1. Donner les affixes des points I et P en fonction de z_A et z_B.
2. Donner de mêmes les affixes des points J, K, Q, R en fonction de z_A, z_B et z_C.
3. Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

Solution de l'exercice 1.19

Exercice 1.20. (***)

On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des nombres qui s'écrivent $m^2 + n^2$ avec m et n deux entiers relatifs.

1. Donner un exemple d'entier naturel qui est dans $\mathscr{G}$ et un exemple d'entier naturel qui n'est pas dans $\mathscr{G}$.
2. En utilisant la formule $|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2$ pour $z, z' \in \mathbf{C}$, montrer que $\mathscr{G}$ est stable par produit, c'est-à-dire que si $p, q \in \mathscr{G}$, alors $pq \in \mathscr{G}$.
3. En déduire que 221 est dans $\mathscr{G}$.

Solution de l'exercice 1.20

1. Le nombre 2 est dans $\mathscr{G}$ puisque $2 = 1^2 + 1^2$.

Le nombre 3 n'est pas dans $\mathscr{G}$. En effet puisqu'un carré est positif, si $3 = m^2 + n^2$, alors on a $m^2 \leqslant 3$ et $n^2 \leqslant 3$, donc m et n valent $0, 1$ ou -1. Or $1^2 = (-1)^2 = 1$, donc à l'aide de $0, 1$ et -1, on ne peut obtenir que $0, 1$, ou 2 comme nombre dans $\mathscr{G}$.

2. Si $m + \mathrm{i}n$ et $m' + \mathrm{i}n'$ sont deux nombres complexes, on a $(m + \mathrm{i}n)(m' + \mathrm{i}n') = (mm' - nn') + \mathrm{i}(mn' + nm')$. En passant aux carrés des normes, on a $|m+\mathrm{i}n|^2 = m^2+n^2$, $|m'+\mathrm{i}n'|^2 = m'^2+n'^2$, et $|(mm'-nn')+\mathrm{i}(mn'+nm')|^2 = (mm' - nn')^2 + (mn' + nm')^2$. On a donc l'égalité
$$(m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2) = (mm' - nn')^2 + (mn' + nm')^2,$$
qui est vraie pour tous $m, n, m', n' \in \mathbf{R}$. En particulier cette égalité montre que le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés. Donc si deux nombres z, z' sont dans $\mathscr{G}$, de la forme $z = m^2 + n^2$ et $z' = m'^2 + n'^2$, alors zz' est égal à $(mm' - nn')^2 + (mn' + nm')^2$, et donc appartient aussi à $\mathscr{G}$.
3. On a $221 = 13 \cdot 17$. Or on a $13 = 3^2 + 2^2$, donc $13 \in \mathscr{G}$, et on a $17 = 4^2 + 1^2$,donc $17 \in \mathscr{G}$. D'après la question précédente, on en déduit que 221 est dans $\mathscr{G}$.

   (On peut même calculer grace à la question précédente qu'on a $221 = (3 \cdot 4 - 2 \cdot 1)^2 + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 4)^2 = 10^2 + 11^2$.)