Simulación de Trayectoria de Cohete 1-DoF — Reporte Técnico

- **Autor:** Pérez Castro Luis Ángel
- **Equipo:** Propulsión UNAM
- **Fecha:** 2025-08-31

Resumen

Se presenta una simulación de trayectoria vertical con **un grado de libertad (1-DoF)** implementada en Python. El modelo integra **altitud**, **velocidad** y **masa** mediante **Euler hacia adelante** e incluye **empuje**, **arrastre aerodinámico** y **gravedad**. Con los parámetros especificados en el enunciado 1-DoF (masa seca 2.2 kg, propelente 0.625 kg, $C_D=0.75$, $D=0.086\ \mathrm{m}$, $\rho=1\ \mathrm{kg/m^3}$, $g=9.78\ \mathrm{m/s^2}$, $u_e=960\ \mathrm{m/s}$), los resultados principales fueron:

- **MECO:** $t=2.00\ \mathrm{s}$, $h=192.73\ \mathrm{m}$, $V=165.19\ \mathrm{m/s}$
- **Apogeo:** $t=12.55\ \mathrm{s}$, $h=872.34\ \mathrm{m}$
- **Atterrizaje:** $t=27.83\ \mathrm{s}$
- **Máximos:** $h_{\max}=872.34\ \mathrm{m}$, $V_{\max}=167.53\ \mathrm{m/s}$, $a_{\max}=101.35\ \mathrm{m/s^2}$

El comportamiento de las curvas concuerda con la física esperada: fuerte aceleración en la fase propulsada, **vuelo balístico** tras MECO con reducción de velocidad por arrastre, y descenso con aceleración de magnitud inferior a g por la acción del arrastre.

---

1. Introducción

El simulador 1-DoF es una herramienta de diseño para estimar el desempeño antes del vuelo, integrando conceptos de **Propulsión, Aeroestructuras y Aviónica**. La formulación sigue las notas unificadas del MIT para cálculo de trayectorias y los parámetros del enunciado de Propulsión UNAM.

Los objetivos fueron:

- Implementar un integrador robusto para las EDO
- Generar gráficas y métricas solicitadas (MECO, apogeo, máximos)
- Documentar la metodología y las conclusiones físicas.

---

2. Modelo físico-matemático

- **Variables de estado:** $h(t)$ (altitud), $V(t)$ (velocidad), $m(t)$ (masa).
- **Fuerzas:** gravedad, arrastre aerodinámico y empuje.

2.1 Ecuaciones (formulación MIT)

$$ \dot h = V $$

$$ \dot V = -,g;-;\frac{1}{2},\frac{\rho,V,|V|,C_D,A}{m};+;\frac{V}{|V|},\frac{\dot m_{\mathrm{fuel}},u_e}{m} $$

$$ \dot m = -,\dot m_{\mathrm{fuel}} $$

El uso de $V|V|$ y $V/|V|$ hace consistente el signo del arrastre y del empuje en ascenso y descenso dentro del modelo académico 1-DoF.

2.2 Definiciones de fuerzas y datos del motor

$$ D=\tfrac{1}{2}\rho V^2 C_D A,\qquad T=\dot m_{\mathrm{fuel}},u_e,\qquad W=mg,\qquad a=\dot V=\frac{F}{m}. $$

Con $u_e=960\ \mathrm{m/s}$ y la curva $\dot m_{\mathrm{fuel}}(t)$ del enunciado, el empuje es:

$$ T(t)=\dot m_{\mathrm{fuel}}(t),u_e. $$

Interpolación de la curva de gasto másico. Dadas muestras ${(t_k,\dot m_k)}_{k=0}^{N}$, se usa interpolación lineal a trozos:

$$ \dot m_{\mathrm{fuel}}(t)= \begin{cases} \dot m_k+\dfrac{\dot m_{k+1}-\dot m_k}{t_{k+1}-t_k},(t-t_k), & t_k\le t\le t_{k+1},\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} $$

En tiempo discreto t_i:

$$ T_i=\dot m_{\mathrm{fuel},i},u_e,\qquad m_{i+1}=m_i-\dot m_{\mathrm{fuel},i},\Delta t, $$

y se fuerza $\dot m_{\mathrm{fuel},i}=0$ cuando $m_i\le m_{\mathrm{dry}}$ (MECO por agotamiento de propelente).

