Rappels de Probabilités et Variables Aléatoires

Frédérique Leblanc

Loi de probabilité

Soit P une loi de probabilité sur Ω, $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ Par définition de P pour les trois premiers points et comme propriétes pour les deux suivants :

1. $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0 \;\; et \;\; 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{si} \;\; A \cap B = \emptyset$
4. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Loi de probabilité conditionnelle

On définit la loi de probabilité conditionnelle à B t.q. $P(B) \neq 0$ par :

$$P^B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \forall A \subset \Omega$$

Evènements indépendants :
A et B seront dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

et si $P(B) \neq 0$ on aura $P^B(A) = P(A|B) = P(A)$
que B soit réalisé ou non ne conditionne pas que A le soit.
Incompatibilité : A et B sont dits incompatibles si
$P(A \cap B) = 0$
Formule des probabilités totale :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

Formule de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

et on établit que pour tout a et b réels on a toujours

$$P(X \in]a, b]) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Ensuite selon que X est discrète ou continue on définit

- si **X discrète** et à valeur dans $\mathcal{X} = \{m_1, ..., m_q\}$ **sa loi de probabilité** donnée par $\{p_k, 1 \leq k \leq q\}$ où

  $$p_k = P(X = m_k) = P(X \in]m_{k-1}, m_k]) = F(m_k) - F(m_{k-1})$$

  On a évidemment $p_k \in [0, 1]$ et $\sum_k p_k = 1$.
  chaque p_k est l'accr. de la FdR entre m_{k-1} et m_k et

  $$P(X \leq x) = F_X(x) = \sum_{m_k \leq x} P(X = m_k).$$

  Attention ici $P(X = m_k) \neq O$

- si **X est continue** et que sa FdR est dérivable sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = F'_X(x) \approx P(X \in [x, x+\delta])/\delta \ \text{ si } \ \delta \ \text{ petit.}$$

On a f_X positive et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$ de plus

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Rem. : $P(X = x) = 0$ d'où $P(X < x) = P(X \leq x)$

Ex :

- Soit X le résultat d'un dé equilibré à six faces. Donner sa loi de prob. sa Fdr et $P(X \in [0.5, 1])$
- Soit X une variable de densité $f_X(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et 0 sinon. Calculer sa FdR et $P(X \in [0.5, 1])$.

Espérance

- **cas discret**

$$E(X) = \sum_{m_k \in \mathcal{X}} m_k \, P(X = m_k) = \mu.$$

- **cas continu**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \mu.$$

Variance $E[(X - E(X))^2]$

- **cas discret**

$$V(X) = \sum_{m_k \in \mathcal{X}} (m_k - \mu)^2 P(X = m_k) = \sigma^2.$$

- **cas continu**

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx = \sigma^2.$$

Ecart type (continu et discret) $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ et en part. $E(b) = b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et en part. $V(b) = 0$
- si de plus X et Y tq $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$ elles sont dites indépendantes et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Ex : On tire ensemble deux dés un rouge (X) et un noir (Y) indépendants

1. Calculer $E(X), E(Y)$ et $E(X + Y)$.
2. Dans un jeu on lance les deux dés et le gain est $2X + Y$. Calculer l'espérance et l'écart-type du gain.

Centrer et réduire

Soit X d'espérance μ et variance σ^2 alors :

1. $E(X-\mu)=0$ et $X-\mu$ est dite centrée
2. $V(X/\sigma)=1$ et X/σ est dite réduite
3. $(X-\mu)/\sigma$ est la centrée réduite de X en effet :

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=0 \quad \text{et} \quad V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=1$$

Ex : Calculer la variable centrée réduite de $Z=2X+Y$ défini dans le jeu de dé précédent

Cas discret

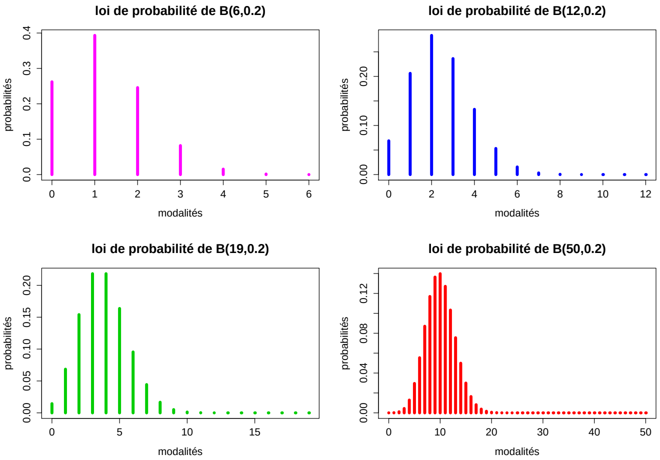
- **Uniforme** sur $\{m_1, ..., m_q\}$ (ex le dé)
  notée $\mathcal{U}(\{m_1, ..., m_q\})$: $\mathcal{X} = \{m_1, ..., m_q\}$
- **Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$
  notée $\mathcal{B}(p)$: $\mathcal{X} = \{0, 1\}$

  $$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

  variable indicatrice de succès (A réalisé avec proba. p)
- **Binômiale** de paramètres $p \in]0, 1[$ et $n > 0$ et entier
  notée $\mathcal{B}(p, n)$: $\mathcal{X} = \{0, 1, ..., n\}$

  $$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{pour tout} \quad k \in \{0, ..., n\}.$$

