

Problèmes de Planification de Réseaux

Olivier Brun

`brun@laas.fr`

LAAS-CNRS

7 Av. Colonel Roche, 31077 Toulouse, France.

INSA, 2010.

- 1 Formulations Lien-Chemin et Noeud-Lien
- 2 Problèmes de routage
- 3 Problèmes de dimensionnement
- 4 Conception de topologie
- 5 Équité dans les réseaux
- 6 Incertitude sur la demande & Conception de VPN

● Objectifs

- Montrer que la plupart des problèmes de planification de réseaux peuvent se formuler comme des problèmes de multiflot.
- Introduire les formulations lien-chemin et noeud-lien.
- Donner des exemples simples de problèmes de routage, de dimensionnement et de conception de topologie. La démarche de modélisation est plus importante que les exemples en eux-mêmes.
- Introduire les concepts d'équité dans les réseaux et de planification robuste (incertitude sur la demande).

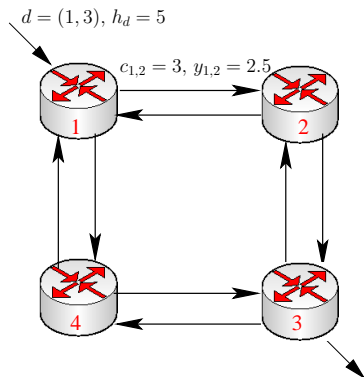
Formulations Lien-Chemin et Noeud-Lien

● Réseau

- Graphe dirigé $G = (V, E)$.
- Capacité du lien $e \in E : c_e$.
- Trafic sur $e \in E : y_e$.

● Flots de trafic

- Ensemble D de demandes en trafic.
- Chaque flot $d \in D$ est caractérisé par :
 - sa source s_d ,
 - sa destination t_d ,
 - sa demande h_d .



Formulation Lien-Chemin d'un problème de Routage

- **Objectif** : minimiser la bande-passante totale consommée.
- **Chemins** :
 - On note Π_d l'ensemble des chemins candidats pour la demande d .
 - On note x_d^π la quantité de trafic du flot d sur le chemin $\pi \in \Pi_d$.
 - On pose $\delta_e^\pi = 1$ si le chemin π passe par le lien e , et $\delta_e^\pi = 0$ sinon.
- **Formulation** :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_e y_e \quad (1)$$

s.t

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D \quad (2)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi = y_e \quad e \in E \quad (3)$$

$$y_e \leq c_e \quad e \in E \quad (4)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (5)$$

Formulation Lien-Chemin (2)

- Variables de décision : x_d^π (éliminer les y_e).
- Contraintes de conservation : $\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D.$
- Contraintes de capacité : $y_e \leq c_e \quad e \in E.$
- Problème de PL (algorithme du simplex)
- Avantages/Inconvénients :
 - Augmentation exponentielle du nombre de chemins : sous-optimalité (génération de colonnes).
 - Prise en compte des contraintes sur les chemins (nombre de hops, chemins disjoints, etc.)

Formulation Noeud-Lien d'un problème de Routage

- **Objectif** : minimiser la bande-passante totale consommée.
- **Notations** :
 - On note x_d^e la quantité de trafic du flot d sur le lien e .
 - On note $I(n)$ (resp. $O(n)$) les liens entrants (resp. sortants) au noeud n .
 - On définit les constantes suivantes :

$$z_d^n = \begin{cases} h_d & \text{si } n = s_d \\ -h_d & \text{si } n = t_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Formulation Noeud-Lien (2)

- **Formulation :**

$$\text{Minimiser} \quad \sum_e y_e \quad (6)$$

s.t

$$\sum_{e \in O(n)} x_d^e - \sum_{e \in I(n)} x_d^e = z_d^n \quad n \in V, d \in D \quad (7)$$

$$\sum_{d \in D} x_d^e = y_e \quad e \in E \quad (8)$$

$$y_e \leq c_e \quad e \in E \quad (9)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (10)$$

- Problème de PL (algorithme du simplex)

- **Avantages/Inconvénients :**

- Pas d'hypothèse sur les chemins candidats.
- Augmentation du nombre de contraintes.

