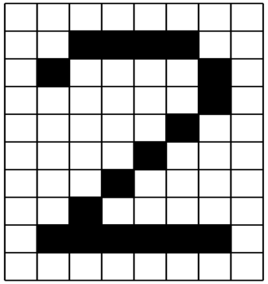
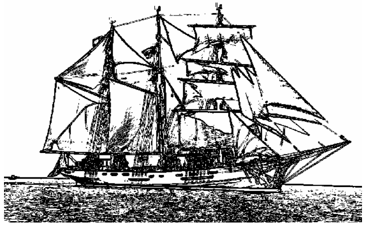
MAP201 : Découverte des Mathématiques Appliquées

Images

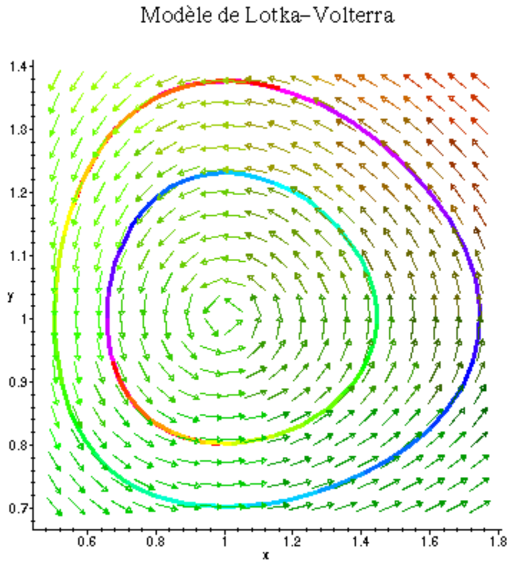
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1





Jérome Lesaint

Equa Diff



Mickael Nahon

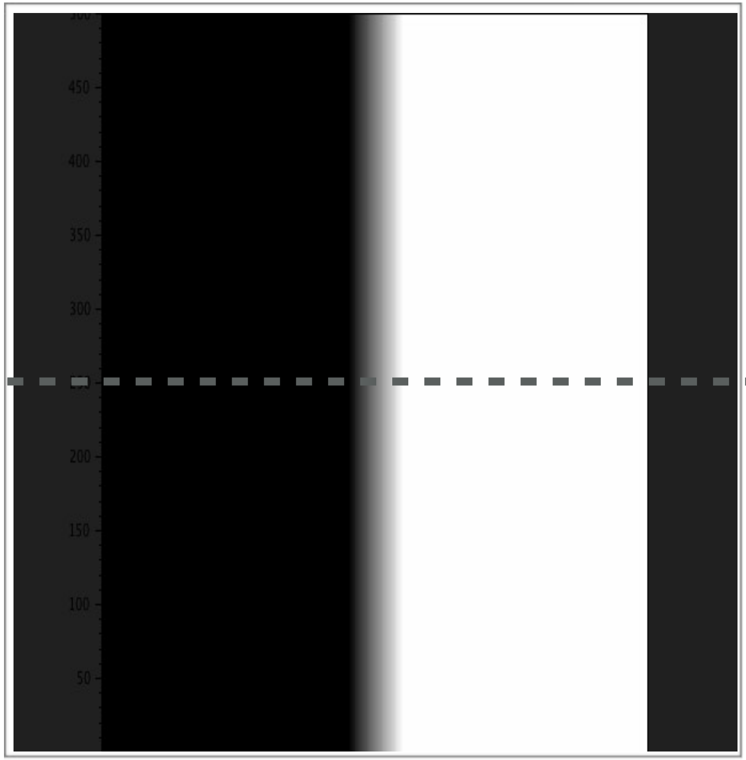
4ÈME COURS :
FILTRES DÉRIVATEURS, CONTOURS

Plan

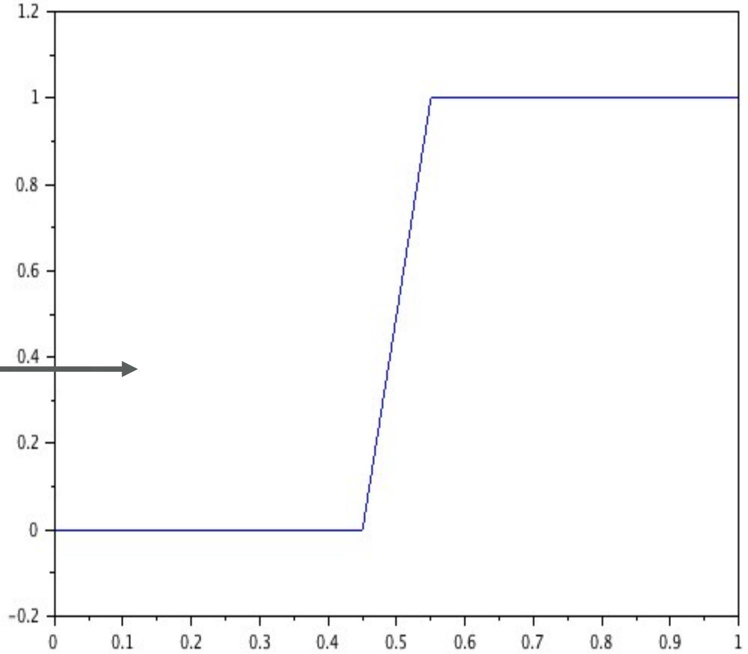
- Vers la détection de contours
  - besoin de "dériver une image"
  - Fonctions de plusieurs variables
  - dérivabilité, gradient
- Application aux images discrètes
- Détection de contours

Vers la détection de contours

- Idée : contour = **variation rapide** de l'intensité
  - Comment le détecter ?

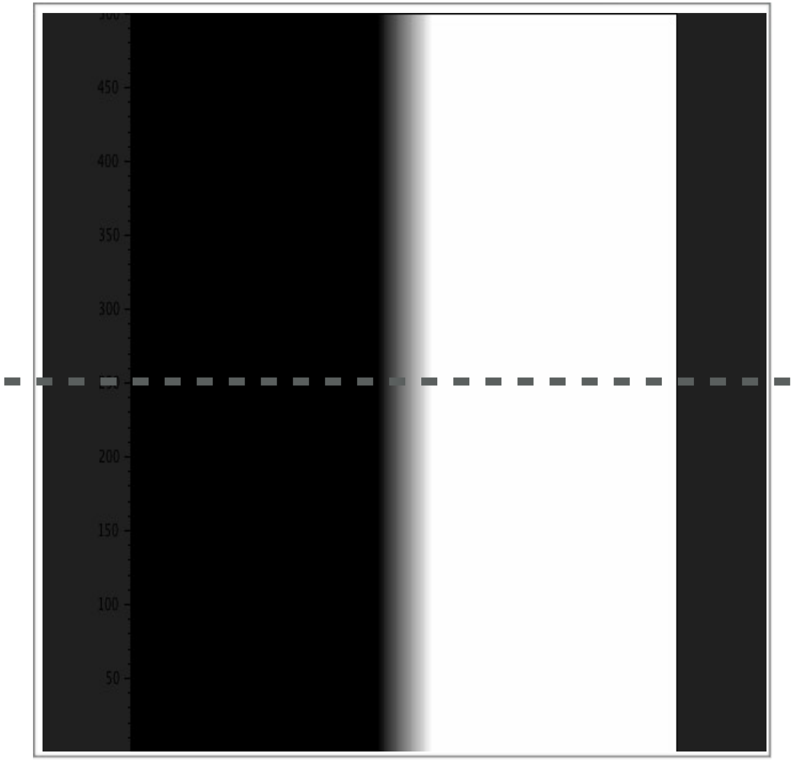


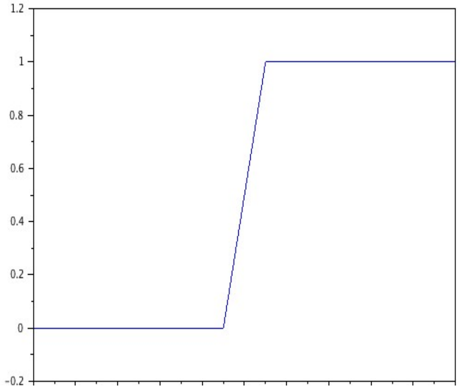
coupe

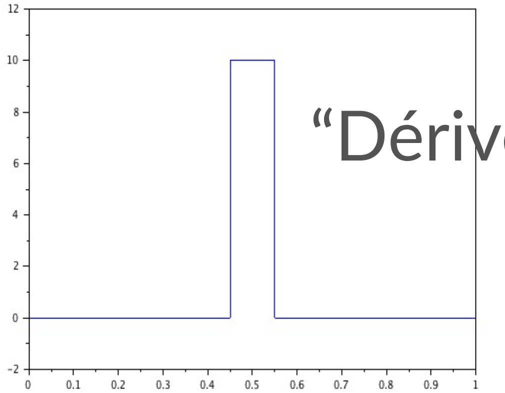


Vers la détection de contours

- Idée : contour = **variation rapide** de l’intensité
  - Comment le détecter ?







