Exercices INF 303

Université Grenoble Alpes

Table des matières

Point méthode sur les preuves par récurrence dans les graphes :
Pour prouver une propriété $P(n)$ sur un graphe par récurrence sur n le nombre de sommets :

1. **Initialisation :** on montre $P(n)$ pour une petite valeur de n, généralement pour $n = 1$.
2. **Hérédité :** on veut prouver que $P(n+1)$ est vraie en s'aidant de l'hypothèse de récurrence $P(n)$. Comme le but est de prouver $P(n+1)$, on commence par **prendre un graphe G à $n+1$ sommets** correspondant aux hypothèses de $P(n+1)$. On enlève un sommet x judicieusement choisi, en posant $G' = G \setminus \{x\}$. Alors G' est un graphe à n sommets sur lequel on peut appliquer la propriété $P(n)$ par hypothèse de récurrence (attention, souvent il faut vérifier que G' satisfait bien les autres conditions de $P(n)$, outre la taille). On obtient donc une partie de la conclusion souhaitée sur G', et l'on doit travailler pour prouver la propriété sur G qui contient G' plus le sommet x. [1]
3. **En conclusion,** les étapes d'initialisation et d'hérédité montrent ensemble par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Méthodes de preuves courantes en graphes :

- ☐ Par l'absurde
- ☐ Par double comptage
- ☐ Par récurrence sur le nombre de sommets ou le nombre d'arêtes du graphe, ou sur un autre paramètre du graphe
- ☐ Par objet maximal ou minimal
- ☐ Preuve algorithmique par invariant de boucle

1. Parfois, on fait une récurrence forte, c'est-à-dire qu'on s'autorise à enlever un ensemble de sommets X (plusieurs sommets) et à appliquer l'hypothèse de récurrence sur le graphe plus petit $G \setminus X$.

1 Enumération

On rappelle ici qu'un jeu de cartes standard contient 52 cartes, réparties en 4 couleurs : le Carreau $\diamondsuit$, le Cœur $\heartsuit$, le Trèfle $\clubsuit$ et le Pique $\spadesuit$. Chaque couleur contient 13 cartes, numérotées ainsi : As, 1, 2, …, 10, Valet, Dame, Roi.

Exercice 1 :

De combien de façons différentes sept enfants peuvent-ils se répartir 7 déguisements différents ?

Exercice 2 : De combien de façons six enfants peuvent-ils s'asseoir sur une rangée de six chaises si trois d'entre eux refusent d'occuper les extrémités de la rangée ?

Exercice 3 : De combien de façons différentes peut-on former la suite ordonnée VALET, DAME, ROI, AS si l'on veut que les cartes de cette suite soient

Question 1 – de couleurs différentes ?

Question 2 – de la même couleur ?

Question 3 – de n'importe quelle couleur ?

(Aux cartes les couleurs sont : le Carreau $\diamondsuit$, le Cœur $\heartsuit$, le Trèfle $\clubsuit$ et le Pique $\spadesuit$.)

Exercice 4 : Un coffre-fort possède cinq serrures à roulettes numérotées de 0 à 9 qui forment un code. Un voleur tente d'ouvrir le coffre-fort et il ne connaît pas la combinaison des cinq serrures.

Question 1 – Combien existe-t-il de possibilités de combinaisons ?

Le voleur ne peut essayer que 100 combinaisons avant l'arrivée de la police.

Question 2 – Quelle est la probabilité qu'il réussisse à ouvrir le coffre-fort ?

Exercice 5 : 24 pilotes participent à un Grand Prix de Formule 1, mais seuls les 10 premiers marquent des points pour le championnat. Supposons que tous les pilotes terminent la course.

Question 1 – Combien de classements généraux possibles y a-t-il au total ?

Question 2 – Combien de classements possibles y a-t-il pour les 10 premiers ?

Exercice 6 : À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on compose une main de trois cartes. Combien existe-t-il de façons différentes de composer

Question 1 – trois as ?

Question 2 – trois coeurs ?

Question 3 – trois cartes d'une même couleur ?

Question 4 – une paire ? (deux cartes de même rang et une autre de rang différent)

Question 5 – trois couleurs différentes ?

Exercice 7 : On considère un ensemble fini non vide. Montrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, qu'il a autant de parties de cardinalité paire que de parties de cardinalité impaires.

Exercice 8 : Combien de nombres composés d'exactement trois chiffres et inférieurs à 500 peut-on former à l'aide des chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 si les répétitions :

Question 1 – sont permises ?

Question 2 – ne sont pas permises ?

Exercice 9 : Combien peut-on former de mots de 7 lettres avec les lettres du mot PLAFOND

Question 1 – si une même lettre ne peut être employée qu'une seule fois ?

Question 2 – si on tolère les répétitions d'une même lettre ?

Exercice 10 : Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot MISSISSIPPI (chacune de ses lettres doit être utilisée exactement une fois) ? Autrement dit, combien d'anagrammes ce mot a-t-il ?

Exercice 11 : Soient k, n deux entiers naturels. Dénombrer les mots sur $\{0, 1\}$ de longueur n qui ont exactement k uns.

Principe des tiroirs

Exercice 12 : Dans un village de 400 habitants, y a-t-il au moins deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

Exercice 13 : On considère un carré de côté d. On y place cinq points.

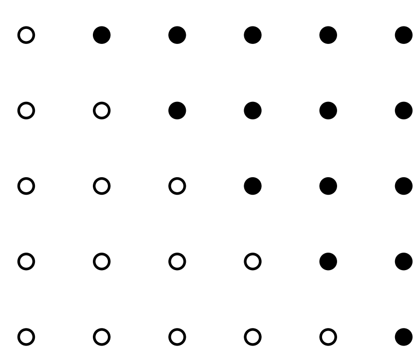
Montrer qu'au moins deux points sont à distance strictement inférieure à d.

Exercice 14 : On place les entiers de 1 à 10 sur un cercle. Montrer qu'il existe au moins un triplet d'entiers consécutifs dont la somme est supérieure ou égale à 17.

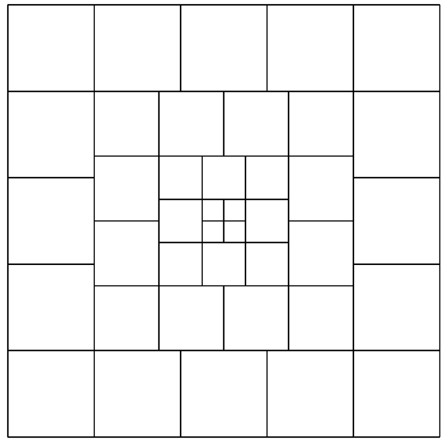
Double-comptage

Exercice 15 : Soit n un entier supérieur ou égal à 0. En vous aidant de la figure ci-dessous, montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Exercice 16 : Le carré ci-dessous est formé par 4 couronnes C_k ($k = 1, ..., 4$), où C_k est elle-même constituée de $4k$ carrés identiques de côté k.



Question 1 – Pour un k fixé, quel est l'aire couverte par la k-ième couronne ?

Question 2 – Utiliser la question précédente et le dessin pour déduire une formule pour la somme des n premiers cubes.

2 Récurrence

Exercice 17 :

Montrer par récurrence les résultats suivants :

Question 1 – La somme des entiers de 1 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$.

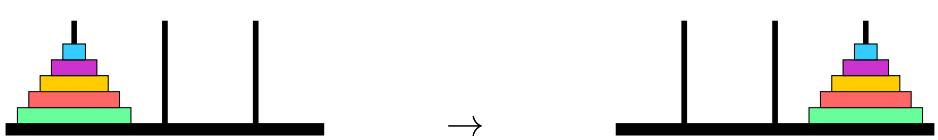
Question 2 – $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ pour $n \geq 1$.

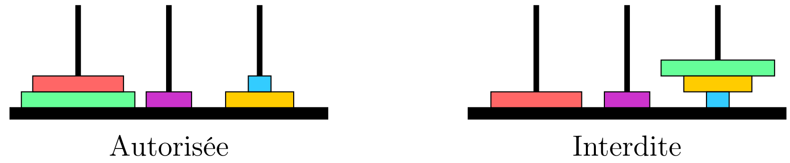
Question 3 – La somme des n premiers cubes $1^3 + \ldots + n^3$ est $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour $n \geq 1$.

Question 4 – Pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ pour $n \geq 0$.

Exercice 18 : Montrer qu'avec des timbres de 3 et 5 euros, on peut faire des affranchissements pour toutes les sommes entières de plus de 8 euros. (Indice : il faut faire une récurrence à 3 crans).

Exercice 19 : Dans le jeu des tours de Hanoi, il y a 3 pics et n disques. Les disques ont tous des tailles différentes. On numérote les disques du plus petit (1) au plus grand (n). Au départ tous les disques sont disposés du plus grand au plus petit sur un des pics. Il faut déplacer tous les disques pour les mettre sur un autre pic. Un "coup" consiste à déplacer un disque du dessus d'une pile vers le dessus d'une autre pile. De plus, il est interdit de poser un disque sur un disque plus petit





Montrer par récurrence qu'il faut au moins $2^n - 1$ coups pour pouvoir déplacer toute la pile.

Arbres d'informaticien : parcours et backtracking

Rappels et précisions de vocabulaire :

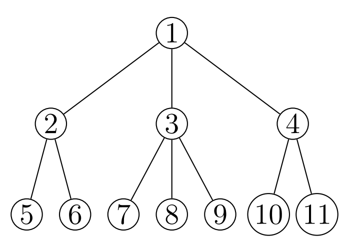
— *Enfants, fils* d'un noeud : noeuds directement reliés en dessous du noeud.
— *Descendants* d'un noeud : tous les noeuds reliés en dessous par un chemin (les enfants, les enfants des enfants,...)
— *Parent, père* d'un noeud : noeud directement relié au dessus (il est unique !)
— *Ancêtres* d'un noeud : tous les noeuds reliés au dessus (le parent, le parent du parent,...)
— *Feuille* : noeud sans enfant
— *Racine* : noeud sans parent
— *Noeud interne* : noeud avec au moins un enfant
— *Profondeur d'un noeud* : distance avec la racine (nombre de traits) (la profondeur de la racine est 0 !)
— *Profondeur (hauteur) de l'arbre* : maximum des profondeurs sur tous les noeuds
— *Largeur* : nombre maximum de noeuds sur une même profondeur.
— *Arbre trivial* : ne contient qu'un noeud
— *Arbre k-aire* : tous les noeuds ont au plus k enfants. Attention, l'ordre des enfants a une importance ! Pour $k = 2$, on parle d'arbre *binaire*.
— *Arbre k-aire complet* : tous les niveaux sont remplis (sauf peut-être le dernier).

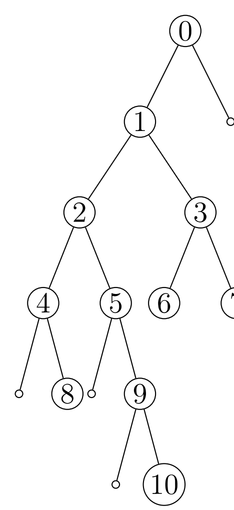
Exercice 20 : Dans le cours, on a vu qu'un arbre peut toujours être encodé par un arbre binaire, en suivant la transformation suivante : chaque noeud de l'arbre de départ a comme fils gauche son premier fils, et comme fils droit son premier frère.

Question 1 – Transformer l'arbre de gauche en arbre binaire T_B.

Question 2 – Comment retrouver la profondeur d'un nœud dans l'arbre gauche en utilisant T_B ?

Question 3 – Retrouver l'arbre correspondant à l'arbre binaire de droite.





Exercice 21 : Pour l'arbre de la Figure 1, donnez l'ordre des sommets pour les parcours en profondeur préfixe, suffixe et infixe. Donnez aussi l'ordre des sommets pour le parcours en largeur.

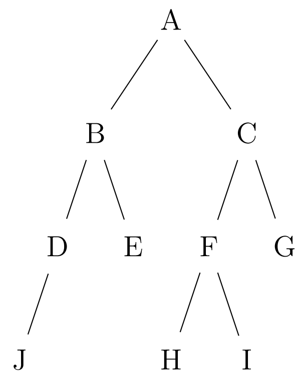


Figure 1 – Parcours d'un arbre

Exercice 22 : Pour un arbre à n nœuds, déterminer (en termes de n) :

1. la plus grande profondeur possible,
2. la plus grande largeur possible,
3. la plus petite profondeur possible,
4. la plus petite largeur possible.

Exercice 23 : Pour un arbre binaire à $n = 2^k - 1$ nœuds, déterminer (en termes de n) :

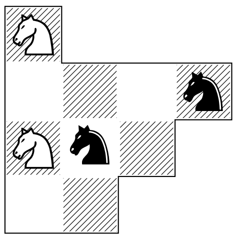
1. la plus grande profondeur possible,
2. la plus grande largeur possible,
3. la plus petite profondeur possible,
4. la plus petite largeur possible.

Exercice 24 : Quelle est la largeur d'un arbre k-aire complet avec aussi le dernier niveau rempli en fonction de la profondeur de l'arbre ?

3 Graphes

Modélisation

Exercice 25 : **Échange de cavaliers** (Jean-Paul Davalan)
Pour résoudre ce casse-tête vous devez échanger les positions des deux cavaliers blancs avec celles des deux noirs, en respectant évidemment les règles du déplacement du cavalier sur un échiquier et en n'utilisant que les dix cases dessinées (le cavalier ne peut pas se poser sur une case non dessinée et un cavalier à la fois peut se poser sur une case). On n'impose pas d'alterner entre un déplacement de cavalier noir et un déplacement de cavalier blanc.



Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe.

Question 2 – Utiliser cette modélisation pour résoudre ce casse-tête.

Question 3 – Y-a-t-il des cases inutiles ?

Exercice 26 : Dans un tournoi d'échecs, chaque participant doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure. Déterminer la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre de participants est 3, 4, 5 ou 6.

Exercice 27 : Trois touristes voyagent avec trois cannibales. Si les touristes sont en infériorité numérique par rapport aux cannibales, alors ces derniers mangent les touristes... Les touristes et les cannibales veulent traverser une rivière. Pour cela, ils disposent d'une barque, qui ne permet de transporter que deux personnes à la fois d'une rive à l'autre.

Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe. Tout le monde peut-il traverser sans qu'aucun touriste ne soit mangé ?

Notions de base

Exercice 28 : Dessiner tous les graphes à 3 et 4 sommets, à isomorphisme près.

Exercice 29 : Une ligue de football contient 15 clubs. Pour des raisons de temps, on décide que chaque club ne jouera que la moitié des matchs possibles. Comment organiser le tournoi ? (on pourra commencer par étudier le cas de 7 clubs).

Degrés

Exercice 30 : **Séquence de degrés**

On dit qu'une séquence de nombres entiers est *réalisable* s'il existe un graphe dont les sommets ont exactement les degrés de la séquence.

Question 1 – Pour chaque séquence qui suit, dites si la séquence est réalisable ou non. Si la réponse est oui, dessinez un tel graphe et dire s'il est unique (à isomorphisme près), sinon justifiez pourquoi il n'y a pas de tel graphe.

(a) $(1; 2; 2; 4; 5; 5)$

(b) $(2; 2; 2; 2; 2; 2)$

(c) $(1; 1; 1; 1; 1; 1)$

(d) $(3; 3; 3; 3; 3; 5)$

(e) $(2; 2; 2; 3; 3; 3)$

(f) $(0; 2; 2; 3; 4; 5)$

(g) $(5; 5; 5; 5; 2; 2)$

Question 2 – Donnez des conditions nécessaires pour qu'une séquence soit réalisable. Sont-elles suffisantes ?

Exercice 31 : **Théorème d'Havel-Hakimi** (N. Trotignon)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ les degrés des sommets de G. On numérote les sommets de G $v_1, \ldots, v_n$ de telle sorte que $d_G(v_i) = d_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Question 1 – Montrer qu'il existe un graphe H sur le même ensemble de sommets $V = \{v_1, ..., v_n\}$, tel que $N_H(v_n) = \{v_{n-d_n}, ..., v_{n-1}\}$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $d_H(v_i) = d_i$.

Question 2 – On dit qu'une suite d'entiers $(d_1, ..., d_n)$ telle que $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ est une *séquence de degrés* s'il existe un graphe sur n sommets de degrés $d_1, ..., d_n$. Montrer qu'une suite S est une séquence de degrés si et seulement si ou bien $S = (0)$ ou bien la suite S' définie ci-dessous est une séquence de degré : $S' = (d'_1, ..., d'_{n-1})$ avec $d'_i = d_i$ si $1 \leq i \leq n - d_n - 1$ et $d'_i = d_i - 1$ si $n - d_n \leq i \leq n - 1$.

Exercice 32 : **Jeux de mains**

Le tout-Grenoble se retrouve lors du vernissage d'une exposition dans une galerie d'art contemporain locale. Certaines des personnes présentes au vernissage se connaissent, d'autres pas. La plus élémentaire des politesses veut que les personnes qui se connaissent se serrent la main. Deux personnes ne se connaissant pas ne se serrent pas la main.

Question 1 – Démontrer qu'il existe au moins deux personnes qui ont serré le même nombre de mains.

Exercice 33 : **Le professeur McBrain**

Le professeur McBrain et son épouse Muriel donnent une surprise-partie à laquelle ils invitent 4 autres couples mariés. À l'arrivée, certaines paires de personnes se sont serrées la main (bien sûr, aucun couple marié ne se serre la main). À la fin de la soirée, le professeur demande à chacune des 9 personnes, à combien de personnes elles ont serré la main au début de la soirée et il obtient 9 réponses différentes.

Question 1 – À combien de personnes Muriel a-t-elle serré la main ?

Exercice 34 : Dessinez un graphe 3-régulier qui ne soit pas le graphe complet K_4.

Exercice 35 : **Conseil municipal**

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :

— Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
— Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Question 1 – Combien y'a t-il de membres dans le conseil municipal ?

Exercice 36 : Sept étudiants partent en vacances. Ils décident que chacun enverra une carte à trois autres. Est-il possible que chaque étudiant recoivent des cartes postales précisément de la part des trois personnes auxquelles il en a envoyé ?

Représentations des graphes

Exercice 37 :

Question 1 – Représenter le graphe correspondant à la matrice d'adjacence suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2 – Est-ce que les matrices suivantes sont les matrices d'incidence d'un graphe simple non orienté. Si c'est le cas, représenter ce graphe. Sinon, donner la raison.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

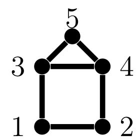
Exercice 38 : (A. Parreau)

Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adjacence, d'incidence, les deux, ou aucune des deux. Dans tous les cas, justifiez pourquoi, et dans le cas positif, dessinez le(s) graphe(s) correspondant(s).

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 39 : (A. Parreau)

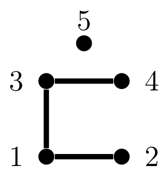
Complétez le tableau suivant :

Définition ensembliste	Représentation graphique	Matrice adjacence	Matrice d'incidence	Liste d'adjacence
				
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $E = \{12, 45, 34, 14, 35\}$				
		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$		
			$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
				— 1 : $[2, 3, 5]$ — 2 : $[1, 4]$ — 3 : $[1, 5]$ — 4 : $[2, 5]$ — 5 : $[1, 3, 4]$

Exercice 40 : (A. Parreau)

Chaque colonne du tableau suivant représente un graphe différent, avec une représentation différente. Dans chaque cas, on demande de répondre aux questions suivantes (sans passer par une autre représentation).

