Travaux Dirigés

Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

Routage optimal dans un anneau

On considère ici le problème de routage du trafic dans un anneau. Cette topologie est souvent utilisée dans les réseaux de télécommunications, par exemple dans les réseaux Sonet/SDH.

La topologie considérée est représentée sur la figure 1. On note $N > 2$ le nombre de noeuds. Les noeuds i et $i \ mod \ N+1$ sont reliés par un lien de capacité C, identique pour tous les liens. On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des liens du réseau. Ce réseau doit écouler un ensemble de trafic $k \in \mathcal{K}$. On note $s(k)$ et $t(k)$ les noeuds origine et destination du trafic k, et on note x_k sa demande en trafic. Cette demande peut être acheminée sur deux chemins: le chemin π_k^+ reliant $s(k)$ à $t(k)$ en suivant le sens des aiguilles d'une montre, et le chemin π_k^- dans l'autre sens. On notera x_k^+ la quantité de trafic transmise sur le chemin π_k^+, et x_k^- celle transmise dans l'autre sens.

Introduisons les notations suivantes pour chaque lien $e \in \mathcal{E}$ et chaque flot $k \in \mathcal{K}$:

$$\delta_{k,e}^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in \pi_k^+, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \delta_{k,e}^- = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in \pi_k^-, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

On pourra remarquer que si $\delta_{k,e}^+ = 1$, alors $\delta_{k,e}^- = 0$, et inversement. La quantité de trafic (ou charge) passant sur le lien e peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$y_e = \sum_{k \in \mathcal{K}} \delta_{k,e}^+ \, x_k^+ + \delta_{k,e}^- \, x_k^-$$

On notera $\phi_e(y_e)$ le coût du lien e [1]. L'objectif du problème est de déterminer les paramètres de routage x_k^+ et x_k^- de chaque flot $k \in \mathcal{K}$ de manière à minimiser le coût total du réseau. Mathématiquement, le problème s'écrit sous la forme suivante :

[1] Les fonctions ϕ_e sont supposés convexes.

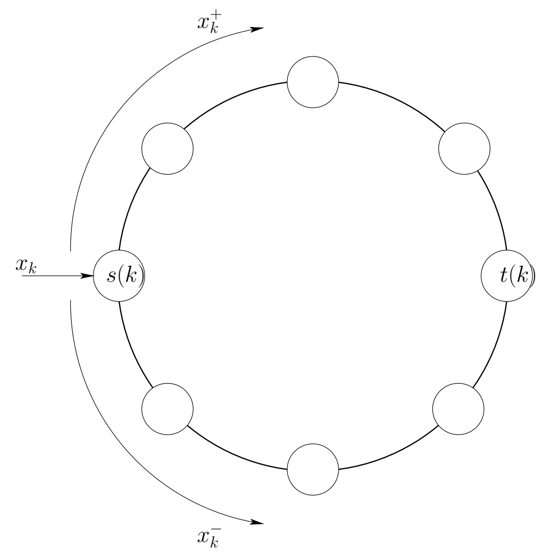

Figure 1: Topologie en anneau.

$$\begin{cases} \text{Minimiser :} & \Gamma(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \phi_e(y_e) \\ \text{sous les contraintes :} & \\ & x_k^+ + x_k^- = x_k, \quad k \in \mathcal{K} \\ & x_k^+, x_k^- \geq 0, \quad k \in \mathcal{K} \end{cases}$$

PREMIERE PARTIE

Questions :

1. Rappeler la condition d'optimalité du routage par partage de charge et son interprétation.

   Réponse: La solution optimale ne propage du flot sur un chemin que si c'est un chemin de longueur minimale au sens des dérivées premières. On a donc :

$$x_k^+ > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^+} \leq \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^-}$$
$$x_k^- > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^+} \geq \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^-}$$

2. Calculer les expressions de $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^+}$ et $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^-}$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $x_k^+ > 0$? Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $x_k^- > 0$?
Réponse: On a,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^+} = \sum_{e \in \mathcal{E}} \phi'_e(y_e)\, \frac{\partial y_e}{\partial x_k^+} = \sum_{e \in \mathcal{E}} \phi'_e(y_e)\, \delta_{k,e}^+ = \sum_{e \in \pi_k^+} \phi'_e(y_e).$$

De même, $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^-} = \sum_{e \in \pi_k^-} \phi'_e(y_e)$. On peut donc réécrire les conditions d'optimalité de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_k^+ > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{e \in \pi_k^+} \phi'_e(y_e) \le \sum_{e \in \pi_k^-} \phi'_e(y_e) \\ x_k^- > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{e \in \pi_k^+} \phi'_e(y_e) \ge \sum_{e \in \pi_k^-} \phi'_e(y_e) \end{aligned}$$

3. Supposons que $\phi_e(y_e) = a\,\frac{y_e}{C}$ pour tout lien $e \in \mathcal{E}$, où a est un paramètre. Quelles sont alors les conditions d'optimalité du routage ? On notera pour répondre l_k^+ la longueur en nombre de sauts du chemin π_k^+ et l_k^- celle du chemin π_k^-.
Réponse: On a $\phi'_e(y_e) = a/C$. Vu que,

$$\sum_{e \in \pi_k^+} \phi'_e(y_e) = \frac{a}{C} \sum_{e \in \pi_k^+} 1 = \frac{a}{C}\, l_k^+,$$

on peut réécrire les conditions d'optimalité comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned} x_k^+ > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad l_k^+ \le l_k^- \\ x_k^- > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad l_k^+ \ge l_k^- \end{aligned}$$

Autrement dit, le routage est optimal si on ne transmet du flot que sur les chemins les plus courts en nombre de sauts.

