Limites de suites

Dans ce chapitre on revoit la notion de limite d'une suite numérique et on la traduit en termes d'assertion mathématique.

Cours

4.1. Compléments sur les nombres réels. — On commence par quelques compléments sur les réels qui seront utiles pour définir et utiliser la notion de limite.

Tout sous-ensemble fini $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{R}$ admet un plus petit élément m. Cela se traduit par l'assertion

$$\forall S \subset \mathbf{R},\ (|S| \in \mathbf{N}) \implies (\exists m \in S,\ \forall s \in S, m \leqslant s)\ .$$

On note $\min(x_1, \ldots, x_n)$ ce plus petit élément. De même, tout sous-ensemble fini S admet un plus grand élément noté $\max(x_1, \ldots, x_n)$. Il est commode d'étendre un peu cette notion en rajoutant deux objets $+\infty$ et $-\infty$ qui satisfont

$$\forall x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, x \leqslant +\infty \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, -\infty \leqslant x \quad .$$

Pour tout sous-ensemble fini $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a encore des notions de min et de max.

Rappelons que la *valeur absolue* d'un nombre réel x est définie par la formule

$$|x| = \max(x, -x).$$

Son graphe est représenté sur la Figure 14. Il est immédiat de voir que la valeur absolue est positive :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geqslant 0.$$

et ne s'annule qu'en 0 :

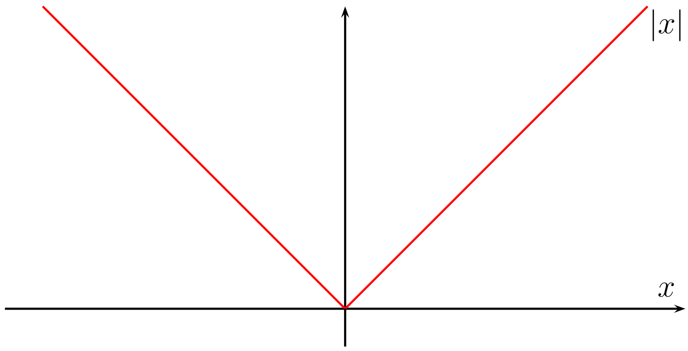
$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

D'autre part, la valeur absolue est multiplicative :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, |xy| = |x| \times |y|.$$

Elle vérifie aussi les inégalités triangulaires :

Figure 14. Valeur absolue



Proposition 4.1 (Inégalités triangulaires)

Soient x et y des nombres réels, alors on a les deux inégalités
$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$
et
$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Démonstration. — On a les inégalités $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$. Cela implique l'inégalité $x+y \leqslant |x|+|y|$. De même, les inégalités $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ impliquent la relation $-(x+y) \leqslant |x|+|y|$ comme $|x+y|$ est égal à $x+y$ ou $-(x+y)$, la première inégalité triangulaire est démontrée.

Démontrons la seconde. Par la première inégalité, on a les relations
$$|x| = |y+x-y| \leqslant |y|+|x-y|$$
ce qui implique l'inégalité $|x|-|y| \leqslant |x-y|$. En échangeant x et y dans ce raisonnement, on obtient $|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|$. Comme $\big||x|-|y|\big|$ vaut $|x|-|y|$ ou $|y|-|x|$ la seconde inégalité triangulaire est démontrée. □

Rappelons également que pour $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, on a
$$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, |x-a| < \varepsilon\right\}.$$

Définition 4.2

Soit x un nombre réel et ε un réel positif. On dit qu'un nombre y (réel, rationnel, ou décimal) est une *approximation de x à ε près* (ou *avec une marge d'erreur d'au plus ε*) si on a $|x-y| \leqslant \varepsilon$.