1. Quelle représentation du graphe a-t-on ?
2. Quels sont les voisins du sommet 1 ?
3. Quel est le nombre de voisins du sommet 4 ?
4. Est-ce que 5 est un sommet isolé ?
5. Combien y-a-t-il d'arêtes dans le graphe ?
6. Est-ce que les sommets 3 et 4 sont adjacents ?

		$V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{12, 34, 15\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	— 1 : [2, 3, 4] — 2 : [1, 3, 4] — 3 : [1, 2, 4] — 4 : [1, 2, 3] — 5 : []
1					
2					
3					
4					
5					
6					

4 Chaînes et cycles

Exercice 41 : Montrer qu'un graphe simple de degré minimum au moins k contient une chaîne élémentaire de longueur k.

Exercice 42 : Prouver par récurrence sur k la propriété suivante $P(k)$, définie pour tout entier $k \geq 1$: si G est un graphe de degré minimum au moins k, alors pour tout $v \in V(G)$ il existe une chaîne élémentaire de longueur k commençant en v.

Exercice 43 : Soit G un graphe simple dont exactement deux sommets x et y sont de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans G de x à y.

Exercice 44 : Soit G un graphe non orienté.

Question 1 – Montrer qu'au moins un des deux graphes, G ou son complémentaire, est connexe.

Question 2 – Donner un exemple de graphe G connexe tel que son complémentaire $\overline{G}$ est aussi connexe. Vous dessinerez les deux graphes sur votre copie.

Exercice 45 : Soit G un graphe simple à n sommets et m arêtes. Montrer que si $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, alors G est connexe.

Exercice 46 : Soit G un graphe simple à n sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Montrer que G est connexe.

Graphes eulériens

Exercice 47 : **Sans lever le crayon**

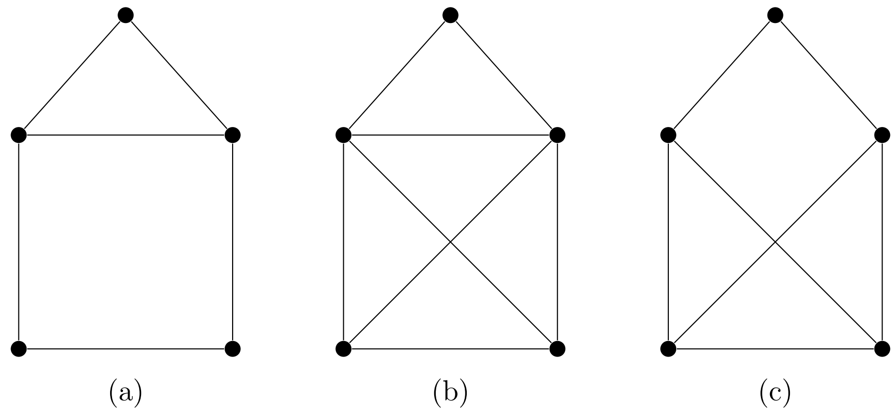
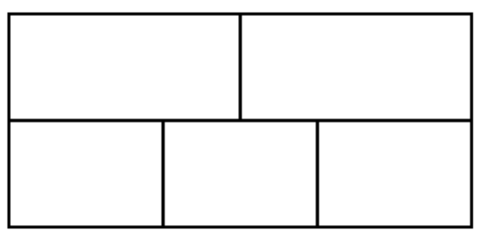


FIGURE 2 – À dessiner sans lever le crayon

Question 1 – Quels dessins dans la Figure 2 peuvent être dessinés sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ? Vous expliciterez le problème de graphe qu'il est nécessaire de résoudre pour répondre à cette question.

Exercice 48 : On se pose la question suivante : est-il possible de tracer une courbe fermée, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes, en s'autorisant d'utiliser un multigraphe. Vous décrirez clairement le (multi)graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

Question 2 – Répondre à la problématique en résolvant le problème de graphes choisi à la question précédente.

Exercice 49 :

Question 1 – Soit G un graphe connexe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant des arêtes ? Est-ce que la réponse est la même suivant que l'on autorise ou non ce nouveau graphe G' à être un multigraphe ?

Question 2 – Combien d'arêtes au minimum doit-on rajouter à G pour le rendre Eulérien ?

Question 3 – Soit G un graphe connexe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un ou plusieurs sommets $v_1, \ldots, v_t$? (on a le droit d'ajouter des arêtes incidentes à un nouveau sommet, vers un autre nouveau sommet ou vers un ancien sommet ; par contre on ne s'autorise pas à ajouter une arête entre deux sommets qui existaient déjà dans G)

Exercice 50 : **Les dominos**

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

Question 1 – En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?

Question 2 – Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

Question 3 – Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

Question 4 – Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Exercice 51 : **Carcasse de cube**

On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

Exercice 52 : **Jeu de cartes** (Matej Stehlik)

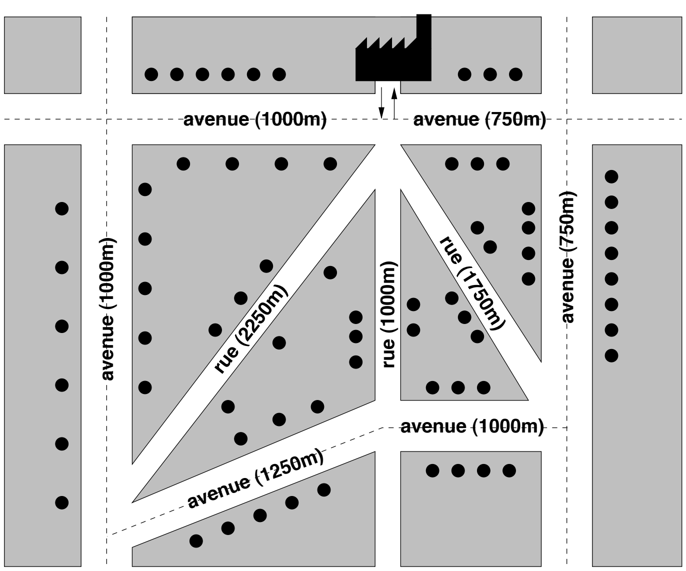
Dans un jeu de $52 = 13 \times 4$ cartes, chaque carte a une valeur $(A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R)$ et une couleur $(\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit)$. On cherche à savoir quelle est la longueur maximale d'une suite de cartes qu'on peut construire à partir d'un jeu de 52 cartes de façon à ce que deux cartes consécutives soient de la même valeur ou de la même couleur, mais si on prend trois cartes consécutives quelconques, elles n'ont pas toutes trois la même valeur ni la même couleur. Par exemple, $A\spadesuit, 7\spadesuit, 7\heartsuit, D\heartsuit$ est une suite qui respecte cette règle.

Question 1 – Peut-on faire une telle suite avec toutes les cartes (longueur 52) ? Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

Question 2 – On cherche maintenant la longueur de la plus grande suite de cartes. Reformuler comme un problème de graphes et trouver la solution.

Exercice 53 : **Ramassage des poubelles**

Voici le plan simplifié d'un quartier de Propreville. Une benne venant de l'usine d'incinération doit vider les 70 conteneurs indiqués sur le croquis et revenir à l'usine.



La circulation sur les avenues et sur les rues est dans les deux sens. La vitesse du camion-benne à vide (ou entre deux ramassages) est de 30km/h et il est le même dans les deux sens. Il faut compter 30 secondes pour vider un conteneur. Chaque avenue a deux voies et il faut réaliser le ramassage indépendamment de chaque coté, ce qui nécessite deux passages de la benne (un dans chaque sens). Le ramassage sur les trois rues se fait des deux cotés en même temps.

Question 1 – Trouver le trajet optimal qui minimise le temps total du parcours nécessaire pour ramasser toutes les ordures.

Exercice 54 : **Le digicode**

Un digicode possède 10 touches numérotées de 0 à 9. Le code fait 4 chiffres. On cherche à deviner le code en tapant le minimum de touches. On tire parti du fait que le digicode ouvre la porte dès que les 4 chiffres sont tapés. Quelle est la longueur minimale d'une suite de chiffres de 0 à 9 telle que tout code possible de 4 chiffres apparait comme sous-suite de 4 éléments consécutifs ?

Exercice 55 : On dispose de 15 perles numérotées de 1 à 15. On veut construire un collier qui respecte la curieuse règle suivante :

La somme des numéros de deux perles adjacentes sur le collier doit toujours être un carré parfait.

On considére que le collier est ouvert, c'est-à-dire que les deux perles situées aux deux extrémités du collier ne sont pas adjacentes. La somme de leurs numéros ne doit donc pas nécessairement être un carré parfait.

On rappelle que les carrés parfaits sont les nombres 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25...

Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les perles.

Question 2 – En déduire que l'on peut construire un collier qui respecte cette règle.

Exercice 56 :

L'*hypercube* de dimension $n \geq 1$ est un graphe ayant pour sommets l'ensemble de tous les mots binaires de longueur n. Par exemple, 00, 01, 10, 11 sont les 4 sommets de l'hypercube de dimension 2. Deux sommets sont liés par une arête si et seulement si les mots correspondants diffèrent en exactement une coordonnée (c'est-à-dire en un bit). Par exemple, il y a une arête entre 00 et 10, mais pas entre 00 et 11. L'hypercube de dimension n est un graphe généralement noté Q_n.

Question 1 – Démontrer que Q_2, Q_3, et Q_4 sont hamiltoniens.

Une construction récursive de Q_n en fonction de Q_{n-1} consiste à considérer deux copies de Q_{n-1} que l'on connecte entre elles par un ensemble d'arêtes particulier, que l'on appelle un couplage.

Question 2 – Expliciter cette construction pour Q_3 et Q_4. Donner la construction générale pour n quelconque.

Cette vision des choses permet d'appliquer un principe de récurrence pour démontrer des propriétés intéressantes de l'hypercube.

Question 3 – Démontrer que Q_n est hamiltonien pour tout $n \geq 2$. On pourra faire une preuve par récurrence en utilisant la question précédente, qui donne à la fois le cas de base de la récurrence et le principe de décomposition permettant d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

5 Arbres

Exercice 57 : **Arbres à 6 sommets**

Trouver tous les arbres à 6 sommets, à isomorphisme près.

Exercice 58 : **Cycles dans un graphe et son complémentaire**

Soit G un graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 5.

Question 1 – Montrer que G ou $\overline{G}$ contient un cycle.

Exercice 59 :

Soit T un arbre comportant au moins 3 sommets de degré 1.

Question 1 – Montrer que T contient au moins un sommet de degré au moins 3.

Exercice 60 :

Soit F une forêt ayant c composantes connexes et n sommets, avec $c \geq 1$ et $n \geq 1$.

Question 1 – Donner le nombre d'arêtes de F en fonction de c et n.

Exercice 61 : La séquence de degrés d'un arbre est 5, 4, 3, 2, 1, ..., 1. Determinez le nombre de "1" dans la séquence.

Exercice 62 : Question 1 – Montrer que si T est un arbre à n sommets de degré maximum $\Delta(T) \leq 1$, alors T possède au moins $\Delta(T) + 1$ feuilles.

Question 2 – Prouver par récurrence sur n la propriété $P(n)$ suivante, définie pour tout entier $n \geq 2$: si T est un arbre à n sommets de degré maximum $\Delta(T)$, alors T possède au moins $\Delta(T)$ feuilles.

Question 3 – Est-ce que la réciproque de la propriété $P(n)$ est vraie ? Justifier.

Arbre couvrants de poids minimum

Exercice 63 : **Le château d'eau :**

Une communauté de communes veut desservir un ensemble de villages en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans l'un des villages (voir Figure 3). Selon des paramètres législatifs, géologiques, etc., le coût d'installation des canalisations pour transporter l'eau est estimé pour certaines paires de villages. Certains villages ne peuvent pas être reliés directement à cause du relief. On suppose que les capacités des canalisations sont illimitées. Il faut déterminer un réseau qui puisse acheminer de l'eau dans chaque village, et ce au moindre coût.

Question 1 – Proposez une solution pour ce problème.

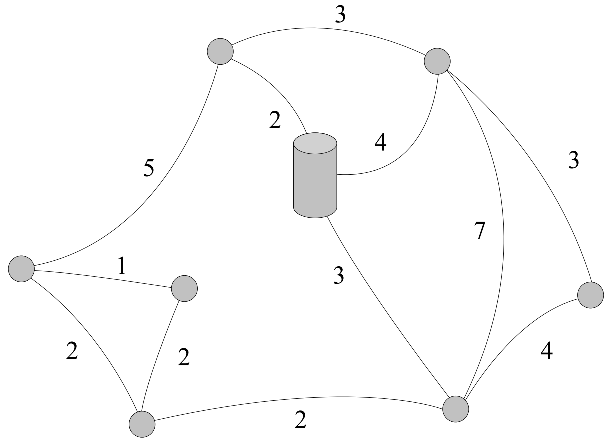


FIGURE 3 – Le château d'eau est représenté par le cyclindre, les disques étant les villages à desservir. Les chiffres représentent les coûts de liaison entre deux villages.

Exercice 64 : **Monsieur le 9** (GI)

Un opérateur téléphonique veut installer un nouveau réseau de communication haut débit connectant les principales villes de France : Brignoud, Gières, Lans en Vercors, Monestier de Clermont, Tullins et Uriage. Il souhaite savoir quelles connexions permettent de relier les villes à moindre coût.

Les coûts de connexion entre 2 villes dépendent de la distance, du relief, des lignes déjà existantes. Ils sont donnés dans la Table 1 :

TABLE 1 – Coûts de connexion

	G	B	L	U	T	M
G	-	5	8	2	2	11
B		-	7	4	8	12
L			-	6	7	13
U				-	3	12
T					-	10
M						-

Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

Question 2 – Répondre à la problématique en résolvant le problème de graphes choisi à la question précédente.

Exercice 65 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe de la Figure 4, l'arbre couvrant de poids minimum a un poids de 17. Réarranger les poids des arêtes afin que les arbres couvrants de poids minimum aient un poids de 19.

Le fait de réarranger les poids signifie ici qu'il faut échanger les poids d'une arête à l'autre : à la fin, vous devez toujours avoir les poids $1, 2, \ldots, 9$ *qui apparaissent chacun exactement une fois.*

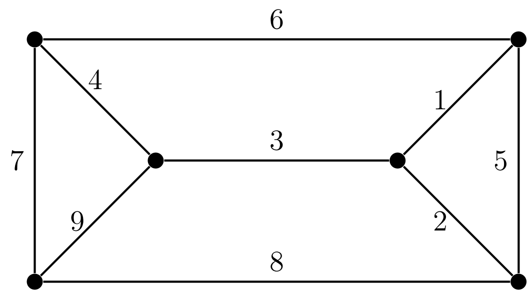


FIGURE 4 – Graphe G

Exercice 66 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe du cube en dimension 3, on sait que quatre arêtes ont un poids de 1, quatre arêtes ont un poids de 2 et quatre arêtes ont un poids de 3. Quelle est une répartition possible des arêtes telle que le poids de l'arbre couvrant de poids minimum est 10 ? Même question si ce poids est 11.

Exercice 67 : **Camion** (J.-F. Hèche)

Le réseau de la Figure 5 représente une partie du réseau routier d'une ville. Les nœuds correspondent aux carrefours, les arêtes aux routes que l'on suppose toutes à double sens et les nombres sur les arêtes indiquent la hauteur maximale (en centimètres) qu'un véhicule peut avoir s'il désire emprunter la route correspondante.

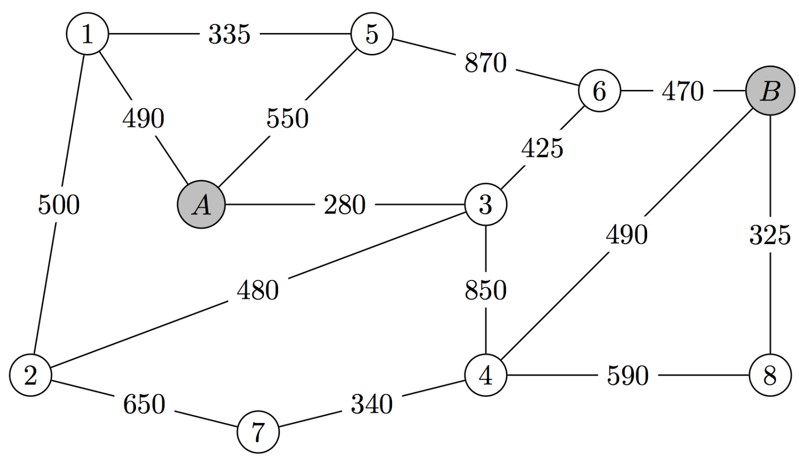


FIGURE 5 – Réseau routier avec les hauteurs maximales (en centimètres)

Un livreur désire se rendre du point A au point B. Pour ceci, il veut déterminer la hauteur maximale x, en mètres, du camion qu'il peut utiliser.

Question 1 – Trouver manuellement la solution au problème du livreur.

Question 2 – Exprimer, avec le vocabulaire de la théorie des graphes, si le livreur, ayant un camion de hauteur x mètres, peut effectuer sa livraison en utilisant uniquement les routes du réseau donné. Vous pouvez définir un graphe auxiliaire G_x.

Question 3 – Citer une structure de données permettant de gérer efficacement des composantes connexes d'un graphe qui grossissent au fur et à mesure de l'exécution d'un algorithme. Rappeler les primitives de cette structure de données et leur complexité.

Question 4 – Écrire un algorithme en pseudo-code, utilisant la structure de données de la question précédente, pour résoudre le problème du livreur. L'entrée sera un graphe G (supposé connexe), une pondération $w : E(G) \to \mathbb{N}$, un sommet de départ A et un sommet d'arrivée B.

Question 5 – Appliquer votre algorithme afin de déterminer la hauteur maximale du camion pour que la livraison soit possible et donner un itinéraire réalisable.

Exercice 68 : **Traductions**

Un document important, rédigé en anglais, doit être traduit en huit autres langues : allemand, danois, espagnol, français, grec, italien, néerlandais et portugais. Parce qu'il est plus difficile de trouver des traducteurs pour certaines langues que pour d'autres, certaines traductions sont plus chères que d'autres. Les coûts (en euros) sont indiqués dans la table ci-dessous.

de/à	dan.	néd.	ang.	fr.	all.	grec	it.	port.	esp.
dan.	$*$	90	100	120	60	160	120	140	120
néd.	90	$*$	70	80	50	130	90	120	80
ang.	100	70	$*$	50	60	150	110	150	90
fr.	120	80	50	$*$	70	120	70	100	60
all.	60	50	60	70	$*$	120	80	130	80
grec	160	130	150	120	120	$*$	100	170	150
it.	120	90	110	70	80	100	$*$	110	70
port.	140	120	150	100	130	170	110	$*$	50
esp.	120	80	90	60	80	150	70	50	$*$

On veut obtenir une version du document dans chaque langue à un coût total minimum.

Question 1 – Modéliser le problème comme un problème d'un arbre couvrant de poids minimum. Décrire clairement le graphe.

Question 2 – Quelles traductions devront être faites afin d'obtenir une version dans chaque langue à un coût total minimum ?

Exercice 69 : **Découpe** (Wojciech Bienia)

A l'aide d'une scie à découper les courbes, on doit découper les 10 profils placés sur un morceau rectangulaire 35×25 de contre-plaqué comme l'indique le schéma de la Figure 6.

Le problème consiste à trouver le tracé qui minimise la longueur totale de découpe réellement effectuée, c'est-à-dire que les passages en arrière, les déplacements répétés par une ligne ou un trou déjà découpés ne comptent pas comme une augmentation de la longueur. Pour découper un morceau placé à l'intérieur de la planche il faut obligatoirement commencer le déplacement de la scie à partir du bord de la planche, pour des raisons techniques.

Question 1 – Présentez le problème général comme un modèle classique de la théorie des graphes et justifiez cette modélisation.

