TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
——— o0o ———

ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI PONTRYAGIN

Giảng viên hướng dẫn: PSG.TS Đỗ Đức Thuận
Nhóm thực hiện: Nhóm 3

Hoàng Thanh Lưu	20162602	Toán Tin K61
Phạm Hoàng Anh	20160215	Toán Tin K61
Đào Thị Trang	20164142	Toán Tin K61
Nguyễn Thị Quỳnh Lê	20162343	Toán Tin K61
Nguyễn Hữu Đạt	20160933	Toán Tin K61
Phạm Văn Lộc	20162537	Toán Tin K61

Hà Nội - 12/2019

Mục lục

Chương 1

Nguyên lý cực đại

1.1 Nguyên lý cực đại

Xét hệ điều khiển:

$$\dot{x} = f(x,u), f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, f = (f_1, ..., f_n)^T, f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

- $x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$
  $x(t_1) = x_1$ cho trước thì bài toán là bài toán cố định
  $x(t_1) = x_1$ không cho trước thì bài toán là bài toán tự do
- $x \in \Delta$ là lớp điều khiển chấp nhận được
  $x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$
- Hàm max trên:
  $$C(x) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t))\mathrm{d}t \to \min$$

Xây dựng hàm Hamilton:

$$H(x,u,\varphi) = \varphi_0 f_0(x,u) + \varphi_1 f_1(x,u) + ... + \varphi_n f_n(x,u) \tag{1.2}$$

trong đó $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathbb{R}$.

Viết lại hàm Hamilton:

$$\begin{array}{rcl} H(x,u,\varphi) & = & \varphi_0 f_0(x,u) + \langle \varphi, f \rangle \\ & = & \varphi_0 f_0(x,u) + \varphi^T f \\ \text{trong đó } \varphi & = & (\varphi_1, ..., \varphi_n)^T \end{array} \tag{1.3}$$

Đặt $M(x,\varphi) = \max_{v\in\Omega} H(x,v,\varphi)$.

Định lý PMP:

Giả sử u^* là điều khiển tối ưu tương ứng với quỹ đạo trạng thái tối ưu x^*. Khi đó tồn tại hàm $\varphi^*(t) = \left(\varphi_1^*(t), ..., \varphi_n^*(t)\right)^T$ và hệ số φ_0^* thỏa mãn:

(a) $\dot{x}^* = f(x^*, u^*)$

(b) $\dot{\varphi}_i^* = \dfrac{-\partial H}{\partial x_i} = -\varphi_0^* \dfrac{\partial f_0}{\partial x_i} - \varphi_1^* \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} - ... - \varphi_n^* \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}$

(c) φ_0^* là không dương ($\varphi_0^* \leq 0$) và

$$H(x^*, u^*, \varphi^*) = \max_{v \in \Omega} H(x^*, v, \varphi^*) = M(x^*, \varphi^*)$$

Hơn nữa $M(x^*(t), \varphi^*(t))$ là hằng số với $0 \leq t \leq t^*$.

Chú ý: Nếu các hàm f_0, f khả vi liên tục thì không mất tổng quát ta có thể giả sử $\varphi_0^* = -1$. Đối với bài toán tự do ($x^*(t^*) = x_1$ không cho trước) thì ta có thêm điều kiện hoành $\varphi^*(t^*) = 0$.

Xét hệ điều khiển:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, |u| \leq 1 \end{cases}$$

Tìm điều khiển tối ưu $u = u^*$ sao cho hệ dịch chuyển từ $x(0) = x_0$ đến $x(t_1) = x_1$ và $t_1 \to \min$

$$C(u) = \int_0^1 1\mathrm{d}t \to min$$

Xây dựng hàm Halminton:

$$H(x, u, \varphi) = \varphi_0.1 + \varphi^T(Ax + Bu)$$

Từ điều kiện **(c)** của **PMP**:

$$\begin{aligned} H(x^*, u^*, \varphi^*) &= \max_{|v| \leq 1} H(x^*, v, \varphi^*) \\ &= \max_{|v| \leq 1} \varphi_0^* + \varphi^{*T}(Ax^* + Bv) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Bài toán tối ưu:**