Exemple 4.3. — On écrit souvent $\pi = 3,14\ldots$ Il n'y a en fait pas égalité puisqu'on ne sait précisément ce qu'il y a dans les .... Ce que dit cette écriture c'est que π est dans l'intervalle $[3,14\,,\,3,15[$, et donc qu'on a $|\pi - 3,14| \leqslant 0,01$. Ainsi $3,14$ est une approximation de π à $0,01$ près. En utilisant $3,14$ comme valeur de π, on fait donc une erreur d'au plus $0,01$.

Enfin, voici quelques notions utiles sur les suites :

Définition 4.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est

— *périodique* s'il existe un entier naturel p non nul, tel que pour tout entier n on a $u_{n+p} = u_n$ (on dit dans ce cas que p est une *période* de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$),

— *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout entier n on a $u_n \leqslant M$;

— *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout entier n on a $u_n \geqslant m$;

— *bornée* si elle est majorée et minorée.

4.2. Définition de la limite d'une suite. — Une définition rigoureuse de la notion de limite est la suivante.

Définition 4.5 (Limite d'une suite en termes d'ε)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et ℓ un nombre réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant n_0) \implies |u_n - \ell| < \varepsilon\ .$$

Dans ce cas on note

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{ou bien} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite finie, qui vaut ℓ.

L'interprétation graphique est la suivante : si on représente le graphe de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le plan (c'est-à-dire qu'on trace les points de coordonnées (n, u_n) dans $\mathbf{R}^2$), alors pour toute bande horizontale contenant la droite d'équation $y = \ell$, tous les points du graphe, sauf un nombre fini, sont dans la bande.

Il faut être très attentif au fait de ne pas parler de la limite d'une suite tant qu'on n'a pas démontré qu'elle existe, c'est à dire qu'il existe un réel ℓ tel que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers ℓ.

Vous avez probablement vu au lycée une définition qui semble différente à première vue :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert non vide contenant ℓ contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à partir d'un certain rang.

En fait, cette définition est équivalente à la Définition 4.5 car un intervalle ouvert non vide contenant ℓ contient toujours un intervalle de la forme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

Exemples 4.6. — Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Comme n est toujours non nul pour $n \in \mathbf{N}^*$, cette suite est bien définie pour $n \geqslant 1$. Montrons qu'elle a pour limite le nombre 0 en utilisant la Définition 4.5.

Pour cela, on fixe $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, et on doit chercher n_0 correspondant. Comme on veut $\frac{1}{n} < \varepsilon$, cette inégalité est équivalente à $n > \frac{1}{\varepsilon}$. On choisit alors n_0 dépendant de ε par la formule $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a alors $n \geqslant n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, et donc

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \ ,$$

ce qu'on voulait démontrer.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$. Comme dans l'exemple précédent, elle est bien définie pour $n \geqslant 1$. Montrons qu'elle a pour limite le nombre 0 en utilisant le même schéma.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $n_0 = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant n_0$. Alors on a $n^2 \geqslant {n_0}^2 > (\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^2 = \dfrac{1}{\varepsilon}$, et donc

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{{n_0}^2} < \varepsilon \ ,$$

ce qu'on voulait démontrer.

Dans les deux exemples précédents, la clé est le choix de l'entier n_0 qui fait marcher la preuve. Dans le premier exemple on a un peu plus détaillé comment on le choisit :

d'abord on cherche au brouillon à résoudre l'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$, et si tout va bien, on trouve une ou plusieurs contraintes sur n. On choisit alors un n_0 qui fait que cette ou ces contraintes sont satisfaites. Parfois, il n'est pas simple de trouve une condition nécessaire et suffisante sur n pour avoir $|u_n - \ell| < \varepsilon$, mais on parvient tout de même à trouver une condition suffisante du type « si $n \geqslant n_0$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$ », et nous avons tout de même la conclusion.

Passons maintenant aux limites infinies.

