STA401 - Examen terminal -B- 1ème session - correction

Exercice 1 - "autour du cours"

1. $P(20-a<X<20+a) = P(-\frac{a}{4} < \frac{X-20}{4} < \frac{a}{4}) = 0,98 \iff P(\frac{X-20}{4} < \frac{a}{4}) = 0,99 \iff \frac{a}{4} = 2,3263 \iff a = 9,3052$
2. a) $\overline{x} = 19,8$, $s^2 = 0.96$
   b) Intervalle de fluctuation de la moyenne, $\alpha = 0,01$:
   $\left[\mu \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[20 \pm 2,5758\frac{11}{\sqrt{10}}\right] = [11,04; 28,96]$; puisque $\overline{x}$ est dans cet intervalle, la moyenne de cet échantillon est cohérente avec le modèle donné avec une probabilité de 0.99.
3. C'est un intervalle de confiance de la moyenne au niveau de 0.99. Puisque la variance est inconnue :
   $IC = \left[\overline{x} \pm t^{n-1}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[20 \pm 2.7195\frac{3}{\sqrt{36}}\right] = [18,6402; 21,3597]$

Exercice 2 :

1. *Ce test minimise* $\alpha = P[H_1 \mid H_0\, vraie] = P[déclarer\ \mu = 160\, alors\, que\, \mu = 200]$, risque de déclarer que le traitement est efficace à tort.
2. a) Test de la moyenne (unilatéral inférieur d'une loi Normale avec σ^2 inconnue) :
   La statistique est : $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}}$ *et* $T \rightsquigarrow \mathcal{T}_{(n-1)}$. Notation $\widehat{\sigma} = S'$
   b) *Démo :* $\alpha = P(\mathcal{H}_1$ *acceptée* $\mid \mathcal{H}_0$ *vraie*$) \iff P(\overline{X} < c \mid \mathcal{H}_0$ *vraie*$) = \alpha \iff P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}} < \frac{c-\mu_0}{S'/\sqrt{n}}) = \alpha$
   D'après a), $P(T < \frac{c-\mu_0}{s'/\sqrt{n}}) = \alpha$. *La loi Normale étant centrée sur 0 et symétrique, on déduit que* $\frac{c-\mu_0}{s'/\sqrt{n}} = -t$ *(négatif) et* $P(T<t) = 1-\alpha$. *On note* $t^{(n-1)}_{(1-\alpha)})$ *ce quantile.*
   De plus, $\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -t^{(n-1)}_{(1-\alpha)} \iff c = \mu_0 - t_{(1-\alpha)})\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.
   On déduit donc : Rejet $\mathcal{H}_0 \iff \overline{X} < c \iff T < -t^{(n-1)}_{(1-\alpha)}$.
3. La valeur calculée de T est $-1,98676$; $-t^{29}_{0,99} = -2,462$; on rejette donc $\mathcal{H}_1$. [On peut aussi calculer $c = \mu_0 - t^{29}_{0,99} * s/\sqrt{n-1} = 200 - 2,462 * 51,5/\sqrt{29} = 176,455$; on a bien $\overline{x} = 181 > c$, on conclurait aussi $\mathcal{H}_0$]. Au seuil de 1%, on ne peut pas dire que la moyenne soit de 160, on ne peut pas affirmer que le traitement soit efficace..
4. a) Dans le test prédécent, on accepte $\mathcal{H}_0$, mais on ne connait pas le risque de se tromper en l'acceptant, c'est justement β
   b) $\beta = P[H_0 \mid H_1\, vraie]$. $\beta = P(\overline{X} > c \mid \mathcal{H}_1) = P(\overline{X} > 176,455 \mid \mu = 160) =$
   $P(T' > \dfrac{176,455-160}{51,5/\sqrt{29}}) = P(T' > 1,72065) = 1 - P(T' < 1,72065) = 0,04789$ [car $T' \rightsquigarrow \mathcal{T}_{29}$].
   c) La puissance est : $1-\beta \simeq 0,952$. Le test est donc puissant (car supérieur à 80%).
   d) Il y a 4,8% de risque de déclarer que le traitement n'est pas efficace alors qu'en réalité il l'est.