$$\max_{|v| \leq 1} (\varphi^*)^T Bv$$

$\rightarrow$ Nghiệm tối ưu: $u^* = v_{\max} = Sgn(\varphi^{*T} B)$

Từ điều kiện **(b)** của **PMP**: $\dot{\varphi^*} = -\nabla_x H$, ta có:

$$\begin{aligned} H(x, u, \varphi) &= \varphi_0 + \varphi^T (Ax + Bu) \\ \nabla_x H &= \nabla_x (\varphi^T Ax) = (\varphi^{*T} A)^T = A^T \varphi^* \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi^*} = -A^T \varphi^* \\ \varphi_0 = \eta \end{cases} \Rightarrow \varphi^*(t) = e^{-A^T t} \eta$$

$$\Rightarrow \varphi^{*T}(t) = (e^{-A^T t} \eta)^T = \eta^T (e^{-A^T t})^T = \eta^T e^{-(A^T t)^T} = \eta^T e^{-At}$$

Do vậy điều khiển tối ưu thời gian có dạng

$$u^*(t) = Sgn(\varphi^{*T} B) = Sgn(\eta^T e^{-At} B)$$

Điều khiển tối ưu nồng độ PH:

Xét một dung dịch X trong khoảng thời gian $[0, T]$. Giả sử $x(t)$ là nồng độ PH của dung dịch tại thời điểm t. Để điều khiển nồng độ PH người ta sẽ cho một lượng chất khác vào dung dịch, kí hiệu là $u(t)$. Khi đó ta có phương trình:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x + \beta u; \ \ \alpha, \beta > 0 \\ x(0) = x_0, 0 \le t \le T \end{cases}$$

Vấn đề đặt ra: $\int_0^T x^2(t) \mathrm{d}t \rightarrow \min$ và $\int_0^T u^2(t) \mathrm{d}t \rightarrow \min$.

Tổng chi phí liên quan đến điều khiển u:

$$C(u) = \int_0^T (ax^2 + u^2) \mathrm{d}t \rightarrow \min$$

trong đó $a > 0$ là hằng số cho trước. Tìm $u = u^*$ sao cho $C(u) \rightarrow \min$.

Trong bài toán này, $f = \alpha x + \beta u$; $f_0 = ax^2 + u^2$.

Xây dựng hàm Haminlton:

$$H(x, u, \varphi) = -ax^2 - u^2 + \varphi(\alpha x + \beta u)$$

Đây là bài toán tự do nên ta có thêm điều kiện hoành $\varphi^*(T) = 0$.

Từ điều kiện **(c)** của **PMP**:

$$\begin{aligned} H(x^*, u^*, \varphi^*) &= \max_{v \in \Omega} H(x^*, v, \varphi^*) \\ &= \max_{v \in \Omega} -ax^{*2} - v^2 + \varphi^*(\alpha x^* + \beta v) \end{aligned}$$

$\rightarrow \max_{v\in\Omega} -v^2 + \varphi^*\beta v \Rightarrow u^* = v_{\max} = \dfrac{1}{2}\beta\varphi^*$

Từ điều kiện **(b)** của **PMP**:

$$\dot{\varphi}^* = \frac{-\partial H}{\partial x} = 2ax^* - \alpha\varphi^*$$

Từ điều kiện **(a)** của **PMP**:

$$\dot{x}^* = \alpha x^* + \beta u^* = \alpha x^* + \frac{\beta^2}{2}\varphi^*$$

Từ đó, ta được hệ phương trình;

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \alpha x^* + \dfrac{\beta^2}{2}\varphi^* \\ \dot{\varphi}^* = 2ax^* - \alpha\varphi^* \\ x^*(0) = x_0, \varphi^*(T) = 0 \end{cases}$$

Biến đổi hai phương trình đầu của hệ bằng cách chia mỗi phương trình cho x^*, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}^*}{x^*} = \alpha + \dfrac{\beta^2}{2}\dfrac{\varphi^*}{x^*} \\ \dfrac{\dot{\varphi}^*}{x^*} = 2a - \alpha\dfrac{\varphi^*}{x^*} \end{cases}$$

Đặt $d(t) = \dfrac{\varphi^*(t)}{x^*(t)}$ hệ trở thành:

$$\begin{cases} d^* = \dfrac{\beta^2}{2}d^2 - 2\alpha d + 2a \\ d(T) = 0 \end{cases}$$

