Travaux Dirigés

Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

1 Problème

On considère le réseau avec 2 noeuds et 3 liens parallèles, représenté sur la figure 1. Le noeud 1 est l'origine et le noeud 2 la destination d'une unité de flot : $r = 1$. On note x_i la quantité de flot transmise sur le lien i.

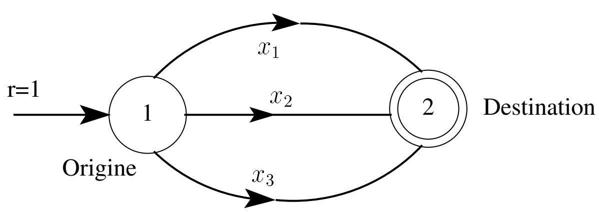

Figure 1: Réseau considéré dans le problème.

Le problème consiste à déterminer la solution optimale $\mathbf{x} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ de routage par partage de charge. On suppose que la fonction coût est :

$$D(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\ \left[(x_1)^2\ +\ 2\,(x_2)^2 + (x_3)^2\right]\ +\ 0.7\,x_3.$$

Mathématiquement, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Minimiser :} & D(\mathbf{x}) \\ \text{sous les contraintes :} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Questions :

1. Rappeler la condition d'optimalité du routage par partage de charge et son interprétation.
   Réponse :

   Condition d'optimalité :

   $$x_p^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial D(x^*)}{\partial x_{p'}} \ \geq \ \frac{\partial D(x^*)}{\partial x_p} \ \forall p' \in P_w$$

   La solution optimale ne propage du flot sur le chemin p que si c'est un chemin de longueur minimale au sens des dérivées premières. La solution optimale ne répartit une demande r_w sur plusieurs chemins que si ces chemins sont de longueurs égales (et minimales) au sens des dérivées premières.

2. En utilisant la condition d'optimalité, montrer que l'on a $x_3^* = 0$. On pourra raisonner par l'absurde.
   Réponse :
   Montrons que $x_3^* = 0$. Notons $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. On suppose que $x_3^* > 0$. D'après la condition d'optimalité cela implique que $\partial D(\mathbf{x}^*)/\partial x_1 \ \geq \ \partial D(\mathbf{x}^*)/\partial x_3$ et $\partial D(\mathbf{x}^*)/\partial x_2 \ \geq \ \partial D(\mathbf{x}^*)/\partial x_3$. On a donc :

   $$x_3^* + 0.7 \leq x_1^* \text{ et } x_3^* + 0.7 \leq 2\, x_2^* \quad \Rightarrow \quad x_1^* \geq 0.7 \text{ et } x_2^* \geq 0.35$$

   Avec la contrainte de conservation, on a alors :

   $$x_3^* = 1 - x_1^* - x_2^* \leq 1 - 0.7 - 0.35 \leq -0.05$$

   Ce qui est absurde. Donc $x_3^* = 0$.

3. Montrer que $x_1^* = 2/3$, $x_2^* = 1/3$ et $x_3^* = 0$ est la solution optimale.
   Réponse :
   Montrons que $x_1^* = \frac{2}{3}$, $x_2^* = \frac{1}{3}$ et $x_3^* = 0$ est la solution optimale. On sait que $x_3^* = 0$. En supposant que $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$, on a d'après la condition d'optimalité $\partial D(\mathbf{x}^*)/\partial x_1 \ = \ \partial D(\mathbf{x}^*)/\partial x_2$, soit $x_1^* = 2\, x_2^*$. Avec la condition $x_1^* + x_2^* = 1$, on obtient ainsi $x_1^* = \frac{2}{3}$ et $x_2^* = \frac{1}{3}$. Le coût de cette solution est

   $$D(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (0)^2 \right] + 0.7 \times 0 = \frac{1}{3}.$$

   Les solutions extrémales $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ ont pour coûts respectifs $\frac{1}{2}$ et 1. Ce qui prouve que la solution $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ est optimale.

4. On considère la solution initiale $\mathbf{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Quel est le coût de cette solution ? Quel est le gain en % apporté par la solution optimale ?

Réponse :
La solution $\mathbf{x}^0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ a pour coût :

$$D(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\,\left[(1/3)^2 \,+\, 2\,(1/3)^2 + (1/3)^2\right] \,+\, 0.7 \times 1/3 \approx 0.45$$

Le gain en % apporté par la solution optimale est : $(0.45 - 0.33)/0.45 \approx 38\%$.

5. A partir de la solution initiale $\mathbf{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$, appliquer deux itérations de l'algorithme Flow Deviation. On prendra le pas $\beta_1 = \frac{1}{4}$ pour la première itération, et le pas $\beta_2 = \frac{1}{3}$ pour la seconde itération. Indiquer le coût des solutions obtenues à chaque itération.
Réponse :
A partir de la solution initiale $\mathbf{x}^0 = (1/3, 1/3, 1/3)$, appliquons une première itération de l'algorithme Flow Deviation. On a :

$$\left(\frac{\partial D(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial D(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}, \frac{\partial D(\mathbf{x}^0)}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} + 0.7\right)$$

On a donc le point extrémal $\overline{\mathbf{x}}^0 = (1, 0, 0)$. Avec le pas $\beta_1 = \frac{1}{4}$, on obtient ainsi la nouvelle solution $\mathbf{x}^1$:

$$\mathbf{x}^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \,+\, \frac{1}{4} \times \left[(1,0,0) \,-\, \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right] \,=\, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Le coût de cette solution est :

$$D(\mathbf{x}^1) = \frac{1}{2}\,\left[(1/2)^2 \,+\, 2\,(1/4)^2 + (1/4)^2\right] \,+\, 0.7 \times 1/4 \approx 0.39$$

Appliquons une seconde itération de l'algorithme Flow Deviation. On a :

$$\left(\frac{\partial D(\mathbf{x}^1)}{\partial x_1}, \frac{\partial D(\mathbf{x}^1)}{\partial x_2}, \frac{\partial D(\mathbf{x}^1)}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} + 0.7\right)$$

On choisit[1] le point extrémal $\overline{\mathbf{x}}^1 = (1, 0, 0)$. Avec le pas $\beta_2 = 1/3$, on obtient la nouvelle solution $\mathbf{x}^2$:

$$\mathbf{x}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \,+\, \frac{1}{3} \times \left[(1,0,0) \,-\, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right] \,=\, \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

Le coût de cette solution est :

$$D(\mathbf{x}^2) = \frac{1}{2}\,\left[(2/3)^2 \,+\, 2\,(1/6)^2 + (1/6)^2\right] \,+\, 0.7 \times 1/6 \approx 0.38$$

[1] C'est un choix arbitraire. On aurait aussi bien pu choisir le second chemin, ou bien choisir de partager entre les deux !