

Couplages



© N. Brauner, 2019, M. Stehlik 2020

Plan

- 1 Couplages
- 2 Couplages dans les graphes bipartis

Plan

- 1 Couplages
- 2 Couplages dans les graphes bipartis

Couplage

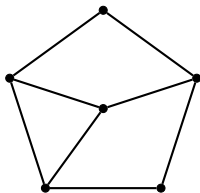
Définitions

- Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ disjointes telles que tout sommet de V est incident à au plus une arête de M .

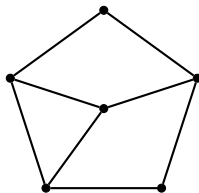
[*Matching*]

- La cardinalité maximale d'un couplage de G est notée $\nu(G)$.
- Un couplage est *parfait* s'il est incident à tous les sommets de V .

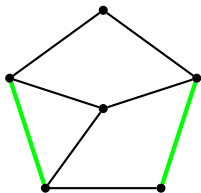
Couplage : exemples



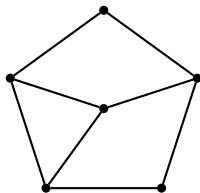
couplage *M*



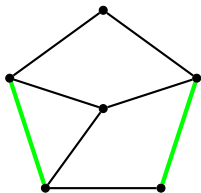
Couplage : exemples



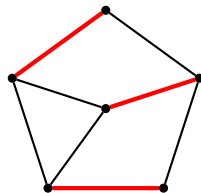
couplage *M*



Couplage : exemples



couplage M



couplage parfait M'

Couplage maximum vs couplage maximal

Définition

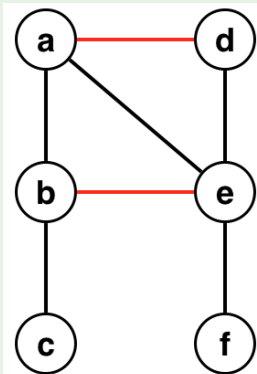
- Un *couplage maximum* dans un graphe $G = (V, E)$ est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes (c'est-à-dire de cardinalité maximale)
- Un *couplage maximal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un couplage M qui est maximal au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que le graphe induit par les sommets non couverts est un stable (toute arête du graphe possède au moins une extrémité commune avec M).

Couplage maximum vs couplage maximal : exemple

Exemple

On considère le graphe G ci-contre. On s'intéresse au couplage M matérialisé en rouge sur le graphe G .

- le couplage M est-il maximum ?
- le couplage M est-il maximal ?



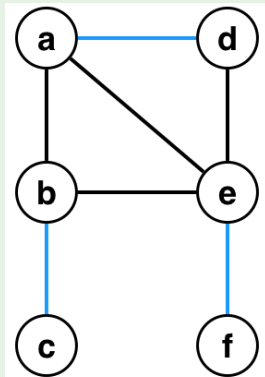
Couplage maximum vs couplage maximal : exemple

Exemple

Le couplage M est-il maximum ?

Le couplage M' représenté en bleu ci-contre contient strictement plus d'arêtes que le couplage M .

Donc le couplage M n'est pas maximum.



Couplage maximum vs couplage maximal : exemple

Exemple

Le couplage M est-il maximal ?

On dessine ci-contre le sous-graphe de G induit par les sommets de $V(G)$ non couverts par le couplage M .

Le graphe ainsi obtenu est un stable, donc le couplage M est maximal.

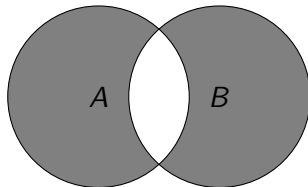


La différence symétrique

Définition

La différence symétrique de A et B , notée $A \triangle B$, est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B , mais pas dans les deux.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

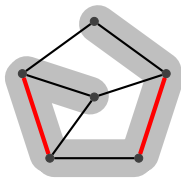


Chaînes alternées et augmentantes

Définition

Pour un couplage M donné :

- *Chaîne M -alternée* : chaîne simple dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M -augmentante* : chaîne M -alternée entre deux sommets non couplés dans M
(ie aucune arête de M n'est incidente à une extrémité de la chaîne).



couplage M

Observation

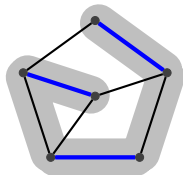
Soit M un couplage dans un graphe et supposons P une chaîne M -augmentante. Alors, $M \triangle P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.