Để giải hệ trên ta điến hành đổi biến: $\dfrac{\dot{\xi}}{\xi} = \dfrac{\beta^2}{2}d,\ d = \dfrac{2}{\beta^2}\left(\dfrac{\dot{\xi}}{\xi}\right)$

Hệ trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\xi\ddot{\xi} - (\xi)^2}{\xi^2}\right) &= -\frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{2\dot{\xi}}{\beta^2\xi}\right) + 2a + \frac{2}{\beta^2}\frac{\ddot{\xi}}{\xi} \\ &= -\frac{4\alpha}{\beta^2}\frac{\dot{\xi}}{\xi} + 2a \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Rút gọn phương trình trên, kết hợp với $\dot{\xi}(T) = 0$, ta được hệ mới:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2\alpha\dot{\xi} - a\beta^2\xi = 0 \\ \dot{\xi}(T) = 0 \end{cases}$$

Vì chỉ quan tâm đến tỉ lệ $\dfrac{\dot{\xi}}{\xi}$ nên có thể chọn $\xi(T) = 1$.

Do đó nghiệm của hệ trên là

$$\xi(t) = e^{-\alpha(t-T)}\Bigg[\cosh\sqrt{\alpha^2+\alpha\beta^2}(t-T) + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\alpha\beta^2}}\sinh\sqrt{\alpha^2+\alpha\beta^2}(t-T)\Bigg]$$

Với $0 \leq t \leq T$, ta có điều khiển tối ưu

$$\begin{aligned} u^*(t) = \frac{\beta^2}{2}\varphi^*(t) &= \frac{\beta}{2}\frac{\varphi^*(t)}{x^*(t)}x^*(t) = \frac{\beta}{2}d(t)x^*(t) \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)}\right)x^*(t) \end{aligned}$$

1.2 Bài toán biến phân

Bài toán: Tìm f sao cho

$$\begin{cases} \int_0^T f(y(x), y'(x))\mathrm{d}t \to \min \\ y(0) = y_0, y(T) = y_1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Chúng ta có thể giải quyết bài toán (1.5) bằng nguyên lý cực đại đã trình bày ở trên.

Bài toán biến phân

Đặt $y' = u$, khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y' = u \\ y(0) = y_0, y(T) = y_1 \end{cases}$$

Hàm mục tiêu:

$$C(u) = \int_0^T f(y, u)\mathrm{d}t \to min$$

Xây dựng hàm Halminton

$$H(y, u, \varphi) = -f(y, u) + \varphi u$$

Áp dụng Nguyên lý cực đại

(b) $\dot{\varphi}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y^*, u^*)$

(c) $H(y^*, u^*, \varphi^*) = \max_{v\in\mathbb{R}} H(y^*, v, \varphi^*) \to \max_{v\in\mathbb{R}} -f(y^*, v) + \varphi^* v$
$\to -\dfrac{\partial f}{\partial v}(y^*, u^*) + \varphi^* = 0 \Rightarrow \varphi^* = \dfrac{\partial f}{\partial v}(y^*, u^*) = \dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y^*, \dot{y}^*)$

Kết hợp **(b)**, **(c)**:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi^* = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, \dot{y}^*) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y^*, \dot{y}^*)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*, \dot{y}^*)$$

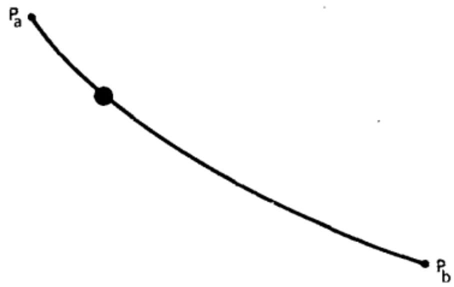
$\Rightarrow$ **Phương trình Euler - Lagrance cho bài toán biến phân:**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} f\right) = \frac{\partial}{\partial y} f}$$

Hệ quả: Nghiệm của bài toán biến phân thỏa mãn:

$$\boxed{f(y, \dot{y}) - \dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}) = \mathrm{const}}$$

Bài toán: Tìm quỹ đạo đường cong đi qua hai điểm P_a và P_b biết một điểm trượt từ P_a xuống P_b (bỏ qua ma sát) trong thời gian ngắn nhất.