Définition 4.7 (Limites infinies de suites)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ si on a

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n > n_0) \implies u_n > a\ ,$$

on écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$ si on a

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n > n_0) \implies u_n < a\ ,$$

on écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 4.8. — Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = n^2$, et montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Pour cela, soit a un nombre réel quelconque. Posons alors $n_0 = \min(0, \lfloor\sqrt{a}\rfloor + 1)$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à n_0. Alors, si a est négatif on a automatiquement $u_n \geqslant 0 > a$, et si a est positif on a $u_n = n^2 \geqslant sn_0^2 > (\sqrt{a})^2 = a$. On a donc bien montré l'assertion définissant le fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Pour montrer qu'une suite admet une limite (finie ou infinie), il faut d'abord deviner la limite, puis démontrer que la suite tend effectivement vers cette limite, à l'aide par exemple de la Définition 4.5 ou de la Définition 4.7. À ce propos il faut noter qu'une suite ne peut pas admettre deux limites distinctes :

Proposition 4.9 (Unicité de la limite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite (finie ou infinie), alors celle-ci est unique.

Démonstration. — Supposons qu'on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et deux réels ℓ_1, ℓ_2 tels que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2. On cherche à montrer qu'alors on a $\ell_1 = \ell_2$. On va traiter le cas de deux limites finies, et laisser les cas où ℓ_1 ou ℓ_2 sont infinies en exercice. On va raisonner par l'absurde en supposant $\ell_1 > \ell_2$, et aboutir à une contradiction (le cas $\ell_1 < \ell_2$ se traite de même en inversant les rôles de ℓ_1 et ℓ_2.

Posons $\varepsilon := \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{2}$. Par hypothèse, on a $\varepsilon > 0$. On va appliquer la définition du fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et ℓ_2 à cette valeur de ε.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$, il existe n_1 tel qu'on a

$$\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell_1| < \varepsilon.$$ [17]

De même comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, il existe n_2 tel qu'on a

$$\forall n \geqslant n_2,\ |u_n - \ell_2| < \varepsilon.$$

Alors pour $n > \max(n_1, n_2)$, on a $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &\leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \\ &= |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent l'hypothèse est fausse, et on a bien $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 4.10 (Convergence et divergence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *convergente* si elle admet une limite dans $\mathbf{R}$, et on dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *divergente* si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

17. Pour alléger l'écriture et parce que le contexte est clair, on contracte « $\forall n \in \mathbf{N}, (n \geqslant n_1 \implies \ldots)$ » en « $\forall n \geqslant n_1, \ldots$ ».

Remarque 4.11. — On a vu des exemples de suites ayant une limite (finie ou infinie). Comment montrer qu'une suite n'a pas de limite finie ? Il faut nier la propriété définissant la limite. La négation de

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

est

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon \ .$$

Il s'agit donc pour tout réel ℓ de trouver un nombre ε tel que la suite repasse toujours à une distance supérieure à ε du nombre ℓ.

Exemple 4.12. — Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite. Pour cela, on raisonne par l'absurde, et on suppose qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbf{R}$. Raisonnons selon que ℓ est positif ou négatif.
Cas 1 : $\ell \geqslant 0$. Dans ce cas, posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ quelconque, et soit n un entier impair supérieur à n_0 (par exemple $n_0 + 1$ si n_0 est pair et $n_0 + 2$ si n_0 est impair. Alors on a $u_n = -1$, et donc $|u_n - \ell| = |-1-\ell| = 1 + \ell > \frac{1}{2} = \varepsilon$, ce qui contredit la définition du fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers ℓ.
Cas 2 : $\ell < 0$. Ce cas est semblable au précédent : posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ quelconque, et soit n un entier pair supérieur à n_0 (par exemple $n_0 + 2$ si n_0 est pair et $n_0 + 1$ si n_0 est impair. Alors on a $u_n = 1$, et donc $|u_n - \ell| = |1 - \ell| = 1 + |\ell| > \frac{1}{2} = \varepsilon$, ce qui contredit la définition du fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers ℓ.

Que ce soit pour montrer qu'une suite admet une limite ou pour montrer qu'elle n'en a pas, il y a donc toujours un choix judicieux à faire, à savoir n_0 en fonction de ε pour montrer la convergence, ou ε pour montrer qu'il n'y a pas de limite.