Question 2 – Traitez l'exemple et proposez un plan optimal de découpe. Ce plan est-il unique ? (justifier)

Question 3 – La partie restante (quadrillée) du contre-plaqué peut-elle être en plusieurs morceaux à l'issue d'une découpe optimale ? Expliquez ce phénomène sur la base de la théorie des graphes.

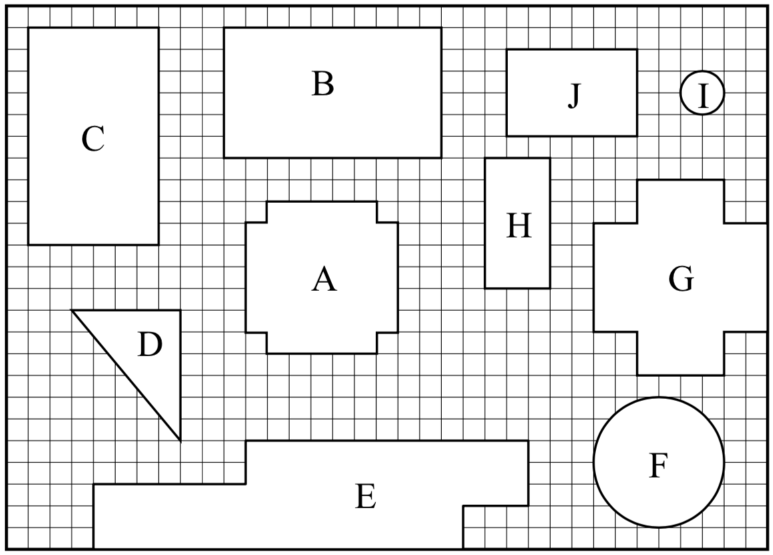


FIGURE 6 – Plan de découpe

6 Plus courts chemins

Des dessins de graphes vous sont fournis en section 10 pour faciliter la rédaction de vos réponses pour certains exercices.

Exercice 70 : **Algorithme de Dijkstra** (Zoltán Szigeti)

Question 1 – En appliquant l'algorithme de Dijkstra, indiquez sur la Figure 7 la longueur des plus courts chemins issus du sommet s, dans le graphe. Vous indiquerez sur le dessin toutes les traces de l'algorithme.

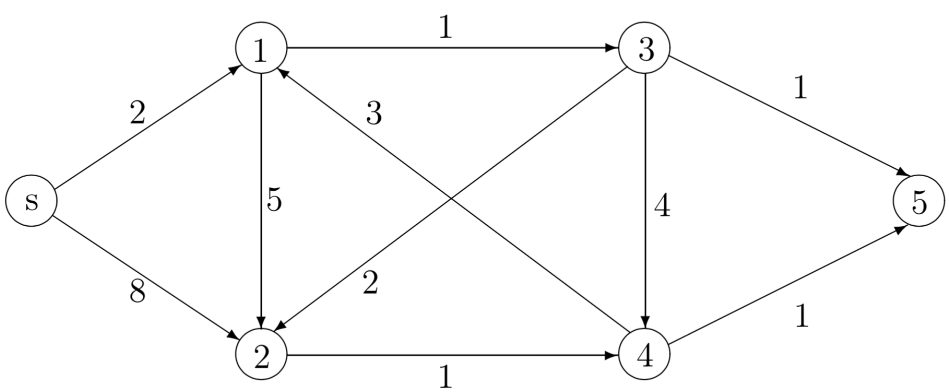


FIGURE 7 – Application de l'algorithme de Dijkstra

Question 2 – Indiquez l'arborescence des plus courts chemins issus de s sur le dessin de la Figure 8.

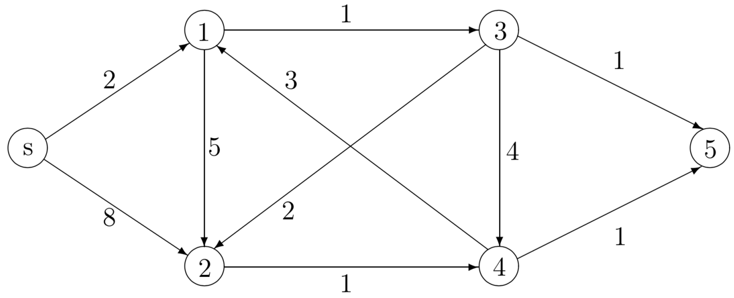


FIGURE 8 – Arborescence des plus courts chemins

Exercice 71 : Un élève de Polytech'Grenoble souhaite voir le soleil de minuit sur les fjords de Norvège. Il décide soudain de se rendre à Rana, charmante ville située à proximité du cercle polaire. Après avoir fait le tour de quelques compagnies aériennes, il a recensé plusieurs connexions aériennes possibles lui permettant d'aller de Grenoble (Lyon St Exupéry) à Rana, qu'il a représentées à l'aide du graphe de la Figure 9.

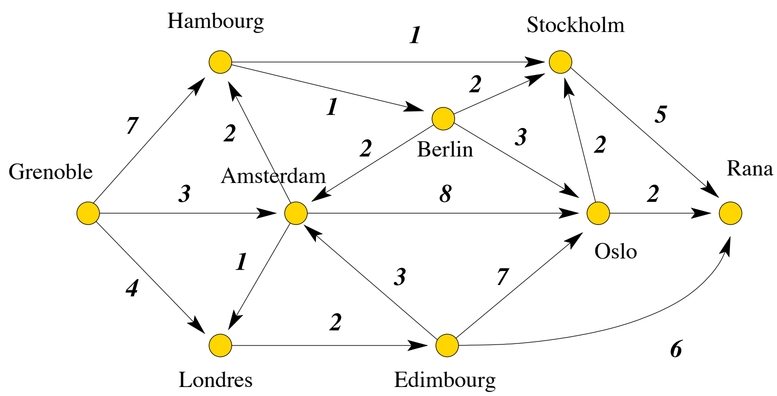


FIGURE 9 – Les valuations portées sur les arcs correspondent aux temps de vol (en heures)

Question 1 – Notre voyageur n'ayant que très peu de jours de vacances, aidez-le à déterminer le chemin le plus rapide pour se rendre de Grenoble à Rana.

Question 2 – Le graphe dessiné par notre voyageur ne tient pas compte des temps de transit à chaque escale, entre deux vols. Comment les modéliseriez-vous ?

Exercice 72 : **Procédé de fabrication le plus sûr** (d'après J. Moncel)

L'entreprise de semiconducteurs FLEE FOR ALL souhaite déterminer le procédé de fabrication le plus sûr pour leurs nouveaux processeurs SX-42. Il y a en effet plusieurs façons de faire pour transformer la matière première jusqu'au produit fini (enchaînement d'opérations de gravure, de vernissage, de nettoyage, de dopage, etc.). Le processus de fabrication de processeurs est extrêmement sensible, et si à une étape il y a le moindre problème alors la plaque de silicium est perdue et détruite. La Figure 10 décrit les étapes intermédiaires possibles, et la probabilité de succès de chaque étape.

Question 1 – En utilisant le fait que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a $\log(ab) = \log a + \log b$, montrer que l'on peut transformer la recherche du procédé de fabrication le plus sûr en un problème de plus long chemin dans un graphe à préciser.

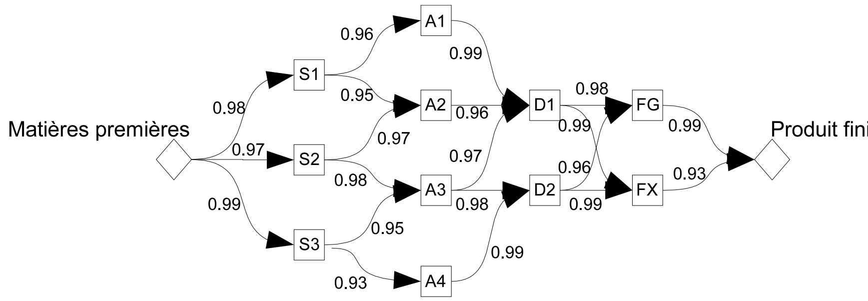


FIGURE 10 – Schéma descriptif des processus de fabrication possibles. Les produits semi-finis intermédiaires sont désignés par les abréviations S1, S2, S3, A1, A2, A3, A4, D1, D2, FG, FX. La probabilité de succès est indiquée pour chaque étape possible. Par exemple si l'on dispose de produits semi-finis de type S2, alors on a le choix entre deux processus. Le premier donnera des produits semi-finis de type A2, avec une probabilité de succès de 0.97 (il y aura donc 3% de déchets). Le second processus fournira des produits semi-finis de type A3, avec une probabilité de succès de 0.98 (il y aura donc 2% de déchets). La problématique est de déterminer le procédé de fabrication le plus sûr, c.-à-d. comportant le moins de déchets.

Question 2 – Montrer que l'on peut ramener le problème de plus long chemin de la question précédente en problème de plus court chemin dans un graphe à préciser. Peut-on utiliser l'algorithme de Dijkstra pour cette recherche de plus court chemin ?

Exercice 73 : **Le pirate** (Benjamin Lévêque)

Les ordinateurs de l'entreprise Lypotech sont connectés en réseau. Pour les ordinateurs connectés, on connaît le temps de communication. Un pirate peut détruire une connexion dans ce réseau et, pour se venger de trois années difficiles dans cette boite, il souhaite augmenter le plus possible le temps de connexion entre le directeur (ordinateur A sur le graphique) et son secrétaire (ordinateur B).

Question 1 – Proposer un algorithme pour trouver la connexion à couper afin d'augmenter au maximum le temps de communication entre deux sommets A et B.

Question 2 – Si le graphe de la Figure 11 représente les connexions entre machines, alors quelle est la connexion qu'il doit couper ? Pour répondre à cette question, on ne déroulera pas l'intégralité de l'algorithme proposé à la question précédente ; on commencera par calculer un plus court chemin avec l'algorithme de Dijkstra puis on s'aidera des marques intermédiaires (distances provisoires) pour trouver la solution et justifier qu'elle est optimale.

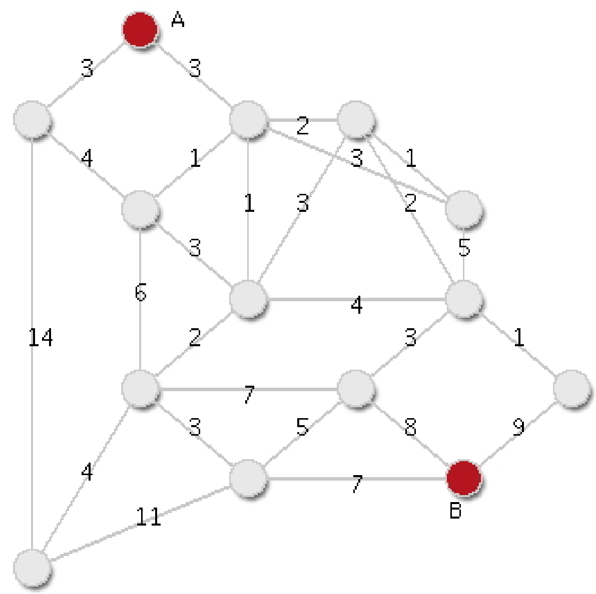


FIGURE 11 – Le réseau de l'entreprise

Exercice 74 :

Une grande entreprise de vente par correspondance a décidé de s'implanter dans un nouveau pays. Elle souhaite installer son entrepôt central et ses bureaux dans l'une des principales villes. Son argument de vente face à la concurrence repose sur la rapidité de la livraison à ses clients. Pour se conformer à cette image marketing elle veut que l'entrepôt soit dans une ville la plus proche possible de toutes les autres agglomérations (voir Figure 12).

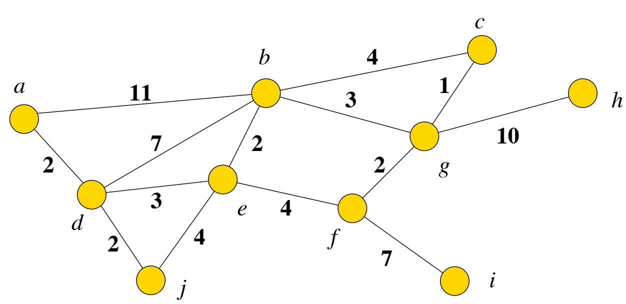
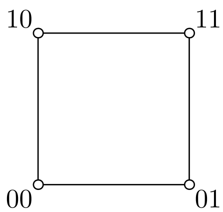


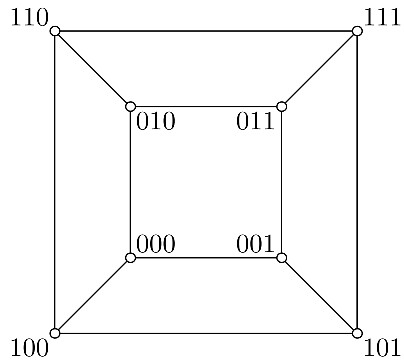
FIGURE 12 – Le graphe des différentes villes. Les valuations sur les arcs représentent les temps d'acheminement (en heure) entre 2 agglomérations, dépendants de la distance et du réseau routier (autoroute, nationale, région montagneuse...)

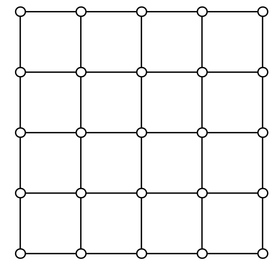
Question 1 – Quelle ville devrait choisir l'entreprise pour s'implanter ? Le chef de l'entreprise, qui est un ancien étudiant de l'université de Grenoble, pense que l'emplacement idéal est en e, car, dit-il, c'est "le centre du graphe"... A-t-il raison ?

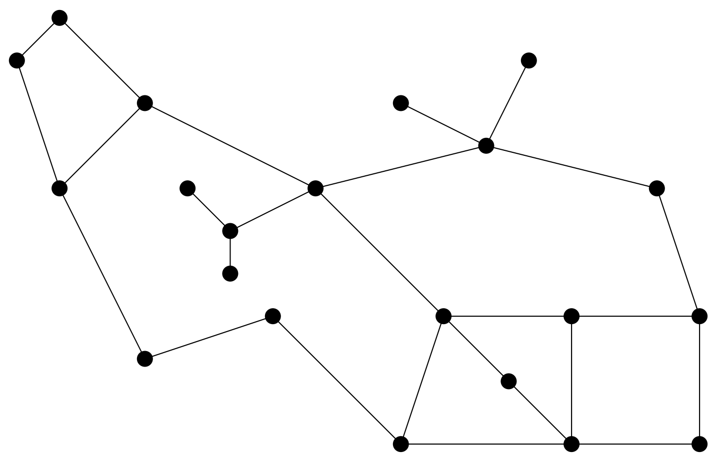
7 Coloration

Exercice 75 : Les quatre graphes ci-dessous sont-ils bipartis ?









Exercice 76 : (G. Naves, Marseilles) Trouver une coloration optimale des graphes dessinés en Figure 13.

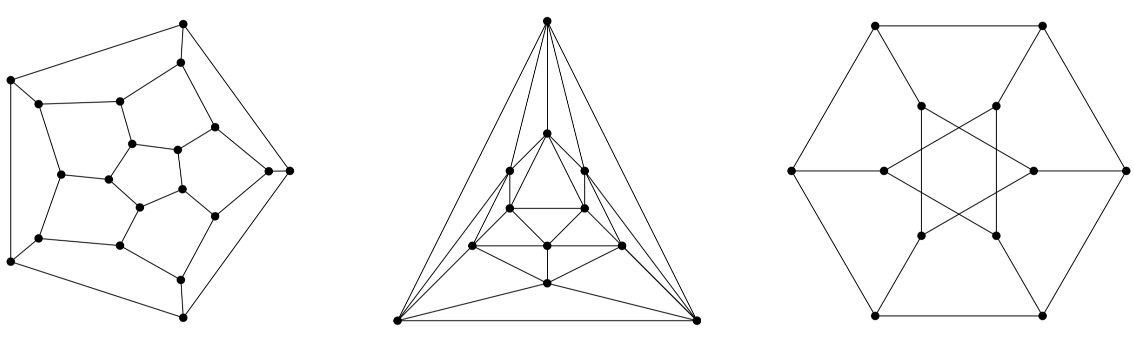


Figure 13 – Le dodécaèdre, l'icosaèdre et le graphe de Dürer.

Exercice 77 : Question 1 – En utilisant les caractérisations appropriées des arbres et des graphes bipartis, démontrez qu'un arbre est un graphe biparti.

Question 2 – Quels sont les graphes qui sont à la fois des arbres et des bipartis complets ?

Exercice 78 : Modélisez un jeu du Sudoku comme un problème de coloration de graphe. Vous indiquerez le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, le degré minimum et le degré maximum ainsi que le nombre chromatique du graphe.

Exercice 79 : **Régulation de la circulation**

La figure ci-dessous représente les trajectoires de neuf voies $\{V_1, \ldots, V_9\}$ à un carrefour très fréquenté de Kuala Lumpur (Malaisie). Chaque voie est pourvue de ses propres feux de signalisation.

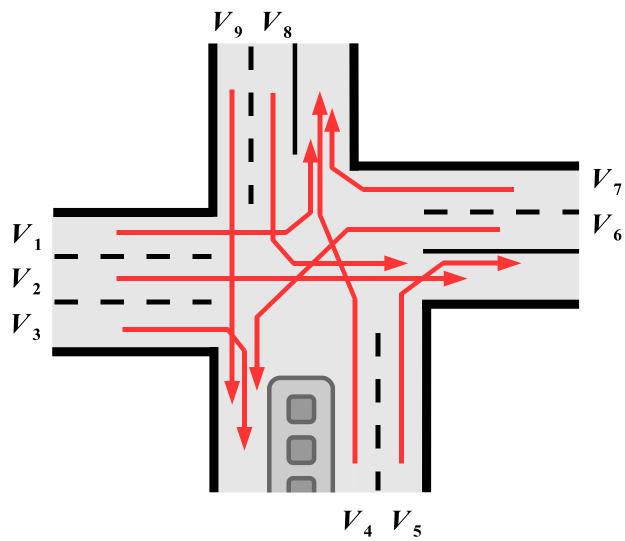


FIGURE 14 – Diagramme des neuf voies du carrefour. Le très grand nombre de véhicules empruntant ce carrefour (64 000 véhicules par jour en moyenne) conduit les autorités à réguler la circulation en phases, où à chaque phase les voies dont le feu est vert ne sont pas en conflit. Deux voies sont considérées en conflit si elles se croisent (par exemple V_1 et V_8) ou si elles ont la même destination (par exemple V_1 et V_7).

Les voitures d'une voie ne peuvent franchir le carrefour que lorsque leur feu est vert. La circulation est régulée par des cycles de 160 secondes, chaque cycle comportant 4 phases de durées 40 secondes comme suit :

– phase 1 : V_1, V_2 et V_3 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 2 : V_4, V_5 et V_9 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 3 : V_6 et V_7 sont au vert (les autres au rouge)
– phase 4 : V_8 est au vert (les autres au rouge)

Question 1 – Modélisez la situation par un graphe, tel que le nombre minimum de phases pour réguler le trafic soit égal au nombre chromatique de ce graphe.

Question 2 – Peut-on faire mieux que 4 phases pour réguler le trafic ?

Les voies V_2 et V_4 sont en fait très fréquentées, de sorte que les autorités souhaitent que V_2 et V_4 soient au vert deux fois par cycle et non plus une seule fois comme précédemment.

Question 3 – Modifier le modèle pour prendre en compte cette contrainte ; donner un nouveau cycle ayant un nombre minimum de phases tel que V_2 et V_4 sont au vert deux fois dans le cycle.