Bài toán trở thành: Tìm đường cong y sao cho y' liên tục, $y(a) = P_a$, $y(b) = P_b$ và tích phân

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \to \min$$

Với y là chiều cao của viên bi tại thời điểm t. Từ định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = E = \text{const}$$

Ta có thể giả sử $E = 0$. Khi đó

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy} \Rightarrow \mathrm{d}s = \sqrt{2gy}\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

Trong bài toán này, $f(y, y') = \dfrac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}$.

Áp dụng hệ quả của phương trình Euler - Lagrance:

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - y'\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1 + (y')^2\right) - (y')^2}{\sqrt{y\left(1 + (y')^2\right)}} = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y\left(1 + (y')^2\right)}} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y\left(1 + (y')^2\right)} = \text{const} = A \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{A - y}{y}}$$

Đặt $y = A\sin^2\dfrac{\theta}{2} = A\dfrac{1 - \cos\theta}{2} \Rightarrow \mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}A\sin\theta\mathrm{d}\theta$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{A-y}{y}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}y\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}A\sin\theta\mathrm{d}\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{A}{2}(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \quad x = B + \frac{1}{2}A(\theta - \sin\theta)$$

Vậy, quỹ đạo tối ưu có dạng

$$\begin{cases} x = B + \frac{1}{2}A(\theta - \sin\theta) \\ y = \frac{1}{2}A(1-\cos\theta) \end{cases}$$

1.3 Một số ví dụ về nguyên lý cực đại

1.3.1 Bài toán 1: Xét mô hình kiểm soát hàng tồn kho

Giả sử ở nhà máy sản xuất số lượng lớn hàng hóa.
Gọi

- I(t) là lượng hàng tồn kho ở thời điểm t
- S(t) là tốc độ bán sản phẩm ở thời điểm t
- P(t) là tốc độ sản phẩm ở thời điểm t với P $\leq$ P(t) $\leq$ $\bar{P}$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} I(t)' = P(t)' - S(t) \\ S(t)' = -\lambda P(t) \\ I(0) = I_0, S(0) = S_0 \end{cases}$$

Trong đó: λ là một hằng số dương.

Gọi

- c là chi phí sản xuất tương ứng với mỗi đơn vị hàng hóa
- h là chi phí bảo quản với 1 đơn vị hàng tồn kho.

$\Rightarrow$ Lượng tiền bỏ ra để sản xuất và bảo quản hàng hóa trong thời gian từ 0 $\rightarrow$ T là nhỏ nhất

$$C(u) = \int_0^T [c.P(t) + h.I(t)]\, dt \rightarrow min$$

Xây dựng hàm Hamilton

$$\text{H= - cP - hI + } \varphi_1 \text{ (P - S) + } \varphi_2\text{(-}\lambda\text{P)}$$

Từ điều kiện **(b)** của PMP:

$$\begin{cases} \varphi_1' = -\dfrac{\partial H}{\partial I} = -(-h) = h \\ \varphi_2' = -\dfrac{\partial H}{\partial S} = -(-\varphi_1) = \varphi_1 \end{cases}$$

Điều kiện hoành: $\varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0$

Ta được hệ:

$$\begin{cases} \varphi_1' = h \\ \varphi_2' = \varphi_1 \\ \varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(t) = ht + C_1 \\ \varphi_1(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -hT$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = ht - hT \\ \varphi_2(t)' = \varphi_1(t) = ht - hT \\ \varphi_2(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_2(t) = \dfrac{ht^2}{2} - h.I.t + C_2 \\ \varphi_2(T) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = hT^2 - \dfrac{hT^2}{2} = \dfrac{hT^2}{2} \\ \varphi_2(t) = \dfrac{ht^2}{2} - (hT)t + \dfrac{hT^2}{2} \end{cases}$$

Điều kiện **(c)** của **PMP**:

$$\begin{aligned} & H(I, S, P, \varphi_1, \varphi_2) = max_{P \le V \le \bar{P}} H(I, S, V, \varphi_1, \varphi_2) \\ \Rightarrow \quad & max_{P \le V \le \bar{P}}(-cV - \lambda I + \varphi_1(V - S)) + \varphi_2(-\lambda V) \\ \Rightarrow \quad & max_{P \le V \le \bar{P}}(-cV + \varphi_1 V - \lambda\varphi_2 V) \\ \Rightarrow \quad & max_{P \le V \le \bar{P}}(\varphi_1 - c - \lambda\varphi_2).V \end{aligned}$$

