Điều khiển ngược trạng thái tối ưu

Giảng viên hướng dẫn: PGS.TS Đỗ Đức Thuận
Thực hiện: Hoàng Thanh Lưu - Toán Tin K61

Ngày 8 tháng 7 năm 2020

Tìm một điều khiển chấp nhận được u: $[t_a, t_b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ với các ràng buộc

$$\begin{aligned} x(t_a) &= x_a \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \qquad \text{với } t \in [t_a, t_b] \\ x(t_b) &\in S \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

sao cho hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất.

$$J(u) = K(x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), u(t), t)dt$$

Vấn đề kiểm soát tối ưu tiền đề

Tìm một điều khiển được chấp nhận u: $[t_a, \tau] \to \Omega$, sao cho hệ thống động

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

được chuyển từ trạng thái ban đầu $x(t_a) = x_a$ đến trạng thái cố định cuối cùng $x(\tau) = x^o(\tau)$ tại thời điểm cuối cùng cố định τ và như vậy có hàm chi phí

$$J(u) = \int_{t_a}^{\tau} L(x(t), u(t), t)dt$$

là nhỏ nhất.

Vấn đề kiểm soát tối ưu thành công

Tìm một điều khiển được chấp nhận u: $[\tau, t_b] \to \Omega$, sao cho hệ thống động

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

được chuyển từ trạng thái ban đầu nhất định $x(\tau) = x^o(\tau)$ đến trạng thái cuối cùng $x(t_b) \in S$ tại thời gian cuối cùng cố định t_b và như vậy hàm chi phí

$$J(u) = K(x(t_b)) + \int_{\tau}^{t_b} L(x(t), u(t), t)dt$$

là nhỏ nhất.

Định lý

1) Giải pháp tối ưu cho bài toán điều khiển tối ưu thành công trùng khớp với phần thành công của giải pháp tối ưu của bài toán ban đầu.
2) Giải pháp tối ưu cho vấn đề kiểm soát tối ưu tiền đề trùng khớp với phần tiền đề của giải pháp tối ưu cho vấn đề ban đầu.

Chúng ta có thể giải quyết vấn đề điều khiển tối ưu thành công cho bất kỳ trạng thái ban đầu tùy ý $x \in \mathbb{R}^n$ tại thời điểm ban đầu τ, thay vì chỉ cho giá trị cố định $x^o(\tau)$, có thể lặp lại quá trình này trong một thời gian ban đầu tùy ý $t \in [t_a, t_b]$, thay vì chỉ cho giá trị được chọn τ ban đầu. Hàm chi phí tối ưu

$$T(x,t) = \min_{u(.)} \left\{ K(x(t_b)) + \int_t^{t_b} L(x(t), u(t), t) dt \middle| x(t) = x \right\}$$

a) Đặt $\hat{u} : [t_a, t_b] \to \Omega$ là một điều khiển được chấp nhận tạo ra quỹ đạo trạng thái $\hat{x} : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^n$ với $\hat{x}(t_a) = x_a$ và $\hat{x}(.) \in Z$.

b) Với tất cả $(x, t) \in Z$ và tất cả $\lambda \in \mathbb{R}^n$, để hàm Hamilton $H(x, \omega, \lambda, t) = L(x, \omega, t) + \lambda^T f(x, \omega, t)$ có một giá trị nhỏ nhất toàn cục với $\omega \in \Omega$ tại

$$\omega = \tilde{u}(x, \lambda, t) \in \Omega$$

c) Đặt $T(x, t) : Z \to \mathbb{R}$ là một hàm phân biệt liên tục thỏa mãn phương trình vi phân HJB

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + H\Big[x, \tilde{u}(x, \nabla_x T(x,t), t), \nabla_x T(x,t), t\Big] = 0$$

với điều kiện biên $T(x, t_b) = K(x)$ với tất cả $(x, t_b) \in Z$.

Định lý

Nếu các giả thuyết a, b, và c được thỏa mãn và nếu nếu quỹ đạo điều khiển $\hat{u}(.)$ và quỹ đạo trạng thái $\hat{x}(.)$ được tạo bởi $\hat{u}(.)$ có liên quan thông qua

$$\hat{u}(t) = \tilde{u}(\hat{x}(t), \nabla_x T(\hat{x}(t), t), t),$$

thì giải pháp $\hat{u}, \hat{x}$ là tối ưu đối với tất cả các quỹ đạo trạng thái x được tạo bởi một quỹ đạo kiểm soát được chấp nhận u, không rời X. Hơn nữa, $T(x, t)$ là hàm chi phí tối ưu.