Exercice 80 : **Réservations hotelières** (Louis Esperet)

À travers sa centrale de réservation, un hôtel a reçu les demandes suivantes pour la première semaine du mois de mars :

R. Arquette a réservé une chambre la nuit du 1er mars ;
L. Bacall a réservé une chambre les nuits des 3, 4, 5, et 6
M. Caine a réservé une chambre les nuits des 5, 6, 7
J. Depp a réservé une chambre les nuits des 1, 2, 3, 4
C. Eastwood a réservé une chambre les nuits des 2, 3, 4, 5, 6
B. Fonda a réservé une chambre la nuit du 7
J. Goodman a réservé une chambre les nuits des 1 et 2
T. Hanks a réservé une chambre les nuits des 5, 6, 7
J. Irons a réservé une chambre les nuits des 1, 2 et 3
S. Johansson a réservé une chambre les nuits des 2, 3, 4, 5

L'hôtel a seulement 4 chambres de libre mais en faisant venir très rapidement un plombier et un électricien, le gérant peut se débrouiller pour avoir 2 chambres de plus (la première chambre a des problèmes de faux-contact et dans la deuxième il y a une fuite). Le gérant préfère ne faire venir les artisans que si c'est absolument nécessaire (son beau-frère doit passer lui donner un coup de main pour les travaux la 2ème semaine de mars de toute façon). Bien sur, aucun de ces hôtes n'accepterait de changer de chambre en cours de séjour.

Question 1 – Le gérant doit-il faire venir les deux artisans ? Vous donnerez une modélisation en termes de graphes et vous indiquerez une répartition des clients dans les chambres.

Exercice 81 : Soit G un graphe à n sommets et soit $v_1, \ldots, v_n$ un ordre sur ses sommets. On dit que cet ordre est un ordre de *d-dégénérescence* si : *(les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes)*

1. chaque sommet v_i possède au plus d voisins avant lui dans l'ordre, autrement dit pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe au plus d indices j tels que $j < i$ et $v_j v_i \in E(G)$.
2. pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le sommet v_i est de degré au plus d dans $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$, autrement dit si l'on supprime tous les sommets après v_i dans l'ordre, alors v_i devient de degré au plus d.
3. le dernier sommet v_n a degré au plus d dans G, et $G \setminus \{v_n\}$ est aussi d-dégénéré.

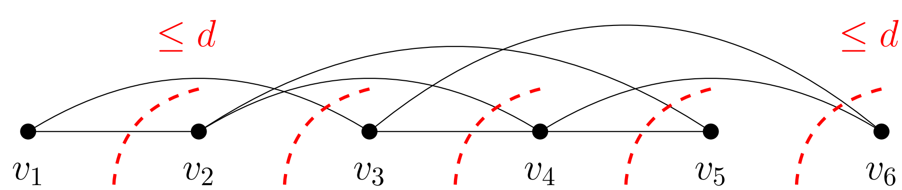


FIGURE 15 – Un exemple d'un ordre de d-dégénérescence avec $d = 2$: chaque sommet possède au plus 2 voisins à sa gauche.

Un graphe est *d-dégénéré* s'il admet un ordre de d-dégénérescence.

Question 1 – Prouver par récurrence sur n : si G est un graphe d-dégénéré alors G est $d+1$-colorable, c'est-à-dire $\chi(G) \leq d + 1$.

Question 2 – Prouver par récurrence sur n que tout graphe d-dégénéré à n sommets possède au plus dn arêtes. (Il existe une preuve simple sans récurrence mais on s'intéresse ici à la récurrence)

Exercice 82 : **Les roues**

Une roue d'ordre n est un graphe à n sommets constitué d'un cycle à $n-1$ sommets (appelons ses sommets $v_1, \ldots, v_{n-1}$) auquel on ajoute un sommet u tel que uv_i est une arête pour tout i (voir figure ci-dessous). On note R_n la roue d'ordre n.

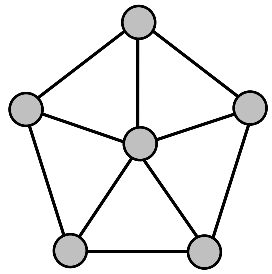


FIGURE 16 – La roue d'ordre 6 (le sommet u est celui qui se trouve au centre de la roue).

Question 1 – Démontrer que $\chi(R_n) = 3$ si $n \geq 5$ est impair et $\chi(R_n) = 4$ si $n \geq 4$ est pair.

Exercice 83 : **Produits chimiques**

Huit lots de produits chimiques doivent être expédiés par avion depuis Saint-Denis (île de la Réunion) à la station scientifique de Port-aux-Français (îles Kerguélen). Pour des raisons de sécurité, certains de ces produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même container. En effet, les produits interagissent entre eux et il est risqué de les stocker dans un même container si les lots ne sont pas parfaitement étanches. Les produits sont notés $P_1, \ldots, P_8$. La table ci-dessous liste les interactions entre les produits chimiques. Par exemple, le produit P_1 peut être placé dans le même container que les produits P_3, P_4, P_7 et P_8, mais ne peut pas être placé avec P_2, P_5 ou P_6.

$P_1 : P_2, P_5, P_6$	$P_2 : P_1, P_3, P_5, P_7$	$P_3 : P_2, P_4, P_7$
$P_4 : P_3, P_6, P_7, P_8$	$P_5 : P_1, P_2, P_6, P_7, P_8$	$P_6 : P_1, P_4, P_5, P_8$
$P_7 : P_2, P_3, P_4, P_5, P_8$	$P_8 : P_4, P_5, P_6, P_7$	

Le prix de l'envoi d'un container est de 3000 euros. On peut supposer qu'il n'y a pas de contrainte de capacité sur les containers (c.-à-d. un container peut contenir un nombre maximum de n lots, avec $n \geq 8$).

On cherche à connaître le prix minimum de l'envoi des huit lots de produits chimiques ainsi que la répartition des lots de produits chimiques dans les containers.

Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre.

Question 2 – Répondre à la problématique en résolvant le problème de graphes choisi à la question précédente. Justifier soigneusement. (Indice : ne réinventez pas la roue !).

Exercice 84 : **Qui a tué le Duc de Dunsmore ?** (d'après Claude Berge)

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de 10 ans. A l'époque, le Duc de Graphistan avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait également détruit le château de Graphistan où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi par l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses 7 ex-femmes. Or, avant sa mort, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Holmes - Je me souviens de l'affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

Watson - Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des ex-épouses : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Graphistan qu'une seule fois dans leur vie.

Holmes - Hum ! leur avez-vous demandé à quelle période ont eu lieu leurs séjours respectifs ?

Watson - Hélas, aucune ne se rappelait les dates exactes, après 10 ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles y avaient rencontré :

- Ann a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia, Georgia ;
- Betty a déclaré y avoir rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia, Helen ;
- Charlotte a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith ;
- Edith a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia ;
- Félicia a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith, Helen ;
- Georgia a déclaré y avoir rencontré Ann, Helen ;
- Helen a déclaré y avoir rencontré Betty, Félicia, Georgia.

Vous voyez mon cher Holmes, ces réponses sont concordantes !

C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin. Puis, après moins de 30 secondes, Holmes s'écria : "tiens, tiens ! Ce que vous venez de dire détermine de façon unique l'assassin".

Mais qui donc est l'assassin ?

Question 1 – Modéliser les témoignages par un graphe G. À quelle classe de graphe G doit-il appartenir ?

Question 2 – Identifier un menteur parmi les personnes interrogées. Vous tiendrez votre assassin !

<u>Exercice 85</u> :

On rappelle que $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G, c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur.

On note $\Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet de G.

Question 1 – Démontrer que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ pour tout graphe G. Donner des graphes G tels que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, et donner des graphes G tels que $\chi(G) < \Delta(G) + 1$.

Soit $\omega(G)$ le nombre de sommets de la plus grande clique de G. On rappelle qu'une clique est un sous-graphe partiel qui est complet.

Question 2 – Démontrer que $\chi(G) \geq \omega(G)$ pour tout graphe G. Donner des graphes G tels que $\chi(G) = \omega(G)$, et donner des graphes G tels que $\chi(G) > \omega(G)$.

Soit M_0 le graphe K_2. Par récurrence on définit M_{n+1} en fonction de M_n, $n \geq 0$, de la façon suivante :

- si $v_1, \ldots, v_k$ sont les sommets de M_n, alors les sommets de M_{n+1} sont $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k, u$
- si v_iv_j est une arête de M_n alors v_iv_j est aussi une arête de M_{n+1}
- si v_iv_j est une arête de M_n alors w_iv_j est une arête de M_{n+1}
- uw_i est une arête de M_{n+1} pour tout $i = 1, \ldots, k$

Question 3 – Démontrer que M_1 est un cycle à 5 sommets.

Question 4 – Démontrer que M_n a $3 \times 2^n - 1$ sommets pour tout $n \geq 0$.

Question 5 – Démontrer par récurrence sur n que $\omega(M_n) = 2$ pour tout $n \geq 0$.

Question 6 – Démontrer par récurrence sur n que $\chi(M_n) = 2 + n$ pour tout $n \geq 0$.

Les deux questions précédentes montrent qu'il peut y avoir un écart arbitrairement grand entre $\omega(G)$ et $\chi(G)$. Les graphes de la famille $(M_n)_{n\geq 0}$ sont appelés *graphes de Mycielski* en l'honneur du mathématicien du même nom.

8 Couplages

Des dessins de graphes vous sont fournis en section 10 pour faciliter la rédaction de vos réponses pour certains exercices.

Exercice 86 : **Compagnie aérienne**

Une compagnie aérienne dispose de cinq avions A_1, A_2, ..., A_5. Chaque avion peut effectuer des vols sur les routes indiquées dans la Table 3.

Avion	Routes
A_1	Londres-Francfort
A_2	Londres-Francfort, Milan-Barcelone
A_3	Londres-Francfort, Paris-Moscou, Athènes-Madrid, Rome-Sofia
A_4	Paris-Moscou, Athènes-Madrid, Rome-Sofia
A_5	Londres-Francfort, Milan-Barcelone

Table 3 – Routes des avions

Question 1 – Dessiner un graphe biparti G dont les sommets représentent les avions et les routes, et dont les arêtes représentent les routes que l'avion peut prendre.

Question 2 – L'avion A_3 sert sur la route Londres-Francfort, A_4 sur la route Rome-Sofia, et A_5 sur la route Milan-Barcelone.

(a) Cette affectation est-elle un couplage maximal de G ? Qu'est-ce que cela signifie pour notre compagnie aérienne ?

(b) Cette affectation est-elle un couplage maximum de G ? Qu'est-ce que cela signifie pour notre compagnie aérienne ?

L'avion A_3 doit être retiré du service pour passer en maintenance.

Question 3 – Trouver un couplage maximum du graphe modifié.

Exercice 87 : Pour chaque graphe dans la Figure 17, trouver un couplage maximum et justifier pourquoi il est maximum.

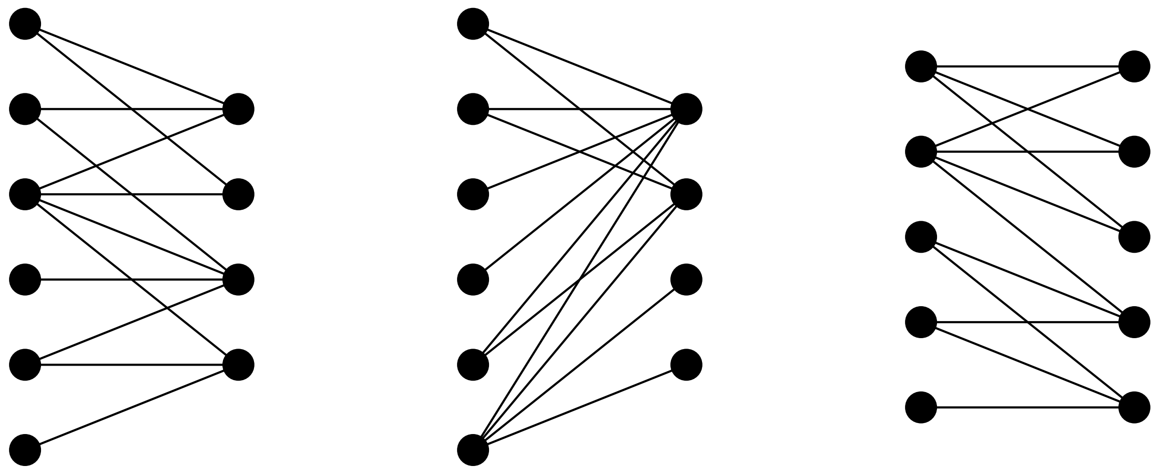


Figure 17 – Graphes

Exercice 88 : Pour chaque graphe dans la Figure 18, trouver un couplage parfait ou expliquer pourquoi un tel couplage n'existe pas.

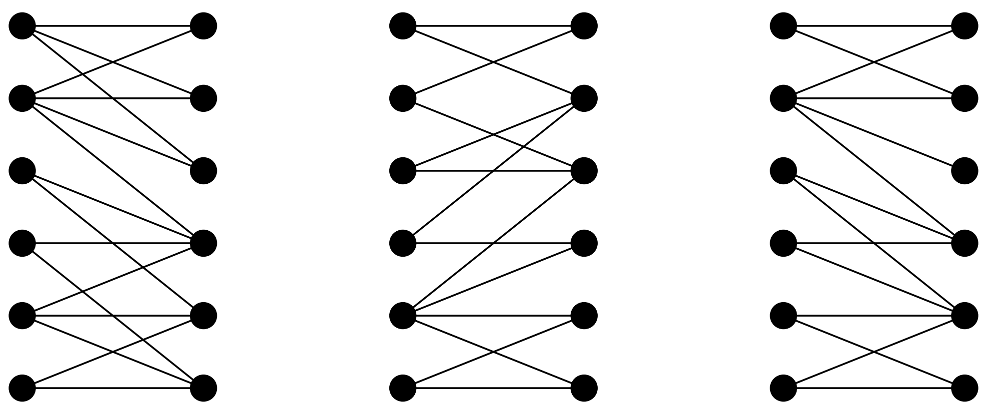


Figure 18 – Graphes

Exercice 89 : (W. Bienia) Le graphe biparti de la Figure 19 est composé de 12 sommets (6 blancs et 6 noirs). Les 4 arêtes épaisses forment le couplage M.

Question 1 – Montrez que M est un couplage maximal.

Question 2 – Appliquez la méthode vue en cours pour trouver un couplage maximum à partir de M

Question 3 – Donnez un certificat que le couplage obtenu est bien maximum.

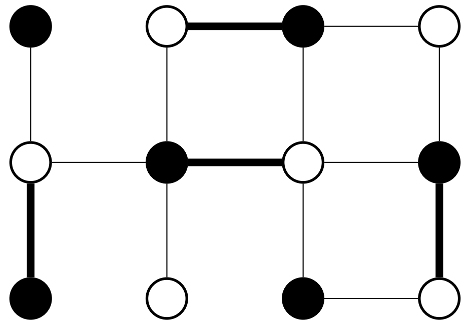


FIGURE 19 – Graphes

Exercice 90 : (W. Bienia)

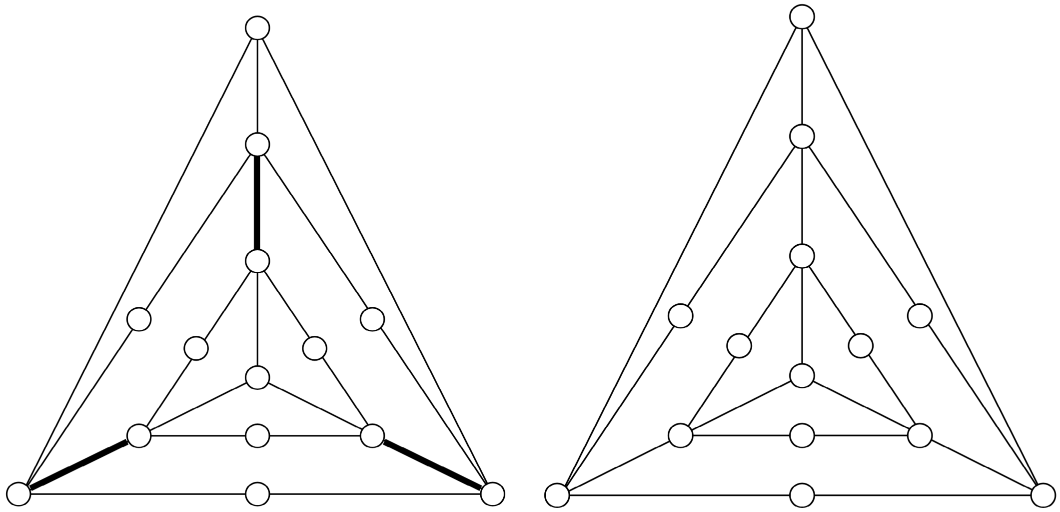


FIGURE 20 – Graphes

Question 1 – Justifiez que le graphe de la Figure 20 est biparti et que l'ensemble des arêtes épaisses forme un couplage maximal.

Question 2 – En appliquant la méthode vue en cours, à partir de ce couplage maximal, trouver un couplage maximum.

Question 3 – Donnez un certificat que le couplage obtenu est bien maximum.

Question 4 – Ce couplage est-il parfait ?

Exercice 91 :

Soit G un graphe biparti et k-régulier (tous les sommets sont de degré $k \geq 1$).

Question 1 – En utilisant le lemme des mariages, montrer que G a un couplage parfait.

Question 2 – Déduire qu'on peut partitionner ses arêtes en k couplages parfaits.

Exercice 92 : **Cartes**

On distribue un jeu de 52 cartes en faisant treize paquets de quatre cartes chacun.

Question 1 – En utilisant le "lemme des mariages", expliquer pourquoi il est possible de prendre une carte de chaque paquet de telle façon qu'on termine avec treize cartes contenant toutes les valeurs (un as, un 2, et ainsi de suite jusqu'à un roi).

Exercice 93 : **Flotte de véhicules**

Une entreprise dispose d'une flotte de véhicules composée de 3 motos, 2 voitures, 1 camion et 2 quads, stockés dans un de ses parkings. Pour des raisons logistiques, elle doit déplacer d'un seul coup tous ses véhicules dans un autre parking. Huit collaborateurs se proposent pour conduire ces véhicules, mais ils n'ont pas tous le permis adéquat pour déplacer n'importe quel véhicule. Alice, Charlotte, David, François, Gaëlle et Hélène peuvent conduire les motos ou les voitures. Bob peut tout conduire. Éline peut conduire les voitures, les quads ou le camion (mais pas les motos). Aucun collaborateur n'aura le temps de faire plusieurs trajets entre les deux parkings.

Question 1 – Modéliser en termes de théorie des graphes (sur un graphe que vous définirez correctement) le problème consistant à savoir si l'entreprise peut déplacer tous ses véhicules simultanément grâce aux huit collaborateurs qui se sont proposés.

Question 2 – Résoudre le problème. Vous citerez le nom du théorème que vous utilisez pour répondre à la question.

Exercice 94 :

Considérons l'échiquier réduit de la Figure 21. On y a placé deux tours qui ne se menacent pas mutuellement.