5. $P_{val} = P(T < -1,98676) = 1 - P(T < 1,98676)$=0,028235. On accepterait $\mathcal{H}_0$ et on conclurait que le traitement n'est pas efficace pour tous les risques $\alpha < 2,83\%$. En particulier pour α=1%, on accepte $\mathcal{H}_0$ avec un risque de se tromper $\beta \simeq 0,04789$.

Exercice 3

1. a) On dispose de deux échantillons appariés car ce sont les 12 mêmes fichiers qui ont été compressés. On veut tester la moyenne des différences, et savoir si elle est significativement positive (algo A - algo B) afin de conclure à l'efficacité de B ou pas. On suppose que $D = X_A - X_B \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_d, \sigma_d^2)$.

   Le test est : $\begin{cases} \mathcal{H}_0 \,:\, \mu_A = \mu_B \\ \mathcal{H}_1 \,:\, \mu_A > \mu_B \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{H}_0 \,:\, \mu_d = 0 \\ \mathcal{H}_1 \,:\, \mu_d > 0 \end{cases}$ La statistique est $T = \dfrac{\overline{D}\sqrt{n-1}}{S_d} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n-1}$

   b) Calculs : $\overline{d} = 1,3283$, $s_d = 0,834474$, $T_{calc} = 5,2795$. Lecture du quantile 1.7959. On accepte donc $\mathcal{H}_1$ (B est plus efficace) avec un risque de 5% de se tromper.

2. Calcul de la $p_{valeur} = P_{\mathcal{H}_0}(T > T_{calc}) = 1 - P(T < 5,2795) < 1 - 0,9995$, donc $p_{valeur} < 0,0005$ (valeur exacte avec la calculatrice $1,3.10^{-4}$)

   Pour tous risques $\alpha > p_{valeur}$ (par exemple 5% ou 1%), on accepte $\mathcal{H}_1$. On conclut que l'agorithme B est plus efficace, donc que les fichiers ont des tailles en moyenne plus réduites avec des risques très faibles de se tromper.

Exercice 4

1. Test de comparaison de deux échantillons indépendants : il y a deux groupes différents de 100 images et 150 images, X_1 et X_2 doivent suivre des lois normales, on veut comparer les moyennes ($\mu_1 > \mu_2$) [images du site B sont moins lourdes que dans le A]. Pour faire ce test, il faut que les variances sont égales.

2. (a) Le test : $\mathcal{H}_0 \,:\, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contre $\mathcal{H}_1 \,:\, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. La statistique : $T = \dfrac{S_2'^2}{S_1'^2} \rightsquigarrow \mathcal{F}_{(n_2-1;n_1-1)}$

   Calculs des variances estimées : $\widehat{\sigma_1^2} = 0,00161616$ et $\widehat{\sigma_2^2} = 0,00197986$. Valeur de la statistique : $1,225$.
   Décision : $Rejet de \mathcal{H}_0 \iff T > f_{(1-\alpha/2)}^{(n_2-1;n_1-1)}$. Ici, $f_{(0,995)}^{(149;99)} \simeq 1,6$ (encadrement avec les tables [1,54;1,67]).
   On ne rejette donc pas $\mathcal{H}_0$, on conclut que les variances sont égales avec une probabilité de 99%.
   (b) On trouve $p_{val} = 2 * P(T > 1.225) = 0,27847$, alors pour $\alpha < 0,27847$ on conclurait que les variances ne sont pas différentes, pour $\alpha > 0,27847$ on conclut que les variances sont différentes. Donc, pour α= 1%, on accepte l'égalité des variances, ce qui est cohérent avec (a).

3. On pose le test : $\mathcal{H}_0 \,:\, \mu_1 = \mu_2$ contre $\mathcal{H}_1 \,:\, \mu_1 > \mu_2$. Puisque $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ et grands échantillons, la statistique du test est : $T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.

   Rejet de $H_0 \Leftrightarrow T > u_{(1-\alpha)}$. Valeur de la statistique : $24,0943$.
   Avec la table $\mathcal{N}(0;1)$ ou la calculatrice, on trouve : $p_{val} = P(T > 24,0943) \simeq 0$.
   En conséquence, pour α= 1%, $\alpha > p_{val}$, donc on accepte $\mathcal{H}_1$. On conclut donc, avec un risque quasiment nul de se tromper, que le poids moyen des images est plus faible dans le site B.