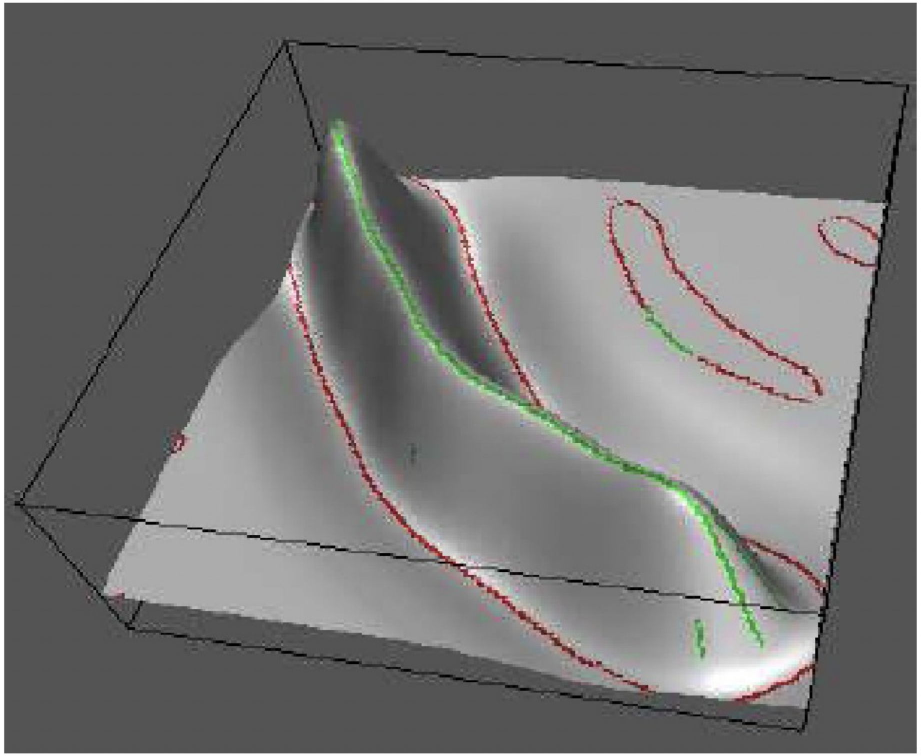
“Dérivée”

Vers la détection de contours

- Idée : contour = **variation rapide** de l'intensité
  - Comment le détecter ?
- Et en 2D?
  - Il faut définir la dérivée d'une fonction de plusieurs variables, dans toutes les directions

Images “en élévation”

- Représentation en 3D d’une image 2D
  - Niveau de gris → élévation



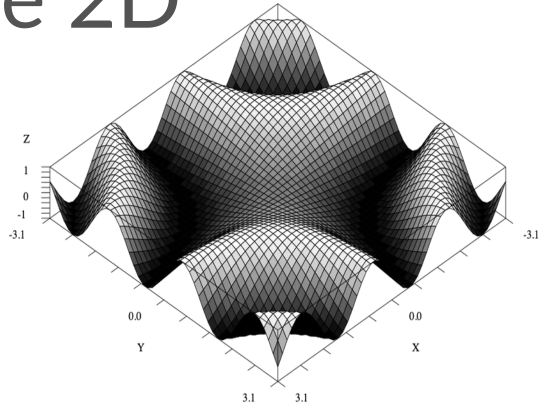
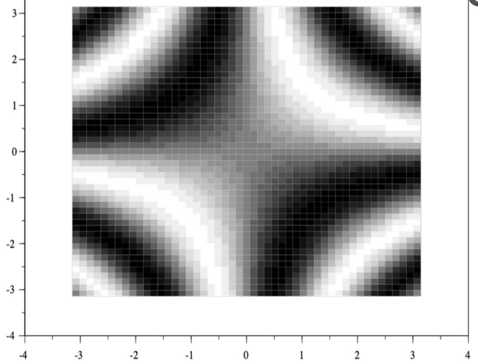


FIGURE 4 – Surface d’équation $z = \sin(xy)$.

Carte 2D = image !



Fonctions de plusieurs variables

- Fonctions à valeurs réelles
- Notion de dérivée directionnelle
- Dérivées partielles
- Vecteur gradient
- Norme du gradient

Fonctions de plusieurs variables

- Soit g une fonction réelle d'une variable réelle

  $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  Soit a un réel, on dit que g est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement converge quand on se rapproche de a et on note

  $$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

- Que se passe-t-il pour une fonction à deux variables? $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Fonctions de plusieurs variables

- Soit f une fonction réelle à **deux** variables

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit a = (a_x,a_y) un *vecteur*, on dit que f est dérivable en a lorsque pour toute *direction* d = (d_x,d_y), la limite suivante existe (pour h réel tendant vers 0)

$$\frac{\partial f}{\partial d}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h * d) - f(a)}{h}$$

- En particulier:
  - La dérivée partielle selon x correspond à d_1=[1,0]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial d_1}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_x + h, a_y) - f(a)}{h}$$

Fonctions de plusieurs variables

- Dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\frac{\partial f}{\partial d_1}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_x+h,a_y)-f(a)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\frac{\partial f}{\partial d_2}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_x,a_y+h)-f(a)}{h}$$

exemple:

$$f(x,y)=x^2-3xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3y\ et\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0-3x$$

Fonctions de plusieurs variables

- Gradient

$$\nabla f(x,y)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$$

Donne **la direction de plus forte variation**

exemple 2:

$$f(x,y)=x+y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1\, et\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1$$

$$donc\,\nabla f(x,y)=[1,1]$$

Gradient constant (ne dépend pas de x,y)

Fonctions de plusieurs variables

- Gradient

$$\nabla f(x,y)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$$

Donne **la direction de plus forte variation**

exemple 3:

$$f(x,y)=\frac{255}{1+(x-100)^4}$$

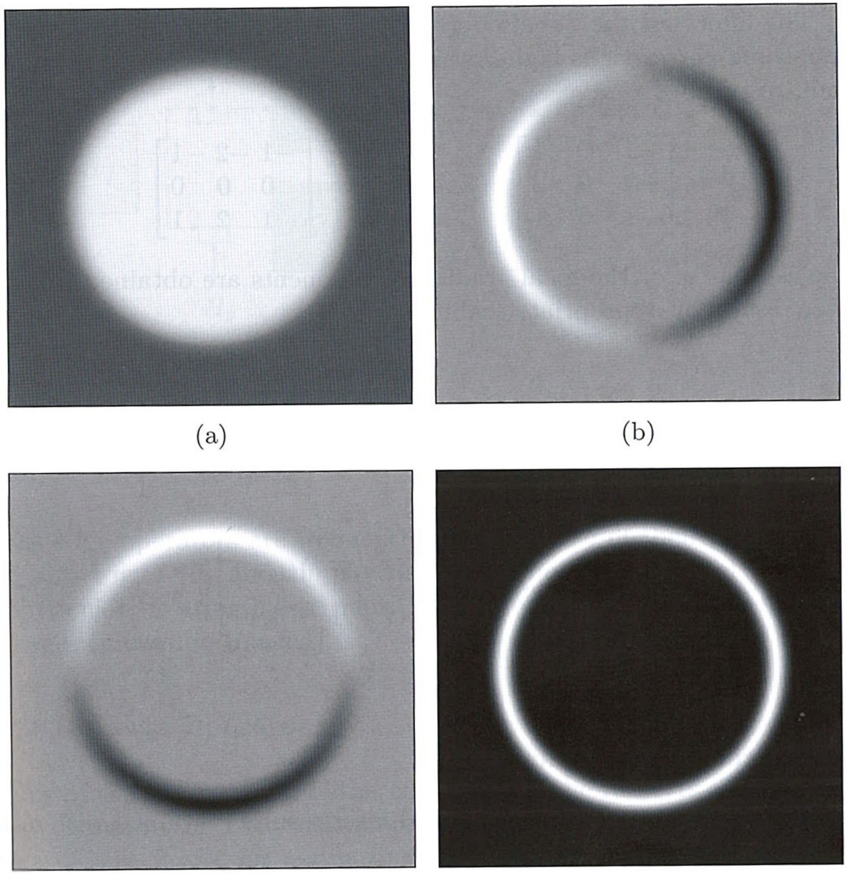
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1020*(100-x)^3}{(1+(x-100)^4)^2}\; et \;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

$$donc\,\nabla f(x,y)\, vaut\,[270,0]\, pour\; x=99,$$
$$[0,0]\, pour\; x=100, et\,[-270,0]\, pour\; x=101$$