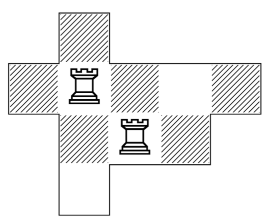


Figure 21 – Échiquiers

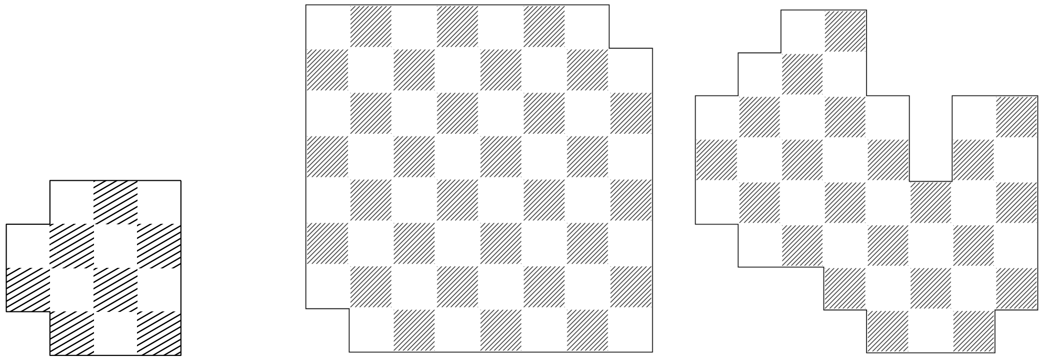
Quel est le nombre maximum de tours qu'on peut placer sur l'échiquier de sorte que les tours ne se menacent pas mutuellement ? Donnez un certificat d'optimalité.

Exercice 95 : **Dominos**

On se donne P un plateau obtenu à partir d'un échiquier (grille carrée alternant cases noires et blanches) auquel on a enlevé un certain nombre de cases (voir la figure ci-dessous pour des exemples de tels plateaux). Un domino est une figure qui occupe deux cases adjacentes (2×1 ou 1×2). On se demande si il est possible de paver P en dominos (c'est à dire recouvrir P tout entier, sans chevauchement, avec des dominos).

Question 1 – Modéliser ce problème en termes de théorie des graphes. Vous décrirez clairement le graphe utilisé et le problème de graphes à résoudre. Indice : quelle que soit sa position, un domino couvre toujours une case blanche et une case noire.

Question 2 – Le graphe obtenu par la méthode choisie dans la question précédente appartient-il à une classe de graphes particulière ? Si oui, cela aide-t-il à résoudre le problème de graphe choisi à la question précédente ?



P_1 P_2 P_3

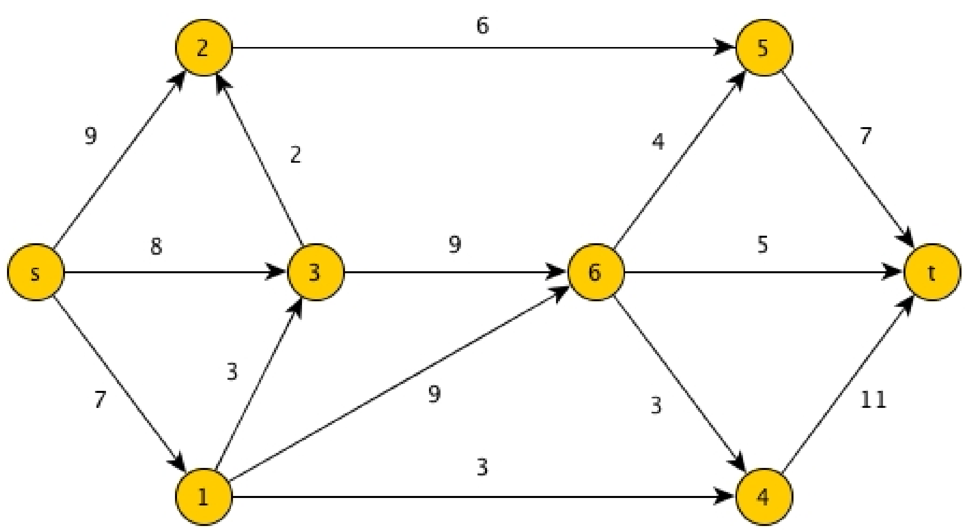
Question 3 – Répondre à la problématique pour le cas des plateaux P_1, P_2 et P_3 visibles sur la figure ci-dessus. Vous utiliserez les techniques de théorie de graphes appropriées pour le problème de graphes identifié dans les deux premières questions. *Remarque : étant donné la taille des instances, dessiner explicitement le graphe correspondant n'est peut-être pas la manière la plus simple de résoudre le problème.*

9 Flots

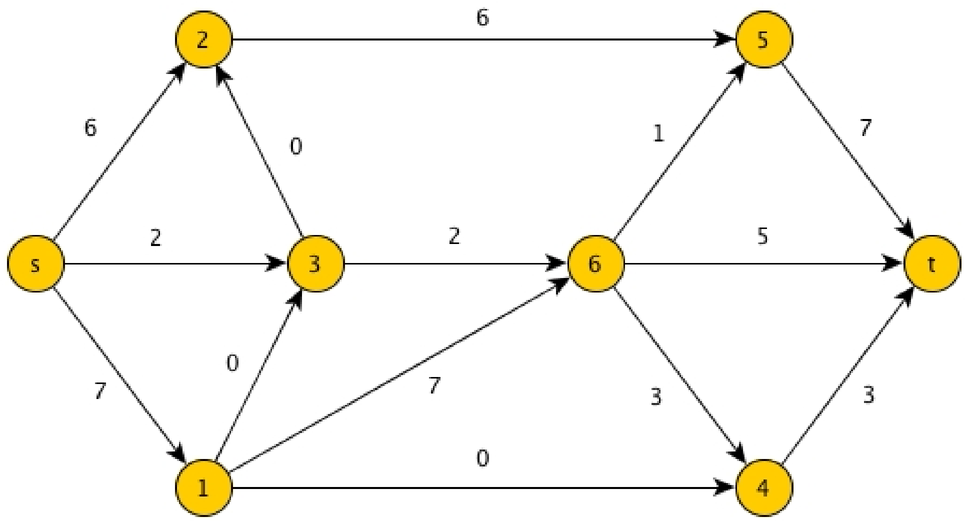
Des dessins de graphes vous sont fournis en section 10 pour faciliter la rédaction de vos réponses pour certains exercices.

Exercice 96 : **Flot**

Le dessin ci-dessous représente un graphe avec les capacités sur les arcs.

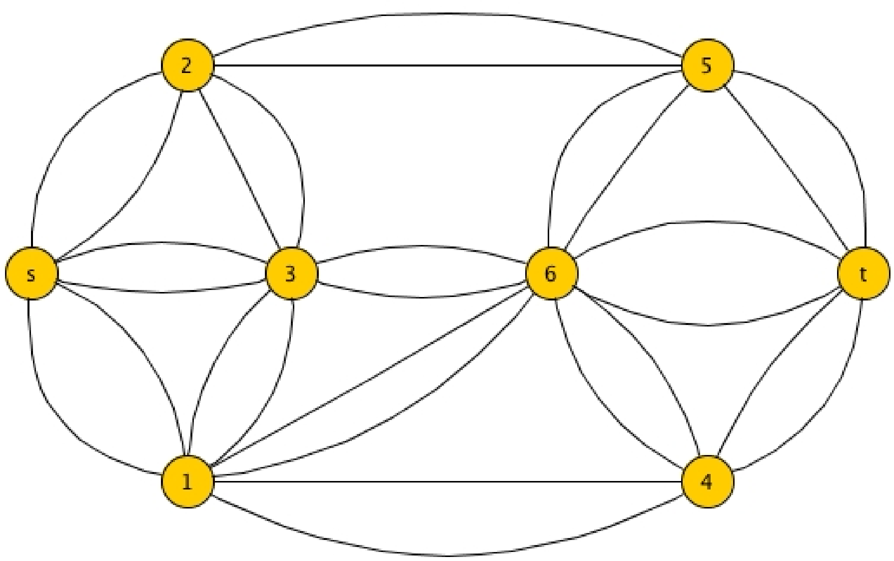


On a trouvé le flot f suivant



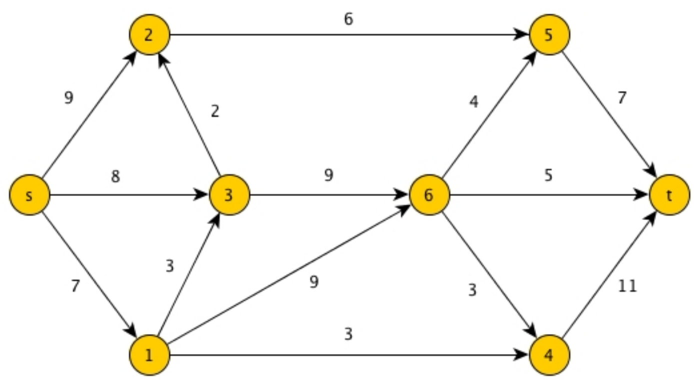
Question 1 – Vérifiez que f est bien un flot réalisable. Justifiez votre réponse et indiquez la valeur du flot.

Question 2 – Représentez le graphe résiduel correspondant à ce flot sur le dessin suivant. Vous indiquerez clairement pour chaque arête le sens de la flèche et la capacité résiduelle.

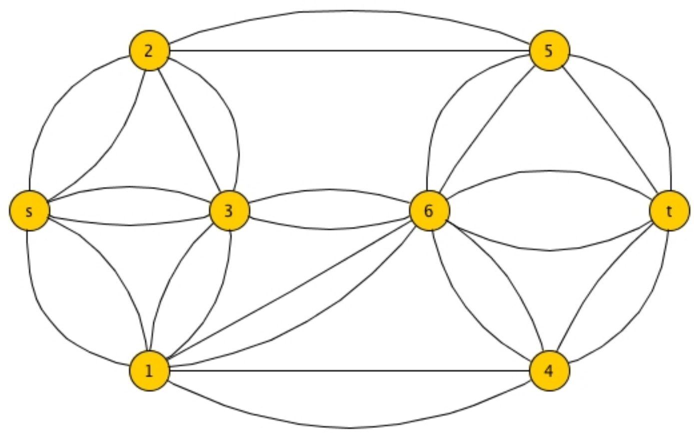


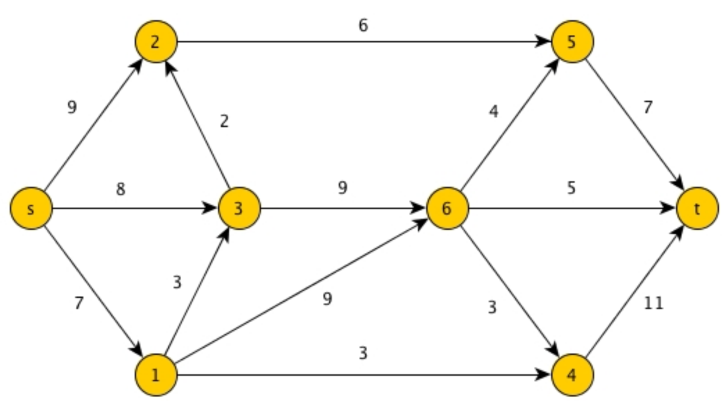
Question 3 – Représentez un st-chemin f-augmentant sur le graphe résiduel.

Question 4 – Donnez, sur le graphe suivant, la nouvelle valeur f' du flot. Les valeurs affichées sont les capacités des arcs.



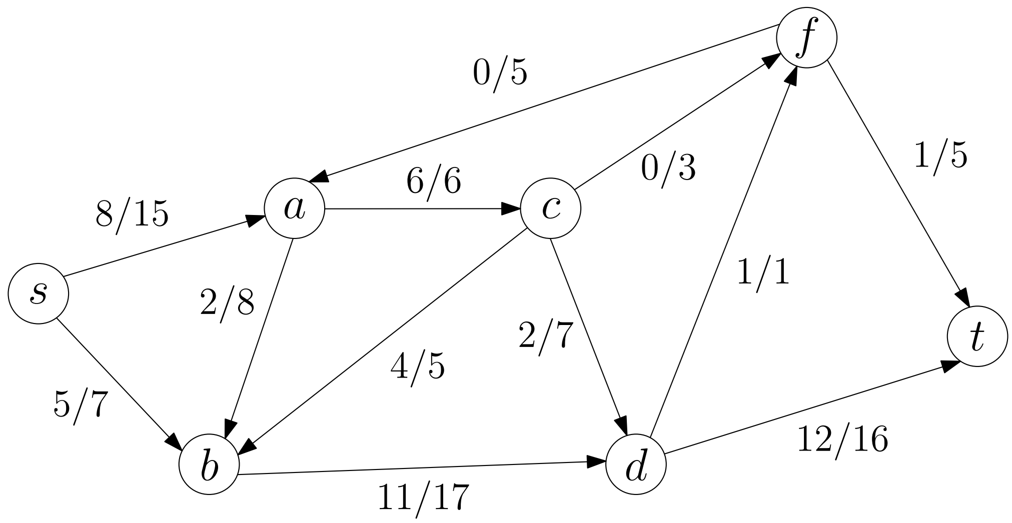
Question 5 – Est-ce que le flot f' est optimal ? précisez l'argument qui vous permet de justifier votre réponse sur l'un des deux graphes ci-dessous. Utilisez le graphe qui vous parait le plus pertinent.





Exercice 97 : **Flot**

Sur le graphe G ci-dessous, on considère un réseau dans lequel on fait passer un flot entre les sommets s et t. Sur chaque arc sont indiquées la valeur du flot courant / la capacité de l'arc.



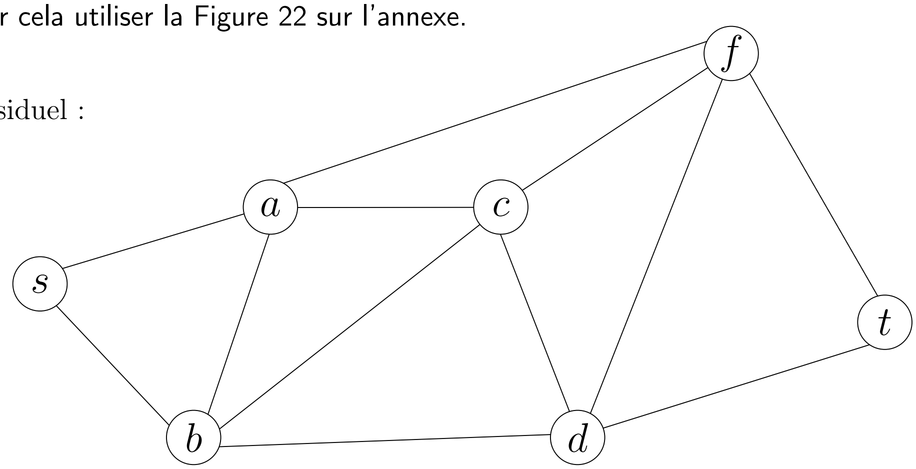
Question 1 – Dessiner, sur l'annexe ci-dessous, le graphe résiduel de G correspondant au flot fourni ci-dessus.

Question 2 – En prenant le flot fourni comme flot initial, appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour déterminer la valeur maximum d'un st-flot dans le graphe G ci-dessus. Vous donnerez les étapes de l'algorithme sur l'annexe et vous préciserez la valeur du flot obtenu (il peut y avoir plus de figures que nécessaire). Vous préciserez la valeur finale du flot obtenu sur chaque arc ainsi que la valeur totale du flot

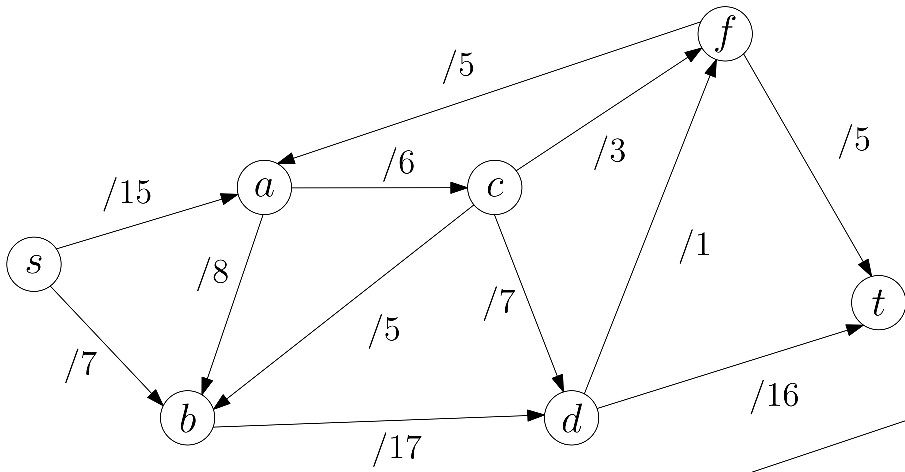
Question 3 – Donnez un certificat d'optimalité du flot que vous avez obtenu à la question précédente. Vous pourrez pour cela utiliser la Figure 22 sur l'annexe.

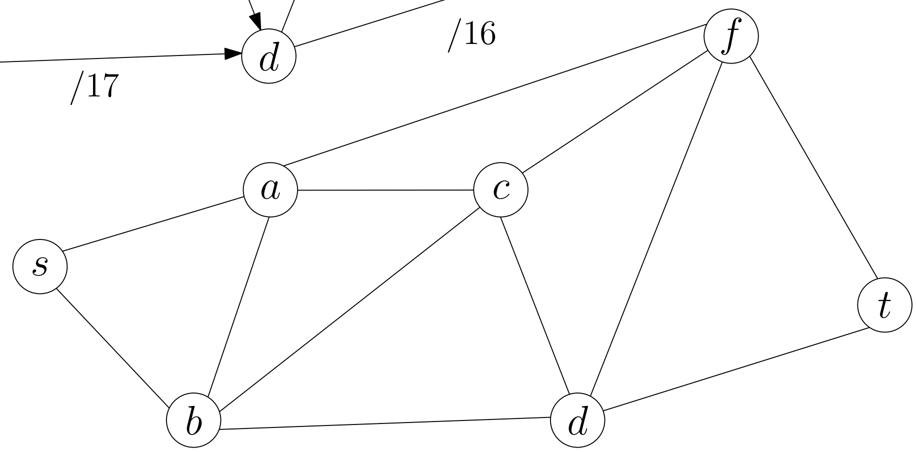
Fiche annexe

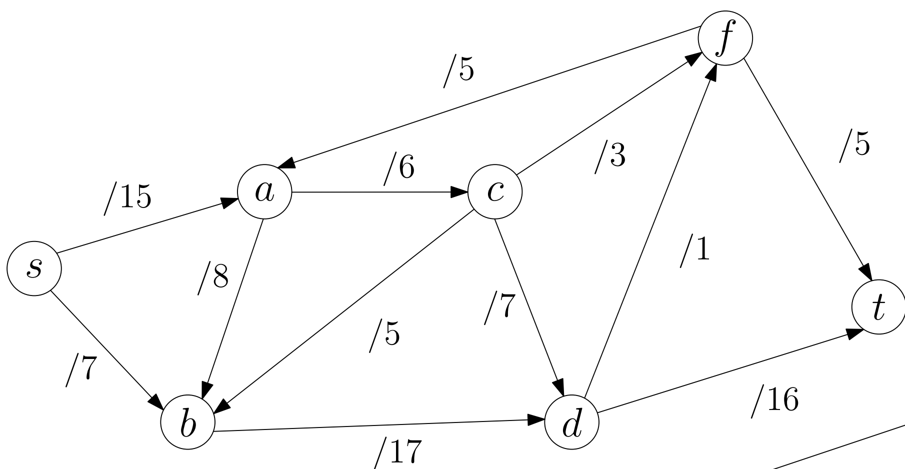
Question 1 - Graphe résiduel :