Finissons ce paragraphe par un petit résultat qui sera utile dans la suite : si une suite converge, alors elle est bornée.

Proposition 4.13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Démonstration. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente. Notons $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite. Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, il existe un rang n_0 à partir duquel u_n est dans l'intervalle $]\ell-1, \ell+1[$:

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in]\ell-1, \ell+1[.$$

Avant le rang n_0, la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs[18]. Notons $S = \{u_0, \dots, u_{n_0-1}\}$ l'ensemble de ces valeurs. Posons alors :

$$M = \max S \cup \{\ell + 1\} \text{ et } m = \min S \cup \{\ell - 1\} .$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M .$$

En effet, $m \leqslant u_n \leqslant M$ est vraie pour $n \geqslant n_0$ car $\ell - 1 \leqslant m$ et $M \geqslant \ell + 1$, et $m \leqslant u_n \leqslant M$ est vraie pour $n \leqslant n_0 - 1$ car dans ce cas $u_n \in S$. □

4.3. Opérations sur les limites. — Dans la partie précédente, on a vu que, pour prouver qu'une suite converge ou qu'elle n'a pas de limite, il y a toujours un choix judicieux à faire. Or ce choix n'est pas toujours facile. Heureusement, il y a des résultats permettant de montrer la convergence, ou la non-convergence, sans avoir recours à la définition. Vous avez certainement vu ces résultats au lycée, et nous allons en démontrer rigoureusement certains.

Le premier résultat est connu sous le nom de *théorème des gendarmes*

Théorème 4.14 (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On fait les deux hypothèses suivantes :

(i) Il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel qu'on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N) \implies (u_n \leq v_n \leq w_n);$$

(ii) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes et admettent la même limite ℓ.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, et on a $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. En appliquant la définition de la limite à $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$) et au nombre ε, on obtient $n_1 \in \mathbf{R}_+^*$ (resp. $n_2 \in \mathbf{R}_+^*$) tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

18. C'est une différence entre les suites et les fonctions définies sur un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{R}$. La Proposition 4.13 n'est pas vraie dans le cas des fonctions définies sur un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{R}$.

(resp.

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \Longrightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon).$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, N)$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$. alors n vérifie $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $|w_n - \ell| < \varepsilon$. D'autre part on a $n \geq N$ ce qui donne les inégalités

$$u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell$$

et donc

$$-(w_n - \ell) \leqslant -(v_n - \ell) \leqslant -(u_n - \ell)$$

Par conséquent, $|v_n - \ell| \leqslant \max(|u_n - \ell|, |w_n - \ell|) < \varepsilon$. Ceci prouve que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ. □

Une autre façon de se ramener à des cas plus simples est de décomposer la suite étudiée en somme ou produit de suites plus simples.

Proposition 4.15 (Somme et produit de limites)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers ℓ_2, avec $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{R}$. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$ et la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell_1\ell_2$.

Démonstration. — Commençons par la somme des deux suites. Fixons $\varepsilon > 0$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1, il existe un entier n_1 tel qu'on a [19]

$$\forall n \geqslant n_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$ [20]

De même comme $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_2, il existe un entier n_2 tel qu'on a

$$\forall n \geqslant n_2, |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Posons alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a à la fois $|u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. En additionnant ces inégalités et à l'aide de l'inégalité triangulaire, on a alors

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

ce qui démontre la propriété pour la somme des deux suites.

19. Noter que par commodité on note n_1 l'entier en question, et non n_0, ce qui permettra de le différencier de l'entier n_2 à venir.

20. Noter qu'ici on a appliqué la définition avec $\frac{\varepsilon}{2}$ et non ε, en vue de la suite.

Passons maintenant au produit. La détermination des entiers n_1 et n_2 est plus subtile.