Image continue

$I(x,y)$

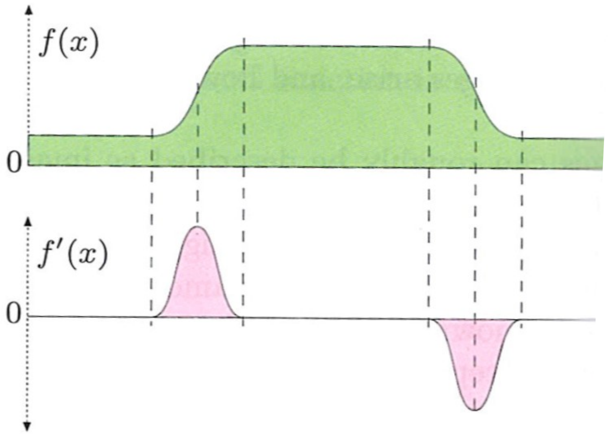
Gradient d'une image continue



$\frac{\partial I}{\partial y}(x,y)$

$\|\nabla I\|$

$\frac{\partial I}{\partial x}(x,y)$

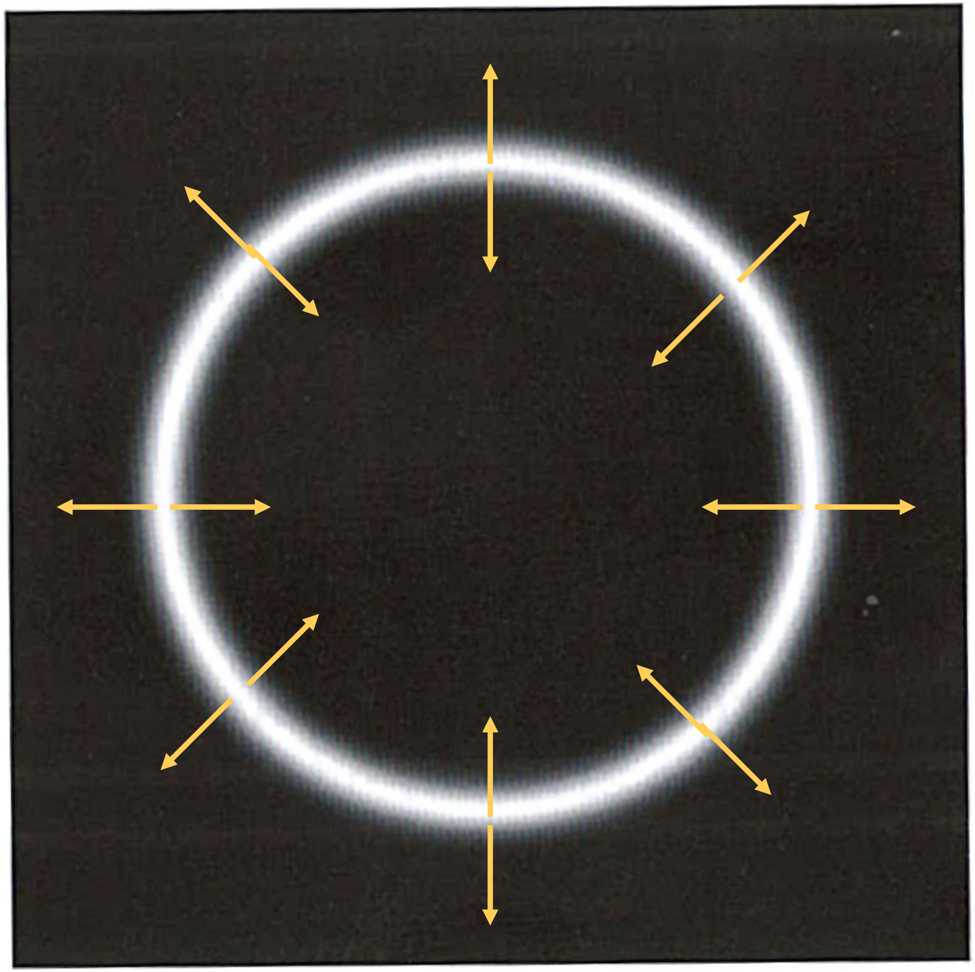


Vecteur gradient :

$$\nabla I = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Norme : $\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2}$

Gradient d'une image



Vecteur gradient :

$$\nabla I = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Norme : $\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2}$

Dérivée discrète 1D

- Comment approximer le taux d'accroissement d'une fonction g et du signal discret [g_1,...,g_N]
  - 1. $g'(x) \approx \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x))\, donc\, g'_i \approx g_{i+1} - g_i$
  - 2. $g'(x) \approx \frac{1}{h}(g(x) - g(x-h))\, donc\, g'_i \approx g_i - g_{i-1}$
  - Ces versions sont biaisés soit "en avant" soit "en arrière"

Dérivée discrète 1D

- Comment approximer le taux d'accroissement d'une fonction g et du signal discret [g_1,...,g_N]
  - 1. $$g'(x) \approx \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) \text{ donc } g'_i \approx g_{i+1} - g_i$$
  - 2. $$g'(x) \approx \frac{1}{h}(g(x) - g(x-h)) \text{ donc } g'_i \approx g_i - g_{i-1}$$
  - Ces versions sont biaisés soit “en avant” soit “en arrière”
  - Utilisons les deux en même temps:

$$g'(x) \approx \frac{1}{2h}(g(x+h) - g(x-h)) \text{ donc } g'_i \approx \frac{1}{2}(g_{i+1} - g_{i-1})$$

Dérivée discrète 2D

- ***Vecteur*** gradient : $$\nabla I = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$
- Dérivons selon x
  - Chaque ***ligne*** est vue comme un signal 1D

$$I_x'(i,j) \approx \frac{1}{2}\left(I(i,j+1) - I(i,j-1)\right)$$

  - En termes de ***filtre***, on ***convolue*** avec $$D_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dérivons selon y (même chose)

$$I_y'(i,j) \approx \frac{1}{2}\left(I(i+1,j) - I(i-1,j)\right) \qquad D_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dérivée discrète 2D

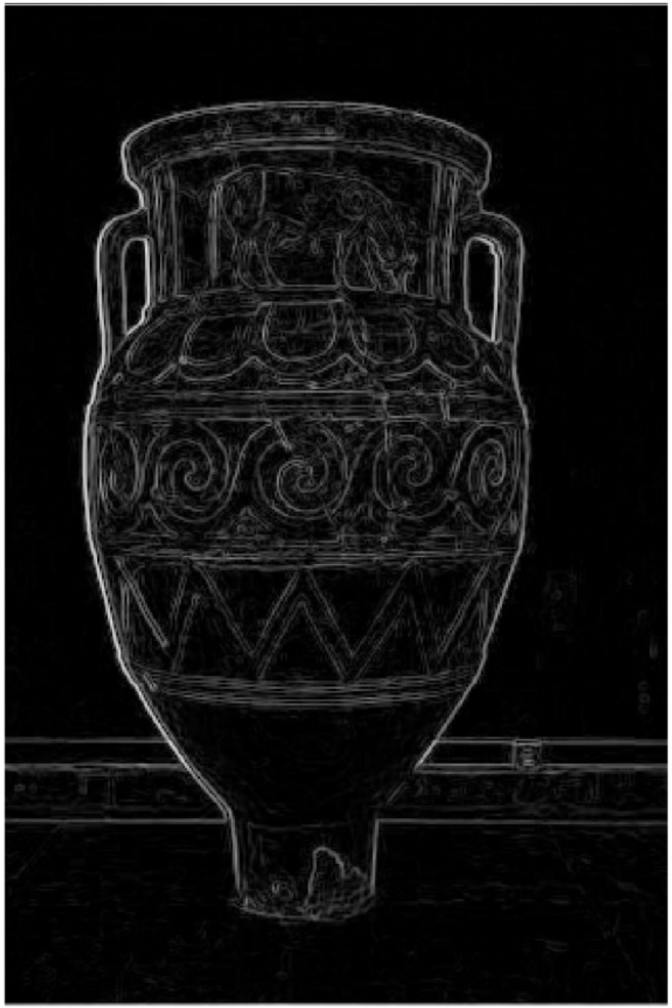
- ***Vecteur*** gradient : $\nabla I = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$
- Approximation par differences finies :

$$\nabla I(i,j) = \begin{pmatrix} I_x'(i,j) \\ I_y'(i,j) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(I(i,j+1) - I(i,j-1)\right) \\ \frac{1}{2}\left(I(i+1,j) - I(i-1,j)\right) \end{pmatrix}$$

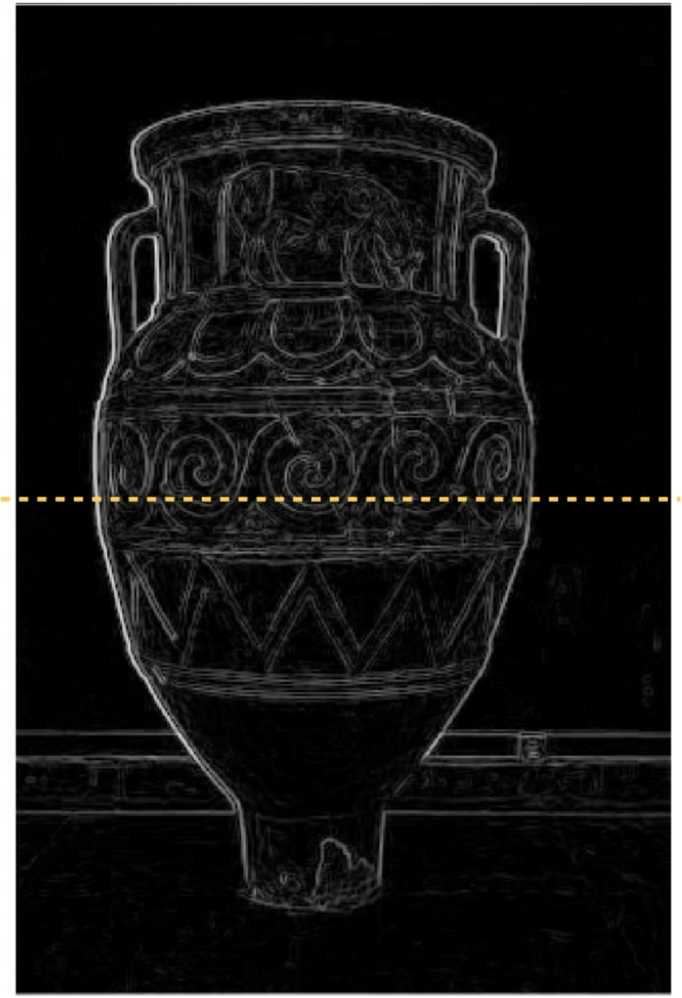
  - ***Deux valeurs***: se représente par une flèche → direction de plus grande luminosité (la valeur des pixels augmente)
  - La ***norme*** du gradient représente l'intensité du changement

$$N_I(i,j) = \sqrt{I_x'(i,j)^2 + I_y'(i,j)^2}$$

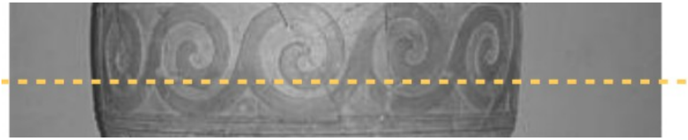
Norme du gradient obtenu par différences finies