Bổ đề

Nếu $Z = \mathbb{R}^n \times [t_a, t_b]$ thì giải pháp $\hat{u}, \hat{x}$ là tối ưu toàn cục.

1) Nếu hàm Hamilton H "bình thường"(thỏa mãn giả thuyết b), chúng ta có duy nhất H-tối thiểu điều khiển tối ưu:

$$u^o(t) = \tilde{u}(x^o(t), \lambda^o(t), t)$$

2) Hàm chi phí tối ưu $T(x, t)$ phải thỏa mãn điều kiện biên

$$T(x, t_b) = K(x)$$

vì tại thời điểm cuối cùng t_b, giá trị hàm giá chỉ bao gồm trạng thái cuối cùng $K(x)$.

3) Nguyên lý tối ưu đã chỉ ra rằng chi phí tối ưu $\lambda^o(t)$ tương ứng với độ dốc của hàm chi phí tối ưu,

$$\lambda^o(t) = \nabla_x T(x^o(t), t),$$

bất cứ đâu $T(x^o(t), t)$ liên tục khác biệt đối với x tại $x = x^o(t)$.

4) Cùng với một quỹ đạo được chấp nhận tùy ý $u(.)$, $x(.)$ tương ứng hàm chi phí tối ưu

$$J(x(t), t) = K(x(t_b)) + \int_t^{t_b} L(x(t), u(t), t)dt$$

tiến hóa theo phương trình vi phân sau:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial J}{\partial t} = \lambda^T f(x, u, t) + \frac{\partial J}{\partial t} = -L(x, u, t)$$

Vì thế,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\lambda^T f(x, u, t) - L(x, u, t) = -H(x, u, \lambda, t)$$

Tìm một điều khiển ngược trạng thái tối ưu u: $\mathbb{R}^n \times [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^m$, sao cho hệ động lực tuyến tính

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

chuyển từ trạng thái ban đầu $x(t_a) = x_a$ sang trạng thái cuối cùng tại thời gian cuối cố định t_b sao cho

$$\begin{aligned} J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_b)Fx(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} \Big(&\frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) \\ &+x^T(t)N(t)u(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t)\Big)dt \end{aligned}$$

đạt min, trong đó $R(t)$ là ma trận đối xứng xác định dương và F, Q và $\begin{bmatrix} Q(t) & N(t) \\ N^T(t) & R(t) \end{bmatrix}$ là đối xứng và nửa xác định dương.

Xây dựng hàm Hamilton

$$H = \frac{1}{2}x^T Qx + x^T Nu + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T Ax + \lambda^T Bu$$

có điều khiển H-tối thiểu sau đây:

$$u = -R^{-1}[B^T\lambda + N^T x] = -R^{-1}[B^T \nabla_x T + N^T x]$$

Kết hợp $T(x,t) = \frac{1}{2}x^T K(t)x$, thu được phương trình HJB

$$\frac{1}{2}x^T \Big(\dot{K}(t) + Q - NR^{-1}N^T - K(t)BR^{-1}B^T K(t) + \\ + K(t)[A - BR^{-1}N^T] + [A - BR^{-1}N^T]^T K(t)\Big)x = 0$$

$$T(x, t_b) = \frac{1}{2}x^T Fx$$

Do đó

$$u(t) = -R^{-1}(t)[B^T(t)K(t) + N^T(t)]x(t)$$

trong đó ma trận đối xứng và (nửa) xác định dương $K(t)$ thỏa mãn phương trình vi phân Riccati:

$$\begin{aligned}\dot{K}(t) = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)N^T(t)]^T K(t) - K(t)[A(t)\\ -B(t)R^{-1}(t)N^T(t)] - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\\ -Q(t) + N(t)R^{-1}(t)N^T(t)\end{aligned}$$

với điều kiện biên

$$K(t_b) = F$$

Tìm một điều khiển ngược trạng thái tối ưu u: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sao cho hệ