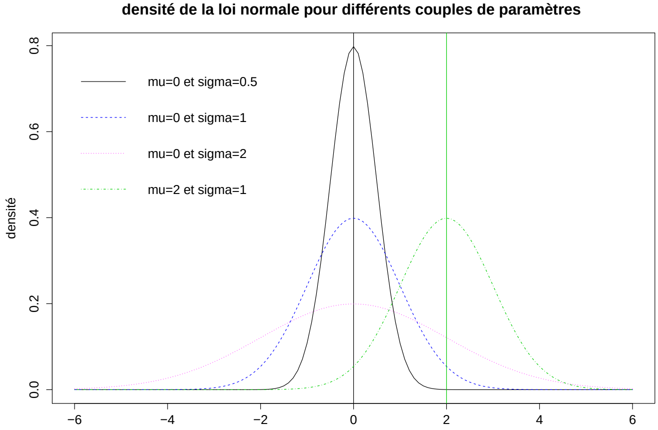
  variable donnant le nombre de succès de A après n essais indép.
- Géométrique, Poisson....

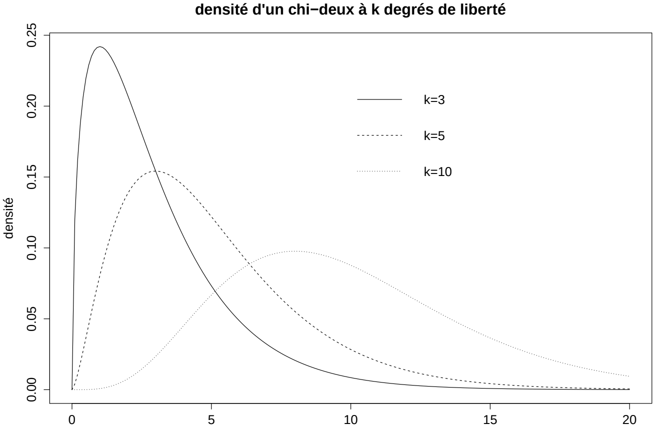

loi de probabilité de B(6,0.2)
probabilités
modalités
loi de probabilité de B(12,0.2)
probabilités
modalités
loi de probabilité de B(19,0.2)
probabilités
modalités
loi de probabilité de B(50,0.2)
probabilités
modalités

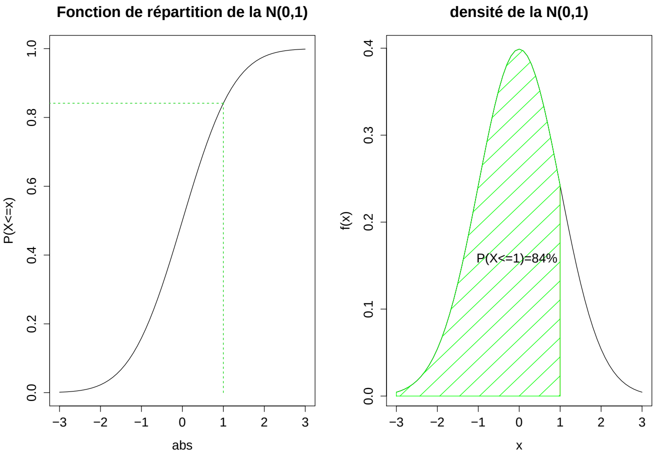
Cas continu

- **Uniforme** sur $[a, b]$ noté $\mathcal{U}([a, b])$
- **Normale** de paramètres $\mu \in]-\infty, \infty[$ et $\sigma^2 \in]0, \infty[$ noté $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- **Chi-deux** de paramètre entier ν noté $\mathcal{X}_\nu$ ou $\mathcal{X}(\nu)$
- **Student** de paramètre entier ν noté $\mathcal{T}_\nu$ ou $\mathcal{T}(\nu)$
- ....