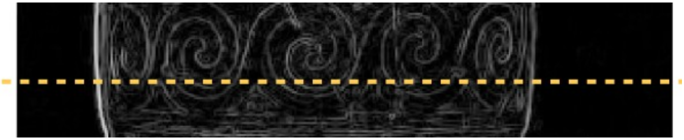


Norme du gradient obtenu par différences finies

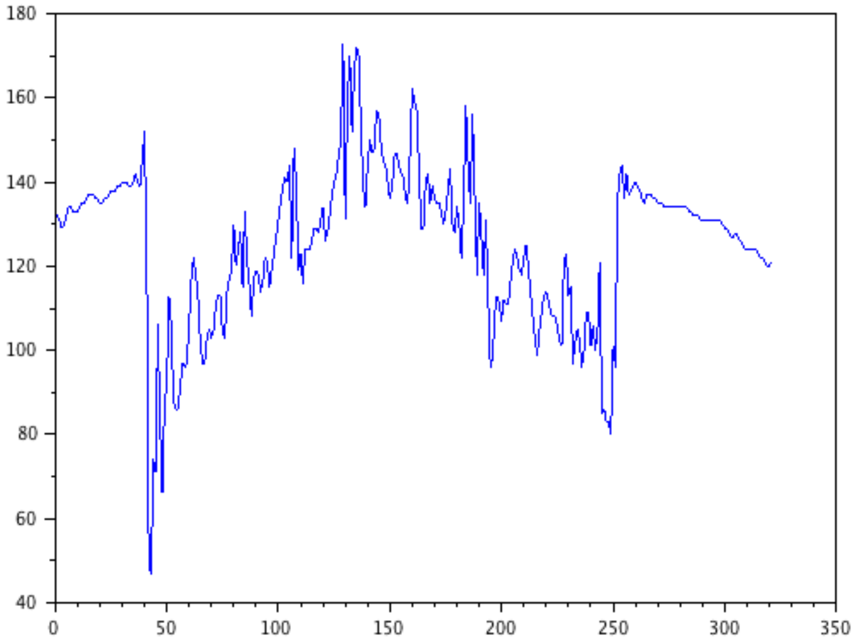


Norme du gradient obtenu par différences finies

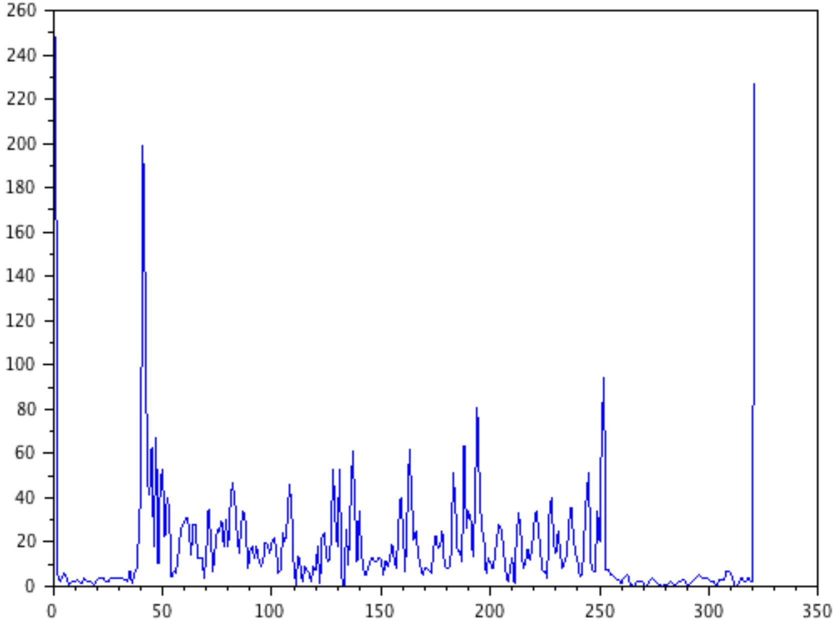




Coupe de l’image

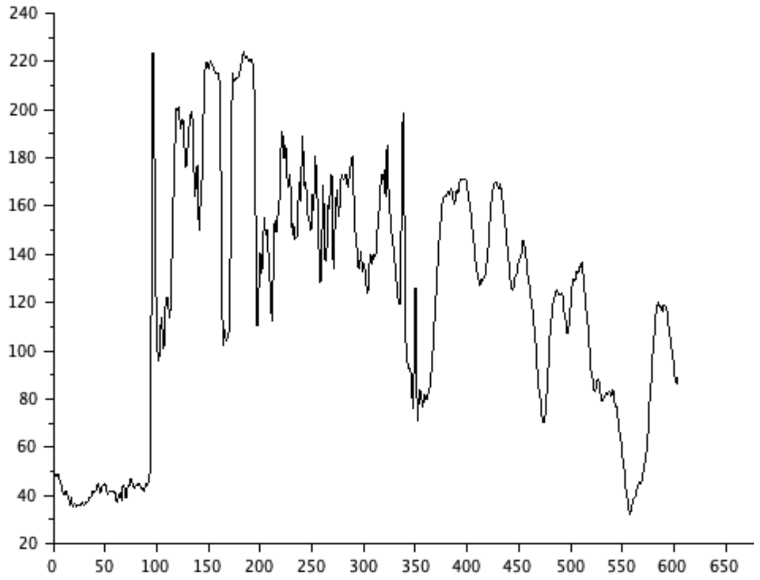


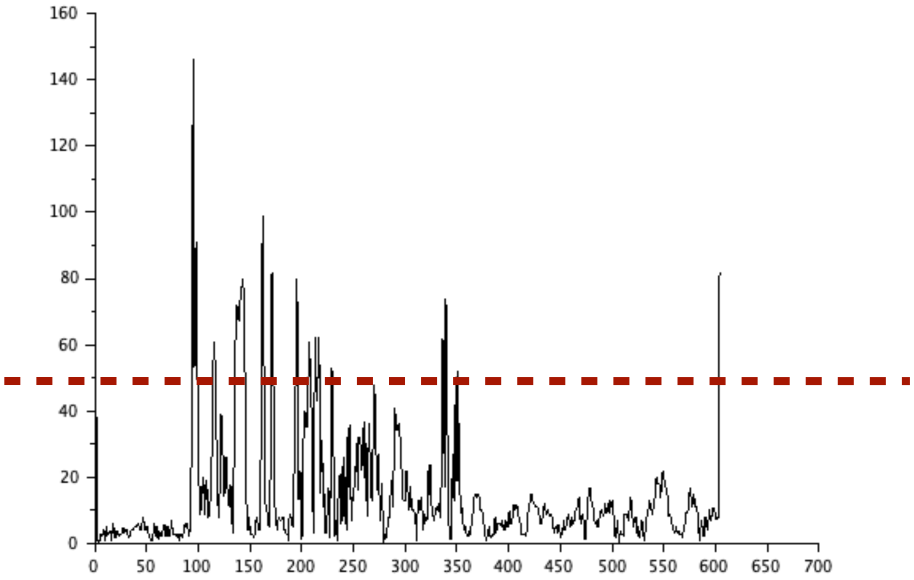
Norme du gradient



Détection de contours : 1ère méthode