Chaînes alternées et augmentantes

Définition

Pour un couplage M donné :

- *Chaîne M -alternée* : chaîne simple dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M -augmentante* : chaîne M -alternée entre deux sommets non couplés dans M
(ie aucune arête de M n'est incidente à une extrémité de la chaîne).



couplage $M \Delta P$

Observation

Soit M un couplage dans un graphe et supposons P une chaîne M -augmentante. Alors, $M \Delta P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.

Une caractérisation des couplages maximums

Théorème

Un couplage M dans un graphe G est maximum si et seulement si il n'y a pas de chaîne M -augmentante dans G .

⇒

S'il existe une chaîne M -augmentante alors on peut trouver un couplage de cardinalité supérieure. Donc si M est un couplage maximum alors, il n'existe pas de chaîne M -augmentante.

Une caractérisation des couplages maximums

⇐ On suppose que M n'est pas maximum. On démontre qu'il existe alors une chaîne M -augmentante.

- Soit N un couplage maximum, alors $|N| > |M|$
- Soit $G' = (V, M \triangle N)$
- Tous les sommets de G' sont de degré inférieur ou égal à 2 (N et M sont des couplages)
- Les composantes connexes de G' sont
 - des sommets isolés,
 - des cycles avec autant d'arêtes de M que de N ,
 - des chaînes où les arêtes de M et N alternent.
- Comme $|N| > |M|$, on a aussi davantage d'arêtes de N que de M dans G' . On a donc au moins une des chaînes de G' qui contient plus d'arêtes de N que de M .
- Cette chaîne est alors une chaîne M -augmentante.

Couplages et transversaux

Définition

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets T incident à toutes les arêtes du graphe :
 $\forall e \in E \quad \exists v \in T \quad \text{tel que } v \text{ est incident à } e$
- La cardinalité minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque : V est un transversal trivial de G .

Si T est un transversal de $G = (V, E)$, que peut-on dire de $G[V \setminus T]$?

Soit M un couplage et T un transversal. Comparez $|M|$ et $|T|$.¹

1. indice : chaque arête de M est incidente à au moins un sommet de T .

Lien entre couplage maximum et transversal minimum

- Dans les graphes quelconques : $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Dans les graphes bipartis : $\nu(G) = \tau(G)$
(preuve tout de suite après...)

Montrer que, pour tout graphe G , on a $\nu(G) \leq \tau(G)$

Trouver un graphe pour lequel $\nu(G) < \tau(G)$

Corollaire de $\nu(G) \leq \tau(G)$

Soit un graphe G . Si M est un couplage de G et T un transversal de G tels que $|M| = |T|$, alors M est un couplage maximum de G et T est un transversal minimum de G .

Attention : la réciproque n'est pas vraie puisqu'on peut avoir $\nu(G) < \tau(G)$!

Plan

- 1 Couplages
- 2 Couplages dans les graphes bipartis

Couplage dans les graphes bipartis

Algorithme 1 : Augmenter un couplage dans $G = (A \cup B, E)$ biparti

Données : un couplage M

Résultat : un couplage strictement plus grand que M ou " M est maximum"

orienter chaque arête de M de B vers A

orienter chaque arête de $E \setminus M$ de A vers B

Soit $A_M \subset A$ et $B_M \subset B$ les sommets qui ne sont pas couverts par M

si il y a un chemin P de A_M à B_M alors

└ retourner $M \Delta E(P)$

sinon

└ retourner M est optimal

Couplage dans les graphes bipartis

Théorème de Kőnig

Dans un graphe biparti G , on a $\nu(G) = \tau(G)$.

On donne ici une démonstration, mais elle n'est pas considérée comme étant au programme de l'UE.

On a vu que $\nu(G) \leq \tau(G)$, pour rappel :

Chaque arête du couplage doit être couverte par tout transversal. Comme deux arêtes ne sont pas incidentes à un même sommet, il faut au moins un sommet par arête. Donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.