Đặt $\xi(t) = \varphi_1(t) - c - \lambda\varphi_2(t)$

Khi đó:

$$P^* = V_{max} = \begin{cases} \bar{P} & \text{nếu } \xi(t) = 0 \\ P & \text{nếu } \xi(t) < 0 \\ \dfrac{\bar{P} + P}{2} & \text{nếu } \xi(t) = 0 \end{cases}$$

1.3.2 Bài toán 2: Giải bài toán 3 của chương 1

Ta giải với k =1

$$\begin{cases} x' = ux \\ x(0) = x_0 \end{cases} \rightarrow C(u) = \int_0^T (1 - u(t)x(t)dt) \rightarrow max$$

Xây dựng hàm Hamilton

$$H(x, u, \varphi) = (u-1)x + \varphi.u.x$$

Điều kiện **(b)** của **PMP**: $\varphi' = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -(u - 1 + \varphi u) = 1 - u(\varphi + 1), \varphi(T) = 0$
Điều kiện **(c)** của **PMP**: $H(x, u, \varphi) = max_{0 \leq v \leq 1}(x, v, \varphi)$

$$\rightarrow max\left((v-1).x + \varphi.v.x\right) \rightarrow max(vx + \varphi.v.x) \rightarrow max(vx(1+\varphi))$$

$\Rightarrow u^* = v_{max} = Sgn\left(vx(1+\varphi)\right)$
$\Rightarrow u^* = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 1 + \varphi < 0 \\ 0 & \text{nếu } 1 + \varphi > 0 \end{cases}$

Ta có: $\varphi(T) = 0, u^*(T) = 0 \rightarrow$ điều khiển được về 0
$t = T, \varphi(T) = 0, u^*(T) = 0 \rightarrow \varphi(t) = t - T, \quad t \leq T$

Khi đó: $1 + \varphi(t) = 0 \rightarrow 1 + t - T = 0 \rightarrow t = T - 1$
$\Rightarrow \varphi(t) = t - T, u^*(t) = 0, \quad t \in (T-1, T)$

Vì φ thỏa mãn phương trình, φ liên tục trên (0,T) nên trong khoảng thời gian cuối:
$\varphi' = -\varphi, \varphi(T-1) = -1 \Rightarrow \varphi(t) = e^{T-t-1}, \quad t \leq T-1$

Tuy nhiên hàm mũ có thể bằng -1 nhiều nhất 1 lần , nên ta phải có:

$$\begin{cases} \varphi(t) = -e^{T-t-1}, & 0 \leq t \leq T-1 \\ u^*(t) = +1 & 0 \leq t \leq T-1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{cases} x^{*'}(t) = u^*.x^* = x^* & 0 \leq t \leq T-1 \\ x^*(0) = x_0 & 0 \leq t \leq T-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^*(t) = x_0.e^t & 0 \leq t \leq T-1 \\ x^*(t) = x_0.e^T - 1 & T-1 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(u^*) = \int_0^T (1-u^*)x^* dt = \int_{T-1}^T (1-u^*).x^*(t)dt = x_0.e^T - 1$$

1.3.3 Bài toán 3: Một số vấn đề hàng tồn kho

Gọi

- d(t) là nhu cầu khách hàng ở thời điểm t
- u(t) là tốc độ sản phẩm ở thời điểm t
- x(t) là lượng hàng tồn kho.

Ta có:

$$\begin{cases} x' = u - d \\ x(0) = 0, 0 \le t \le T \end{cases} \tag{1.6}$$

Ta chọn: $u_d(t)$ là tốc độ sản xuất tại thời điểm t ứng với nhu cầu khách hàng, $x_d(t)$ là lượng hàng tồn kho.