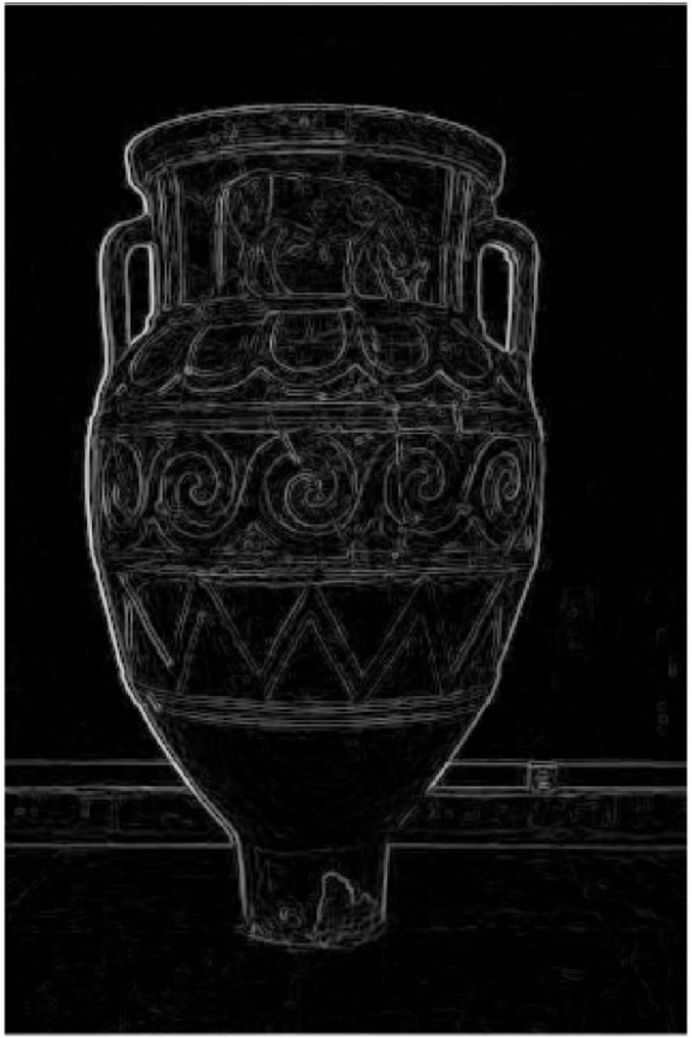
- Contour = norme gradient > seuil

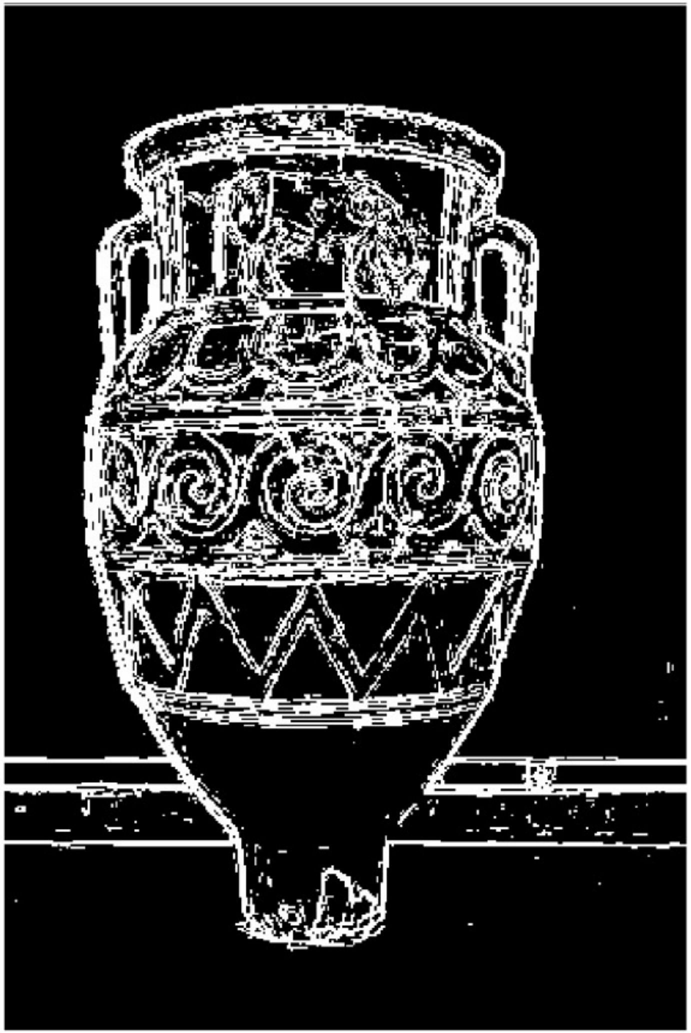




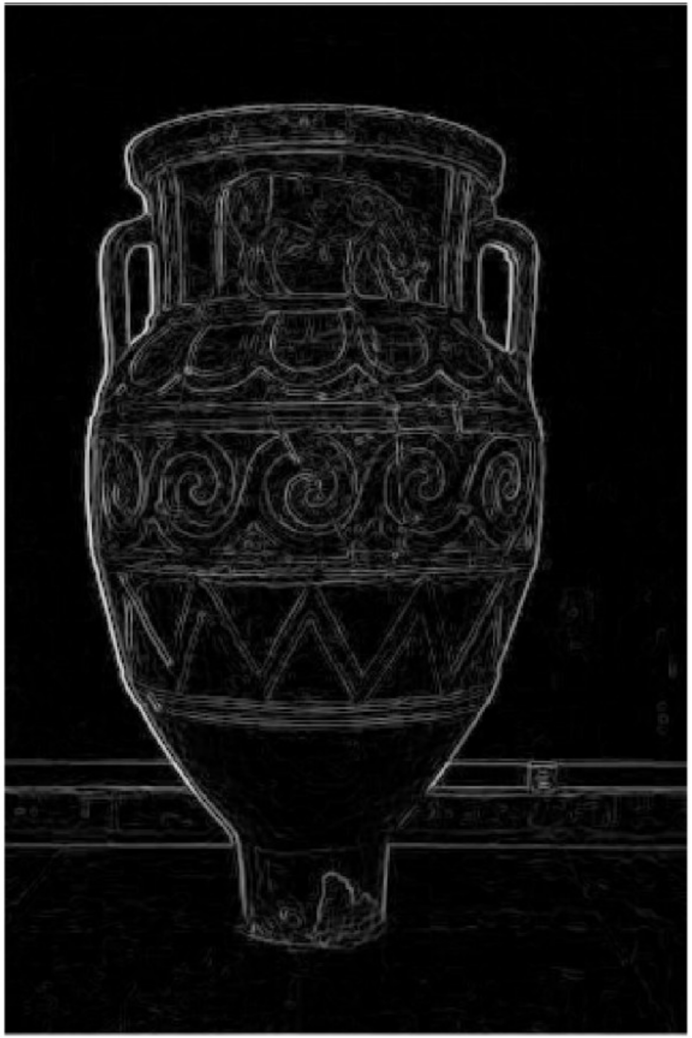
Valeur du seuil ???

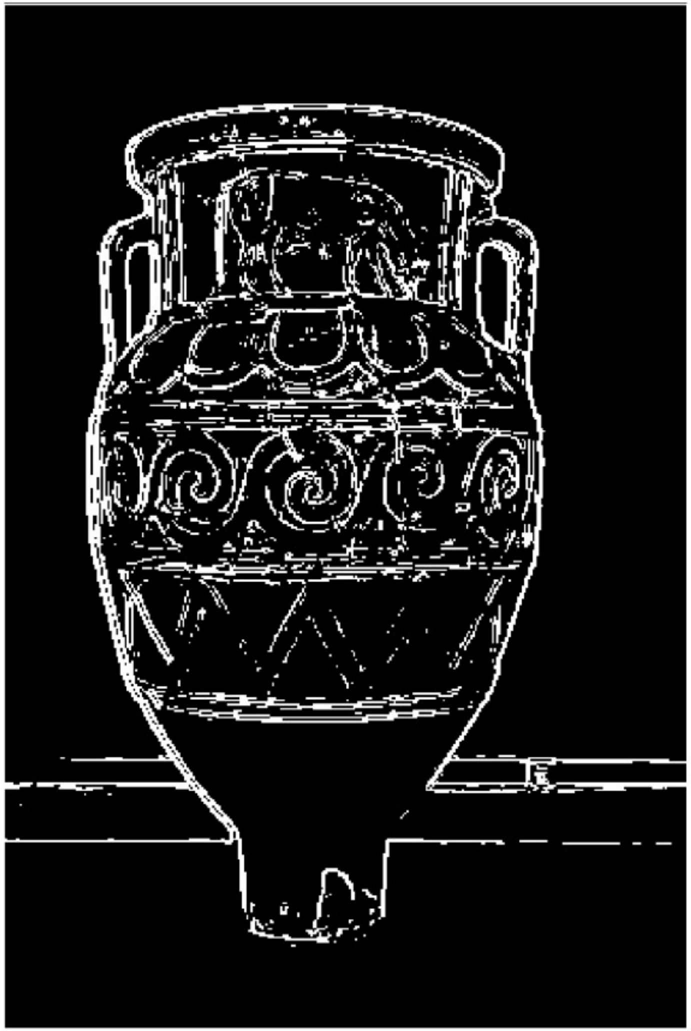
Détection de contours par seuillage (p=80%)



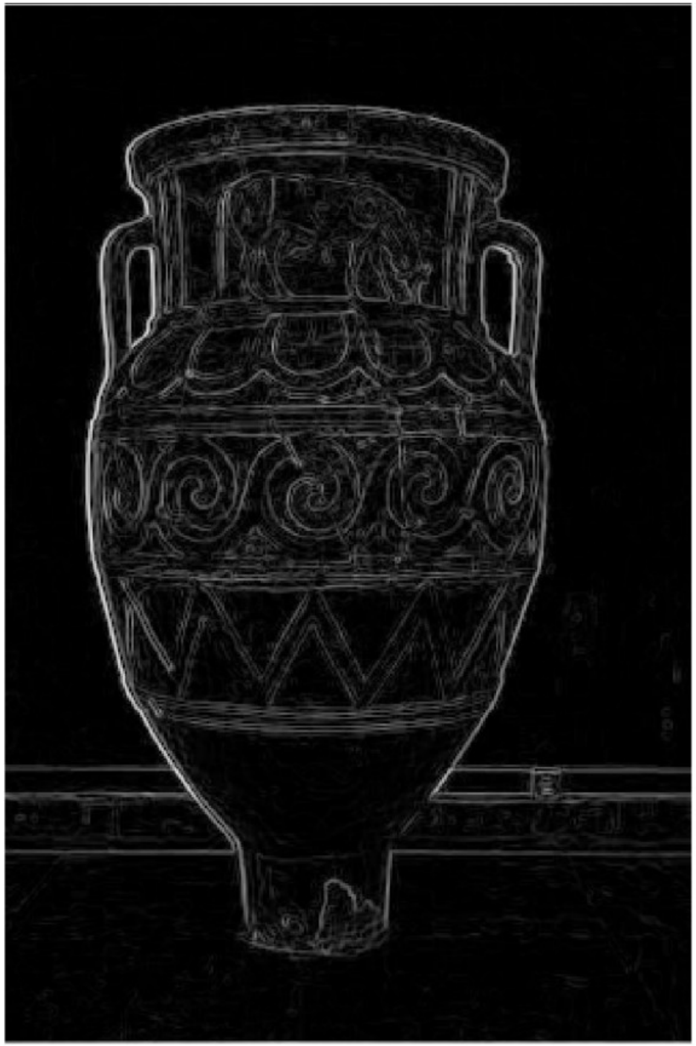


Détection de contours par seuillage (p=90%)