Couplage dans les graphes bipartis

On exhibe un transversal qui a la même cardinalité qu'un couplage (cela permettra de conclure) :

- Soit M un couplage maximum, et (A, B) une bipartition de G .
- Orienter chaque arête de M de B vers A
- Orienter chaque arête de $E \setminus M$ de A vers B
- Soient A_1 et B_1 les sommets de A et B non touchés par M
- Soient A_2 et B_2 les sommets v touchés par M tels qu'il existe un chemin d'un sommet de A_1 à v
- Soient A_3 et B_3 les autres sommets (touchés par M et non atteignables depuis A_1)

On veut démontrer que

- $A_3 \cup B_2$ est un transversal de G .
- $|A_3 \cup B_2| = |M|$

Couplage dans les graphes bipartis

pas de chaîne augmentante \Rightarrow

- pas d'arête entre A_1 et B_1 :
car sinon on pourrait l'ajouter au couplage
- pas d'arête entre A_2 et B_1 :
S'il existe une telle arête ab ($a \in A_2$ et $b \in B_1$), alors $ab \notin M$
car $b \in B_1$ non touché par M . Donc elle se retrouve orientée
dans le sens $a \rightarrow b$. Or, comme il existe un chemin P de A_1
vers a (car $a \in A_2$), alors en prolongeant P par l'arc ab , on
aurait un chemin entre deux sommets non couverts par M (de
 A_1 vers B_1) et donc une chaîne augmentante.

Couplage dans les graphes bipartis

Les sommets de A_3 et B_3 ne sont pas atteignables \Rightarrow

- pas d'arête entre A_1 et B_3 :

S'il existe une telle arête ab , alors $ab \notin M$ car $a \in A_1$ donc non touché par M . Donc, dans le graphe orienté, on a l'arc : $a \rightarrow b$. Et donc on aurait un chemin de A_1 vers B_3 .

- pas d'arête de M entre A_3 et B_2 :

S'il existe une telle arête $ab \in M$. Alors, dans le graphe orienté, on a l'arc $b \rightarrow a$. b atteignable depuis A_1 par définition de B_2 . Donc en prolongeant par l'arc ba on aurait un chemin de A_1 vers $a \in A_3$.

Couplage dans les graphes bipartis

Les sommets de A_3 et B_3 ne sont pas atteignables \Rightarrow (suite)

- pas d'arête entre A_2 et B_3 :

S'il existe une telle arête ab :

- Cas 1 : si $ab \notin M$

arc orienté dans le sens $a \rightarrow b$. $a \in A_2$ donc il existe un chemin P de A_1 vers a et (P, ab) est un chemin de A_1 vers $b \in B_3$. On aurait donc un chemin de A_1 vers B_3 .

- Cas 2 : si $ab \in M$

Dans ce cas, ab est la seule arête de M incidente à a (par définition d'un couplage). Dans le graphe orienté, $b \rightarrow a$ est donc le seul arc entrant dans a . Comme $a \in A_2$, il existe un chemin P de A_1 vers a . Et ba est forcément le dernier arc de P , ce qui implique que b atteignable depuis A_1 ce qui est en contradiction avec la définition de B_3 .

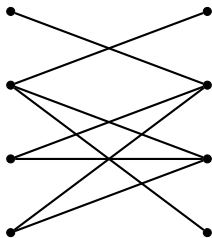
Couplage dans les graphes bipartis

On a donc

- Toutes les arêtes sont incidentes à au moins un sommet de $A_3 \cup B_2$ (voir tout ce qui précède)
 $\Rightarrow A_3 \cup B_2$ est un transversal de G .
- Toutes les arêtes de M sont entre A_2 et B_2 ou entre A_3 et B_3 (et chaque sommet de A_2, A_3, B_2 et B_3 est incident à exactement une arête de M)
 $\Rightarrow |A_3 \cup B_2| = \nu(G)$

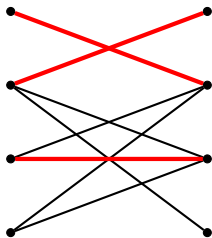
Exemple de l'utilisation du théorème de König

- Nous avons trouvé un couplage de taille 3 que nous pensons être maximum.
- Pour être sûr que nous avons trouvé un couplage maximum, il suffit de trouver un transversal de taille 3.
- Si nous trouvons un transversal de taille 3, nous pouvons être sûr que le couplage trouvé est maximum (et le transversal minimum), que le graphe soit biparti ou non.
- Sinon, le couplage n'est pas maximum ; il faut mieux chercher (soit pour le transversal, soit pour le couplage) ou vérifier si le graphe est bien biparti (sinon, on n'a pas forcément $\nu(G) = \tau(G)$) !