Với c là chi phí sản xuất, h là chi phí bảo quản

$$\to \text{Hàm mục tiêu } C(u) = \int_0^T \left[C(u(t) - u_d(t))^2 + h.(x(t) - x_d(t)^2) \right] dt \tag{1.7}$$

→ Tối thiểu hóa chi phí → C(u) → min, Tìm u^*

Xây dựng hàm Hamilton

$$H(x, u, \psi) = -c(u - u_d)^2 - h(x - x_d)^2 + \psi(u - d)$$

Điều kiện **(b)** của **PMP**

$$\to \psi^* = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2h(x^* - x_d), \psi^*(T) = 0 \tag{1.8}$$

Ta có:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2c(u - u_d) + \psi = 0$$

$$\Rightarrow u^* = \frac{\psi^*}{2c} + u_d(t), 0 \le t \le T \tag{1.9}$$

$$\Rightarrow x^*(t)' = u^*(t) - d(t) = \frac{\psi^*}{2c} + u_d(t) - d(t), 0 \le t \le T, x^*(0) = x_0 \tag{1.10}$$

Đặt

$$\psi^*(t) = a(t) + b(t).x^*(t), t \ge 0 \tag{1.11}$$

a, b là các hàm $\Rightarrow {\psi^*}' = a' + b'.x^*(t) + b.x^*(t)'$

Từ (1.8) và (1.10) ta có: $2h(x^* - x_d) = a' + b'x^*(t) + b\left(\frac{\psi^*}{2c} + u_d(t) - d(t)\right)$

Kết hợp với (1.11) ta được:

$$\begin{multline} a(t)' + b(t)\left(u_d(t) - d(t)\right) + 2hx_d(t) + \frac{a(t)b(t)}{2c} \\ + \left(b(t)' + \frac{b(t)^2}{2c} - 2h\right) x^*(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.12) \end{multline}$$

(1.12) luôn đúng $\Leftrightarrow$

$$b(t)' + \frac{b(t)^2}{2c} - 2h = 0 \tag{1.13}$$

$$a(t)' + b(t)\left(u_d(t) - d(t)\right) + 2hx_d(t) + \frac{a(t)b(t)}{2c} = 0 \tag{1.14}$$

Từ $\psi^*(t) = 0$, không mất tính tổng quát, giả sử

$$b(T) = 0 \tag{1.15}$$

$$a(T) = 0 \tag{1.16}$$

Phương trình (1.13) là phương trình Ricati, thế b $= \frac{\xi(t)'}{\xi(t)}$, ta được:

$$b(t) = -2c.\sqrt{\frac{h}{c}}.\tanh\left(\sqrt{\frac{h}{c}}(T-t)\right), \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.17}$$

Thay (1.17) và (1.14) đồng thời để đơn giản ta chọn $\begin{cases} u_d(t) = d(t) \\ x_d(t) = c_d \end{cases}$

Khi đó: $a'(t) + \frac{a(t)b(t)}{2} + 2h.c_d = 0, \quad a(T) = 0$

$$\Rightarrow a(t) = 2c.\sqrt{\frac{h}{c}} + c_d.\tanh\left(\sqrt{\frac{h}{c}}(T-t)\right) \tag{1.18}$$

Sau khi tìm được a(t), b(t) thế vào (1.9) ta được:

$$u^* = \sqrt{\frac{h}{c}}\left(x_d - x\right).\tanh\left(\sqrt{\frac{h}{c}}(T-t)\right) + d(t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.19}$$

$$\Rightarrow x^* = c_d + \frac{x_0 - c_d}{\cosh\left(\sqrt{\frac{h}{c}}T\right)}.\cosh\left[\sqrt{\frac{h}{c}}(T-t)\right], \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.20}$$

1.3.4 Bài toán 4: Bài toán hạ cánh của tàu vũ trụ

Tìm điều khiển là lực đẩy của động cơ sao cho tàu hạ cánh an toàn

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ \dot{v} = -g + \dfrac{u}{m} \\ \dot{m} = -ku \end{cases} \rightarrow C(u) = \int_0^T u(\xi)d\xi \rightarrow min \tag{1.21}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} 0 \le u \le 1, h(0) = h_0, v(0) = v_0 \\ h(t_1) = 0, v(t_1) = 0, m(T) > 0 \\ m(0) = m_0 = M + F \end{cases}$$

Xây dựng hàm Hamilton

$$H(h, v, m, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -u + \varphi_1 v + \varphi_2 \left(-g + \frac{u}{m}\right) - k\varphi_3 u$$

Điều kiện (b) của PMP

$$\begin{cases} \varphi_1' = -\dfrac{\partial H}{\partial h} = 0 \\ \varphi_2' = -\dfrac{\partial H}{\partial v} = -\varphi_1 \\ \varphi_3' = -\dfrac{\partial H}{\partial m} = -\dfrac{\varphi_2 u}{m^2} \end{cases} \tag{1.22}$$

