Travaux Dirigés

Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

Routage optimal dans un anneau

On considère ici le problème de routage du trafic dans un anneau. Cette topologie est souvent utilisée dans les réseaux de télécommunications, par exemple dans les réseaux Sonet/SDH.

La topologie considérée est représentée sur la figure 1. On note $N > 2$ le nombre de noeuds. Les noeuds i et $i\ mod\ N+1$ sont reliés par un lien de capacité C, identique pour tous les liens. On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des liens du réseau. Ce réseau doit écouler un ensemble de trafic $k \in \mathcal{K}$. On note $s(k)$ et $t(k)$ les noeuds origine et destination du trafic k, et on note x_k sa demande en trafic. Cette demande peut être acheminée sur deux chemins: le chemin π_k^+ reliant $s(k)$ à $t(k)$ en suivant le sens des aiguilles d'une montre, et le chemin π_k^- dans l'autre sens. On notera x_k^+ la quantité de trafic transmise sur le chemin π_k^+, et x_k^- celle transmise dans l'autre sens.

Introduisons les notations suivantes pour chaque lien $e \in \mathcal{E}$ et chaque flot $k \in \mathcal{K}$:

$$\delta_{k,e}^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in \pi_k^+, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \delta_{k,e}^- = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in \pi_k^-, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

On pourra remarquer que si $\delta_{k,e}^+ = 1$, alors $\delta_{k,e}^- = 0$, et inversement. La quantité de trafic (ou charge) passant sur le lien e peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$y_e = \sum_{k \in \mathcal{K}} \delta_{k,e}^+ x_k^+ + \delta_{k,e}^- x_k^-$$

On notera $\phi_e(y_e)$ le coût du lien e [1]. L'objectif du problème est de déterminer les paramètres de routage x_k^+ et x_k^- de chaque flot $k \in \mathcal{K}$ de manière à minimiser le coût total du réseau. Mathématiquement, le problème s'écrit sous la forme suivante :

[1] Les fonctions ϕ_e sont supposés convexes.

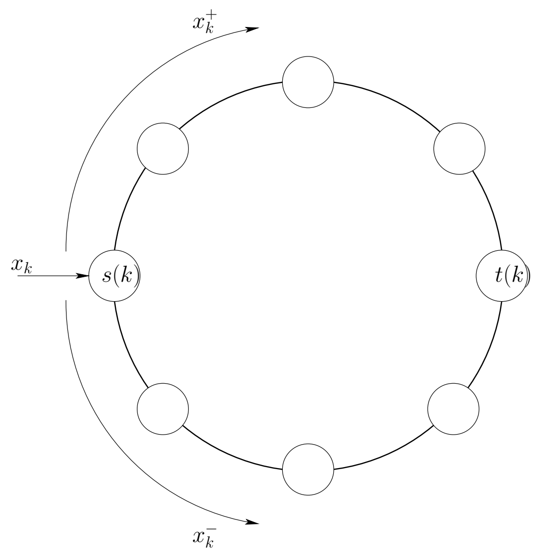

Figure 1: Topologie en anneau.

$$
\begin{cases}
\text{Minimiser :} & \Gamma(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \phi_e(y_e) \\
\text{sous les contraintes :} & \\
& x_k^+ + x_k^- = x_k, \quad k \in \mathcal{K} \\
& x_k^+, x_k^- \geq 0, \quad k \in \mathcal{K}
\end{cases}
$$

PREMIERE PARTIE

Questions :

1. Rappeler la condition d'optimalité du routage par partage de charge et son interprétation.

2. Calculer les expressions de $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^+}$ et $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k^-}$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $x_k^+ > 0$? Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $x_k^- > 0$?

3. Supposons que $\phi_e(y_e) = a \frac{y_e}{C}$ pour tout lien $e \in \mathcal{E}$, où a est un paramètre. Quelles sont alors les conditions d'optimalité du routage ? On notera pour répondre l_k^+ la longueur en nombre de sauts du chemin π_k^+ et l_k^- celle du chemin π_k^-.

4. Supposons que $\phi_e(y_e) = a \left(\frac{y_e}{C}\right)^2$ pour tout lien $e \in \mathcal{E}$, où a est un paramètre. Quelles sont alors les conditions d'optimalité du routage ?

SECONDE PARTIE

On suppose dans cette partie qu'il y a un nombre pair de noeuds, i.e $\frac{N}{2}$ est un nombre entier. On suppose aussi qu'il y a un flot de communication de chaque noeud i vers chaque noeud $j \neq i$, soit au total $N(N-1)$ flots de communication. Ils ont tous la même demande: $x_k = x$ pour tout $k \in \mathcal{K}$. On suppose enfin que $\phi_e(y_e) = \left(\frac{y_e}{C}\right)^2$.

Questions :

1. Supposons que $x_k^+ = x_k^- = \frac{x_k}{2}$ pour tout $k \in \mathcal{K}$. Calculer alors la charge y_e de chaque lien e. Cette stratégie est-elle optimale ? Expliquer intuitivement (avec un dessin) pourquoi.

2. Supposons que $x_k^+ = x_k$ si $l_k^+ < l_k^-$, et $x_k^+ = x_k^- = \frac{x_k}{2}$ si $l_k^+ = l_k^-$. Montrer alors que [2]:

$$y_e = \frac{N^2}{4} x \quad e \in \mathcal{E}$$

Cette stratégie est-elle optimale ?

[2] On considérera un lien, puis on calculera ce qui passe dans un sens, et on multipliera par 2. On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.