Travaux Dirigés

Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

Rappel sur les multiplicateurs de Lagrange

Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction continue et différentiable. Considérons le problème suivant :

$$(MIN) \quad \begin{cases} \text{Minimiser :} & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{sous la contrainte :} & \\ g(x_1, \ldots, x_n) = 0 & \end{cases}$$

Classiquement, on sait que la solution optimale $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ du problème de minimisation sans contrainte vérifie $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Pour résoudre le problème (MIN), la technique des multiplicateurs de Lagrange consiste à minimiser sans contrainte la fonction (le Lagrangien),

$$F(x_1, \ldots, x_n, \beta) = f(x_1, \ldots, x_n) \; + \; \beta \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

La technique consiste alors à :

1. En écrivant $\nabla F(x_1, \ldots, x_n, \beta) = 0$, on obtient un système d'équations qui permet de calculer $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en fonction de β.
2. En résolvant alors $g(x_1^*, \ldots, x_n^*) = 0$, on obtient la valeur de β.
3. En remplaçant β par l'expression obtenue à l'étape 2 dans les formules de $x_1^*, \ldots, x_n^*$, on obtient la solution optimale du problème (MIN).

Dimensionnement Optimal

On suppose que le routage est donné (routage OSPF), i.e. qu'on connaît la charge F_{ij} de chaque lien (i, j). Il s'agit de déterminer la capacité C_{ij} en Mbps de chaque lien (i, j) du réseau qui minimise le coût linéaire

$$\sum_{ij} p_{ij}\, C_{ij},$$

où p_{ij} est un coût connu par unité de trafic, sous la contrainte que le délai moyen par paquet doit être inférieur à une constante donnée T

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{ij} \frac{F_{ij}}{C_{ij} - F_{ij}} \;\leq\; T, \tag{1}$$

où γ est le taux d'arrivée global des paquets dans le réseau.

Questions :

1. Que peut-on dire de la contrainte (1) à l'optimum ?
2. En utilisant la technique des multiplicateurs de Lagrange, et sous l'hypothèse que les capacités sont continues, déterminer les capacités optimales des liens du réseau.