Điều kiện hoành: $\varphi_3(T) = 0$

Điều kiên (c) của PMP :

$$H(h, v, m, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = maxH(h, v, m, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

$$\rightarrow max_{0 \le v \le 1} \left[-v + \frac{\varphi_2 v}{m} - k\varphi_3 v\right] \rightarrow max_{0 \le v \le 1} \left[-1 + \frac{\varphi_2}{m} - k\varphi_3\right].v$$

Đặt

$$A = -1 + \frac{\varphi_2}{m} - k\varphi_3 \Rightarrow u^* = v_{max} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} A > 0 \\ 0 & \text{nếu} A < 0 \end{cases}$$

Giả sử lực đẩy tối đa $>$ lực hấp dẫn $1 > (M + F).g \rightarrow \dfrac{1}{M + F} > g$

Lực đẩy tối đa là $\alpha(0 \le u(t) \le \alpha) \rightarrow \dfrac{\alpha}{M + F} > g$

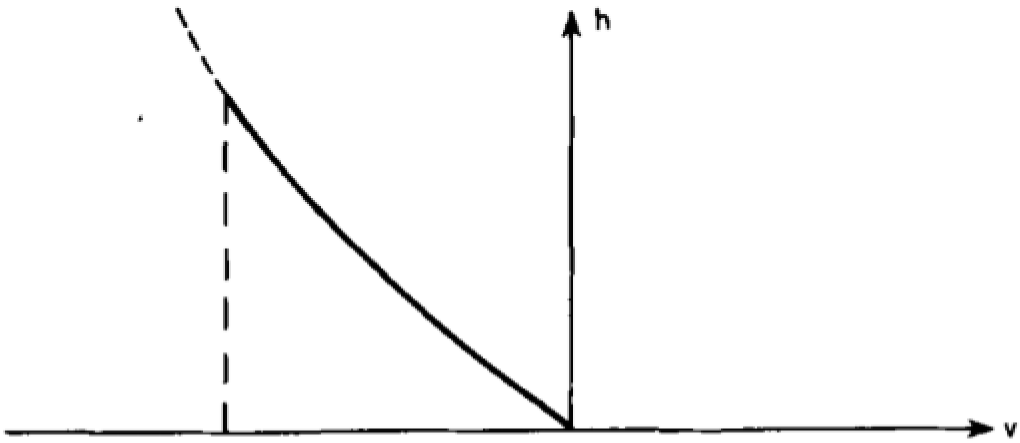
Đầu tiên rơi tự do ($u^* = 0$), sau đó lực đẩy tối đa ($u^* = 1$)

Giả sử $u^*(t) = 1$ so với phần cuối quỹ đạo $[\xi, T]$

Ta vẫn có: $h(T) = 0, v(T) = 0, m(\xi) = M + F$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(\xi) = -\dfrac{1}{2}g(T-\xi)^2 - \dfrac{M+F}{k^2}.\ln\left(\dfrac{M+F-k(T-\xi)}{M+F}\right) - \dfrac{T-\xi}{k} \\ v(\xi) = g(T-\xi) + \dfrac{1}{h}.ln\left(\dfrac{M+F-k(T-\xi)}{M+F}\right) \\ m(\xi) = M+F \end{cases} \tag{1.23}$$

Nếu ta vẽ $h(\xi)$ so với $v(\xi)$, ta được đường cong



Đường cong này là quỹ tích của tất cả các cặp(chiều cao, vận tốc) mà chúng ta có thể điều khiển về (0,0) với lực đẩy hoàn toàn +1

Vì tàu vũ trụ đốt nhiều nhiên liệu ở tốc độ k, tổng số nhiên liệu sẽ được đốt cháy trong thời gian: $\dfrac{F}{k}$(giây)
Khi đó: $0 \leq t - \xi \leq \dfrac{F}{k}$
Trong phần đầu tiên quỹ đạo $[0, \xi]$, tàu rơi tự do $(u^* = 0)$,ta có

$$\begin{cases} h(\xi) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 v(\xi) = -gt + v_0 \\ m(\xi) = M+F \end{cases} \tag{1.24}$$

$\Rightarrow h(t) = h_0 - \dfrac{1}{2g}\left[v(t)^2 - v_0^2\right], \quad 0 \leq t \leq \xi.$
Sử dụng cách trên: Ban đầu, giả sử rơi tự do cho đến khi quỹ đạo đạt được là đường cong như trên. Thời gian chuyển đổi là ξ.