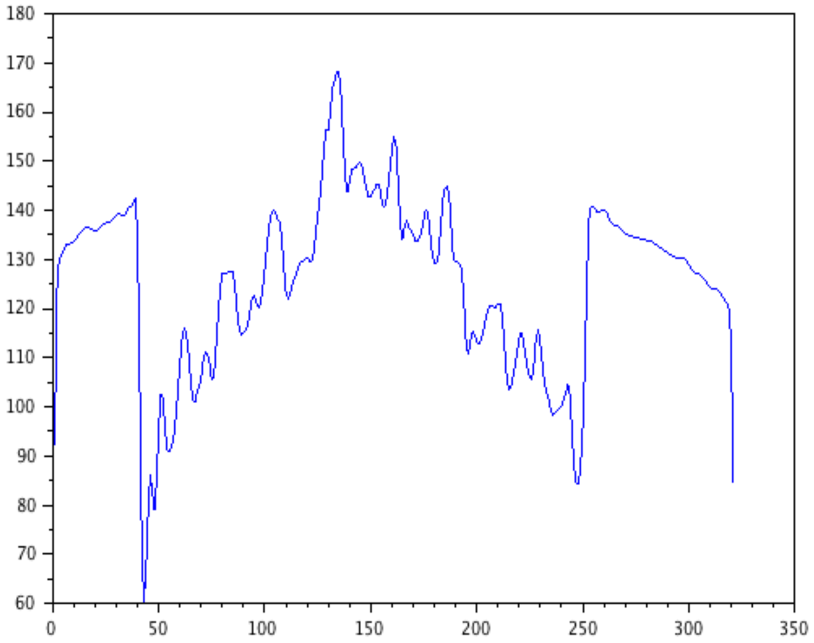


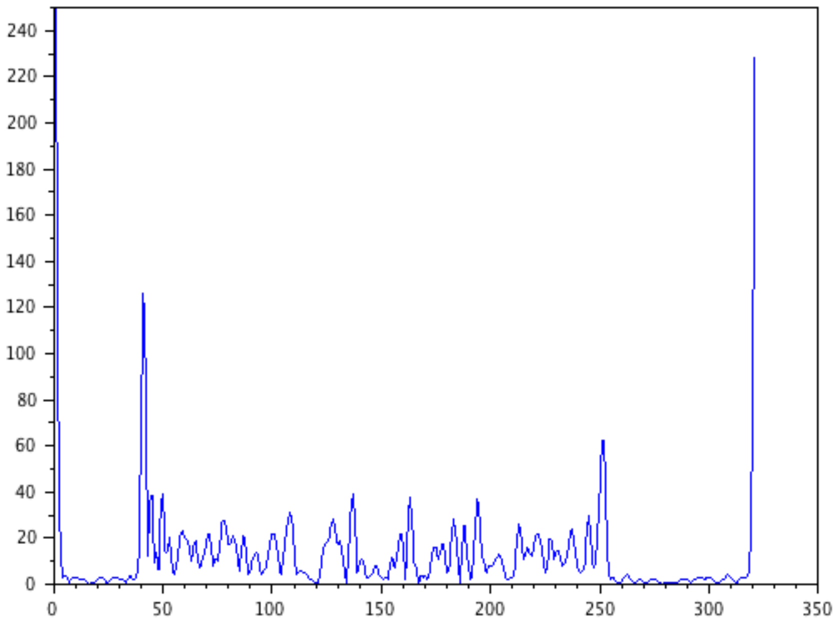
Détection de contours par seuillage (p=70%)