Rem. :
-Pour toutes les variables usuelles on connait l'expression des densités ou loi de proba, FdR, espérance, variance,....(voir tableaux recap. dans poly)
-La $\mathcal{N}(0, 1)$ et la $\mathcal{T}_\nu$ sont symétriques autour de $[0, y)$


densité de la loi normale pour différents couples de paramètres
mu=0 et sigma=0.5
mu=0 et sigma=1
mu=0 et sigma=2
mu=2 et sigma=1
densité
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
−6
−4
−2
0
2
4
6


densité d'un chi−deux à k degrés de liberté
densité
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
5
10
15
20
k=3
k=5
k=10


Fonction de répartition de la N(0,1)
P(X<=x)
abs
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
densité de la N(0,1)
f(x)
x
P(X<=1)=84%
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−3
−2
−1
0
1
2
3

Savoir utiliser les abaques

- Loi normale (page 1 des tables) : FdR de la $\mathcal{N}(0,1)$, notée Φ, pour $x \geq 0$ et si $x < 0$ on utilise :

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

- Loi normale (page 2) : fonction quantile $\Phi^{-1}(p)$ de la $\mathcal{N}(0,1)$ pour $p \geq 0.5$ et si $p < 0.5$ on utilise :

$$\Phi^{-1}(1-p) = -\Phi^{-1}(p)$$

- Loi de Student (page 3) : fonction quantile de la $\mathcal{T}(\nu)$
- Loi du Chi-deux (page 4) : fonction quantile de $\mathcal{X}(\nu)$
- Loi de Fisher-Snedecor (page 5 à 8) : certains quantiles

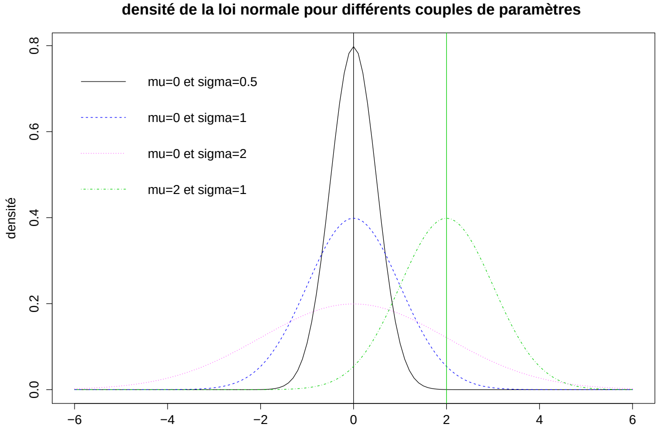
Savoir utiliser les menus de la calculette

Ex :

- Soit X une $\mathcal{N}(2,9)$ calculer $P(1 \leq X \leq 2)$ avec les tables et avec le programme adapté de votre calculette
- Trouver a tel que $P(X \geq a) = 0.05$ avec les deux outils
- Soit T de loi de Student $\mathcal{T}(2)$ calculer $P(T \leq 2.9)$ et comparer avec $\Phi(2.9)$. Le refaire avec une $\mathcal{T}(100)$.
- Soit T de loi de Student $\mathcal{T}(5)$, trouver t tels que $P(|T| \geq t) = 0.05$.
- Soit V de loi $\mathcal{X}(3)$ donner le quantile d'ordre 0.95 lu dans la table et le calculer avec le programme de la calculette

Pourquoi elle ?

- construite par Gauss à l'aide d'observations répétées d'une mesure
- simplicité : nombreuses propriétés simples et remarquables, facile à manipuler dans les calculs
- FdR, densite, quantile disp. dans tous les outils de calc.
- la symétrie autour de la moyenne : $P(X > \mu + a) = P(X < \mu - a)$
- elle a deux paramètres ajustables indépendamment l'un de l'autre : gamme de modèles assez riche et peu coûteuse
- souvent adaptée à des situations variées
- Et si elle ne l'est pas avec de grands échantillons on s'y ramenera avec le Théorème Central Limit


densité de la loi normale pour différents couples de paramètres
densité
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
−6
−4
−2
0
2
4
6
mu=0 et sigma=0.5
mu=0 et sigma=1
mu=0 et sigma=2
mu=2 et sigma=1

Ses propriétés :

1. si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors pour tous a et b réels $Y = aX + b$ suit une loi $\mathcal{N}(E(Y), V(Y))$ où $E(Y) = a\mu + b$ et $Var(Y) = a^2\sigma^2$.
2. U suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $X = \sigma U + \mu$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
3. si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $U = (X - \mu)/\sigma$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
4. X_1 de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et X_2 de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et indépendantes alors $aX_1 + bX_2$ suit la loi $\mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.

Concentration d'une var normale X autour de E(X)
X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La probabilité de dévier de μ pour X d'une distance maximum d est donnée par $P(|X - \mu| \leq d)$.
EX : Montrer que

$$P(|X - \mu| \leq d) = 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - 1$$

Quelles valeurs obtient-t-on pour $d = \sigma, 2\sigma$ ou 3σ ?
Différence ou somme de deux variables normales
Ex : X et Y resp. de loi $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, on pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$, loi de S et de D ?