Ta có: $\varphi_1(0) = \lambda_1, \varphi_2(0) = \lambda_2, \varphi_3(0) = \lambda_3$

Từ (1.22)

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_2(t) = \lambda_2 - \lambda_1 t & 0 \leq t \leq T \\ \varphi_3(t) = \lambda_3 & 0 \leq t \leq \xi \\ m(t) = k(\xi - t) + M + F & \xi \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = \lambda_3 + \int_{\xi}^{T} \frac{\lambda_2 - \lambda_1 t}{(k(\xi - t) + M + F)^2} \quad \xi \leq t \leq T$$

Đặt $r(t) = 1 - \dfrac{\varphi_2(t)}{m} + k.\varphi_3(t) \quad 0 \leq t \leq T$.
Khi t $= \xi$
$\Rightarrow r(\xi) = 1 - \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1 \xi}{M + F} + k.\lambda_3 = 0, \varphi_3 = 0$
$\Rightarrow r(t)' = -\dfrac{\lambda_1}{m(t)} \quad 0 \leq t \leq T$

$+$ Nếu $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow r(t)$đơn điệu $\Rightarrow u^* = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

- Nếu (h_0, v_0) nằm trên đường cong chuyển đổi thì điều khiển $u^* = 1, u^* = 0$ không đạt được hạ cánh an toàn. Giả sử chúng ta có một điều khiển khác, tại mốc τ và v(T) =0. Khi đó: $T = \dfrac{v(\tau)}{g} + \tau$

- Nếu (h_0, v_0) nằm dưới đường cong chuyển đổi $\rightarrow$ không thể xảy ra vì tàu vũ trụ tiến đến bề mặt mặt trăng với vận tốc $\neq 0$

Trong trường hợp $\lambda_1 \neq 0, r(t)$ là hằng số $\rightarrow$ điều khiển tối ưu $\rightarrow u^* = 0$ hoặc $u^* = 1$

$+$ Nếu $\lambda_1 = 0$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \varphi_1(t) \equiv 0, \text{nên } \varphi_2(t) \equiv \lambda_2, 0 \leq t \leq T \rightarrow r(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

tức là:

$$1 - \frac{\lambda_2}{m(t)} + k.\varphi_3(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$\rightarrow$ Các hàm $\left\{1, \dfrac{1}{m(t)}, \varphi_3(t)\right\}$ phụ thuộc tuyến tính $\rightarrow$ mâu thuẫn

Kết luận: Ta đã loại bỏ tất cả các trường hợp $\rightarrow$ giải pháp này là duy nhất.

Đơn giản hóa phương trình đường cong bằng cách gần đúng:

$$\ln\left(1-\frac{k.(T-\xi)}{M+F}\right)\approx-\frac{k.(T-\xi)}{M+F}-\frac{k^2(T-\xi)^2}{(M+F)^2}$$

và $h(\xi)\approx a(T-\xi)^2; v(\xi)\approx -2a(T-\xi)-b(T-\xi)^2$

Trong đó: $a=\frac{1}{2}\left(\frac{k-g(M+F)}{M+F}\right), b=\frac{k}{2(M+F)^2}$
$\rightarrow$ đường cong chuyển đổi được viết thành:

$$\varphi(h,v)=\frac{b}{a}.h+2a.\sqrt{\frac{h}{a}}+v=0$$

Vì vậy: nếu ta đo h,v một cách đồng thời, chúng sẽ rơi tự do khi $\varphi(h,v)>0$, chuyển sang lực đẩy tối đa khi $\varphi(h,v)=0$ lần đầu tiên.

Tài liệu tham khảo

[1] A. Bensoussan, E. Hurst, and B. Naslund *Management Applications of Modern Control Theory*, North-Holland Publ., New York, 1974

[2] W. Fleming and R. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag,Berlin and New York, 1975.

[3] R. Isaacs, *DifferentialGames.*,Wiley, New York, 1965.

[4] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gramkrelidze, and E. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes.*, Wiley (Interscience),New York, 1962.

[5] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations.*, McGraw-Hill, New York, 1969.