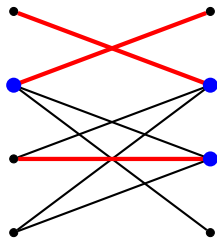
Exemple de l'utilisation du théorème de König

- Nous avons trouvé un couplage de taille 3 que nous pensons être maximum.
- Pour être sûr que nous avons trouvé un couplage maximum, il suffit de trouver un transversal de taille 3.
- Si nous trouvons un transversal de taille 3, nous pouvons être sûr que le couplage trouvé est maximum (et le transversal minimum), que le graphe soit biparti ou non.
- Sinon, le couplage n'est pas maximum ; il faut mieux chercher (soit pour le transversal, soit pour le couplage) ou vérifier si le graphe est bien biparti (sinon, on n'a pas forcément $\nu(G) = \tau(G)$) !



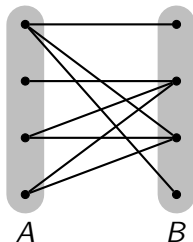
Exemple de l'utilisation du théorème de König

- Nous avons trouvé un couplage de taille 3 que nous pensons être maximum.
- Pour être sûr que nous avons trouvé un couplage maximum, il suffit de trouver un transversal de taille 3.
- Si nous trouvons un transversal de taille 3, nous pouvons être sûr que le couplage trouvé est maximum (et le transversal minimum), que le graphe soit biparti ou non.
- Sinon, le couplage n'est pas maximum ; il faut mieux chercher (soit pour le transversal, soit pour le couplage) ou vérifier si le graphe est bien biparti (sinon, on n'a pas forcément $\nu(G) = \tau(G)$) !



Théorème de Hall

- Si $G = (A \cup B, E)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A , alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats les plus importants de la théorie des couplages.

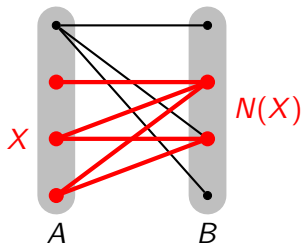


Théorème de Hall

Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.

Théorème de Hall

- Si $G = (A \cup B, E)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A , alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats les plus importants de la théorie des couplages.



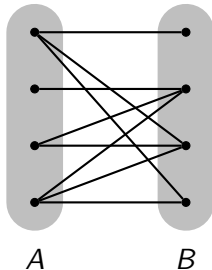
Théorème de Hall

Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.

Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

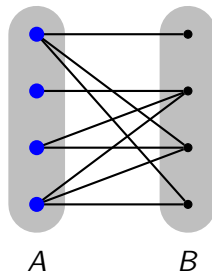
- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimum de G , càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



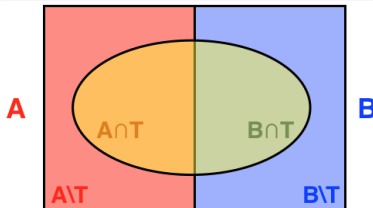
Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimum de G , càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)



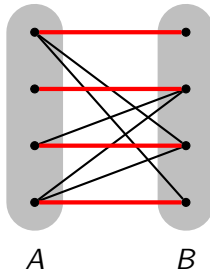
Démonstration (suite)

- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |A \cap T| + |B \cap T|$, on a $|A \setminus T| = |A| - |A \cap T| = |A| - |T| + |B \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| > |B \cap T|$.
- Donc $|A \setminus T|$ ne peut pas avoir tous ses voisins dans $|B \cap T|$.
- Donc il existe au moins une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.

Conséquences du théorème de Hall

Le lemme des mariages

Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage parfait ssi $|A| = |B|$ et $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.



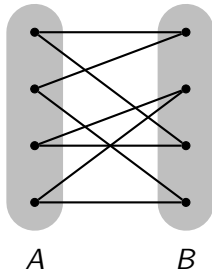
Couplages dans les graphes bipartis réguliers (1/2)

Corollaire

Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti k -régulier (tous les sommets sont de degré k), pour un entier $k \geq 1$. Alors G a un couplage parfait.

Démonstration

- Comme $k|A| = |\delta(A)| = |\delta(B)| = k|B|$, on a $|A| = |B|$.
- Soit $X \subseteq A$.
- Grâce à la régularité de G , $|\delta(X)| = k|X|$.



Rappel : soit $X \subseteq V(G)$, $\delta(X)$ désigne le cocycle de X (ensemble des arêtes avec une extrémité dans X et l'autre dans $V(G) \setminus X$).

Couplages dans les graphes bipartis réguliers (2/2)

Démonstration (suite)

- Comme $\delta(X) \subseteq \delta(N(X))$, on obtient
$$k|X| = |\delta(X)| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|.$$
- Donc $|N(X)| \geq |X|$.
- Donc, d'après le lemme des mariages, G a un couplage parfait.