Effet du lissage

- Filtre Gaussien σ = 1

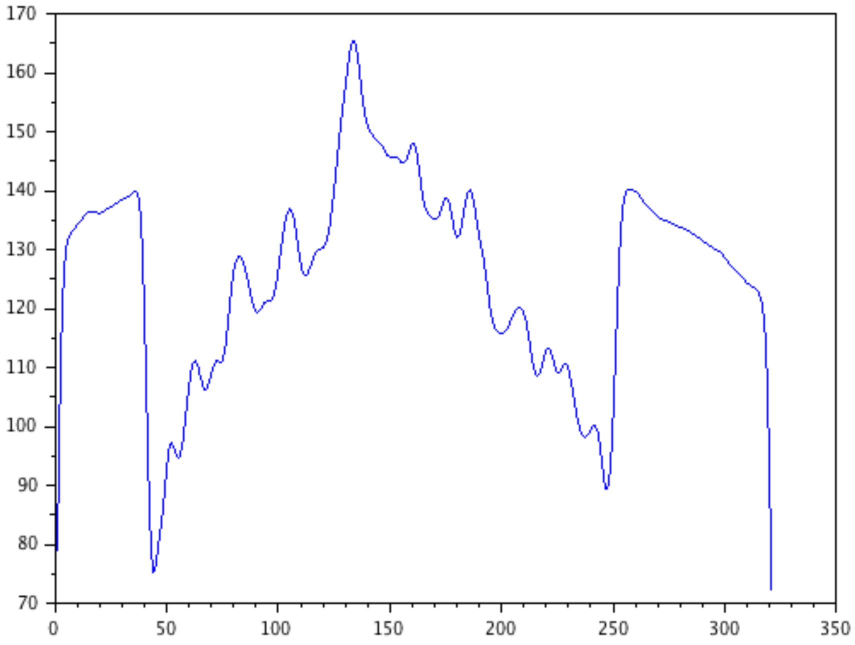


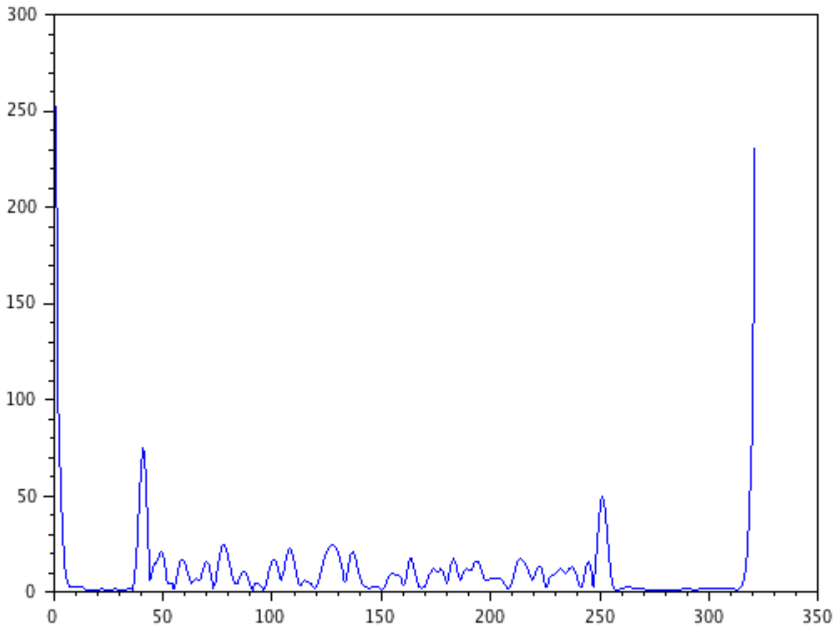


Effet du lissage

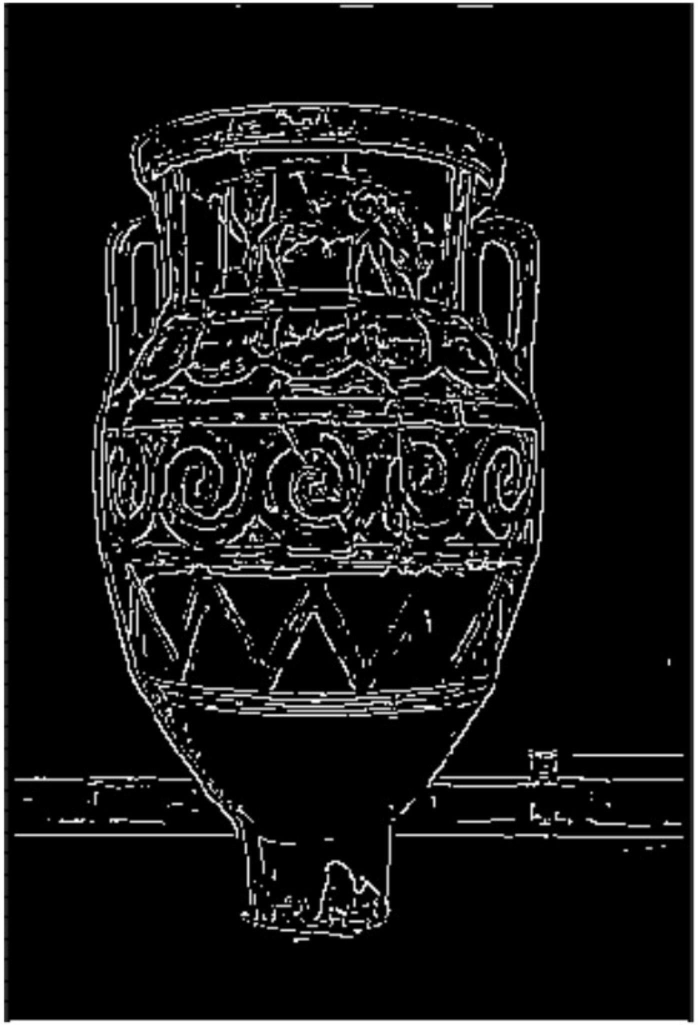
- Filtre Gaussien σ = 2

Rend l'image plus "dérivable" grâce à la convolution par la Gaussienne

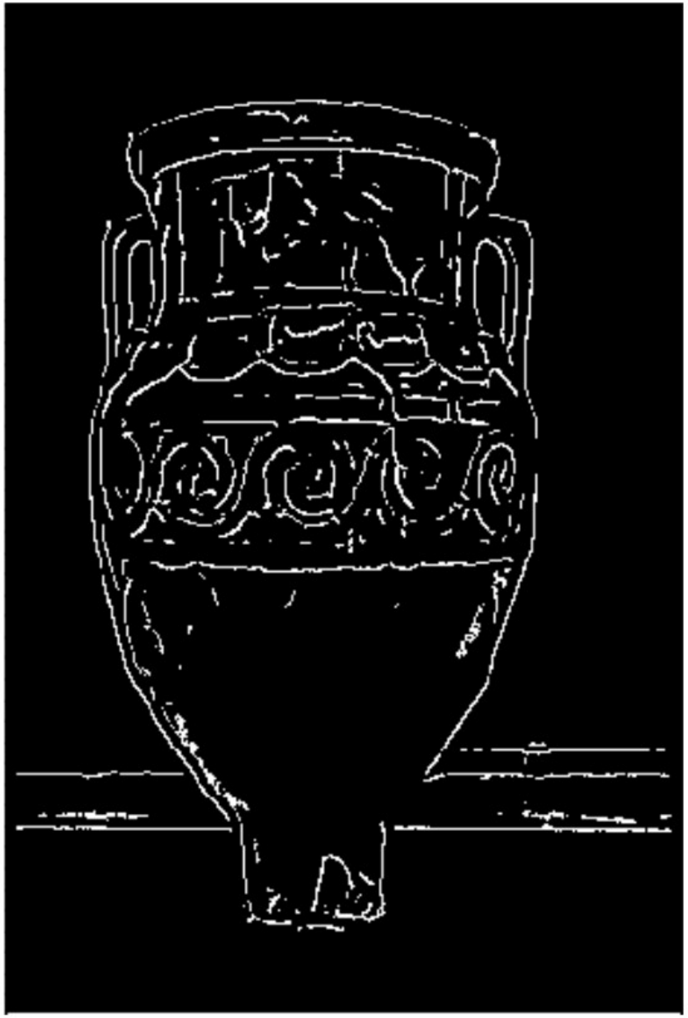




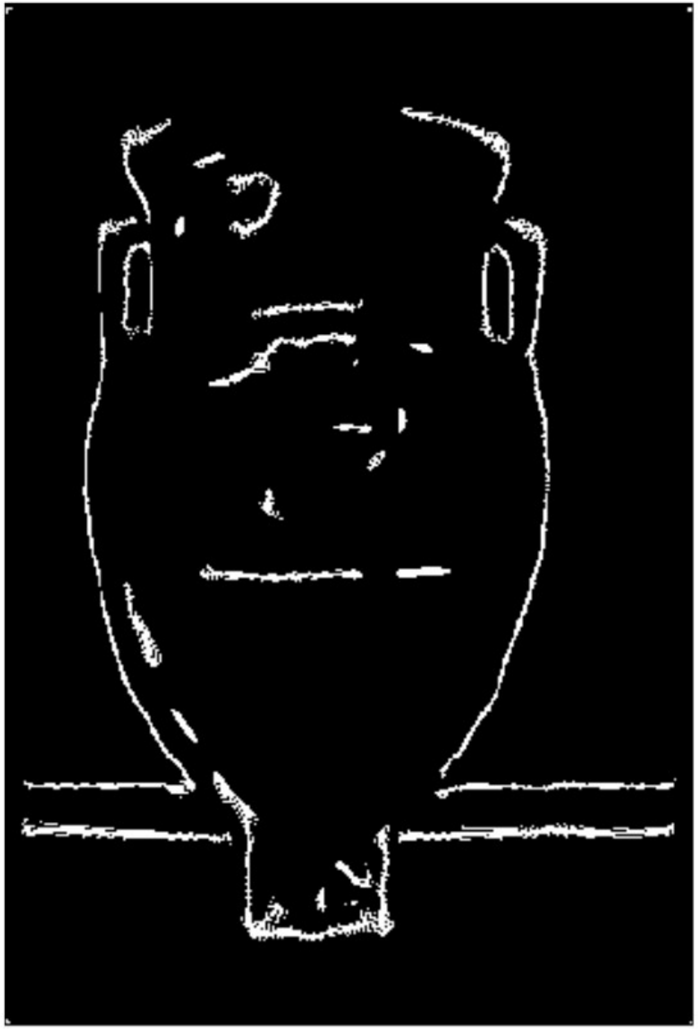
Lissage Gaussien (σ = 1) +Contour



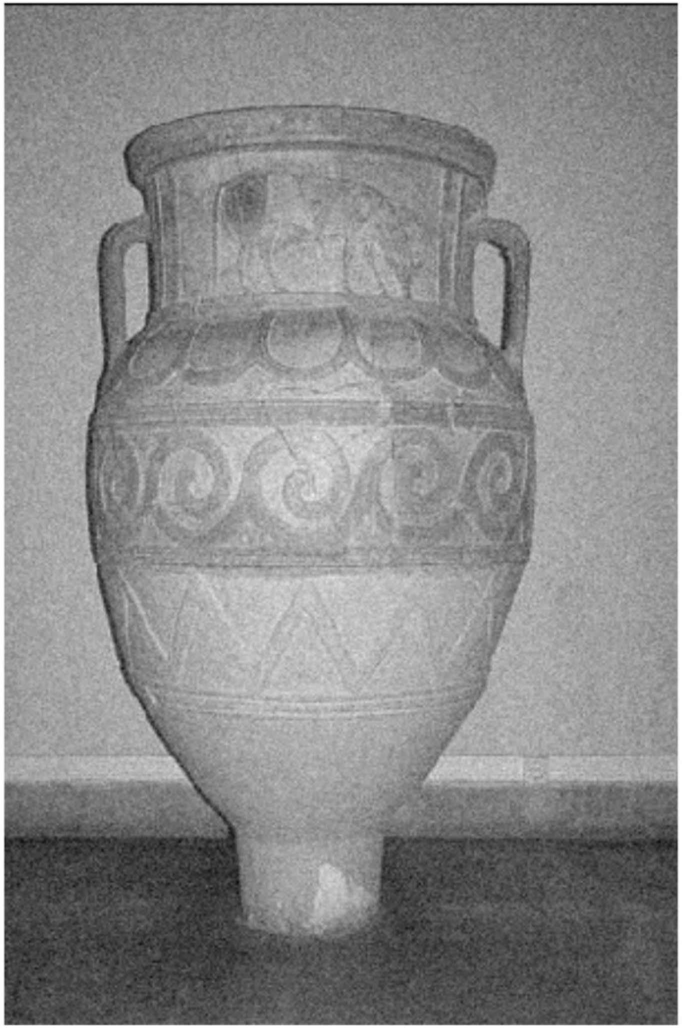
Lissage Gaussien (σ = 2) +Contour

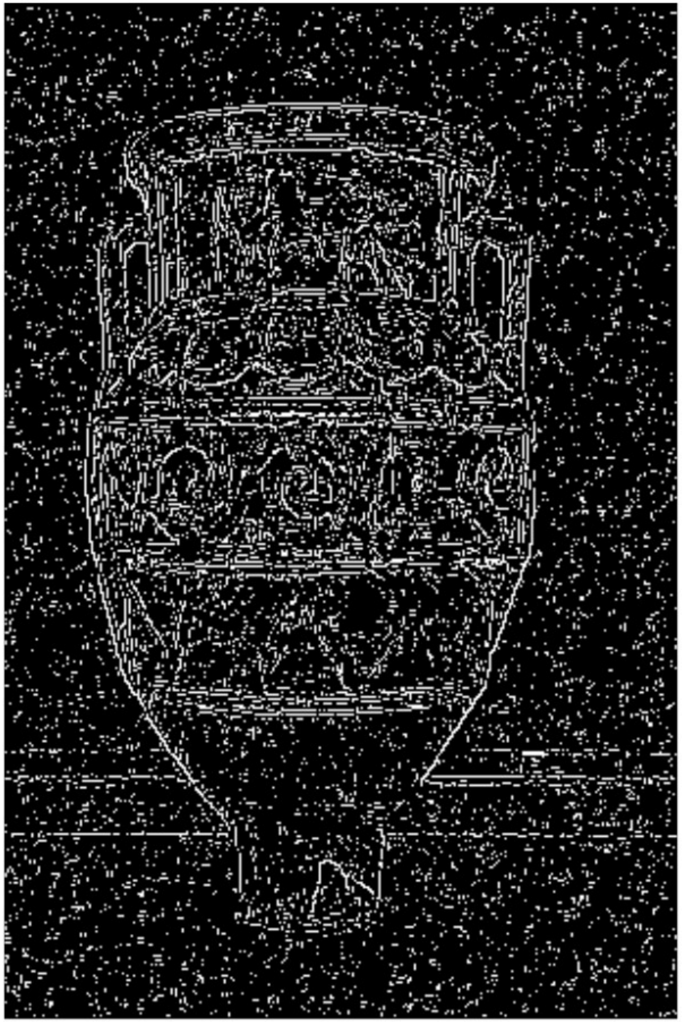


Lissage Gaussien ($\sigma = 5$) +Contour

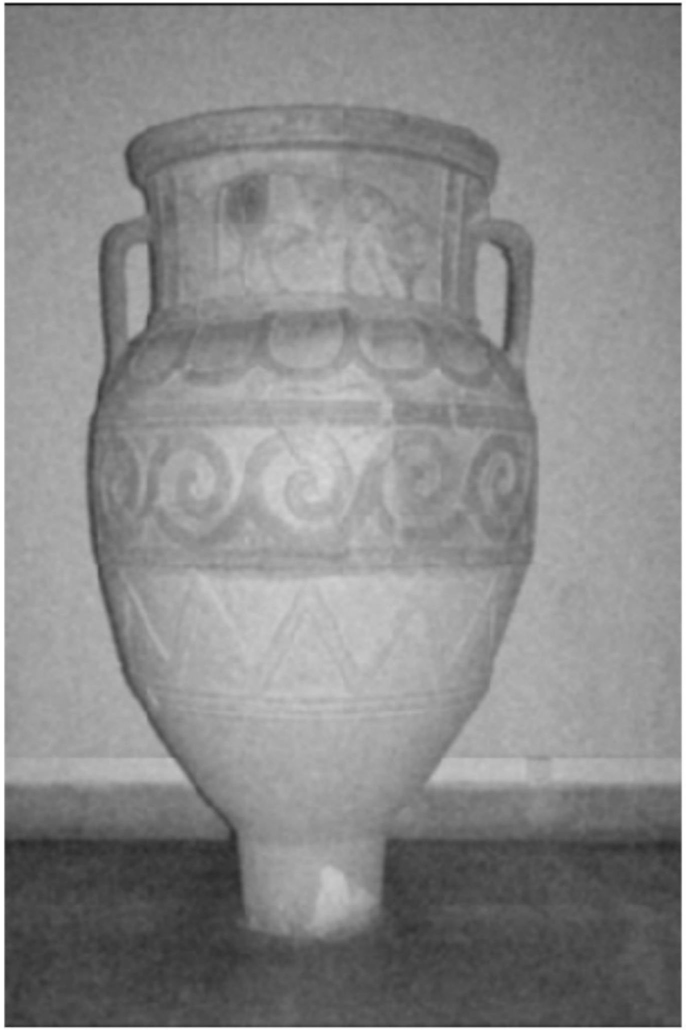


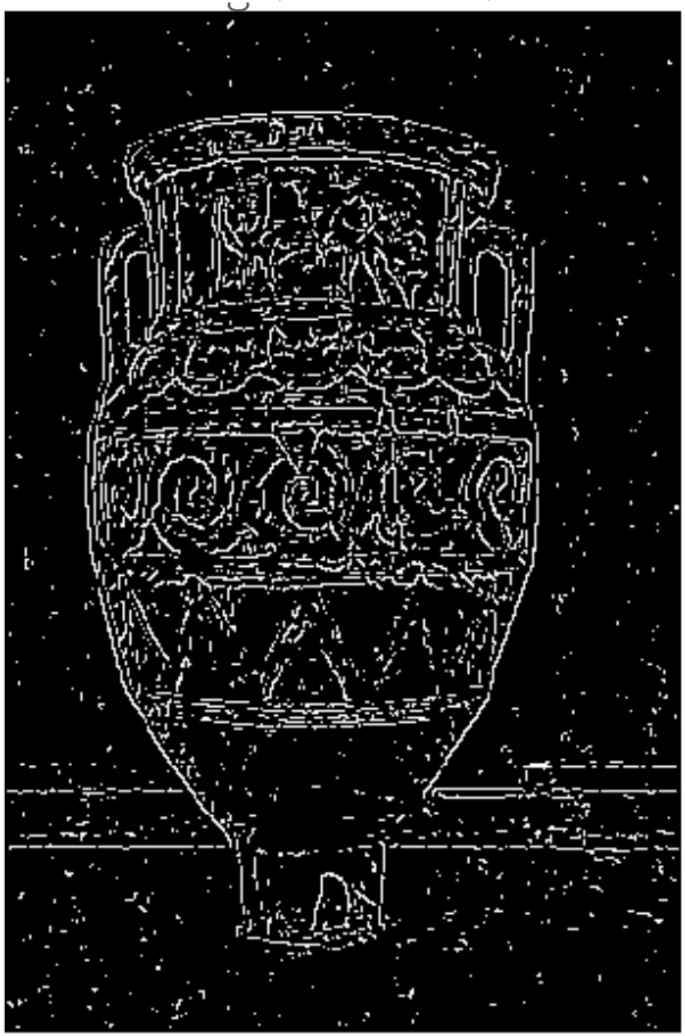
Effet du bruit



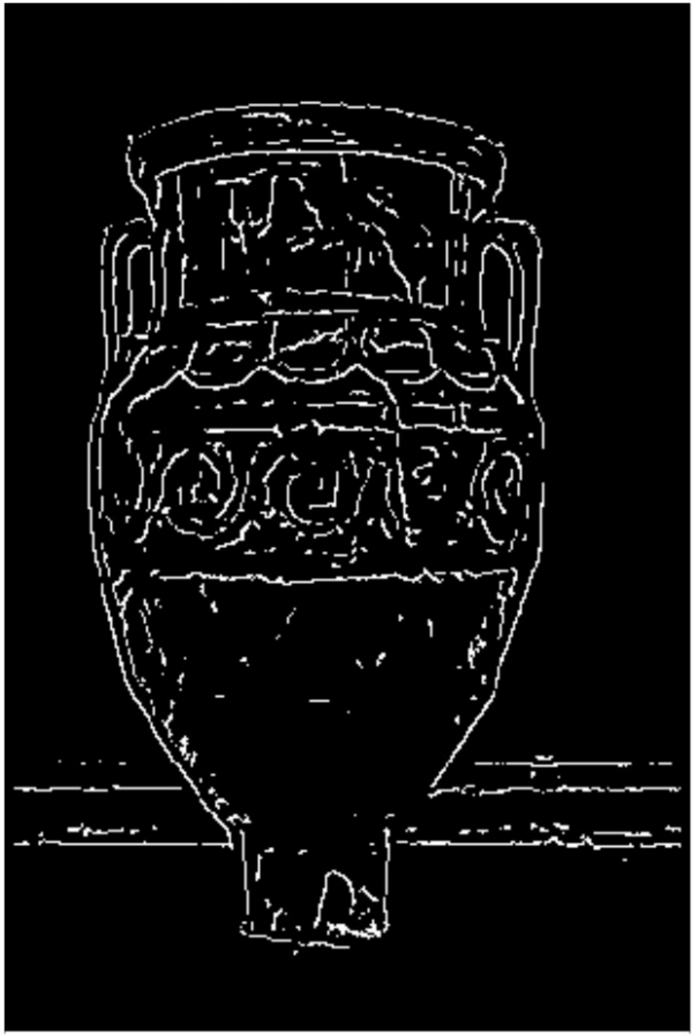


Effet du bruit : Lissage Gaussien (σ = 1) +Contour





Effet du bruit : Lissage Gaussien (σ = 2) +Contour



Rappel : Filtrage et Convolution en 1D

- Produit de convolution entre deux fonctions

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\,g(u)\,du=g*f(x)$$

- Version discrete

$$f*g(n)=\sum_m f(m)\,g(n-m)=\sum_m f(n-m)\,g(m)=g*f(n)$$

Lissage et dérivée en 1D

- En continu

$$F(x)=f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\,g(u)\,du=g*f(x)$$

$$et\,\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right)=\frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x+h-t)-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{h}\left(g(x+h-t)-g(x-t)\right)dt$$

$$quand\; h\rightarrow 0,\; F'(x)=(f*g)'(x)=f*g'(x)$$

- La convolution est dérivable d**ès qu'une des deux fonctions est dérivable**!
- Convoluer avec une fonction dérivable, rend la fonction dérivable

Lissage et dérivation pour les images

- Lissage **puis** dérivation

$$
\begin{aligned}
& (I * G) * D_x & \\
& = I * (G * D_x) & \text{associativité} \\
& = I * (D_x * G) & \text{commutativité} \\
& = (I * D_x) * G & \text{associativité}
\end{aligned}
$$

  - C’est la même chose que dériver puis lisser
