Travaux Dirigés

Modèles & Algorithmes pour l'Ingénierie de Trafic

Rappel sur les multiplicateurs de Lagrange

Soit $f(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction continue et différentiable. Considérons le problème suivant :

$$(MIN) \quad \begin{cases} \text{Minimiser :} & f(x_1,\ldots,x_n) \\ \text{sous la contrainte :} & \\ g(x_1,\ldots,x_n)=0 & \end{cases}$$

Classiquement, on sait que la solution optimale $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ du problème de minimisation sans contrainte vérifie $\nabla f(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Pour résoudre le problème (MIN), la technique des multiplicateurs de Lagrange consiste à minimiser sans contrainte la fonction (le Lagrangien),

$$F(x_1,\ldots,x_n,\beta) = f(x_1,\ldots,x_n) \; + \; \beta\, g(x_1,\ldots,x_n)$$

La technique consiste alors à :

1. En écrivant $\nabla F(x_1,\ldots,x_n,\beta) = 0$, on obtient un système d'équations qui permet de calculer $x_1^*,\ldots,x_n^*$ en fonction de β.
2. En résolvant alors $g(x_1^*,\ldots,x_n^*) = 0$, on obtient la valeur de β.
3. En remplaçant β par l'expression obtenue à l'étape 2 dans les formules de $x_1^*,\ldots,x_n^*$, on obtient la solution optimale du problème (MIN).

Dimensionnement Optimal

On suppose que le routage est donné (routage OSPF), i.e. qu'on connaît la charge F_{ij} de chaque lien (i,j). Il s'agit de déterminer la capacité C_{ij} en Mbps de chaque lien (i,j) du réseau qui minimise le coût linéaire

$$\sum_{ij} p_{ij}\, C_{ij},$$

où p_{ij} est un coût connu par unité de trafic, sous la contrainte que le délai moyen par paquet doit être inférieur à une constante donnée T

$$\frac{1}{\gamma}\sum_{ij} \frac{F_{ij}}{C_{ij}-F_{ij}} \;\leq\; T, \tag{1}$$

où γ est le taux d'arrivée global des paquets dans le réseau.

Questions :

1. Que peut-on dire de la contrainte (1) à l'optimum ?
Réponse: On peut dire que la diminution du délai requiert d'augmenter la capacité et donc le coût du réseau. Par conséquent, la solution la moins coûteuse vérifiant la contrainte est celle pour laquelle l'égalité est vérifiée. Cela permet d'utiliser les multiplicateurs de Lagrange.

2. En utilisant la technique des multiplicateurs de Lagrange, et sous l'hypothèse que les capacités sont continues, déterminer les capacités optimales des liens du réseau.
Réponse:

$$L = \sum_{(i,j)} \left(p_{ij} C_{ij} + \frac{\lambda}{\gamma} \frac{F_{ij}}{C_{ij}-F_{ij}} \right)$$

Avec $\partial L / \partial C_{ij} = 0$, on a:

$$C_{ij} = F_{ij} + \sqrt{\frac{\lambda F_{ij}}{\gamma p_{ij}}}$$

En utilisant (1),

$$T = \frac{1}{\gamma}\sum_{ij} \frac{F_{ij}}{C_{ij}-F_{ij}} = \sum_{(i,j)} \sqrt{\frac{p_{ij} F_{ij}}{\lambda \gamma}}$$

d'où,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{T}\sum_{i,j} \sqrt{\frac{p_{ij} F_{ij}}{\gamma}}$$

On obtient ainsi,

$$C_{ij} = F_{ij} \; + \; \frac{1}{T} \sqrt{\frac{F_{ij}}{\gamma p_{ij}}} \sum_{uv} \sqrt{\frac{p_{uv} F_{uv}}{\gamma}}$$

Ce que l'on peut ré-écrire sous la forme,

$$C_{ij} = F_{ij} \left(1 + \frac{1}{\gamma T} \, \frac{\sum_{u,v} \sqrt{p_{uv} F_{uv}}}{\sqrt{p_{ij} F_{ij}}} \right)$$

d'où la formule du coût optimal.