Problèmes de routage

Routage avec partage de charge équitable

- **Objectif :**

- Router équitablement la demande d sur k_d chemins.
- Variable de décision : $u_d^\pi = 1$ si π est utilisé par d , $u_d^\pi = 0$ sinon.

- **Formulation :**

$$\text{Minimiser} \quad \sum_e y_e \quad (11)$$

s.t

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} u_d^\pi = k_d \quad d \in D \quad (12)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi u_d^\pi \frac{h_d}{k_d} = y_e \quad e \in E \quad (13)$$

$$y_e \leq c_e \quad e \in E \quad (14)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (15)$$

- Problème de PLNE.
- Cas particulier : problème de monoroutage ($k_d = 1$)
 - Routage des LSP dans un réseau MPLS.

● Objectif :

- Minimiser la bande-passante totale consommée a tendance à saturer des liens (pourquoi ?).
- En général, on veut garantir une certaine performance aux flux.
- Minimiser le taux maximal d'utilisation $\rho = \max_e \frac{y_e}{c_e}$

● Formulation :

$$\text{Minimiser} \quad \rho \quad (16)$$

s.t

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D \quad (17)$$

$$\frac{1}{c_e} \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi \leq \rho \quad e \in E \quad (18)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi \leq c_e \quad e \in E \quad (19)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (20)$$

Optimisation non-linéaire du routage

- **Objectif :**

- Minimiser le délai moyen des paquets dans le réseau.
- Formule M/M/1 et loi de Little : $\sum_e \frac{1}{c_e - y_e}$

- **Formulation :**

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \sum_e \frac{1}{c_e - y_e} \\ \text{s.t} & \end{array} \quad (21)$$

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D \quad (22)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi = y_e \quad e \in E \quad (23)$$

$$y_e \leq c_e \quad e \in E \quad (24)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (25)$$

- Problème de PNL.
- Cf. cours sur l'optimisation non-linéaire du routage.

- **Objectif :**

- OSPF et ISIS routent le trafic au PCC suivant les métriques w_e des liens.
- La métrique w_e est une variable entière : $w_e \in \Omega = [1, 2^{16} - 1]$
- Variable de décision : vecteur $\mathbf{w} = (w_e)_{e \in E} \in \Omega^M$.

- **Formulation :**

$$\min_{\mathbf{w} \in \Omega^M} \sum_e \Phi_e [y_e(\mathbf{w})]$$

- La charge y_e dépend des PCC, et donc du vecteur \mathbf{w} .
- Problème combinatoire : formulation en PLNE possible mais lourde.
- Cf. cours sur l'optimisation des métriques IP.

Problèmes de dimensionnement

- **Objectif** : minimiser le coût du trafic sur chaque lien
 - On note ζ_e le coût d'une unité de trafic sur le lien e .
 - La capacité à installer sur le lien e correspond à y_e .
- **Formulation** :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_e \zeta_e y_e \quad (26)$$

s.t

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D \quad (27)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi \leq y_e \quad e \in E \quad (28)$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0 \quad (29)$$

● Propriétés d'une solution optimale :

- La contrainte de capacité est vérifiée en tant qu'égalité.
- Chaque demande est routée sur un PCC au sens des métriques ζ_e .
- S'il y a plusieurs PCC, le partage est arbitraire.

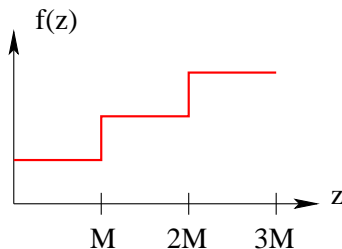
$$\begin{aligned}\sum_e \zeta_e y_e &= \sum_e \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \zeta_e \delta_e^\pi x_d^\pi \\ &= \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \left(\sum_{e \in \pi} \zeta_e \right) x_d^\pi \\ &= \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \zeta_d^\pi x_d^\pi\end{aligned}$$

- $\zeta_d^\pi = \sum_{e \in \pi} \zeta_e$ est la longueur du chemin π .
- Résolution de plusieurs problèmes de PCC découplés :

$$\min \sum_{\pi \in \Pi_d} \zeta_d^\pi x_d^\pi \text{ s.t. } \sum_{\pi} x_d^\pi = h_d$$

- **Capacité installée par modules de taille M**

- Minimiser le coût total des modules installés.



Exemple : SDH au niveau VC-4 offre des liens de modularité 63 PCM (Pulse Code Modulation).

- Variable de décision : $y_e \in \mathbb{N}$ représente le nombre de modules installés sur le lien e .

- **Formulation :**

$$\text{Minimiser} \quad \sum_e \zeta_e y_e \quad (30)$$

s.t

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D \quad (31)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi \leq M y_e \quad e \in E \quad (32)$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^{|E|} \quad (33)$$

- Problème de PLNE.
- La propriété de routage au PCC n'est plus vraie : il peut être intéressant de profiter de la capacité d'un module déjà installé.
- Variation : modules de capacités différentes.

- **Objectif** : Minimiser le coût des liens

- Routage fixé : $y_e = \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi$ est une constante.
- Variables de décision : c_e .
- Contrainte non-linéaire sur le délais moyen des paquets.

- **Formulation** :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \sum_e \zeta_e c_e \\ \text{s.t} & \end{array} \quad (34)$$

$$y_e \leq c_e \quad e \in E \quad (35)$$

$$\frac{1}{\sum_{d \in D} h_d} \sum_e \frac{y_e}{c_e - y_e} \leq d_{\max} \quad (36)$$

$$\mathbf{c} \geq 0 \quad (37)$$

- Résolution avec les multiplicateurs de Lagrange : cf TD.

Conception de topologie

- **Objectif** : Minimiser le coût des liens installés
 - Coût ζ_e par unité de trafic et coût κ_e d'installation.
 - Variables de décision :

$$u_e = \begin{cases} 1 & \text{si le lien } e \text{ est installé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Minimiser le coût total du réseau $F = \sum_e (\zeta_e y_e + \kappa_e u_e)$.

- **Formulation :**

$$\text{Minimiser} \quad \sum_e \zeta_e y_e + \kappa_e u_e \quad (38)$$

s.t

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D \quad (39)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi \leq y_e \quad e \in E \quad (40)$$

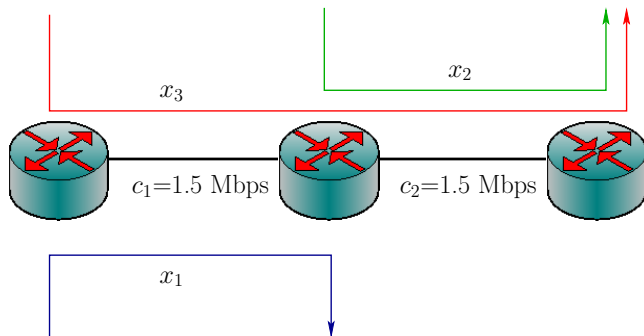
$$y_e \leq \Delta u_e \quad e \in E \quad (41)$$

$$y_e \geq 0, u_e \in \{0, 1\} \quad e \in E \quad (42)$$

- Δ est une constante suffisamment grande.
- La contrainte $y_e \leq \Delta u_e$ impose $y_e = 0$ si $u_e = 0$.

Equité dans les réseaux

- **Demandes élastiques**

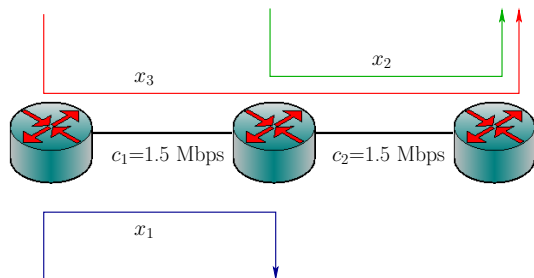


- **Comment partager la capacité du réseau entre les flots ?**

- Garantir une certaine équité entre les flux.
- Garantir un débit réseau élevé (volume de trafic écoulé).

● Algorithme de Water-filling

- En partant de 0, augmenter toutes les demandes au même rythme jusqu'à saturation d'un lien.
- Continuer pour les demandes ne passant pas par un lien saturé.



Solution MMF :

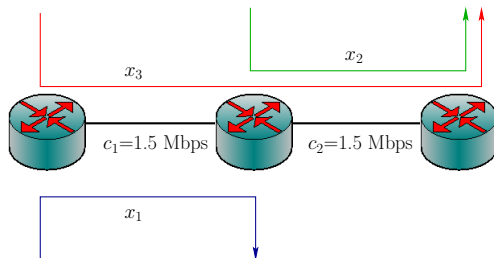
$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3}{4}$$

- **Exemple :** $c_1 = 1.5$ Mbps, $c_2 = 2$ Mbps $\implies x_1 = x_3 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.
- **Maximisation du débit minimal des utilisateurs**
 - Solution équitable d'un point de vue utilisateur.

Maximisation du débit réseau

- **Objectif :**

- Maximiser $x_1 + x_2 + x_3$ s.t. $x_1 + x_3 \leq c_1$ et $x_2 + x_3 \leq c_2$.
- Problème de PL (algorithme du simplex).



Solution : $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 0$.
Débit : $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ Mbps.

- **Comparaison :** débit(MMF) = $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \times \frac{3}{4} = 2.25$.

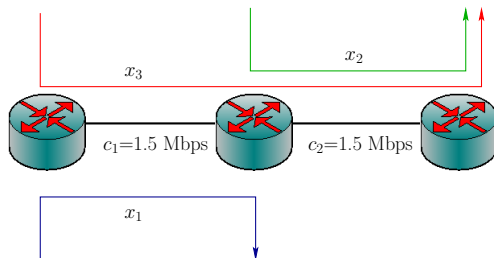
- **Conclusion :**

- Ce qui est bon pour le réseau n'est pas forcément bon pour tous les utilisateurs.
- Trouver un compromis entre équité et efficacité réseau.

Proportionnal fairness

● Objectif :

- $\text{Max } \log(x_1) + \log(x_2) + \log(x_3)$ s.t. $x_1 + x_3 \leq c_1$, $x_2 + x_3 \leq c_2$.
- Le log interdit la valeur 0 et rend non profitable d'affecter trop de trafic à une seule demande (concavité).
- Problème de PNL.



Solution : $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$.
Débit : $x_1 + x_2 + x_3 = 2.5$ Mbps.

- Moins équitable que MMF mais plus efficace.

Incertitude sur la demande & Conception de VPN

● Motivation :

- Dans les problèmes précédents, on a supposé connaître la demande en trafic h_d du flot $d = (s, t)$.
- En pratique, les opérateurs n'ont qu'une connaissance approximative de la demande
 - la mesure du trafic (avec NetFlow par exemple) peut générer beaucoup d'overhead.
 - la matrice de trafic $\mathbf{h} = (h_{s,t})_{s,t}$ évolue en permanence.
 - les prévisions de trafic peuvent être entachées d'erreur.

● Planification robuste :

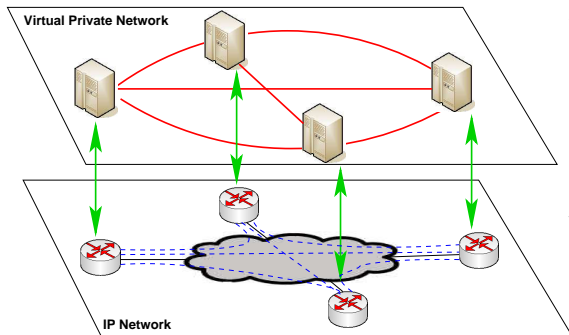
- Intégrer l'incertitude sur la demande aux problèmes de planification.
- La matrice de trafic \mathbf{h} appartient à un certain ensemble \mathcal{H} .

● Exemple illustratif :

- Conception de VPN

● Réseaux Privés Virtuels (VPN) :

- Service proposé par les opérateurs.
- Le client dispose d'une infrastructure privée et virtuelle de communication longue distance à moindre coût.

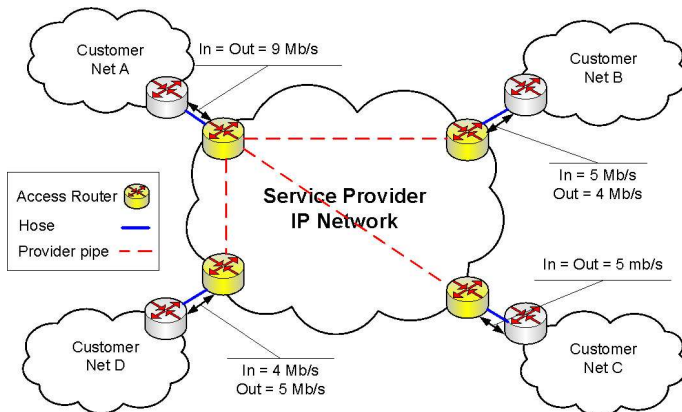


Pour le client, les noeuds du VPN sont directement interconnectés grâce à des liens virtuels.

En fait, ils sont reliés à des routeurs IP du réseau opérateur, et les liens virtuels correspondent à des chemins entre ces routeurs dans le réseau IP.

● Spécification de la demande avec le Hose Model

- Le client spécifie le trafic maximal qu'il peut générer.
- L'opérateur réserve des ressources en conséquence dans son réseau.



● Ensemble d'incertitude sur la demande :

- $Q \subseteq V$: ensemble des noeuds du VPN.
- Hose model : débit maximal en émission $b^+(v)$ et le débit maximal en réception $b^-(v)$ de tout noeud $v \in Q$.
- L'ensemble \mathcal{H} des matrices de trafic \mathbf{h} compatibles avec le hose model est défini par :

$$\sum_{t \in Q} h_{s,t} \leq b^+(s) \quad \text{et} \quad \sum_{t \in Q} h_{t,s} \leq b^-(s).$$

● Problème de l'opérateur :

- Router les liens virtuels $(s, t) \in Q^2$ de manière à minimiser la bande-passante réservée.
- Variables de décision
 - x_e : bande-passante réservée sur le lien e ,
 - $f_{s,t}^e$: fraction du flot (s, t) passant sur le lien e .
- Constantes :

$$z_{s,t}^v = \begin{cases} 1 & \text{si } v = s \\ -1 & \text{si } v = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

● Formulation Noeud-Lien

Minimiser $\sum_{e \in E} x_e$

s.t.

$$\sum_{s,t \in Q} f_{s,t}^e h_{s,t} \leq x_e, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{H}, e \in E$$

$$0 \leq x_e \leq c_e, \quad e \in E$$

$$\sum_{e \in O(v)} f_{s,t}^e - \sum_{e \in I(v)} f_{s,t}^e = z_{s,t}^v, \quad s, t \in Q, v \in V$$

$$0 \leq f_{s,t}^e \leq 1, x_e \geq 0 \quad e \in E, s, t \in Q$$

- Nombre infini de contraintes lié à $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$!
- Résolution possible en PL avec le simplex en dualisant les contraintes définissant \mathcal{H} .
- En pratique, les liens virtuels sont acheminés par des LSP dédiées qui sont monoroutés, i.e. $f_{s,t}^e \in \{0, 1\}$. Problème beaucoup plus complexe.