  - C’est la même chose que de dériver le filtre de lissage
  - La dérivée du filtre de lissage est une “dérivée lissée” (ex. Cas Gaussien)

Exercices récapitulatifs

Ex. 1

Le filtre $\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ est il un filtre de moyennage local, de gradient en x (horizontal), de gradient en y (vertical) ? Justifiez votre réponse.

Appliquez le filtre de la question 2) à l'image ci-dessous.

```
0.  0.  0.  0.  0.  0.
0.  0.  0.  0.  0.  0.
0.  0.  0.  0.  0.  0.
0.  0.  1.  1.  1.  1.
0.  0.  1.  1.  1.  1.
0.  0.  1.  1.  1.  1.
```

Calculez la norme du gradient de l'image ci-dessus.

Ex. 2

On peut remarquer que les moustaches sont dédoublées sur l'image du contour ; plus généralement, c'est le cas pour les traits (par opposition aux bords des objets pleins). L'objectif de cet exercice est de comprendre pourquoi. Pour simplifier l'analyse, on s'intéresse à une image I qui contient un trait noir vertical sur fond blanc, codée en niveaux de gris sur 8 bits :

```
I =
    255   255   255   255   255   0   255   255   255   255   255
    255   255   255   255   255   0   255   255   255   255   255
    255   255   255   255   255   0   255   255   255   255   255
    255   255   255   255   255   0   255   255   255   255   255
    255   255   255   255   255   0   255   255   255   255   255
```

Ex. 2

3. Appliquer le filtre D_x à l'image I pour calculer une approximation I_x de sa dérivée suivant x. Comme toutes les lignes sont identiques, vous n'indiquerez dans votre réponse qu'une ligne de I_x (et de même pour les images des questions suivantes). Pour le traitement des pixels du bord de l'image, on fait le choix de leur donner la valeur nulle : ainsi la première et la dernière colonne de I_x seront nulles et on n'appliquera la formule précédente que sur les autres colonnes.

4. Calculer l'image I_N correspondant à la norme du gradient de l'image I. L'image I_C contenant