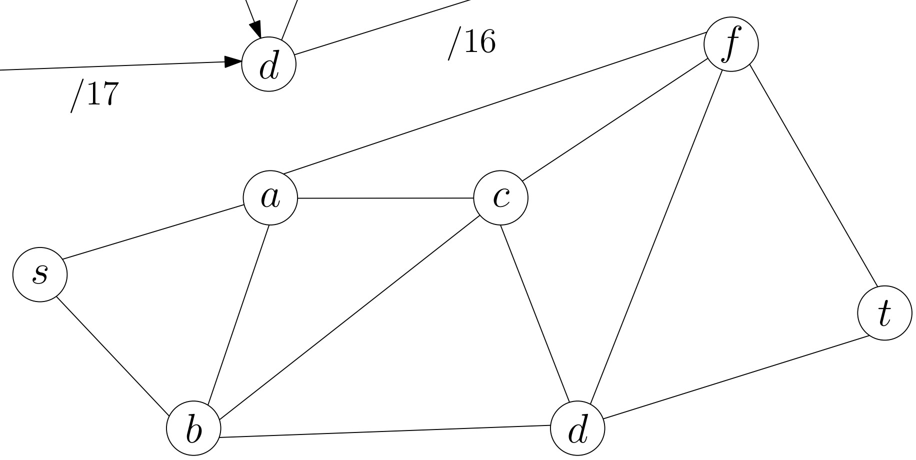


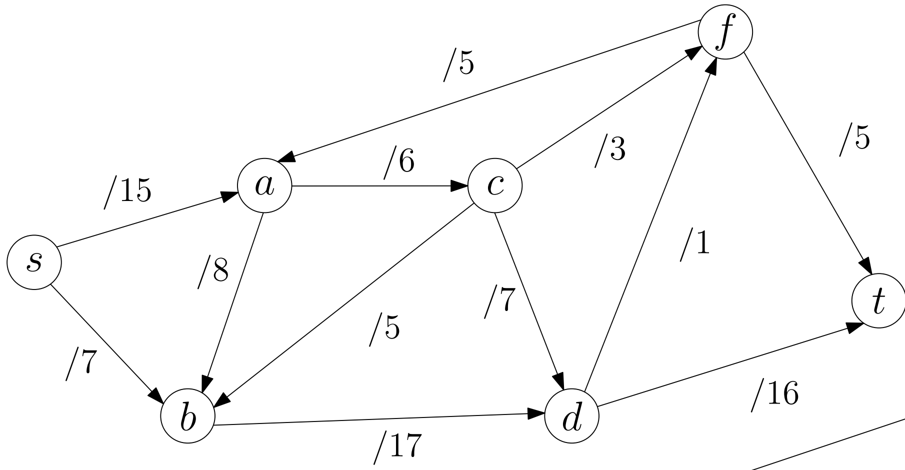
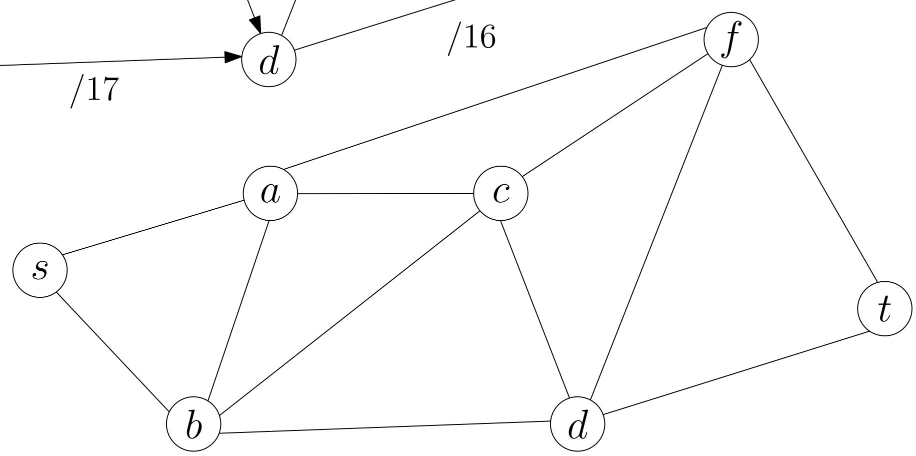
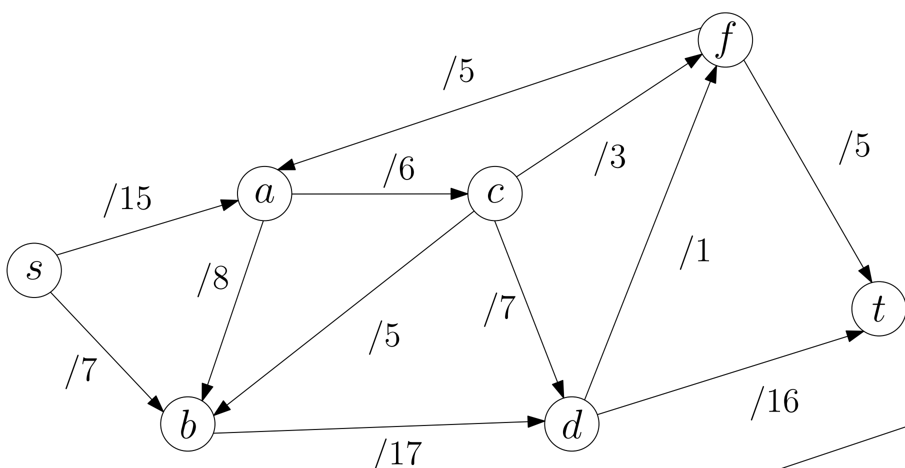
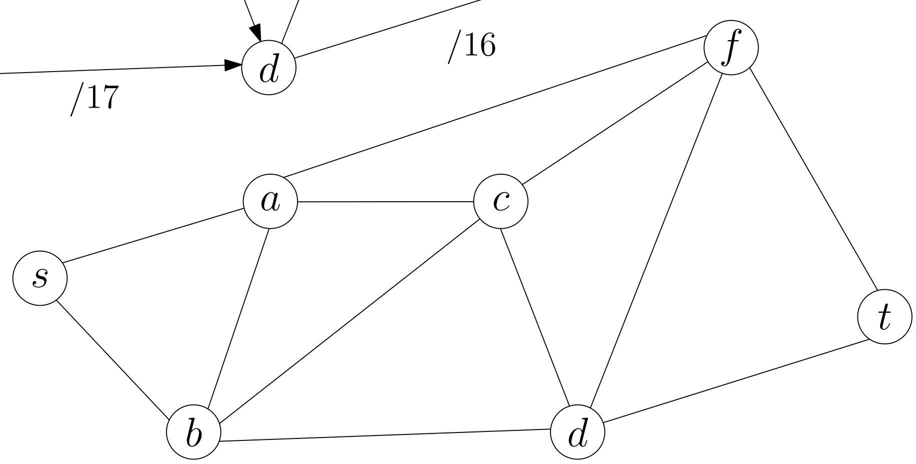
Question 2 - Autres étapes :










/5
/5
/15
/6
/3
/1
/8
/7
/5
/7
/16
/17
s
a
b
c
d
f
t

s
a
b
c
d
f
t

/5
/5
/15
/6
/3
/1
/8
/7
/5
/7
/16
/17
s
a
b
c
d
f
t

s
a
b
c
d
f
t

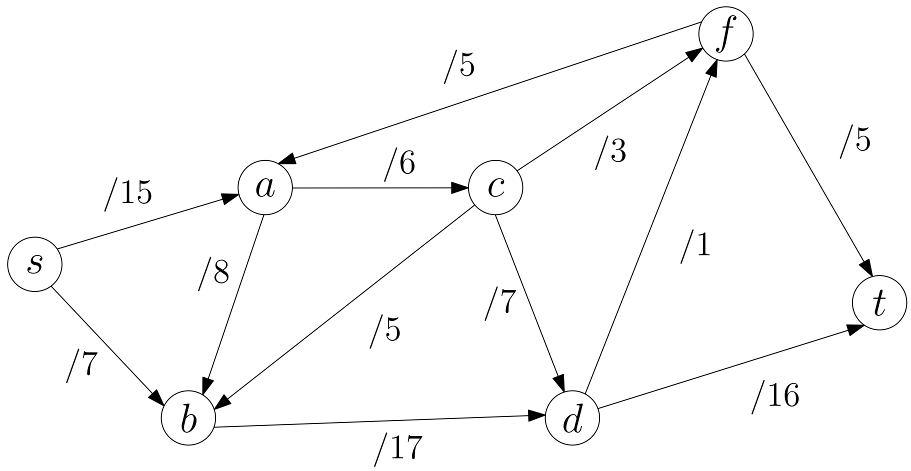
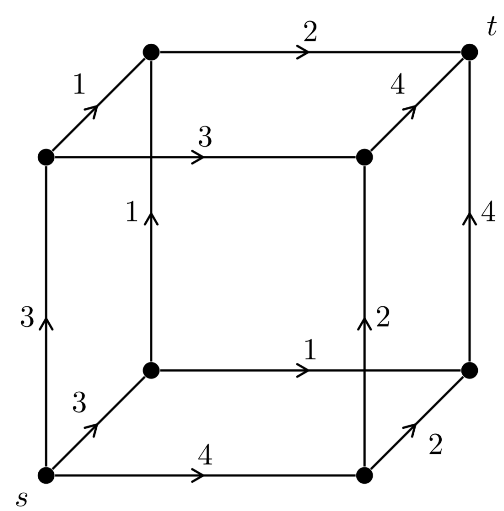
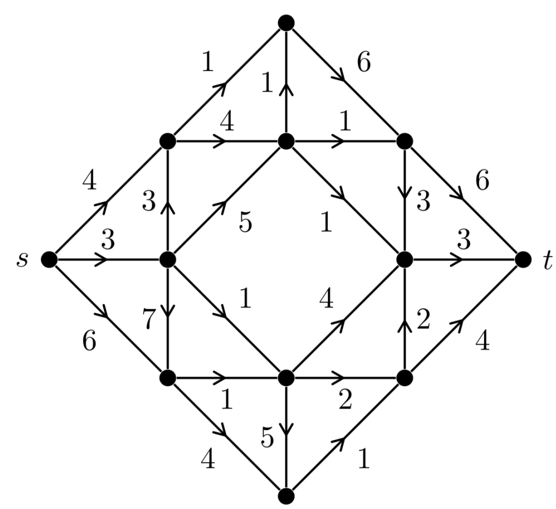


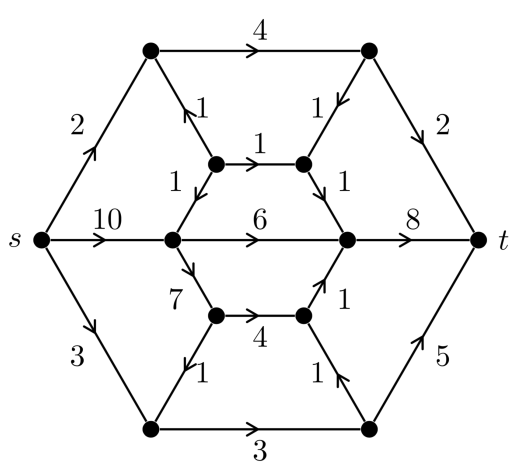
FIGURE 22 – Certificat d'optimalité

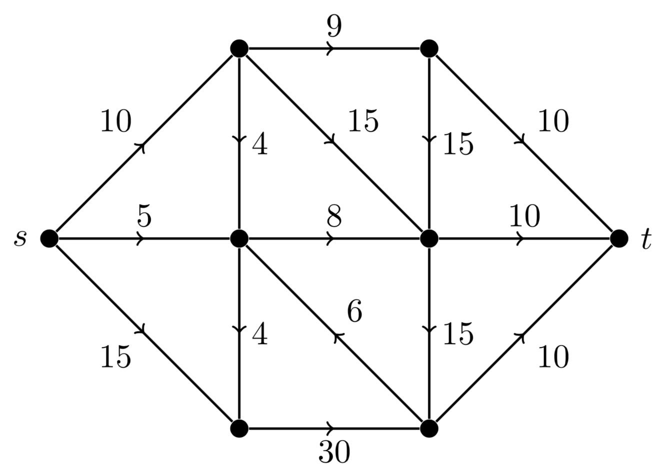
Exercice 98 :

Utilisez l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum dans les graphes suivants. Vous prouverez pour chacun que la valeur du flot est bien maximum.









Exercice 99 : **embouteillages en ville**

Un grand nombre de personnes venant de la vallée du Grésivaudan par l'A41 rejoignent chaque matin la porte de France afin de prendre l'autoroute E711 en direction de Lyon. Tous les matins, Grenoble subit des congestions importantes.

On veut donc optimiser ce réseau routier. Pour cela, on veut estimer sa capacité.

On choisit comme mesure la quantité de voitures qui arrivent du Grésivaudan à l'entrée de Grenoble juste avant le stade par unité de temps.

Question 1 – De quelques données a-t-on besoin ?

Question 2 – Décrivez précisément le problème que l'on souhaite résoudre

Exercice 100 : **Canalisations** (Jean-François Culus)

Une usine comporte généralement un gros réseau de canalisations, transportant l'eau d'une source unique (le point d'arrivée d'eau) vers une sortie unique : le tout à l'égout. Lors d'une extension de l'usine, on raccorde les anciennes canalisations aux nouvelles, augmentant donc les débits de certaines canalisations, jusqu'à saturation de certaines d'entre elles. On souhaite alors remplacer certaine de ces canalisation afin d'augmenter le flot global de l'usine.

Le but du problème est donc de savoir quelles sont les canalisations saturées qu'il serait souhaitable de remplacer par de nouvelles canalisations plus importantes.

Question 1 – Modélisez comme un problème de graphe

Exercice 101 : **Acheminement du pétrole**

La compagnie pétrolière Inti T'schouff souhaite acheminer du pétrole par oléoduc vers un pays client. Le réseau d'oléoduc comporte plusieurs tronçons, chacun ayant une capacité maximale (en débit) à ne pas dépasser. Les tronçons sont directionnels. Sur le graphe de la Figure 23, la compagnie pétrolière est représentée par le cylindre, le client par le jeton. La capacité maximale de chaque arc est indiquée.

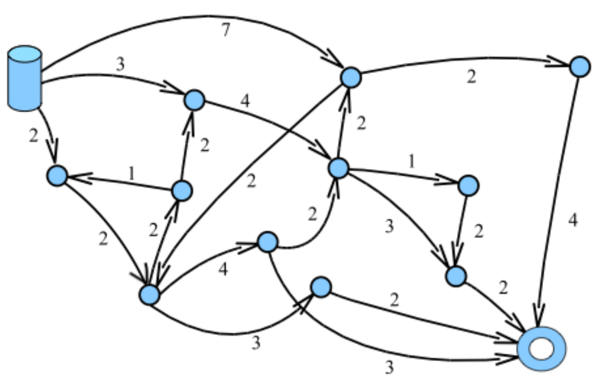


FIGURE 23 – Réseau d'Oléoduc

Question 1 – Quel est le débit maximum que la compagnie pétrolière peut envoyer vers le client via le réseau ?

Exercice 102 : **Bons et mauvais algorithmes de chemin augmentant**

On considère le réseau de transport de la Figure 24.

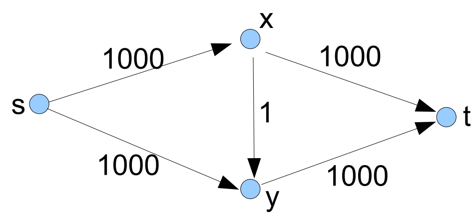


FIGURE 24 – Selon la façon dont on choisit les chemins augmentants, le nombre d'itérations de l'algorithme de Ford et Fulkerson sur cet exemple peut varier de 2 à 2000.

Question 1 – Quel est la valeur d'un (s, t)-flot maximum dans le réseau ci-dessus ? Justifiez.

Question 2 – Montrez que l'algorithme de Ford et Fulkerson peut terminer en deux itérations seulement.

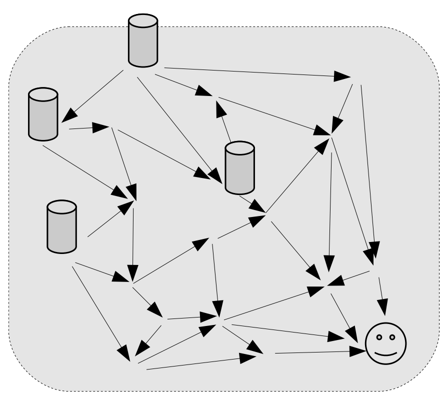
Question 3 – Montrez comment l'algorithme de Ford et Fulkerson peut, en faisant des choix de chemins augmentants particulièrement peu perspicaces, terminer en 2000 itérations.

On peut démontrer qu'une "bonne" façon de choisir des chemins augmentants est de choisir un chemin augmentant empruntant un nombre minimum d'arcs. Autrement dit à la première itération on choisirait ici soit le chemin s, x, t soit le chemin s, y, t, mais en aucun cas le chemin s, x, y, t.

Question 4 – Donnez un algorithme permettant de trouver un tel chemin augmentant.

Exercice 103 : **Flots multi-sources**

On considère un producteur de pétrole qui possède plusieurs sites de production et souhaite livrer à un client du pétrole via un réseau d'oléoducs. Chaque oléoduc est directionnel et possède une capacité maximum (en litres par unité de temps). Le pétrole est considéré comme étant le même à chacun des sites de production, nous cherchons à savoir quelle quantité maximum de pétrole nous pouvons envoyer du producteur (tous sites de production confondus) vers le consommateur (voir Figure ci-contre). Le problème est donc très proche du problème du flot maximum, à ceci près que nous avons plusieurs sources et non une seule.

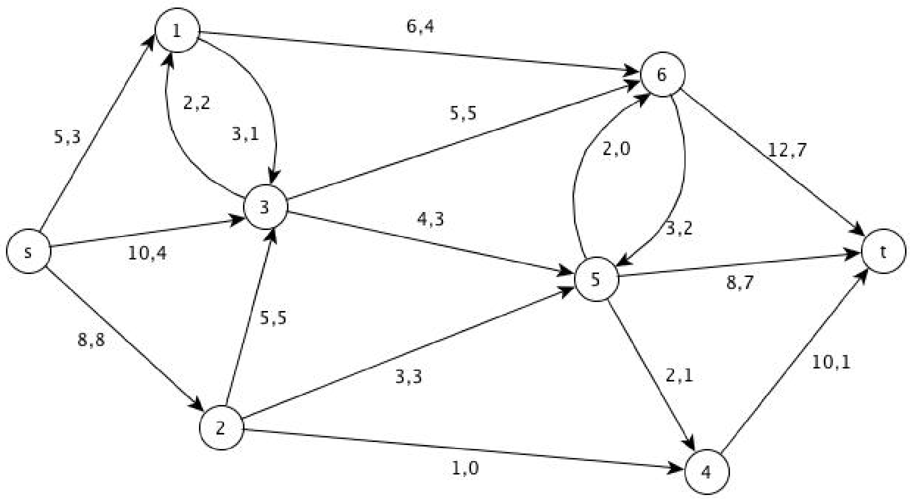


Question 1 – Expliquez comment modéliser ce problème par un problème de flot maximum.

Question 2 – Même questions si on considère maintenant que le producteur a plusieurs sites de production et le consommateur plusieurs sites où il peut réceptionner le flux.

Exercice 104 : (Gerd Finke)

Le réseau ci-dessous décrit l'évacuation de l'eau pluviale de S vers T dans une région après un orage. Les paires de nombres sur les arcs représentent les capacités et les flots d'eau pluviale des canalisations. Par exemple, l'arc $(1,6)$ a une capacité de 6 unités et il y a un flot de 4 unités qui le traverse.



Question 1 – Est-ce que le réseau est saturé, c'est-à-dire le flot d'eau de 15 unités est-il le maximum que le réseau peut supporter ? Sinon, trouver le flot maximum et déterminer une coupe de capacité minimale.

Question 2 – Le canal (2, 3) est bouché. Quelle est la nouvelle valeur du flot maximum ?

On a réussi à déboucher le canal (2,3). On souhaite augmenter le flot et l'on envisage une expansion de la capacité de l'arc (2, 5). On discute actuellement une augmentation de 1 unité ou, à un coût supplémentaire, de 2 unités.

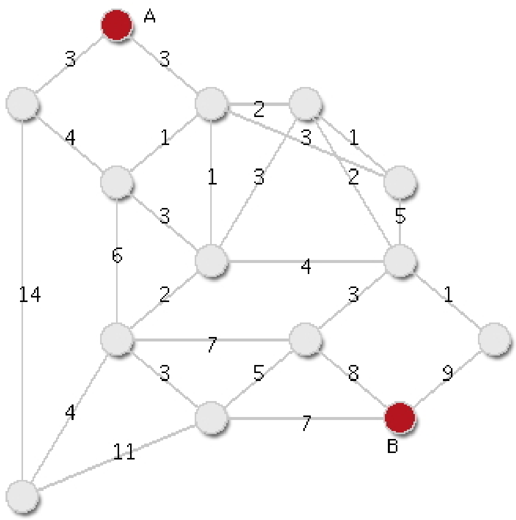
Question 3 – Quelle est votre recommandation ? Justifiez !

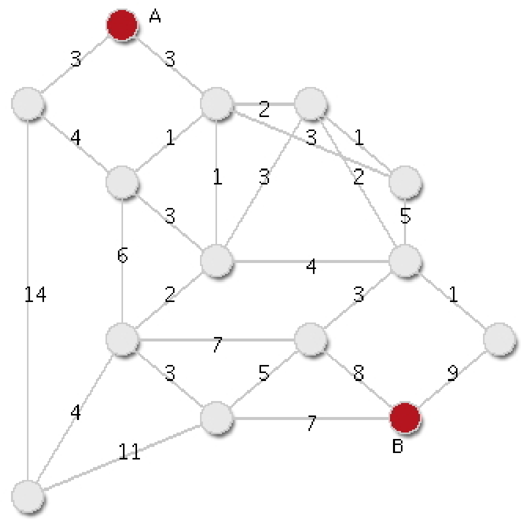
Retournons aux données initiales. Le flot total qui peut traverser le point 5 est limité à 7 unités.

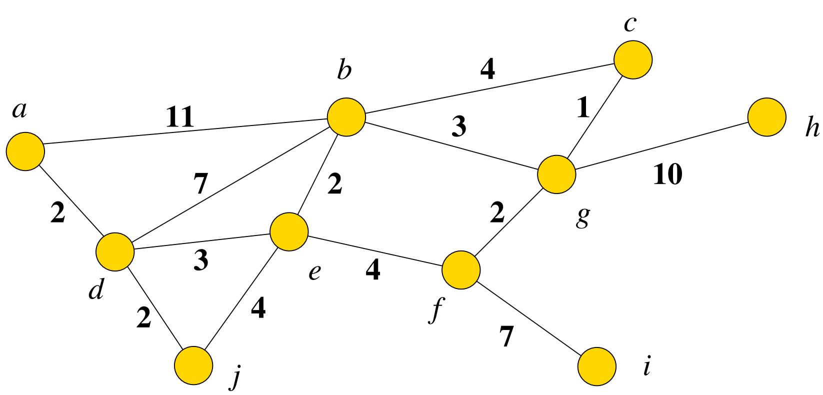
Question 4 – Transformez le réseau en forme standard (capacités uniquement sur les arcs) et trouvez le nouveau flot maximum et une coupe minimale.

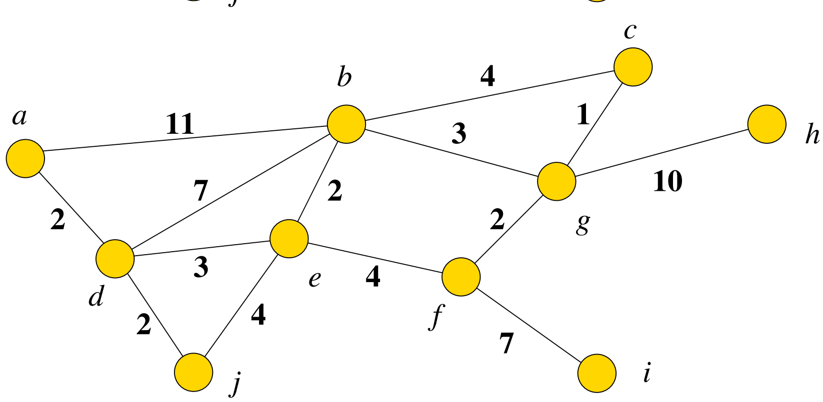
10 Dessins de graphes

Graphes pour exercices sur les plus courts chemins

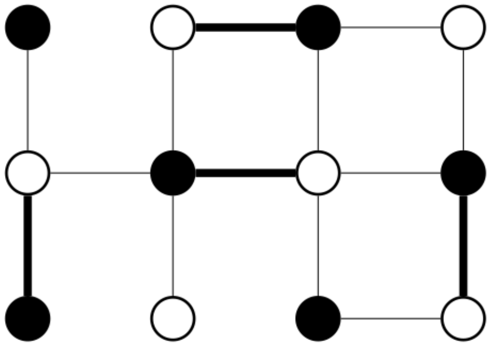


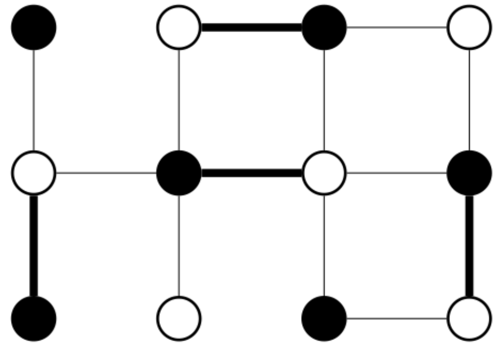


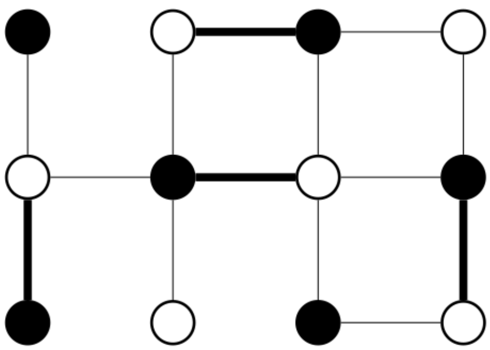


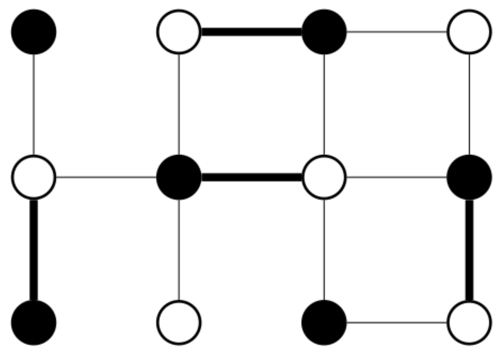


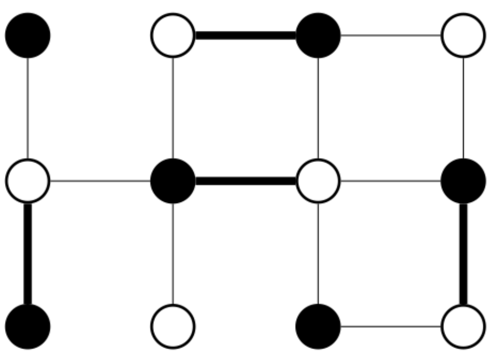
Graphes pour exercices sur les couplages

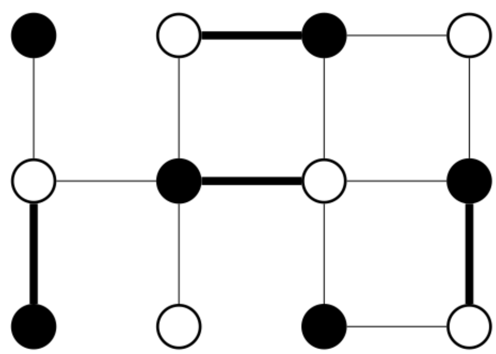


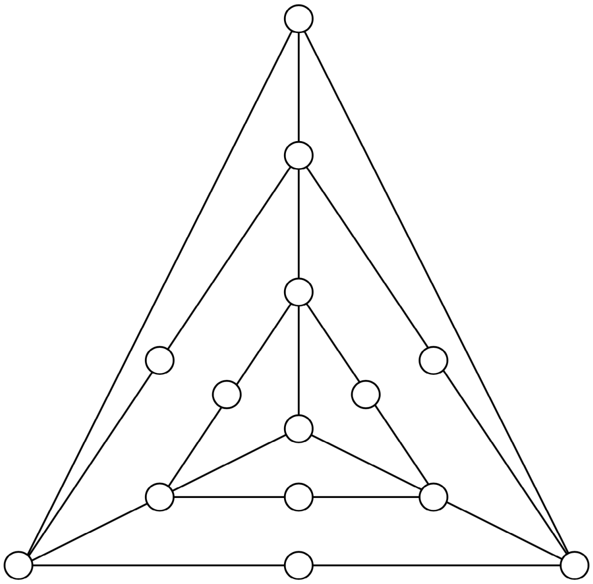
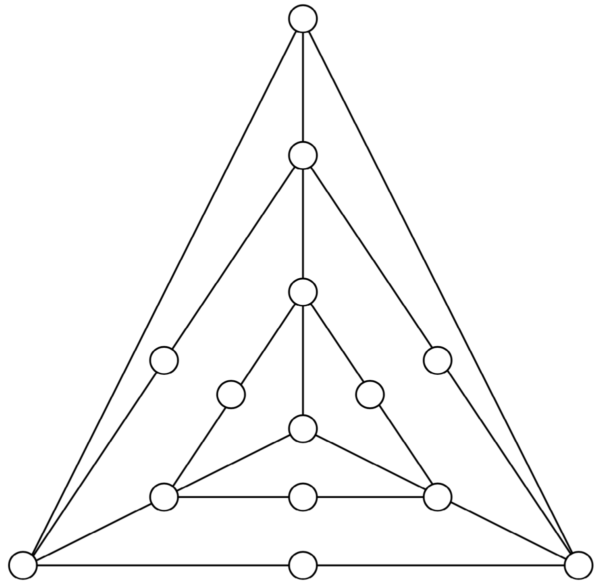
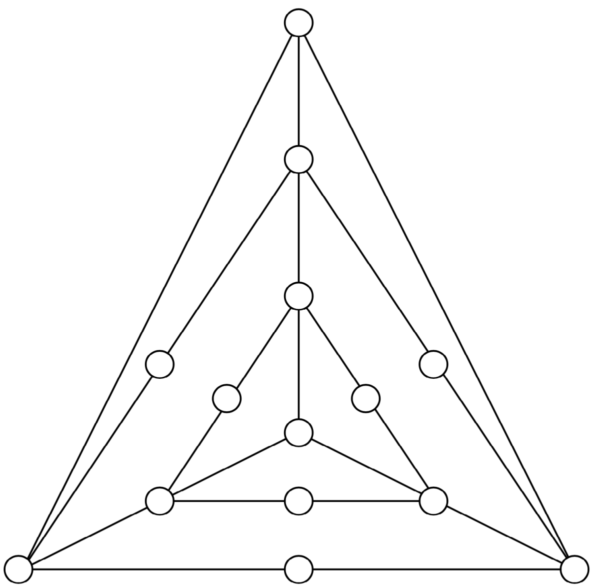
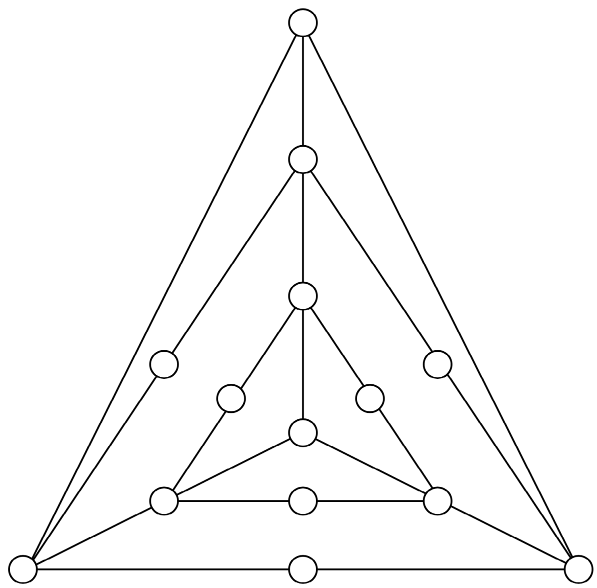
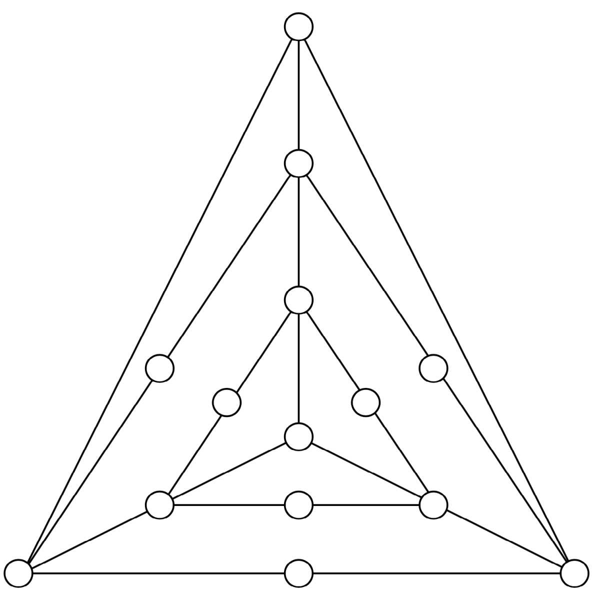
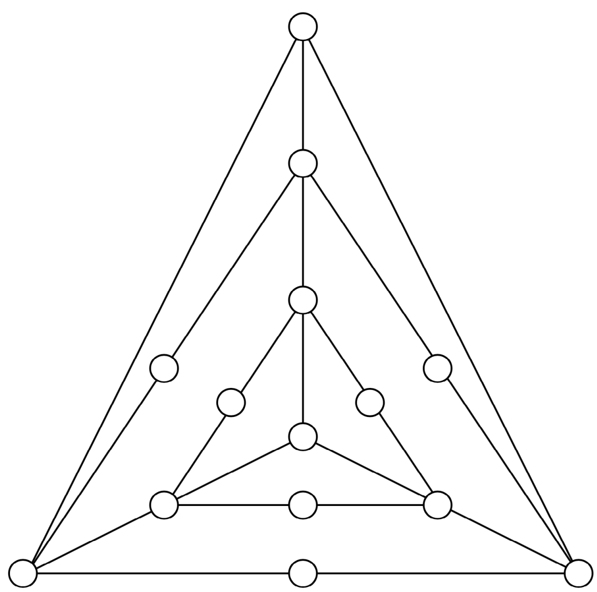




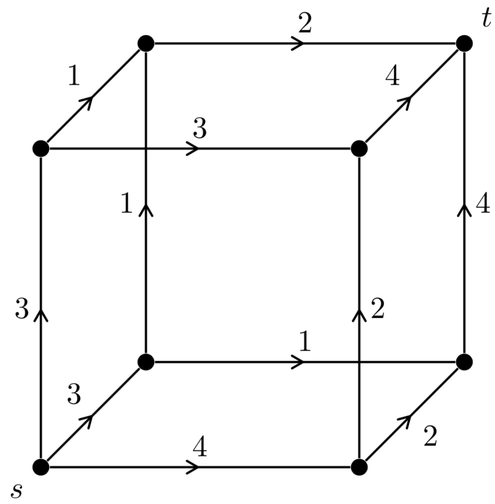


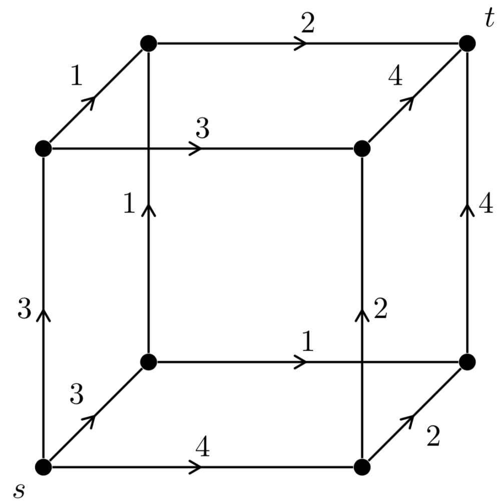


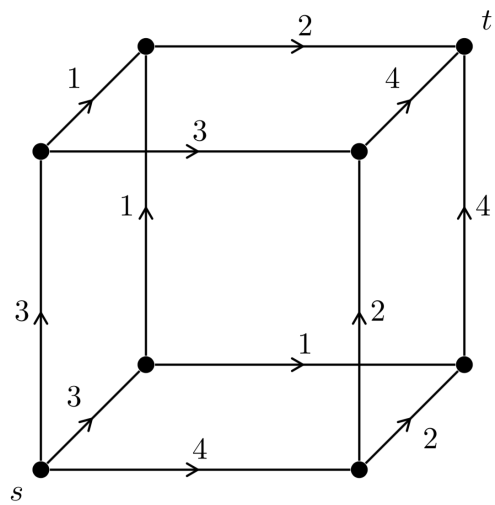


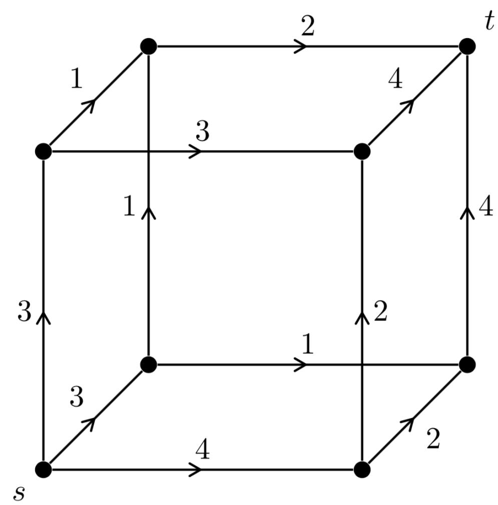







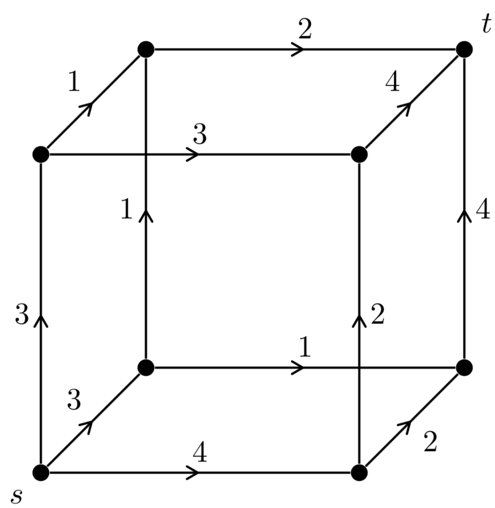
Graphes pour exercices sur les flots

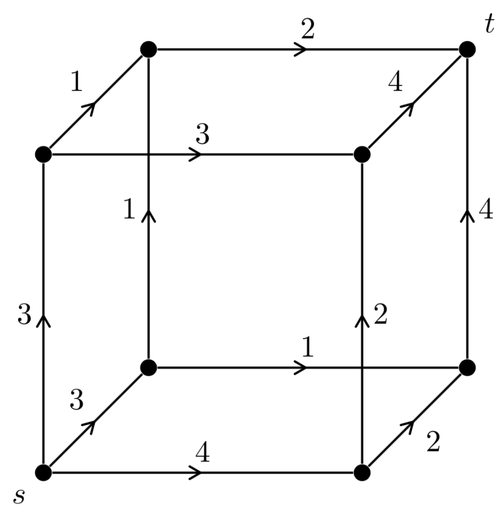


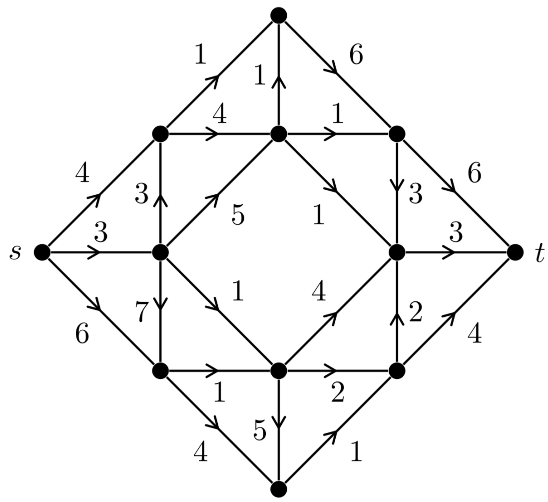


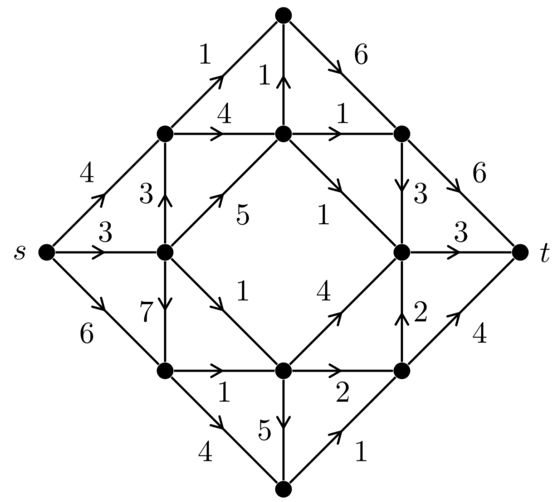


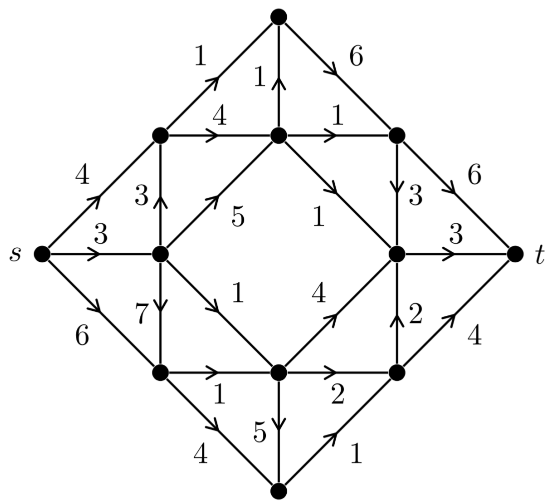


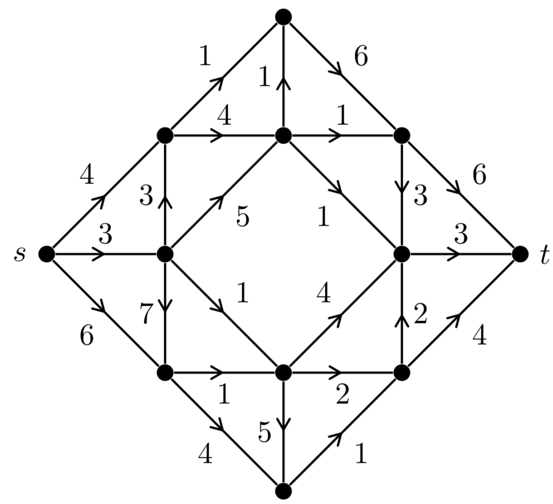


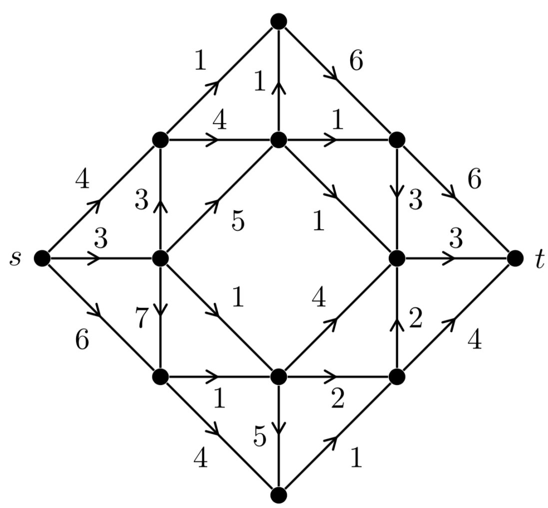


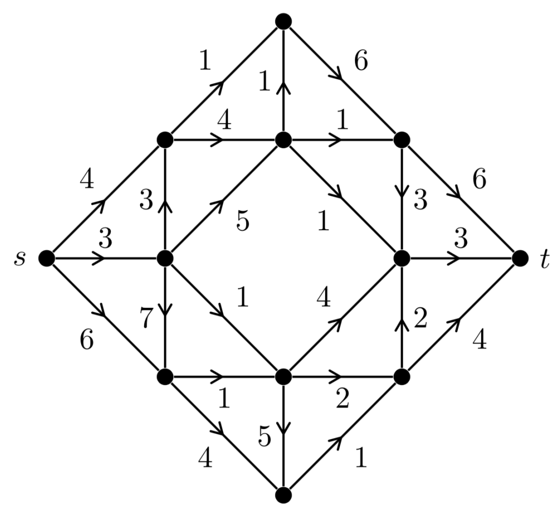

s
t
1
6
1
4
1
4
3
5
1
3
6
3
3
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

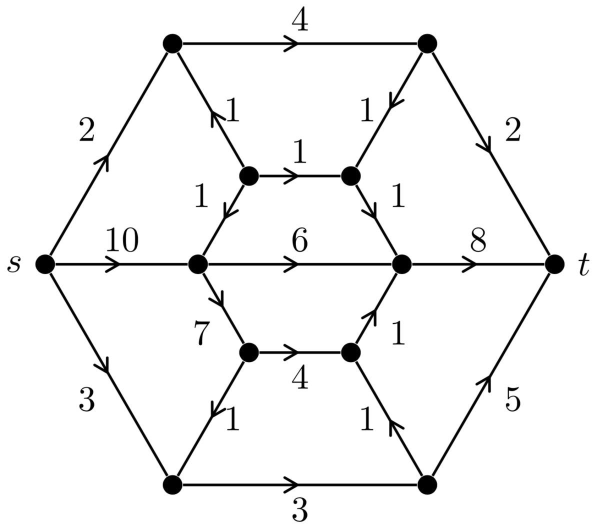
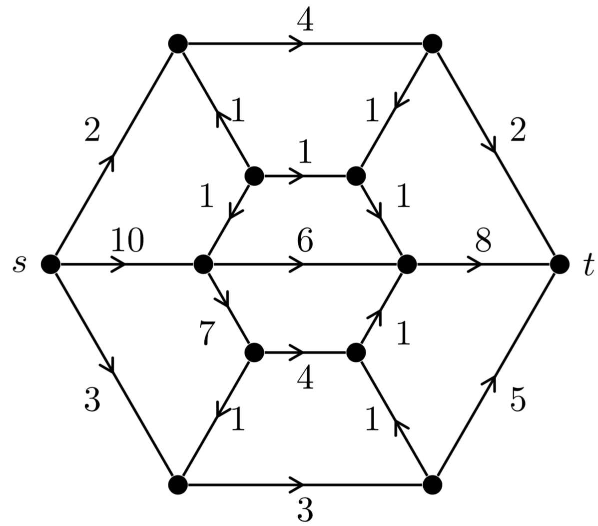
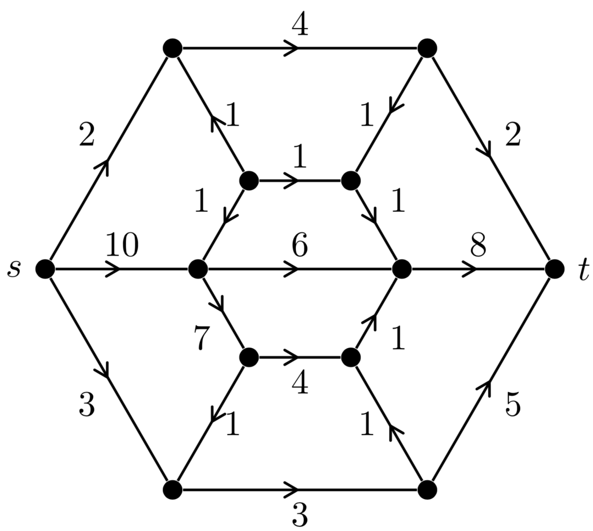
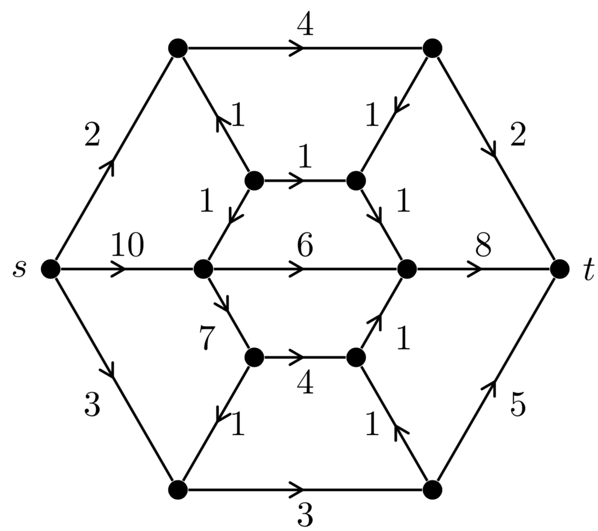
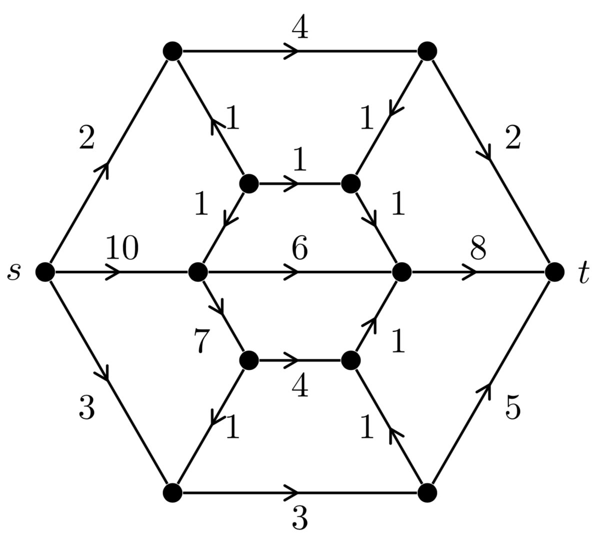
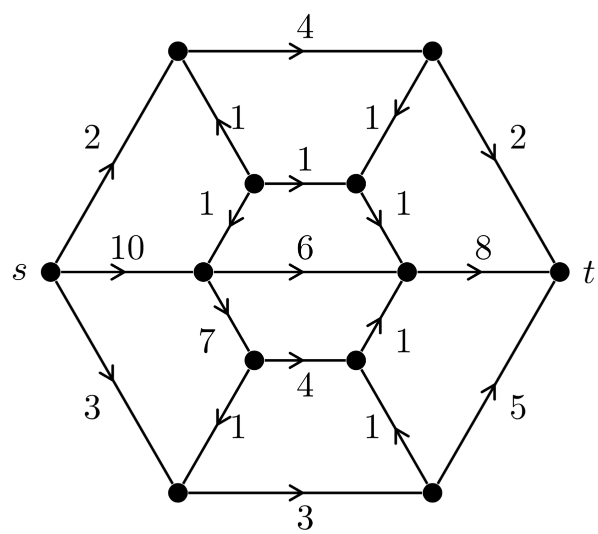

s
t
1
6
1
4
1
4
3
5
1
3
6
3
3
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

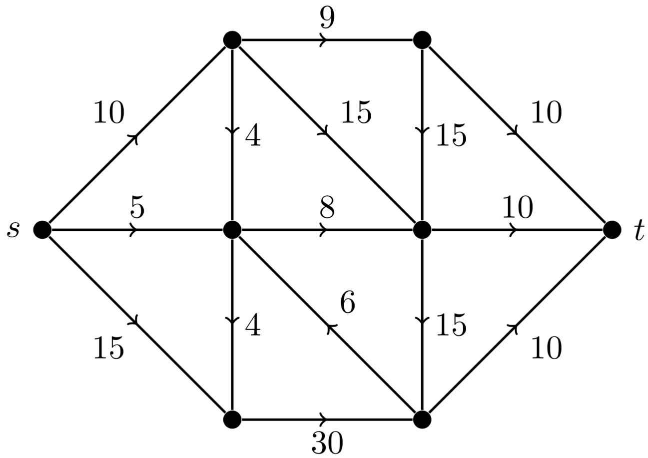

s
t
1
6
1
4
1
4
3
5
1
3
6
3
3
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

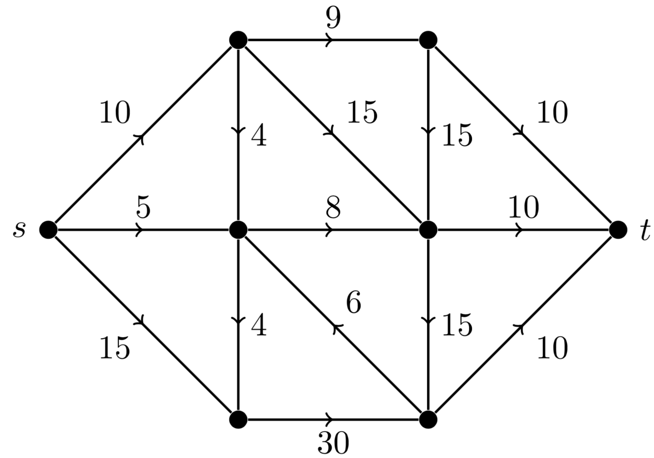

s
t
1
6
1
4
1
4
3
5
1
3
6
3
3
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

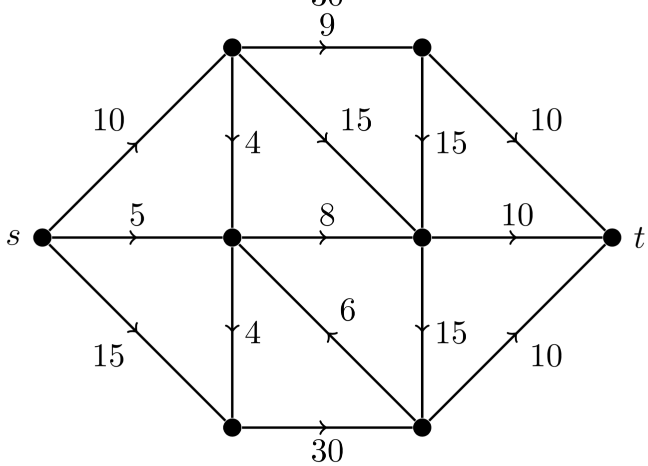

s
t
1
6
1
4
1
4
3
5
1
3
6
3
3
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

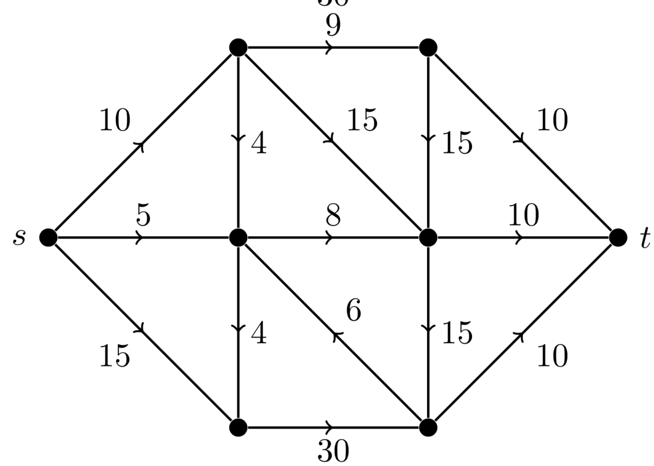

s
t
1
6
1
4
1
4
3
5
1
3
6
3
3
7
1
4
2
6
4
1
2
5
4
1

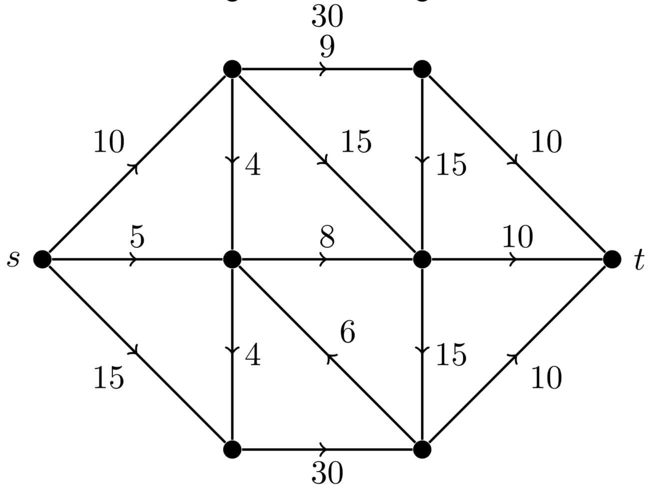

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
4
3
1
1
5
3

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
4
3
1
1
5
3

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
4
3
1
1
5
3

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
4
3
1
1
5
3

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
4
3
1
1
5
3

4
2
1
1
2
1
1
1
s
10
6
8
t
7
1
4
3
1
1
5
3

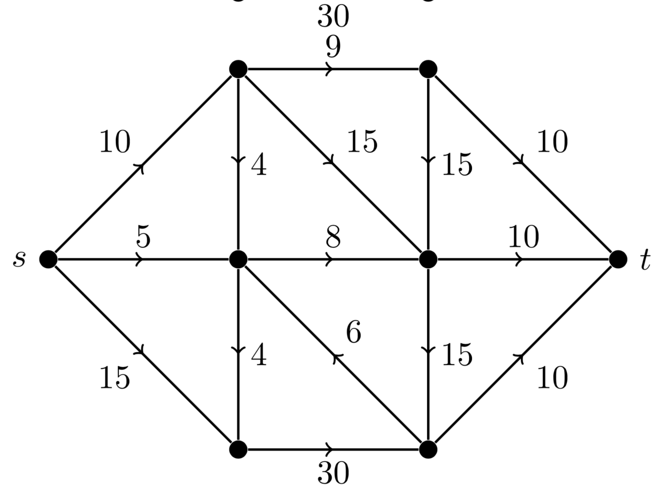

9
10
4
15
15
10
s
5
8
10
t
15
4
6
15
10
30


9
10
4
15
15
10
s
5
8
10
t
15
4
6
15
10
30


9
10
4
15
15
10
s
5
8
10
t
15
4
6
15
10
30


9
10
4
15
15
10
s
5
8
10
t
15
4
6
15
10
30


9
10
4
15
15
10
s
5
8
10
t
15
4
6
15
10
30


9
10
4
15
15
10
s
5
8
10
t
15
4
6
15
10
30

Contact UE : aurelie.lagoutte@univ-grenoble-alpes.fr