4. Supposons que $\phi_e(y_e) = a\,\left(\frac{y_e}{C}\right)^2$ pour tout lien $e \in \mathcal{E}$, où a est un paramètre. Quelles sont alors les conditions d'optimalité du routage ?
Réponse: On a $\phi'_e(y_e) = 2a y_e / C^2$. Vu que,

$$\sum_{e \in \pi_k^+} \phi'_e(y_e) = \frac{2a}{C^2} \sum_{e \in \pi_k^+} y_e,$$

on peut réécrire les conditions d'optimalité comme indiqué ci-dessous :

$$x_k^+ > 0 \iff \sum_{e\in\pi_k^+} y_e \leq \sum_{e\in\pi_k^-} y_e$$
$$x_k^- > 0 \iff \sum_{e\in\pi_k^+} y_e \geq \sum_{e\in\pi_k^-} y_e$$

Autrement dit, le routage est optimal si on ne transmet du flot que sur les chemins les plus courts en termes de charge (i.e. la longueur d'un lien est sa charge).

SECONDE PARTIE

On suppose dans cette partie qu'il y a un nombre pair de noeuds, i.e $\frac{N}{2}$ est un nombre entier. On suppose aussi qu'il y a un flot de communication de chaque noeud i vers chaque noeud $j \neq i$, soit au total $N\,(N-1)$ flots de communication. Ils ont tous la même demande: $x_k = x$ pour tout $k \in \mathcal{K}$. On suppose enfin que $\phi_e(y_e) = \left(\frac{y_e}{C}\right)^2$.

Questions :

1. Supposons que $x_k^+ = x_k^- = \frac{x_k}{2}$ pour tout $k \in \mathcal{K}$. Calculer alors la charge y_e de chaque lien e. Cette stratégie est-elle optimale ? Expliquer intuitivement (avec un dessin) pourquoi.
Réponse: On a par définition :

$$y_e = \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{N(N-1)} \delta_{k,e}^+ + \delta_{k,e}^- = \frac{x}{2}\,N\,(N-1),$$

car pour tout flot k et tout lien e, on a soit le chemin π_k^+ qui passe par e, soit le chemin dans l'autre sens qui y passe. On peut donc conclure qu'avec cette solution, tous les liens ont la même charge.

On voit alors que :

$$\sum_{e\in\pi_k^+} y_e = \frac{x}{2}\,N\,(N-1)\,l_k^+ \quad \text{et} \quad \sum_{e\in\pi_k^-} y_e = \frac{x}{2}\,N\,(N-1)\,l_k^-$$

En utilisant les conditions d'optimalité de la question 4 et en simplifiant par $\frac{x}{2}\,N\,(N-1)$, on obtient les mêmes conditions d'optimalité qu'à la question 3 :

$$x_k^+ > 0 \iff l_k^+ \leq l_k^-$$
$$x_k^- > 0 \iff l_k^+ \geq l_k^-$$

Ces conditions ne sont pas vérifiées pour tout flot k lorsque l'on répartit la moitié de la demande sur chaque chemin. Pour comprendre pourquoi la solution n'est pas optimale, il suffit de considérer 2 noeuds adjacents dans un anneau de 4 noeuds par exemple.

2. Supposons que $x_k^+ = x_k$ si $l_k^+ < l_k^-$, et $x_k^+ = x_k^- = \frac{x_k}{2}$ si $l_k^+ = l_k^-$. Montrer alors que [2]:

$$y_e = \frac{N^2}{4}\,x \quad e \in \mathcal{E}$$

Cette stratégie est-elle optimale ?

Réponse: Considérons un lien $e = (i, i+1)$. Regardons ce qui passe dans le sens +. Le noeud i envoie un trafic x aux noeuds $i+1, i+2, \ldots, i+\frac{N}{2}-1$, et il envoie un trafic $x/2$ au noeud $i+\frac{N}{2}$. Le noeud i va donc faire passer un trafic $x\left(\frac{N}{2}-1\right)+\frac{x}{2}$ sur le lien e. De même, le noeud $i-1$ va faire passer un trafic $x\left(\frac{N}{2}-2\right)+\frac{x}{2}$, etc., jusqu'au noeud situé à distance $\frac{N}{2}$ de $i+1$ qui lui va juste faire passer un trafic $\frac{x}{2}$. Si on note y_e^+ le trafic passant sur e dans le sens +, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
y_e^+ &= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(i\,x+\frac{x}{2}\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} i + \frac{N}{2}\,\frac{x}{2} \\
&= x\,\frac{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)}{2} + \frac{N\,x}{4} \\
&= \frac{N^2}{8}\,x
\end{aligned}$$

Il est clair que $y_e^- = y_e^+$ d'où l'on déduit que $y_e = \frac{N^2}{4}\,x$ pour tout lien e. Comme à la question précédente, les conditions d'optimalité s'écrivent $x_k^+ > 0 \iff l_k^+ \le l_k^-$ et $x_k^- > 0 \iff l_k^+ \ge l_k^-$. Comme c'est exactement la politique appliquée, on en déduit que cette politique est optimale.

[2] On considérera un lien, puis on calculera ce qui passe dans un sens, et on multipliera par 2. On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.