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t), u(t))$$

chuyển từ trạng thái ban đầu $x(0) = x_a$ sang trạng thái cân bằng $x = 0$ tại thời điểm cuối sao cho hàm chi phí

$$J(u) = \int_0^\infty L(x(t), u(t))dt = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2}x^T(t)Qx(t) + \\ + x^T(t)Nu(t) + \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t) + \ell(x(t), u(t))\Big)dt$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

1^{st} Approximation: LQ-Regulator

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax + Bu \\ J(u) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}x^TQx + x^TNu + \frac{1}{2}u^TRu\right)dt \\ u^{o(1)} &= Gx \text{ với } G = -R^{-1}(B^TK + N^T), \end{aligned}$$

trong đó K là nghiệm duy nhất duy nhất của phương trình Riccati

$$[A-BR^{-1}N^T]^TK+K[A-BR^{-1}N^T]-KBR^{-1}B^TK+Q-NR^{-1}N^T = 0$$

Kết quả của hệ được mô tả bởi phương trình

$$\dot{x}(t) = [A+BG]x(t) = A^o x(t)$$

và có giá trị hàm chi phí

$$T^{(2)}(x) = \frac{1}{2}x^TKx \text{ với } T_x^{[2]}(x) = x^TK.$$

k^{st} Approximation: $k \geq 4$

$$
\begin{aligned}
u^*(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} u^{o(i)} \\
u^o(x) &= u^*(x) + u^{o(k)}(x) \\
T_x(x) &= \sum_{j=2}^{k+1} T_x^{[j]}(x)
\end{aligned}
$$

Xác định $T_x^{[k+1]}(x)$ Với k chẵn:

$$
0 = T_x^{[k+1]} A^o x + \sum_{j=2}^{k-1} T_x^{[k+2-j]} B u^{o(j)} + \sum_{j=2}^{k} T_x^{[k+2-j]} f^{(j)}(x, u^*)
$$

$$
+ \sum_{j=2}^{\frac{k}{2}} u^{o(j)^T} R u^{o(k+1-j)} + \ell^{(k+1)}(x, u^*) \tag{1}
$$

Với k lẻ:

$$0 = T_x^{[k+1]} A^o x + \sum_{j=2}^{k-1} T_x^{[k+2-j]} B u^{o(j)} + \sum_{j=2}^{k} T_x^{[k+2-j]} f^{(j)}(x, u^*)$$
$$+ \sum_{j=2}^{\frac{k-1}{2}} u^{o(j)^T} R u^{o(k+1-j)} + \frac{1}{2} u^{o(\frac{k+1}{2})^T} R u^{o(\frac{k+1}{2})} + \ell^{(k+1)}(x, u^*) \tag{2}$$

Xác định $u^{o(k)}$

$$u^{o(k)^T} = -\Big[T_x^{[k+1]} B + \ell_u^{(k)}(x, u^*) + \sum_{j=1}^{k-1} T_x^{[k+1-j]} f_u^{(j)}(x, u^*) \Big] R^{-1} \tag{3}$$

Xem xét bài toán điều khiển ngược trạng thái tối ưu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + u(t) \\ J(u) &= \int_0^\infty \left(q\cosh(x(t)) - q + \frac{1}{2}u^2(t) \right) dt \end{aligned}$$

trong đó a và q là hằng số dương.
Sử dụng mở rộng chuỗi

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

3d trong đó $A = a, B = 1, f(x,u) \equiv 0, f_u(x,u) \equiv 0, R = 1, N = 0, Q = q, \ell(x,u) = q\left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right), \ell_u(x,u) \equiv 0$

Kết hợp các kết quả từ phương pháp Lukes, ta được

$$u^o(x) = u^{o(1)}(x) + u^{o(3)}(x) + u^{o(5)}(x) + u^{o(7)}(x) + \cdots \tag{4}$$

Và có thể được xấp xỉ bằng phương trình sau

$$\begin{aligned} u^o(x) \approx & -(a + \sqrt{a^2 + q})x - \frac{qx^3}{4!\sqrt{a^2 + q}} \\ & - \frac{qx^5}{6!\sqrt{a^2 + q}} - \frac{qx^7}{8!\sqrt{a^2 + q}} - \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Cảm ơn thầy cô và các bạn đã lắng nghe!!!