---

3. Método numérico

Se emplea **Euler hacia adelante** con paso constante Δt.

3.1 Discretización

$$ h_{i+1}=h_i+V_i,\Delta t $$

$$ V_{i+1}=V_i+\left(-g-\frac{1}{2}\frac{\rho,V_i,|V_i|,C_D,A}{m_i}+\frac{V_i}{|V_i|}\frac{\dot m_{\mathrm{fuel},i},u_e}{m_i}\right)\Delta t $$

$$ m_{i+1}=m_i-\dot m_{\mathrm{fuel},i},\Delta t,\qquad t_{i+1}=t_i+\Delta t. $$

3.2 Detección de eventos (interpolación lineal)

- **MECO (fin de combustión).** Si $m_i>m_{\mathrm{dry}}$ y $m_{i+1}\le m_{\mathrm{dry}}$:

  $$ \theta_{\mathrm{MECO}}=\frac{m_i-m_{\mathrm{dry}}}{m_i-m_{i+1}},\qquad t_{\mathrm{MECO}}=t_i+\theta_{\mathrm{MECO}}\Delta t. $$

  $$ h_{\mathrm{MECO}}\approx h_i+\theta_{\mathrm{MECO}}(h_{i+1}-h_i),\qquad V_{\mathrm{MECO}}\approx V_i+\theta_{\mathrm{MECO}}(V_{i+1}-V_i). $$

- **Apogeo (primer cruce por cero de V tras el ascenso).** Si $V_i>0$ y $V_{i+1}\le 0$:

  $$ \theta_{\mathrm{apo}}=\frac{V_i}{V_i-V_{i+1}},\qquad t_{\mathrm{apo}}=t_i+\theta_{\mathrm{apo}}\Delta t, $$

  $$ h_{\mathrm{apo}}\approx h_i+\theta_{\mathrm{apo}}(h_{i+1}-h_i). $$

- **Aterrizaje (cruce de $h=0$).** Si $h_i>0$ y $h_{i+1}\le 0$:

  $$ \theta_{\mathrm{td}}=\frac{h_i}{h_i-h_{i+1}},\qquad t_{\mathrm{td}}=t_i+\theta_{\mathrm{td}}\Delta t. $$

3.3 Verificación por refinamiento de malla

Se repite la simulación con $\Delta t/2$ y se compara la discrepancia relativa

$$ E_{\mathrm{rel}}(y)= \frac{\max_t\lvert y_{\Delta t}(t)-y_{\Delta t/2}(t)\rvert} {\max_t\lvert y_{\Delta t/2}(t)\rvert+\varepsilon},\qquad \varepsilon\sim10^{-9}, $$

reduciendo Δt hasta lograr $E_{\mathrm{rel}}(y)<1\%$ en trazas clave.

---

4. Entradas y condiciones iniciales

- **Ambiente:** $g=9.78\ \mathrm{m/s^2}$, $\rho=1.0\ \mathrm{kg/m^3}$.
- **Vehículo:** $m_{\mathrm{dry}}=2.2\ \mathrm{kg}$, $m_{\mathrm{prop}}=0.625\ \mathrm{kg}$, $C_D=0.75$, diámetro $D=0.086\ \mathrm{m}$ $(8.6\ \mathrm{cm})$. Área frontal: $A=\pi(D/2)^2\approx 5.81\times 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$.
- **Motor:** $u_e=960\ \mathrm{m/s}$; $\dot m_{\mathrm{fuel}}(t)$ de la curva del enunciado.
- **Condiciones iniciales:** $h_0=0\ \mathrm{m}$, $V_0=0\ \mathrm{m/s}$, $m_0=m_{\mathrm{dry}}+m_{\mathrm{prop}}=2.825\ \mathrm{kg}$.
- **Parámetros numéricos:** $\Delta t=0.01\ \mathrm{s}$; $t_{\max}=60\ \mathrm{s}$ o hasta **aterrizaje**.

---

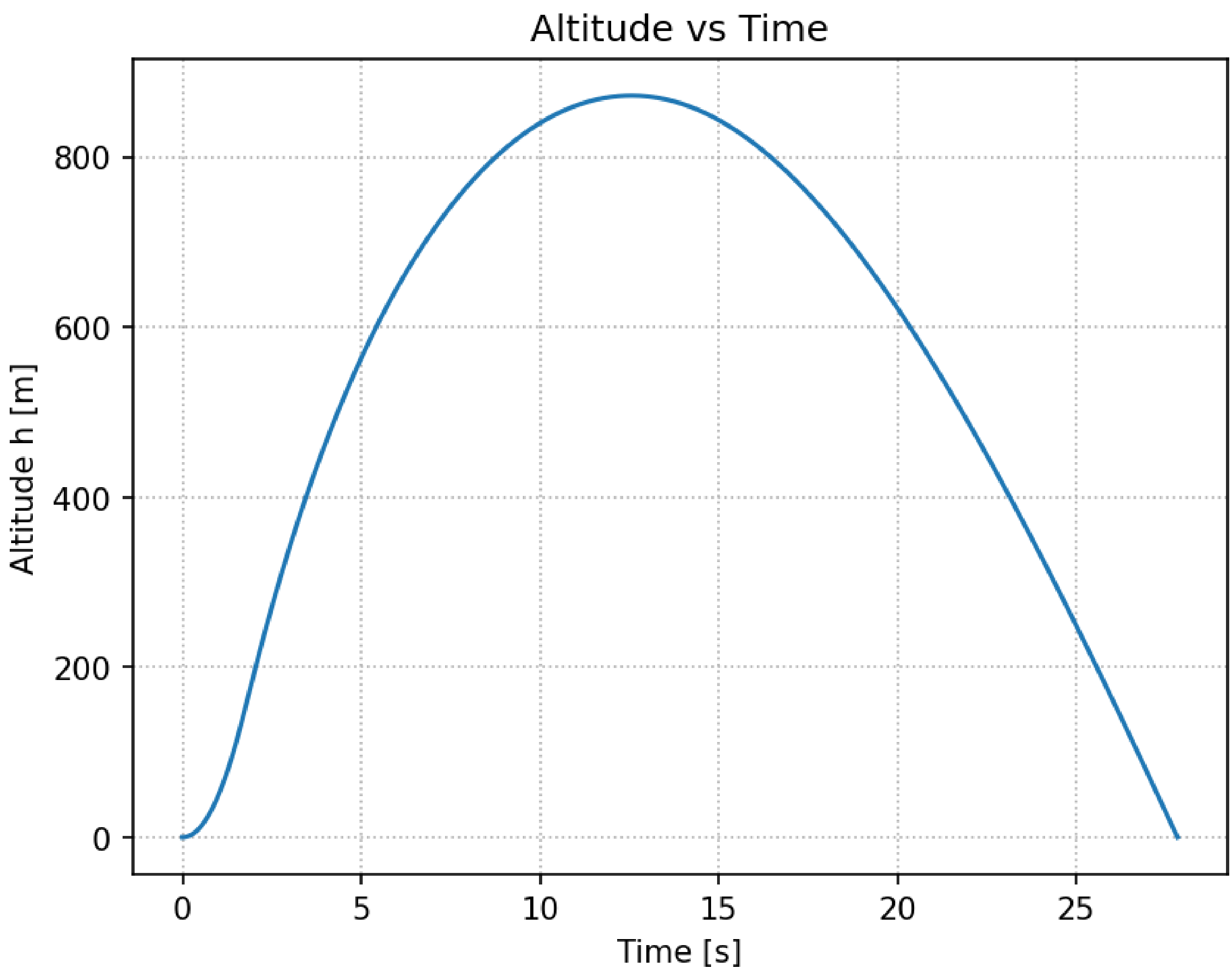
5. Resultados

5.1 Métricas principales

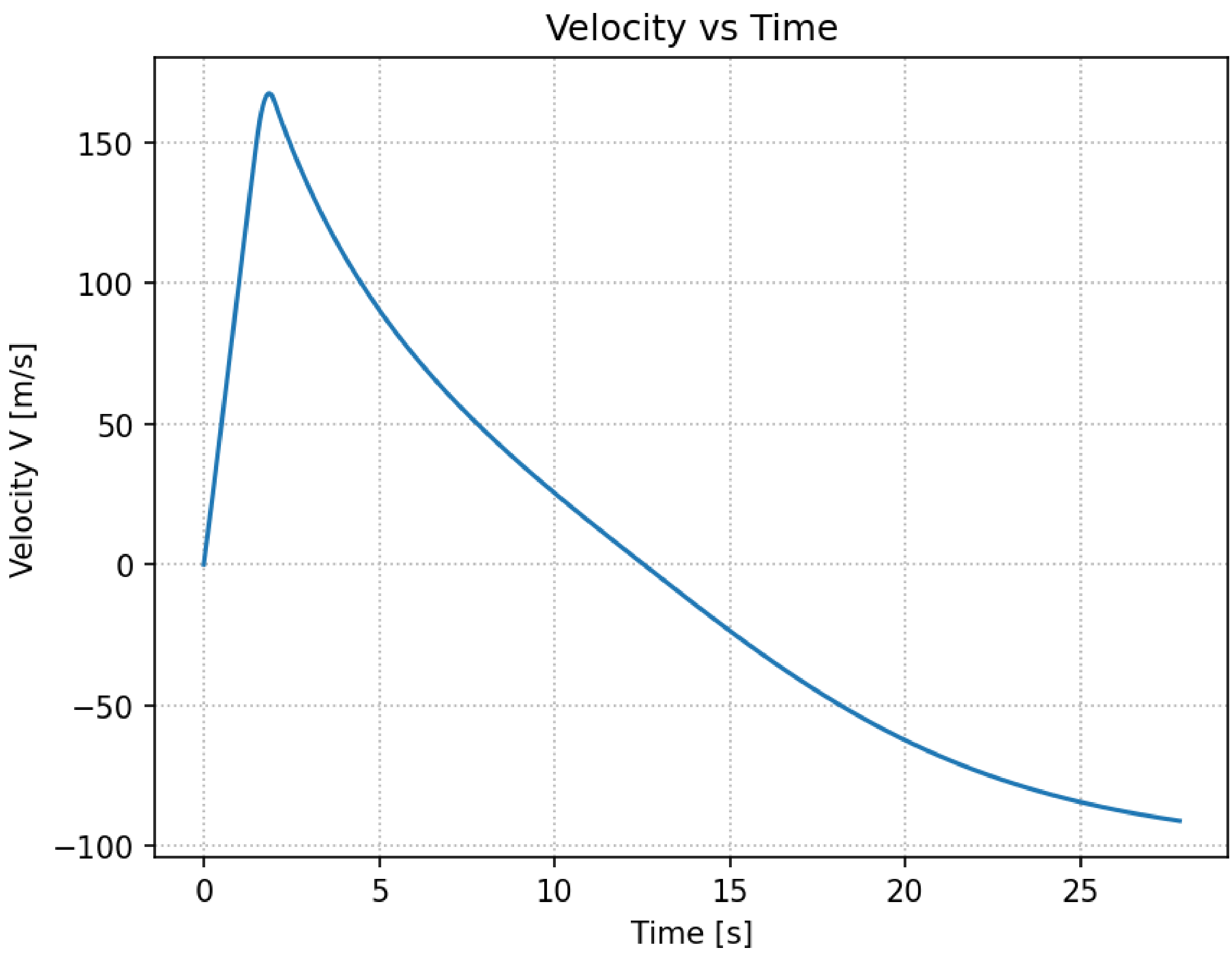
- **MECO:** $t=2.00\ \mathrm{s}$, $h=192.73\ \mathrm{m}$, $V=165.19\ \mathrm{m/s}$
- **Apogeo:** $t=12.55\ \mathrm{s}$, $h=872.34\ \mathrm{m}$
- **Aterrizaje:** $t=27.83\ \mathrm{s}$
- **Máximos:** $h_{\max}=872.34\ \mathrm{m}$, $V_{\max}=167.53\ \mathrm{m/s}$, $a_{\max}=101.35\ \mathrm{m/s^2}$
- **Tiempo total de vuelo:** $27.83\ \mathrm{s}$

5.2 Interpretación de las curvas

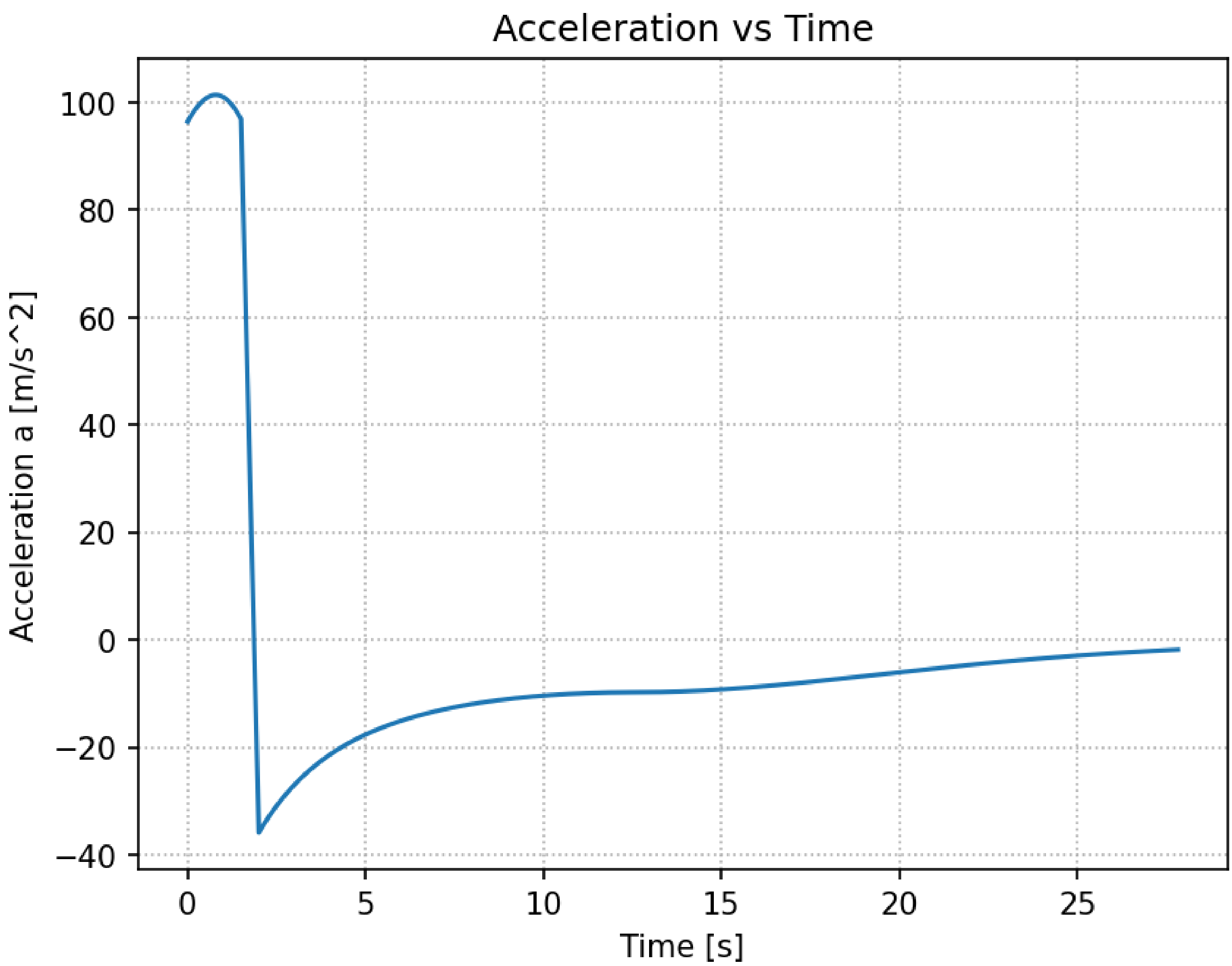
- **Altitud vs tiempo.** Ascenso pronunciado durante la combustión; tras MECO el cohete entra en **coast** balístico hasta apogeo; descenso posterior con pendiente creciente en magnitud por la aceleración gravitatoria parcialmente compensada por el arrastre.



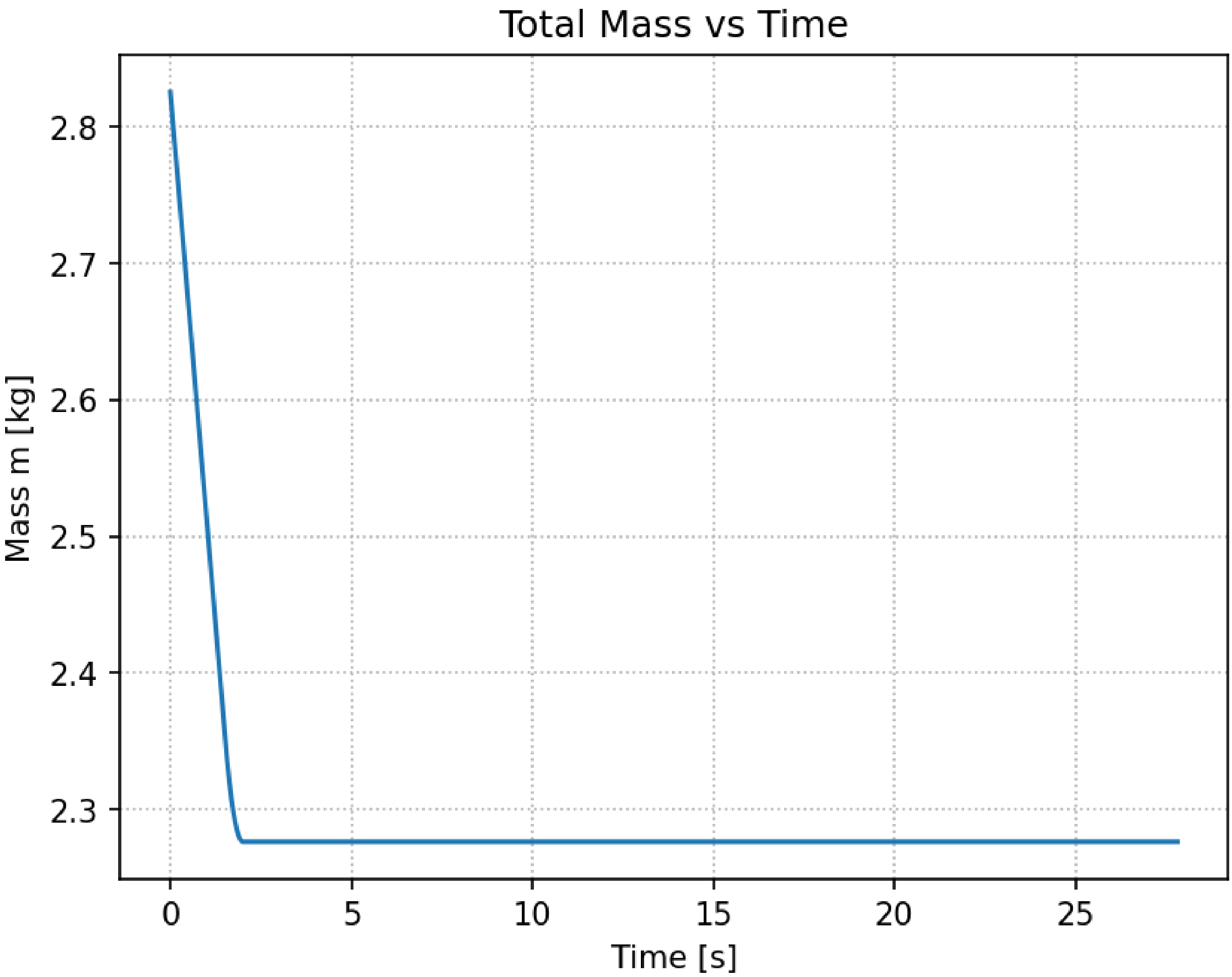
- **Velocidad vs tiempo.** Incremento rápido hasta un máximo cercano al fin de combustión; luego decrece por arrastre hasta cruzar $V=0$ en apogeo; se hace negativa en descenso.



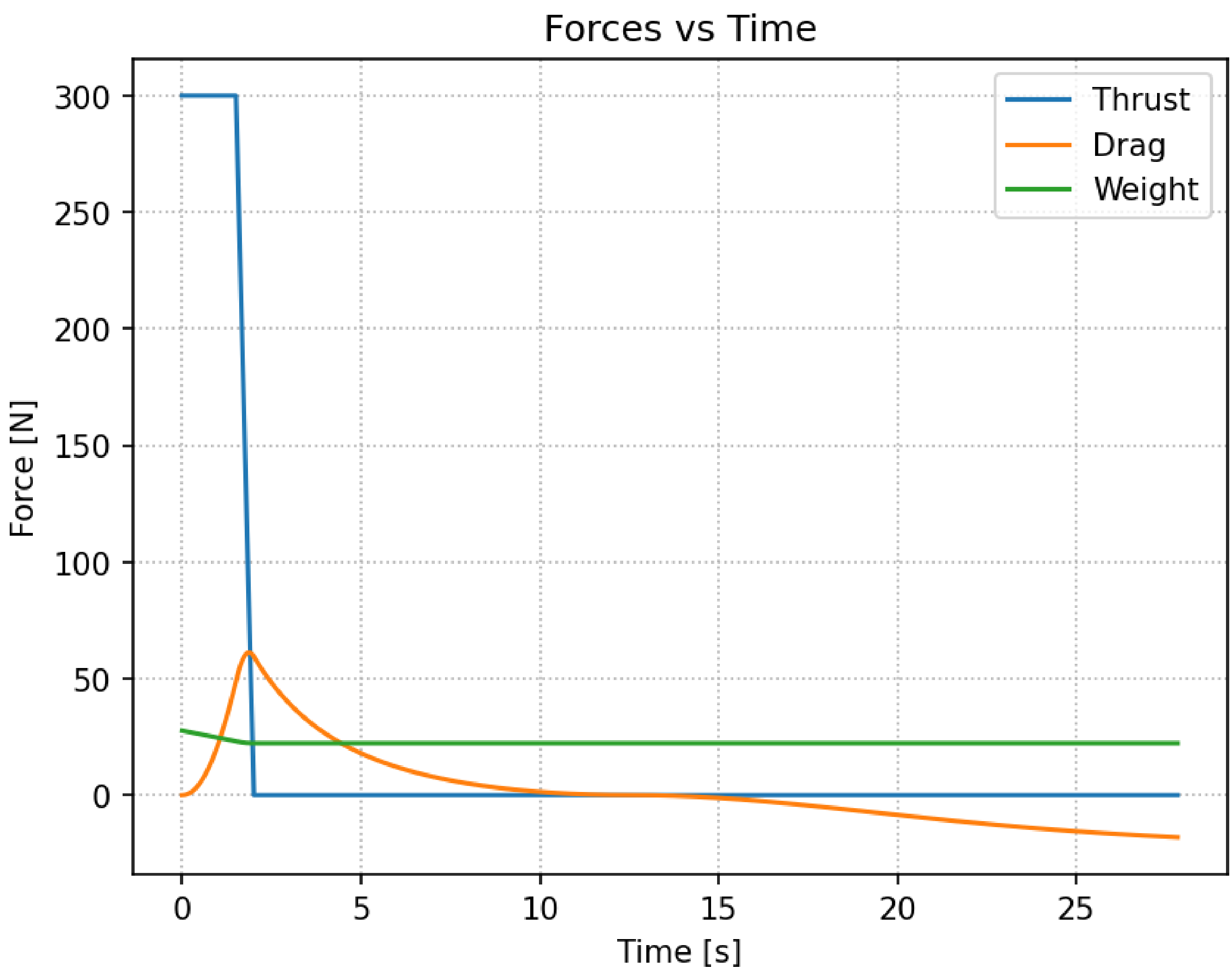
- **Aceleración vs tiempo.** Picos durante el encendido (máxima relación empuje/peso), caída brusca al terminar la combustión; durante el coast la aceleración tiende a $-g$ y en descenso su magnitud es menor que g por el arrastre hacia arriba.



- **Masa vs tiempo.** Disminuye linealmente durante la combustión y queda constante tras MECO.



- **Fuerzas.** El empuje sigue la curva $\dot m,u_e$; el arrastre crece con V^2 y domina a altas velocidades; el peso decrece levemente durante la combustión por la pérdida de masa.



---

6. Discusión

- **Intuición física.** El desempeño está gobernado por la relación empuje/peso durante la combustión y por el arrastre durante la fase balística.
- **Sensibilidades.** Disminuir C_D o el diámetro (por tanto A) incrementa el apogeo; aumentar u_e o el flujo másico $\dot m$ eleva $V_{\max}$ y la altura alcanzada.
- **Precisión numérica.** El esquema de Euler es consistente; el refinamiento de malla con $\Delta t/2$ produce cambios pequeños en $h(t)$ y $V(t)$, validando la resolución elegida.
- **Limitaciones.** Atmósfera de densidad constante y C_D constante.

---

7. Conclusiones

Con los parámetros del documento, el cohete alcanza aproximadamente **0.87 km** de apogeo. El perfil temporal de altitud, velocidad, aceleración y fuerzas es coherente con la teoría: empuje dominante al inicio, **coast** balístico tras MECO y descenso moderado por arrastre. El simulador 1-DoF implementado satisface los requisitos de la actividad.

Referencias

1. MIT Unified Engineering — *Trajectory Calculation (Lab 2 Lecture Notes)*.
2. Propulsión UNAM — *Actividad 1-DoF — Reclutamiento: entregables y parámetros*.
3. Documentación completa en mi repositorio: [1DoF]

Apéndice A. Nomenclatura

t tiempo; h altitud; V velocidad; F fuerza total; D arrastre; T empuje; g gravedad; m masa; C_D coeficiente de arrastre; A área de referencia; ρ densidad del aire; $\dot m_{\mathrm{fuel}}$ gasto másico de propelente; u_e velocidad de eyección; Δt paso de tiempo.