Commençonc par une analyse : on veut démontrer une inégalité de type $|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$. Pour cela on va utiliser une hypothèse sur $|u_n - \ell_1|$ et sur $|v_n - \ell_2|$. Il faut donc relier ces quantités. C'est possible, comme suit :

$$u_n v_n - \ell_1 \ell_2 = u_n v_n - u_n \ell_2 + u_n \ell_2 - \ell_1 \ell_2 = u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1) \; .$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, d'après la Proposition 4.13, elle est bornée. Donc il existe une constante $C > 0$ telle que $|u_n| \geqslant C$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Notons $C' = \max\{\ell_2, C\}$ et remarquons que $C' > 0$. On a, grâce à l'écriture précédente et l'inégalité triangulaire, pour tout entier n :

$$\begin{array}{rcl} |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| & = & |u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)| \\ & \leqslant & |u_n(v_n - \ell_2)| + |\ell_2(u_n - \ell_1)| \\ & = & |u_n||(v_n - \ell_2)| + |\ell_2||(u_n - \ell_1)| \\ & \leqslant & C'|(v_n - \ell_2)| + C'|(u_n - \ell_1)| \\ & = & C'(|(v_n - \ell_2)| + |(u_n - \ell_1)|) \end{array}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et que $\frac{\varepsilon}{2C'} > 0$, il existe un entier n_1 tel que

$$\forall n \geqslant n_1,\; |(u_n - \ell_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C'} \; .$$

De même, comme $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_2 et que $\frac{\varepsilon}{2C'} > 0$, il existe un entier n_2 tel que

$$\forall n \geqslant n_2,\; |(u_n - \ell_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C'} \; .$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors, pour tout $n \neq n_0$, on a

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant C'(|(v_n - \ell_2)| + |(u_n - \ell_1)|) \leqslant C'(\frac{\varepsilon}{2C'} + \frac{\varepsilon}{2C'}) \leqslant \varepsilon \; .$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \varepsilon$. Donc $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell_1 \ell_2$. $\square$

Exemple 4.16. — Pour $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = 2 - \frac{2}{n}$, la proposition précédente implique directement que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 3 et $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 2.

La proposition 4.15 s'étend au cas des limites infinies, avec les règles suivantes que l'on admettra :

- $a + \infty = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$,
- $+\infty + \infty = +\infty$,
- $a - \infty = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,

- $+\infty - \infty$ est indéfini : on ne peut rien conclure dans ce cas,
- $a \times (+\infty) = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,
- $a \times (+\infty) = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$,
- $a \times (-\infty) = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,
- $a \times (-\infty) = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$,
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$,
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$,
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$,
- $0 \times (+\infty)$ est indéfini,
- $0 \times (-\infty)$ est indéfini

Finissons cette partie avec les inverses :

Proposition 4.17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle tendant vers une limite $\ell \in \mathbf{R}^*$. Alors la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est définie pour n assez grand, et elle tend vers $\frac{1}{\ell}$.

Dire que $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est définie pour n assez grand signifie que $\frac{1}{u_n}$ n'est peut-être pas défini pour tout entier naturel n, puisque u_n peut s'annuler. Mais comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers une limite non nulle, elle ne peut s'annuler une infinité de fois.

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$. Le but est de majorer $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}|$ en fonction de $|u_n - \ell|$. On fait donc un calcul préliminaire pour guider les choix. On a $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n \ell|}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, on a à la fois $|u_n - \ell| < \varepsilon \cdot \frac{|\ell|^2}{2}$ et $|u_n| > \frac{|\ell|}{2}$. Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} |\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| &= \frac{|\ell - u_n|}{|u_n \ell|} \\ &< \frac{|\ell - u_n| \cdot 2}{|\ell|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui prouve bien la convergence de $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\frac{1}{\ell}$. □

On peut dire quelque chose dans le cas des limites infinies : si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0. Pour la réciproque, il faut veiller au signe : si u_n est de signe constant, alors on a une réciproque, mais si le signe de u_n change une infinité de fois et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite.