CHƯƠNG 4

ĐẾM CÁC PHẦN TỬ

Lý thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán học rời rạc chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối tượng. Chủ đề này đã được nghiên cứu từ thế kỷ 17, khi những câu hỏi về tổ hợp được nêu ra trong những công trình nghiên cứu các trò chơi may rủi. Liệt kê, đếm các đối tượng có những tính chất nào đó là một phần quan trọng của lý thuyết tổ hợp. Chúng ta cần phải đếm các đối tượng để giải nhiều bài toán khác nhau. Hơn nữa các kỹ thuật đếm được dùng rất nhiều khi tính xác suất của các biến cố.

Những quy tắc đếm cơ sở mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong Tiết 4.1 có thể giải được rất nhiều dạng bài toán khác nhau. Ví dụ, chúng ta có thể dùng các quy tắc này để tính tất cả các số điện thoại có thể có trên toàn nước Mỹ, số mật khẩu cho phép truy nhập hệ máy tính, liệt kê các thứ tự về đích khác nhau của các vận động viên có thể xảy ra trong cuộc chạy thi. Một công cụ tổ hợp quan trọng khác là nguyên lý lồng chim bồ câu (nguyên lý Dirichlet), sẽ được nghiên cứu trong Tiết 4.2. Nguyên lý đó nói rằng, khi ta bỏ các đối tượng vào nhiều hộp mà số các đối tượng nhiều hơn số hộp, thì ít nhất có một hộp chứa không ít hơn hai đối tượng. Ví dụ, ta có thể áp dụng nguyên lý này để chỉ ra rằng trong một lớp có nhiều hơn hay bằng 15 sinh viên thì ít nhất có ba người được sinh vào cùng một ngày trong tuần.

Chúng ta có thể diễn đạt nhiều bài toán dưới dạng sắp xếp, có kể tới thứ tự hoặc không, các đối tượng của một tập hợp. Những sắp xếp này được gọi là các hoán vị và các tổ hợp được sử dụng trong nhiều bài toán đếm. Ví dụ, trong một kỳ thi tuyển có 2000 sinh viên tham gia, người ta dự định mời 100 người đạt điểm cao nhất dự một bữa tiệc. Chúng ta có thể liệt kê tất cả các tập hợp 100 sinh viên có thể được mời dự tiệc hoặc cũng như vậy có thể liệt kê các cách trao 10 giải cho 10 người đạt điểm cao nhất.

Chúng ta có thể phân tích các trò chơi may rủi, như bài xì (poker) khi dùng các kỹ thuật đếm. Chúng ta cũng có thể sử dụng chúng để tính xác suất trúng sổ số, chẳng hạn như xác suất trúng giải của một người chơi nếu anh ta chọn đúng cả 6 số trong 48 số nguyên dương.

Một bài toán khác trong lý thuyết tổ hợp là việc tạo ra các cách sắp xếp theo một kiểu nào đó. Vấn đề này rất quan trọng trong các mô phỏng máy tính. Chúng ta cũng sẽ đưa ra những thuật toán tạo các cách sắp xếp theo nhiều kiểu khác nhau.

4.1 CƠ SỞ CỦA PHÉP ĐẾM

MỞ ĐẦU

Mật khẩu vào một hệ máy tính gồm sáu, bẩy hoặc tám ký tự. Mỗi ký tự có thể là một chữ số hay một chữ cái. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu như vậy? Trong tiết này chúng ta sẽ trả lời câu hỏi đó cũng như sẽ nghiên cứu các phương pháp giải một lớp rất rộng các bài toán về việc đếm các phần tử.

Bài toán đếm các phần tử xuất hiện khắp nơi trong toán học cũng như trong tin học. Ví dụ, chúng ta cần đếm số những cuộc thí nghiệm có kết quả tốt và toàn bộ những cuộc thí nghiệm có thể để xác định xác suất của các biến cố rời rạc. Chúng ta cần tính số các phép toán phải làm trong một thuật toán để nghiên cứu độ phức tạp của nó.

Trong tiết này chúng ta sẽ trình bày các phương pháp đếm cơ bản, chúng là nền tảng cho hầu như tất cả các phương pháp khác.

NHỮNG NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN

Chúng ta sẽ giới thiệu hai nguyên lý đếm cơ bản. Sau đó sẽ nói rõ việc sử dụng chúng như thế nào để giải các bài toán đếm khác nhau.

QUY TẮC CỘNG. Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách và nếu hai việc này không thể làm đồng thời, khi đó sẽ có $n_1 + n_2$ cách làm một trong hai việc đó.

Các ví dụ dưới đây minh họa việc sử dụng quy tắc cộng như thế nào.

Ví dụ 1. Giả sử cần chọn hoặc là một cán bộ của khoa toán hoặc là một sinh viên toán làm đại hiểu trong hội đồng của một trường đại học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu khoa toán có 37 cán bộ và 83 sinh viên?

Giải: Ta gọi việc thứ nhất là việc chọn một cán hộ của khoa toán. Nó có thể làm bằng 37 cách. Việc thứ hai, chọn một sinh viên toán, có thể làm bằng 83 cách. Theo quy tắc cộng có $37 + 83 = 120$ cách chọn vị đại diện này.

Chúng ta sẽ mở rộng quy tắc cộng cho trường hợp có nhiều hơn hai công việc. Giả sử các việc $T_1, T_2, \ldots, T_m$ có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2, \ldots, n_m$ cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong m việc đó là $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Quy tắc cộng mở rộng này thường được dùng trong các bài toán đếm, như trong các Ví dụ 2 và 3. Quy tắc cộng mở rộng có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc cộng cho hai tập hợp. (Bài tập 49 ở cuối tiết này).

■

Ví dụ 2. Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15 và 19 bài. Có hao nhiêu cách chọn hài thực hành?

Giải: Có 23 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ nhất, 15 cách từ danh sách thứ hai và 19 cách từ danh sách thứ ba. Vì vậy có $23 + 15 + 19 = 57$ cách chọn bài thực hành.

■

Ví dụ 3. Giá trị của biến k bằng bao nhiêu sau khi đoạn chương trình sau được thực hiện ?

$k = 0$

for $i_1 := 1$ **to** n_1

```
      k := k + 1
for i2 := 1 to n2
      k := k + 1
        .
        .
        .
for im := 1 to nm
      k := k + 1
```

Giải: Giá trị khởi tạo của k bằng không. Khối lệnh này gồm m vòng lặp khác nhau. Sau mỗi bước lặp của từng vòng lặp giá trị của k được tăng lên một đơn vị. Gọi T_i là việc thi hành vòng lặp thứ i. Có thể làm T_i bằng n_i cách vì vòng lặp thứ i có n_i bước lặp. Do các vòng lặp không thể thực hiện đồng thời nên theo quy tắc cộng, giá trị cuối cùng của k bằng số cách thực hiện một trong số các nhiệm vụ T_i $(i = 1, 2, ..., m)$, tức là $k = n_1 + n_2 + ... + n_m$.

■

Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần. Giả sử T_i là việc chọn một phần tử từ tập A_i với $i = 1, 2, ... m$. Có $|A_i|$ cách làm T_i và không có hai việc nào có thể được làm cùng một lúc. Số cách chọn một phần tử của hợp các tập hợp này, một mặt bằng số phần tử của nó mặt khác theo quy tắc cộng nó bằng $|A_1| + |A_2| + ... + |A_m|$. Cuối cùng chúng ta nhận được đẳng thức :

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_m|$$

Đẳng thức này đúng chỉ khi các tập hợp thành phần là rời nhau. Tình hình sẽ phức tạp hơn nhiều khi các tập hợp có phần tử chung. Vấn đề này lát nữa sẽ được bàn qua một chút và sẽ bàn kỹ hơn trong Chương 5.

QUY TẮC NHÂN. *Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra làm hai việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách sau khi việc thứ nhất đã được làm, khi đó sẽ có $n_1 n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.*

Các ví dụ dưới đây sẽ minh họa việc sử dụng quy tắc nhân như thế nào.

Ví dụ 4. Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?

Giải: Thủ tục ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên dương. Quy tắc nhân chỉ ra rằng có 26.100 = 2600 cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế. Như vậy nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế.

■

Ví dụ 5. Trong một trung tâm máy tính có 32 chiếc máy vi tính. Mỗi máy có 24 cổng. Hỏi có bao nhiêu cổng khác nhau trong trung tâm này?

Giải: Thủ tục chọn cổng gồm hai việc, việc chọn máy và sau đó chọn cổng của chiếc máy này. Vì có 32 cách chọn máy và 24 cách chọn cổng bất kể máy nào đã được chọn. Quy tắc nhân cho thấy có 32.24 = 768 cổng.

■

Người ta thường sử dụng quy tắc nhân mở rộng. Giả sử rằng một nhiệm vụ nào đó được thi hành bằng cách thực hiện các việc T_1, T_2, ..., T_m. Nếu việc T_i có thể lậm bằng n_i cách sau khi các việc T_1, T_2, ... T_{i-1} đã được làm, khi đó có n_1, n_2 ... n_m cách thi hành nhiệm vụ đã cho. Quy tắc nhân mở rộng này có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc nhân cho hai công việc. (Xem Bài tập 50 ở cuối chương).

Ví dụ 6. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 7?

Giải: Mỗi một trong 7 bit của xâu nhị phân có thể chọn bằng hai cách vì mỗi bit hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Bởi vậy, quy tắc tích cho thấy có tổng cộng $2^7 = 128$ xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng 7.

■

Ví dụ 7. Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng kí xe ô tô nếu mỗi biển chứa một dãy ba chữ cái tiếp sau là ba chữ số (không bỏ dãy chữ nào ngay cả khi nó có ý nghĩa không đẹp).

Giải: Có tất cả 26 cách chọn cho mỗi một trong ba chữ cái và 10 cách chọn cho mỗi chữ số. Vì thế theo quy tắc nhân, nhiều nhất có 26.26.26.10.10.10 = 17 576 000 biển đăng ký xe.

■

Ví dụ 8. *Đếm hàm.* Có thể tạo được bao nhiêu hàm số từ một tập A có m phần tử sang một tập B có n phần tử.

Giải. Theo định nghĩa, một hàm số xác định trên A có giá trị trên B là một phép tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử nào đó của B. Rõ ràng sau khi đã chọn được ảnh của $i - 1$ phần tử đầu, để chọn ảnh của phần tử thứ i của A ta có n cách. Vì vậy theo quy tắc nhân ta có $n.n...n = n^m$ hàm số xác định trên A nhận giá trị trên B.

■

Ví dụ 9. *Đếm số hàm đơn ánh.* Có bao nhiêu hàm đơn ánh xác định trên tập A có m phần tử và nhận giá trị trên tập B có n phấn tử?

Giải: Trước tiên chúng ta thấy rằng nếu $m > n$ thì với mọi hàm, ít nhất có hai phần tử của A có cùng một ảnh, điều đó có nghĩa là không có hàm đơn ánh từ A sang B. Bây giờ giả sử $m \leqslant n$, và gọi các phần tử của A là $a_1, a_2, ..., a_m$. rõ ràng có n cách chọn ảnh cho phần tử a_1. Vì hàm là đơn ánh nên ảnh của phần tử a_2 phải khác ảnh của a_1 nên chỉ có $n - 1$ cách chọn ảnh cho phần tử a_2 (không được dùng lại phần tử của B đã được chọn làm ảnh của a_1). Nói chung, để chọn ảnh của a_k ta có $n - k + 1$ cách. Theo quy tắc nhân có $n(n - 1)(n - 2) ... (n - m + 1)$ hàm đơn ánh từ tập A sang tập B.

■

Ví dụ 10. *Dự án đánh số điện thoại.* Dạng của số điện thoại ở bắc Mỹ được quy định như sau trong *dự án đánh số*. Số điện thoại gồm mười chữ số được tách ra thành một nhóm mã vùng gồm 3 chữ số, nhóm mã chi nhánh gồm 3 chữ số và nhóm mã máy 4 chữ số. Vì những nguyên nhân kỹ thuật nên có một số hạn chế đối với một số chữ số đó. Để xác định dạng cho phép, giả sử X biểu thị chữ số có thể nhận các giá trị từ 0 tới 9, N là chữ số có thể nhận giá trị từ 2 tới 9 và Y là các chữ số có thể nhận giá trị hoặc 0 hoặc 1. Hai dự án đánh số mà ta sẽ gọi là dự án cũ và dự án mới sẽ được thảo luận. (Dự án cũ được dùng từ những năm 1960, dự án mới cuối cùng sẽ được dùng ở Bắc Mỹ). Như sẽ chỉ ra dưới đây dự án mới cho phép sử dụng được nhiều số hơn..

Trong dự án cũ, dạng của mã vùng, mã chi nhánh và mã máy tương ứng là *NYX, NNX* và *XXXX*, còn theo dự án mới là *NXX, NXX*, và *XXXX*. Hỏi theo dự án cũ và theo dự án mới có bao nhiêu số điện thoại khác nhau ở Bắc Mỹ?

Giải: Theo quy tắc nhân ta có 8.2.10 = 160 mã vùng với dạng *NYX* và 8.10.10 = 800 mã vùng với dạng *NXX*. Tương tự có 8.8.10 = 640 mã chi nhánh đối với dạng *NNX* và 8.10.10 = 800 với dạng *NXX* và cuối cùng có 10.10.10.10 = 10000 mã máy với dạng *XXXX*. Áp dụng quy tắc nhân một lần nữa ta nhận được số các số điện thoại có thể theo dự án cũ ở Bắc Mỹ là

$$160.640.10000 = 1\ 024\ 000\ 000$$

còn theo dự án mới thì con số đó là :

$$800.800.10\ 000 = 6\ 400\ 000\ 000$$

■

Ví dụ 11. Giá trị của biến k bằng bao nhiêu sau khi chương trình sau được thực hiện ?

```
k = 0
for i1 : = to n1
    for i2 : = 1 to n2
        .
        .
        .
    for im : = 1 to nm
        k : = k + 1
```

Giải: Giá trị khởi tạo của k bằng không. Mỗi lần vòng lặp lồng nhau đi qua giá trị của k được tăng lên một đơn vị. Gọi T_i là việc thi hành vòng lặp thứ i. Khi đó số lần đi qua vòng lặp bằng số cách làm các việc T_1, T_2, ..., T_m. Số cách thực hiện việc T_j là n_j (j = 1, 2, ..., m), vì vòng lặp thứ j được duyệt với mỗi giá trị nguyên i_j nằm giữa 1 và n_j. Theo quy tắc nhân suy ra rằng vòng lặp kép được duyệt qua $n_1.n_2 \dots n_m$ lần. Vì vậy giá trị cuối cùng của k là $n_1n_2 \dots n_m$.

■

Ví dụ 12. *Đếm số tập con của một tập hữu hạn.* Dùng quy tắc nhân hãy chỉ ra rằng số tập con khác nhau của một tập S hữu hạn phần tử là $2^{|S|}$.

Giải: Cho S là một tập hữu hạn. Ta liệt kê các phần tử của S theo một thứ tự nào đó. Giữa các tập con của S và các dãy nhị phân có độ dài

$|S|$ có sự tương ứng một – một. Cụ thể là, một tập con của S được gán với dãy nhị phân có số 1 ở vị trí thứ i nếu phần tử thứ i trong danh sách thuộc tập con này, và là số 0 trong trường hợp ngược lại. Theo quy tắc nhân có $2^{|S|}$ dãy nhị phân độ dài $|S|$. Vì vậy $|P(S)| = 2^{|S|}$.

■

Quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau :

Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Đề–các của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Để liên hệ với quy tắc nhân hãy nhớ là việc chọn một phần tử của tích Đề–các $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của A_1 một phần tử của A_2, ..., một phần tử của A_m. Theo quy tắc nhân ta nhận được đẳng thức :

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = |A_1|.|A_2| ... |A_m|.$$

NHỮNG BÀI TOÁN ĐẾM PHỨC TẠP HƠN

Nhiều bài toán đếm phức tạp không thể giải được nếu chỉ sử dụng hoặc quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân. Nhưng chúng có thể giải được nếu sử dụng cả hai quy tắc này.

Ví dụ 13. Trong một phiên bản của ngôn ngữ lập trình *BASIC*, tên một biến là một xâu chứa một hoặc hai chữ số hoặc chữ cái, trong đó không phân biệt chữ in thường và chữ in hoa. Hơn thế nữa tên biến bắt đầu bằng một chữ cái và phải khác với năm xâu hai ký tự dành riêng. Có bao nhiêu tên biến khác nhau trong phiên bản này của *BASIC*.

Giải: Gọi V là số các tên khác nhau trong phiên bản này của *BASIC*, V_1 là số các tên gồm 1 ký tự, V_2 số các tên gồm 2 ký tự. Khi đó theo quy tắc cộng, ta có $V = V_1 + V_2$. Chú ý rằng $V_1 = 26$, vì tên biến một ký tự thì nhất thiết phải là chữ cái. Để tính V_2 ta thấy ký tự đầu là chữ cái (chọn một trong 26 chữ cái), ký tự thứ hai có thể là chữ cái hoặc chữ số (chọn một trong 26 chữ cái và 10 chữ số). Nhưng cần phải bớt đi 5 xâu dành riêng nên $V_2 = 26.36 - 5 = 931$. Vì vậy, có $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ tên biến khác nhau trong phiên bản này của *BASIC*.

■

Ví dụ 14. Mỗi người sử dụng hệ thống máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu tới tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ hoa hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

Giải: Gọi P là tổng số mật khẩu có thể và P_6, P_7, P_8 tương ứng là số mật khẩu dài 6, 7, 8 ký tự. Theo quy tắc cộng ta có: $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Bây giờ chúng ta sẽ tính P_6, P_7, P_8. Tính trực tiếp P_6 sẽ rất khó. Để tìm P_6 dễ hơn ta tính số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa hoặc chữ số, rồi bớt đi số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa và không chứa chữ số nào. Theo quy tắc nhân số các xâu dài 6 ký tự là 36^6 và số các xâu không chứa các chữ số là 26^6. Vì vậy,

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560.$$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920,$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 = 2\,612\,282\,842\,880.$$

Cuối cùng ta được : $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\,684\,483\,063\,360.$

■

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Cộng số cách làm mỗi việc sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là **nguyên lý bù trừ**. Ví dụ sau sẽ minh hoạ chúng ta có thể giải quyết bài toán đếm như thế nào khi sử dụng nguyên lý này.

Ví dụ 15. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00?

Giải: Việc thứ nhất, xây dựng các xâu nhị phân độ dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1, có thể được làm bằng $2^7 = 128$ cách, vì bit đầu chỉ có thể chọn bằng một cách, mỗi một trong bẩy bit sau có thể chọn bằng hai cách. Việc thứ hai, xây dựng các dãy nhị phân độ dài 8 bit kết thúc bằng hai bit 00, có thể làm bằng $2^6 = 64$ cách, vì mỗi một trong sáu bit đầu có thể làm bằng hai cách, hai bit cuối cùng có thể chọn chỉ bằng một cách. Có thể làm cả hai việc đồng thời, xây dựng các xâu nhị phân dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng hai bit 00, bằng $2^5 = 32$ cách, vì mỗi một trong 5 bit từ bit thứ hai tới bit thứ sáu có thể chọn bằng hai cách, bit đầu và hai bit cuối cùng có thể chọn chỉ bằng một cách. Cuối cùng, số xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00 bằng số cách làm hoặc công việc một hoặc công việc hai và bằng 128 + 64 − 32 = 160.

■

Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho A_1, A_2 là các tập hợp. Gọi T_1 là việc chọn một phần tử của A_1 còn T_2 là việc chọn một phần tử của A_2. Có $|A_1|$ cách làm việc T_1 và $|A_2|$ cách làm việc T_2. Số cách làm hoặc T_1 hoặc T_2 bằng tổng số cách làm việc T_1 và số cách làm việc T_2 trừ đi số cách làm cả hai việc. Vì có $|A_1 \cup A_2|$ cách làm hoặc T_1 hoặc T_2, và có $|A_1 \cap A_2|$ cách làm cả hai việc T_1 và T_2 nên chúng ta có :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Đó chính là công thức đưa ra trong Tiết 1.5 để xác định số các phần tử của hợp hai tập hợp. Nguyên lý bù trừ có thể tổng quát hóa để tìm số cách thực hiện nhiệm vụ gồm n việc khác nhau, hoặc là tìm số phần tử của hợp n tập hợp với n là số nguyên dương. Chúng ta sẽ còn nghiên cứu nguyên lý này và một số ứng dụng của nó trong Chương 5.

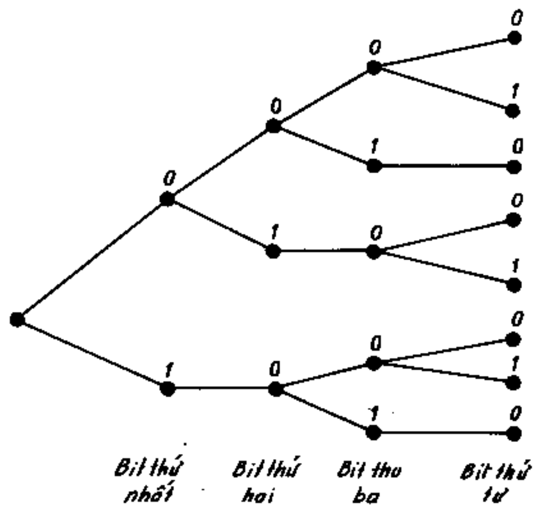
BIỂU ĐỒ CÂY

Bài toán đếm có thể được giải bằng biểu đồ cây. Một cây bao gồm một gốc và các cành đi ra từ gốc, và các cành phụ đi ra từ điểm cuối của cành khác. (Chúng ta sẽ nghiên cứu cây trong Chương 8). Để sử dụng cây trong bài toán đếm chúng ta dùng cành biểu diễn mỗi một lựa chọn, các kết cục bằng các lá, đó là điểm cuối của cành không có cành khác bắt đầu trên nó.

Ví dụ 16. Có bao nhiêu xâu nhị phân có chiều dài 4 bit không có hai số 1 liên tiếp?

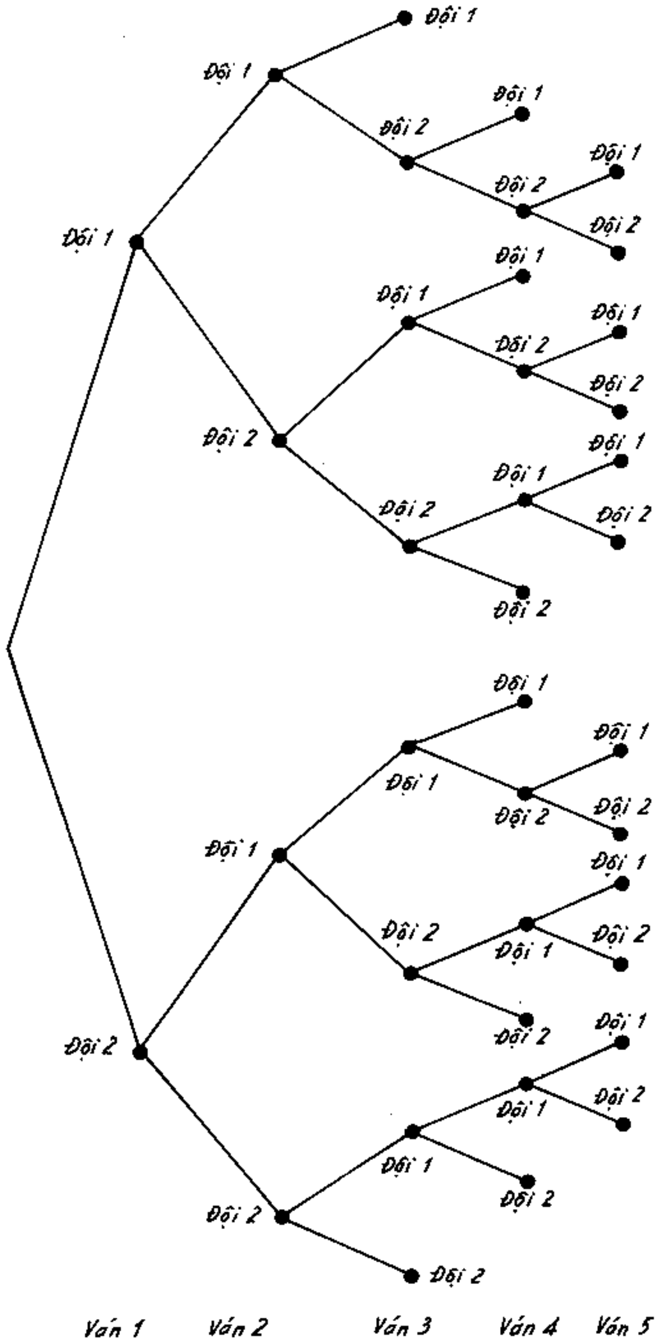
Giải: Hình 1 biểu thị tất cả các dãy nhị phân dài 4 bit không có liên tiếp hai số 1. Ta thấy có 8 dãy nhị phân như vậy.

■



Hình 1. Xâu nhị phân dài 4 bit không có hai số 1 liên tiếp

Ví dụ 17. Trận thi đấu thể thao giữa hai đội A và B gồm năm ván. Đội nào thắng ba ván trước sẽ kết thúc cuộc thi và giành chiến thắng. Cuộc thi đấu có thể diễn ra theo bao nhiêu cách khác nhau?



Hình 2. Ba ván tốt nhất trong năm ván.

Giải: Biểu đồ cây trên hình 2 thể hiện tất cả các cách mà cuộc thi có thể diễn ra, trong đó có ghi tên của đội thắng mỗi ván thi đấu. Chúng ta thấy cuộc thi có thể diễn ra theo 20 cách khác nhau.

■

BÀI TẬP

1. Trong một trường đại học có 18 sinh viên toán và 325 sinh viên tin học.

a) Có bao nhiêu cách chọn hai đại diện sao cho một là sinh viên toán còn người kia là sinh viên tin học?

h) Có bao nhiêu cách chọn một đại diện hoặc là sinh viên toán hoặc là sinh viên tin học?

2. Một tòa nhà có 27 tầng, mỗi tầng có 37 văn phòng. Hỏi có bao nhiêu văn phòng trong tòa nhà đó?

3. Một phiếu trắc nghiệm đa lựa chọn gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.

a) Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu mọi câu hỏi đều được trả lời?

h) Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu có thể bỏ trống.

4. Một mẫu áo sơ mi đặc biệt được thiết kế có kiểu cho nam và có kiểu cho nữ, có 12 màu và 3 cỡ cho mỗi giới. Có bao nhiêu loại khác nhau của mẫu áo này sẽ được sản xuất?

5. Từ New York tới Denver có 6 hãng hàng không và có 7 hãng bay từ Denver tới San Francisco. Có bao nhiêu khả năng khác nhau để bay từ New York đến San Francisco qua Denver?

6. Từ Boston tới Detroit có 4 đường cao tốc và có 6 đường từ Detroit tới Los Angeles. Có bao nhiêu đường cao tốc nối Boston với Los Angeles qua Detroit.

7. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau?

8. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau, trong đó không chữ cái nào được lặp lại?

9. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau, trong đó chữ cái đầu tiên là chữ A?

10. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 8?

11. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có bit đầu tiên và bit cuối cùng là 1?

12. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 6 hoặc ít hơn?

13. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài không vượt quá n và chứa toàn số 1, trong đó n là một số nguyên dương?

14. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài không vượt quá n, bắt đầu và kết thúc bằng số 1, trong đó n là một số nguyên dương?

15. Có bao nhiêu xâu các chữ thường và có độ dài bằng 4 hoặc ít hơn?

16. Có bao nhiêu xâu các chữ thường có độ dài bằng 4 và chứa chữ x?

17. Trong các số nguyên dương có đúng 3 chữ số, có bao nhiêu số

a) Chia hết cho 7?

b) Lẻ?

c) Có ba chữ số như nhau?

d) Không chia hết cho 4?

e) Chia hết cho 3 hoặc cho 4?

f) Không chia hết cho 3 hoặc cho 4?

g) Chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4?

h) Chia hết cho 3 và 4?

18. Trong các số nguyên dương có đúng 4 chữ số, có bao nhiêu số

a) Chia hết cho 9?

b) Chẵn?

c) Có các chữ số khác nhau?

d) Không chia hết cho 3?

e) Chia hết cho 5 hoặc cho 7?

f) Không chia hết cho 5 hoặc cho 7?

g) Chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 7?

h) Chia hết cho cả 5 và 7?

19. Có bao nhiêu xâu gồm 3 chữ số thập phân

a) Không chứa cùng một chữ số ba lần?

b) Bắt đầu bằng chữ số lẻ?

c) Có đúng hai chữ số 4?

20. Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân

a) Không chứa cùng một chữ số hai lần?

b) Kết thúc bằng chữ số chẵn?

c) Có đúng ba chữ số 9?

21. Một ủy ban được thành lập bao gồm hoặc là thống đốc bang hoặc là một trong hai nghị sĩ của mỗi một trong 50 bang. Có bao nhiêu cách để thành lập ủy ban này?

22. Có bao nhiêu biển đăng ký xe nếu dùng ba chữ số theo sau là ba chữ cái hoặc ba chữ cái theo sau là ba chữ số?

23. Có bao nhiêu biển đăng ký xe nếu mỗi biển số gồm hai chữ số tiếp sau là bốn chữ cái hoặc hai chữ cái theo sau là bốn chữ số?

24. Có bao nhiêu biển đăng ký xe nếu mỗi biển số gồm hoặc là ba chữ cái tiếp sau là ba chữ số hoặc bốn chữ cái theo sau là hai chữ số?

25. Có bao nhiêu biển đăng ký xe mỗi biển số gồm hai hoặc ba chữ cái tiếp sau bởi hai hoặc ba chữ số?

26. Có bao nhiêu hàm số khác nhau từ tập có 10 phần tử đến tập có số phần tử bằng :

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 ?

27. Có bao nhiêu hàm số đơn ánh từ tập có 5 phần tử đến tập có số phần tử bằng :

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 ?

28. Có bao nhiêu hàm số từ tập $\{1, 2,...,n\}$ trong đó n là một số nguyên dương, tới tập $\{0, 1\}$?

29. Có bao nhiêu hàm số từ tập $\{1, 2, ..., n\}$ trong đó n là một số nguyên dương, tới tập $\{0, 1\}$ và

a) đó là các hàm đơn ánh?

b) gán 0 cho cả hai số 1 và n?

c) gán 1 cho đúng một trong các số nguyên dương nhỏ hơn n?

30. Có bao nhiêu hàm bộ phận (xem các Bài tập trong Tiết 1.6) từ tập có 5 phần tử đến tập có

a) 1 b) 2 c) 5 d) 9 phần tử?

31. Có bao nhiêu hàm bộ phận (xem các Bài tập trong Tiết 1.6) từ tập có m phần tử đến tập có n phần tử với m, n là các số nguyên dương?

32. Có bao nhiêu tập con có hơn 1 phần tử của tập có 100 phần tử?

33. **Xâu thuận nghịch đọc** là một xâu mà khi viết theo thứ tự ngược lại cũng bằng chính nó. Hãy tính số xâu nhị phân có độ dài bằng n là thuận nghịch đọc ?

34. Trong một đám cưới có 10 người kể cả cô dâu và chú rể. Để chụp ảnh người ta xếp 6 người thành một hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng để chụp nếu :

a) mọi kiểu ảnh đều có cô dâu?

b) mọi kiểu ảnh đều có cô dâu và chú rể?

c) chỉ có hoặc cô dâu hoặc chú rể xuất hiện trong mọi kiểu ảnh?

35. Cô dâu và chú rể mời bốn người bạn đứng thành một hàng để chụp ảnh cùng với mình. Có bao nhiêu cách xếp hàng nếu :

a) cô dâu đứng cạnh chú rể?

b) cô dâu không đứng cạnh chú rể?

c) cô dâu đứng ở phía bên trái của chú rể?

36. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 7 hoặc có hai bit đầu tiên là các số 0, hoặc ba bit cuối cùng là các số 1?

37. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 hoặc bắt đầu bằng ba số 0 hoặc kết thúc bằng hai số 0?

38*. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có năm số 0 liền nhau, hoặc năm số 1 liền nhau?

39*. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng tám và có ba số 0 liền nhau, hoặc bốn số 1 liền nhau?

40. Mỗi sinh viên lớp toán rời rạc hoặc là giỏi toán hoặc là giỏi tin học hoặc giỏi cả hai môn này. Trong lớp có bao nhiêu sinh viên nếu 38 người giỏi tin (kể cả người giỏi cả hai môn), 23 người giỏi toán (kể cả người giỏi cả hai môn) và 7 người giỏi cả hai môn?

41. Có bao nhiêu số nguyên không lớn hơn 100 chia hết cho 4 hoặc cho 6?

42. Tên của mọi biến trong ngôn ngữ lập trình *C* là một xâu gồm không quá tám ký tự là các chữ thường, chữ hoa, chữ số và dấu gạch dưới. Hơn thế nữa, ký tự đầu tiên của xâu không được là chữ số. Trong *C* có thể đặt tên được cho bao nhiêu biến khác nhau?

43. Giả sử rằng trong tương lai mọi máy điện thoại trên thế giới được gán một con số (số điện thoại) gồm mã quốc gia dài từ 1 tới 3 chữ số, tức là nó có dạng *X*, *XX* hoặc *XXX* tiếp theo là số điện thoại 10 chữ số dạng *NXX-NXX-XXXX* (như đã mô tả trong Ví dụ 10). Theo cách đánh số này, sẽ có bao nhiêu số điện thoại khác nhau có thể dùng được trên toàn cầu.

44. Dùng biểu đồ cây tìm số xâu nhị phân độ dài bốn không có ba số 0 liền nhau.

45. Có bao nhiêu cách xếp các chữ *a, b, c* và *d* sao cho chữ *b* không đi liền sau chữ *a*?

46. Dùng biểu đồ cây hãy tìm số cách có thể sẽ xảy ra trong một cuộc thi đấu thể thao gồm bảy ván giữa hai đội. Đội thắng là đội đầu tiên thắng bốn trong bảy ván thi đấu.

47. Dùng biểu đồ cây hãy xác định số các tập con của tập {3, 7, 9, 11, 24} sao cho tổng giá trị các phần tử của tập con nhỏ hơn 28?

48*. Dùng quy tắc nhân chỉ ra rằng có 2^{2^n} bảng chân lý khác nhau đối với các mệnh đề n biến.

49. Dùng quy nạp toán học chứng minh quy tắc cộng cho m công việc từ quy tắc cộng cho hai việc.

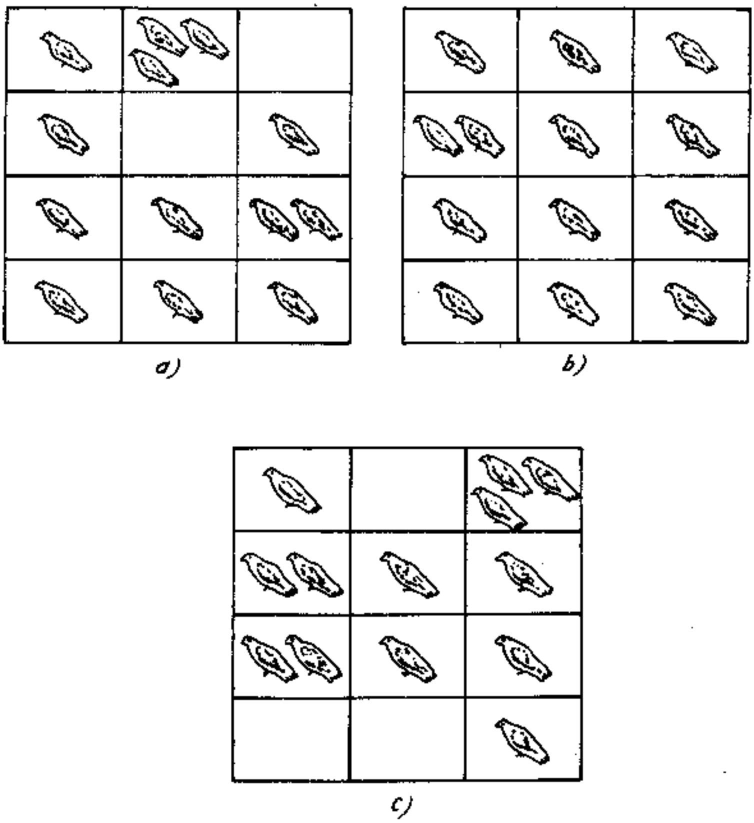
50. Dùng quy nạp toán học chứng minh quy tắc nhân cho m công việc từ quy tắc nhân cho hai việc.

51. Một đa giác lồi n cạnh có bao nhiêu đường chéo? (Một đa giác được gọi là lồi nếu mọi đoạn thẳng nối hai điểm bên trong hoặc trên biên nằm hoàn toàn trong nó).

4.2. NGUYÊN LÝ LỒNG CHIM BỒ CÂU

MỞ ĐẦU

Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì ít nhất trong một ngăn có nhiều hơn một con chim (xem hình 1). Nguyên lý này dĩ nhiên là có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim.



Hình 1

ĐỊNH LÝ 1. *Nguyên lý lồng chim bồ câu.*

Nếu có $k + 1$ hoặc nhiều hơn đồ vật được đặt vào trong k hộp, thì có ít nhất một hộp chứa hai hoặc nhiều hơn hai đồ vật.

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là bằng k. Điều này trái với giả thiết là có ít nhất $k + 1$ vật.

Nguyên lý lồng chim bồ câu cũng thường được gọi là *Nguyên lý Dirichlet* mang tên nhà toán học người Đức ở thế kỷ thứ 19. Ông thường xuyên sử dụng nguyên lý này trong công việc của mình.

■

Ví dụ 1. Trong bất kỳ một nhóm 367 người thế nào cũng có ít nhất hai người trùng ngày sinh vì một năm có nhiều nhất 366 ngày.

■

Ví dụ 2. Trong bất kỳ một nhóm 27 từ tiếng Anh nào, ít nhất cũng có hai từ bắt đầu bằng cùng một chữ cái, vì chỉ có 26 chữ cái tiếng Anh.

■

Ví dụ 3. Bài thi các môn học trong trường đại học được chấm theo thang điểm là các số nguyên từ 0 tới 100. Một lớp học cần phải có bao nhiêu sinh viên để đảm bảo trong mọi môn thi đều có ít nhất hai sinh viên nhận cùng điểm?

Giải: Thang điểm có 101 bậc. Theo nguyên lý Dirichlet lớp học cần phải có ít nhất 102 sinh viên để luôn có 2 sinh viên cùng điểm thi.

■

NGUYÊN LÝ DIRICHLET TỔNG QUÁT

Nguyên lý Dirichlet chỉ ra rằng có ít nhất hai vật trong cùng một hộp nếu số vật nhiều hơn số hộp. Tuy nhiên, ta có thể rút ra kết luận mạnh hơn nếu số vật hơn số hộp rất nhiều. Chẳng hạn, trong bất kỳ một nhóm gồm 21 chữ số của hệ thập phân đều có ít nhất 3 chữ số trùng nhau. Điều đó là đúng bởi vì nếu chứa 21 vật vào 10 hộp thì ít nhất có một hộp chứa nhiều hơn 2 vật.

ĐỊNH LÝ 2. *Nguyên lý Dirichlet tổng quát.*

Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp, sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật.

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn $\lceil N/k \rceil - 1$ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là

$$k.(\lceil N/k \rceil - 1) < k\{((N/k) + 1) - 1\} = N. \qquad (*)$$

trong đó ta đã dùng bất đẳng thức $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$. Bất đẳng thức (*) là trái với giả thiết.

■

Những ví dụ sau minh họa việc áp dụng nguyên lý Dirichlet tổng quát.

Ví dụ 4. Trong 100 người có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người cùng tháng sinh.

■

Ví dụ 5. Cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên ghi tên vào lớp toán học rời rạc để chắc chắn rằng sẽ có ít nhất 6 người đạt cùng một điểm thi, nếu thang điểm gồm 5 bậc, A, B, C, D, và F?

Giải: Để chắc chắn ít nhất có 6 người cùng điểm thì số sinh viên tối thiểu là số nguyên nhỏ nhất sao cho $\lceil N/5 \rceil = 6$. Số đó là $N = 5.5 + 1 = 26$.

■

Ví dụ 6. Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong một bang có số điện thoại khác nhau, mỗi số gồm 10 chữ số (Giả sử số điện thoại có dạng *NXX* – *NXX* – *XXXX*, trong đó ba chữ số đầu tiên là mã vùng, *N* nhận các giá trị từ 2 tới 9, *X* nhận bất kỳ chữ số nào).

Giải: Có 8 triệu số điện thoại khác nhau có dạng *NXX* – *XXXX* (như đã chỉ ra trong Ví dụ 10 của Tiết 4.1). Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có $\lceil 25\ 000\ 000/8\ 000\ 000 \rceil = 4$ máy có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 4 mã vùng.

■

MỘT VÀI ỨNG DỤNG HAY CỦA NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Trong nhiều áp dụng của nguyên lý Dirichlet các đối tượng đặt vào hộp cần phải được chọn một cách khôn khéo. Bây giờ chúng ta sẽ mô tả một vài áp dụng như vậy.

Ví dụ 7. Trong một tháng 30 ngày một đội bóng chày chơi ít nhất mỗi ngày một trận, nhưng cả tháng chơi không quá 45 trận. Hãy chỉ ra rằng có những ngày liên tiếp mà đội bóng đã chơi tất cả 14 trận.

Giải: Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi kể từ ngày đầu tháng tới hết ngày j. Khi đó $a_1, a_2, ..., a_{30}$ là một dãy các số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $1 \leq a_j \leq 45$. Hơn thế nữa $a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14$ cũng là một dãy các số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.

Sáu mươi số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{30}, a_1 + 14, ..., a_{30} + 14$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 59. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai trong 60 số này bằng nhau. Vì các dãy $a_1, a_2, ..., a_{30}$ và $a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14$ gồm các số phân biệt nên tồn tại các chỉ số i, j để sao cho $a_i = a_j + 14$ $(j < i)$. Điều này có nghĩa là từ ngày $j + 1$ tới hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận.

■

Ví dụ 8. Chứng tỏ rằng trong $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$ tồn tại ít nhất một số chia hết cho một số khác.

Giải: Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ dưới dạng tích của một lũy thừa cơ số 2 với một số lẻ. Nói cách khác ta có $a_j = 2^{k_j}.q_j$ trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số dương lẻ nhỏ hơn $2n$. Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai trong các số lẻ $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ bằng nhau, tức là có hai chỉ số i và j sao cho $q_i = q_j = q$ (q là giá trị chung của chúng). Khi đó $a_i = 2^{k_i}q$ và $a_j = 2^{k_j}q$. Suy ra, nếu $k_i \leqslant k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j.

■

Sử dụng khéo léo nguyên lý Dirichlet có thể chứng minh sự tồn tại của dãy con tăng hay giảm có độ dài nào đó trong một dãy các số nguyên khác nhau cho trước. Trước khi trình bày các áp dụng này chúng ta sẽ đưa ra một vài định nghĩa. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là dãy các số thực. Dãy con của dãy này là dãy có dạng $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ trong đó $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant N$. Vì thế **dãy con** là dãy nhận được từ dãy xuất phát bằng cách bỏ đi một số số hạng của dãy xuất phát và giữ nguyên thứ tự ban đầu của chúng. Một dãy gọi là **thực sự tăng** nếu mỗi số hạng lớn hơn số hạng liền trước nó, và một dãy gọi là **thực sự giảm** nếu mỗi số hạng nhỏ hơn số hạng liền trước nó.

ĐỊNH LÝ 3. *Mọi dãy $n^2 + 1$ số thực phân biệt đều có một dãy con dài $n + 1$ hoặc là thực sự tăng hoặc thực sự giảm.*

Trước khi chứng minh định lý này ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 9. Dãy 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 có $10 = 3^2 + 1$ số hạng. Có 4 dãy con tăng thực sự độ dài 4, cụ thể là 1, 4, 6, 12 ; 1, 4, 6, 10 ; 1, 4, 6, 7 ; 1, 4, 5, 7. Có một dãy con thực sự giảm độ dài 4, đó là 11, 9, 6, 5.

■

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh Định lý 3.

Chứng minh. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ là dãy $n^2 + 1$ số thực khác nhau. Gọi i_k là độ dài của dãy con thực sự tăng dài nhất bắt đầu từ a_k, còn d_k là độ dài của dãy con thực sự giảm dài nhất bắt đầu từ a_k. Như vậy ta đã kết hợp số hạng a_k với một cặp số nguyên (i_k, d_k).

Giả sử không có dãy con thực sự tăng hoặc thực sự giảm có độ dài $n + 1$. Điều này có nghĩa là cả hai số dương i_k và d_k đều nhỏ hơn hay bằng n (với $k = 1, ..., n^2 + 1$). Theo quy tắc nhân có tất cả n^2 cặp (i_k, d_k). Và theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai trong số $n^2 + 1$ cặp bằng nhau. Nói cách khác, tồn tại hai số hạng a_s và a_t (với $s < t$) sao cho $i_s = i_t$ và $d_s = d_t$. Điều này là không thể xảy ra. Thật vậy, vì các số hạng của dãy là khác nhau, nên hoặc là $a_s < a_t$ hoặc là $a_s > a_t$. Nếu $a_s < a_t$ khi đó, vì $i_s = i_t$ ta xây dựng từ a_s dãy con tăng có phần tử đầu tiên là a_s và i_t phần tử tiếp sau là dãy con tăng dài i_t bắt đầu từ a_t. Dãy này có độ dài là $i_t + 1 = i_s + 1$, điều này vô lý vì dãy con tăng dài nhất bắt đầu từ a_s có độ dài i_s chứ không là $i_s + 1$. Hoàn toàn tương tự đối với trường hợp $a_s > a_t$.

■

Ví dụ cuối cùng trình bày cách áp dụng nguyên lý Dirichlet vào lý thuyết tổ hợp mà vẫn quen gọi là **lý thuyết Ramsey**, tên của nhà toán học người Anh. Nói chung, lý thuyết Ramsey giải quyết những bài toán phân chia các tập con của một tập các phần tử.

Ví dụ 10. Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Giải: Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A, điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì $\lceil 5/2 \rceil = 3$. Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A. Nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau (không ai là kẻ thù của ai cả), ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau. Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A. ■

BÀI TẬP

1. Chứng tỏ rằng trong bất kỳ tập hợp gồm sáu lớp học nào cũng có ít nhất hai lớp gặp nhau cùng một ngày, các lớp học nghỉ thứ bảy.

2. Chứng tỏ rằng nếu trong một lớp có 30 sinh viên thì ít nhất có 2 sinh viên có tên bắt đầu bằng cùng một chữ cái.

3. Một ngăn tủ có chứa một tá chiếc tất màu nâu và một tá chiếc tất màu đen. Một người lấy các chiếc tất một cách ngẫu nhiên trong bóng tối. Anh ta cần phải lấy ra bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn rằng mình có ít nhất hai chiếc tất cùng màu?

4. Cho d là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng trong một nhóm tùy ý gồm $d + 1$ số nguyên có ít nhất hai số khi chia cho d có cùng số dư.

5. Cho n là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng trong mọi tập n số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho n.

6. Chứng minh rằng nếu f là một hàm từ S tới T trong đó S và T là hai tập hữu hạn và $|S| > |T|$ thì sẽ có các phần tử s_1 và s_2 của S sao cho $f(s_1) = f(s_2)$ hoặc nói cách khác f không là hàm đơn ánh.

7. Mỗi sinh viên trong một trường đại học đều có quê ở một trong 50 bang. Cần phải tuyển bao nhiêu sinh viên để đảm bảo có ít nhất 100 người cùng bang?

8*. Cho (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, là một tập hợp gồm 5 điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trên mặt phẳng xy. Chứng tỏ rằng điểm giữa của đường nối ít nhất một trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

9*. Cho (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, là một tập hợp gồm 9 điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trong không gian xyz. Chứng tỏ rằng điểm giữa của đường nối ít nhất một trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

10. Cần có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) để chắc chắn có hai cặp (a_1, b_1) (a_2, b_2) sao cho $a_1 \textbf{ mod } 5 = a_2 \textbf{ mod } 5$ và $b_1 \textbf{ mod } 5 = b_2 \textbf{ mod } 5$?

11. a) Chỉ ra rằng trong 5 số chọn từ 8 số nguyên dương đầu tiên nhất thiết có một cặp có tổng bằng 9.

b) Điều khẳng định trong câu a) có đúng không nếu chọn 4 chứ không phải 5 số.

12. a) Chỉ ra rằng trong 7 số chọn từ 10 số nguyên dương đầu tiên nhất thiết có ít nhất hai cặp có tổng bằng 11.

h) Điều khẳng định trong câu a) có đúng không nếu thay cho 7 ta chọn 6 số ?

13. Một công ty giữ hàng hóa trong kho. Số các ngăn chứa trong kho được xác định bởi số gian hàng, số ô trong mỗi gian và số các giá ở mỗi ô. Biết nhà kho có 50 gian, mỗi gian có 85 ô và mỗi ô có 5 giá. Hỏi số hàng hóa tối thiểu phải bằng bao nhiêu để ít nhất có hai sản phẩm được đặt trong cùng một ngăn?

14. Có 51 nhà trong một phố. Mỗi ngôi nhà có địa chỉ nằm từ 1000 đến 1099. Chỉ ra rằng ít nhất có hai nhà có địa chỉ là hai số nguyên liên tiếp.

15.* Giả sử x là một số vô tỷ. Chứng tỏ rằng giá trị tuyệt đối của hiệu giữa $j\ x$ và số nguyên gần nó nhất sẽ nhỏ hơn $1/n$ đối với một số nguyên dương j nào đó không vượt quá n.

16. Hãy tìm dãy con tăng và dãy con giảm có độ dài cực đại của dãy số 22, 5, 7, 2, 23, 10, 15, 21, 3, 17.

17. Hãy xây dựng một dãy 16 số nguyên dương không có dãy con tăng hoặc dãy con giảm gồm 5 số hạng.

18. Hãy chỉ ra rằng trong 102 người có chiều cao khác nhau đứng thành một hàng có thể tìm được 11 người có chiều cao tăng dần hoặc giảm dần mà không thay đổi thứ tự của họ trong hàng.

19*. Hãy mô tả thuật toán dưới dạng giả mã để tạo các dãy con tăng hoặc giảm dài nhất của một dãy các số nguyên khác nhau.

20. Chỉ ra rằng trong một nhóm có 5 người (trong đó hai người bất kỳ hoặc là bạn hoặc là thù) không phải luôn có ba người là bạn của nhau hoặc là kẻ thù của nhau.

21. Chỉ ra rằng trong một nhóm có 10 người (trong đó hai người bất kỳ hoặc là bạn hoặc là thù) luôn có ba người là bạn hoặc bốn người là kẻ thù lẫn nhau và có nhóm ba người là kẻ thù hoặc bốn người là bạn của nhau.

22. Sử dụng Bài tập 21 chứng minh rằng trong một nhóm tùy ý 20 người (trong đó hai người bất kỳ hoặc là bạn hoặc là thù) có một nhóm 4 người là bạn hoặc là kẻ thù lẫn nhau.

23. Chỉ ra rằng có ít nhất 4 người ở California (dân số : 25 triệu) có cùng tên họ viết tắt bằng ba chữ cái sinh cùng ngày trong năm (không nhất thiết trong cùng một năm).

24. Chứng tỏ rằng trong số 100 000 000 người ăn lương ở Mỹ có thu nhập thấp hơn 1 000 000 đô-la tồn tại hai người có tổng thu nhập bằng tiền như nhau, tính đến từng xu (penny)

25. Trong một trường đại học có 38 ca học phân cho các lớp. Nếu có 677 lớp khác nhau thì cần phải có bao nhiêu phòng học?

26. Một mạng máy tính gồm có 6 máy. Mỗi máy nối trực tiếp với ít nhất một máy khác. Chỉ ra rằng có ít nhất hai máy mà số các máy khác nối với chúng là bằng nhau.

27. Một mạng máy tính gồm có 6 máy. Mỗi máy nối trực tiếp hoặc không nối với các máy khác. Chỉ ra rằng có ít nhất hai máy mà số các máy khác nối với chúng là bằng nhau.

28*. Một bữa tiệc có ít nhất hai người. Chứng minh rằng có hai người có số người quen bằng nhau.

29. Một đô vật tay tham gia thi đấu giành chức vô địch trong 75 giờ. Mỗi giờ anh ta có ít nhất một trận đấu, nhưng toàn bộ anh ta có không quá 125 trận. Chứng tỏ rằng có những giờ liên tiếp anh ta đã đấu đúng 24 trận.

30*. Điều khẳng định trong Bài tập 29 còn đúng không nếu con số 24 được thay bằng

a) 2? b) 13? c) 25? d) 30?

31. Chứng tỏ rừng nếu f là một hàm từ S sang T, trong đó S và T là các tập hữu hạn và $m = \lceil |S|/|T| \rceil$ khi đó có ít nhất m phần tử của S được gán với cùng một giá trị của T. Điều đó có nghĩa là có m phần tử $s_1, s_2, ..., s_m$ của S sao cho $f(s_1) = f(s_2) = ... = f(s_m)$.

32. Giả sử một lớp toán rời rạc có 9 sinh viên.

a) Chứng tỏ rằng trong lớp có ít nhất 5 sinh viên nam hoặc ít nhất có 5 sinh viên nữ.

b) Chứng tỏ rằng trong lớp có ít nhất 3 sinh viên nam hoặc ít nhất có 7 sinh viên nữ.

33. Một lớp toán rời rạc có 25 sinh viên thuộc năm thứ nhất, năm thứ hai hoặc là học sinh lớp 12.

a) Chỉ ra rằng có ít nhất 9 sinh viên năm thứ nhất hoặc là có ít nhất 9 sinh viên năm thứ hai hoặc là có ít nhất 9 học sinh lớp 12.

b) Chỉ ra rằng có hoặc là ít nhất 3 sinh viên năm thứ nhất và ít nhất 19 sinh viên năm thứ hai hoặc là có ít nhất 5 học sinh lớp 12.

34. Cho $n_1, n_2, ..., n_t$ là các số nguyên dương. Chứng tỏ rằng nếu xếp $(n_1 + n_2 + ... + n_t - t + 1)$ vật vào t hộp, thì khi đó với một i nào đó $(i = 1 ... t)$ hộp thứ i chứa ít nhất n_i vật.

35*. Cách chứng minh Định lý 3 dựa trên nguyên lý Dirichlet tổng quát là ý chính của bài toán này. Ta sẽ sử dụng những ký hiệu đã dùng trước đây.

a) Giả sử rằng $i_k \leq n$ với $k = 1, 2, ... n^2 + 1$. Dùng nguyên lý Dirichlet tổng quát chỉ ra rằng có $n + 1$ số hạng $a_{k_1}, a_{k_2} ... a_{k_{n+1}}$ với $i_{k_1} = i_{k_2} = ... = i_{k_{n+1}}$ trong đó $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_{n+1}$.

b) Chứng tỏ rằng $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$ với j = 1, 2, ... ,n. (*Gợi ý*: giả sử $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$, hãy chứng tỏ rằng điều này kéo theo $i_{k_j} > i_{k_{j+1}}$, đó là mâu thuẫn).

c) Dùng phần a) và b) để chứng minh nếu không có dãy con tăng có độ dài $n + 1$ khi đó phải có dãy con giảm cùng độ dài.

4.3. HOÁN VỊ VÀ TỔ HỢP

MỞ ĐẦU

Giả sử một đội bóng quần vợt có 10 cầu thủ. Huấn luyện viên cần chọn 5 người đi thi đấu ở trường khác. Ngoài ra, ông ta cũng cần chuẩn bị một danh sách có thứ tự gồm 4 cầu thủ để tham gia 4 trận chơi đơn. Trong tiết này ta sẽ nghiên cứu các phương pháp đếm số cách chọn không có thứ tự 5 cầu thủ để đi thi đấu và số danh sách khác nhau gồm 4 cầu thủ tham gia 4 trận chơi đơn. Tổng quát hơn, chúng ta sẽ trình bày các phương pháp đếm số cách chọn không có thứ tự các phần tử khác nhau và việc sắp xếp có thứ tự các đối tượng của một tập hữu hạn.

HOÁN VỊ VÀ CHỈNH HỢP

Hoán vị của một tập các đối tượng khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự các đối tượng này. Chúng ta cũng quan tâm tới việc sắp xếp có thứ tự một số phần tử của một tập hợp. Một cách sắp xếp có thứ tự r phần tử của một tập n phần tử được gọi là một **chỉnh hợp chập r** của tập n phần tử.

Ví dụ 1. Cho $S = \{1, 2, 3\}$. Cách sắp xếp 3, 2, 1 là một hoán vị của S, còn cách sắp xếp 3, 2 là một chỉnh hợp chập 2 của S.

■

Số chỉnh hợp chập r của tập S có n phần tử được biểu thị bởi $P(n, r)$. Chúng ta có thể tính $P(n, r)$ bằng quy tắc nhân.

ĐỊNH LÝ 1. Số chỉnh hợp chập r của tập S có n phần tử là

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1).$$

Chứng minh. Phần tử đầu tiên của chỉnh hợp có thể chọn bằng n cách, vì tập S có n phần tử, phần tử thứ hai của chỉnh hợp được chọn từ $(n - 1)$ phần tử còn lại của tập S, tức là chúng ta có $n - 1$ cách chọn phần tử này. Tương tự ta có $(n - 2)$ cách chọn phần tử thứ ba, và cứ như thế ta có $(n - r + 1)$ cách chọn phần tử thứ r. Theo quy tắc nhân ta được :

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$$

chỉnh hợp chập r từ tập S. Đó là điều cần chứng minh.

■

Từ Định lý 1 ta suy ra

$$P(n,r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Trường hợp đặc biệt ta có $P(n,n) = n!$.

Chúng ta sẽ minh họa kết quả này qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cách chọn bốn cầu thủ khác nhau trong mười cầu thủ của đội bóng quần vợt để chơi bốn trận đấu đơn, các trận đấu là có thứ tự?

Giải: Mỗi cách chọn có thứ tự bốn cầu thủ của đội bóng là một chỉnh hợp chập bốn của mười phần tử. Theo Định lý 1, ta có

$$P(10,\ 4) = 10.9.8.7 = 5040.$$

■

Ví dụ 3. Giả sử rằng có tám vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về đích thứ hai nhận huy chương bạc, người về đích thứ ba nhận huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra?

Giải: Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập ba của tập hợp tám phần tử. Vì thế có $P(8,3) = 8.7.6 = 336$ cách trao huy chương. ■

Ví dụ 4. Giả sử rằng một thương nhân định đi bán hàng tại tám thành phố. Chị ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một thành phố nào đó, nhưng có thể đến bảy thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào mà chị ta muốn. Hỏi chị ta có thể đi qua tất cả các thành phố này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?

Giải: Số lộ trình có thể giữa các thành phố bằng số hoán vị của bẩy phần tử, vì thành phố đầu tiên đã được xác định, nhưng bẩy thành phố còn lại có thể có thứ tự tùy ý. Do đó có $7! = 5040$ cách để người bán hàng chọn hành trình của mình. Nếu muốn tìm lộ trình ngắn nhất thì chị ta phải tính tổng khoảng cách cho mỗi hành trình có thể, tức là tổng cộng phải tính cho 5040 hành trình.

■

TỔ HỢP

Một **tổ hợp chập *r*** của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự r phần tử của tập đã cho. Như vậy, một tổ hợp chập r chính là một tập con r phần tử của tập ban đầu.

Ví dụ 5. Cho S là tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Khi đó $\{1, 3, 4\}$ là một tổ hợp chập 3 của S.

Số tổ hợp chập r của tập có n phần tử được hiểu thị bởi $C(n, r)$.

Ví dụ 6. Rõ ràng $C(4,2) = 6$ vì tổ hợp chập 2 của $\{a, b, c, d\}$ là 6 tập con $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.

■

Chúng ta có thể xác định số tổ hợp chập r của n phần tử nhờ công thức tính chỉnh hợp chập r của n phần tử. Để làm điều đó chú ý rằng các chỉnh hợp chập r của một tập hợp có thể nhận được bằng cách trước hết lập các tổ hợp chập r rồi sắp thứ tự cho các phần tử thuộc các tổ hợp đó. Dựa trên nhận xét này ta sẽ chứng minh định lý sau về số tổ hợp chập r.

ĐỊNH LÝ 2. Số tổ hợp chập r từ tập có n phần tử trong đó n là số nguyên dương và r là số nguyên với $0 \leq r \leq n$, được cho bởi công thức sau

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Chứng minh. Các chỉnh hợp chập r từ tập có n phần tử có thể nhận được bằng cách tạo ra $C(n.r)$ tổ hợp chập r sau đó sắp thứ tự cho các phần tử của chúng . Vì vậy ta có :

$$P(n, r) = C(n, r).P(r, r).$$

Từ đó suy ra :

$$C(n, r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Hệ quả sau đây rất có ích khi tính số tổ hợp.

HỆ QUẢ 1. Cho n và r là các số nguyên không âm sao cho $r \leq n$. Khi đó $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Chứng minh. Theo định lý 2 ta có

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

và $$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Vậy $$C(n,r) = C(n,n-r).$$

■

Người ta còn dùng ký hiệu $\binom{n}{r}$ để ghi số tổ hợp chập r của n phần tử. Số đó cũng được gọi là **hệ số nhị thức**. Sở dĩ có tên *hệ số nhị thức* là bởi vì các hệ số trong khai triển của nhị thức $(a+b)^n$ chính là các số tổ hợp chập r của n phần tử với $r = 1, 2, ..., n$. Bài toán khai triển nhị thức sẽ được xem xét trong tiết này.

Ví dụ 7. Có bao nhiêu cách tuyển 5 trong số 10 cầu thủ của một đội bóng quần vợt để đi thi đấu tại một trường khác?

Giải: Đó chính là số tổ hợp chập 5 của 10 phần tử. Theo Định lý 2 ta được

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

■

HỆ SỐ NHỊ THỨC

Trong tiết này chúng ta sẽ thảo luận một số tính chất quan trọng của hệ số nhị thức. Đầu tiên đó là một hằng đẳng thức quan trọng.

ĐỊNH LÝ 3. HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL. Cho n và k là các số nguyên dương với $n \geqslant k$. Khi đó

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k).$$

Chứng minh. Giả sử T là một tập có $n + 1$ phần tử. Gọi a là một phần tử nào đó của T, và $S = T - \{a\}$. Lưu ý rằng $C(n + 1, k)$ là số các tập con có k phần tử của tập T, hoặc là chứa phần tử a cùng với $k - 1$ phần tử của S, hoặc là chứa k phần tử của S và không chứa a. Vì có $C(n, k - 1)$ tập con chứa $(k - 1)$ phần tử của S, và có $C(n, k)$ tập con chứa k phần tử của tập S. Do vậy

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k).$$

■

Chú ý. Trên đây là cách chứng minh hằng đẳng thức Pascal hằng lý thuyết tổ hợp. Cũng có thể chứng minh hằng đẳng thức này bằng các phép biến đổi đại số công thức tổ hợp (xem Bài tập 47 ở cuối tiết này).

Hằng đẳng thức Pascal là cơ sở để sắp xếp hình học các hệ số nhị thức thành tam giác như trên Hình 1. Hàng thứ n của tam giác gồm các hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Tam giác này được gọi là **tam giác Pascal**. Hằng đẳng thức Pascal chỉ ra rằng khi cộng hai hệ số nhị thức liền kề trong tam giác sẽ nhận được hệ số nhị thức của hàng tiếp theo ở giữa hai hệ số này.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{0} \\
\ldots
\end{array}$$

a)

Theo hằng đẳng thức Pascal

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\ldots
\end{array}$$

b)

Hình 1. Tam giác Pascal.

Ngoài hằng đẳng thức Pascal, hệ số nhị thức còn có nhiều hằng đẳng thức khác. Hai trong số chúng sẽ được cho dưới đây và sẽ được chứng minh bằng lý thuyết tổ hợp. Các số khác có thể tìm thấy trong các bài tập cuối tiết này.

ĐỊNH LÝ 4. Cho n là số nguyên dương. Khi đó $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

Chứng minh. Một tập hợp n phần tử có tất cả 2^n tập con khác nhau. Mặt khác ta thấy, mỗi tập con có hoặc không phần tử nào, hoặc một phần tử, hoặc hai phần tử, ... hoặc n phần tử. Số tập con có không phần tử nào là $C(n, 0)$, số tập con có một phần tử là $C(n, 1)$, số tập con có hai phần tử là $C(n, 2)$, ..., số tập con có n phần tử là $C(n,n)$. Do đó ta có tất cả $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ tập con của tập n phần tử. Kết hợp cả hai phần trên ta được

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n.$$

■

ĐỊNH LÝ 5. HẰNG ĐẲNG THỨC VANDERMONDE. Giả sử m, n và r là các số nguyên không âm sao cho r không vượt quá m hoặc n. Khi đó

$$C(m + n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

Chú ý. Hằng đẳng thức này do Alexande-Théophile Vandermonde phát hiện vào thế kỷ 18.

Chứng minh. Giả sử cho một tập có m phần tử và tập thứ hai có n phần tử. Khi đó tổng số cách chọn r phần tử từ hợp của hai tập này là $C(m+n,r)$. Một cách khác để chọn r phần tử từ hợp của hai tập hợp này là chọn k phần tử ($k = 0,1,\ldots,r$) từ tập thứ nhất và $r-k$ phần tử từ tập thứ hai. Theo quy tắc nhân, điều này có thể làm bằng $C(m,k) \cdot C(n,r-k)$ cách. Vì vậy tổng số cách chọn r phần tử từ hợp của hai tập này bằng

$$C(m + n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

Đó chính là hằng đẳng thức Vandermonde.

■

ĐỊNH LÝ NHỊ THỨC

Định lý nhị thức cho ta hệ số trong khai triển lũy thừa của một nhị thức. Nhị thức là tổng của hai số hạng, ví dụ $x + y$. (Số hạng có thể là tích của các hằng số và các biến, nhưng ở đây không liên quan tới chúng ta). Ví dụ sau đây minh họa cách chứng minh định lý này.

Ví dụ 8. Khai triển của $(x + y)^3$ có thể nhận được bằng suy luận tổ hợp thay cho việc nhân liên tiếp ba số hạng. Khi khai triển $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$ tất cả các tích của các số hạng trong tổng thứ nhất với các số hạng trong tổng thứ hai và trong tổng thứ ba được cộng lại. Các số hạng dạng x^3, x^2y, xy^2 và y^3 được sinh ra. Để nhận được số hạng dạng x^3, x cần phải được chọn trong mọi tổng và chỉ bằng một cách. Như vậy số hạng x^3 có hệ số bằng 1. Để nhận được số hạng dạng x^2y, x cần phải được chọn từ hai trong ba tổng (do vậy, y từ tổng còn lại). Vì thế số các số hạng như thế bằng số tổ hợp chập 2 từ 3 phần tử, tức là $C(3,2)$. Tương tự, số các số hạng dạng xy^2 bằng số cách chọn một trong ba tổng để được x (do vậy chọn y từ mỗi hai tổng còn lại). Điều này có thể làm bằng $C(3,1)$ cách. Cuối cùng để nhận được y^3 chỉ có một cách chọn y từ mỗi một trong ba tổng của tích. Do vậy suy ra

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu định lý nhị thức.

ĐỊNH LÝ 6. ĐỊNH LÝ NHỊ THỨC. Cho x và y là hai biến và n là một số nguyên dương. Khi đó

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j \\ &= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \ldots + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n.\end{aligned}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý này bằng suy luận tổ hợp. Các số hạng trong khai triển của $(x + y)^n$ sẽ có dạng $x^{n-j}y^j$ với $j = 0, 1,\ldots, n$. Để nhận được số hạng dạng $x^{n-j}y^j$ ta chọn x từ $n - j$ tổng $(x + y)$ và có $C(n, n - j)$ cách chọn như vậy, khi đó y được chọn từ j tổng còn lại (chỉ có một cách duy nhất). Do đó hệ số của $x^{n-j}y^j$ là $C(n,n - j) = C(n,j)$. Đó chính là điều cần chứng minh.

■

Ví dụ 9. Tìm khai triển của biểu thức $(x + y)^4$.

Giải: Theo định lý nhị thức ta có :

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \sum C(4, j)x^{4-j}y^j \\ &= C(4,0)x^4 + C(4,1)x^3y + C(4,2)x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

■

Ví dụ 10. Tính hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(x + y)^{25}$.

Giải: Theo công thức nhị thức hệ số này bằng

$$C(25,13) = \frac{25!}{13!12!} = 5\,200\,300.$$

■

Ví dụ 11. Tính hệ số của $x^{12}\ y^{13}$ trong khai triển của $(2x - 3y)^{25}$. Theo định lý nhị thức ta có.

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum C(25,j)\ (2x)^{25-j}\,(-3y)^j$$

Do vậy hệ số của $x^{12}\ y^{13}$ trong khai triển nhận được khi $j = 13$, tức là

$$C(25,13).2^{12}\,(-3)^{13} = -\frac{25!2^{12}3^{13}}{13!\ 12!}$$

■

Dùng định lý nhị thức ta có thể chứng minh Định lý 4 bằng cách khác. Nhớ lại là Định lý 4 phát biểu như sau: với mọi n nguyên dương ta có

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

Chứng minh. Dùng định lý nhị thức ta có

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k).1^k.1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

Đó chính là điều cần chứng minh.

Dùng định lý nhị thức ta cũng có thể chứng minh hằng đẳng thức sau đây.

ĐỊNH LÝ 7. Cho n là một số nguyên dương. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k.C(n,k) = 0$$

Chứng minh. Từ định lý nhị thức ta suy ra

$$0 = ((-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.C(n,k)$$

Đó là điều cần chứng minh.

BÀI TẬP

1. Liệt kê tất cả các hoán vị của $\{a, b, c\}$.

2. Tập hợp $\{a, b, c, d, e, f\}$ có tất cả bao nhiêu hoán vị ?

3. Có tất cả bao nhiêu hoán vị của tập hợp $\{a,b,c,d,e,f\}$ với phần tử cuối cùng bằng a.

4. Giả sử $S = \{1,2,3,4,5\}$.

a) Liệt kê tất cả các chỉnh hợp chập 3 của S.

b) Liệt lê tất cả các tổ chập 3 của S.

5. Tìm giá trị của các đại lượng sau.

a) $P(6,3)$ b) $P(6,5)$ c) $P(8,1)$

d) $P(8,5)$ e) $P(8,8)$ f) $P(10,9)$

6. Tìm giá trị của các đại lượng sau.

a) $C(5,1)$ b) $C(5,3)$ c) $C(8,4)$

d) $C(8,8)$ e) $C(8,0)$ f) $C(12,6)$.

7. Tính số chỉnh hợp chập 5 của tập 9 phần tử.

8. Có bao nhiêu thứ tự có thể xảy ra trong cuộc thi chạy giữa năm vận động viên?

9. Bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba trong cuộc đua có 12 con ngựa, nếu mọi thứ tự tới đích đều có thể?

10. Có sáu ứng cử viên chức thống đốc bang. Tính số cách in tên của các ứng cử viên lên phiếu bầu cử.

11. Một nhóm sinh viên gồm n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho nam nữ đứng xen nhau?

12. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 2 số nguyên dương nhỏ hơn 100?

13. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ từ bảng chữ cái tiếng Anh?

14. Một tập hợp 10 phần tử có bao nhiêu tập con với số phần tử lẻ?

15. Một tập hợp 100 phần tử có bao nhiêu tập con có nhiều hơn hai phần tử?

16. Bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 có :

a) Đúng 3 số 0? b) Số các số 0 bằng số các số 1?

c) Ít nhất 7 số 1? d) ít nhất 3 số 1?

17. Có một trăm vé đánh số từ 1 đến 100 được bán cho 100 người khác nhau. Người ta sẽ trao 4 giải thưởng kể cả giải độc đắc . Hỏi

a) Có bao nhiêu cách trao thưởng ?

b) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 trúng giải độc đắc?

c) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 trúng một trong các giải?

d) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 không trúng thưởng?

e) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu hai người giữ vé 19 và vé 47 trúng thưởng?

f) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu ba người giữ vé 19, 47 và 73 trúng thưởng?

g) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu bốn người giữ vé 19, 47, 73 và 97 trúng thưởng?

h) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu không ai trong bốn người giữ vé 19, 47, 73 và 97 trúng thưởng?

i) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng nếu một trong bốn người giữ vé 19, 47, 83 và 97 trúng giải độc đắc?

j) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu những người giữ vé 19, 47 trúng giải nhưng những người có vé 73 và 97 không trúng giải?

18. Một đội bóng có 13 cầu thủ.

a) Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ để thi đấu?

b) Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ trong 13 cầu thủ của đội sao cho mỗi cầu thủ được phân công chơi ở một trong 10 vị trí đã định?

c) Trong 13 cầu thủ có 3 là nữ. Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ để thi đấu, nếu ít nhất có một cầu thủ là nữ?

19. Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực?

b) Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ?

20. Một giáo sư soạn 40 câu hỏi đúng / sai về toán rời rạc, trong đó có 17 câu phải trả lời là đúng. Nếu thứ tự các câu hỏi có thể tùy ý, thì có bao nhiêu đáp án khác nhau?

21. Từ tập các số nguyên dương không vượt quá 100, có thể tạo được bao nhiêu chỉnh hợp chập 4 chứa 3 số nguyên liên tiếp

a) Theo trật tự thông thường và có thể bị phân cách bởi các số khác của chỉnh hợp?

b) Tại những vị trí liên tiếp của chỉnh hợp?

22. Tổ bộ môn toán học của một trường đại học có 7 cán bộ nữ và 9 cán bộ nam.

a) Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ nếu trong hội đồng có ít nhất một là nữ?

b) Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ nếu trong hội đồng có ít nhất một là nữ và ít nhất một là nam?.

23. Trong bảng chữ cái tiếng Anh có 21 phụ âm và 5 nguyên âm. Bao nhiêu xâu gồm 6 chữ thường chứa.

a) Đúng một nguyên âm? b) Đúng hai nguyên âm?

b) Ít nhất một nguyên âm? d) Ít nhất hai nguyên âm?

24. Bao nhiêu xâu gồm 6 chữ thường từ bảng chữ cái tiếng Anh chứa

a) Chữ a?

b) Chữ a và chữ b?

c) Chữ a và chữ b tại các vị trí liên tiếp với a trước b và tất cả các chữ là khác nhau?

d) Chữ a và chữ b, trong đó a đứng ở vị trí nào đó bên trái của b, tất cả các chữ là khác nhau?

25. Giả sử một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam bằng số ủy viên nữ?

26. Một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam ít hơn số ủy viên nữ?

27. Có bao nhiêu xâu nhị phân chứa đúng tám số 0 và mười số 1 và ngay sau mỗi số 0 nhất thiết là một số 1.

28. Có bao nhiêu xâu nhị phân chứa đúng năm số 0 và mười bốn số 1 và ngay sau mỗi số 0 nhất thiết là hai số 1.

29. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 chứa ít nhất ba số 0 và ít nhất ba số 1.

30. Có bao nhiêu cách chọn 12 nước trong Liên hiệp quốc vào một hội đồng nếu 3 nước được bầu từ nhóm 45 nước, 4 nước được bầu từ nhóm 57 nước, các nước khác được bầu từ 69 nước còn lại?

31. Có bao nhiêu biển đăng ký xe chứa 3 chữ cái tiếp theo là 3 chữ số, nếu các chữ cái hoặc chữ số không xuất hiện quá một lần?

32. Có bao nhiêu cách xếp 6 người ngồi xung quanh một bàn tròn, hai cách ngồi được xem là như nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách kia bằng cách quay bàn đi một góc nào đó?

33. Chỉ ra rằng nếu n và k là các số nguyên dương, khi đó

$$C(n+1,k) = \frac{(n+1)C(n,k-1)}{k}$$

Hãy dùng hằng đẳng thức này để xây dựng một định nghĩa bằng quy nạp các hệ số của nhị thức.

34. Chứng tỏ rằng nếu p là nguyên tố và k là số nguyên sao cho $1 \leq k \leq p-1$ khi đó $C(p,k)$ chia hết cho p.

35. Tìm khai triển của $(x+y)^5$.

36. Tìm hệ số của x^5y^8 trong khai triển của $(x+y)^{13}$.

37. Trong khai triển của $(x+y)^{100}$ có bao nhiêu số hạng?

38. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(1+x)^{11}$.

39. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển của $(2-x)^{19}$.

40. Tìm hệ số của x^8y^9 trong khai triển của $(3x+2y)^{17}$.

41. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển của $(2x-3y)^{200}$.

42*. Tìm công thức tính hệ số của x^k trong khai triển của $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}$, trong đó k là số tự nhiên.

43*. Tìm công thức hệ số của x^k trong khai triển của $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{100}$, trong đó k là số tự nhiên.

44. Trong tam giác Pascal hàng chứa hệ số nhị thức $C(10,k)$ $(0 \leq k \leq 10)$ là 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Sử dụng hằng đẳng thức Pascal hãy tạo ra hàng ngay sau hàng đã cho trong tam giác Pascal.

45. Hàng nào của tam giác Pascal chứa hệ số nhị thức $C(9, k)$ $(0 \leq k \leq 9)$

46*. Cho n là số nguyên dương. Tìm hệ số nhị thức lớn nhất $C(n,r)$, trong đó r là số nguyên không âm nhỏ hơn hay bằng n.

47. Chứng minh hằng đẳng thức Pascal bằng cách dùng công thức tính $C(n,k)$.

48. Chứng minh công thức : $C(n,r)C(r,k) = C(n,k).C(n-k, r-k)$, trong đó n, r, k là các số nguyên không âm với $r \leq n$ và $k \leq r$.

a) Bằng lý thuyết tổ hợp,

b) Bằng cách sử dụng công thức tính số tổ hợp chập r của tập có n phần tử.

49*. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{r} C(n+k, k) = C(n + r + 1, r)$$

trong đó n và r là các số nguyên dương.

a) Bằng lý thuyết tổ hợp,

b) Sử dụng hằng đẳng thức Pascal.

50. Chỉ ra rằng nếu n là số nguyên dương thì $C(2n, 2) = 2C(n,2) + n^2$

a) Bằng lý thuyết tổ hợp,

b) Bằng các biến đổi đại số.

51*. Hãy chứng minh bằng công cụ tổ hợp rằng

$$\sum_{k=1}^{n} k\, C(n, k) = n\, 2^{n-1}$$

(*Gợi ý* : Hãy tính bằng hai cách số cách chọn một hội đồng và thêm vào đó chọn chủ tịch hội đồng đó).

52*. Hãy chứng minh bằng công cụ tổ hợp rằng.

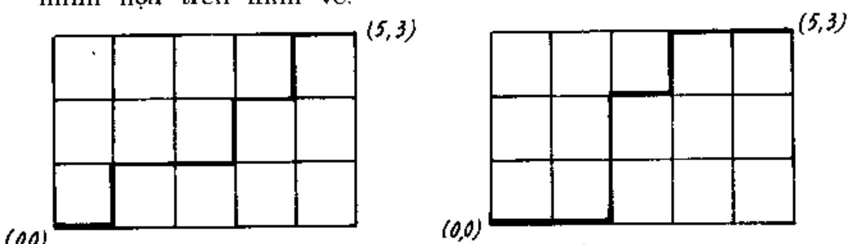
$$\sum_{k=1}^{n} k.C(n,k)^2 = n.C(2n - 1, n - 1).$$

(*Gợi ý* : hãy tính bằng hai cách số cách chọn một hội đồng có n ủy viên từ nhóm n giáo sư toán học và n giáo sư tin học, sao cho chủ tịch là giáo sư toán).

53. Giả sử S là một tập cho trước nào đó. Chứng minh rằng số các tập con của S có số phần tử là lẻ cũng bằng số các tập con của nó với số phần tử là chẵn.

54*. Dùng quy nạp toán hãy chứng minh định lý nhị thức.

55. Trong bài tập này chúng ta sẽ đếm số đường đi từ gốc (0, 0) của mặt phẳng xy tới điểm (m, n) sao cho mỗi đường đi gồm một dãy các bước đi. Mỗi bước đi là sự dịch chuyển sang bên phải hay lên trên một đơn vị (sự dịch chuyển sang bên trái hay xuống dưới là không cho phép). Hai đường đi như thế từ điểm (0,0) tới (5,3) được minh họa trên hình vẽ.



a) b)

a) Chỉ ra rằng mỗi đường đi như trên có thể biểu diễn bằng một xâu nhị phân gồm m số 0 và n số 1, trong đó 0 biểu thị chuyển động sang phải, còn 1 là chuyển động lên trên một đơn vị.

b) Từ phần a) hãy suy ra có $C(m + n, n)$ đường đi từ (0, 0) tới (m, n).

56. Dùng Bài tập 55 chứng minh đẳng thức $C(n, k) = C(n, n - k)$ trong đó k là số nguyên dương và $0 \leqslant k \leqslant n$.
(*Gợi ý* : tính số đường đi dạng như trong Bài tập 55, từ điểm (0, 0) tới $(n - k, k)$ và từ (0, 0) tới $(k, n - k)$).

57. Dùng Bài tập 55 chứng minh Định lý 4.
(*Gợi ý* : Tính số đường đi với n bước được mô tả trong Bài tập 55. Mỗi đường đi như thế có điểm cuối tại một trong các điểm $(n - k, k)$ với $k = 0, 1, 2, ..., n$).

58. Dùng hài tập 55 chứng minh hằng đẳng thức Pascal.
(*Gợi ý* : Chỉ ra rằng đường đi như đã mô tả trong Bài tập 55 từ điểm (0, 0) tới $(n + 1 - k, k)$ qua hoặc $(n + 1 - k, k - 1)$ hoặc $(n - k, k)$, nhưng không qua cả hai).

59. Chứng minh hằng đẳng thức trong Bài tập 49, sử dụng Bài tập 55.
(*Gợi ý* : Trước tiên lưu ý rằng số đường đi từ (0, 0) tới $(n + 1, r)$ hằng $C(n + 1 + r, r)$. Sau đó, tính số đường đi bằng cách lấy tổng các đường có bước đầu tiên là đi lên trên k đơn vị ($k = 0, 1, \ldots r$).

60*. Trong trận chung kết giải vô địch bóng đá thế giới để chấm dứt tình trạng ngang điểm người ta áp dụng thủ tục đá luân lưu như sau. Mỗi đội chọn ra năm cầu thủ theo một thứ tự nhất định. Mỗi cầu thủ thực hiện một quả đá phạt đền, cầu thủ đội này đá xong thì đến lượt cầu thủ của đội kia và cứ tiếp diễn như thế theo thứ tự của các cầu thủ đã xác định. Nếu tỷ số trận đấu sau 10 quả đá phạt đền vẫn bằng nhau thì thủ tục này được lặp lại. Và nếu sau quả đá phạt đền thứ 20 mà tỷ số trận đấu vẫn còn bằng nhau thì luật "cái chết bất ngờ" sẽ được áp dụng, tức là, đội đầu tiên ghi bàn thắng mà không hị giáng trả sẽ là đội giành cúp vàng.

a) Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau vòng đá 10 quả phạt đền thứ nhất?

h) Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau vòng đá 10 quả phạt đền thứ hai?

c) Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau khi thực hiện không quá 10 quả phạt đền theo luật "cái chết bất ngờ"?

4.4. XÁC SUẤT RỜI RẠC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết tổ hợp và lý thuyết xác suất có chung một khởi nguyên. Lý thuyết xác suất hắt đầu phát triển vào thế kỷ 17 khi các trò chơi may rủi được nhà toán học Pháp Blaise Pascal phân tích một cách kỹ càng. Trong các nghiên cứu này Pascal đã phát hiện ra những tính chất khác nhau của các hệ số nhị thức. Vào thế kỷ 18 nhà toán học Pháp Laplace, trước đó cũng đã nghiên cứu trò chơi may rủi, đã đưa ra định nghĩa xác suất của một biến cố như là tỷ số giữa các kết cục *thuận lợi* và toàn bộ số các kết cục có thể. Ví dụ, xác suất xuất hiện các mặt lẻ khi gieo một con súc sắc là tỷ số giữa số các kết cục *thuận lợi* – tức là số cách xuất hiện mặt lẻ – và tổng số các kết cục có thể – tức là, tổng số các cách xuất hiện một mặt bất kỳ. Rõ ràng có 6 kết cục có thể – các mặt 1, 2, 3, 4, 5 và 6 – và có đúng 3 kết cục có ích – các mặt 1, 3 và 5. Do vậy, xác suất xuất hiện các mặt lẻ khi gieo một con súc sắc là 3/6 = 1/2. (Lưu ý rằng chúng ta giả sử con súc sắc là đối xứng, tức là các kết cục có thể là đồng khả năng).

Trong mục này chúng ta chỉ nghiên cứu các thí nghiệm có một số hữu hạn các kết cục đồng khả năng. Điều này cho phép chúng ta sử dụng định nghĩa của Laplace về xác suất của một biến cố.

XÁC SUẤT HỮU HẠN

Một thủ tục mang lại một số trong các kết cục khả dĩ được gọi là một **thí nghiệm**. Tập hợp các kết cục khả dĩ gọi là **không gian mẫu** của thí nghiệm. Mỗi tập con của không gian mẫu gọi là một **biến cố** (sự kiện). Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa của Laplace về xác suất của một biến cố khi số các kết cục có thể là hữu hạn.

ĐỊNH NGHĨA 1. Giả sử S là không gian mẫu hữu hạn với các kết cục đồng khả năng. Khi đó xác suất của biến cố E – một tập con của S – sẽ bằng $p(E) = |E|/|S|$.

Chúng ta xét một vài ví dụ.

Ví dụ 1. Một bình kín đựng bốn quả bóng xanh và năm quả bóng đỏ. Tính xác suất lấy ngẫu nhiên được một quả bóng xanh ra khỏi bình.

Giải: Để tính xác suất hãy nhớ rằng có tất cả 9 kết cục có thể và có 4 trong những kết cục có thể này cho ta quả bóng xanh. Do vậy xác suất cần tính bằng 4/9.

■

Ví dụ 2. Tính xác suất của biến cố "tổng các số của hai mặt trên của 2 con súc sắc khi chúng được gieo đồng thời bằng 7".

Giải : Khi gieo 2 con súc sắc có tất cả 36 kết cục có th^ (vì mỗi con súc sắc có 6 mặt, theo quy tắc nhân tổng số các kết cục có thể là $6^2 = 36$). Nhưng ta chỉ có 6 kết cục *thuận lợi* đó là (1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) và (6,1) trong đó giá trị của các con súc sắc thứ nhất và thứ hai được biểu diễn bằng một cặp số có thứ tự. Do vậy xác suất của biến cố "tổng các số của hai mặt trên của 2 con súc sắc khi chúng được gieo đồng thời bằng 7" là 6/36 = 1/6.

■

Gần đây xổ số đã trở nên cực kỳ phổ cập. Chúng ta có thể dễ dàng tính được khả năng trúng thưởng của các loại xổ số khác nhau.

Ví dụ 3. Người chơi xổ số sẽ trúng giải nhất khi chọn được bốn chữ số có thứ tự phù hợp với bốn chữ số được chọn ngẫu nhiên nhờ một thiết bị cơ khí nào đó. Nếu chỉ có ba chữ số phù hợp thì sẽ trúng giải nhì. Hãy tính xác suất trúng giải nhất và xác suất trúng giải nhì.

Giải: Chỉ có một cách chọn trúng cả bốn chữ số. Nhưng theo quy tắc nhân có tất cả $10^4 = 10\,000$ cách chọn bốn chữ số. Vì thế, xác suất trúng giải nhất là 1/10000 = 0.0001.

Người chơi sẽ được giải nhì nếu chọn được đúng ba trong bốn chữ số và có đúng một chữ số bị sai. Rõ ràng có chín cách chọn để chữ số đầu tiên bị sai (một cách chọn đúng) và có chỉ một cách chọn ba chữ số còn lại là đúng. Vì vậy, có 9 cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số đầu tiên sai ba chữ số còn lại là đúng. Tương tự có chín cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số thứ hai sai, chín cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số thứ ba sai và chín cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số thứ tư sai. Theo quy tắc cộng, có tất cả 36 cách chọn bốn chữ số trong đó có đúng một chữ số sai. Vì vậy xác suất trúng giải nhỏ là 36/10000 = 9/2500 = 0.0036.

■

Ví dụ 4. Hiện nay có nhiều đợt xổ số trao những giải thưởng rất lớn cho những ai chọn đúng 6 số trong n số nguyên dương với n thường nằm giữa 30 và 50. Hãy tính xác suất trúng thưởng khi $n = 40$.

Giải: Rõ ràng chỉ có một tổ hợp trúng thưởng và tổng số cách chọn 6 số trong 40 số là :

$$C(40,\ 6) = \frac{40!}{34!\,6!} = 3\ 838\ 380$$

Do vậy xác suất trúng thưởng là :

$$\frac{1}{3838380} \approx 0.00000026$$

■

Bằng các kỹ thuật đã được trình bày ở trên bây giờ chúng ta có thể giải được một số bài toán xác suất liên quan tới việc chơi bài tú lơ khơ. Một cỗ bài có 52 quân, chia thành 13 *bộ*. Đó là các bộ hai, ba, bốn, năm, sáu, bảy, tám, chín, mười, gi, quy, ca, át. Trong mỗi bộ có 4 quân, mỗi quân thuộc một trong các (loại) *hoa* rô, cơ, pích, nhép.

Ví dụ 5. Có bao nhiêu cách nhận được 5 quân bài từ một cỗ bài?

Giải: Rõ ràng có $C(52,\ 5) = 2\ 598\ 960$ cách khác nhau.

■

Ví dụ 6. Giả sử ta lấy ngẫu nhiên 5 quân bài từ một cỗ bài (lấy một xấp *bài 5 quân*). Tính xác suất của biến cố "trong *xấp bài* có 4 quân thuộc cùng một bộ".

Giải: Theo quy tắc nhân, số cách lấy 5 quân trong đó có 4 quân thuộc cùng một bộ sẽ là tích của số cách chọn một bộ, số cách chọn 4 quân từ 1 bộ và số cách chọn quân bài thứ năm trong các quân bài còn lại, tức là :

$$C(13,1)\ C(4,4)\ C(48,1).$$

Vì tất cả có $C(52,5)$ cách khác nhau lấy 5 quân bài, nên xác suất nhận được "một tay bài có 4 quân thuộc cùng một bộ" là

$$\frac{C(13,1)C(4,4)C(48,1)}{C(52,5)} = \frac{13.1.48}{2598960} \approx 0.00024.$$

■

Ví dụ 7. Tìm xác suất khi lấy ngẫu nhiên một xấp bài 5 quân có 3 quân thuộc cùng một bộ và 2 quân còn lại thuộc một bộ khác, lưu ý là có kể đến thứ tự của các bộ.

Giải: Theo quy tắc nhân, số cách lấy 5 quân bài trong đó có 3 quân thuộc cùng một bộ và 2 quân còn lại thuộc một bộ khác sẽ bằng tích của số cách lấy hai bộ có thứ tự, số cách lấy 3 quân từ bộ thứ nhất, và số cách lấy 2 quân từ bộ thứ hai. (Hãy lưu ý đến thứ tự của các bộ được chọn, vì 3 quân quy và 2 quân át khác với 3 quân át và 2 quân quy). Số cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài là :

$$P(13,2)C(4,3)C(4,2) = 13.12.4.6 = 3744.$$

Vì có 2 598 960 cách có thể nên xác suất cần tìm là :

$$\frac{3744}{2\,598\,960} \approx 0.0014.$$

■

XÁC SUẤT CỦA TỔ HỢP CÁC BIẾN CỐ

Chúng ta có thể sử dụng kỹ thuật đếm để tìm xác suất của biến cố được tạo nên từ các biến cố khác.

ĐỊNH LÝ 1. Giả sử E là một biến cố trong không gian mẫu S. Khi đó xác suất của biến cố $\overline{E}$, biến cố bù của E là :

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E).$$

Chứng minh. Để tìm xác suất của biến cố $\overline{E}$ ta nhận thấy $|\overline{E}| = |S| - |E|$. Do vậy :

$$p(\overline{E}) = \frac{|S| - |E|}{|S|} = 1 - p(E).$$

■

Nhiều khi việc tính trực tiếp xác suất của một biến cố lại tỏ ra kém hiệu quả. Lúc đó người ta dùng chiến thuật luân phiên, thay cho việc tính xác suất của một biến cố người ta tính xác suất của phần bù của nó. Bài toán được giải quyết dễ dàng hơn, như các ví dụ sau đây cho thấy.

Ví dụ 8: Một xâu 10 bit nhị phân được tạo ra một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để nhận được một xâu có ít nhất 1 chữ số 0.

Giải. Giả sử E là biến cố "có ít nhất một trong 10 bit là chữ số 0". Khi đó $\overline{E}$ là biến cố "tất cả các bit đều là số 1". Vì không gian mẫu S là tập các xâu nhị phân độ dài 10, nên ta suy ra

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{|\overline{E}|}{|S|} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

Vì vậy xác suất nhận được xâu nhị phân có ít nhất một chữ số 0 là 1023/1024. Bài toán sẽ rất khó giải nếu không dùng Định lý 1 mà tính trực tiếp.

■

Chúng ta có thể tính xác suất của hợp hai biến cố.

ĐỊNH LÝ 2. Giả sử E_1 và E_2 là hai biến cố trong không gian mẫu S. Khi đó :

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

Chứng minh. Theo công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp (trong Tiết 1.4) ta có

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} p(E_1 \cup E_2) &= |E_1 \cup E_2|/|S| \\ &= (|E_1| + |E_2| - |E_1| \cap |E_2|)/|S| \\ &= |E_1|/|S| + |E_2|/|S| - |E_1 \cap E_2|/|S| \\ &= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2). \end{aligned}$$

Ví dụ 9. Tính xác suất để một số nguyên dương được chọn ngẫu nhiên từ tập các số nguyên dương không lớn hơn 100, chia hết cho 2 hoặc cho 5.

Giải: Giả sử E_1 là biến cố "số nguyên được chọn chia hết cho 2" và E_2 là biến cố "số nguyên chọn được chia hết cho 5". Khi đó $E_1 \cup E_2$ là biến cố "số nguyên chọn được chia hết cho 2 hoặc 5", còn $E_1 \cap E_2$ là biến cố "số nguyên chọn được chia hết cho cả 2 và 5" hay tương đương với nó, chia hết cho 10. Vì $|E_1| = 50$, $|E_2| = 20$ và $|E_1 \cap E_2| = 10$ ta suy ra

$$\begin{aligned} p(E_1 \cup E_2) &= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) \\ &= \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

■

BÀI TẬP

1. Tính xác suất để một quân bài được chọn từ cỗ bài là con át.
2. Tính xác suất xuất hiện mặt số 6 khi gieo một con súc sắc.
3. Tính xác suất để một số nguyên được chọn ngẫu nhiên từ 100 số nguyên dương đầu tiên là một số lẻ.
4. Tính xác suất để một ngày được chọn ngẫu nhiên trong một năm (có 366 ngày) là một ngày của tháng 4.
5. Tính xác suất của biến cố "tổng các số trên hai con súc sắc khi gieo đồng thời là một số chẵn".
6. Tính xác suất để một quân bài được chọn từ cỗ bài là quân át hoặc một quân cơ.
7. Tính xác suất xuất hiện mặt ngửa sáu lần liên tiếp khi tung một đồng xu.
8. Xác suất để một "xấp bài 5 quân" chứa quân át cơ bằng bao nhiêu?
9. Tính xác suất của biến cố "một xấp bài 5 quân không chứa quân quy cơ".
10. Xác suất để một "xấp bài 5 quân chứa hai quân rô và ba quân pích" bằng bao nhiêu?
11. Tính xác suất để một "xấp bài 5 quân chứa con hai rô, quân ba pích, quân sáu cơ, quân mười nhép, và quân ca cơ" bằng bao nhiêu?
12. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân chứa đúng một con át.
13. Tìm xác suất để một xấp bài 5 quân chứa ít nhất một con át.
14. Tính xác suất được một xấp bài 5 quân chứa các quân bài thuộc 5 bộ khác nhau.
15. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân chứa hai bộ đôi (tức là có hai con thuộc một bộ, hai con khác thuộc bộ thứ hai, con bài thứ năm thuộc bộ thứ ba).
16. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân có cùng hoa, nghĩa là cả năm con cùng một hoa.
17. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân thuộc năm bộ liên tiếp. Lưu ý rằng con át có thể được xem là con thấp nhất của xấp A–2–3–4–5 hoặc là quân cao nhất của xấp 10–J–Q–K–A.

18. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân cùng một hoa và thuộc năm bộ liên tiếp.

19*. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân trong đó năm quân thuộc năm bộ khác nhau nhưng không cùng hoa haythuộc 5 bộ liên tiếp.

20. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân là một xấp cùng hoa liên tiếp từ quân át xuống.

21. Tính xác suất của biến cố khi gieo 6 lần một con súc sắc không xuất hiện mặt có số chẵn.

22. Xác suất nhận được một số nguyên dương chia hết cho 3 khi nó được chọn ngẫu nhiên từ một tập các số nguyên dương không vượt quá 100 bằng bao nhiêu?

23. Tính xác suất nhận được một số nguyên dương chia hết cho 5 hoặc 7 khi nó được chọn ngẫu nhiên từ một tập các số nguyên dương không vượt quá 100.

24. Tìm xác suất trúng xổ số khi chọn đúng 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 30. b) 36. c) 42. d) 48.

25. Tìm xác suất trúng xổ số khi chọn đúng 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 50. b) 52. c) 56. d) 60.

26. Tìm xác suất không chọn đúng cả 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 40. b) 48. c) 56. d) 64.

27. Tìm xác suất khi chọn trúng chỉ một trong 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 50. b) 48. c) 56. d) 64.

28. Một người chơi siêu xổ số Pensylvania phải chọn 7 số từ 80 số nguyên dương đầu tiên. Nếu 7 số được chọn này nằm trong 11 số do hội đồng xổ số Pensylvania chọn thì sẽ trúng giải thưởng lớn. Tính xác suất để một người chơi trúng giải thưởng lớn.

29. Trong cuộc chơi siêu xổ số người chơi sẽ trúng thưởng nếu 8 số anh ta chọn trùng với 8 số do máy tính chọn từ các số nguyên dương không vượt quá 100. Tính xác suất trúng thưởng.

30. Tính xác suất trúng giải thưởng dành cho ai chọn được đúng 5 số (chứ không là 6) trong 6 số do máy tính chọn từ 40 số nguyên dương đầu tiên.

31. Trên vành của bánh xe dùng để quay xổ số có gắn 38 con số, trong đó có 18 số màu đỏ, 18 số màu đen, 2 số còn lại, không đỏ mà cũng không đen, là các số 0 và 00. Khi bánh xe quay, xác suất để nó dừng lại tại một con số bất kỳ là 1/38.

a) Tính xác suất để bánh xe dừng tại một số màu đỏ.

b) Tính xác suất để bánh xe dừng tại một con số màu đen hai lần liên tục.

c) Tính xác suất để bánh xe dừng tại số 0 hoặc 00.

d) Tính xác suất để bánh xe không dừng tại số 0 hoặc 00 năm lần liên tiếp.

e) Tính xác suất để bánh xe dừng tại một số nằm giữa 1 và 6 (kể cả 1 và 6) trong **một lần** quay nhưng không dừng lại giữa chúng trong lần quay **kế tiếp**.

32. Khả năng xảy ra tổng các số ở mặt trên bằng 8 khi gieo hai con súc sắc lớn hơn hay khi gieo ba con súc sắc là lớn hơn?

33. Khả năng xảy ra tổng các số ở mặt trên bằng 9 khi gieo hai con súc sắc lớn hơn hay khi gieo ba con súc sắc là lớn hơn?

34. Hai biến cố E_1 và E_2 được gọi là **độc lập** nếu $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\,p(E_2)$. Giả sử chúng ta tung đồng xu 3 lần. Mỗi biến cố là tập con của tập các kết cục có thể. Hãy xét xem mỗi cặp các biến cố sau đây có là độc lập hay không.

a) E_1 : lần đầu xuất hiện mặt sấp.

E_2 : lần hai xuất hiện mặt ngửa.

b) E_1 : lần đầu xuất hiện mặt sấp.

E_2 : hai lần chứ không phải ba lần, xuất hiện mặt ngửa liên tiếp.

c) E_1 : lần thứ hai xuất hiện mặt sấp.

E_2 : hai lần chứ không phải ba lần, xuất hiện mặt ngửa liên tiếp.

4.5. CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP SUY RỘNG

MỞ ĐẦU

Trong nhiều bài toán đếm, các phần tử có thể được sử dụng lặp lại. Ví dụ, các chữ cái hoặc các chữ số được dùng nhiều lần trong một biển đăng ký xe. Khi mua một tá quà tặng, mỗi loại có thể được lấy nhiều lần. Điều này không giống với bài toán đếm đã thảo luận ở các tiết trên trong đó chúng ta chỉ nghiên cứu các hoán vị và tổ hợp mà mỗi đối tượng chỉ được dùng nhiều nhất một lần. Trong tiết này chúng sẽ trình bày cách giải các bài toán đếm khi các phần tử có thể được dùng nhiều lần.

Cũng như vậy, một số bài toán đếm có chứa các phần tử giống nhau. Ví dụ, để đếm số cách khác nhau mà các chữ cái của từ *SUCCES* có thể được sắp xếp lại, cần phải xem xét tới việc sắp xếp các chữ cái giống nhau.

Ngoài ra, trong tiết này chúng ta cũng sẽ giải thích cách giải một lớp khá rộng các bài toán đếm khác, đó là bài toán đếm cách đặt các phần tử khác nhau vào trong hộp. Ví dụ, tính số cách chia một cỗ bài cho 4 người chơi.

Tóm lại, những phương pháp mô tả trước đây trong chương này và những phương pháp sẽ đưa vào trong tiết này sẽ tạo thành một bộ công cụ rất có ích để giải một lớp rất rộng các bài toán đếm. Kho công cụ này sẽ còn phong phú hơn khi mà trong Chương 5 chúng ta sẽ đưa thêm một số phương pháp nữa, lúc đó các bạn sẽ có thể giải được hầu hết các bài toán đếm thường gặp trong một phạm vi rộng lớn của các lĩnh vực nghiên cứu .

HOÁN VỊ CÓ LẶP

Chúng ta xét bài toán đếm có lặp sau đây.

Ví dụ 1. Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài n?

Giải: Theo quy tắc nhân, vì có 26 chữ cái và vì mỗi chữ có thể được dùng lại nên chúng ta có 26^n xâu với độ dài n.

■

Vấn đề sau đây liên quan tới xác suất cũng động chạm tới **chỉnh hợp** có lặp.

Ví dụ 2. Tính xác suất lấy liên tiếp được 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả đỏ và 7 quả xanh, nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình.

Giải: Theo quy tắc nhân, số các kết cục *có lợi* – tức là, số cách lấy được 3 quả bóng đỏ – là 5^3, vì mỗi lần lấy ta có 5 quả đỏ ở trong bình. Toàn bộ các kết cục có thể là 12^3, vì mỗi lần lấy bóng trong bình có 12 quả. Như vậy, xác suất cần tìm là $5^3/12^3$. Đây là một ví dụ về việc lấy **mẫu có hoàn lại.**

■

Số các chỉnh hợp lặp chập r từ tập n phần tử được cho trong định lý sau đây.

ĐỊNH LÝ 1. Số các chỉnh hợp lặp chập r từ tập n phần tử bằng n^r.

Chứng minh. Rõ ràng có cách n chọn một phần tử từ tập n phần tử cho mỗi một trong r vị trí của chỉnh hợp khi cho phép lặp. Vì vậy theo quy tắc nhân, có n^r chỉnh hợp lặp chập r từ tập n phần tử.

TỔ HỢP LẶP

Chúng ta nghiên cứu một ví dụ về tổ hợp có lặp.

Ví dụ 3. Giả sử trong một đĩa quả có táo, cam, lê mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa này nếu giả sử rằng thứ tự các quả được chọn không quan trọng, và các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.

Giải: Ta liệt kê danh sách tất cả 15 cách chọn 4 quả như sau :

4 táo	4 cam	4 lê
3 táo, 1 cam	3 táo, 1 lê	3 cam, 1 táo
3 cam, 1 lê	3 lê, 1 táo	3 lê, 1 cam

2 táo, 2 cam　　2 táo, 2 lê　　2 cam, 2 lê

2 táo, 1 cam, 1 lê　　2 cam, 1 táo, 1 lê　　2 lê, 1 táo, 1 cam

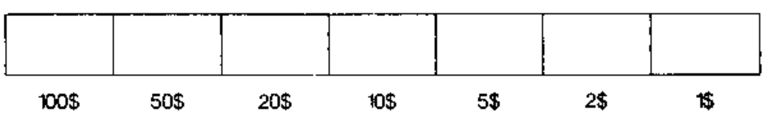
Lời giải là số các tổ hợp lặp chập 4 từ tập ba phần tử {*táo, cam, lê*}.

Để giải những bài toán đếm phức tạp hơn có dạng như trên chúng ta cần có phương pháp tổng quát đếm số tổ hợp chập r từ tập n phần tử. Trong Ví dụ 4 chúng ta sẽ minh họa phương pháp như thế.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 1\$, tờ 2\$, tờ 5\$, tờ 10\$, tờ 20\$, tờ 50\$ và tờ 100\$? Giả sử, thứ tự mà các tờ tiền được chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

Giải: Vì ta không kể tới thứ tự chọn tờ tiền, và vì ta chọn đúng 5 lần, mỗi lần lấy một từ 1 trong 7 loại tiền nên bài toán này liên quan tới việc tính tổ hợp lặp chập 5 từ 7 phần tử. Liệt kê tất cả các khả năng có thể là việc làm chán ngắt bởi lẽ có quá nhiều lời giải. Thay vào đó chúng ta sẽ minh hoạ cách sử dụng kỹ thuật đếm các tổ hợp lặp.

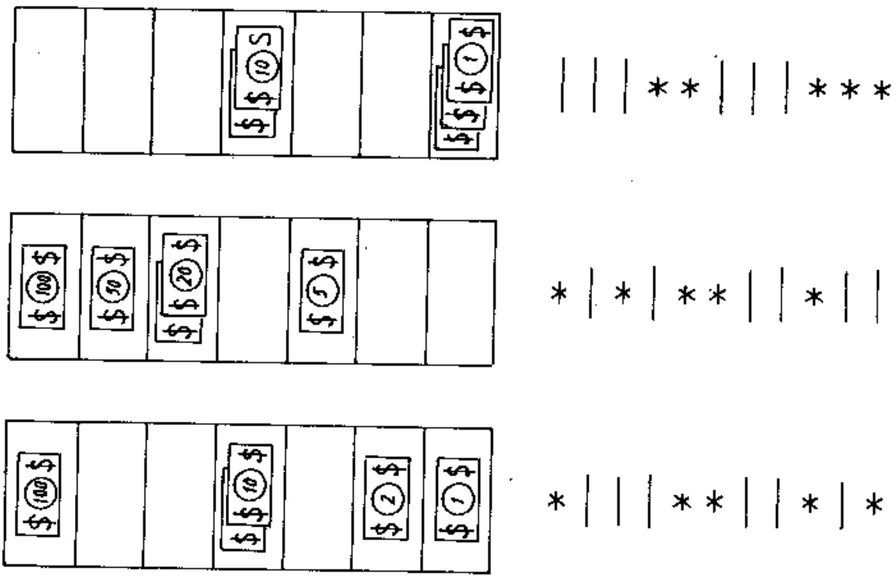
Giả sử két tiền có 7 ngăn, mỗi ngăn đựng một loại tiền, như minh họa trên hình 1. Các ngăn được phân cách bằng vách ngăn. Việc chọn 5 tờ tiền tương ứng với việc đặt 5 vật đánh dấu vào 7 ngăn chứa 7 loại tiền. Hình 2 minh họa sự tương ứng này cho 3 cách chọn 5 tờ tiền, trong đó 6 vách ngăn được biểu thị bằng 6 thanh đứng còn 5 tờ tiền biểu thị bằng các ngôi sao.



Hình 1. Két bảy ngăn chứa bảy loại tiền.

Số cách chọn 5 tờ tiền ứng với số cách sắp xếp 6 thanh và 5 ngôi sao. Do vậy, số cách chọn 5 tờ tiền bằng số cách chọn các vị trí cho 5 ngôi sao từ 11 vị trí có thể, tức là bằng

$$C(11,5) = \frac{11!}{5!6!} = 462$$



Hình 2. Ví dụ về các cách chọn năm loại tiền.

Tổng quát hóa điều vừa thảo luận chúng ta có định lý sau đây.

ĐỊNH LÝ 2. Số tổ hợp lặp chập r từ tập n phần tử bằng

$$C(n + r - 1, r).$$

Chứng minh. Mỗi tổ hợp lặp chập r từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $(n - 1)$ thanh đứng và r ngôi sao. Ta dùng $(n - 1)$ thanh để phân cách các ngăn. Ngăn thứ i chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong tổ hợp. Ví dụ, tổ hợp lặp chập 6 của tập 4 phần tử được biểu thị bằng 3 thanh đứng và 6 ngôi sao.

Dãy * * | * | | * * *

biểu thị tổ hợp chứa đúng 2 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ hai, không có phần tử thứ ba và 3 phần tử thứ tư của tập hợp.

Như ta đã thấy mỗi dãy $(n - 1)$ thanh và r ngôi sao ứng với một tổ hợp lặp chập r của tập n phần tử. Số các dãy như vậy bằng $C(n - 1 + r, r)$ vì mỗi dãy ứng với một cách chọn r chỗ cho r ngôi sao từ $n - 1 + r$ chỗ chứa $n - 1$ thanh và r ngôi sao. Đó là điều cần chứng minh.

Những ví dụ sau đây minh họa cách sử dụng Định lý 2.

Ví dụ 5. Một cửa hàng bánh bích quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh? Giả sử là ta chỉ quan tâm tới loại bánh mà không quan tâm tới hộp bánh cụ thể nào và thứ tự chọn chúng.

Giải: Số cách chọn 6 hộp bánh bằng số tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử. Theo định lý 2 ta nhận được $C(4 + 6 - 1,6) = C(9,6)$. Từ đó có

$$C(9,6) = C(9,3) = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84 \text{ cách chọn 6 hộp bánh quy.}$$

■

Định lý 2 cũng có thể dùng để tìm số nghiệm nguyên của các phương trình tuyến tính chịu những ràng buộc nào đó. Hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 6. Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Giải: Chúng ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 11 từ tập có 3 phần tử. Theo định lý 2 số đó bằng :

$$C(3 + 11 - 1,11) = C(13,11) = C(13,2) = \frac{13.12}{1.2} = 78$$

Chúng ta cũng có thể tìm được số nghiệm của phương trình này khi các ẩn số chịu những ràng buộc nào đó. Ví dụ, tìm số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn điều kiện $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 2$ và $x_3 \geqslant 3$. Dễ thấy một nghiệm của phương trình thỏa mãn những điều kiện này ứng với một cách chọn 11 phần tử trong đó có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3 trong đó có ít nhất một phần tử loại 1, hai phần tử loại 2 và ba phần tử loại 3. Vì thế, trước tiên ta chọn 1 phần tử loại 1, 2 phần tử loại 2 và 3 phần tử loại 3, sau đó chọn thêm 5 phần tử nữa. Theo định lý 2 ta có

$$C(3 + 5 - 1,5) = C(7,5) = C(7,2) = \frac{7.6}{1.2} = 21 \text{ cách.}$$

Vậy phương trình có 21 nghiệm thỏa mãn các điều kiện đã cho như trên.

■

Ví dụ 7. Cho biết giá trị của *k* sau khi đoạn giả lệnh dưới đây được thi hành.

```
k := 0
for i1 := 1 to n
    for i2 := 1 to i1
        .
        .
        .
        for im := 1 to im-1
            k := k + 1
```

Giải: Dễ thấy rằng giá trị khởi tạo của k bằng 0 và 1 được cộng dồn cho k mỗi lần vòng lặp lồng nhau được duyệt qua ứng với tập các số nguyên $i_1, i_2, \dots i_m$, trong đó

$$1 \leqslant i_m \leqslant i_{m-1} \leqslant \dots \leqslant i_1 \leqslant n$$

Số bộ các số nguyên như thế là số cách chọn có lặp m số nguyên từ tập $\{1, 2, ..., n\}$. Thực vậy mỗi lần một tập các số nguyên như thế được chọn, chúng ta sắp xếp chúng theo thứ tự không giảm. Khi đó sẽ xác định duy nhất một bộ $i_m, i_{m-1}, \dots i_1$. Ngược lại, mọi bộ như thế sẽ ứng với một tập không có thứ tự m phần tử hay một tổ hợp lặp chập m từ n phần tử. Vì vậy theo Định lý 2, suy ra $k = C(n + m - 1, m)$ sau khi đoạn giả mã này được thi hành.

■

BẢNG 1. Tổ hợp và chỉnh hợp có lặp hay không lặp

Loại	Có lặp không?	Công thức
Chỉnh hợp chập r	Không	$\frac{n!}{(n-r)!}$
Tổ hợp chập r	Không	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
Chỉnh hợp chập r	Có	n^r
Tổ hợp chập r	Có	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

Bảng 1 trên đây cho các công thức tính số cách chọn có thứ tự hay không kể thứ tự r phần tử từ tập n phần tử có hoàn lại hay không hoàn lại.

HOÁN VỊ CỦA TẬP HỢP CÓ CÁC PHẦN TỬ GIỐNG NHAU

Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần. Chúng ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 8. Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ *SUCCESS*?

Giải: Vì một số chữ cái của từ *SUCCESS* là như nhau nên câu trả lời không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được. Từ này chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được ta nhận thấy có $C(7,3)$ cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống. Có $C(4,2)$ cách chọn hai chỗ cho hai chữ C, còn lại hai chỗ trống. Có thể đặt chữ U bằng $C(2,1)$ cách, và $C(1,1)$ cách đặt chữ E vào xâu. Theo quy tắc nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo được là :

$$C(7,3)\ C(4,2)\ C(2,1)\ C(1,1) = \frac{7!.4!.2!.1!}{3!.4!.2!.2!.1!.1!.1!.0!} = \frac{7!}{3!.2!.1!.1!} = 420$$

■

Bằng cách lý luận tương tự như trong ví dụ trên chúng ta có thể chứng minh được định lý sau.

ĐỊNH LÝ 3. Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., và n_k phần tử như nhau thuộc loại k, bằng

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Chứng minh. Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy có $C(n,n_1)$ cách giữ n_1 chỗ cho n_1 phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống. Sau đó có $C(n - n_1, n_2)$ cách đặt n_2 phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại $n - n_1 - n_2$ chỗ trống. Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4, ..., loại $k - 1$ vào chỗ trống trong hoán vị. Cuối cùng có $C(n - n_1 - ... - n_{k-1}, n_k)$ cách đặt n_k phần tử loại k vào hoán vị. Theo quy tắc nhân tất cả các hoán vị có thể là

$$C(n,\ n_1)\ C(n-n_1,\ n_2)\ ...\ C(n-n_1-...-n_{k-1},\ n_k) =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-...-n_{(k-1)})!}{n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

■

SỰ PHÂN BỐ CÁC ĐỒ VẬT VÀO TRONG HỘP

Một số bài toán đếm có thể giải bằng cách liệt kê những cách đặt các đối tượng khác nhau vào trong những hộp khác nhau. Chúng ta xét ví dụ sau, trong đó các đối tượng là các lá bài còn các hộp là "những người chơi".

Ví dụ 9. Có bao nhiêu cách chia những *xấp bài 5 quân* cho mỗi một trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân?

Giải: Chúng ta sẽ dùng quy tắc nhân để giải bài toán này. Trước tiên chúng ta thấy người đầu tiên có thể nhận được 5 quân bài bằng $C(52,5)$ cách. Người thứ hai có thể được chia 5 quân bài bằng $C\ (47,5)$ cách, vì chỉ còn 47 quân bài. Người thứ ba có thể nhận được 5 quân bài bằng $C(42,5)$ cách. Cuối cùng, người thứ tư nhận được 5 quân bài bằng $C\ (37,5)$ cách. Vì vậy, tổng cộng có

$$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5) = \frac{52!}{47!5!}\ \frac{47!}{42!5!}\ \frac{42!}{37!5!}\ \frac{37!}{32!5!} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

cách chia cho 4 người mỗi người một xấp 5 quân bài.

■

Chú ý. Lời giải của Ví dụ 9 cũng bằng số các hoán vị 52 phần tử trong đó có 4 loại, mỗi loại có 5 phần tử giống hệt nhau, và loại thứ năm có 32 phần tử. Thật vậy, chúng ta có thể xây dựng được một phép tương ứng một – một giữa các hoán vị và các cách chia bài. Để làm điều đó, giả sử chúng ta có 52 ô được đánh số từ 1 tới 52. Mỗi một trong 4 người chơi được "phát" 5 ô. Những ô của người thứ nhất là ô loại 1, những ô chia cho người thứ hai là ô loại hai, v.v. và 32 ô còn lại là các ô loại 5. Khi đó một cách chia xấp 5 quân bài cho 4 người chính là một cách sắp xếp mỗi quân bài vào một ô.

Ví dụ 9 là một bài toán điển hình về việc phân bố các đồ vật khác nhau vào các hộp khác nhau. Các đồ vật là 52 quân bài, còn 5 hộp là 4 người chơi và số còn lại để trên bàn. Số cách sắp xếp các đồ vật vào trong hộp được cho bởi định lý sau.

ĐỊNH LÝ 4. Số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào trong k hộp khác nhau sao cho có n_i vật được đặt vào hộp thứ i, với $i = 1, 2, \ldots, k$, bằng

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Chúng tôi để dành cho độc giả tự chứng minh định lý này (xem Bài tập 43 và 44).

BÀI TẬP

1. Có bao nhiêu cách chọn có hoàn lại lần lượt 5 phần tử từ một tập 3 phần tử?

2. Có bao nhiêu cách chọn có hoàn lại lần lượt 5 phần tử từ một tập 5 phần tử?

3. Có bao nhiêu xâu gồm 6 chữ cái?

4. Hàng ngày một sinh viên chọn ngẫu nhiên một chiếc bánh san−đuých để ăn trưa từ một chồng bánh được gói kín. Giả sử có 6 loại bánh, hỏi có bao nhiêu cách anh sinh viên chọn bánh trong 7 ngày của một tuần, nếu có kể tới thứ tự những chiếc bánh được chọn?

5. Có bao nhiêu cách phân 3 công việc cho 5 người làm, nếu một người có thể làm được nhiều việc?

6. Tính số cách chọn 5 phần tử không có thứ tự từ một tập có 3 phần tử nếu cho phép chọn có hoàn lại.

7. Tính số cách chọn 3 phần tử không có thứ tự từ một tập có 5 phần tử nếu cho phép chọn có hoàn lại.

8. Có bao nhiêu cách chọn một tá quà tặng từ một cửa hàng có 21 loại khác nhau?

9. Trong một cửa hàng bán túi đựng hàng có các loại túi sau : túi đựng hạt giống cây thuốc lá, túi đựng trứng, túi đựng muối, túi đựng hạt vừng, túi đựng hạt cải, túi đựng nho, và túi hình thường. Có bao nhiêu cách chọn :

a) 6 túi?

b) Một tá túi?

c) Hai tá túi?

đ) Một tá túi sao cho mỗi loại có ít nhất một túi?

e) Một tá túi sao cho ít nhất có 3 túi trứng và có không quá 2 túi muối?

10. Một cửa hàng bánh sừng bò có loại bánh bình thường, bánh có anh đào, bánh có hạnh nhân, bánh có sôcôla, bánh táo, bánh mận. Có bao nhiêu cách chọn : 6 loại bánh.

a) Một tá bánh?

b) Ba tá?

c) Hai tá sao cho mỗi loại có ít nhất hai chiếc?

d) Hai tá sao cho có không quá hai chiếc bánh táo?

e) Hai tá sao cho có ít nhất 5 chiếc bánh có sôcôla và 3 chiếc bánh mận?

f) Hai tá sao cho có ít nhất một chiếc bánh bình thường, ít nhất hai chiếc có anh đào, ít nhất 1 chiếc có hạnh nhân, ít nhất có hai chiếc bánh táo và có không quá ba chiếc có mận?

11. Có bao nhiêu cách chọn tám đồng tiền xu từ một hộp chứa 100 đồng một xu giống nhau và 80 đồng năm xu giống hệt nhau?

12. Một "chú lợn tiết kiệm" chứa 20 đồng xu. Có thể có bao nhiêu tổ hợp khác nhau các đồng một xu, đồng năm xu, đồng mười xu, đồng hai lăm xu, đồng năm mươi xu trong đó?

13. Một nhà xuất bản có 3000 bản của một cuốn sách toán học rời rạc. Có bao nhiêu cách cất chúng vào trong ba kho hàng nếu các cuốn sách giống hệt nhau?

14. Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

15. Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho

a) $x_1 \geq 1$?

b) $x_i \geq 2$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

c) $0 \leq x_1 \leq 10$?

d) $0 \leq x_1 \leq 3$ và $1 \leq x_2 \leq 4$, và $x_3 \geq 15$?

16. Phương trình

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho

a) $x_i \geq 1$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

b) $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 4$, $x_5 > 5$ và $x_6 \geq 6$?

c) $x_1 \leq 5$?

d) $x_1 < 8$ và $x_2 > 8$?

17. Có bao nhiêu xâu gồm 10 chữ số của hệ tam phân (0,1 hoặc 2) chứa đúng hai chữ số 0, ba chữ số 1 và năm chữ số 2?

18. Có bao nhiêu xâu 20 chữ số của hệ thập phân chứa đúng hai chữ số 0, bốn chữ số 1, ba chữ số 2, một chữ số 3, hai chữ số 4, ba chữ số 5, hai chữ số 7 và ba chữ số 9?

19. Một gia đình có 14 đứa con trong đó có hai nhóm sinh ba, ba cặp sinh đôi và hai đứa trẻ sinh một. Những đứa trẻ cùng sinh đôi hoặc sinh ba giống nhau như đúc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp bọn trẻ ngồi thành một dãy?

20. Bất đẳng thức

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm? (*Gợi ý* : Đưa vào một biến phụ x_4 sao cho $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$).

21. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000 có tổng các chữ số của nó bằng 19?

22. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000 có đúng một chữ số bằng 9 và có tổng các chữ số bằng 13?

23. Trong kỳ thi kết thúc môn toán học rời rạc có 10 câu hỏi. Có bao nhiêu cách gán điểm cho các câu hỏi nếu tổng số điểm bằng 100 và mỗi câu ít nhất được 5 điểm?

24. Chứng tỏ rằng có $C(n + r - q_1 - q_2 - ... - q_r - 1, n - q_1 - q_2 - ... - q_r)$ cách chọn không kể thứ tự n phần tử với r loại khác nhau trong đó có q_1 phần tử loại 1, q_2 phần tử loại 2, ..., và q_r phần tử loại r.

25. Có bao nhiêu xâu nhị phân khác nhau nếu chúng được bắt đầu bằng bit 1 và chứa thêm ba bit 1 nữa, nó còn chứa tất cả 12 bit 0 và sau mỗi bit 1 có ít nhất hai bit 0?

26. Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *MISSISSIPPI*, yêu cầu phải dùng tất cả các chữ?

27. Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *ABRACADABRA* yêu cầu phải dùng tất cả các chữ?

28. Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *AARDVARK*, yêu cầu phải dùng tất cả các chữ và ba chữ *A* phải đứng liền nhau?

29. Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *ORONO* nếu dùng một vài hoặc tất cả các chữ?

30. Có bao nhiêu xâu khác nhau có 5 hoặc nhiều hơn các ký tự có thể lập được từ các chữ cái trong từ *SEERESS*?

31. Có bao nhiêu xâu khác nhau có 7 hoặc nhiều hơn các ký tự có thể lập được từ các chữ cái trong từ *EVERGREEN*?

32. Có bao nhiêu xâu nhị phân khác nhau có thể lập được nếu dùng 6 chữ số 1 và 8 chữ số 0?

33. Một sinh viên có ba quả xoài, hai quả đu đủ và hai quả ki-vi. Nếu anh ta ăn mỗi ngày một quả và chỉ có loại quả là quan trọng, thì anh ta có bao nhiêu cách ăn các quả này?

34. Một giáo sư cất bộ sưu tập gồm 40 số báo toán học vào 4 chiếc ngăn tủ, mỗi ngăn đựng 10 số. Có bao nhiêu cách có thể cất các tờ báo vào các ngăn nếu :

a) Mỗi ngăn được đánh số sao cho có thể phân biệt được.

b) Các ngăn là giống hệt nhau?

35. Trong không gian Oxyz một con bọ di chuyển bằng cách nhảy từng bước dài 1 đơn vị theo hướng của trục x hoặc của trục y hoặc của trục z. (Không được nhảy giật lùi theo chiều âm của các trục tọa độ). Tính số cách để con bọ đó có thể di chuyển từ gốc tọa độ (0, 0, 0) tới điểm (4, 3, 5).

36. Tính số cách một con bọ trong không gian Oxyzw có thể di chuyển từ gốc tọa độ (0, 0, 0, 0) tới điểm (4, 3, 5, 4) bằng cách nhảy từng bước dài 1 đơn vị theo hướng dương của trục x hoặc của trục y hoặc của trục z hoặc của trục w.

37. Có bao nhiêu cách chia một cỗ bài chuẩn 52 quân cho năm người chơi, mỗi người một xấp bảy quân?

38. Khi chơi bridge, người ta chia cỗ bài chuẩn 52 quân cho 4 người. Tính số cách chia cho 4 người.

39. Người ta chia một cỗ bài chuẩn 52 quân cho 4 người chơi. Hãy tính xác suất để mỗi người nhận được một quân át.

40. Có bao nhiêu cách xếp 12 cuốn sách lên 4 giá sách khác nhau nếu :

a) Các cuốn sách là các bản chụp của cùng một đầu sách?

b) Không có hai cuốn cùng đầu sách, và có kể tới vị trí của các cuốn sách trên giá?

(*Gợi ý* : Chia quá trình trên thành việc xếp từng cuốn sách riêng rẽ. Đánh số các giá sách là 1, 2, 3, 4. Ký hiệu các cuốn sách là b_i (i = 1, 2,..., 12). Đặt b_1 vào bên phải của một trong các giá 1, 2, 3, 4. Sau đó lần lượt đặt b_2, b_3, ..., và b_{12}).

41. Có bao nhiêu cách xếp n cuốn sách lên k giá sách khác nhau nếu :

a) Các cuốn sách là các bản chụp của cùng một đầu sách?

b) Không có hai cuốn cùng đầu sách, và có kể tới vị trí của các cuốn sách trên giá.

42. Trên giá sách có 12 cuốn xếp thành một hàng. Có bao nhiêu cách chọn năm cuốn sao cho không có hai cuốn nào ở liền kề nhau?
(*Gợi ý* : Biểu diễn các cuốn sách được chọn bằng các thanh đứng, các cuốn không được chọn bằng các ngôi sao. Đếm số các dãy gồm 5 thanh và 7 ngôi sao, sao cho không có hai thanh nào liền kề nhau).

43*. Dùng quy tắc nhân, hãy chứng minh Định lý 4 bằng cách đầu tiên đặt các vật vào hộp thứ nhất, sau đó vào hộp thứ hai, v.v...

44*. Chứng minh Định lý 4 hằng cách đầu tiên xây dựng một phép tương ứng một – một giữa các hoán vị của một tập n phần tử chia thành k loại, loại i có n_i phần tử giống nhau ($i = 1, 2,...k$) và các cách bỏ n vật vào k hộp sao cho có n_i vật được bỏ vào hộp i ($i = 1, 2, ..., k$) và sau đó áp dụng Định lý 3.

45*. Trong bài tập này chúng ta sẽ chứng minh Định lý 2 bằng cách xây dựng một phép tương ứng một – một giữa tập các tổ hợp có lặp chập r từ tập $S = \{1, 2, ..., n\}$ và tập các tổ hợp chập r từ tập $T = \{1, 2, 3,...,n + r - 1\}$

a) Sắp xếp các phần tử trong một tổ hợp lặp chập r của S thành một dãy tăng $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_r$. Chỉ ra rằng dãy tạo nên bằng cách thêm $k - 1$ vào số hạng thứ k là thực sự tăng. Khẳng định dãy này được tạo bởi r phần tử khác nhau của T.

b) Chứng tỏ rằng thủ tục mô tả trong a) xác định một phép tương ứng một – một giữa tập các tổ hợp lặp chập r từ tập S và tập các tổ hợp chập r từ tập T. (*Gợi ý* : Hãy chỉ ra phép tương ứng này có ngược bằng cách một tổ hợp lặp chập r của S được tạo bằng cách bớt đi $k - 1$ từ phần tử thứ k được gán cho một tổ hợp chập r của T với.

$$1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_r \leq n + r - 1.$$

c) Kết luận rằng có $C(n + r - 1, r)$ tổ hợp lặp chập r từ tập có n phần tử.

46. Có bao nhiêu cách phân phối năm đối tượng khác nhau vào ba hộp giống nhau?

47. Có bao nhiêu cách phân phối năm đối tượng giống nhau vào ba hộp giống nhau?

48. Có bao nhiêu số hạng khác nhau trong khai triển của $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$ sau khi cộng tất cả các số hạng đồng dạng với nhau?

49*. Hãy chứng minh **định lý đa thức** : Nếu n là một số nguyên dương thì $$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_m=n} C(n, n_1, n_2, ..., n_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_m^{n_m}$$

trong đó $C(n ; n_1, n_2,..., n_m) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_m!}$ là **hệ số đa thức.**

50. Hãy tìm khai triển $(x + y + z)^4$

51. Tìm hệ số của $x^3y^2z^5$ trong $(x + y + z)^{10}$.

52. Có bao nhiêu số hạng trong khai triển của $(x + y + z)^{100}$?

4.6. SINH CÁC HOÁN VỊ VÀ TỔ HỢP

MỞ ĐẦU

Trong những tiết trước của chương này chúng ta đã mô tả các phương pháp đếm số các hoán vị và tổ hợp thuộc các kiểu khác nhau. Nhưng nhiều khi chúng ta lại cấu tạo ra chính các hoán vị hoặc tổ hợp chứ không phải là đếm chúng. Hãy xem xét ba ví dụ sau. Ví dụ đầu tiên, giả sử một thương nhân cần đi bán hàng ở 6 thành phố khác nhau. Để mất tối thiểu thời gian đi lại anh ta cần phải đi qua các thành phố theo thứ tự nào? Muốn giải bài toán này chúng ta phải xác định thời gian đi lại cho mỗi một trong 6! = 720 thứ tự khác nhau đi qua 6 thành phố, sau đó chọn một lịch trình có thời gian nhỏ nhất. Ví dụ thứ 2, giả sử có một tập gồm 6 số. Hãy chọn ra một số phần tử của tập này sao cho tổng của chúng bằng 100. Một cách tìm các số này là tạo ra các tất cả 2^6 = 64 tập con rồi kiểm tra tổng các phần tử của chúng. Ví dụ thứ 3, giả sử một phòng thí nghiệm có 95 nhân viên. Để thực hiện một đề án cần một nhóm 12 người và một tập 25 kỹ xảo. (Mỗi nhân viên có thể thực hiện được một hoặc nhiều kỹ xảo). Một cách tìm những nhóm 12 người để làm một đề án với một tập kỹ xảo cho trước sẽ sinh ra tất cả các tập con 12 người và sau đó kiểm tra xem họ có thể thực hiện được những kỹ xảo đã cho không. Những ví dụ này chứng tỏ rằng thường thường chúng ta cần phải sinh ra các hoán vị hay tổ hợp để giải quyết các hài toán đặt ra.

SINH CÁC HOÁN VỊ

Mọi tập n phần tử đều có thể tương ứng một với tập $\{1,2,\ldots n\}$. Chúng ta có thể liệt kê các hoán vị của một tập bất kỳ gồm n phần tử bằng cách sinh ra hoán vị của tập n số nguyên dương nhỏ nhất, sau đó thay thế các số nguyên này bằng các phần tử tương ứng của chúng. Có nhiều thuật toán đã được phát triển để sinh ra n ! hoán vị của tập này. Chúng ta sẽ mô tả một trong các phương pháp đó, phương pháp liệt kê các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ theo **thứ tự từ điển**. Khi đó, hoán vị $a_1a_2 \ldots a_n$ được gọi là đi trước (nhỏ hơn) hoán vị $b_1b_2 \ldots b_n$ nếu với k nào đó $(1 \leq k \leq n)$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, và $a_k < b_k$. Nói cách khác, một hoán vị của tập n số nguyên dương đầu tiên được gọi là đi trước (theo thứ tự từ điển) một hoán vị khác nếu con số của hoán vị đầu tại vị trí đầu tiên mà hai hoán vị khác nhau, nhỏ hơn con số thuộc hoán vị thứ hai cũng ở vị trí đó.

Ví dụ 1. Hoán vị 23415 của tập {1, 2, 3, 4, 5} là đi trước hoán vị 23514, vì những hoán vị này trùng nhau ở hai vị trí đầu tiên, nhưng số 4 ở vị trí thứ ba của hoán vị đầu là nhỏ hơn số 5 cũng ở vị trí thứ ba của hoán vị sau. Tương tự hoán vị 41532 là đi trước 52143.

■

Thuật toán sinh các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ dựa trên thủ tục xây dựng hoán vị kế tiếp, theo thứ tự từ điển, của hoán vị cho trước a_1, a_2,..., a_n. Bây giờ chúng ta sẽ chỉ rõ cách xây dựng hoán vị liên tiếp này. Đầu tiên ta giả sử $a_{n-1} < a_n$. Rõ ràng nếu đổi chỗ a_{n-1} và a_n cho nhau thì sẽ nhận được hoán vị mới đi sau (lớn hơn) hoán vị đã cho, và không thể có một hoán vị nào khác lớn hơn hoán vị xuất phát mà lại bé hơn hoán vị nhận được bằng việc đổi chỗ a_{n-1} và a_n cho nhau. Ví dụ, hoán vị liền tiếp sau hoán vị 234156 là hoán vị 234165. Nếu $a_{n-1} > a_n$ thì không thể nhận được hoán vị lớn hơn bằng cách đổi chỗ của hai số hạng này trong hoán vị. Bây giờ ta hãy xem xét ba số. Nếu $a_{n-2} < a_{n-1}$ thì có thể sắp xếp lại ba số cuối cùng để có thể nhận một hoán vị mới liền sau hoán vị xuất phát. Đặt số nhỏ hơn trong hai số a_{n-1} và a_n vào vị trí $n - 2$, sau đó đặt số nguyên còn lại và số a_{n-2} vào hai vị trí cuối cùng theo thứ tự tăng dần. Ví dụ, hoán vị liền sau hoán vị 234165 là 234516.

Nếu $a_{n-2} > a_{n-1}$ (và $a_{n-1} > a_n$), khi đó không thể nhận được hoán vị lớn hơn bằng cách đổi chỗ ba số hạng cuối cùng của hoán vị. Dựa trên những nhận xét này ta có thể mô tả phương pháp tổng quát tạo hoán vị liền sau (theo thứ tự từ điển) của hoán vị cho trước a_1, a_2, ..., a_n như sau.

Trước tiên, tìm các số nguyên a_j và a_{j+1} sao cho $a_j < a_{j+1}$ và $a_{j+1} > a_{j+2} > ... > a_n$, tức là tìm cặp số nguyên liền kề đầu tiên tính từ bên phải sang bên trái của hoán vị mà số đầu nhỏ hơn số sau. Sau đó, để nhận được hoán vị liền sau ta đặt vào vị trí thứ j số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j của tập $a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$, rồi liệt kê theo thứ tự tăng dần của các số còn lại của $a_j, a_{j+1}, a_{j+2},..., a_n$ vào các vị trí $j + 1,..., n$. Dễ thấy không có hoán vị nào lớn hơn hoán vị xuất phát và nhỏ hơn hoán vị vừa tạo ra. (Độc giả kiểm tra lại sự kiện này như một bài tập).

Ví dụ 2. Tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 362541

Giải: Cặp số nguyên đầu tiên tính từ phải qua trái có số trước nhỏ hơn số sau là $a_3 = 2$ và $a_4 = 5$. Số nhỏ nhất trong các số bên phải của số 2 mà lại lớn hơn 2 là số 4. Đặt số 4 vào vị trí thứ 3. Sau đó đặt các số 2, 5, 1 theo thứ tự tăng dần vào ba vị trí còn lại. Hoán vị liền sau hoán vị đã cho là 364125.

■

Để sinh ra $n!$ hoán vị của các số 1, 2, ..., n chúng ta sẽ bắt đầu bằng hoán vị nhỏ nhất theo thứ tự từ điển, tức là 12 ... n và áp dụng liên tiếp $(n! - 1)$ lần thủ tục đã mô tả ở trên. Bằng cách đó ta nhận được tất cả các hoán vị của n số nguyên.

Ví dụ 3. Hãy tạo ra các hoán vị của các số nguyên 1, 2, 3 theo thứ tự từ điển.

Giải: Chúng ta bắt đầu bằng hoán vị 123. Bằng cách đổi chỗ 3 và 2 ta nhận được hoán vị tiếp theo là 132. Tiếp nữa, vì 3 > 2 và 1 < 3 nên phải xét cả 3 số trong nhóm hoán vị này. Đặt số nhỏ nhất trong hai số 3 và 2 vào vị trí thứ nhất, sau đó là hai số 1 và 3 vào vị trí thứ 2 và thứ 3 theo thứ tự tăng dần, tức là ta có 213. Đổi chỗ 1 và 3 cho nhau vì 1 < 3 được 231. Vì 2 < 3 nên được đặt 3 vào vị trí đầu tiên và sau đó là 1 và 2, tức là 312. Cuối cùng, đổi chỗ 1 với 2 ta nhận được hoán vị lớn nhất là 321 .

■

Thuật toán 1 sau đây biểu thị thủ tục tìm hoán vị liền sau, theo thứ tự từ điển, một hoán vị cho trước khác hoán vị lớn nhất $n\ n - 1 ... 21$.

ALGORITHM 1. SINH HOÁN VỊ LIỀN SAU, THEO THỨ TỰ TỪ ĐIỂN, MỘT HOÁN VỊ CHO TRƯỚC.

procedure *Hoán vị liền sau* $(a_1a_2 \dots a_n)$: hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ khác n n-1 ... 2 1)

$j := n - 1$

while $a_j > a_{j+1}$

$j := j - 1$; {j là chỉ số lớn nhất mà $a_j < a_{j+1}$}

$k := n$

while $a_j > a_k$

$k := k - 1$ {a_k là số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j và nằm bên phải a_j}

đổi chỗ (a_j, a_k)

$r := n$

$s := j + 1$

while $r > s$

begin

đổi chỗ a_r, a_s

$r := r - 1$; $s := s + 1$

end

{Điều này sẽ xếp phần đuôi của hoán vị ở sau vị trí thứ j theo thứ tự tăng dần.}

SINH CÁC TỔ HỢP

Làm thế nào để tạo ra tất cả các tổ hợp các phần tử của một tập hữu hạn? Vì tổ hợp chính là một tập con, nên ta có thể dùng phép tương ứng một - một giữa các tập con của $\{a_1a_2, \dots, a_n\}$ và xâu nhị phân độ dài n.

Nhớ lại là một xâu nhị phân ứng với một tập con, tại vị trí k, sẽ có số 1 hoặc số 0 tùy theo phần tử a_k thuộc vào tập con đó hay không. Nếu có thể liệt kê tất cả các xâu nhị phân ra được thì ta sẽ nhận được tất cả các tập con.

Mặt khác ta thấy một xâu nhị phân độ dài n cũng là khai triển nhị phân của một số nguyên nằm giữa 0 và $2^n - 1$. Khi đó 2^n xâu nhị phân có thể liệt kê theo thứ tự tăng dần của số nguyên trong biểu diễn nhị phân của chúng. Chúng ta sẽ bắt đầu từ xâu nhị phân bé nhất 00...00 (n số 0). Mỗi bước để tìm xâu liền sau ta tìm vị trí đầu tiên tính từ phải qua trái mà ở đó là số 0, sau đó thay tất cả số 1 ở bên phải số này bằng 0 và đặt số 1 vào chính vị trí này.

Ví dụ 4. Hãy tìm xâu nhị phân liền sau của 10001 00111.

Giải: Bít đầu tiên từ bên phải sang bằng 0 là bít thứ tư. Ta thay nó bằng số 1 và ba bit bên 1 phải nó được thay bằng số 0, từ đó ta nhận được dãy nhị phân liền sau là 1 0001 01000.

■

Thủ tục tạo ra xâu nhị phân liền sau một xâu nhị phân cho trước $b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 b_0$ được cho dưới dạng Thuật toán 2.

ALGORITHM 2. SINH XÂU NHỊ PHÂN LIỀN SAU.

procedure *Xâu nhị phân liền sau* ($b_{n-1}b_{n-2} \ldots b_1b_0$: xâu nhị phân khác 11 ...11)

$i := 0$

while $b_i = 1$

begin

  $b_i := 0$

  $i := i + 1$

end

$b_i := 1$

■

Tiếp theo chúng ta sẽ trình bày thuật toán tạo các tổ hợp chập r từ n phần tử $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mỗi tổ hợp chập r có thể biểu diễn bằng một xâu tăng. Khi đó có thể liệt kê các tổ hợp theo thứ tự từ điển. Có thể xây dựng tổ hợp liền sau tổ hợp $a_1a_2 \dots a_r$ bằng cách sau. Trước hết, tìm phần tử đầu tiên a_i trong dãy đã cho kể từ phải qua trái sao cho $a_i \neq n - r + i$. Sau đó thay a_i bằng $a_i + 1$, và a_j bằng $a_i + j - i + 1$ với $j = i + 1, i + 2, \dots, r$. Chúng tôi để lại cho độc giả tự chứng minh thủ tục trên sinh ra tổ hợp liền sau. Còn bây giờ chúng ta hãy xét ví dụ minh họa thủ tục này.

Ví dụ 5. Tìm tổ hợp chập 4 từ tập {1, 2, 3, 4, 5, 6} đi liền sau tổ hợp {1, 2, 5, 6}.

Giải: Lùi từ phải qua trái ta thấy $a_2 = 2$ là số hạng đầu tiên của tổ hợp đã cho thỏa mãn điều kiện $a_i \neq 6 - 4 + i$. Để nhận được tổ hợp tiếp sau ta tăng a_i lên một đơn vị , tức $a_2 = 3$, sau đó đặt $a_3 = 3+1 = 4$ và $a_4 = 3 + 2 = 5$. Vậy tổ hợp liền nhau tổ hợp đã cho là {1,3,4,5}

Thủ tục này được cho dưới dạng thuật toán như sau.

ALGORITHM 3. SINH TỔ HỢP CHẬP *R* LIỀN SAU THEO THỨ TỰ TỪ ĐIỂN

procedure *Tổ hợp liền sau* ($\{a_1a_2 \dots a_r\}$: tập con thực sự của tập
$\{1, 2, \dots, n\}$ không bằng $\{n - r + 1, \dots, n\}$
với $a_1 < a_2 < \dots < a_r$)

$i := r$

while $a_i = n - r + i$

$\quad i := i - 1$

$a_i := a_i + 1$

for $j := i + 1$ **to** r

$\quad a_j := a_i + j - i$

BÀI TẬP

1. Tìm hoán vị theo thứ tự từ điển đi liền sau sau mỗi hoán vị sau đây.

a) 1432	b) 54123	c) 12453
d) 45231	e) 6714235	f) 31528764

2. Sáp xếp các hoán vị sau theo thứ tự từ điển : 234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562, 432561, 654321, 654312, 435612.

3. Dùng Thuật toán 1 hãy tạo ra 24 hoán vị của 4 số nguyên dương đầu tiên theo thứ tự từ điển.

4. Dùng Thuật toán 2 hãy liệt kê tất cả các tập con của tập $\{1, 2, 3, 4\}$.

5. Dùng Thuật toán 3 hãy liệt kê tất cả các tổ hợp chập 3 của $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Chứng tỏ rằng Thuật toán 1 sinh ra hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển.

7. Chứng tỏ rằng Thuật toán 3 sinh ra tổ hợp liền sau theo thứ tự từ điển của một tổ hợp cho trước.

8. Hãy xây dựng một thuật toán sinh ra chỉnh hợp chập r từ tập n phần tử.

9. Hãy liệt kê tất cả các chỉnh hợp chập 3 của $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Những bài tập còn lại trong mục này sẽ xây dựng Thuật toán khác tạo ra hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$. Thuật toán này dựa trên khai triển Cantor của một số nguyên. Mọi số nguyên không âm nhỏ hơn n! có duy nhất khai triển Cantor :

$$a_1\, 1! + a_2 2! + \ldots + a_{n-1}(n-1)!$$

trong đó a_i là các số nguyên không âm không vượt quá i, với $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Các số $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ được gọi là các số Cantor của số nguyên này.
Cho hoán vị của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$, giả sử a_{k-1} với $k = 2, 3, \ldots, n$ là số các số nguyên nhỏ hơn k mà đứng sau k trong hoán vị. Ví dụ, trong hoán vị 43215, $a_1 = 1$ vì chỉ có một số nhỏ hơn 2 mà đứng sau 2. Tương tự, $a_2 = 2$ vì có 2 số nhỏ hơn 3 và đứng sau 3, tiếp theo ta có $a_3 = 3$ và $a_4 = 0$. Ta nghiên cứu một hàm từ tập các hoán vị $\{1, 2, \ldots, n\}$ tới tập các số nguyên không âm nhỏ hơn n!. Mỗi hoán vị ứng với một bộ các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$, theo định nghĩa chính là các số Cantor, xác định duy nhất một số nguyên không âm nhỏ hơn n!.

10. Tìm các số nguyên tương ứng với các hoán vị sau :

a) 246531 b) 12345 c) 654321

11*. Chỉ ra rằng phép tương ứng mô tả ở trên là một song ánh giữa tập các hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$ và các số nguyên không âm nhỏ hơn $n!$.

12. Tìm các hoán vị của $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ứng với các số nguyên sau đây với phép song ánh được định nghĩa như trên.

a) 3 b) 89 c) 111.

13. Xây dựng thuật toán sinh ra tất cả các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ dựa trên phép tương ứng đã được mô tả ở trước Bài tập 10.

14*. Phương pháp sau đây có thể tạo một hoán vị ngẫu nhiên của n phần tử. Đầu tiên, đổi chỗ số hạng thứ n và số hạng thứ $r(n)$, trong đó $r(n)$ là số nguyên được chọn ngẫu nhiên sao cho $1 \leqslant r(n) \leqslant n$. Tiếp theo, chúng ta đổi chỗ số hạng thứ $(n - 1)$ của dãy nhận được cho số hạng thứ $r(n - 1)$, trong đó $r(n - 1)$ là số nguyên được chọn ngẫu nhiên sao cho $1 \leqslant r(n - 1) \leqslant n - 1$. Tiếp tục quá trình này cho tới khi $j = n$, trong đó tại bước j ta đổi chỗ số hạng thứ $(n - j + 1)$ của dãy nhận được cho số hạng thứ $r(n - j + 1)$, trong đó $r(n - j + 1)$ là số nguyên được chọn ngẫu nhiên sao cho $1 \leqslant r(n - j + 1) \leqslant n - j + 1$. Chứng minh rằng nếu dùng phương pháp trên thì mỗi một trong $n!$ hoán vị sẽ có khả năng được tạo ra là ngang nhau. (*Gợi ý :* Sử dụng qui nạp toán học với giả thiết là xác suất sinh ra mỗi hoán vị của $n - 1$ phần tử là $1/(n - 1)!$).

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Hãy giải thích cách sử *dụng quy tắc cộng* và *quy tắc nhân* để tính số xâu nhị phân có độ dài không quá 10.

2. Hãy giải thích cách tính số xâu nhị phân có độ dài không quá 10 và có ít nhất một bit là số **0**.

3. a) Có thể dùng quy tắc nhân như thế nào để tính số hàm từ một tập m phần tử tới tập n phần tử.

   b) Có bao nhiêu hàm từ tập 5 phần tử tới tập 10 phần tử.

   c) Sử dụng quy tắc nhân như thế nào để tính số hàm đơn ánh từ một tập m phần tử tới tập n phần tử.

d) Có bao nhiêu hàm đơn ánh từ tập 5 phần tử tới tập 10 phần tử.

e) Có bao nhiêu hàm toàn ánh từ tập 5 phần tử *lên* tập 10 phần tử.

4. Bằng cách nào bạn có thể tìm được số các kết cục có thể trong một cuộc thi đấu thể thao nhiều ván giữa hai đội, nếu đội thắng là đội thắng 4 ván trước.

5. Làm cách nào có thể tìm được số các xâu nhị phân dài 10 bit và hoặc bắt đầu bằng 101 hoặc kết thúc bằng 010?

6. a) Phát biểu nguyên lý Dirichlet .

b) Hãy giải thích cách dùng nguyên lý Dirichlet để chỉ ra rằng trong bất kỳ 11 số nguyên nào cũng có ít nhất hai số có cùng chữ số cuối cùng.

7. a) Phát biểu nguyên lý Dirichlet tổng quát.

b) Hãy giải thích cách dùng nguyên lý Dirichlet tổng quát để chỉ ra rằng trong bất kỳ 91 số nguyên nào cũng có ít nhất 10 số có cùng chữ số cuối cùng.

8. a) Hãy nêu sự khác nhau giữa tổ hợp và chỉnh hợp chập r từ tập n phần tử.

h) Hãy phát hiểu và chứng minh đẳng thức liên hệ tới tổ hợp và chỉnh hợp chập r từ tập n phần tử.

c) Có bao nhiêu cách chọn 6 sinh viên trong một lớp có 25 người vào một hội đồng?

d) Có bao nhiêu cách chọn 6 sinh viên trong một lớp có 25 người giữ 6 chức vụ khác nhau trong hội đồng?

9. a) Tam giác Pascal là gì?

b) Làm cách nào để tạo ra một hàng của tam giác Pascal từ một hàng trên nó?

10. Thế nào là chứng minh bằng tổ hợp một hằng đẳng thức? Cách chứng minh bằng tổ hợp khác với cách chứng minh bằng đại số như thế nào?

11. Hãy giải thích cách chứng minh hằng đẳng thức Pascal bằng suy luận của lý thuyết tổ hợp.

12. a) Hãy phát biểu định lý nhị thức.

b) Hãy giải thích cách chứng minh định lý nhị thức bằng suy luận của lý thuyết tổ hợp.

c) Tìm hệ số của $x^{100}y^{101}$ trong khai triển $(2x+5y)^{201}$.

13. a) Nêu định nghĩa xác suất của một biến cố khi tất cả các kết cục là đồng khả năng.

b) Tính xác suất trúng giải xổ số nếu chọn đúng 6 số từ 50 số nguyên dương.

14. a) Hãy giải thích cách tìm công thức tính số cách chọn có lặp r phần tử từ n phần tử, nếu không kể tới thứ tự.

b) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, nếu không phân biệt các vật trong cùng một loại?

c) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, và ít nhất có 3 vật thuộc loại 1?

d) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, nếu không có quá 4 vật thuộc loại 1?

e) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, nếu có ít nhất hai vật loại một và không quá ha vật loại 2?

15. a) Cho n và r là hai số nguyên dương. Hãy giải thích tại sao số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$, trong đó x_i là các số nguyên không âm với $i = 1, 2, \ldots, n$, bằng số tổ hợp chập r từ n phần tử?

b) Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

c) Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

16. a) Hãy rút ra công thức tính số hoán vị của n phần tử trong đó các phần tử chia thành k loại, và n_i là số phần tử loại i (với $i = 1, 2, \ldots, k$), nếu các phần tử thuộc cùng một loại là không phân biệt.

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ *INDISCREETNESS*

17. Mô tả thuật toán sinh ra các hoán vị của tập n số tự nhiên đầu tiên.

18. a) Có bao nhiêu cách chia mỗi xấp 5 quân bài cho 6 người chơi?

b) Có bao nhiêu cách đặt n vật khác nhau vào k hộp khác nhau sao cho n_i vật được đặt vào hộp thứ i?

19. Mô tả thuật toán sinh ra tất cả các tổ hợp của tập n số tự nhiên đầu tiên.

BÀI TẬP BỔ SUNG

1. Có bao nhiêu cách chọn 6 đối tượng từ 10 đối tượng khác nhau, khi

a) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và không cho phép lặp lại.

b) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và cho phép lặp lại.

c) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và không cho phép lặp lại.

d) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và cho phép lặp lại.

2. Có bao nhiêu cách chọn 10 đối tượng từ 6 đối tượng khác nhau, khi

a) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và không cho phép lặp lại.

b) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và cho phép lặp lại.

c) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và không cho phép lặp lại.

d) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và cho phép lặp lại.

3. Một cuộc trắc nghiệm gồm có 100 câu hỏi đúng/sai. Có bao nhiêu cách khác nhau mà một sinh viên có thể điền vào phiếu trắc nghiệm nếu cho phép để cả dấu trống?

4. Bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bằng 000 hoặc là kết thúc bằng 1111?

5. Có bao nhiêu xâu độ dài 10 được tạo ra từ tập {a, b, c} chứa đúng 3 chữ a hoặc đúng 4 chữ b?

6. Số điện thoại nội bộ trong hệ thống điện thoại của một khu trường gồm 5 chữ số, với chữ số đầu khác không. Hệ thống điện thoại này có bao nhiêu số khác nhau?

7. Một hiệu kem có 28 loại hương vị, 8 loại gia vị và 12 loại kem sơ chế.

   a) Có thể làm một đĩa gồm ba lớp kem bằng bao nhiêu cách nếu mỗi hương vị có thể dùng nhiều lần và thứ tự của các lớp kem là không quan trọng?

   b) Có bao nhiêu cách làm loại kem nhỏ, nếu nó gồm một lớp kem với một loại hương vị, một loại gia vị và một loại kem sơ chế?

   c) Có bao nhiêu cách làm loại kem lớn, nếu nó gồm ba lớp kem, trong đó mỗi hương vị có thể dùng nhiều lần, thứ tự các lớp là không quan trọng, hai loại gia vị, trong đó mỗi loại chỉ dùng một lần và không kể tới thứ tự, và ba loại kem sơ chế, mỗi loại dùng một lần và không kể thứ tự?

8. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000

   a) Có đúng ba chữ số thập phân?

   b) Có một số lẻ các chữ số thập phân?

   c) Có ít nhất một chữ số thập phân bằng 9?

   d) Không có các chữ số lẻ?

   e) Có hai chữ số liên tiếp bằng 5?

   f) Là một số thuận nghịch đọc?

9. Khi các số từ 1 tới 1000 được viết trong hệ thập phân, có bao nhiêu các chữ số sau được dùng?

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 9.

10. Có 12 dấu hiệu hoàng đạo. Trong bao nhiêu người thì chắc chắn có ít nhất có 6 người cùng dấu hiệu hoàng đạo?

11. Một công ty làm 213 loại bánh bích quy khác nhau. Một sinh viên chỉ ăn bánh của công ty. Tính số lần lớn nhất có thể mà anh ta không ăn cùng một loại bánh trong 4 lần liền?

12. Cần có bao nhiêu người để chắc chắn rằng ít nhất hai người được sinh vào cùng một ngày trong tuần và trong cùng một tháng (có thể khác năm).

13. Chỉ ra rằng có ít nhất hai tập con khác nhau gồm 5 phần tử của tập 10 số nguyên dương không vượt quá 50 có cùng tổng.

14. Một gói quân bài gồm 20 quân. Hỏi phải có bao nhiêu gói mới đảm bảo chắc chắn rằng có hai quân bài trong các gói đó là như nhau. Biết rằng tổng cộng có 550 quân bài khác nhau.

15. a) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân At?

b) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân At và hai quân khác bộ?

c) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân cùng bộ?

d) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân thuộc hai bộ khác nhau?

16*. Chỉ ra rằng trong tập bất kỳ gồm $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$ nhất thiết có hai số nguyên tố cùng nhau.

17*. Chỉ ra rằng trong một dãy m số nguyên tồn tại một hay nhiều hơn các số hạng liên tiếp có tổng chia hết cho m.

18. Chỉ ra rằng nếu có năm điểm phân biệt ở trong một hình vuông cạnh bằng 2 thì có ít nhất hai trong 5 điểm này có khoảng cách không xa hơn $\sqrt{2}$

19. Chứng minh rằng biểu diễn thập phân của một số hữu tỷ phải lặp lại từ một điểm nào đó trở đi.

20. Một đa giác đều n cạnh có bao nhiêu đường chéo, trong đó n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 3?

21. Có bao nhiêu cách chọn một tá quà tặng từ 20 loại khác nhau :

a) Nếu không có hai quà tặng cùng loại?

b) Nếu tất cả các quà tặng thuộc cùng một loại?

c) Nếu không có một điều kiện ràng buộc nào?

d) Nếu ít nhất có hai loại?

e) Nếu nhất thiết phải có ít nhất sáu quà tặng thuộc cùng một loại nào đó?

f) Nếu có thể có không nhiều hơn sáu quà tặng thuộc cùng một loại nào đó?

22. Tính xác suất trúng thưởng khi chọn đúng sáu số liên tiếp trong một đợt xổ số, trong đó mỗi số được chọn trong số các từ 1 tới 40.

23. Tính xác suất để một xấp bài 13 quân không có bộ đôi.

24. Tìm n nếu :

a) $P(n, 2) = 100$,

b) $P(n, n) = 5040$,

c) $P(n, 4) = 12\ P(n, 2)$.

25. Tìm n nếu :

a) $C(n, 2) = 45$

b) $C(n, 3) = P(n, 2)$

c) $C(n, 5) = C(n, 2)$.

26. Chứng minh nếu n và r là các số nguyên không âm và $n \geq r$, thì

$$P(n+1, r) = \frac{P(n, r)(n+1)}{n+1-r}$$

27. Chứng minh bằng các lý luận tổ hợp :

$C(n, r) = C(n, n - r)$.

28. Chứng minh bằng các lý luận tổ hợp Định lý 7 của Tiết 4.3 bằng cách lập phép tương ứng giữa các tập con của tập có một số chẵn các phần tử và các tập con của tập này có một số lẻ các phần tử. (*Gợi ý*: Lấy một phần tử a trong tập. Lập phép tương ứng bằng cách đặt a trong tập con nếu nó chưa có, và lấy nó ra nếu nó đã có trong tập con này).

29. Giả sử n và r là các số nguyên không âm và $r < n$. Chỉ ra rằng :

$C(n, r - 1) = C(n + 2, r + 1) - 2C(n + 1, r + 1) + C(n, r + 1)$.

30. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng :

$\sum_{j=2}^{n} C(j,2) = C(n + 1, 3)$ với mọi n nguyên lớn hơn 1.

31. Dùng định lý nhị thức chứng minh rằng $3^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$

(*Gợi ý* : Đặt $x = 1$, $y = 2$ trong phát biểu của định lý).

32. Trong bài tập này chúng ta sẽ tìm công thức cho tổng các bình phương của n số nguyên dương nhỏ nhất. Ta sẽ tính số các bộ ba (i, j, k) sao cho i, j và k là nguyên thỏa mãn $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$ và $1 \leq k \leq n$ bằng hai cách.

a) Chỉ ra rằng có k^2 bộ ba như thế với mỗi k cố định. Kết luận có

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$ bộ ba như thế.

b) Chỉ ra rằng số các bộ ba như thế với $0 \leq i < j < k$ và số các bộ ba như thế với $0 \leq j < i < k$ cùng bằng $C(n + 1, 3)$.

c) Chỉ ra rằng số các bộ ba như thế với $0 \leq i = j < k$ bằng $C(n + 1, 2)$.

d) Kết hợp các phần a) b) và c) kết luận :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2.C(n+1, 3) + C(n+1, 2) = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

33*. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n trong đó $n \geq 4$ chứa đúng hai lần xuất hiện của 01?

34. Tính xác suất để một tập bài có 7 quân chứa :

a) Bốn quân cùng bộ, và 3 quân thuộc bộ thứ hai?

b) Ba quân cùng bộ và hai đôi thuộc hai bộ khác nhau?

c) Ba đôi thuộc ba bộ khác nhau và quân còn lại thuộc bộ thứ tư?

d) Hai đôi thuộc hai bộ và 3 quân còn lại thuộc các bộ thứ ba, thứ tư và thứ năm?

e) Cả bẩy quân thuộc bẩy bộ khác nhau?

f) Bẩy quân thuộc 7 bộ liên tiếp?

h) Bẩy quân cùng hoa thuộc 7 bộ liên tiếp.

35. Tính xác suất để một xấp bài có 13 quân chứa :

a) Cả 13 quân cơ?

b) 13 quân cùng hoa?

c) 7 quân pích và 6 quân nhép?

d) 7 quân cùng hoa và 6 quân thuộc hoa khác?

e) 4 quân rô, 6 quân cơ, 2 quân pích và 1 quân nhép?

f) 4 quân cùng hoa, 6 quân thuộc hoa thứ hai, 2 quân thuộc hoa thứ ba, và 1 quân thuộc hoa thứ tư?

36. Có bao nhiêu cách khác nhau xếp 8 người ngồi vào một bàn tròn, hai cách ngồi như nhau nếu cách nọ nhận được từ cách kia bằng một phép quay?

37. Có bao nhiêu cách phân 24 sinh viên cho 5 thầy giáo hướng dẫn khoa học?

38. Có bao nhiêu cách chọn 12 quả táo từ trong một thùng kín chứa 20 quả loại 1, 20 quả loại 2 và 20 quả loại 3, nếu ít nhất 3 quả trong mỗi loại được chọn?

39. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, trong đó x_1, x_2, x_3 là nguyên không âm, có bao nhiêu nghiệm, nếu :

a) $x_1 > 1$, $x_2 > 2$ và $x_3 > 3$?

b) $x_1 < 6$ và $x_3 > 5$?

c) $x_1 < 4$, $x_2 < 3$ và $x_3 > 5$?

40. a) Có thể tạo được bao nhiêu xâu khác nhau từ các chữ cái của từ *PEPPERCORN* khi tất cả các chữ cái đều được dùng?

b) Có bao nhiêu xâu như thế bắt đầu và kết thúc bằng chữ *P*?

41. Có hao nhiêu tập con từ tập 10 phần tử :

a) Có ít hơn 5 phần tử?

b) Có nhiều hơn 7 phần tử?

c) Có một số lẻ phần tử?

42. Người làm chứng một tai nạn mà thủ phạm đã bỏ chạy kể với cảnh sát là biển số của chiếc xe gây tai nạn có 3 chữ cái tiếp theo là 3 chữ số, bắt đầu bằng *AS* và chứa hai chữ số 1 và 2. Bao nhiêu biển số khác nhau có thể phù hợp với mô tả này?

43. Có bao nhiêu cách đặt n đối tượng giống nhau vào trong m thùng khác nhau sao cho không thùng nào rỗng?

44. Có bao nhiêu cách xếp 6 em trai và 8 em gái ngồi vào một dãy ghế sao cho không có hai em trai ngồi cạnh nhau?

45. Hãy đưa ra một thuật toán để sinh ra tất cả các chỉnh hợp lặp chập r từ một tập hữu hạn.

46. Hãy đưa ra một thuật toán để sinh ra tất cả các tổ hợp lặp chập r từ một tập hữu hạn.

BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH

Viết các chương trình với INPUT và OUTPUT sau đây

1. Cho n là số nguyên dương và một số nguyên không âm r, hãy tìm số các chỉnh hợp chập r và số các tổ hợp chập r của một tập n phần tử.

2. Cho các số nguyên dương n và r tìm số các chỉnh hợp lặp chập r và số tổ hợp lặp chập r của tập n phần tử.

3. Cho số nguyên dương n, tìm xác suất chọn trúng 6 số nguyên từ tập $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ trùng với 6 số chọn được nhờ một thiết bị cơ học nào đó.

4. Cho một dãy các số nguyên dương hãy tìm dãy con tăng dài nhất và dãy con giảm dài nhất.

5*. Cho phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$ trong đó C là hằng số và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số nguyên không âm. Hãy liệt kê tất cả các nghiệm của phương trình.

6. Cho số nguyên dương n hãy liệt kê tất cả các hoán vị của tập $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ theo thứ tự từ điển.

7. Cho các số nguyên dương n và một số nguyên không âm r không vượt quá n. Hãy liệt kê các tổ hợp chập r của tập $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ theo thứ tự từ điển.

8. Cho các số nguyên dương n và một số nguyên không âm r không vượt quá n. Hãy liệt kê các chỉnh hợp chập r của tập $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ theo thứ tự từ điển.

9. Cho số nguyên dương n. Hãy liệt kê tất cả các tổ hợp của tập $\{1, 2, 3, \ldots ,n\}$

10. Cho số nguyên dương n và một số nguyên không âm r. Hãy liệt kê tất cả các chỉnh hợp lặp chập r của tập $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

11. Cho các số nguyên dương n và r. Hãy liệt kê tất cả các tổ hợp lặp chập r của tập $\{1, 2, 3,\ldots, n\}$.

12. Cho số nguyên dương n. Hãy sinh ra một hoán vị ngẫu nhiên của tập $\{1, 2, 3,..., n\}$. {xem Bài tập 14 Tiết 4.6).

TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

Dùng các chương trình mà bạn đã viết để làm các bài tập sau

1. Tìm số các kết cục có thể trong một cuộc thi đấu mà theo thể lệ cuộc thi đội giành thắng lợi là đội thắng trước 5 trong 9, 6 trong 11, 7 trong 13, và 8 trong 15 trận.

2. Hệ số nhị thức nào là lẻ? Bạn có thể đưa ra một phỏng đoán dựa trên các con số?

3. Người ta vẫn chưa biết hệ số nhị thức $C(2n, n)$ có thể chia hết cho hình phương của một số nguyên tố hay không, hoặc số mũ lớn nhất trong phân tích $C(2n, n)$ thành thừa số nguyên tố có tăng vô hạn hay không khi n tăng. Hãy khảo sát vấn đề này bằng cách tìm lũy thừa lớn nhất và bé nhất của các số nguyên tố trong phân tích ra thừa số của $C(2n,n)$ đối với càng nhiều số nguyên n càng tốt.

4. Tìm xác suất của mỗi loại xấp bài 5 quân và sắp xếp các loại theo xác suất của chúng.

5. Hãy tạo ra tất cả các hoán vị của tập gồm 8 phần tử.

6. Hãy tạo ra tất cả các chỉnh hợp chập 6 của tập gồm 9 phần tử.

7. Hãy tạo ra tất cả các tổ hợp của tập gồm 8 phần tử.

8. Hãy tạo ra tất cả các tổ hợp lặp chập 5 của tập gồm 7 phần tử.

9. Hãy tạo ra danh sách 100 hoán vị được chọn ngẫu nhiên của tập 100 số nguyên dương đầu tiên. (Xem Bài tập 14 trong Tiết 4.6).

VIẾT TIỂU LUẬN

Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau :

1. Hãy mô tả một vài ứng dụng đầu tiên nguyên lý Dirichlet bởi Dirichlet và các nhà toán học khác.

2. Hãy nghiên cứu xem có thể mở rộng cách đánh số điện thoại hiện thời để đáp ứng nhu cầu số máy tăng nhanh không. Với mỗi phương

án đánh số mới mà bạn đề nghị hãy chỉ ra cách tìm số các số điện thoại khác nhau mà nó có.

3. Nhiều hằng đẳng thức tổ hợp đã được trình bày trong cuốn sách này. Hãy tìm nguồn gốc của một vài hằng đẳng thức đó và đưa ra một vài hằng đẳng thức quan trọng khác ngoài những hằng đẳng thức được trình bày trong cuốn sách này. Hãy đưa ra một vài cách chứng minh khác nhau cho các hằng đẳng thức đó.

4. Mô tả các mô hình khác nhau thường được dùng để mô hình sự phân bố các hạt trong cơ học thống kê, bao gồm thống kê Maxwell–Bolzman, Bose–Einstein, và Fermi–Dirac. Trong mỗi trường hợp hãy trình bày các kỹ thuật đếm được sử dụng trong mô hình.

5. Hãy định nghĩa các số Stirling loại một và mô tả một vài tính chất của chúng, sau đó là các đẳng thức mà chúng thỏa mãn.

6. Hãy định nghĩa các số Stirling loại hai và mô tả một vài tính chất của chúng, sau đó là các đẳng thức mà chúng thỏa mãn.

7. Hãy định nghĩa các số Ramsey, phát biểu và chứng minh định lý Ramsey về sự tồn tại của chúng và mô tả những gì người ta mới biết về chúng.

8. Hãy mô tả các cách để tạo ra tất cả các hoán vị của tập n phần tử khác với cách đã trình bày trong Tiết 4.6. So sánh thuật toán này và thuật toán trong Tiết 4.6 về độ phức tạp tính toán của chúng.

9. Mô tả ít nhất một cách tạo tất cả các phân hoạch một số nguyên dương n (Xem Bài tập 35 trong Tiết 3.3).

CHƯƠNG V

KỸ THUẬT ĐẾM CAO CẤP

Nhiều bài toán đếm không thể dễ dàng giải được bằng các phương pháp đã trình bày trong Chương 4. Một ví dụ là : Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n không chứa hai bít 0 liên tiếp? Để giải bài toán này, gọi a_n là số các xâu cần tìm độ dài n. Có thể chỉ ra rằng $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Phương trình này và các điều kiện đầu $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ xác định dãy số $\{a_n\}$. Nhưng công thức tường minh cho a_n không thể tìm được từ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các số hạng của dãy. Như chúng ta sẽ thấy một phương pháp tương tự có thể được dùng để giải nhiều loại bài toán đếm.

Nhiều loại khác nữa của bài toán đếm cũng không thể giải được bằng các kỹ thuật đã bàn luận trong Chương 4, chẳng hạn : Có bao nhiêu cách phân chia 7 đồ vật cho 3 người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một vật? Có bao nhiêu số nguyên tố nhỏ hơn 1000? Cả hai bài toán này có thể giải được bằng cách đếm số phần tử của hợp các tập hợp. Chúng ta sẽ mở rộng kỹ thuật đếm, gọi là nguyên lý bù trừ, cho phép đếm các phần tử của hợp các tập hợp, và chúng ta sẽ chỉ ra rằng nguyên lý này có thể dùng để giải các bài toán đếm.

Các kỹ thuật được nghiên cứu trong chương này cùng với các kỹ thuật đếm cơ sở ở Chương 4, có thể dùng để giải nhiều bài toán đếm.

5.1. HỆ THỨC TRUY HỒI

MỞ ĐẦU

Trong một quần thể vi trùng số lượng các cá thể tăng gấp đôi sau mỗi giờ. Nếu thoạt đầu có 5 cá thể hỏi sau 5 giờ số lượng chúng là bao nhiêu? Để giải bài toán này ta giả sử số vi trùng sau n giờ là a_n. Vì số vi trùng tăng gấp đôi sau mỗi giờ nên ta có quan hệ $a_n = 2.a_{n-1}$, với n là số nguyên dương tùy ý. Hệ thức này cùng với điều kiện ban đầu $a_0 = 5$ xác định duy nhất a_n đối với mọi n không âm. Chúng ta có thể tìm công thức cho a_n từ thông tin này.

Một số bài toán đếm giải được bằng các kỹ thuật đếm đã bàn luận trong Chương 4 cũng có thể giải được bằng cách tìm các mối quan hệ, gọi là quan hệ truy hồi, giữa các số hạng của dãy, như đã làm đối với bài toán vi trùng. Chúng ta sẽ nghiên cứu các sắc thái khác nhau của các bài toán đếm được mô hình hóa khi dùng các hệ thức truy hồi. Trong tiết này và tiết sau chúng ta sẽ mở rộng các phương pháp để tìm công thức tường minh cho các số hạng của dãy có hệ thức truy hồi thuộc một số loại nào đó.

HỆ THỨC TRUY HỒI

Trong Chương 3 chúng ta đã xét cách xác định dãy số bằng đệ quy. Nhớ rằng, định nghĩa đệ quy của một dãy số định rõ giá trị của một hay nhiều hơn các số hạng đầu tiên và quy tắc xác định các số hạng tiếp theo từ các số hạng đi trước. Định nghĩa đệ quy có thể dùng để giải các bài toán đếm. Khi đó quy tắc tìm các số hạng từ các số hạng đi trước được gọi là các **hệ thức truy hồi**.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Hệ thức truy hồi* đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là, a_1, a_2, ...,a_{n-1} với mọi n nguyên và $n \geqslant n_0$, trong đó n_0 là nguyên không âm. Dãy số được gọi là *lời giải* hay là *nghiệm* của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

Chú ý. Thuật ngữ hệ thức truy hồi trong cuốn sách này còn được dùng với tên khác mang cùng nghĩa như *công thức truy hồi, biểu thức truy hồi*.

Ví dụ 1. Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$, và giả sử $a_0 = 3$, $a_1 = 5$. Tìm a_2 và a_3?

Giải: Từ hệ thức truy hồi ta có $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ và $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$.

■

Ví dụ 2. Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 3n$ với mọi n nguyên không âm có là *lời giải* của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$, hay không? Câu hỏi cũng như vậy đối với $a_n = 2^n$ và $a_n = 5$.

Giải: Giả sử $a_n = 3n$ với mọi n nguyên không âm. Khi đó với $n \geq 2$ ta thấy rằng $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n - 1)] - 3(n - 2) = 3n$. Do đó, $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 3n$ là một lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

Giả sử, $a_n = 2^n$ với mọi n nguyên không âm. Rõ ràng $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ và $a_2 = 4$. Vì $a_2 \neq 2a_1 - a_n = 2.2 - 1 = 3$, chúng ta thấy rằng $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 2^n$ không là một lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

Giả sử $a_n = 5$ với mọi n nguyên không âm. Khi đó với $n \geq 2$ ta thấy $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2.\ 5 - 5 = 5$. Do đó, $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 5$ là một lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

■

Các **điều kiện đầu** đối với dãy số định rõ giá trị các số hạng đi trước số hạng đầu tiên kể từ đó hệ thức truy hồi có hiệu lực. Chẳng hạn, trong Ví dụ 1, $a_0 = 3$ và $a_1 = 5$ là các điều kiện đầu. Các điều kiện đầu và hệ thức truy hồi xác định duy nhất dãy số. Chúng cho ta định nghĩa đệ quy của dãy. Bất kỳ số hạng nào của dãy cũng có thể tìm được từ các điều kiện đầu và sử dụng hệ thức truy hồi với số lần cần thiết. Tuy nhiên có một cách tốt hơn để tính các số hạng của một lớp các dãy xác định bằng hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu. Chúng ta sẽ thảo luận các phương pháp đó trong tiết này và tiết tiếp theo.

MÔ HÌNH HÓA BẰNG HỆ THỨC TRUY HỒI

Chúng ta có thể dùng các hệ thức truy hồi để mô hình hóa một lớp rất rộng các bài toán như tính lãi kép, tính số lượng thỏ trên một hòn đảo, xác định số lượng các dịch chuyển trong trò chơi Tháp Hà–nội, và tính số các xâu nhị phân có những tính chất nào đó.

Ví dụ 3. *Lãi kép.* Giả sử một người gửi 10 000 đô–la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

Giải: Để giải bài toán này ta gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm. Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số có sau $n - 1$ năm cộng lãi suất của năm thứ n, nên ta thấy dãy $\{P_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau :

$$P_n = P_{n-1} + 0{,}11P_{n-1} = (1{,}11)P_{n-1}.$$

Điều kiện đầu là $P_0 = 10\ 000$.

Chúng ta có thể dùng phương pháp lặp để tìm công thức trên cho P_n. Dễ thấy rằng :

$$P_1 = (1{,}11)P_0$$

$$P_2 = (1{,}11)P_1 = (1{,}11)^2P_0,$$

$$\dots$$

$$P_n = (1{,}11)P_{n-1} = (1{,}11)^nP_0.$$

Khi thế điều kiện đầu $P_0 = 10\ 000$ vào, sẽ nhận công thức $P_n = (1{,}11)^n.10\ 000$. Có thể dùng quy nạp toán học để khẳng định tính đúng đắn của nó. Công thức là đúng với $n = 0$ vì đó chính là điều kiện đầu của dãy. Bây giờ ta giả sử $P_n = (1{,}11)^n.10000$. Khi đó từ hệ thức truy hồi và giả thiết quy nạp, ta có

$$P_{n+1} = (1{,}11)P_n = (1{,}11)(1{,}11)^n.10000 = (1{,}11)^{n+1}.10000.$$

Điều này chứng tỏ công thức tường minh của P_n là đúng.

Thay $n = 30$ vào công thức $P_n = (1{,}11)^n.10\ 000$ cho ta

$$P_{30} = (1{,}11)^{30}.10\ 000 = 228922{,}97 \text{ đô–la}.$$

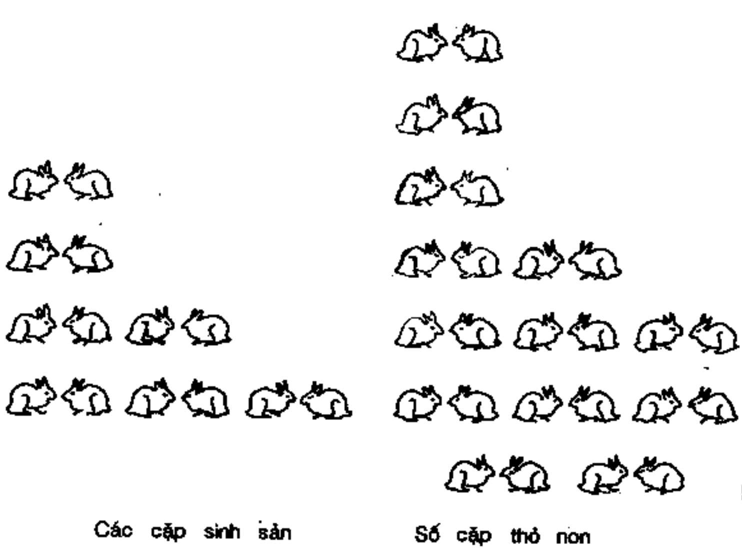
■

Ví dụ sau chỉ ra có thể tính số lượng thành viên của họ hàng nhà thỏ sống trên một hòn đảo bằng hệ thức truy hồi.

Ví dụ 4. *Họ nhà thỏ và số Fibonacii.* Chúng ta hãy xem xét bài toán sau đây được đặt ra đầu tiên bởi Fibonacii vào thế kỷ thứ 13 trong tác phẩm của ông mang tên *Liber abaci*. Một cặp thỏ mới sinh (một con đực và một con cái) được thả lên một hòn đảo. Giả sử rằng một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy 2 tháng tuổi. Từ khi chúng đầy 2 tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một đôi thỏ con như chỉ ra trên hình 1. Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau n tháng với giả sử các con thỏ là trường thọ.

Giải: Giả sử f_n là số cặp thỏ sau n tháng. Ta sẽ chỉ ra rằng f_n với $n = 1, 2, 3, \ldots$ là các số của dãy Fibonacii.

Số lượng các cặp thỏ có thể tính được bằng hệ thức truy hồi. Cuối tháng thứ nhất số các cặp thỏ trên đảo là $f_1 = 1$. Vì cặp thỏ này vẫn chưa đến tuổi sinh sản được nên trong tháng thứ hai cũng là $f_2 = 1$. Để tìm số cặp thỏ sau n tháng, ta cộng số cặp thỏ trên đảo ở tháng trước f_{n-1} và số cặp thỏ mới đẻ là f_{n-2} vì mỗi cặp thỏ con được sinh ra từ cặp thỏ có ít nhất 2 tháng tuổi.



Số tháng	Số cặp sinh sản	Số cặp thỏ con	Tổng số cặp thỏ
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

Hình 1. Thỏ trên đảo.

Do vậy dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi :

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

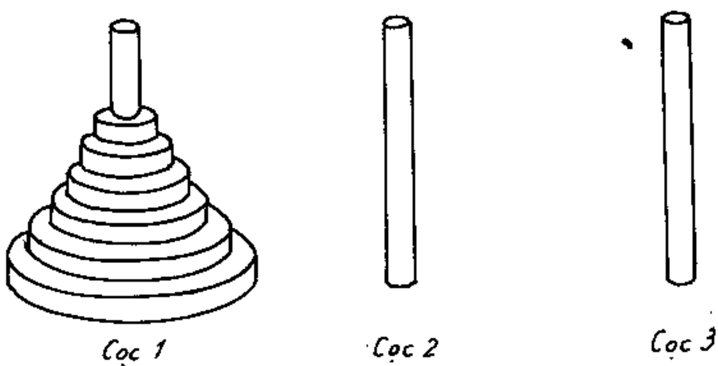
với $n \geqslant 3$ cùng với điều kiện đầu $f_1 = 1$ và $f_2 = 1$. Vì điều kiện đầu và hệ thức truy hồi xác định duy nhất dãy số này nên số các cặp thỏ trên đảo sau n tháng được cho bởi số Fibonacci thứ n.

■

Ví dụ sau đây là trò chơi xếp hình nổi tiếng.

Ví dụ 5. *Tháp Hà-nội.* Trò chơi xếp hình rất phổ cập vào cuối thế kỷ 19 gọi là Tháp Hà–nội. Tương truyền rằng tại một ngôi tháp tại Hà nội có một tấm đế bằng đồng trên đó có ba cái cọc bằng kim cương. Lúc khai thiên lập địa, trên một trong ba cái cọc thượng đế đã để 64 chiếc đĩa bằng vàng với đường kính giảm dần (Hình 2). Ngày đêm các nhà sư dịch chuyển đĩa sang một chiếc cọc khác theo quy tắc : mỗi lần chỉ được dịch chuyển một đĩa, một đĩa có thể dịch chuyển từ một cọc này sang cọc khác bất kỳ, nhưng không được để một chiếc đĩa lên trên một đĩa khác có đường kính nhỏ hơn. Ngày tận thế sẽ đến khi tất cả các đĩa được chuyển sang một chiếc cọc khác.

Giả sử H_n là số lần dịch chuyển cần thiết để giải bài toán Tháp Hà nội có n đĩa. Hãy lập hệ thức truy hồi đối với dãy $\{H_n\}$.



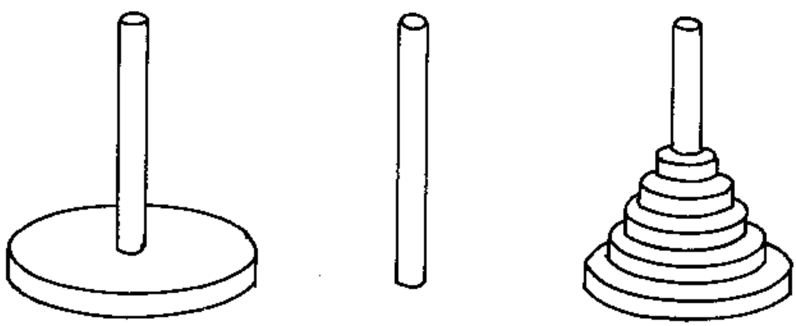
***Hình** 2.* Trạng thái ban đầu Tháp Hà nội.

Giải: Thoạt đầu n đĩa ở trên cọc 1. Chúng ta có thể dịch chuyển $n - 1$ chiếc đĩa nằm trên sang cọc 3, theo quy tắc đã nêu ở trên, và phải dùng

H_{n-1} lần dịch chuyển, (xem Hình 3) và chiếc đĩa lớn nhất được giữ cố định trong khi di chuyển $(n - 1)$ đĩa bé ở trên. Tiếp theo, ta chuyển chiếc đĩa lớn nhất này bằng một lần di chuyển từ cọc 1 sang cọc 2. Cuối cùng ta mất H_{n-1} lần dịch chuyển $(n - 1)$ chiếc đĩa từ cọc 3 sang cọc 2 và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất vẫn được giữ cố định khi di chuyển $(n - 1)$ đĩa bé. Do vậy ta có hệ thức truy hồi :

$$H_n = 2.H_{n-1} + 1.$$

Điều kiện đầu $H_1 = 1$, vì chỉ cần một lần dịch chuyển một đĩa ở cọc 1 sang cọc 2 theo đúng quy tắc của cuộc chơi.



Hình 3. Trạng thái trung gian ở Tháp Hà nội.

Chúng ta có thể dùng phương pháp lặp để giải hệ thức truy hồi này. Ta nhận thấy rằng ;

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\ &= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\;\;.\,. \\ &= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Chúng ta đã sử dụng hệ thức truy hồi nhiều lần để biểu diễn H_n qua các số hạng trước nó của dãy. Trong đẳng thức trước đẳng thức cuối cùng ta đã sử dụng điều kiện đầu $H_1 = 1$. Đẳng thức cuối cùng chính là công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân.

Phương pháp lặp đã cho ta nghiệm của hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ với điều kiện đầu $H_1 = 1$. Công thức này cũng có thể chứng minh bằng quy nạp toán học. Các bạn sẽ làm như một bài tập ở cuối tiết này.

Khi thay $n = 64$ vào hệ thức trên ta được :

$$H_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

đó là số lần cần thiết để dịch chuyển tất cả các đĩa từ một cọc này sang cọc khác. Giả sử mỗi lần dịch chuyển mất một giây, thì cần hơn 500 tỷ năm để các nhà sư dịch chuyển tất cả các đĩa sang cọc khác.

■

Ví dụ 6 minh họa cách dùng hệ thức truy hồi để tính số các xâu nhị phân có độ dài nhất định và có một tính chất nào đó.

Ví dụ 6. Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu như thế có độ dài bằng 5?

Giải. Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp. Để nhận được hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$, ta thấy rằng theo quy tắc cộng, số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp bằng số các xâu như thế kết thúc bằng số 1 cộng với số các xâu như thế kết thúc bằng số 0. Chúng ta giả sử rằng $n \geqslant 3$, tức là các xâu nhị phân có ít nhất ba bit.

Các xâu nhị phân độ dài n, không có hai số 0 liên tiếp và kết thúc bằng số 1 chính là xâu nhị phân như thế, độ dài $n - 1$ và thêm số 1 vào cuối của chúng. Vậy chúng có tất cả là a_{n-1}.

Các xâu nhị phân độ dài n, không có hai số 0 liên tiếp và kết thúc bằng số 0, cần phải có bít thứ $n - 1$ bằng 1, nếu không thì chúng có hai số 0 ở hai bit cuối cùng. Từ đó suy ra, các xâu nhị phân độ dài n, không có hai số 0 liên tiếp, kết thúc bằng số 0 chính là các xâu nhị phân không có hai số 0 liên tiếp có độ dài $n - 2$ và thêm 10 vào cuối của nó. Do vậy số chúng là a_{n-2} (Xem minh họa trên Hình 4).

Cuối cùng ta rút ra :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ với } n \geqslant 3.$$

			Số các xâu nhị phân dài n không có hai số 0 liên tiếp
Kết thúc bằng số 1	Xâu nhị phân tùy ý có độ dài n - 1 không có hai số 0 liên tiếp	1	a_{n-1}
Kết thúc bằng số 0	Xâu nhị phân tùy ý có độ dài n - 2 không có hai số 0 liên tiếp	1 0	a_{n-2}
			Tổng : $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Hình 4. Tính số xâu nhị phân đọ dài n và không có hai số 0 liên tiếp.

Điều kiện đầu là $a_1 = 2$ vì cả hai xâu độ dài 1 đều không có hai số 0 liên tiếp, ta cũng có $a_2 = 3$, vì có 3 xâu như thế là 01, 10 và 11.

Để nhận được a_5 ta sử dụng hệ thức truy hồi ba lần :

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5,$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8,$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13.$$

Chú ý : Ta thấy rằng $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi giống như là dãy Fibonacci. Vì $a_1 = f_3$, và $a_2 = f_4$ ta suy ra $a_n = f_{n+2}$.

■

Ví dụ tiếp theo chỉ ra cách sử dụng hệ thức truy hồi để mô hình hóa số các từ mã cho phép khi thực hiện một kiểm tra tính hợp lệ nào đó.

Ví dụ 7. *Tính số từ mã*. Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Chẳng hạn, 1230407869 là hợp lệ còn 120987045608 là không hợp lệ. Giả sử a_n là số các từ mã hợp lệ độ dài n. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho a_n.

Giải: Dễ thấy $a_1 = 9$, vì có 10 xâu một chữ số và chỉ có một xâu, cụ thể là xâu 0, là không hợp lệ. Có thể tìm hệ thức hồi quy cho dãy này bằng cách nghiên cứu xem bằng cách nào có thể nhận được xâu hợp lệ n chữ số từ xâu n − 1 chữ số. Có hai cách tạo xâu hợp lệ n chữ số từ xâu n − 1 chữ số.

Dầu tiên, xâu hợp lệ n chữ số có thể nhận được bằng cách nối thêm chữ số khác không vào xâu hợp lệ n − 1 chữ số. Ta có 9 cách nối thêm, vậy bằng cách này có thể tạo được $9a_{n-1}$ xâu hợp lệ n chữ số.

Tiếp theo, xâu hợp lệ n chữ số có thể nhận được bằng cách nối thêm chữ số 0 vào xâu không hợp lệ $n - 1$ chữ số. Số các xâu hợp lệ n chữ số loại này chính bằng số các xâu không hợp lệ $n - 1$ chữ số, tức là bằng $10^{n-1} - a_{n-1}$, vì có tất cả 10^{n-1} xâu $n - 1$ chữ số trong đó có a_{n-1} xâu là hợp lệ.

Vì tất cả các xâu hợp lệ n chữ số sẽ được tạo ra bằng một trong hai cách trên, nên ta suy ra tất cả có :

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}.$$

xâu hợp lệ độ dài n.

BÀI TẬP

1. Tìm 5 số hạng đầu tiên được xác định bởi mỗi hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu sau đây :

   a) $a_n = 6a_{n-1},$ $\quad a_n = 2$;

   b) $a_n = a_{n-1}^2,$ $\quad a_1 = 2$;

   c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$ $\quad a_0 = 1,\quad a_1 = 2$;

   d) $a_n = n.a_{n-1} + n^2.a_{n-2}$ $\quad a_0 = 1,\quad a_1 = 2$;

   e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ $\quad a_n = 1,\quad a_1 = 2$; $a_2 = 0$;

2. Chỉ ra rằng dãy (a_n) là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, nếu :

   a) $a_n = 0$? $\qquad$ b) $a_n = 1$?

   c) $a_n = (-4)^n$? $\qquad$ d) $a_n = 2(-4)^n + 3$?

3. Dãy $\{a_n\}$ nào là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ nếu

   a) $a_n = 0$? $\qquad$ b) $a_n = 1$?

   c) $a_n = 2^n$? $\qquad$ d) $a_n = 4^n$?

   e) $a_n = n\ 4^n$? $\qquad$ f) $a_n = 2.4^n + 3n.4^n$?

   g) $a_n = (-4)^n$? $\qquad$ h) $a_n = n^2 4^n$?

4. Với mỗi dãy sau hãy tìm một hệ thức truy hồi mà dãy này thỏa mãn (Câu trả lời là không duy nhất) :

   a) $a_n = 3,$ $\qquad$ b) $a_n = 2^n,$

   c) $a_n = 2n + 3$ $\qquad$ d) $a_n = 5^n$,

e) $a_n = n^2$, f) $a_n = n^2 + n$,

g) $a_n = n + (-1)^n$, h) $a_n = n!$

5. Hãy tìm nghiệm của mỗi hệ thức truy hồi và điều kiện đầu sau đây. Dùng phương pháp lặp như trong Ví dụ 5.

a) $a_n = 3a_{n-1}$, $a_0 = 2$,

b) $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_0 = 3$,

c) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$,

d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$, $a_0 = 4$,

e) $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $a_0 = 1$,

f) $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $a_0 = 1$,

g) $a_n = na_{n-1}$, $a_0 = 5$,

h) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 1$,

6. Một người gửi 1000 đô-la vào tài khoản của mình trong một ngân hàng với lãi suất kép 9% một năm.

a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi cho tổng số có trong tài khoản vào cuối năm thứ n?

b) Tìm công thức tường minh cho tổng số có trong tài khoản vào cuối năm thứ n?

c) Sau 100 năm tổng số tiền có trong tài khoản là bao nhiêu?

7. Giả sử số vi trùng trong một quần thể sẽ tăng gấp ba sau mỗi giờ.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi tính số vi trùng sau n giờ.

b) Nếu có 100 vi trùng khi bắt đầu tạo quần thể mới thì chúng sẽ nảy nở thành bao nhiêu sau 10 giờ?

8. Giả sử dân số toàn thế giới năm 1995 là 7 tỷ người và tăng với tốc độ 3% một năm.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi cho dân số thế giới n năm sau năm 1995.

b) Tìm công thức tường minh cho dân số thế giới n năm sau năm 1995.

c) Năm 2010 dân số thế giới là bao nhiêu?

9. Một nhà máy sản xuất ô tô thể thao theo đơn đặt hàng với tốc độ ngày càng tăng. Tháng đầu chỉ sản xuất một chiếc, tháng thứ hai làm được hai chiếc, và cứ như vậy tháng thứ n sản xuất được n chiếc.

a) Hãy lập công thức truy hồi tính số ô tô sản xuất được trong n tháng đầu tiên của nhà máy.

b) Bao nhiêu ô tô được sản xuất trong năm đầu tiên?

c) Hãy tìm công thức tường minh tính số ô tô sản xuất được trong n tháng đầu tiên của nhà máy.

10. Một nhân viên bắt đầu làm việc tại một công ty từ năm 1987, với lương khởi điểm là 50 000 đô-la. Hàng năm anh ta được nhận thêm 1000 đô-la và 5% lương của năm trước.

a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi tính lương của nhân viên đó n năm sau năm 1987.

b) Lương năm 1995 của anh ta là bao nhiêu?

c) Hãy tìm công thức tường minh tính lương của nhân viên này n nám sau năm 1987.

11. Dùng quy nạp toán học kiểm tra lại công thức nhận được trong Ví dụ 5, tính số dịch chuyển cần thiết để chuyển n đĩa từ cột này sang cột khác trong trò chơi Tháp Hà nội.

12. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số hoán vị của tập có n phần tử.

b). Dùng hệ thức tìm được hãy tính số hoán vị của tập n phần tử.

13. Một máy bán tem tự động chỉ nhận các đồng xu một đô la và các tờ tiền 1 đô-la và 5 đô la.

a) Hãy tìm hệ thức truy hồi tính số cách đặt n đô-la vào trong máy bán hàng, trong đó thứ tự các đồng xu, các tờ tiền được đặt vào là quan trọng.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Bao nhiêu cách đặt 10 đô-la vào máy để mua một bộ tem?

14. Một nước dùng các đồng xu giá trị 1 peso, 2 peso, 5 peso và 10 peso và các tờ tiền giấy giá trị 5 peso, 10 peso, 20 peso, 50 peso và 100 peso. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số cách trả n peso, trong đó thứ tự trả các đồng xu và tờ tiền giấy là có tính đến.

15. Có bao nhiêu cách trả 17 peso, trong đó thứ tự trả các đồng xu và tờ tiền giấy là có tính đến. (Các loại tiền như trong Bài tập 14).

16*. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các dãy số nguyên dương tăng thực sự, có số hạng đầu tiên bằng 1 và số hạng cuối cùng bằng n, trong đó n là số nguyên dương, tức là các dãy a_1, a_2, ... a_k trong đó $a_1 = 1$ và $a_k = n$ và $a_j < a_{j+1}$ với $j = 1, 2, ..., k - 1$.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu dãy như vậy nếu n nguyên dương và lớn hơn hay bằng 2.

17. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài n, chứa 2 số 0 liên tiếp.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài bằng 7?

18. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài n, chứa 3 số 0 liên tiếp.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bằng 7 chứa ba số 0 liên tiếp?

19. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài n, không chứa 3 số 0 liên tiếp?

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu dãy nhị phân độ dài bằng 7 không chứa ba số 0 liên tiếp?

20*. a) Tìm hệ thức hồi quy cho số các xâu nhị phân chứa xâu 01.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bằng 7 chứa dãy 01?

21. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các cách đi lên n bậc thang nếu một người có thể bước một hoặc hai bậc một lần.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu cách đi lên một cầu thang 8 bậc theo kiểu nêu trong phần a)?

22. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các cách đi lên n bậc thang nếu một người có thể bước một, hai hoặc ba bậc một lần.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu cách đi lên một cầu thang 8 bậc theo kiểu nêu trong phần a)?

Một xâu chỉ chứa các ký tự 0, 1, 2 được gọi là các **xâu tam phân.**

23. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân không chứa 2 số 0 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

24. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân chứa 2 số 0 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

25*. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân không chứa 2 số 0 liên tiếp hoặc hai số 1 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

26*. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân hoặc là chứa 2 số 0 liên tiếp hoặc hai chứa hai số 1 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

27*. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân không chứa liên tiếp các ký tự như nhau.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

28.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân chứa liên tiếp hai ký tự như nhau.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

29. Các thông báo được truyền qua các kênh truyền thông sử dụng hai tín hiệu. Truyền một tín hiệu mất 1 μs (một phần triệu giây), truyền tín hiệu kia mất 2 μs.

a) Tìm hệ thức truy hồi tính số các thông báo khác nhau gồm các dãy xen nhau của hai tín hiệu này và được truyền đi trong n μs.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Bao nhiêu thông báo khác nhau được truyền đi trong $10\mu s$ nếu dùng hai tín hiệu này.

30. Một người lái xe buýt trả thuế cầu đường bằng cách thả vào các máy thu thuế tự động lần lượt các đồng 5 xu và đồng 10 xu.

a) Tìm hệ thức truy hồi tính số cách khác nhau mà người lái xe có thể trả một khoản thuế n xu (trong đó trật tự theo đó các đồng xu được thả vào máy là [illegible] quan trọng).

b) Có bao nhiêu cách khác nhau mà người lái xe có thể trả một khoản thuế 45 xu?

31. a) Tìm hệ thức truy hồi mà R_n thỏa mãn, trong đó R_n là số miền của mặt phẳng bị phân chia bởi n đường thẳng nếu không có hai đường nào song song và không có ba đường nào cùng đi qua một điểm.

b) Tính R_n bằng phương pháp lặp.

32*. a) Tìm hệ thức truy hồi mà R_n thỏa mãn, trong đó R_n là số miền của mặt cầu bị phân chia bởi n đường tròn lớn (tức là giao của mặt cầu với các mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu) nếu không có 3 đường nào trong số n đường tròn này đi qua cùng một điểm.

b) Tính R_n bằng phương pháp lặp.

33* a) Tìm hệ thức truy hồi mà S_n thỏa mãn, trong đó S_n là số miền trong không gian 3 chiều bị phân chia bởi n mặt phẳng nếu mọi bộ 3 mặt phẳng gặp nhau tại một điểm, nhưng không có bộ 4 mặt phẳng nào đi qua cùng một điểm.

b) Tính S_n bằng phương pháp lặp.

34. Tìm hệ thức truy hồi cho các xâu nhị phân độ dài n và có một số chẵn bít 0.

35. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 7 chứa một số chẵn bít 0?

36. a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các cách phủ toàn bộ bàn cờ $2 \times n$ bằng các quân đôminô 1×2. (*Gợi ý* : nghiên cứu song song các cách phủ trong đó góc trên bên phải của bàn cờ được phủ bằng các quân đôminô nằm ngang và thẳng đứng).

b) Tìm điều kiện ban đầu cho hệ thức tìm được trong phần a).

c) Có bao nhiêu cách phủ toàn bộ bàn cờ 2×17 bằng các quân đôminô 1×2?

37. a) Tìm hệ thức truy hồi tính số các cách lát một đường đi bộ bằng các viên đá lát nếu chúng có màu đỏ, xanh hoặc xám sao cho không có hai viên đỏ liền kề, giả sử các viên cùng màu là không phân biệt được.

b) Tìm điều kiện ban đầu cho hệ thức tìm được trong phần a).

c) Có bao nhiêu cách lát một đoạn đường 7 viên như mô tả trong phần a)?

38. Chứng minh rằng các số Fibonacci thỏa mãn hệ thức truy hồi $f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$ với $n = 5, 6, 7, \ldots$ và các điều kiện đầu $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, và $f_4 = 3$. Dùng hệ thức này chứng minh rằng f_{5n} chia hết cho 5, với $n = 1, 2, 3, \ldots$

39*. Gọi $S(m, n)$ là số các hàm toàn ánh từ tập m phần tử lên tập n phần tử. Chỉ ra rằng $S(m, n)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau :

$$S(m, n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n, k) S(m, k)$$

với mọi m, n sao cho $m \geqslant n$ và $n > 1$ và điều kiện đầu $S(m, 1) = 1$.

Giả sử $\{a_n\}$ *là dãy các số thực.* **Sai phân lùi** *của dãy này được định nghĩa bằng đệ quy như sau.* **Sai phân đầu tiên** ∇a_n *là*

$$\nabla a_n = a_n - a_{n-1} ;$$

Sai phân thứ (k + 1) : $\nabla^{k+1} a_n$ *nhận được từ* $\nabla^k a_n$ *bằng*

$$\nabla^{k+1} a_n = \nabla^k a_n - \nabla^k a_{n-1}$$

40. Tìm ∇a_n cho dãy $\{a_n\}$ trong đó :

a) $a_n = 4$, b) $a_n = 2n$,

c) $a_n = n^2$, d) $a_n = 2^n$.

41. Tìm $\nabla^2 a_n$ cho các dãy $\{a_n\}$ trong Bài tập 34.

42. Chỉ ra rằng $a_{n-1} = a_n - \nabla a_n$.

43. Chỉ ra rằng $a_{n-2} = a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n$.

44*. Chứng minh rằng a_{n+k} có thể biểu diễn qua a_n, ∇a_n, $\nabla^2 a_n$, ..., $\nabla^k a_n$.

45. Hãy biểu diễn hệ thức hồi quy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ qua a_n, ∇a_n và $\nabla^2 a_n$.

46. Chỉ ra rằng mọi hệ thức truy hồi cho dãy $\{a_n\}$ đều có thể được viết qua a_n, ∇a_n, $\nabla^2 a_n$, ... Phương trình nhận được chứa dãy số và các sai phân của nó được gọi là **phương trình sai phân**.

5.2. GIẢI CÁC HỆ THỨC TRUY HỒI

MỞ ĐẦU

Các hệ thức truy hồi xuất hiện trong các mô hình rất khác nhau. Một số có thể giải bằng cách lặp hoặc bằng một số kỹ thuật đặc biệt. Tuy nhiên phần lớn chúng có thể giải tường minh theo một cách rất có hệ thống. Đó là các hệ thức biểu diễn các số hạng của dãy như tổ hợp tuyến tính của các số hạng đi trước.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng số* là hệ thức truy hồi có dạng :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

trong đó c_1, c_2, ..., c_k là các số thực, và $c_k \neq 0$.

Hệ thức truy hồi trong định nghĩa là **tuyến tính** vì vế phải là tổng các tích của các số hạng trước của dãy với một hệ số. Nó là **thuần nhất** vì mọi số hạng đều có dạng a_js. Các hệ số của các số hạng của dãy đều là **hằng số**, thay vì là các hàm phụ thuộc n. **Bậc** là k vì a_n được biểu diễn qua k số hạng trước của dãy.

Theo nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học thì dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi nêu trong định nghĩa được xác định duy nhất bằng hệ thức truy hồi này và k điều kiện đầu :

$$a_o = C_o,\ a_1 = C_1,\ \dots,\ a_{k-1} = C_{k-1}.$$

Ví dụ 1. Hệ thức truy hồi $P_n = (1,11)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 1. Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2. Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 5.

■

Có một số hệ thức truy hồi P_n không là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số.

Ví dụ 2. Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ là không tuyến tính. Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ là không thuần nhất. Hệ thức truy hồi $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng số.

■

Các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất được nghiên cứu vì hai lý do. Thứ nhất chúng hay gặp khi mô hình hoá các bài toán. Thứ hai chúng có thể giải được một cách có hệ thống.

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT HỆ SỐ HẰNG SỐ

Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số. Chú ý rằng $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ nếu và chỉ nếu :

$$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \ldots + c_kr^{n-k}.$$

Sau khi chia cả hai vế cho r^{n-k} và trừ vế phải cho vế trái chúng ta nhận được phương trình tương đương :

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_{k-1}r - c_k = 0.$$

Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là nghiệm nếu và chỉ nếu r là nghiệm của phương trình trên. Phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi, nghiệm của nó gọi là nghiệm đặc trưng của hệ thức truy hồi. Như sẽ thấy sau này, các nghiệm đặc trưng dùng để cho công thức hiển của tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi.

Trước tiên chúng ta sẽ trình bày các kết quả đối với hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai. Sau đó chúng ta sẽ nêu ra những kết quả tương tự cho trường hợp tổng quát khi bậc lớn hơn hai. Vì các chứng minh là khá phức tạp nên chúng ta sẽ không trình bày trong cuốn sách này.

Bây giờ ta quay lại các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hậc hai.

Trước tiên ta nghiên cứu trường hợp khi có hai nghiệm đặc trưng phân biệt.

ĐỊNH LÝ 1. Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt r_1 và r_2. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, với $n = 1, 2, \ldots$ trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

Chứng minh: Để chứng minh định lý này ta cần làm hai việc. Đầu tiên, cần phải chỉ ra rằng, nếu r_1 và r_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng và α_1 và α_2 là các hằng số thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi. Sau đó, cần phải chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ là nghiệm thì $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với α_1 và α_2 là các hằng số nào đó.

Bây giờ ta sẽ chứng minh phần đầu. Giả sử r_1 và r_2 là hai nghiệm của $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, tức là, ${r_1}^2 = c_1 r_1 + c_2$, và $r^2_2 = c_1 r_2 + c_2$. Ta thực hiện các biến đổi sau :

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
&= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Để chứng minh phần hai, ta giả sử $\{a_n)$ là một nghiệm bất kỳ của hệ thức truy hồi. Ta sẽ chọn α_1 và α_2 sao cho dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thỏa mãn các điều kiện đầu $a_0 = C_0$ và $a_1 = C_1$. Thật vậy,

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$$

Từ phương trình đầu ra được $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$. Thế vào phương trình sau ta có

$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1) r_2 = \alpha_1(r_1 - r_2) + C_0 - r_2$ từ đây suy ra

$$\alpha_1 = \frac{(C_1 - C_0 r_2)}{r_1 - r_2},$$

và $\alpha_2 = C_o - \alpha_1 = C_o - \dfrac{(C_1 - C_o r_2)}{r_1 - r_2} = \dfrac{(C_o r_1 - C_1)}{r_1 - r_2}$.

Vậy khi chọn các giá trị này của α_1 và α_2 dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thỏa mãn các điều kiện đầu. Vì hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu xác định duy nhất dãy, nên $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Định lý được chứng minh.

■

Các nghiệm đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số có thể là các số phức. Định lý 1 (và một số định lý khác trong tiết này) vẫn còn đúng trong trường hợp này. Hệ thức truy hồi với nghiệm đặc trưng phức sẽ không được trình bày trong cuốn sách này. Những độc giả quen thuộc với số phức có thể giải các Bài tập 22 và 23 ở cuối tiết này.

Các ví dụ sau sẽ minh họa sự tiện lợi của các công thức hiển cho trong Định lý 1.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $a_o = 2$, $a_1 = 7$.

Giải: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi này có dạng $r^2 - r - 2 = 0$. Nghiệm của nó là $r = 2$ và $r = -1$. Theo Định lý 1 dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$, với các hằng số α_1 và α_2 nào đó. Từ các điều kiện đầu, suy ra

$$a_o = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1)$$

Giải ra ta được $\alpha_1 = 3$ và $\alpha_2 = -1$. Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi và điều kiện đầu là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3.2^n - (-1)^n$.

■

Ví dụ 4. Tìm công thức hiển của các số Fibonacci.

Giải: Nhớ lại rằng dãy các số Fibonacci thỏa mãn hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ và các điều kiện đầu $f_o = 0$ và $f_1 = 1$. Các nghiệm đặc trưng là

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Theo Định lý 1 ta suy ra các số Fibonacci được cho bởi công thức sau

$$f_n = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

với các hằng số α_1 và α_2 nào đó. Các điều kiện ban đầu $f_o = 0$, $f_1 = 1$ có thể dùng để xác định các hằng số này.

$$f_o = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

$$f_1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Từ hai phương trình này cho ta $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Do đó các số Fibonacci được cho bằng công thức hiển sau

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

■

Định lý 1 không dùng được trong trường hợp một nghiệm đặc trưng là nghiệm bội hai. Khi đó ta có Định lý 2 sau đây.

ĐỊNH LÝ 2. Cho c_1 và c_2 là các số thực và $c_2 \neq 0$. Giả sử $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm r_o. Dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1r_o^n + \alpha_2nr_o^n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

Chứng minh Định lý 2 là một bài tập ở cuối tiết này. Sau đây là ví dụ minh họa

Ví dụ 5. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

với các điều kiện đầu $a_o = 1$ và $a_1 = 6$.

Giải: Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r = 3$. Do đó nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng :

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n,$$

với các hằng số α_1 và α_2 nào đó. Từ các điều kiện đầu ta suy ra :

$$a_o = 1 = \alpha_1.$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3.$$

Giải ra ta được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu đã cho là

$$a_n = 3^n + n3^n.$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu kết quả tổng quát về nghiệm của các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số trong đó bậc có thể lớn hơn hai, và với giả thiết phương trình đặc trưng có các nghiệm phân biệt. Chứng minh kết quả này là một bài tập cho độc giả.

ĐỊNH LÝ 3. Cho $c_1, c_2, \ldots c_k$ là các số thực. Giả sử rằng phương trình đặc trưng $r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$$

nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n + \ldots + \alpha_kr_k^n\ ,$$

với $n = 0, 1, 2, \ldots$, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các hằng số.

Chúng ta sẽ minh họa định lý này bằng ví dụ sau.

Ví dụ 6. Hãy tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, và $a_2 = 15$.

Giải: Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi này là

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6$$

Các nghiệm đặc trưng là $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$. Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng :

$$a_n = \alpha_11^n + \alpha_22^n + \alpha_33^n.$$

Để tìm các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ta dùng các điều kiện ban đầu :

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_22 + \alpha_33$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_24 + \alpha_39.$$

Giải hệ các phương trình này ta nhận được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$. Vì thế, nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này và các điều kiện ban đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$ với

$$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n.$$

BÀI TẬP

1. Trong các hệ thức truy hồi sau đây hệ thức nào là tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Bậc của các hệ thức đó là bao nhiêu?

   a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$ b) $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$

   c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$ d) $a_n = a_{n-1} + 2$

   e) $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ f) $a_n = a_{n-2}$

2. Trong các hệ thức truy hồi sau đây hệ thức nào là tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Bậc của các hệ thức đó là bao nhiêu?

   a) $a_n = 3a_{n-2}$ b) $a_n = 3,$

   c) $a_n = a_{n-1}^2$ d) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$

   e) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ f) $a_n = 4a_{n-2} + 5a_{n-4} + 9a_{n-7}$.

3. Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau :

   a) $a_n = 2a_{n-1}$ với $n \geq 1$, $a_0 = 3$.

   b) $a_n = a_{n-1}$ với $n \geq 1$, $a_0 = 2$.

   c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

   d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.

   e) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

   f) $a_n = 4a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$.

   g) $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{4}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

4. Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau :

   a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.

   b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

   c) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$.

d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.

e) $a_n = a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = -1$.

f) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$.

g) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ với $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.

5. Có thể truyền được bao nhiêu thông báo khác nhau trong n μs khi sử dụng hai tín hiệu như trong Bài tập 25 của Tiết 5.1?

6. Có thể truyền được bao nhiêu thông báo khác nhau trong n μs khi sử dụng ba tín hiệu nếu truyền tín hiệu đầu mất 1 μs, hai tín hiệu sau mỗi tín hiệu cần 2 μs và mỗi tín hiệu trong thông báo được truyền liên tiếp nhau?

7. Với những tấm lát 1×2 và 2×2 có thể lát một chiếc hảng $2 \times n$ bằng bao nhiêu cách khác nhau?

8. Giả sử số tôm hùm bị đánh bắt trong một năm bằng trung bình cộng số bị đánh bắt trong hai năm trước đó.

a) Hãy tìm quan hệ truy hồi cho $\{L_n\}$, trong đó L_n là số tôm bị đánh bắt trong năm thứ n.

b) Hãy tìm L_n nếu năm đầu 100 000 tôm hùm bị đánh bắt, năm thứ hai 300 000 tôm hùm bị đánh bắt.

9. Một người gửi 100 000 đô-la vào một quỹ đầu tư vào ngày đầu của một năm. Ngày cuối cùng của năm người đó được hưởng hai khoản tiền lãi. Khoản lãi đầu là 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm. Khoản thứ hai là 45% của tổng số tiền có trong tài khoản trong năm trước đó.

a) Tìm công thức truy hồi cho $\{P_n\}$ trong đó P_n là tổng số tiền trong tài khoản vào cuối của n năm, nếu người đó không rút tiền ra lần nào.

b) Tính tổng số tiền trong tài khoản vào sau n năm, nếu người đó không rút tiền ra lần nào.

10*. Chứng minh Định lý 2.

11. **Số Lucas** thỏa mãn hệ thức truy hồi sau : $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, và điều kiện ban đầu $L_0 = 2$ và $L_1 = 1$.

a) Chỉ ra rằng $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ với $n = 2, 3, \ldots$ trong đó f_n là các số Fibonacci.

b) Hãy tìm công thức hiển của các số Lucas.

12. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ với $n = 3, 4, 5, \ldots$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.

13. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.

14. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ với $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ và $a_3 = 8$.

15. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

16*. Chứng minh Định lý 3.

17. Chứng minh hằng đẳng thức sau đây biểu diễn mối quan hệ giữa các số Fibonacci và các hệ số nhị thức :

$$f_{n+1} = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \ldots + C(n-k, k)$$

trong đó n là các số nguyên dương và $k = \lfloor n/2 \rfloor$. (Gợi ý : Giả sử $a_n = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \ldots + C(n-k, k)$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn cùng hệ thức truy hồi và điều kiện ban đầu xác định các số Fibonacci).

18. Hệ thức truy hồi tuyến tính **không thuần nhất** bậc k có dạng :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n).$$

Chứng minh rằng nếu $\{p_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi không thuần nhất thì mọi nghiệm đều có dạng $\{p_n + h_n\}$ trong đó h_n là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất tương ứng $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$. (*Gợi ý* : Chỉ ra rằng nếu $\{q_n\}$ là một nghiệm khác thì $\{q_n - p_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất tương ứng).

19. Xét hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$.

a) Chỉ ra rằng $a_n = -2^{n+1}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi này.

b) Dùng Bài tập **18** để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 1$.

20. Xét hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$.

a) Chỉ ra rằng $a_n = n2^n$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi này.

b) Dùng Bài tập 18 để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 2$.

21. a) Xác định giá trị của các hằng số A và B sao cho $a_n = An + B$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$.

b) Dùng Bài tập 18 để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Tìm ngbiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 4$.

22. a) Tìm các nghiệm đặc trưng của hệ thức truy bồi tuyến tính tbuần nhất $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (*Chú ý* : Nghiệm là các số phức).

b) Tìm nghiệm thỏa mãn hệ thức truy hồi trên và các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 2$.

23*. a) Tìm nghiệm đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất $a_n = a_{n-4}$ (*Chú ý* : Tìm cả nghiệm phức).

b) Tìm nghiệm thỏa mãn hệ thức truy hồi trên và các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ và $a_3 = 1$.

24*. Giải các hệ thức truy hồi đồng thời

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + 2\ b_{n-1}$$

với $a_0 = 1$ và $b_0 = 2$.

25*. a) Dùng công thức tìm được trong Bài tập 4 cho các số Fibonacci f_n, hãy chứng tỏ rằng f_n là số nguyên gần nhất với $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b) Tìm n để f_n lớn hơn và nhỏ hơn $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

26. Cbứng tỏ rằng nếu $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = s$ và $a_1 = t$ trong đó s và t là các hằng số, thì $a_n = sf_{n-1} + tf_n$ với mọi n nguyên dương.

27. Hãy biểu diễn nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ với $n \geqslant 2$, $a_n = 0$ và $a_1 = 1$ qua các số Fibonacci (*Gợi ý* : Đặt $b_n = a_n + 1$, áp dụng Bài tập 26 cho dãy b_n).

28*. Gọi $\mathbf{A}_n$ là ma trận $n \times n$ với các số 2 trên đường chéo chính và các số 1 trên tất cả các vị trí ở cạnh các phần tử trên đường chéo chính và bằng không tại tất cả các vị trí còn lại. Tìm hệ thức truy hồi cho định thức d_n của $\mathbf{A}_n$. Giải hệ thức truy hồi này để tìm công thức cho d_n.

29. Giả sử rằng mỗi một cặp thỏ trên đảo khi được một tháng tuổi đẻ được hai cặp thỏ con và từ 2 tháng tuổi mỗi tháng đẻ được 6 cặp thỏ con. Giả sử trong thời gian thí nghiệm không có con nào bị chết hoặc rời khỏi đảo.

a) Tìm hệ thức truy hồi cho số cặp thỏ trên đảo sau n tháng kể từ khi thả một cặp thỏ mới sinh lên đảo.

b) Bằng cách giải hệ thức truy hồi trong a) hãy tìm số cặp thỏ trên đảo sau n tháng kể từ khi thả một cặp thỏ mới sinh lên đảo.

5.3. QUAN HỆ CHIA ĐỂ TRỊ

MỞ ĐẦU

Nhiều thuật toán đệ quy chia bài toán với các thông tin vào đã cho thành một hay nhiều bài toán nhỏ hơn. Sự phân chia này được áp dụng liên tiếp cho tới khi có thể tìm được lời giải của bài toán nhỏ một cách dễ dàng. Chẳng hạn, chúng ta tiến hành việc tìm kiếm nhị phân bằng cách rút gọn việc tìm kiếm một phần tử trong một danh sách tới việc tìm phần tử đó trong một danh sách có độ dài giảm đi một nửa. Chúng ta rút gọn liên tiếp như vậy cho tới khi còn lại một phần tử. Một ví dụ khác là thủ tục nhân các số nguyên. Thủ tục này rút gọn bài toán nhân hai số nguyên tới ba phép nhân hai số nguyên với số bit giảm đi một nửa. Phép rút gọn này được dùng liên tiếp cho tới khi nhận được các số nguyên có một bit. Các thủ tục này gọi là các thuật toán **chia để trị**. Trong tiết này sẽ nghiên cứu các hệ thức truy hồi thường gặp khi phân tích độ phức tạp của các thuật toán loại này.

HỆ THỨC CHIA ĐỂ TRỊ

Giả sử rằng một thuật toán phân chia một bài toán cỡ n thành a bài toán nhỏ, trong đó mỗi bài toán nhỏ có cỡ n/b (để đơn giản giả sử rằng n chia hết cho b ; trong thực tế các bài toán nhỏ thường có cỡ bằng số nguyên gần nhất lớn hơn hoặc bằng hoặc nhỏ hơn hay bằng n/b). Cũng vậy ta giả sử rằng tổng các phép toán thêm vào khi thực hiện phân chia bài toán cỡ n thành các bài toán có cỡ nhỏ hơn là $g(n)$. Khi đó, nếu $f(n)$ là số các phép toán cần thiết để giải bài toán đã cho, thì f thỏa mãn hệ thức truy hồi sau :

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$$

Hệ thức này có tên là hệ thức truy hồi **chia để trị**.

Ví dụ 1. Chúng ta đã xét thuật toán tìm kiếm nhị phân trong Tiết 2.1. Thuật toán này đưa bài toán tìm kiếm cỡ n về bài toán tìm kiếm phần tử này trong dãy tìm kiếm cỡ $n/2$, khi n chẵn. (Vì thế, bài toán cỡ n được đưa *về một* bài toán cỡ $n/2$). Khi thực hiện việc rút gọn cần hai phép so sánh. (Một để xác định nửa danh sách nào được tiếp tục sử dụng, và phép so sánh thứ hai để xác định xem danh sách có còn phần tử nào không). Vì thế, nếu $f(n)$ là số phép so sánh cần phải làm khi tìm kiếm một phần tử trong danh sách tìm kiếm cỡ n ta có $f(n) = f(n/2) + 2$, nếu n là số chẵn.

■

Ví dụ 2. Chúng ta sẽ nghiên cứu thuật toán định vị các phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của dãy $a_1, a_2, ..., a_n$. Nếu $n = 1$, thì a_1 là phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của dãy. Nếu $n > 1$ thì ta chia dãy này thành hai dãy hoặc là chúng có cùng số lượng các phần tử hoặc là một dãy có nhiều phần tử hơn dãy kia. Bài toán thu về việc tìm phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi một trong hai dãy nhỏ hơn. Lời giải của bài toán xuất phát sẽ nhận được bằng cách so sánh các phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của hai dãy con.

Gọi $f(n)$ là tổng số các phép so sánh cần phải thực hiện để tìm phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập n phần tử. Chúng ta đã chỉ ra rằng bài toán cỡ n có thể đưa về hai bài toán cỡ $n/2$, khi n chẵn, bằng việc dùng hai phép so sánh, một là so sánh các phần tử lớn nhất và sau đó là so sánh các phần tử nhỏ nhất của hai tập con. Vì thế chúng ta nhận được hệ thức truy hồi $f(n) = 2f(n/2) + 2$ khi n chẵn.

■

Ví dụ 3. Thật kỳ lạ là vẫn có các thuật toán hiệu quả hơn thuật toán thông thường (như đã mô tả trong Tiết 2.4) để nhân hai số nguyên. Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một trong các thuật toán như vậy. Đó là thuật toán nhân nhanh, có dùng kỹ thuật chia để trị. Trước tiên ta phân chia mỗi một trong hai số nguyên $2n$ bit thành hai khối mỗi khối n bit. Sau đó phép nhân hai số nguyên $2n$ bit ban đầu được thu về ba phép nhân các số nguyên n bit cộng với các phép dịch chuyển và các phép cộng.

Giả sử a và b là các số nguyên có các biểu diễn nhị phân dài $2n$ (thêm các bit đầu bằng 0 vào các biểu diễn này nếu cần làm cho chúng có độ dài như nhau). Cho

$$a = (a_{2n-1}\, a_{2n-2} \cdots a_1\, a_o)_2$$

và $$b = (b_{2n-1}\, b_{2n-2} \cdots b_1 b_o)_2.$$

Giả sử $a = 2^n A_1 + A_o, \qquad b = 2^n B_1 + B_o,$

trong đó

$$A_1 = (a_{2n-1} a_{2n-2} \cdots a_{n+1}\, a_n)_2, \qquad A_o = (a_{n-1} \cdots a_1 a_o)_2$$

$$B_1 = (b_{2n-1}\, b_{2n-2} \cdots b_{n+1}\, b_n)_2, \qquad B_n = (b_{n-1} \cdots b_1 b_o)_2.$$

Thuật toán nhân nhanh các số nguyên dựa trên đẳng thức :

$$ab = (2^{2n} + 2^n)A_1B_1 + 2^n(A_1 - A_o)(B_o - B_1) + (2^n + 1)A_oB_o.$$

Đẳng thức này chỉ ra rằng phép nhân hai số nguyên 2n bit có thể thực hiện bằng cách dùng ba phép nhân các số nguyên n bit và các phép cộng, trừ và phép dịch chuyển. Điều đó có nghĩa là nếu $f(n)$ là tổng các phép toán nhị phân cần thiết để nhân hai số nguyên n bit thì

$$f(2n) = 3f(n) + Cn.$$

Ba phép nhân các số nguyên n bit cần $3f(n)$ phép toán nhị phân. Mỗi một trong các phép cộng, trừ, hay dịch chuyển dùng một hằng số nhân với n lần các phép toán nhị phân và Cn là tổng các phép toán nhị phân được dùng khi làm các phép toán này.

Ví dụ 4. Thuật toán nhân hai ma trận $n \times n$, với n chẵn, dùng 7 phép nhân hai ma trận $(n/2) \times (n/2)$ và 15 phép cộng các ma trận $(n/2) \times (n/2)$. Vì thế, nếu $f(n)$ là số các phép toán (nhân và cộng) được dùng ta suy ra

$$f(n) = 7f\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{15n^2}{4}, \text{ với } n \text{ chẵn.}$$

Như các Ví dụ 1–4 đã chỉ ra, các hệ thức truy hồi dạng $f(n) = af(n/b) + g(n)$ xuất hiện trong rất nhiều bài toán khác nhau. Ta có thể đánh giá kích cỡ của các hàm thỏa mãn một hệ thức truy hồi như thế. Giả sử rằng f thỏa mãn hệ thức truy hồi này với mọi n chia hết cho b. Gọi $n = b^k$ với k là số nguyên dương. Khi đó

$$\begin{aligned}
f(n) &= af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\
&= a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right) + ag\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\
&= a^3f\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2g\left(\frac{n}{b^2}\right) + ag\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\
&\;\;\vdots \\
&= a^kf\left(\frac{n}{b^k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} a^jg\left(\frac{n}{b^j}\right).
\end{aligned}$$

Vì $\frac{n}{b^k} = 1$ ta suy ra

$$f(n) = a^kf(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^jg\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

Chúng ta có thể dùng phương trình này để đánh giá kích cỡ của các hàm thỏa mãn hệ thức chia để trị.

ĐỊNH LÝ 1. Giả sử f là một hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c$$

với mọi n chia hết cho b, $a \geqslant 1$, b là số nguyên lớn hơn 1, còn c là số thực dương. Khi đó

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & \text{nếu } a > 1 \\ O(\log n) & \text{nếu } a = 1 \end{cases}$$

Chứng minh: Trước tiên giả sử $n = b^k$. Từ công thức của $f(n)$ nhận được trong phần bàn luận trước định lý này với $g(n) = c$, ta có

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c = a^k f(1) + c\sum_{j=0}^{k-1} a^j$$

Khi $a = 1$ ta được $f(n) = f(1) + ck$. Vì $n = b^k$ nên $k = \log_b n$. Vì thế

$$f(n) = f(1) + c\log_b n.$$

Khi n không là lũy thừa của b. Khi đó chúng ta có $b^k < n < b^{k+1}$, với k là số nguyên dương. Vì f là hàm tăng ta suy ra $f(n) \leqslant f(b^{k+1}) = f(1) + c(k + 1) = (f(1) + c) + ck \leqslant (f(1) + c) + c\log_b n$. Do đó, trong cả hai trường hợp, $f(n) = O(\log n)$ khi $a = 1$.

Bây giờ giả sử $a > 1$. Khi $n = b^k$ với k là một số nguyên dương, từ công thức tính tổng của cấp số nhân suy ra

$$\begin{aligned} f(n) &= a^k f(1) + \frac{c(a^k - 1)}{a - 1} \\ &= a^k\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] - \frac{c}{a-1} \\ &= C_1 n^{\log_b a} + C_2 , \end{aligned}$$

vì $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, trong đó $C_1 = f(1) + \dfrac{c}{a-1}$ và $C_2 = -\dfrac{c}{a-1}$.

Bây giờ giả sử n không là lũy thừa của b. Khi đó chúng ta có $b^k < n < b^{k+1}$, với k là một số nguyên dương. Vì f là hàm tăng ta suy ra

$$\begin{aligned} f(n) &\leqslant f(b^{k+1}) = C_1 a^{k+1} + C_2 \\ &\leqslant (C_1 a) a^{\log_b n} + C_2 \\ &\leqslant (C_1 a) n^{\log_b a} + C_2 \end{aligned}$$

vì $k \leqslant \log_b n < k + 1$.

Do vậy, chúng ta có $f(n) = O(n^{\log_b a})$.

■

Ví dụ 5. Cho $f(n) = 5f\left(\frac{n}{2}\right) + 3$ và $f(1) = 7$. Hãy tìm $f(2^k)$ trong đó k là số nguyên dương. Hãy đánh giá $f(n)$ nếu f là hàm tăng.

Giải: Từ Định lý 1, với $a = 5$, $b = 2$, và $c = 3$ chúng ta thấy nếu $n = 2^k$ thì

$$f(n) = a^k\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] - \frac{c}{a-1}$$

$$= 5^k\left[7 + \frac{3}{4}\right] - \frac{3}{4} = 5^k.\frac{31}{4} - \frac{3}{4}.$$

Như vậy, nếu f là hàm tăng, Định lý 1 chỉ ra rằng

$$f(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_2 5}).$$

■

Chúng ta có thể dùng Định lý 1 để đánh giá độ phức tạp của thuật toán tìm kiếm nhị phân và thuật toán trong Ví dụ 2.

Ví dụ 6. Hãy ước lượng số phép toán so sánh dùng trong thuật toán tìm kiếm nhị phân.

Giải: Trong Ví dụ 1 ta đã chứng minh rằng $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 2$ khi n chẵn, còn f là số phép toán so sánh cần dùng trong tìm kiếm nhị phân trong một dãy cỡ n. Vì thế từ Định lý 1 ta suy ra $f(n) = O(\log n)$.

■

Ví dụ 7. Hãy ước lượng số phép toán so sánh dùng trong thuật toán cho trong Ví dụ 2 để định vị các số lớn nhất và bé nhất.

Giải : Trong ví dụ 2 dã chỉ ra rằng $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + 2$ khi n chẵn, còn f là số phép toán so sánh cần dùng trong thuật toán này. Vì thế từ Định lý 1 suy ra

$$f(n) = O(n^{\log 2}) = O(n).$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu một định lý tổng quát hơn và phức tạp hơn nhưng rất có ích khi phân tích độ phức tạp của thuật toán chia để trị.

ĐỊNH LÝ 2. Giả sử f là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + cn^{d}$$

với mọi $n = b^{k}$, trong đó k là số nguyên dương, $a \geqslant 1$, b là số nguyên lớn hơn 1 còn c và d là các số thực dương. Khi đó

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{d}) & \text{nếu } a < b^{d} \\ O(n^{d} \log n) & \text{nếu } a = b^{d} \\ O(n^{\log_b a}) & \text{nếu } a > b^{d} \end{cases}$$

Chứng minh Định lý 2 là nội dung của các Bài tập 17-21 ở cuối tiết này.

Ví dụ 8. Hãy ước lượng số phép toán nhị phân cần dùng khi nhân hai số nguyên n bit bằng thuật toán nhân nhanh.

Giải : Ví dụ 3 đã chỉ ra rằng $f(n) = 3f\left(\frac{n}{2}\right) + Cn$, khi n chẵn, trong đó $f(n)$ là số các phép toán nhị phân cần dùng khi nhân hai số nguyên n bít bằng thuật toán nhân nhanh. Vì thế, từ Định lý 2 ta suy ra $f(n) = O(n^{\log 3})$. Chú ý là $\log 3 \approx 1{,}6$. Vì thuật toán nhân thông thường dùng $O(n^2)$ phép toán nhị phân, thuật toán nhân nhanh sẽ thực sự tốt hơn thuật toán nhân thông thường khi các số nguyên là đủ lớn.

■

Ví dụ 9. Hãy đánh giá số các phép nhân và phép cộng cần dùng khi nhân hai ma trận $n \times n$ bằng thuật toán trình bày trong Ví dụ 4. Chúng ta có $f(n) = 7f\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{15n^2}{4}$, với n chẵn. Vì thế, từ Định lý 2, ta suy ra $f(n) = O(n^{\log 7})$. Vì $\log 7 \approx 2{,}8$, nên với n đủ lớn thuật toán nhân hai ma trận $n \times n$ sẽ tốt hơn thuật toán thông thường dùng $O(n^3)$ phép toán nhân và phép cộng.

■

BÀI TẬP

1. Cần bao nhiêu phép so sánh khi tìm kiếm nhị phân trong một dãy có 64 phần tử?

2. Cần bao nhiêu phép so sánh để định vị số lớn nhất và số bé nhất trong một dãy 128 phần tử bằng thuật toán cho trong Ví dụ 2?

3. Hãy nhân $(1110)_2$ và $(1010)_2$ bằng thuật toán nhân nhanh.

4. Hãy viết thuật toán nhân nhanh bằng giả mã.

5. Xác định giá trị của hằng số C trong Ví dụ 3 và dùng nó để đánh giá số phép toán nhị phân cần thiết để nhân hai số nguyên 64 bit bằng thuật toán nhân nhanh.

6. Cần bao nhiêu phép toán để nhân hai ma trận 32×32 bằng thuật toán dùng trong Ví dụ 4?

7. Giả sử rằng $f(n) = f\left(\frac{n}{3}\right) + 1$ với n là số chia hết cho 3 và $f(1) = 1$. Hãy tìm :

a) $f(3)$. b) $f(27)$ c) $f(729)$

8. Giả sử rằng $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + 3$ với n là số chẵn và $f(1) = 5$. Hãy tìm :

a) $f(2)$. b) $f(8)$ c) $f(64)$ d) $f(1024)$

9. Giả sử $f(n) = f\left(\frac{n}{5}\right) + 3n^2$ với n là số chia hết cho 5 và $f(1) = 4$. Hãy tìm :

a) $f(5)$. b) $f(125)$ c) $f(3125)$.

10. Hãy tìm $f(n)$ với $n = 2^k$, trong đó f thỏa mãn hệ thức truy hồi $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ và $f(1) = 1$.

11. Hãy ước lượng cỡ của hàm f trong Bài tập 10 nếu f là hàm tăng.

12. Tìm $f(n)$ với $n = 3^k$, trong đó f thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = 2f\left(\frac{n}{3}\right) + 4$ và $f(1) = 1$.

13. Hãy ước lượng cỡ của hàm f trong Bài tập 12 nếu f là hàm tăng.

14. Giả sử rằng có $n = 2^k$ đội tham gia trong cuộc thi đấu theo thể thức loại trực tiếp, trong đó có $n/2$ trận thi đấu ở vòng thứ nhất, sau đó $n/2 = 2^{k-1}$ đội thắng sẽ thi đấu tiếp ở vòng hai, và cứ tiếp tục như thế. hãy lập hệ thức truy hồi cho số các vòng thi đấu của toàn giải.

15. Có bao nhiêu vòng thi đấu trong cuộc thi đấu như trong Bài tập 14, nếu tất cả có 32 đội tham gia.

16. Hãy giải hệ thức truy hồi cho số vòng thi đấu trong cuộc thi như trong Bài tập 14.

Trong các Bài tập 17-21 giả sử rằng f là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi $f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$, trong đó $a \geqslant 1$, b là số nguyên lớn hơn 1, còn c và d là các số thực dương. Những bài tập này sẽ cho ta cách chứng minh Định lý 2.

17*. Chứng tỏ rằng nếu $a = b^d$ và n là lũy thừa của b khi đó $f(n) = f(1)n^d + cn^d\log_b n$.

18. Dùng Bài tập 17 chứng tỏ rằng nếu $a = b^d$ thì $f(n) = O(n^d \log n)$.

19*. Chứng tỏ rằng nếu $a \neq b^d$ và n là lũy thừa của b khi đó

$f(n) = C_1 n^d + C_2 n^{\log_b a}$,

trong đó $C_1 = \dfrac{b^d c}{b^d - a}$ và $C_2 = f(1) + \dfrac{b^d c}{a - b^d}$.

20. Dùng Bài tập 19 chỉ ra rằng nếu $a < b^d$ thì $f(n) = O(n^d)$.

21. Dùng Bài tập 19 chỉ ra rằng nếu $a > b^d$ thì $f(n) = O(n^{\log_b a})$.

22. Tìm $f(n)$ với $n = 4^k$ trong đó f thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = 5f\left(\frac{n}{4}\right) + 6n$ và $f(1) = 1$.

23. Đánh giá cỡ của hàm f trong bài tập 22 nếu f là hàm tăng.

24. Tìm $f(n)$ với $n = 2^k$ trong đó f thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = 8f\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ và $f(1) = 1$.

25. Đánh giá cỡ của hàm f trong Bài tập 24 nếu f là hàm tăng.

5.4. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

MỞ ĐẦU

Lớp toán rời rạc gồm 30 nữ sinh và 50 sinh viên năm thứ hai. Bao nhiêu sinh viên trong lớp học là nữ hoặc là sinh viên năm thứ hai? Câu hỏi này không thể trả lời được trừ khi cho thêm một số thông tin nữa. Cộng số nữ sinh với số sinh viên năm thứ hai có thể sẽ không cho câu trả lời đúng bởi vì số sinh viên nữ năm thứ hai sẽ được tính hai lần. Chính vì vậy số sinh viên trong lớp hoặc là nữ hoặc là sinh viên năm thứ hai là tổng số sinh viên nữ và số sinh viên năm thứ hai trừ đi số sinh viên nữ năm thứ hai. Kỹ thuật giải bài toán đếm như thế đã được giới thiệu trong Tiết 4.1. Trong mục này ta sẽ mở rộng những tư tưởng đã đưa vào trong tiết đó để giải một lớp rộng hơn nữa các bài toán đếm.

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Có bao nhiêu phần tử trong hợp của hai tập hợp hữu hạn phần tử? Trong Tiết 1.5 đã chỉ rằng số các phần tử trong hợp hai tập A và B bằng tổng các phần tử của mỗi tập trừ đi số phần tử của giao hai tập hợp, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

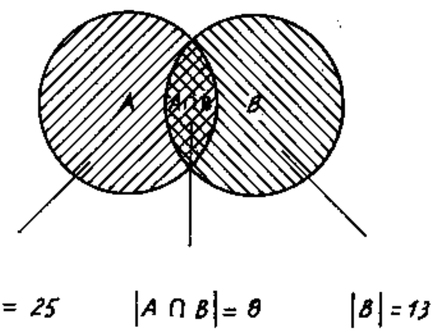
Như chúng ta đã chỉ ra trong Tiết 4.1 công thức cho số các phần tử của hợp hai tập hợp rất hay dùng trong các bài toán đếm. Ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 1. Lớp toán rời rạc có 25 sinh viên giỏi Tin học, 13 sinh viên giỏi Toán và 8 sinh viên giỏi cả Toán và Tin học. Hỏi trong lớp này có bao nhiêu sinh viên, nếu mỗi sinh viên hoặc giỏi toán hoặc giỏi tin hoặc giỏi cả hai môn?

Giải : Gọi A là tập các sinh viên giỏi Tin học và B là tập các sinh viên giỏi Toán học. Khi đó $A \cap B$ là tập các sinh viên giỏi cả Toán và Tin học. Vì mỗi sinh viên trong lớp hoặc giỏi toán giỏi tin hoặc giỏi cả hai môn, nên ta suy ra số sinh viên trong lớp là $|A \cup B|$. Do vậy,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$$



Hình 1. Tập các sinh viên trong lớp toán rời rạc.

■

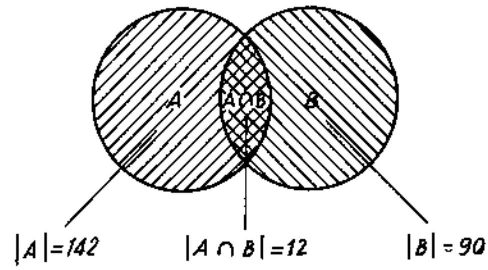
Ví dụ 2. Bao nhiêu số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11?

Giải : Gọi A số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7, và B lậ tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 11. Khi đó $A \cup B$ là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11 và $A \cap B$ là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho cả 7 và 11. Trong Ví dụ 2 của Tiết 2.3 chúng ta biết là trong số các số nguyên không lớn hơn 1000 có $\lfloor 1000/7 \rfloor$ số nguyên chia hết cho 7 và $\lfloor 1000/11 \rfloor$ chia hết cho 11. Vì 7 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên số nguyên chia hết cho cả 7 và 11 là số nguyên chia hết cho 7.11. Số các số này là $\lfloor 1000/(7.11) \rfloor$. Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7.11} \right\rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 = 220, \end{aligned}$$

tức là có 220 số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11. (Xem Hình 2).

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 142 + 90 - 12 = 220.$$



Hình 2. Tập các số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.

Ví dụ tiếp theo chỉ ra cách tìm số các phần tử trong phần bù của hợp hai tập hợp.

Ví dụ 3. Giả sử trong trường bạn có 1807 sinh viên năm thứ nhất. Trong số này có 453 sinh viên chọn môn tin học, 567 chọn môn toán học và 299 học cả hai môn toán và tin. Có bao nhiêu sinh viên không theo học toán cũng không học tin học?

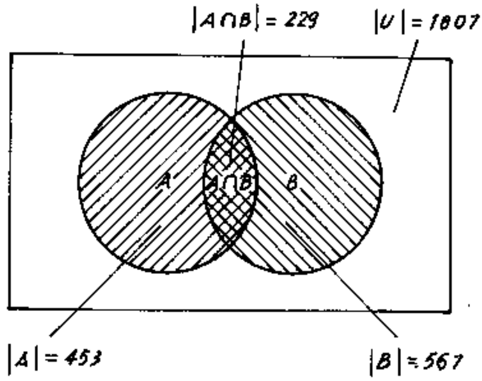
Giải : Số sinh viên không theo học toán cũng không học tin học sẽ bằng tổng số sinh viên trừ đi số sinh viên theo học hoặc toán hoặc tin học. Gọi A là tập các sinh viên năm thứ nhất theo học tin học, còn B là tập các sinh viên học môn toán. Khi đó ta có : $|A| = 453$, $|B| = 567$, và $|A \cap B| = 299$. Số sinh viên theo học hoặc tin học, hoặc toán học là :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 453 + 567 - 299 = 721.$$

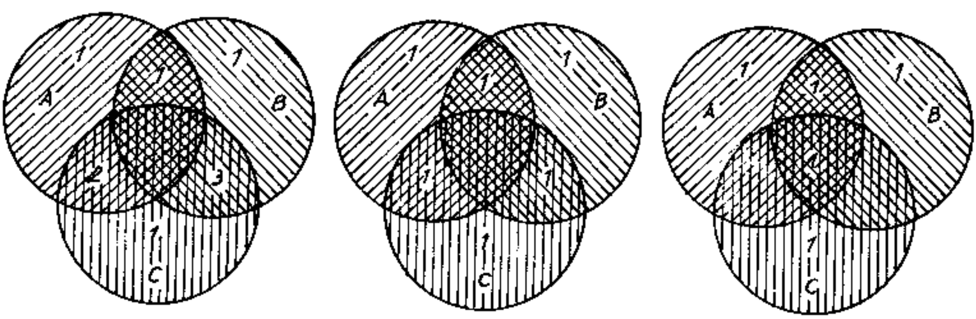
Do vậy có 1807 - 721 = 1086 sinh viên năm thứ nhất không theo học cả toán và cả tin học. Điều này được minh họa trên hình 3.

Trong phần sau của tiết này chúng ta sẽ đưa ra cách tìm số các phần tử của hợp một số hữu hạn các tập hợp. Khi đó chúng ta sẽ nhận được **nguyên lý bù trừ.** Trước khi nghiên cứu hợp của n tập hợp trong đó n là một số nguyên dương tùy ý, chúng ta sẽ trình bày cách rút ra công thức tính số phần tử của hợp 3 tập hợp A, B, C. Trước khi xây dựng công thức này ta lưu ý rằng $|A| + |B| + |C|$ đếm một lần những phần tử chỉ thuộc một trong ba tập, đếm hai lần những phần tử thuộc đúng hai trong ba tập, và đếm 3 lần những phần tử thuộc cả ba tập. Xem minh họa trên hình 4a.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721$$



Hình 3. Tập các sinh viên năm thứ nhất không theo học tin học cũng không học toán học.



(a) Đếm các phần tử theo $|A| + |B| + |C|$

(b) Đếm các phần tử theo $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$.

(c) Đếm các phần tử theo $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Hình 4. Tìm công thức tính số phần tử của hợp ba tập hợp.

Để loại bỏ việc đếm trùng lặp các phần tử thuộc nhiều hơn một tập ta cần phải trừ đi số các phần tử thuộc giao của tất cả các cặp của ba tập hợp này, tức là nhận được

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Biểu thức này đếm một lần các phần tử chỉ thuộc một trong ba tập đã cho. Các phần tử xuất hiện trong đúng hai tập cũng được đếm một lần. Các phần tử thuộc cả ba tập chưa đếm lần nào. Xem hình 4b.

Để khỏi bỏ sót ta thêm vào số các phần tử thuộc giao của ba tập. Biểu thức cuối cùng này tính mỗi phần đúng một lần dù nó thuộc một hay hai hoặc ba tập.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Công thức này được minh họa trên hình 4c.

Ví dụ 4. Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga, 103 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp, 23 học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 học cả tiếng Pháp và tiếng Nga. Nếu tất cả 2092 sinh viên đều theo học ít nhất một ngoại ngữ, thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?

Giải : Gọi S là tập các sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, F là tập các sinh viên học tiếng Pháp, R là tập các sinh viên học tiếng Nga. Khi đó :

$$|S| = 1232 \qquad |F| = 879 \qquad |R| = 114$$

$$|S \cap F| = 103 \quad |S \cap R| = 23 \quad |F \cap R| = 14$$

và $$|S \cup F \cup R| = 2092.$$

Thay vào công thức tổng quát :

$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R| - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

ta nhận được

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |S \cap F \cap R|$$

Giải ra ta được : $|S \cap F \cap R| = 7$.

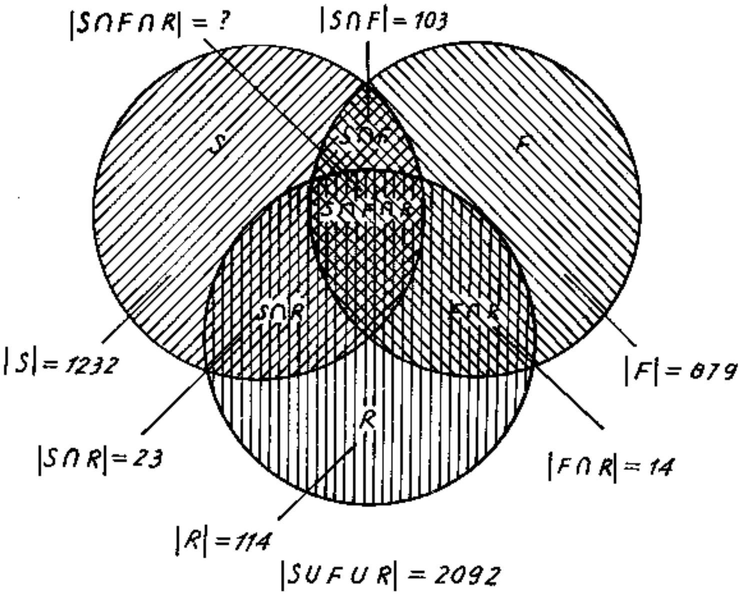
Do vậy có 7 sinh viên theo học cả ba thứ tiếng. Xem minh hoạ trên hình 5.

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh nguyên lý bù trừ.

ĐỊNH LÝ 1. *Nguyên lý bù trừ.* Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hữu hạn. Khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$



***Hình** 5.* Tập các sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, tiếng Pháp và tiếng Nga.

Chứng minh: Chúng ta sẽ chứng minh công thức trên bằng cách chỉ ra rằng mỗi phần tử của hợp n tập hợp được đếm đúng một lần. Giả sử a là phần tử chung của đúng r tập trong các tập $A_1, A_2, \ldots A_n$ trong đó $1 \leq r \leq n$. Phần tử này được đếm $C(r,1)$ lần trong tổng $\sum|A_i|$. Nó được đếm $C(r,2)$ lần trong $\sum|A_i \cap A_j|$. Tổng quát nó được đếm

$$C(r,1) - C(r,2) + \ldots + ((-1)^{r+1}C(r,r)$$

lần khi tính giá trị ở vế phải của công thức trên. Theo Định lý 7 của Tiết 5.3 ta có

$$C(r,0) - C(r,1) + C(r,2) - \ldots + (-1)^r C(r,r) = 0.$$

Vì thế

$$1 = C(r,0) = C(r,1) - C(r,2) + \ldots + (-1)^{r+1}C(r,r).$$

Do vậy, mỗi phần tử của hợp được đếm đúng một lần khi tính giá trị ở vế phải của công thức đã cho. Nguyên lý bù trừ được chứng minh.

■

Nguyên lý hù trừ cho ta công thức tính số phần tử của hợp n tập hợp với mọi n nguyên dương. Nó gồm có $2^n - 1$ số hạng.

Ví dụ 5. Hãy viết ra công thức tính số phần tử của hợp 4 tập hợp.

Giải: Nguyên lý hù trừ chỉ ra rằng

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Chú ý rằng công thức này chứa 15 số hạng khác nhau, mỗi số hạng cho mỗi tập con không rỗng của $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

BÀI TẬP

1. Tập $A_1 \cup A_2$ có hao nhiêu phần tử nếu A_1 có 12 phần tử, A_2 có 18 phần tử và

   a) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$? b) $|A_1 \cap A_2| = 1$?

   c) $|A_1 \cap A_2| = 6$? d) $A_1 \subseteq A_2$

2. Trong một trường đại học có 345 sinh viên theo học môn toán cao cấp, 212 sinh viên học môn toán rời rạc và 188 học cả hai môn. Hỏi có hao nhiêu sinh viên hoặc học môn toán cao cấp hoặc học môn toán tời rạc?

3. Kết quả của một cuộc điều tra mức sống của các gia đình ở Mỹ cho biết 96% có ít nhất một máy thu hình, 98% có điện thoại, và 95% có điện thoại và ít nhất một máy thu hình. Tính tỷ lệ phần trăm các gia đình ở Mỹ không có điện thoại hoặc không có máy thu hình.

4. Một báo cáo về tình hình thị trường máy tính cá nhân cho biết 650 000 người sẽ mua modem cho máy của họ trong năm tới, và 1 250 000 sẽ mua ít nhất một sản phẩm phần mềm. Nếu báo cáo này nói rằng 1 450 000 người sẽ mua hoặc là modem hoặc là ít nhất một sản phẩm phần mềm, thì bao nhiêu người sẽ mua cả modem và mua ít nhất một sản phẩm phần mềm?

5. Hãy tìm số phần tử của $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ nếu mỗi tập có 100 phần tử và nếu

a) các tập hợp là từng cặp rời nhau.

b) có 50 phần tử chung của mỗi cặp tập và không có phần tử chung của cả ba tập.

c) Có 50 phần tử chung của mỗi cặp tập và 25 phần tử chung của cả ba tập.

6. Hãy tìm số phần tử của $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ nếu A_1 có 100 phần tử, A_2 có 1000 phần tử và A_3 có 10 000 phần tử và nếu

a) $A_1 \subseteq A_2$ và $A_2 \subseteq A_3$

b) các tập hợp là từng cặp rời nhau,

c) có hai phần tử chung của mỗi cặp tập và một phần tử chung của cả ba tập.

7. Trong tổng số 2504 sinh viên của một trường đại học tin học có 1876 theo học môn Ngôn ngữ Pascal, 999 học môn Ngôn ngữ Fortran, và 345 học Ngôn ngữ C. Ngoài ra ta còn biết 876 sinh viên học cả Pascal và Fortran, 232 học cả Fortran và C, 290 học cả Pascal và C. Nếu 189 sinh viên học cả 3 môn Pascal, Fortran và C, thì trong trường hợp đó có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong ba môn về ngôn ngữ lập trình kể trên?

8. Sau một cuộc phỏng vấn 270 sinh viên các trường đại học người ta thấy 64 sinh viên thích ăn cải xanh, 94 thích ăn bắp cải, 58 thích ăn xúp lơ, 26 thích cả cải xanh và bắp cải, 28 thích cải xanh và xúp lơ, 22 thích bắp cải và xúp lơ và 14 thích cả ba loại rau. Hỏi trong số 270 sinh viên này có bao nhiêu không thích cả ba loại rau kể trên?

9. Có bao nhiêu sinh viên trong một trường đại học ghi tên học hoặc là toán cao cấp, toán học rời rạc, cấu trúc dữ liệu hoặc là ngôn ngữ lập trình, nếu tương ứng có 507, 292, 312 và 344 ghi tên học các môn học trên, và 14 học cả toán cao cấp và cấu trúc dữ liệu, 213 học toán cao cấp và ngôn ngữ lập trình, 211 học toán rời rạc và cấu trúc dữ liệu, 43 học toán rời rạc và ngôn ngữ lập trình, và không có sinh viên nào học đồng thời hoặc là toán cao cấp và toán rời rạc hoặc là cấu trúc dữ liệu và ngôn ngữ lập trình?

10. Tìm số các số nguyên không vượt quá 100 không chia hết hoặc cho 5 hoặc cho 7.

11. Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 100 và hoặc là số lẻ hoặc là bình phương của một số nguyên.

12. Tìm các số nguyên không vượt quá 100 và hoặc là bình phương hoặc là lập phương của một số nguyên.

13. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 8 và không chứa 6 số không liên tiếp?

14*. Có bao nhiêu hoán vị của 26 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh không chứa một trong các xâu *fish*, *rat*, hoặc *bird?*

15. Có bao nhiêu hoán vị của 10 chữ số hoặc là bắt đầu bằng ba chữ số 987, hoặc chứa các chữ số 45 ở vị trí thứ năm và thứ sáu, hoặc là kết thúc bằng ba chữ số 123?

16. Có bao nhiêu phần tử trong hợp của bốn tập hợp, nếu mỗi tập có 10 phần tử, mỗi cặp tập hợp có chung 50 phần tử, mỗi bộ ba tập hợp có 25 phần tử chung và có 5 phần tử thuộc cả 4 tập hợp?

17. Có bao nhiêu phần tử trong hợp của bốn tập hợp, nếu các tập hợp tương ứng có 50, 60, 70 và 80 phần tử, mỗi cặp tập hợp có chung 5 phần tử, mỗi bộ ba tập hợp có 1 phần tử chung và không có phần tử nào cùng thuộc cả 4 tập hợp?

18. Có bao nhiêu số hạng trong công thức tính số phần tử của hợp 10 tập hợp theo nguyên lý bù trừ?

19. Hãy viết công thức hiển tính số phần tử của hợp 5 tập hợp theo nguyên lý bù trừ.

20. Có bao nhiêu phần tử trong hợp của năm tập hợp, nếu tập có 10 000 phần tử, mỗi cặp tập hợp có chung 1000 phần tử, mỗi bộ ba tập hợp có 100 phần tử chung, mỗi bộ bốn tập hợp có 10 phần tử chung và có 1 phần tử thuộc cả 5 tập hợp?

21. Hãy viết công thức hiển tính số phần tử của hợp 6 tập hợp theo nguyên lý bù trừ nếu biết rằng không có bộ ba tập nào trong các tập này có phần tử chung.

22*. Chứng minh nguyên lý bù trừ bằng quy nạp toán học.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. a) Hệ thức truy hồi là gì?

   b) Tìm hệ thức truy hồi cho tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm nếu gửi 1000000 đô la vào tài khoản với lãi suất 9% một năm.

2. Hãy giải thích cách sử dụng các số Fibonacci để giải bài toán các con thỏ trên đảo.

3. a) Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số bước cần thực hiện trong trò chơi Tháp Hà Nội.

   b) Chỉ ra rằng hệ thức truy hồi này có thể giải bằng cách lặp.

4. a) Hãy giải thích cách tìm hệ thức truy hồi cho số xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 1 liên tiếp.

   b) Hãy tìm bài toán đếm khác có lời giải thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

5. Phát biểu định nghĩa hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k.

6. a) Hãy giải thích cách giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2.

   b) Hãy giải hệ thức truy hồi $a_n = 13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geq 2$ nếu $a_0 = 3$ và $a_1 = 15$.

   c) Hãy giải hệ thức truy hồi $a_n = 14a_{n-1}' - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ nếu $a_0 = 3$ và $a_1 = 35$.

7. a) Hãy giải thích cách tìm $f(b^k)$ trong đó k là một số dương nếu $f(n)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi chia để trị $f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$ với mọi n nguyên dương chia hết cho b.

   b) Tính $f(256)$ nếu $f(n) = 3f\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{5n}{4}$ và $f(1) = 7$.

8. a) Hãy đưa ra hệ thức truy hồi chia để trị cho sô các phép so sánh khi tìm một số trong danh sách theo thuật toán tìm kiếm nhị phân

   b) Hãy cho một đánh giá big – O cho số các phép so sánh dùng trong tìm kiếm nhị phân. theo hệ thức truy hồi chia để trị mà bạn đưa ra trong phần a) nếu dùng Định lý 1 trong Tiết 5.3.

9. a) Hãy đưa ra công thức tính số phần tử của hợp ba tập hợp.

b) Giải thích tại sao công thức này là đúng.

c) Hãy giải thích cách dùng công thức vừa đưa ra trong a) để tìm số các số nguyên không vượt quá 1000 chia hết cho 6, 10, hoặc 15.

d) Hãy giải thích cách dùng công thức trong phần a) để tìm số nghiệm không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$ với $x_1 < 8$, $x_2 < 6$ và $x_3 < 5$.

10. a) Hãy đưa ra công thức tính số phần tử của hợp 4 tập hợp và giải thích tại sao nó đúng.

b) Giả sử các tập A_1, A_2, A_3 và A_4 mỗi tập có 25 phần tử, giao của bất kỳ một cặp tập hợp nào đều có 5 phần tử, giao của bất kỳ một bộ ba tập hợp nào đều có 2 phần tử, và có 1 phần tử chung của cả bốn tập. Tính số phần tử của hợp 4 tập hợp này.

11. a) Phát biểu nguyên lý bù trừ.

b) Hãy nêu những ý chính của chứng minh Định lý này.

BÀI TẬP BỔ SUNG

1. Một nhóm 10 người bắt đầu trò chơi "viết thư dây chuyền" như sau. Đầu tiên mỗi người gửi thư cho 4 người nữa. Mỗi người nhận thư lại gửi thư cho 4 người khác nữa.

a) Tìm hệ thức truy hồi biểu thị số thư gửi đi ở bước thứ n của "dây chuyền thư" này, nếu không có ai nhận được hơn một thư.

b) Tìm điều kiện đầu cho hệ thức truy hồi trong phần a).

c) Bao nhiêu bức thư đã được gửi đi ở bước thứ n?

2. Một lò phản ứng hạt nhân tạo được 18 gam một đồng vị phóng xạ. Mỗi giờ 1% của đồng vị phóng xạ này bị phân rã.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi cho số đồng vị phóng xạ này còn lại sau n giờ.

b) Tìm điều kiện đầu cho hệ thức trên.

c) Giải hệ thức truy hồi này.

3. Mỗi giờ chính phủ Mỹ in thêm 10 000 tờ 1 đô-la, 4000 tờ 5 đô-la, 3000 tờ 10 đô-la, 2500 tờ 20 đô-la, 1000 tờ 50 đô-la và 1000 tờ 100 đô-la như đã làm trong giờ trước đó. Giờ đầu tiên người ta đã in 1000 tờ tiền mỗi loại.

a) Lập công thức truy hồi tính tổng số tiền được in trong giờ thứ n.

h) Tìm điều kiện đầu của hệ thức này.

c) Giải hệ thức truy hồi nhận được trong phần a).

d) Tìm hệ thức truy hồi cho tổng số tiền được in trong n giờ đầu tiên.

e) Giải hệ thức truy hồi nhận được trong phần d).

4. Giả sử rằng trong một quần thể vi trùng sau một giờ sẽ sinh ra 2 vi trùng mới, và mỗi vi trùng chỉ sống được 2 giờ. Thoạt đầu quần thể có 100 vi trùng.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi biểu diễn số vi trùng còn tồn tại sau n giờ.

b) Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Khi nào quần thể này có hơn một triệu vi trùng?

5. Các thông báo được gửi đi qua các kênh truyền thông bằng hai tín hiệu khác nhau. Để truyền một tín hiệu cần 2 μs, còn truyền tín hiệu kia cần $3\mu s$.

a) Tìm hệ thức truy hồi cho số tín hiệu có thể gửi được trong n μs.

h) Hãy cho điều kiện đầu của hệ thức truy hồi trong phần a).

c) Có bao nhiêu thông báo khác nhau có thể gửi được trong 12 μs?

6. Một trạm bưu điện chỉ có các loại tem 4 xu, 6 xu và tem 10 xu. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số cách tạo một bưu phí n xu bằng 3 loại tem nêu trên, nếu thứ tự các tem là quan trọng. Tìm điều kiện đầu cho hệ thức này.

7. Có bao nhiêu cách tạo các bưu phí sau khi dùng các qui tắc cho trong Bài tập 6

a) 12 xu

b) 14 xu

b) 18 xu

d) 22 xu

8. Tìm nghiệm của hệ :

$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$

với $a_0 = 1$ và $b_0 = 2$.

9. Giải hệ thức truy hồi $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$, nếu $a_0 = 1$, và $a_1 = 2$ *(Gợi ý :* Lấy lôgarit hai vế để nhận được hệ thức truy hồi cho dãy $\log a_n$, $n = 0, 1, 2,...$).

10*. Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1}^3 a_{2n-2}^2$ nếu $a_0 = 2$ và $a_1 = 2$. (Xem gợi ý Bài tập 9).

11. Giả sử phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số có ít nhất một nghiệm bội. Hãy tìm công thức tổng quát biểu diễn nghiệm của hệ thức truy hồi qua nghiệm của phương trình đặc trưng.

12. Dùng Bài tập 11 tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ nếu $a_0 = 2$, $a_1 = 2$ và $a_2 = 4$.

13*. Giả sử trong Ví dụ 4 của Tiết 5.1 mỗi cặp thỏ sau khi đẻ hai lần sẽ rời khỏi đảo. Hãy tìm hệ thức truy hồi tính số thỏ trên đảo vào giữa tháng thứ n.

14. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $f(n) = 3f\left(\dfrac{n}{5}\right) + 2n^4$ khi n chia hết cho 5 với $n = 5^k$, k là một số nguyên dương và $f(1) = 1$.

15. Hãy đánh giá cỡ lớn của f trong Bài tập 14 nếu f là hàm tăng.

16. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi biểu diễn số phép so sánh dùng trong thuật toán đệ quy như sau. Để tìm số lớn nhất và lớn thứ nhì của dãy n số, ở mỗi bước người ta chia dãy thành hai dãy con có số phần tử bằng nhau hoặc hơn nhau một phần tử. Thuật toán dừng khi đi tới các dãy con có hai phần tử.

17. Hãy tính số phép so sánh dùng trong thuật toán ở Bài tập 16.

Giả sử $\{a_n\}$ *là một dãy số thực.* **Sai phân tiến** *của dãy này được định đệ quy như sau.* **Sai phân thứ nhất** *là* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. **Sai phân tiến thứ (k + 1)** $\Delta^{k+1} a_n$ *nhận được từ* $\Delta^k a_n$ *bằng đẳng thức sau :* $\Delta^{k+1} a_n = \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n$

18. Tìm Δa_n trong đó

a) $a_n = 3$. b) $a_n = 4n + 7$ c) $a_n = n^2 + n + 1$.

19. Cho $a_n = 3n^3 + n + 2$. Hãy tìm $\Delta^k a_n$ trong đó k bằng

a) 2. b) 3. c) 4.

20*. Giả sử $a_n = P(n)$ trong đó P là đa thức bậc d. Chứng minh $\Delta^{d+1} a_n = 0$ với mọi số nguyên không âm n.

21. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số thực. Chứng tỏ rằng

$$\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}(\Delta b_n) + b_n(\Delta a_n).$$

22. Giả sử có 14 sinh viên nhận được điểm A trong kỳ thi thứ nhất của môn toán rời rạc, 18 nhận được điểm A trong kỳ thi thứ hai. Nếu có 22 sinh viên nhận được điểm A hoặc trong kỳ thi đầu hoặc trong kỳ thi thứ hai, thì sẽ có bao nhiêu sinh viên nhận được điểm A trong cả hai lần thi?

23. Có 323 trang trại trong vùng Monmouth, mỗi trại có ít nhất một con ngựa, một con bò và một con cừu. Nếu 224 trại có ngựa, 85 có bò, 57 có cừu và 18 trại có cả ba loại súc vật, thì sẽ có bao nhiêu trại có đúng hai loại súc vật? 7.

24. Những câu hỏi cho cơ sở dữ liệu về số sinh viên trong một trường đại học đã nhận được các dữ liệu như sau : toàn trường có 2175 sinh viên, trong số đó 1675 không là sinh viên năm thứ nhất, 1074 học môn toán cao cấp, 444 học môn toán rời rạc, 607 không là sinh viên năm thứ nhất và có học toán cao cấp, 350 có học toán cao cấp và toán rời rạc, 201 không là sinh viên năm thứ nhất và có học toán rời rạc, và 143 không là sinh viên năm thứ nhất và có học cả hai môn toán cao cấp và toán rời rạc. Có phải tất cả các câu trả lời cho các câu hỏi là chính xác không?

25. Các sinh viên khoa toán trong một trường đại học theo học ít nhất một trong bốn chuyên ngành sau đây : toán ứng dụng (AM), toán thuần tuý (PM), vận trù học (OR) và tin học (CS). Hãy tính số sinh viên toàn khoa nếu có 23 sinh viên theo học ngành AM (kể cả người theo học nhiều ngành), 17 sinh viên theo học ngành PM, 44 theo học ngành OR, 63 theo học ngành CS, 5 theo học ngành AM và PM, 8 theo học ngành AM và CS, 4 theo học ngành AM và OR, 6 theo học ngành PM và CS, 5 theo học ngành PM và OR, 14 theo học ngành OR và CS, 2 theo học ngành PM, OR và CS, 2 theo học ngành AM, OR và CS, 1 theo học ngành PM, AM và OR, 1 theo học ngành PM, AM và CS và 1 theo học cả 4 chuyên ngành.

26. Cần bao nhiêu số hạng khi dùng nguyên lý bù trừ để biểu diễn số phần tử của hợp bảy tập hợp nếu không có quá năm trong các tập này có phần tử chung?

27. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ với $2 < x_1 < 6$, $6 < x_2 < 10$, và $0 < x_3 < 5$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

28. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000

a) chia hết cho 2, 3 hoặc 5?

b) không chia hết cho 7, 11 hoặc 13?

c) chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 7 ?

29. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 200 là

a) lũy thừa bậc hai hoặc cao hơn của số nguyên?

b) lũy thừa bậc hai hoặc cao hơn của số nguyên hoặc của số nguyên tố?

c) không chia hết cho bình phương của một số nguyên lớn hơn một?

d) không chia hết cho lập phương của một số nguyên lớn hơn 1?

e) không chia hết cho ít nhất ba số nguyên tố?

BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH

Viết các chương trình với các input và output sau đây

1. Cho số nguyên dương n, hãy liệt kê tất cả các dịch chuyển trong trò chơi Tháp Hà nội để chuyển n đĩa từ một cột sang một cột khác theo quy tắc của trò chơi.

2. Cho số nguyên dương n, hãy liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 0 liên tiếp.

3. Cho công thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ trong đó c_1, c_2 là các số thực, các điều kiện đầu $a_0 = C_0$ *và* $a_1 = C_1$ và một số dương k, hãy tìm a_k bằng cách lặp.

4. Cho công thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2\,a_{n-2}$ và các điều kiện đầu $a_0 = C_0$ và $a_1 = C_1$ hãy tìm nghiệm duy nhất này.

5. Cho công thức truy hồi dạng $f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c$ trong đó a, c là các số thực, b là số nguyên dương, và k là số nguyên dương, hãy tìm $f(b^k)$ bằng cách lặp.

6. Cho biết số phần tử của giao ba tập hợp, số phần tử chung của mỗi cặp trong ba tập này, và số phần tử của mỗi tập, hãy tính số phần tử của hợp ba tập đã cho.

7. Cho số nguyên dương n hãy viết công thức tính số phần tử của hợp n tập.

TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

Dùng các chương trình mà bạn đã viết để làm các bài tập sau

1. Tìm giá trị chính xác của f_{100}, f_{500} và f_{1000} trong đó f_n là các số Fibonacci.

2. Tìm số nhỏ nhất trong các số Fibonacci lớn hơn 1 000 000, lớn hơn 1 000 000 000 và lớn hơn 1 000 000 000 000.

3. Tìm càng nhiều càng tốt các số Fibonacci là số nguyên tố. Đến nay chúng ta cũng không biết các số này có nhiều vô hạn không.

4. Hãy liệt kê tất cả các dịch chuyển cần thiết để giải trò chơi Tháp Hà nội có 10 đĩa .

5. Tính số phép toán cần để nhân hai số nguyên n bit với n nhận các giá trị 16, 64, 256 và 1024 khi dùng thuật toán nhân nhanh được mô tả trong Tiết 5.3 và thuật toán chuẩn để nhân các số nguyên. (Thuật toán 4 trong Tiết 2.4).

6. Tính số phép toán cần để nhân hai ma trận $n \times n$ với n nhận các giá trị 4, 16, 64, và 128 khi dùng thuật toán nhân nhanh được mô tả trong Tiết 5.3 và thuật toán chuẩn để nhân các ma trận (Thuật toán 1 trong Tiết 2.6).

VIẾT TIỂU LUẬN

Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời các câu hỏi sau

1. Tìm tài liệu gốc trong đó Fibonacci trình bày câu đố của mình về việc mô hình quần thể thỏ. Hãy bàn về bài toán này và các bài toán khác do Fibonacci đưa ra và hãy cho một số thông tin về chính Fihonacci.

2. Hãy giải thích các số Fibonacci đã xuất hiện như thế nào trong các ứng dụng khác nhau như trong nghiên cứu kiểu sắp xếp lá trên cây, trong nghiên cứu sự phản xạ của các gương, v.v...

3. Hãy xem lại định nghĩa số may mắn. Giải thích cách tìm chúng bằng kỹ thuật sàng tương tự như sàng Eratosthenes. Tìm tất cả các số may mắn nhỏ hơn 1 000.

4. Hãy cho biết phương pháp sàng đã được dùng như thế nào trong lý thuyết số. Những kết quả loại nào đạt được bằng phương pháp này?

5. Hãy tìm các quy tắc của trò chơi bài Pháp cũ mang tên "gặp nhau". Hãy mô tả các quy tắc này và công trình của Pierre Raymond de Montmort trong tác phẩm "Bài toán gặp nhau".

6. Hãy giải thích có thể dùng hàm sinh để giải một số loại hệ thức truy hồi kể cả các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất.

7. Hãy mô tả cách dùng hàm sinh để giải các bài toán đếm khác nhau.

8. Hãy trình bày lý thuyết đếm Polya và các loại bài toán đếm có thể giải bằng lý thuyết này.

9. Bài toán nội trợ yêu cầu tính số cách xếp n cặp vợ chồng xung quanh một bàn tròn sao cho nam nữ ngồi xen kẽ nhau và không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau. Hãy giải thích cách Lucas dùng để giải bài toán này.

10. Hãy giải thích có thể dùng *đa thức tháp* để giải bài toán đếm.

CHƯƠNG 6

QUAN HỆ

Các mối quan hệ giữa những phần tử của các tập hợp xuất hiện trong nhiều bối cảnh. Thường ngày chúng ta vẫn gặp các mối quan hệ này, chẳng hạn mối quan hệ giữa một doanh nghiệp với số điện thoại của nó, mối quan hệ của một nhân viên với lương của người đó, mối quan hệ của một người với người thân của anh ta v.v... Trong toán học chúng ta nghiên cứu các mối quan hệ như mối quan hệ giữa một số nguyên dương và một ước số của nó, mối quan hệ giữa một số nguyên và một số nguyên khác đồng dư với nó theo môđun 5, mối quan hệ giữa một số thực và một số thực khác lớn hơn nó v.v... Các mối quan hệ như quan hệ giữa một chương trình và một biến mà chương trình đó sử dụng và mối quan hệ giữa một ngôn ngữ máy tính và một mệnh đề đúng trong ngôn ngữ đó cũng thường xuất hiện trong tin học.

Các mối quan hệ giữa những phần tử của các tập hợp được biểu diễn bằng cách dùng một cấu trúc được gọi là quan hệ. Các quan hệ có thể được dùng để giải các bài toán như xác định các cặp thành phố nào được nối bằng các chuyến bay trong một mạng, tìm trật tự khả dĩ thành công cho các pha khác nhau của một dự án phức tạp, hoặc tạo một cách tiện ích để lưu trữ thông tin trong các cơ sở dữ liệu của máy tính.

6.1. QUAN HỆ VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓ

MỞ ĐẦU

Cách trực tiếp nhất để biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử của hai tập hợp là dùng các cặp được sắp tạo bởi hai phần tử có quan hệ. Vì lý do đó, tập các cặp được sắp được gọi là quan hệ hai ngôi. Trong tiết này chúng ta sẽ đưa vào những thuật ngữ cơ bản được dùng để mô tả các quan hệ hai ngôi. Sau đó, cũng trong chương này, chúng ta sẽ dùng các quan hệ để giải các bài toán có liên quan với các mạng thông tin, với việc lập tiến độ các dự án và nhận dạng các phần tử của các tập hợp có những tính chất chung.

ĐỊNH NGHĨA 1. Cho A và B là các tập hợp. *Một quan hệ hai ngôi từ A đến B* là một tập con của $A \times B$.

Nói một cách khác, quan hệ hai ngôi từ A đến B là tập R các cặp được sắp trong đó phần tử đầu tiên thuộc tập A và phần tử thứ hai thuộc tập B. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu aRb để chỉ $(a,b) \in R$ và $a\not{R}b$ để chỉ $(a,b) \notin R$. Hơn nữa, khi (a, b) thuộc R, a được nói là **có quan hệ** R với b.

Các quan hệ hai ngôi biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử của hai tập hợp. Chúng ta cũng sẽ đưa vào các quan hệ n – ngôi biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử của hơn hai tập hợp ở phần sau của chương này. Dưới đây chúng ta sẽ bỏ qua các từ *hai ngôi* nếu thấy không có nguy cơ hiểu lầm.

Dưới đây là một số ví dụ về quan hệ.

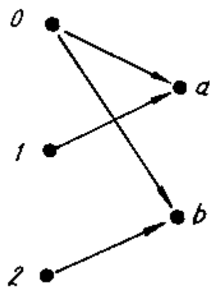
Ví dụ 1. Cho A là tập các sinh viên của trường bạn và B là tập các môn học. Cho R là quan hệ bao gồm các cặp (a,b) trong đó a là sinh viên ghi tên học môn b. Ví dụ, nếu Jason Goodfriend và Deborah Sherman đều ghi tên học môn Toán học rời rạc có mã số là CS518, thì các cặp (Jason Goodfriend, CS518) và (Deborah Sherman, CS518), thuộc R. Nếu Jason Goodfriend còn ghi tên học môn CS510 là môn cấu trúc dữ liệu, thì cặp (JasonGood friend, CS510) cũng thuộc R. Tuy nhiên, nếu Deborah Sherman không ghi tên học môn CS510, thì cặp (Deborah Sherman, CS510) không thuộc R.

■

Ví dụ 2. Cho A là tập tất cả các thành phố và B là tập 50 bang của Hoa Kỳ. Ta định nghĩa quan hệ R bằng cách chỉ rõ rằng (a,b) thuộc R nếu thành phố a thuộc bang b. Ví dụ, (Boulder, Colorado), (Bangor, Maine), (Ann Arbor, Michigan), (Cupertino, California), và (Red Bank, New Jersey) đều thuộc R.

■

Ví dụ 3. Cho $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{a, b\}$. Khi đó $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ là một quan hệ từ A đến B. Điều này có nghĩa là, chẳng hạn, $0Ra$ nhưng $1 \not R b$. Các quan hệ cũng có thể được biểu diễn bằng đồ thị như cho trong hình 1, ở đây ta dùng mũi tên để biểu diễn các cặp được sắp. Một cách khác để hiểu diễn quan hệ này là dùng bảng, cũng được cho trên Hình 1. Chúng ta sẽ thảo luận kỹ hơn về việc biểu diễn các quan hệ ở Tiết 6.3.



R	a	b
0	x	x
1	x	
2		x

Hình 1. Biểu diễn các cặp được sắp trong quan hệ R ở Ví dụ 3.

HÀM NHƯ MỘT QUAN HỆ

Hãy nhớ lại rằng một hàm f từ tập A đến tập B (như định nghĩa ở Tiết 1.6) gán cho mỗi phần tử của tập A một phần tử duy nhất của tập B. Đồ thị của f là tập các cặp được sắp (a,b) sao cho $b = f(a)$. Vì đồ thị của f là một tập con của $A \times B$, nên nó là một quan hệ từ A đến B. Hơn nữa, đồ thị của một hàm có tính chất là mọi phần tử của A là phần tử đầu tiên của đúng một cặp được sắp của đồ thị đó.

Ngược lại, nếu R là một quan hệ từ A đến B sao cho mỗi phần tử của A là phần tử đầu tiên của đúng một cặp được sắp của R, thì có thể định nghĩa được một hàm với R là đồ thị của nó. Điều này được làm bằng cách gán cho mỗi phần tử $a \in A$ một phần tử duy nhất $b \in B$ sao cho $(a,b) \in R$.

Một quan hệ cũng có thể được dùng để biểu diễn các mối quan hệ một – nhiều giữa các phần tử của hai tập A và B, trong đó một phần tử của A có thể có quan hệ với hơn một phần tử của B. Trong khi đó, một hàm biểu diễn một quan hệ trong đó mỗi một phần tử của A có quan hệ với đúng một phần tử của B.

CÁC QUAN HỆ TRÊN MỘT TẬP HỢP

Các quan hệ từ tập A đến chính nó được đặc biệt quan tâm.

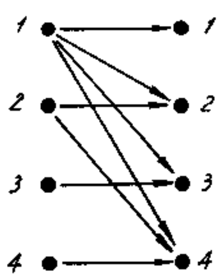
ĐỊNH NGHĨA 2. *Một quan hệ trên* tập A là một quan hệ từ A đến A. Nói một cách khác, một quan hệ trên tập A là một tập con của $A \times A$.

Ví dụ 4. Cho A là tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Hỏi các cặp được sắp nào thuộc quan hệ $R = \{(a,b) \mid b$ chia hết cho $a\}$.

Giải: Vì (a,b) thuộc R nếu và chỉ nếu a và b là các số nguyên dương không vượt quá 4 sao cho b chia hết cho a, ta có :

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$$

Các cặp trong quan hệ này được biểu diễn dưới dạng đồ thị và bảng trong hình 2.



R	1	2	3	4
1	x	x	x	x
2		x		x
3			x	
4				x

Hình 2. Biểu diễn các cặp được sắp trong quan hệ R ở Ví dụ 4.

Ví dụ 5. Xét các quan hệ sau trên tập các số nguyên :

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}.$$

Hỏi mỗi cặp sau được chứa trong các quan hệ nào ở trên : (1, 1), (1,2), (2,1), (1, −1) và (2,2) ?

Chú ý: Không giống như các quan hệ trong các Ví dụ 1−4, các quan hệ ở đây là trên một tập vô hạn.

Giải: Cặp (1,1) thuộc R_1, R_3, R_4 và R_6 ; (1,2) thuộc R_1 và R_6 ; (2,1) thuộc R_2, R_5 và R_6 ; (1, − 1) thuộc R_2, R_3 và R_6, và cuối cùng (2,2) thuộc R_1, R_3 và R_4.

■

Không có khó khăn gì trong việc xác định số các quan hệ trên một tập hữu hạn, vì một quan hệ trên tập A đơn giản chỉ là một tập con của $A \times A$.

Ví dụ 6. Có bao nhiêu quan hệ trên một tập có n phần tử ?

Giải: Một quan hệ trên tập A là một tập con của $A \times A$. Vì $A \times A$ có n^2 phần tử khi A có n phần tử, và một tập gồm m phần tử có 2^m tập con, nên A x A có 2^{n^2} tập con. Vì vậy có 2^{n^2} quan hệ trên tập gồm n phần tử.

■

CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ

Có một số tính chất được dùng để phân loại các quan hệ trên một tập. Chúng ta sẽ xét những tính chất quan trọng nhất ở đây.

Trong một số quan hệ một phần tử luôn có quan hệ với chính nó. Ví dụ, R là quan hệ trên tập mọi người trên thế giới gồm các cặp (x, y) trong đó x và y có cùng mẹ và cùng cha. Khi đó xRx đối với mỗi người x.

ĐỊNH NGHĨA 3. Quan hệ R trên tập A được gọi là *có tính phản xạ* nếu $(a, a) \in$ R với mọi phần tử $a \in$ A .

Chúng ta thấy rằng một quan hệ trên A là phản xạ nếu mỗi phần tử thuộc A có quan hệ với chính nó. Các ví dụ sau đây minh hoạ khái niệm quan hệ có tính phản xạ.

Ví dụ 7. Xét các quan hệ sau trên tập $\{1,2,3,4\}$

$$R_1 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,4),\ (4,1),\ (4,4)\}$$
$$R_2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1)\}$$
$$R_3 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,4)\}$$
$$R_4 = \{(2,1),\ (3,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3)\}$$
$$R_5 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,3),\ (3,4),\ (4,4)\}$$
$$R_6 = \{(3,4)\}$$

Các quan hệ nào ở trên có tính phản xạ ?

Giải: Các quan hệ R_3 và R_5 có tính chất phản xạ, vì cả hai quan hệ đó đều chứa tất cả các cặp dạng (a,a), cụ thể là $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ và $(4,4)$. Các quan hệ khác không phải là phản xạ vì chúng không chứa tất cả các cặp đó. Đặc biệt, R_1, R_2, R_4 và R_6 không là phản xạ vì các quan hệ đó đều không chứa cặp $(3,3)$.

■

Ví dụ 8. Các quan hệ nào trong Ví dụ 5 là phản xạ ?

Giải : Các quan hệ có tính phản xạ trong ví dụ đó là R_1 (vì $a \le a$ với mọi số nguyên a), R_3 và R_4. Đối với các quan hệ còn lại trong ví dụ đó, dễ dàng tìm được cặp (a,a) không được chứa trong các quan hệ đó (xin dành lại cho các bạn như một bài tập).

■

Ví dụ 9. Quan hệ "chia hết" trên tập các số nguyên dương có tính phản xạ không ?

Giải. Vì $a \mid a$ với mọi a là số nguyên dương, nên quan hệ "chia hết" có tính phản xạ.

■

Trong một số quan hệ một phần tử có quan hệ với phần tử thứ hai nếu và chỉ nếu phần tử thứ hai cũng có quan hệ với phần tử thứ nhất. Quan hệ bao gồm các cặp (x, y) trong đó x và y là các sinh viên ở trường bạn, ít nhất cùng học chung một môn là một quan hệ có tính chất đó. Các quan hệ khác có tính chất là nếu một phần tử có quan hệ với một phần tử thứ hai, thì phần tử thứ hai không có quan hệ với phần tử thứ nhất. Quan hệ gồm các cặp (x, y) trong đó x và y là sinh viên của trường bạn và x có điểm hình quân cao hơn y là quan hệ có tính chất đó.

ĐỊNH NGHĨA 4. Quan hệ R trên tập A được gọi là *đối xứng* nếu $(b,a) \in R$ khi $(a,b) \in R$ với $a,b \in A$. Quan hệ R trên tập A sao cho $(a,b) \in R$ và $(b,a) \in R$ chỉ nếu $a = b$, với $a,b \in A$ được gọi là *phản đối xứng*.

Tức là, một quan hệ là đối xứng nếu và chỉ nếu a có quan hệ với b kéo theo b có quan hệ với a. Còn một quan hệ là phản đối xứng, nếu và chỉ nếu không có các cặp phần tử a và b phân biệt với a có quan hệ với b và b có quan hệ với a. Hai thuật ngữ đối xứng và phản đối xứng được dùng ở đây không phải theo nghĩa đối ngược nhau, vì một quan hệ có thể có cả hai tính chất đó, hoặc đều không có cả hai tính chất đó (xem Bài tập 6 ở cuối tiết này). Một quan hệ không thể vừa là đối xứng vừa là phản đối xứng nếu nó chứa một cặp nào đó có dạng (a,b) trong đó $a \neq b$.

Ví dụ 10. Các quan hệ nào trong Ví dụ 7 là đối xứng? là phản đối xứng?

Giải. Các quan hệ R_2 và R_3 là đối xứng, vì trong mỗi trường hợp (b, a) đều thuộc các quan hệ đó nếu (a,b) thuộc chúng. Đối với R_2, điều duy nhất cần phải kiểm tra là cả $(2,1)$ và $(1,2)$ đều thuộc quan hệ đó. Đến R_3 điều cần phải kiểm tra là cả $(2,1)$ và $(1,2)$ thuộc quan hệ đó và $(1,4)$ và $(4,1)$ cũng thuộc quan hệ đó. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn một quan hệ nào khác trong Ví dụ 7 là đối xứng. Điều này được làm bằng cách tìm một cặp (a, b) sao cho (a,b) thuộc quan hệ nhưng (b,a) thì không.

R_4, R_5 và R_6 tất cả đều là phản đối xứng. Đối với các quan hệ này không có một cặp (a,b) nào với $a \neq b$ sao cho cả (a,b) và (b,a) đều thuộc các quan hệ đó. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn quan hệ nào khác là phản đối xứng. Điều này được làm bằng cách tìm một cặp (a,b) với $a \neq b$ sao cho cả (a,b) và (b,a) đều thuộc quan hệ đó.

■

Ví dụ 11. Các quan hệ nào trong Ví dụ 5 là đối xứng? là phản đối xứng?

Giải: Các quan hệ R_3, R_4, R_6 là đối xứng. R_3 là đối xứng vì nếu $a = b$ hoặc $a = -b$ thì $b = a$ hoặc $b = -a$. R_4 là đối xứng vì $a = b$ kéo theo b = a. R_6 đối xứng vì $a + b \leq 3$ kéo theo $b + a \leq 3$. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn quan hệ mà khác là đối xứng.

Các quan hệ R_1, R_2, R_4 và R_5 là phản đối xứng. R_1 là phản đối xứng vì bất đẳng thức $a \leqslant b$ và $b \geqslant a$ kéo theo $a = b$. R_2 là phản đối xứng vì không thể có đồng thời $a > b$ và $b > a$. R_4 là phản đối xứng vì hai phần tử có quan hệ đối với R_4 nếu và chỉ nếu chúng bằng nhau. R_5 là phản đối xứng vì không thể đồng thời có $a = b+1$ và $b = a+1$. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn quan hệ nào khác là phản đối xứng.

■

Ví dụ 12. Quan hệ "chia hết" trên tập các số nguyên dương có là đối xứng không ? Có là phản đối xứng không ?

Giải: Quan hệ này không phải là đối xứng, vì $1 \mid 2$ nhưng $2 \nmid 1$. Nó là phản đối xứng, vì nếu a và b là các số nguyên dương với $a \mid b$ và $b \mid a$ thì $a = b$ (chứng minh điều này dành cho bạn như một bài tập).

■

Giả sử R là một quan hệ bao gồm tất cả các cặp sinh viên của trường bạn (x, y) trong đó x đã lấy được nhiều chứng chỉ hơn y. Giả sử rằng x có quan hệ đó với y và y có quan hệ đó với z. Điều này có nghĩa là x đã lấy được nhiều chứng chỉ hơn y và y đã lấy được nhiều chứng chỉ hơn z. Chúng ta có thể kết luận rằng x lấy được nhiều chứng chỉ hơn z. Điều vừa nói ở trên chứng tỏ R có tính chất bắc cầu, tính chất này được định nghĩa như sau :

ĐỊNH NGHĨA 5. Một quan hệ R trên tập A được gọi là có *tính chất bắc cầu* nếu $(a,b) \in R$ và $(b, c) \in R$ thì $(a,c) \in R$ với $a, b, c \in A$.

Ví dụ 13. Các quan hệ nào trong Ví dụ 7 có tính chất bắc cầu ?

Giải: R_4, R_5 và R_6 là các quan hệ có tính chất bắc cầu. Đối với mỗi quan hệ đó, ta có thể chứng minh nó có tính chất bắc cầu bằng cách chứng tỏ rằng nếu (a,b) và (b,c) thuộc quan hệ đó, thì (a,c) cũng thuộc quan hệ ấy. Ví dụ, R_4 có tính chất bắc cầu, vì (3,2) và (2,1), (4,2) và (2,1), (4,3) và (3,1), (4,3) và (3,2) là tất cả các cặp như vậy và (3,1), (4,1) và (4,2) cũng thuộc R_4. Việc chứng minh R_5 và R_6 là có tính chất bắc cầu xin dành cho bạn đọc.

R_1 không có tính bắc cầu vì (3,4) và (4,1) thuộc R_1 nhưng (3,1) không thuộc R_1. R_2 cũng không có tính bắc cầu, vì (2,1) và (1,2) thuộc R_2, nhưng (2,2) lại không thuộc R_2. R_3 không có tính bắc cầu vì (4,1) và (1,2) thuộc R_3 nhưng (4,2) lại không thuộc R_3.

■

Ví dụ 14. Các quan hệ nào trong Ví dụ 5 có tính bắc cầu ?

Giải: Các quan hệ R_1, R_2 và R_4 đều có tính bắc cầu. R_1 có tính bắc cầu vì $a \leq b$ và $b \leq c$ kéo theo $a \leq c$. R_2 cũng có tính bắc cầu vì $a > b$ *và* $b > c$ *kéo theo* $a > c$. R_3 là bắc cầu vì $a = \pm b$ và $b = \pm c$ kéo theo $a = \pm c$. R_4 rõ ràng là bắc cầu, độc giả cần tự chứng minh điều này. R_5 không có tính bắc cầu vì (2,1) và (1,0) thuộc R_5 nhưng (2,0) lại không thuộc R_5. R_6 cũng không có tính bắc cầu vì (2,1) và (1,2) thuộc R_6 nhưng (2,2) lại không thuộc R_6.

■

Ví dụ 15. Quan hệ "chia hết" trên tập các số nguyên dương có tính bắc cầu không ?

Giải: Giả sử rằng b chia hết cho a và c chia hết cho b khi đó tồn tại các số nguyên dương k và l sao cho $b = ak$ và $c = bl$. Từ đó, $c = akl$, tức là c chia hết cho a. Do đó, quan hệ "chia hết" là có tính bắc cầu.

■

Ví dụ sau đây cho thấy cácb đếm số các quan hệ với một tính chất xác định.

Ví dụ 16. Có bao nhiêu quan hệ có tính phản xạ trên một tập hợp có n phần tử.

Giải: Một quan hệ trên tập A là một tập con của $A \times A$. Do đó, một quan hệ được xác định bằng cách chỉ rõ mỗi một cặp được sắp (trong tổng số n^2 cặp) có thuộc R hay không. Tuy nhiên, nếu R có tính phản xạ thì n cặp được sắp (a,a) với $a \in A$ cần phải thuộc R. Trong khi đó, mỗi cặp trong số $n(n-1)$ cặp còn lại có dạng (a,b) với $a \neq b$ có thể thuộc R hoặc không. Do đó, theo quy tắc nhân đối với phép đếm, có $2^{n(n-1)}$ các quan hệ có tính phản xạ. (Đây là số cách chọn để mỗi phần tử (a,b) với $a \neq b$ có thuộc R hay không).

■

Số các quan hệ đối xứng và số các quan bệ phản đối xứng trên một tập có n phần tử có thể được đếm bằng cách dùng lý luận tương tự như trong Ví dụ 16 (xem Bài tập 25 ở cuối tiết này). Đếm số các quan hệ có tính chất bắc cầu trên một tập có n phần tử vượt ra ngoài phạm vi của cuốn sách này.

TỔ HỢP CÁC QUAN HỆ

Vì các quan hệ từ A đến B là các tập con của $A \times B$, nên hai quan hệ từ A đến B cũng có thể được tổ hợp như hai tập hợp. Ta hãy xét các ví dụ sau :

Ví dụ 17. Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Các quan hệ $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ và R_2 $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ có thể tổ hợp để nhận được :

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2,2), (3,3)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$$

■

Ví dụ 18. Cho A và B tương ứng là tập hợp tất cả các sinh viên, và tập hợp tất cả các môn học ở trường bạn. Giả sử rằng quan hệ R_1 gồm tất cả các cặp được sắp (a,b) trong đó a là sinh viên đã học môn học b, R_2 gồm tất cả các cặp được sắp (a,b) trong đó a là sinh viên cần môn b để tốt nghiệp. Xác định các quan hệ $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \oplus R_2$, $R_1 - R_2$ và $R_2 - R_1$?

Giải: Quan hệ $R_1 \cup R_2$ gồm tất cả các cặp được sắp (a,b) trong đó a là sinh viên đã học môn b hoặc cần môn b để tốt nghiệp ; $R_1 \cap R_2$ là tập của tất cả các cặp được sắp (a,b) trong đó a là sinh viên đã học môn b và cần môn b để tốt nghiệp. Cũng như vậy, $R_1 \oplus R_2$ gồm tất cả các cặp được sắp trong đó a là sinh viên đã học môn b nhưng không cần nó để tốt nghiệp, hoặc cần môn b để tốt nghiệp nhưng lại chưa học nó ; $R_1 - R_2$ là tập các cặp được sắp (a,b) trong đó a đã học môn b nhưng không cần nó để tốt nghiệp, tức b là môn học tùy chọn mà a đã học ; $R_2 - R_1$ là tập các cặp được sắp (a,b) trong đó b là môn mà a cần để tốt nghiệp, nhưng chưa học nó.

■

Có một cách khác để tổ hợp các quan hệ tương tự như hợp thành của các hàm.

ĐỊNH NGHĨA 6. Cho R là một quan hệ từ tập A đến tập B và S là một quan hệ từ tập B đến tập C. Hợp thành của R và S là một quan hệ chứa các cặp được sắp (a,c) trong đó $a \in A$ và $c \in C$ và đối với chúng tồn tại một phần tử $b \in B$ sao cho $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in S$. Ta ký hiệu hợp thành của R và S là $S \circ R$.

Các ví dụ sau minh họa sự tạo các hợp thành của các quan hệ.

Ví dụ 19. Xác định hợp thành của các quan hệ R và S trong đó R là quan hệ từ {1,2,3} đến {1,2,3,4} với R = {(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)} và S là quan hệ từ {1,2,3,4} đến {0,1,2} với S = {(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)}.

Giải: $S \circ R$ được xây dựng bằng cách dùng tất cả các cặp được sắp trong R phù hợp với phần tử thứ nhất của cặp được sắp trong S. Ví dụ, cặp (2,3) trong R và (3,1) trong S tạo ra cặp (2,1) trong $S \circ R$. Tính tất cả các cặp được sắp đó trong $S \circ R$, ta tìm được $S \circ R$ = {(1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1)}.

■

Lũy thừa của một quan hệ R cũng có thể được định nghĩa bằng phương pháp quy nạp từ định nghĩa của hợp thành của hai quan hệ.

ĐỊNH NGHĨA 7. Cho R là một quan hệ trên tập A. Lũy thừa R^n, với n = 1,2,3 ... được định nghĩa bằng qui nạp như sau :

$$R^1 = R \text{ và } R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Từ định nghĩa suy ra rằng $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R$ v.v...

Ví dụ 20. Cho R = {(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)}. Tìm các lũy thừa R^n với n = 1, 2, 3, 4, ...

Giải: Vì $R^2 = R \circ R$, chúng ta tìm được R^2 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)}. Tiếp theo, vì $R^3 = R^2 \circ R$, suy ra R^3 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)}. Phép tính tiếp theo cho R^4 chứng tỏ rằng R^4 giống hệt R^3, sao cho R^4 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)}. Từ đó cũng suy ra rằng $R^n = R^3$ đối với n = 5, 6, 7, ... Điều này độc giả tự chứng minh.

■

Định lý sau chứng tỏ rằng lũy thừa của một quan hệ bắc cầu là những tập con của quan hệ đó. Điều này sẽ được dùng trong Tiết 6.4.

ĐỊNH LÝ 1. Quan hệ R trên tập A là bắc cầu nếu và chỉ nếu $R^n \subseteq R$ với n = 1, 2, 3 ...

Chứng minh : Trước hết chúng ta chứng minh điều kiện đủ của định lý. Giả sử $R^n \subseteq R$ với n = 1, 2, 3 ... Đặc biệt, $R^2 \subseteq R$. Để thấy điều này kéo theo R có tính bắc cầu, ta chú ý rằng nếu $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in R$ thì theo định nghĩa của hợp thành $(a,c) \in R^2$. Vì $R^2 \in R$, điều này có nghĩa là $(a,c) \in R$, tức R có tính bắc cầu.

Ta sẽ dùng phương pháp qui nạp toán học chứng minh điều kiện cần của định lý. Chú ý rằng điều kiện này hiển nhiên đúng với $n = 1$.

Giả sử rằng $R^n \subseteq R$ với n là một số nguyên dương bất kỳ. Đây là giả thiết qui nạp. Để hoàn tất bước qui nạp ta phải chứng minh rằng $R^{n+1} \subseteq R$. Để chứng minh điều này ta giả sử rằng $(a,b) \in R^{n+1}$. Khi đó, vì $R^{n+1} = R^n \circ R$, nên tồn tại một phần tử $x \in A$ sao cho $(a, x) \in R$ và $(x, b) \in R^n$. Từ giả thuyết qui nạp, cụ thể là $R^n \subseteq R$, suy ra $(x,b) \in R$. Hơn nữa, vì R là bắc cầu và $(a,x) \in R$, $(x,b) \in R$ suy ra $(a,b) \in R$. Do đó $R^{n+1} \subseteq R$, được chứng minh.

BÀI TẬP

1. Liệt kê các cặp được sắp trong quan hệ R từ $A = \{0,1,2,3,4\}$ đến $B = \{0,1,2,3\}$ trong đó $(a,b) \in R$ nếu và chỉ nếu :

   a) $a = b$ b) $a + b = 4$

   c) $a > b$ d) $a \mid b$

   e) ƯCLN$(a, b) = 1$ f) BCNN$(a, b) = 2$

2. a) Liệt kê tất cả các cặp được sắp trong quan hệ $R = \{(a,b) \mid b$ chia hết cho a$\}$ trên tập $\{1,2,3,4,5,6\}$

   b) Biểu diễn quan hệ trên bằng đồ thị như đã làm ở Ví dụ 4.

   c) Biểu diễn quan hệ trên dưới dạng bảng như đã làm ở Ví dụ 4.

3. Đối với mỗi quan hệ cho dưới đây trên tập $\{1,2,3,4\}$, hãy xác định xem nó có là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu không ?

   a) $\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

   b) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

   c) $\{(2,4), (4,2)\}$

   d) $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

   e) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

   f) $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$.

4. Xác định xem quan hệ R trên tập mọi người có là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu không, với $(a,b) \in R$ nếu và chỉ nếu :

a) a cao hơn b ?

b) a và b sinh cùng ngày ?

c) a và b cùng tên

d) a và b có cùng một ông ?

5. Cũng hỏi như trên, với quan hệ R trên tập các số nguyên và $(x,y) \in R$ nếu và chỉ nếu :

a) $x \neq y$.

b) $xy \geq 1$.

c) $x = y + 1$ hay $x = y - 1$.

d) $x = y \pmod 7$.

e) x là bội số của y.

f) x và y đều âm hoặc đều không âm.

g) $x = y^2$.

h) $x \geq y^2$.

Một quan hệ R trên tập A được gọi là **không phản xạ** *nếu với mọi $a \in A$, $(a,a) \notin R$. Tức là, quan hệ R là không phản xạ nếu không có một phần tử nào của a có quan hệ với chính nó.*

7. Các quan hệ nào trong Ví dụ 3 là không phản xạ ?

8. Cũng hỏi như trên với các quan hệ trong Ví dụ 4 ?

9. Một quan hệ có thể vừa không có tính phản xạ vừa không có tính không phản xạ không ?

Một quan hệ R được gọi là **bất đối xứng** *nếu $(a, b) \in R$ kéo theo $(b, a) \notin R$.*

10. Các quan hệ nào trong Ví dụ 3 là bất đối xứng ?

11. Cũng hỏi như trên với các quan hệ trong Ví dụ 4

12. Một quan hệ bất đối xứng có cần phải là phản đối xứng không ? Một quan hệ phản đối xứng có cần phải là bất đối xứng không ? Giải thích.

13. Có bao nhiêu quan hệ khác nhau từ tập có m phần tử đến tập có n phần tử ?

Cho R là một quan hệ từ tập A đến tập B. **Quan hệ ngược** *từ B đến A, được ký hiệu là R^{-1}, là tập các cặp được sắp $\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.* **Quan hệ bù** $\overline{R}$ *là tập các cặp được sắp $\{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$.*

14. Cho R là quan hệ $R = \{(a,b) \mid a < b\}$ trên tập các số nguyên. Tìm :

a) R^{-1} b) $\overline{R}$

15. Cho R là quan hệ $R = \{(a,b) \mid b$ chia hết cho $a\}$ trên tập các số nguyên dương, tìm :

a) R^{-1} b) $\overline{R}$

16. Cho R là quan hệ trên tập tất cả các bang của Hoa Kỳ gồm các cặp được sắp (a,b), trong đó bang a giáp giới với bang b. Tìm :

a) R^{-1} b) $\overline{R}$

17. Giả sử hàm f từ A đến B là một song ánh.
Cho R là quan hệ bằng đồ thị của f, tức là $\{(a,f(a)) \mid a \in A\}$.
Tìm R^{-1}.

18. Cho $R_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ và $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ là các quan hệ từ $\{1,2,3\}$ đến $\{1,2,3,4\}$. Tìm :

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$

c) $R_1 - R_2$ d) $R_2 - R_1$

19. Cho A là tập các sinh viên ở trường bạn và B là tập các cuốn sách có trong thư viện trường. Giả sử R_1 và R_2 tương ứng là các quan hệ bao gồm tất cả các cặp được sắp (a,b) trong đó sinh viên a cần đọc cuốn sách b và trong đó sinh viên a đã đọc cuốn sách b. Mô tả các cặp được sắp trong các quan hệ dưới đây :

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 \oplus R_2$

d) $R_1 - R_2$ e) $R_2 - R_1$

20. Cho R là quan hệ $\{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1)\}$ và S là quan hệ $\{(2,1), (3,1), (3,2), (4,2)\}$. Tìm $S \circ R$.

21. Cho R là quan hệ trên tập mọi người, bao gồm các cặp (a,b) trong đó a là bố hoặc mẹ của b. Cho S là quan hệ trên tập mọi người, bao gồm các cặp (a,b) trong đó a là anh hoặc chị em ruột của b. Xác định $S_{\circ}R$ và $R_{\circ}S$.

22. Liệt kê 16 quan hệ khác nhau trên tập $\{0,1\}$.

23. Trong số 16 quan hệ khác nhau trên tập $\{0,1\}$ có bao nhiêu quan hệ chứa cặp $(0,1)$?

24. Trong số 16 quan hệ khác nhau trên tập $\{0,1\}$ mà bạn đã liệt kê trong Bài tập 22, những quan hệ nào là

a) Phản xạ ?
b) Không phản xạ ?
c) Đối xứng ?
d) Phản đối xứng ?
e) Bất đối xứng ?
f) Bắc cầu ?

25*. Có bao nhiêu quan hệ trên tập gồm n phần tử là :

a) Đối xứng ?
b) Phản đối xứng
c) Bất đối xứng ?
d) Không phản xạ
e) Phản xạ và đối xứng
f) Không là phản xạ và cũng không phải là không phản xạ.

26*. Có bao nhiêu quan hệ bắc cầu trên tập có n phần tử nếu

a) $n = 1$?
h) $n = 2$?
c) $n = 3$?

27. Tìm sai lầm trong "chứng minh", "định lý" sau :

ĐỊNH LÝ. Cho R là quan hệ trên tập A có tính chất đối xứng và bắc cầu. Khi đó R có tính chất phản xạ.

Chứng minh: Giả sử $a \in A$. Lấy phần tử $b \in A$ sao cho $(a,b) \in R$ Vì R là đối xứng, ta cũng có $(b, a) \in$ R. Bây giờ dùng tính chất bắc cầu của R, ta suy ra $(a,a) \in R$ vì $(a,b) \in R$ và $(b,a) \in R$.

28. Giả sử R và S là hai quan hệ có tính chất phản xạ trên tập A . Chứng minh hoặc bác bỏ các khẳng định sau :

a) $R \cup S$ là phản xạ
h} $R \cap S$ là phản xạ
c) $R \oplus S$ là không phản xạ
d) $R - S$ là không phản xạ
e) $S_{\circ}R$ là phản xạ.

29. Chứng minh rằng quan hệ R trên tập A là đối xứng nếu và chỉ nếu $R = R^{-1}$, với R^{-1} là quan hệ ngược của R.

30. Chứng minh rằng quan hệ R trên tập A là phản đối xứng nếu và chỉ nếu $R \cap R^{-1}$ là tập con của quan hệ đường chéo $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

31. Chứng minh rằng quan hệ R trên tập A là phản xạ nếu và chỉ nếu quan hệ ngược R^{-1} là phản xạ.

32. Chứng minh rằng quan hệ R trên tập A là phản xạ nếu và chỉ nếu quan hệ bù $\overline{R}$ là không phản xạ.

33. Cho R là một quan hệ có tính chất phản xạ và bắc cầu. Chứng minh rằng $R^n = R$ với mọi số nguyên dương n.

34. Cho R là quan hệ trên tập $\{1,2,3,4,5\}$ chứa các cặp được sắp (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4), (3,5), (4,2), (4,5), (5,1), (5,2) và (5,4). Tìm :

a) R^2, b) R^3,

c) R^4, d) R^5.

35. Cho R là quan hệ phản xạ trên tập A . Chứng minh rằng R^n cũng có tính chất phản xạ với mọi số nguyên dương n.

***36.** Cho R là quan hệ đối xứng. Chứng minh rằng R^n là đối xứng với mọi số nguyên dương n.

37. Giả sử rằng quan hệ R là không phản xạ. R^n có nhất thiết cũng phải không phản xạ không ? Giải thích.

6.2. QUAN HỆ n - NGÔI VÀ NHỮNG ỨNG DỤNG CỦA NÓ

MỞ ĐẦU

Mối quan hệ giữa các phần tử của hơn hai tập hợp cũng thường xuất hiện. Ví dụ, có một mối quan hệ giữa tên, ngành học và điểm trung bình của một sinh viên. Tương tự, cũng có một mối quan hệ giữa hãng hàng không, số chuyến bay, nơi xuất phát, nơi tới, thời gian cất cánh, thời gian tới của một chuyến bay. Một ví dụ trong toán học là mối quan hệ của ba số nguyên trong đó số thứ nhất lớn hơn số thứ hai và số thứ hai lại lớn hơn số thứ ba. Một ví dụ khác là mối quan hệ "ở giữa" của các điểm trên một đường thẳng, trong đó ba điểm có quan hệ với nhau khi điểm thứ hai ở giữa điểm thứ nhất và điểm thứ ba.

Trong tiết này, ta sẽ nghiên cứu mối quan hệ giữa các phần tử của hơn hai tập hợp. Các quan hệ này được gọi là **quan hệ n - ngôi**. Các quan hệ này được dùng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu của máy tính. Những biểu diễn đó giúp chúng ta trả lời những câu hỏi về thông tin được lưu trữ trong cơ sở dữ liệu như : Những chuyến bay nào sẽ hạ cánh xuống sân bay O'Hare giữa 3 và 4 giờ sáng ? Những sinh viên nào ở trường bạn là sinh viên năm thứ hai, ngành toán hoặc tin học có điểm bình quân lớn hơn 3,0 ? Các nhân viên nào của một công ty đã làm việc cho công ty dưới 5 năm và kiếm được 50 000 đôla ?

QUAN HỆ *n* - NGÔI

Chúng ta bắt đầu với định nghĩa sau

ĐỊNH NGHĨA 1. Cho A_1, A_2, ... A_n là các tập hợp. Một *quan hệ n-ngôi* trên các tập này là một tập con của $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Các tập A_1, A_2, ... A_n được gọi là *miền* của quan hệ đó và n được gọi là *bậc* của nó.

Ví dụ 1. Cho R là quan hệ gồm các bộ ba (a,b,c), trong đó a,b,c là các số nguyên với $a < b < c$. Khi đó $(1,2,3) \in R$, nhưng $(2,4,3) \notin R$. Bậc của quan hệ này là 3. Các miền của nó tất cả đều là tập các số nguyên.

■

Ví dụ 2. Cho R là quan hệ gồm các bộ 5 (A, N, S, D, T) biểu diễn các chuyến bay, trong đó A là hãng hàng không N là số chuyến bay, S là nơi xuất phát, D là nơi đến và T là thời gian xuất phát. Ví dụ, nếu hãng hàng không Nadir Express có chuyến bay số 963 từ Newark đến Bangor vào lúc 15h00, thì (Nadir, 963, Newark, Bangor, 15h00) thuộc R. Bậc của quan hệ này là 5, các miền của nó tương ứng là tập tất cả các hãng hàng không, tập số các chuyến bay, tập các thành phố, (lại) tập các thành phố và tập thời gian.

■

CƠ SỞ DỮ LIỆU VÀ CÁC QUAN HỆ

Thời gian đòi hỏi để thao tác thông tin trong một cơ sở dữ liệu phụ thuộc vào chỗ thông tin được lưu trữ như thế nào. Các phép thêm và xóa các bản ghi, cập nhật các bản ghi, tìm kiếm các bản ghi và tổ hợp các bản ghi từ các cơ sở dữ liệu chồng phủ lên nhau được thực hiện hàng triệu lần mỗi ngày trong một cơ sở dữ liệu lớn. Vì tầm quan trọng của các thao tác này, nên người ta đã phát triển các phương pháp khác nhau để biểu diễn các cơ sở dữ liệu. Trong mục này chúng ta sẽ xét một trong số các phương pháp đó, nó có tên là **mô hình quan hệ của dữ liệu**, một phương pháp dựa trên khái niệm quan hệ.

Một cơ sở dữ liệu gồm các **bản ghi**, đó là các bộ n thành phần – được tạo bởi các **trường**. Các trường là mục nhập của các bộ n thành phần. Ví dụ, một cơ sở dữ liệu gồm các bản ghi về sinh viên có thể được tạo bởi các trường chứa tên, số chứng minh thư của sinh viên, ngành học, điểm bình quân của sinh viên đó. Mô hình quan hệ của dữ liệu biểu diễn một cơ sở dữ liệu gồm các bản ghi như một quan hệ n – ngôi. Như vậy, các bản ghi về sinh viên được biểu diễn bởi các bộ 4 thành phần có dạng (Tên sinh viên, số chứng minh thư, ngành học, điểm bình quân). Một cơ sở dữ liệu mẫu gồm 6 bản ghi như vậy là :

(Ackermann, 231455, Tin học, 3,88)
(Adams, 888323, Vật lý, 3,45)
(Chou, 102147, Tin học, 3,79)
(Goodfriend, 453876, Toán, 3,45)
(Rao, 678543, Toán, 3,90)
(Stevens, 786576, Tâm lý học, 2,99)

BẢNG 1

Tên sinh viên	Số chứng minh thư	Ngành học	Điểm bình quân
Ackermann	231455	Tin học	3,88
Adams	888323	Vật lý	3,45
Chou	102147	Tin học	3,79
Good friend	453876	Toán	3,45
Rao	678543	Toán	3,90
Stevens	786576	Tâm lý học	2,99

Các quan hệ được sử dụng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu cũng được gọi là **các bảng**, vì những quan hệ này thường được biểu diễn dưới dạng bảng. Ví dụ, chính cơ sở dữ liệu về các sinh viên nói ở trên được biểu diễn trong Bảng 1.

Một miền của một quan hệ n-ngôi được gọi là **khóa cơ bản** (primary key) khi giá trị của bộ n thành phần tại miền đó xác định bộ n thành phần ấy. Điều này có nghĩa là, một miền là khóa cơ bản khi không có hai bộ n thành phần trong quan hệ đó có cùng một giá trị tại miền đó.

Các bản ghi thường được thêm hay bị xóa đi khỏi các cơ sở dữ liệu. Vì thế, việc một miền là khóa cơ bản sẽ phụ thuộc vào thời gian. Do đó, khóa cơ bản cần được chọn sao cho nó vẫn giữ được tính chất đó bất kỳ khi nào cơ sở dữ liệu bị thay đổi. Điều này có thể được làm bằng cách dùng khóa cơ bản của **nội hàm** cơ sở dữ liệu – nội hàm chứa tất cả các bộ n thành phần mà ta có thể bao hàm trong một quan hệ n-ngôi biểu diễn cơ sở dữ liệu đó.

Ví dụ 3. Các miền nào là khóa cơ bản đối với quan hệ n ngôi được biểu diễn trong Bảng 1, khi giả thiết rằng không có bộ n thành phần nào sẽ được thêm vào trong tương lai ?

Giải: Vì trong bảng này chỉ có một bộ 4 thành phần đối với mỗi sinh viên, nên miền tên sinh viên là một khóa cơ bản. Tương tự, các số chứng minh thư trong bảng này là duy nhất, nên miền các số chứng minh thư cũng là một khóa cơ bản. Tuy nhiên, miền ngành học không phải là một khóa cơ bản vì có hơn một bộ 4 thành phần chứa cùng một ngành học. Miền điểm bình quân cũng không phải một khóa cơ bản vì có hai bộ 4 thành phần chứa cùng một điểm bình quân (hai bộ nào ?).

■

Những tổ hợp của các miền cũng có thể xác định một cách duy nhất các bộ n thành phần trong một quan hệ n ngôi. Khi các giá trị của tập các miền xác định một bộ n thành phần trong một quan hệ, thì tích Đềcác của các miền đó được gọi là **khóa phức hợp**.

Ví dụ 4. Tích Đềcác của miền ngành học và miền điểm bình quân có phải là khóa phức hợp đối với quan hệ n ngôi cho trong bảng 1 không khi giả thiết rằng không có bộ n phần tử nào được thêm vào ?

Giải: Vì không có hai bộ n thành phần nào trong bảng này có cả ngành học lẫn điểm bình quân như nhau nên tích Đềcác này là một khóa phức hợp.

■

Vì các khóa cơ bản và khóa phức hợp được dùng để xác định một cách duy nhất các bảng ghi trong một cơ sở dữ liệu, nên việc các khóa này vẫn còn hiệu lực khi các bản ghi mới được thêm vào cơ sở dữ liệu là điều quan trọng. Do vậy, cần phải kiểm tra để đảm bảo chắc chắn mỗi bản ghi mới có giá trị trong một hoặc nhiều trường thích hợp khác với tất cả các bản ghi khác trong bảng. Ví dụ, việc dùng số chứng minh thư của các sinh viên như một khóa đối với các bản ghi về sinh viên là có nghĩa, nếu như không có hai sinh viên có cùng số chứng minh thư. Một trường đại học không thể dùng trường tên như một khóa, vì hai sinh viên có thể có tên giống nhau (chẳng hạn như John Smith).

Có rất nhiều phép toán trên các quan hệ n ngôi để tạo các quan hệ n−ngôi mới. Hai phép toán như vậy sẽ được xét ở đây, cụ thể là phép chiếu và phép hợp. Phép chiếu được dùng để tạo quan hệ n ngôi mới bằng cách xóa đi cùng một số trường trong mỗi bản ghi của quan hệ đó.

ĐỊNH NGHĨA 2. Phép chiếu $P_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ánh xạ bộ n phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tới bộ m phần tử $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ trong đó $m \leq n$.

Nói một cách khác, phép chiếu $P_{i_1 i_2 \dots i_m}$ xóa đi n-m thành phần của bộ n thành phần, chỉ còn giữ lại các thành phần thứ i_1, i_2 ... và i_m.

Ví dụ 5. Tìm kết quả khi thực hiện phép chiếu $P_{1,3}$ đối với các bộ 4 thành phần (2,3,0,4), (Jane Doe, 2344111001, Địa lý, 3,14) và (a_1, a_2, a_3, a_4) ?

Giải: Phép chiếu $P_{1,3}$ ánh xạ các bộ 4 thành phần đó tương ứng thành (2,0), (Jane Doe, Địa lý), và (a_1, a_3).

■

Ví dụ sau minh họa cách dùng phép chiếu để tạo các quan hệ mới.

Ví dụ 6. Quan hệ nào sẽ được tạo thành khi dùng phép chiếu $P_{1,4}$ lên quan hệ cho trong bảng 1 ?

Giải: Khi dùng phép chiếu $P_{1,4}$, các cột thứ hai và thứ ba của bảng sẽ bị xóa đi và ta sẽ nhận được cặp biểu diễn tên sinh viên và điểm bình quân của sinh viên đó. Bảng 2 cho kết quả của phép chiếu đó. ■

BẢNG 2	
Tên sinh viên	**Điểm bình quân**
Ackermann	3, 88
Adams	3,45
Chou	3,79
Goedfriend	3,45
Rao	3,90
Stevens	2,99

Cũng có thể xảy ra trường hợp số hàng sẽ ít đi khi thực hiện phép chiếu lên quan hệ được cho trong một bảng. Điều này xảy ra khi một số bộ n thành phần trong quan hệ có giá trị như nhau trong tất cả m thành phần của phép chiếu, và chỉ khác nhau đối với các thành phần bị xóa bởi phép chiếu đó. Chẳng hạn, hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 7. Hỏi sẽ nhận được bảng nào khi thực hiện phép chiếu $P_{1,2}$ tới quan hệ được cho trong bảng 3 ?

BẢNG 3		
Sinh viên	**Ngành học**	**Môn học**
Glauser	Sinh học	BI 290
Glauser	Sinh học	MS 475
Glauser	Sinh học	PY 410
Marcus	Toán học	MS 511
Marcus	Toán học	MS 603
Marcus	Toán học	CS 322
Miller	Tin học	MS 575
Miller	Tin học	CS 455

BẢNG 4	
Sinh viên	**Ngành học**
Glauser	Sinh học
Marcus	Toán học
Miller	Tin học

Giải: Bảng 4 cho quan hệ nhận được khi thực hiện phép chiếu $P_{1,2}$ lên bảng 3. Chú ý rằng sau khi phép chiếu được thực hiện, số dòng sẽ còn ít hơn so với bảng ban đầu. ■

Phép **hợp** được dùng để tổ hợp hai bảng thành một khi những bảng này có cùng một số trường. Ví dụ, một bảng chứa các trường cho hãng hàng không, số chuyến bay, và cửa vào cùng với một bảng có chứa các trường cho số chuyến bay, cửa vào và thời gian cất cánh có thể được tổ hợp thành một bảng chứa các trường cho hãng hàng không, số chuyến bay, cửa vào và thời gian cất cánh.

ĐỊNH NGHĨA 3. Cho R là một quan hệ bậc m và S là một quan hệ bậc n. Hợp J_p (R, S) với $p \leq m$ và $p \leq n$ là một quan hệ bậc $m + n - p$ chứa tất cả các bộ $(m + n - p)$ thành phần $(a_1, a_2, \ldots a_{m-p}, c_1, c_2 \ldots c_p, b_1, b_2, \ldots, b_{n-p})$ với bộ m thành phần $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}, c_1, c_2, \ldots c_p)$ thuộc R và bộ n thành phần $(c_1, c_2, \ldots c_p, b_1, b_2, \ldots b_{n-p})$ thuộc S.

Nói một cách khác, toán tử hợp J_p tạo một quan hệ mới từ hai quan hệ bằng cách tổ hợp tất cả các bộ m thành phần của quan hệ thứ nhất với tất cả các bộ n thành phần của quan hệ thứ hai trong đó p thành phần cuối cùng của quan hệ thứ nhất phù hợp với p thành phần đầu tiên của quan hệ thứ hai.

Ví dụ 8. Quan hệ nào sẽ được tạo thành khi toán tử J_2 được dùng để tổ hợp các quan hệ được cho trong bảng 5 và bảng 6 ?

BẢNG 5

Giáo sư	Khoa	Mã số môn học
Cruz	Động vật học	335
Cruz	Động vật học	412
Farber	Tâm lý học	501
Farber	Tâm lý học	617
Grammer	Vật lý học	544
Grammer	Vật lý học	551
Rosen	Tin học	518
Rosen	Toán học	575

BẢNG 6

Khoa	Mã số môn học	Phòng học	Thời gian
Tin học	518	N521	14h
Toán học	575	N502	15h
Toán học	611	N521	16h
Vật lý	544	B505	16h
Tâm lý học	501	A100	15h
Tâm lý học	617	A110	11h
Động vật học	335	A100	9h
Động vật học	412	A100	8h

Giải: Hợp J_2 tạo ra quan hệ được cho trong bảng 7.

BẢNG 7

Giáo sư	Khoa	Mã số môn học	Phòng học	Thời gian
Cruz	Động vật học	335	A100	9h
Cruz	Động vật học	412	A100	8h
Farber	Tâm lý học	501	A100	15h
Farber	Tâm lý học	617	A110	11h
Grammer	Vật lý	544	B505	16h
Roaen	Tin học	518	N521	14h
Rosen	Toán học	575	N502	15h

Ngoài phép chiếu và phép hợp còn có các toán tử khác cũng tạo ra các quan hệ mới từ các quan hệ hiện có. Sự mô tả các toán tử này có thể tìm trong các sách về cơ sở dữ liệu.

BÀI TẬP

1. Liệt kê các bộ ba trong quan hệ $\{(a,b,c) \mid a,b,c$ là các số nguyên với $0 < a < b < c < 5\}$.

2. Xác định các bộ 4 thành phần trong quan hệ $\{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d$ là các số nguyên dương với $abcd = 6\}$.

3. Liệt kê các bộ 5 thành phần trong quan hệ cho bởi bảng 8

4. Giả sử rằng sẽ không có các bộ n thành phần mới được thêm vào, tìm tất cả các khóa cơ bản đối với các quan hệ được cho bởi

   a) Bảng 3 b) Bảng 5

   c) Bảng 6 d) Bảng 8

5. Giả sử rằng sẽ không có các bộ n thành phần được thêm vào, tìm khóa phức hợp với hai trường trong đó có trường Hãng hàng không đối với cơ sở dữ liệu cho trong bảng 8.

BẢNG 8

Hãng hàng không	Số chuyến bay	Cửa	Nơi đến	Thời gian cất cánh
Nadir	122	34	Detroit	08h 10
Acme	221	22	Denver	08h 17
Acme	122	33	Anchorage	08 h22
Acme	323	34	Honolulu	08h 30
Nadir	199	13	Detroit	08h47
Acme	222	22	Denver	09h10
Nadir	322	34	Detroit	09h44

6. Bạn sẽ nhận được gì khi dùng phép chiếu $P_{2,3,5}$ lên bộ 5 thành phần (a,b,c,d,e) ?

7. Cần phải dùng ánh xạ chiếu nào để xóa các thành phần thứ nhất, thứ hai và thứ tư của một bộ 6 thành phần ?

8. Lập bảng được tạo thành bằng cách dùng phép chiếu $P_{1,2,4}$ lên bảng 8.

9. Lập bảng được tạo thành bằng cách dùng phép chiếu $P_{1,4}$ lên bảng 8.

10. Có bao nhiêu thành phần trong bộ n thành phần thuộc bảng nhận được bằng cách dùng toán tử hợp J_3 đối với hai bảng với các bộ 5 và 8 thành phần tương ứng ?

11. Lập bảng nhận được bằng cách dùng toán tử hợp J_2 đối với các quan hệ cho trong các bảng 9 và 10.

BẢNG 9

Nhà cung cấp	Mã số linh kiện	Dự án
23	1092	1
23	1101	3
23	9048	4
31	4975	3
31	3477	2
32	6984	4
32	9191	2
33	1001	1

BẢNG 10

Mã số linh kiện	Dự án	Số lượng	Mã màu
1001	1	14	8
1092	1	2	2
1101	3	1	1
3477	2	25	2
4975	3	6	2
6984	4	10	1
9048	4	12	2
9191	2	80	4

6.3. BIỂU DIỄN CÁC QUAN HỆ

MỞ ĐẦU

Có nhiều cách hiểu diễn một quan hệ giữa các tập hữu hạn. Như chúng ta đã thấy ở trên, một trong những cách đó là liệt kê các cặp được sắp của nó. Trong tiết này, chúng ta sẽ xét hai cách khác nữa để biểu diễn các quan hệ. Một phương pháp dùng các ma trận zêrô–một, và phương pháp kia dùng các đồ thị có hướng.

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG MA TRẬN

Một quan hệ giữa các tập hữu hạn có thể được biểu diễn bằng một ma trận zêrô–một. Giả sử R là một quan hệ từ tập $A = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$ tới tập $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ (Ở đây các phần tử của A và B được liệt kê theo một trật tự đặc biệt nào đó, nhưng là tùy ý. Hơn nữa, khi $A = B$ ta dùng cùng một sắp thứ tự đối với A và B). Quan hệ R có thể được biểu diễn bằng ma trận $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$, trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Nói một cách khác, ma trận zêrô–một biểu diễn quan hệ R có phần tử (i, j) nhận giá trị 1 nếu a_i có quan hệ với b_j và nhận giá trị 0 nếu a_i không có quan hệ với b_j. (Một biểu diễn như vậy phụ thuộc vào cách sắp thứ tự của các tập A và B).

Các ví dụ sau minh họa việc dùng ma trận để biểu diễn các quan hệ.

Ví dụ 1. Cho $A = \{1,2,3\}$ và $B = \{1,2\}$. Giả sử R là quan hệ từ A đến B chứa (a,b) nếu $a \in A$, $b \in B$ và $a > b$. Ma trận nào biểu diễn quan hệ R nếu $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ và $b_1 = 1$, $b_2 = 2$?

Giải: Vì $R = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$, nên ma trận biểu diễn R là :

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các số 1 trong $\mathbf{M}_R$ cho thấy rằng các cặp (2,1), (3,1) và (3,2) thuộc R. Các số 0 cho thấy không còn cặp nào khác thuộc R.

■

Ví dụ 2. Cho $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Các cặp được sắp nào thuộc quan hệ R được biểu diễn bởi ma trận sau

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải: Vì R gồm các cặp được sắp (a_i, b_j) với $m_{ij} = 1$, suy ra :

$R = \{\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3 , b_1), (a_3 , b_3), (a_3 , b_5)\}$

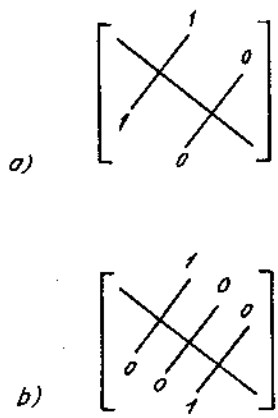
■

Ma trận của một quan hệ trên một tập là ma trận vuông và có thể được dùng để xác định quan hệ đó có một số tính chất nào đó hay không. Hãy nhớ lại rằng quan hệ R trên tập A là phản xạ nếu $(a,a) \in R$ với mọi $a \in A$. Như vậy, R là phản xạ nếu và chỉ nếu $(a_i, a_i) \in R$ đối với $i = 1,2, ..., n$. Từ đó suy ra R là phản xạ nếu và chỉ nếu $m_{ii} = 1$ với $i = 1,2, ..., n$. Nói một cách khác, R là phản xạ nếu mọi phần tử của đường chéo chính của $\mathbf{M}_R$ là bằng 1 như được cho trên hình 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Hình 1. Ma trận zêrô–một biểu diễn một quan hệ phản xạ.

Quan hệ R là đối xứng nếu $(a,b) \in R$ kéo theo $(b,a) \in R$. Do đó, quan hệ R trên tập $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là đối xứng nếu và chỉ nếu $(a_j,a_i) \in R$ với mọi $(a_i, a_j) \in R$. Như vậy, R là đối xứng nếu và chỉ nếu $m_{ji} = 1$ đối với mọi $m_{ij} = 1$. Điều này có nghĩa là $m_{ji} = 0$ với mọi $m_{ij} = 0$. Do đó, R là đối xứng nếu và chỉ nếu $m_{ij} = m_{ji}$ đối với mọi cặp số nguyên i và j với $i = 1, 2, ... n$ và $j = 1, 2, ..., n$. Nhớ lại định nghĩa phép chuyển vị của một ma trận ở Tiết 2.6, ta thấy rằng R là đối xứng nếu và chỉ nếu :



Hình 2. Các ma trận zêrô–một biểu diễn các quan hệ đối xứng và phản đối xứng : a) đối xứng ; b) phản đối xứng.

$$\mathbf{M}_R = (\mathbf{M}_R)^1$$

tức là, nếu $\mathbf{M}_R$ là một ma trận đối xứng. Dạng của ma trận biểu diễn quan hệ đối xứng được minh họa trên hình 2a.

Quan hệ R là phản đối xứng nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R$ và $(b,a) \in R$ kéo theo $a = b$. Do đó, ma trận của quan hệ phản đối xứng có tính chất là nếu $m_{ij} = 1$ với $i \neq j$ thì $m_{ji} = 0$. Hay, nói một cách khác, $m_{ij} = 0$ hoặc $m_{ji} = 0$ khi $i \neq j$. Dạng của ma trận biểu diễn quan hệ phản đối xứng được minh họa trên hình 2b.

Ví dụ 3. Giả sử quan hệ R trên một tập được biểu diễn bởi ma trận :

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R có là phản xạ, đối xứng và/hoặc phản đối xứng không ?

Giải: Vì tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 nên R là phản xạ. Hơn nữa $\mathbf{M}_R$ là ma trận đối xứng nên R cũng là đối xứng. Cũng dễ dàng thấy rằng R không phải là phản đối xứng.

■

Các phép toán Boole hợp và giao (đã được xét ở Tiết 2.6) có thể được dùng để tìm các ma trận biểu diễn hợp và giao của các quan hệ. Giả sử rằng R_1 và R_2 là các quan hệ trên tập A được biểu diễn bởi các ma trận $\mathbf{M}_{R_1}$ và $\mathbf{M}_{R_2}$, tương ứng. Ma trận biểu diễn hợp của hai quan hệ này có số 1 ở các vị trí mà $\mathbf{M}_{R_1}$ hoặc $\mathbf{M}_{R_2}$ có số 1. Ma trận biểu diễn giao của các quan hệ đó có số 1 ở các vị trí mà cả $\mathbf{M}_{R_1}$ và $\mathbf{M}_{R_2}$ đều có số 1. Như vậy, các ma trận biểu diễn hợp và giao của hai quan hệ đó là

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2}$$

và

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2}$$

Ví dụ 4. Giả sử các quan hệ R_1 và R_2 trên tập A được biểu diễn bằng các ma trận

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm các ma trận biểu diễn $R_1 \cup R_2$ và $R_1 \cap R_2$

Giải: Các ma trận biểu diễn các quan hệ đó tương ứng là :

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ hướng sự chú ý tới ma trận biểu diễn hợp thành của các quan hệ. Ma trận này có thể tìm được bằng cách dùng tích Boole của các ma trận (đã được xét ở Tiết 2.6) biểu diễn các quan hệ đó. Đặc biệt, giả sử R là quan hệ từ tập A đến B và S là quan hệ từ tập B đến C. Giả sử rằng A , B và C tương ứng có m, p và n phần tử. Giả sử các ma trận biểu diễn SoR, R và S tương ứng là $\mathbf{M}_{SoR} = [t_{ij}]$, $\mathbf{M}_R = [r_{ij}]$ và $\mathbf{M}_S = [s_{ij}]$ (các ma trận này có kích thước tương ứng bằng $m \times p$, $m \times n$ và $n \times p$). Cặp được sắp (a_i, c_j) thuộc $S \circ R$ nếu và chỉ nếu có một phần tử b_k sao cho (a_i, b_k) *thuộc* R và (b_k, c_j) thuộc S. Từ đó suy ra rằng $t_{ij} = 1$ nếu và chỉ nếu $r_{ik} = s_{kj} = 1$ đối với một k nào đó. Từ định nghĩa của tích Boole, điều này có nghĩa là

$$\mathbf{M}_{SoR} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S$$

Ví dụ 5. Tìm ma trận biểu diễn quan hệ $S \circ R$ nếu biết các ma trận biểu diễn R và S là

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải: Ma trận biểu diễn $S \circ R$ là :

$$\mathbf{M}_{SoR} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Ma trận biểu diễn hợp thành của hai quan hệ cũng có thể được dùng để tìm ma trận biểu diễn R^n. Cụ thể là :

$$\mathbf{M}_{R^n} = \mathbf{M}_R^{[n]}$$

theo định nghĩa của lũy thừa Boole. Bài tập 19 ở cuối tiết này sẽ yêu cầu bạn chứng minh công thức đó.

Ví dụ 6. Tìm ma trận biểu diễn quan hệ R^2, hiết rằng ma trận hiểu diễn R là :

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải: Ma trận hiểu diễn R^2 là

$$\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG CÁC ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

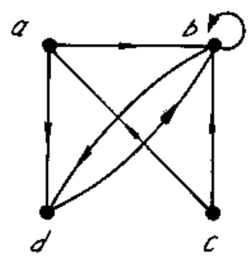
Chúng ta đã chứng minh rằng một quan hệ có thể được biểu diễn bằng cách liệt kê ra tất cả các cặp được sắp hoặc dùng các ma trận zêrô–một. Còn có một cách quan trọng khác biểu diễn một quan hệ – đó là cách dùng các đồ thị. Mỗi phần tử của một tập được hiểu diễn bằng một điểm và mỗi cặp được sắp được biểu diễn bằng một cung có hướng chỉ hằng mũi tên. Chúng ta dùng cách biểu diễn đồ thị này khi hình dung một quan hệ trên một tập hữu hạn như một **đồ thị có hướng**.

ĐỊNH NGHĨA 1. Một *đồ thị có hướng* (digraph) gồm một tập V các *đỉnh* (hay các nút) cùng với một tập E các cặp phần tử của V được sắp. Các cặp này được gọi là các *cạnh* (hoặc các *cung*). Đỉnh a được gọi là *đỉnh khởi đầu* của cạnh (a,b) và đỉnh b được gọi là *đỉnh kết thúc* của cạnh đó.

Cạnh có dạng (a,a) được hiểu diễn bằng một cung từ đỉnh a quay lại chính nó. Một cạnh như vậy được gọi là một **khuyên**.

Ví dụ 7. Đồ thị có hướng với các đỉnh a,b,c và d và các cạnh (a,b), (a, d), (b,b), (b,d), (c,a), (c,b) và (d,b) được cho trên hình 3.

■



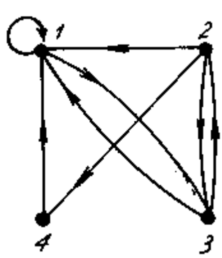
Hình 3. Một đồ thị có hướng.

Quan hệ R trên một tập A được biểu diễn bằng một đồ thị có hướng với các phần tử của A như các đỉnh của nó và các cặp được sắp $(a,b) \in R$ là các cạnh của nó. Sự gán này là một song ánh giữa các quan hệ trên tập A và các đồ thị có hướng với A là tập hợp các đỉnh của chúng. Như vậy, mỗi mệnh đề về các quan hệ đều tương ứng với một mệnh đề về các đồ thị có hướng và ngược lại. Các đồ thị có hướng biểu diễn một cách trực quan thông tin về các quan hệ. Do đó, chúng thường được dùng để nghiên cứu các quan hệ và những tính chất của chúng. Chú ý rằng các quan hệ từ tập A đến tập B không thể biểu diễn bằng các đồ thị có hướng trừ khi $A = B$. Việc dùng các đồ thị có hướng để biểu diễn các quan hệ được minh họa trong các ví dụ sau.

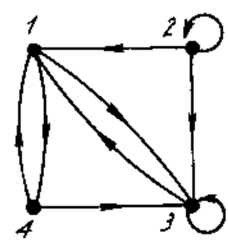
Ví dụ 8. Đồ thị có hướng của quan hệ

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

trên tập $\{1,2,3,4\}$ được cho trên hình 4.



Hình 4. Đồ thị có hướng của quan hệ R.



Hình 5. Đồ thị có hướng của quan hệ R.

Ví dụ 9. Các cặp được sắp nào thuộc quan hệ R được biểu diễn bởi đồ thị có hướng cho trên hình 5.

Giải: Các cặp được sắp (x,y) trong quan hệ đó là :

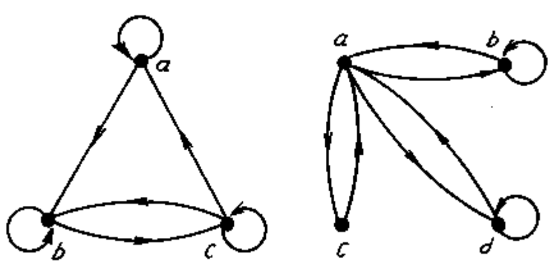
$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)\}.$$

Mỗi một cặp này tương ứng với một cạnh của đồ thị đó, với $(2,2)$ và $(3,3)$ tương ứng là hai khuyên.

■

Đồ thị có hướng biểu diễn một quan hệ có thể được dùng để xác định xem quan hệ đó có một số tính chất nào đó hay không. Ví dụ, một quan hệ là phản xạ nếu và chỉ nếu có một khuyên ở tất cả các đỉnh của đồ thị có hướng, sao cho tất cả các cặp được sắp có dạng (x,x) đều thuộc quan hệ đó. Một quan hệ là đối xứng nếu và chỉ nếu đối với mỗi cạnh giữa các đỉnh phân biệt trong đồ thị có hướng của nó đều có một cạnh có hướng ngược lại, sao cho cặp (y,x) thuộc quan hệ đó nếu (x,y) thuộc quan hệ ấy. Tương tự, một quan hệ là phản đối xứng nếu và chỉ nếu không bao giờ có hai cạnh ngược hướng nhau nối hai đỉnh phân biệt. Cuối cùng, một quan hệ là bắc cầu nếu và chỉ nếu mỗi khi có một cạnh nối đỉnh x với đỉnh y và một cạnh nối đỉnh y với đỉnh z thì cũng có một cạnh nối đỉnh x với đỉnh z (hoàn tất một tam giác trong đó mỗi cạnh của tam giác là một cạnh có hướng đúng của đồ thị).

Ví dụ 10. Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bằng các đồ thị có hướng cho trên hình 6 có là : phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu không ?



a) Đồ thị có hướng của R ; b) Đồ thị có hướng của S.

Hình 6. Đồ thị có hướng của các quan hệ R và S :

Giải: Vì có các khuyên ở tất cả các đỉnh của đồ thị có hướng biểu diễn R, nên nó có tính chất phản xạ. R không là đối xứng cũng không là phản đối xứng vì có một cạnh nối a với b nhưng không có cạnh nối b với a, hơn nữa lại có hai cạnh ngược hướng nối b và c. Cuối cùng, R không có tính bắc cầu vì có một cạnh nối a với b, một cạnh nối b với c nhưng lại không có cạnh nối a với c.

Vì các khuyên không có ở tất cả các đỉnh của đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ S, nên quan hệ này không phải là phản xạ. Quan hệ này là đối xứng nhưng không phải phản đối xứng vì mỗi cạnh nối hai đỉnh phân biệt đều kèm theo cạnh có hướng ngược lại. Cũng không khó thấy rằng từ đồ thị có hướng S không phải là bắc cầu. Vì (c,a) và (a,b) thuộc S nhưng (a,b) không thuộc S.

BÀI TẬP

1. Biểu diễn các quan hệ trên tập $\{1,2,3\}$ dưới đây bằng ma trận (với các phần tử được liệt kê theo thứ tự tăng dần).

   a) $\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3)\}$

   b) $\{(1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$

   c) $\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3)\}$

   d) $\{(1,3),\ (3,1)\}$

2. Liệt kê các cặp được sắp trong quan hệ trên tập $\{1,2,3\}$ tương ứng với các ma trận dưới đây (trong đó các hàng và cột tương ứng với các số nguyên được liệt kê theo thứ tự tăng).

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Làm thế nào có thể dùng ma trận biểu diễn một quan hệ để xác định được quan hệ đó có là phản xạ hay không ?

4. Hãy xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận cho trong Bài tập 2 có là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu hay không ?

5. Làm thế nào tìm được quan hệ $\overline{R}$ của R từ ma trận biểu diễn R với R là một quan hệ trên tập hữu hạn A ?

6. Cũng hỏi như trên với quan hệ ngược R^{-1} của R?

7. Cho R là một quan hệ được biểu diễn bởi ma trận

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận biểu diễn :

a) R^{-1} b) $\overline{R}$ c) R^2.

8. Cho R_1 và R_2 là hai quan hệ trên tập A được biểu diễn bằng các ma trận

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm các ma trận biểu diễn :

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_2 \circ R_1$

d) $R_1 \circ R_2$ c) $R_1 \oplus R_2$

9. Cho R là quan hệ được biểu diễn bởi ma trận

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm các ma trận biểu diễn

a) R^2 b) R^3 c) R^4

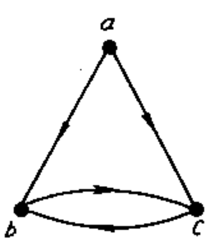
10. Vẽ các đồ thị có hướng biểu diễn các quan hệ cho trong Bài tập 1.

11. Cũng hỏi như bài tập trên đối với các quan hệ cho trong Bài tập 2.

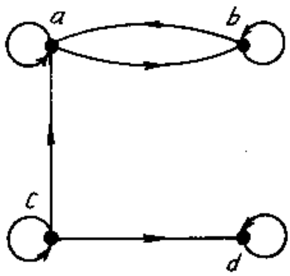
12. Vẽ đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ
$R = \{(a,a),\ (a,b),\ (b,c),\ (c,\ b),\ (c,d),\ (d,a),\ (d,b)\}$

Trong các Bài tập 13–15 hãy liệt kê các cặp được sắp trong các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng.

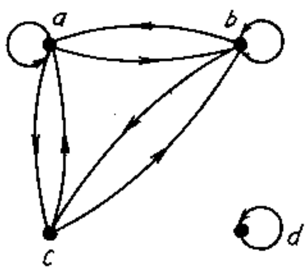
13.



14.



15.



16. Làm thế nào có thể dùng đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ R để xác định quan hệ đó là không phản xạ ?

17. Hãy xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng cho trong các bài tập 13–15 có là phản xạ, không phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bất đối xứng và/hoặc bắc cầu hay không ?

18. Cho các đồ thị có hướng biểu diễn hai quan hệ. Làm thế nào có thể tìm được đồ thị có hướng biểu diễn hợp, giao, hiệu đối xứng, hợp thành của các quan hệ đó.

19. Chứng minh rằng nếu $\mathbf{M}_R$ là ma trận biểu diễn quan hệ R, thì $\mathbf{M}_R^{[n]}$ là biểu diễn quan hệ R^n.

6.4. BAO ĐÓNG CỦA CÁC QUAN HỆ

MỞ ĐẦU

Một mạng máy tính có các trung tâm dữ liệu ở Boston, Chicago, Denver, Detroit, New York, và San Diego. Có các đường dây điện thoại một chiều trực tiếp, chẳng hạn sự liên kết từ Boston tới Chicago, từ Boston tới Detroit, từ Chicago tới Detroit, từ Detroit tới Denver và từ New York tới San Diego. Cho R là một quan hệ chứa các cặp (a,b) nếu có một đường dây điện thoại từ trung tâm dữ liệu ở a đến trung tâm dữ liệu ở b. Làm thế nào có thể xác định được có một đường liên lạc (có thể là gián tiếp) bao gồm một hoặc nhiều đường điện thoại từ một trung tâm dữ liệu này tới một trung tâm khác hay không. Vì không phải tất cả các đường liên lạc đều là trực tiếp, chẳng hạn đường liên lạc từ Boston đến Denver phải qua Detroit, nên R không thể được dùng trực tiếp để trả lời câu hỏi đó. Theo ngôn ngữ các quan hệ, thì R không phải là bắc cầu, nó không chứa tất cả các cặp có thể liên lạc với nhau. Như chúng ta sẽ thấy trong tiết này, chúng ta có thể tìm được tất cả các cặp trung tâm dữ liệu có đường liên lạc bằng cách xây dựng một quan hệ bắc cầu nhỏ nhất chứa R. Quan hệ đó được gọi là **bao đóng bắc cầu** (hay **bao đóng truyền ứng**) của R.

Nói chung, giả sử R là một quan hệ trên tập A. R có thể có hoặc không có một tính chất **P** nào đó, chẳng hạn tính phản xạ, tính đối xứng hoặc tính bắc cầu. Nếu có một quan hệ S có tính chất **P** và chứa R sao cho S là tập con của tất cả các quan hệ có tính chất **P** và chứa R, thì S được gọi là một **bao đóng** của R đối với **P**. (Chú ý rằng bao đóng của một quan hệ đối với một tính chất nào đó có thể không tồn tại, xem các bài tập 15 và 35 ở cuối tiết này). Dưới đây chúng ta sẽ cho thấy làm thế nào tìm được các bao đóng phản xạ, đối xứng và bắc cầu của các quan hệ.

BAO ĐÓNG

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)\}$ trên tập $A = \{1,2,3\}$ không có tính phản xạ. Làm thế nào xây dựng được một quan hệ có tính phản xạ chứa R và là nhỏ nhất có thể được ? Điều này có thể làm bằng cách thêm (2,2) và (3,3) vào R, vì đó là các cặp duy nhất có dạng (a,a) không chứa trong R. Rõ ràng, quan hệ mới này chứa R. Hơn nữa, *bất kỳ* quan hệ phản xạ nào chứa R nào cũng phải chứa (2,2) và (3,3). Vì quan hệ này chứa R, có tính phản xạ và được chứa trong bất kỳ quan hệ phản xạ nào chứa R, nên nó được gọi là **bao đóng phản xạ** của R.

Như thí dụ trên vừa minh họa, với quan hệ R đã cho trên tập A , bao đóng phản xạ của R có thể tạo được bằng cách thêm vào R tất cả các cặp dạng (a,a) với $a \in A$ nhưng không được chứa trong R. Việc thêm các cặp đó sẽ tạo ra một quan hệ mới có tính chất phản xạ, chứa R và được chứa trong bất kỳ quan hệ phản xạ nào chứa R. Chúng ta thấy rằng bao đóng phản xạ của quan hệ R bằng $R \cup \Delta$ với $\Delta = \{(a,a) | a \in A\}$ *là* **quan hệ đường chéo** trên A (độc giả nên tự chứng minh điều này).

Ví dụ 1. Xác định bao đóng phản xạ của quan hệ $R = \{(a,b) \mid a > b\}$ trên tập các số nguyên.

Giải. Bao đóng phản xạ của R là

$$R \cup \Delta = \{(a,b) \mid a > b\} \cup \{(a,a) \mid a \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{(a, b) \mid a \geqslant b\}$$

■

Quan hệ $\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$ trên tập $\{1,2,3\}$ là không đối xứng. Làm thế nào tạo được một quan hệ đối xứng nhỏ nhất có thể được và chứa R? Để làm điều đó ta cần phải thêm vào R các cặp (2,1) và (1,3) vì đây là các cặp duy nhất có dạng (b,a) không được chứa trong R, nhưng với $(a,b) \in R$. Quan hệ này là đối xứng và chứa R. Hơn thế nữa, mọi quan hệ đối xứng chứa R cần phải chứa quan hệ mới này, vì một quan hệ đối xứng chứa R cần phải chứa (2,1) và (3,1). Do đó quan hệ mới này được gọi là **bao đóng đối xứng** của R.

Như thí dụ trên vừa minh họa, bao đóng đối xứng của một quan hệ R có thể được xây dựng bằng cách thêm các cặp (b,a) không chứa trong R

nhưng với $(a,b) \in R$. Việc thêm các cặp này vào sẽ tạo ra một quan hệ mới có tính đối xứng và chứa R. Đồng thời, quan hệ mới này được chứa trong mọi quan hệ đối xứng có chứa R. Bao đóng đối xứng của một quan hệ có thể xây dựng bằng cách lấy hợp của quan hệ đó với quan hệ nghịch của nó, tức $R \cup R^{-1}$ là bao đóng đối xứng của R, ở đây $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$. Độc giả nên tự chứng minh khẳng định này.

Ví dụ 2. Tìm bao đóng đối xứng của quan hệ $R = \{(a,b) \mid a > b\}$ trên tập các số nguyên dương.

Giải: Bao đóng đối xứng của R là quan hệ

$$R \cup R^{-1} = \{(a,b) \mid a > b\} \cup \{(b,a) \mid a > b\}$$

$$= \{(a,b) \mid a \neq b\}$$

■

Giả sử R là một quan hệ không có tính bắc cầu. Làm thế nào tạo được một quan hệ bắc cầu chứa R sao cho quan hệ mới này được chứa trong mọi quan hệ bắc cầu chứa R? Liệu bao đóng bắc cầu của R có thể được tạo bằng cách thêm tất cả các cặp dạng (a,c) trong đó (a,b) và (b,c) đã được chứa trong quan hệ đó? Ta hãy xét quan hệ $R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)\}$ trên tập $\{1,2,3,4\}$. Quan hệ này không có tính bắc cầu vì nó không chứa tất cả các cặp (a,c) trong đó (a,b) và (b,c) đều thuộc R. Các cặp dạng này không được chứa trong R là $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$ và $(3,1)$. Tuy nhiên, việc thêm các cặp này vào R *không* tạo ra một quan hệ bắc cầu vì quan hệ vừa tạo thành có chứa $(3,1)$ và $(1,4)$ nhưng lại không chứa $(3,4)$. Điều này cho thấy rằng việc xây dựng bao đóng bắc cầu của một quan hệ phức tạp hơn việc xây dựng các bao đóng phản xạ hoặc đối xứng. Như sẽ được chỉ ra dưới đây, bao đóng bắc cầu của một quan hệ có thể tìm được bằng cách thêm các cặp được sắp mới cần phải có mặt và sau đó lặp lại quá trình này cho tới khi không cần phải thêm một cặp mới nào nữa.

ĐƯỜNG ĐI TRONG CÁC ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Chúng ta sẽ thấy rằng việc biểu diễn các quan hệ bằng các đồ thị có hướng sẽ giúp ta xây dựng được các bao đóng bắc cầu. Bây giờ chúng ta sẽ đưa vào một số thuật ngữ cần dùng cho mục đích này.

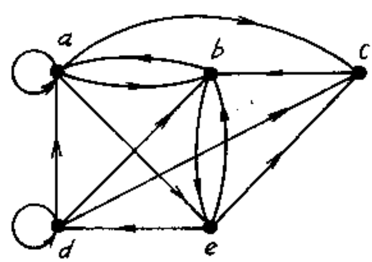
Một đường đi trong đồ thị có hướng nhận được bằng cách đi dọc theo các cạnh (theo cùng một hướng như được chỉ ra bằng mũi tên trên cạnh đó).

ĐỊNH NGHĨA 1. Một *đường đi* từ a đến b trong đồ thị có hướng G là dãy gồm một hoặc nhiều cạnh (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{n-1}, x_n) trong G với $x_0 = a$ và $x_n = b$, tức là dãy các cạnh trong đó đỉnh kết thúc của một cạnh chính là đỉnh khởi đầu của cạnh tiếp theo trên đường đi đó. Đường đi này được ký hiệu là $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ và có *chiều dài là* n. Một đường đi bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh được gọi là một **chu trình**.

Một đường đi trong đồ thị có hướng có thể qua một đỉnh hơn một lần. Hơn nữa, một cạnh trong đồ thị có hướng có thể gặp hơn một lần trong một đường đi. Độc giả cũng cần lưu ý rằng một số tác giả cho phép những đường đi có chiều dài zêrô, tức là đường đi không gồm một cạnh nào. Trong cuốn sách này mọi đường đi cần phải có chiều dài ít nhất là 1.

Ví dụ 3. Trong các dãy đỉnh cho dưới đây, dãy nào là một đường đi trong đồ thị có hướng cho trên hình 1 : *a,b,e,d* ; *a,e,c,d,b* ; *b,a,c,b,a,a,b* ; *d,c* ; *c,b,a* ; *e,b,a,b,a,b,e* ? Chiều dài của các đường đi đó bằng bao nhiêu ? Những đường nào là một chu trình ?

Giải: Vì mỗi cặp *(a,b)*, *(b,e)* và *(e,d)* đều là cạnh của đồ thị, nên a, *b*, *e*, *d* là một đường đi có chiều dài là 3 ; Vì *(c,d)* không là một cạnh, nên *a*, *e*, *c*, *d*, *b* không là một đường đi. Cũng như vậy, *b*, *a,c,b,a,a,b* là một đường đi với chiều dài là 6 vì *(b,a)*, *(a,c)*, *(c,b)*, *(b,a)*, *(a,a)* và *(a,b)* đều là các cạnh. Ta cũng thấy rằng *d,c* là một đường đi với chiều dài là 1, vì *(d,c)* là một cạnh. Cũng như vậy, *c,b,a* là một đường đi có chiều dài là 2, vì *(c,b)*, *(b,a)* đều là các cạnh của đồ thị. Tất cả các cặp *(e,b)*, *(b,a)*, *(a,b)*, *(b,a)*, *(a,b)* và *(b,e)* đều là các cạnh nên *e,b,a,b,a,b,e* là một đường đi có chiều dài là 6.



Hình 1. Đồ thị có hướng.

Hai đường đi *b,a,c,b,a,a,b* và *e,b,a,b,a,b,e* là các chu trình vì chúng khởi đầu và kết thúc đều ở một đỉnh. Các đường đi a, b, e, d ; c,b,a ; và d, c đều không phải là chu trình.

■

Thuật ngữ *đường đi* cũng được áp dụng trong một quan hệ. Bằng cách chuyển định nghĩa từ đồ thị có hướng qua các quan hệ, ta có : có một **đường đi** từ a đến b trong quan hệ R nếu tồn tại một dãy các phần tử $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$ với $(a,x_1) \in R$, $(x_1,x_2) \in R$, ... và $(x_{n-1}, b) \in R$. Định lý sau có thể nhận được thẳng từ định nghĩa của đường đi trong một quan hệ.

ĐỊNH LÝ 1. Cho R là một quan hệ trên tập A . Có một đường đi với chiều dài n từ a đến b nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R^n$.

Chứng minh. Ta sẽ dùng phương pháp qui nạp toán học. Theo định nghĩa, có một đường đi từ a đến b với chiều dài bằng 1 nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R$, vậy định lý đúng với $n = 1$.

Giả sử định lý đúng với số nguyên dương n. Đây là giả thiết qui nạp. Có một đường đi từ a đến b với chiều dài $n+1$ nếu và chỉ nếu tồn tại một phần tử $c \in A$ sao cho có một đường đi với chiều dài 1 từ a đến c sao cho $(a,c) \in R$ và một đường đi với chiều dài n từ c đến b sao cho $(c,b) \in R^n$. Do đó, theo giả thiết qui nạp, có một đường đi với chiều dài $n+1$ từ a đến b nếu và chỉ nếu tồn tại một phần tử c với $(a,c) \in R$ và $(c,b) \in R^n$. Nhưng có tồn tại một phần tử như vậy nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R^{n+1}$. Vì vậy, có một đường đi với chiều dài $n+1$ nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R^{n+1}$. Định lý được chứng minh.

BAO ĐÓNG BẮC CẦU

Bây giờ chúng ta sẽ chứng tỏ rằng việc tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ tương đương với việc xác định các cặp đỉnh nào trong đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ đó được nối bằng một đường đi. Với ý nghĩ đó trong đầu, ta định nghĩ quan hệ mới sau :

ĐỊNH NGHĨA 2. Cho R là một quan hệ trên tập A. *Quan hệ liên thông* R^* gồm các cặp (a,b) sao cho có một đường đi giữa a và b trong R.

Vì R^n gồm các cặp (a,b) sao cho có một đường đi với chiều dài n từ a đến b, nên suy ra R^* là hợp của tất cả các tập R^n. Nói một cách khác :

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Quan hệ liên thông rất tiện ích trong nhiều mô hình.

Ví dụ 4. Cho R là quan hệ trên tập mọi người trên thế giới chứa các cặp (a,b) nếu a đã gặp b. Tìm R^n với n là số nguyên dương lớn hơn 2? Tìm R^* ?

Giải: Quan hệ R^2 chứa các cặp (a,b) nếu tồn tại một nhân vật c sao cho $(a,c) \in R$ và $(c,b) \in R$, tức là nếu có một nhân vật c sao cho a đã gặp c và c đã gặp b.

Tương tự, R^n gồm các cặp (a,b) sao cho tồn tại các nhân vật x_1, x_2, ..., x_{n-1} sao cho a đã gặp x_1, x_1 đã gặp x_2, ... và x_{n-1} đã gặp b.

Quan hệ R^* chứa các cặp (a,b) nếu có một dây nhân vật bắt đầu từ a và kết thúc ở b sao cho mỗi nhân vật trong dãy đã gặp nhân vật đứng ngay sau nó trong dãy (có nhiều phỏng đoán rất lý thú về tập R^*. Bạn có nghĩ rằng quan hệ liên thông này bao gồm cả cặp có bạn là phần tử đầu tiên và tổng thống của nước Mông Cổ là phần tử thứ hai không ?). ■

Ví dụ 5. Cho R là quan hệ trên tập tất cả các ga tàu điện ngầm ở New York City chứa các cặp (a,b) nếu có thể đi từ ga a đến ga b mà không phải đổi tàu. Tìm R^n với n là một số nguyên dương? Tìm R^*.

Giải: Quan hệ R^n chứa các cặp (a,b) nếu có thể đi từ ga a đến ga b bằng cách làm tối đa $(n-1)$ lần đổi tầu. Còn quan hệ R^* gồm các cặp (a,b) trong đó có thể đi từ ga a đến ga b khi làm số lần đổi tàu theo mức độ cần thiết (Độc giả nên tự chứng minh các khẳng định này). ■

Ví dụ 6. Cho R là một quan hệ trên tập tất cả các bang của Hoa Kỳ chứa các cặp (a,b) nếu hang a và bang b có một biên giới chung. Tìm R^n, với n nguyên dương? Tìm R^*.

Giải: Tập R^n gồm các cặp (a,b) trong đó có thể đi từ bang a đến bang b bằng cách đi qua chính xác n biên giới giữa các hang. R^* chứa các cặp (a, b) trong đó có thể đi từ bang a đến bang b bằng cách đi qua số các biên giới tùy theo mức độ cần thiết. (Độc giả nên tự chứng minh các khẳng định này). Các cặp duy nhất không được chứa trong R^* là các cặp chứa các bang không nối liền với phần lục địa của Hoa Kỳ (tức là, các cặp chứa Alaska hoặc Hawaii). ■

Định lý sau cho thấy bao đóng bắc cầu của một quan hệ chính là quan hệ liên thông của nó.

ĐỊNH LÝ 2. Bao đóng bắc cầu của quan hệ R bằng quan hệ liên thông R^*.

Chứng minh: Chú ý rằng R^* chứa R. Để chứng minh R^* là bao đóng bắc cầu của R ta cũng cần phải chứng minh rằng R^* là bắc cầu và $R^* \subseteq S$ với mọi quan hệ S là bắc cầu và chứa R.

Trước hết, ta chứng minh R^* là bắc cầu. Nếu $(a,b) \in R^*$ và $(b,c) \in R^*$ thì tức là có một đường đi từ a đến b và từ b đến c trong R. Ta nhận được đường đi từ a đến c bằng cách khởi đầu bằng đường đi từ a đến b và tiếp theo nó bằng đường đi từ b đến c. Do đó $(a,c) \in R^*$. Suy ra R^* là bắc cầu.

Bây giờ chúng ta giả sử rằng S là một quan hệ bắc cầu chứa R. Vì S là bắc cầu nên S^n cũng là bắc cầu (độc giả cần tự chứng minh khẳng định này) và $S^n \subseteq S$ (theo Định lý 1 của Tiết 6.1). Hơn nữa vì

$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$

và $S^k \subseteq S$ suy ra $S^* \subseteq S$. Bây giờ chú ý rằng nếu $R \subseteq S$ thì $R^* \subseteq S^*$ vì bất kỳ một đường đi nào trong R cũng là một đường đi trong S. Do đó, $R^* \subseteq S^* \subseteq S$. Vậy mọi quan hệ bắc cầu chứa R cũng cần phải chứa R^*. Do đó R^* chính là bao đóng bắc cầu của R.

Bây giờ, một khi chúng ta đã biết rằng bao đóng bắc cầu đúng bằng quan hệ liên thông, ta hãy hướng chú ý vào bài toán tính quan hệ này. Chúng ta không cần phải kiểm tra các đường đi với chiều dài tùy ý để xác định có một đường đi giữa hai đỉnh của một đồ thị có hướng hữu hạn hay không. Như bổ đề dưới đây cho thấy, chỉ cần kiểm tra các đường đi chứa không hơn n cạnh với n là số các phần tử trong tập là đủ.

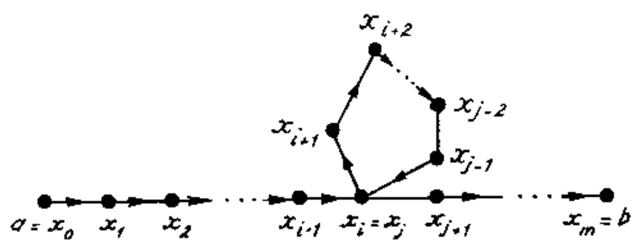
BỔ ĐỀ 1. Cho A là tập có n phần tử, và R là một quan hệ trên A. Nếu có một đường đi trong R từ a đến b thì cũng có một đường đi như vậy với chiều dài không vượt quá n. Hơn nữa, khi $a \neq b$, nếu có một đường đi từ a đến b *trong* R thì cũng có một đường đi như vậy với chiều dài không vượt quá $n - 1$.

Chứng minh: Giả sử có một đường đi từ a đến b trong R. Giả sử m là chiều dài ngắn nhất của một đường đi như thế, đó là $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ với $x_0 = a$ và $x_m = b$.

Giả sử rằng $a = b$ và $m > n$ sao cho $m \geqslant n + 1$. Theo nguyên lý Dirichlet vì có n đỉnh trong A , nên trong số m đỉnh $x_0, x_1, ..., x_{m-1}$ ít nhất phải có hai đỉnh trùng nhau (xem hình 2).

Giả sử rằng $x_i = x_j$ với $0 \leqslant i < j \leqslant m - 1$. Khi đó đường đi này chứa một chu trình từ x_i tới chính nó. Chu trình này có thể được xóa khỏi đường đi từ a đến b, chỉ để lại đường đi $x_0, x_1, ..., x_i, x_{j+1}, ..., x_{m-1}, x_m$ từ a đến b có chiều dài ngắn hơn. Từ đó, đường đi có chiều dài ngắn nhất cần phải có chiều dài nhỏ hơn hoặc bằng n.

Trường hợp với $a \neq b$ xin dành cho bạn đọc như một bài tập.



***Hình** 2.* Tạo một đường đi có chiều dài không vượt quá n.

Từ Bổ đề 1, chúng ta thấy rằng bao đóng bắc cầu của R là hợp của R, R^2, R^3, ..., R^n. Sở dĩ như vậy là vì có một đường đi trong R^* giữa 2 đỉnh nếu và chỉ nếu có một đường đi giữa các đỉnh đó trong R^i với i là một số nguyên dương nào đó nhỏ hơn hoặc bằng n. Vì

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^n ,$$

và ma trận zêrô-một biểu diễn hợp của các quan hệ là hợp của các ma trận zêrô-một biểu diễn các quan hệ đó, nên ma trân zêrô-một biểu diễn bao đóng là hợp của các ma trận zêrô-một biểu diễn n lũy thừa đầu tiên của R.

ĐỊNH LÝ 3. Cho $\mathbf{M}_R$ là ma trận zêrô-một biểu diễn quan hệ R trên một tập gồm n phần tử. Khi đó ma trận zêrô-một biểu diễn bao đóng bắc cầu R^* là :

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} \vee ... \vee \mathbf{M}_R^{[n]}$$

Ví dụ 7. Tìm ma trận zêrô–một biểu diễn bao đóng của R, nếu cho

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải: Từ Định lý 3, suy ra rằng ma trận zêrô–một biểu diễn R^* là :

$$\mathbf{M}_{R*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]}$$

Vì $$\mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

suy ra rằng

$$\mathbf{M}_{R*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Định lý 3 có thể được dùng để làm cơ sở cho thuật toán tính ma trận của quan hệ R^*. Để tìm ma trận này, cần phải tính các lũy thừa Boole liên tiếp cho tới lũy thừa bậc n của $\mathbf{M}_R$. Một khi mỗi lũy thừa đó đã được tính, ta lấy hợp của lũy thừa đó với hợp của các lũy thừa bậc nhỏ hơn. Khi điều này đã được làm với lũy thừa bậc n, ta sẽ tìm được ma trận biểu diễn R^*. Thủ tục này được trình bày như giả mã Algorithm 1 sau

---

ALGORITHM 1. THỦ TỤC TÍNH BAO ĐÓNG BẮC CẦU

procedure *bao đóng bắc cầu* ($\mathbf{M}_R$: ma trận zêrô–một $n \times n$)

A : = $\mathbf{M}_R$

B : = **A**

for i : 2 **to** n

begin

  A : = **A** $\odot$ $\mathbf{M}_R$

  B : = **B** ∨ **A**

end (**B** là ma trận zêrô–một biểu diễn R^*)

Chúng ta có thể dễ dàng tìm được số phép toán bit được dùng bởi Algorithm 1 để xác định bao đóng bắc cầu của một quan hệ. Tính các lũy thừa Boole $\mathbf{M}_R$, $\mathbf{M}_R^{[2]}$, ..., $\mathbf{M}_R^{[n]}$ đòi hỏi phải tìm $(n - 1)$ tích Boole của các ma trận zêrô–một $n \times n$. Mỗi tích Boole này có thể tính được bằng cách dùng n^3 phép toán bit. Do đó, các tích này có thể tính được bằng cách dùng $(n - 1)n^3$ phép toán bit.

Để tìm $\mathbf{M}_{R^*}$ từ các lũy thừa Boole bậc n của $\mathbf{M}_R$ ta cần phải tính $(n-1)$ phép hợp của các ma trận zêrô–một. Tính mỗi một hợp này cần n^2 phép toán bit. Vì vậy phải cần tới $(n - 1)n^2$ phép toán bit trong phần tính các hợp. Do đó khi dùng Algorithm 1, ta phải cần tới $(n - 1)n^3 + (n - 1)n^2 = O(n^4)$ các phép toán bit để tính ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của một quan hệ trên tập A gồm n phần tử. Phần còn lại của tiết này mô tả một thuật toán hiệu quả hơn để tìm bao đóng bắc cầu.

THUẬT TOÁN WARSHALL

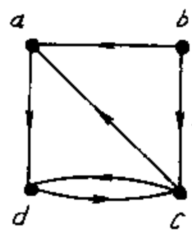
Thuật toán Warshall - gọi theo tên Stephen Warshall, người đã mô tả thuật toán này vào năm 1960 - là một phương pháp rất có hiệu quả để tính bao đóng bắc cầu của một quan hệ. Algorithm 1 có thể tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ trên một tập n phần tử bằng cách dùng $n^4 - n^2$ phép toán bit. Tuy nhiên, bao đóng bắc cầu được tìm bằng thuật toán Warshall chỉ cần dùng $2n^3$ phép toán bit.

Chú ý : Thuật toán Warshall đôi khi còn được gọi là thuật toán Roy - Warshall vì B.Roy cũng đã mô tả thuật toán này vào năm 1959.

Cho R là một quan hệ trên tập n phần tử. Giả sử v_1, v_2, ..., v_n là một bảng liệt kê tùy ý các phần tử đó. Trong thuật toán Warshall có dùng khái niệm các **đỉnh trong**. Nếu a, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, b là một đường đi, thì các đỉnh trong của nó là x_1, x_2, ..., x_{m-1}, tức đó là tất cả các đỉnh nằm ở đâu đó trên đường đi nhưng khác với đỉnh đầu và cuối của đường đi đó. Ví dụ, các đỉnh trong của đường đi a, c, d, f, g, h, b, j ở một đồ thị có hướng là c, d, f, g, h và b. Các đỉnh trong của đường đi a, c, d, a, f, b là c, d, a và f. (Chú ý rằng đỉnh đầu tiên trong đường đi đó sẽ là đỉnh trong, nếu nó được gặp lại trên đường đi đó trừ phi là đỉnh cuối cùng. Tương tự, đỉnh cuối cùng của một đường đi cũng là điểm trong nếu nó được gặp trước đó trừ khi là đỉnh đầu tiên).

Thuật toán Warshall dựa trên việc xây dựng dãy các ma trận zêrô–một. Những ma trận đó là $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{W}_1$, ..., $\mathbf{W}_n$, trong đó $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$ là ma trận biểu diễn quan hệ R, và $W_k = [w_{ij}^{(k)}]$ trong đó $\omega_{ij}^{(k)} = 1$ nếu có một đường đi từ v_i đến v_j sao cho tất cả các đỉnh trong của nó thuộc tập $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ (k đỉnh đầu tiên trong bảng liệt kê) và $w_{ij}^{k} = 0$ trong các trường hợp còn lại. (Đỉnh đầu tiên và đỉnh cuối cùng trong đường đi đó có thể ở ngoài tập k đỉnh đầu tiên trong bảng liệt kê). Chú ý rằng $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R^*}$ vì phần tử ở vị trí (i,j) trong ma trận $\mathbf{M}_{R^*}$ bằng 1 nếu và chỉ nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với tất cả các đỉnh trong thuộc tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ (nhưng đó là toàn bộ các đỉnh trong đồ thị có có hướng đang xét). Ví dụ sau minh họa ma trận $\mathbf{W}_k$ biểu diễn cái gì.

Ví dụ 8. Cho R là một quan hệ có đồ thị có hướng cho trên hình 3. Giả sử a, b, c, d là bảng liệt kê các phần tử của tập đang xét. Tìm các ma trận $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ và $\mathbf{W}_4$. Ma trận $\mathbf{W}_4$ biểu diễn bao đóng bắc cầu của R.



Hình 3. Đồ thị có hướng của quan hệ R.

Giải: Đặt $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$ và $v_4 = d$. $\mathbf{W}_0$ là ma trận biểu diễn quan hệ R. Do đó :

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{W}_1$ có 1 ở vị trí (i,j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j và đường đi này chỉ có $v_1 = a$ là đỉnh trong, nếu có. Chú ý rằng tất cả các đường đi có chiều dài bằng 1 cũng có thể được dùng vì chúng không có các đỉnh trong. Như vậy, bây giờ có một đường đi cho phép từ b đến d, cụ thể là b,a,d. Từ đó,

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{W}_2$ có 1 ở vị trí (i,j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với các đỉnh trong chỉ là $v_1 = a$ và/hoặc $v_2 = b$, nếu có. Vì không có các cạnh nào có b là đỉnh kết thúc, nên sẽ không có các đường đi mới nào nhận được khi chúng ta có cho phép b là một đỉnh trong. Từ đó suy ra $\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1$. $\mathbf{W}_3$ có 1 ở vị trí (i,j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với các đỉnh trong chỉ là $v_1 = a$, $v_2 = b$ và/hoặc $v_3 = c$, nếu có. Bây giờ chúng ta có các đường đi từ d đến a, cụ thể là d, c, a và từ d đến d, cụ thể là d, c, d. Từ đó, ta có :

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

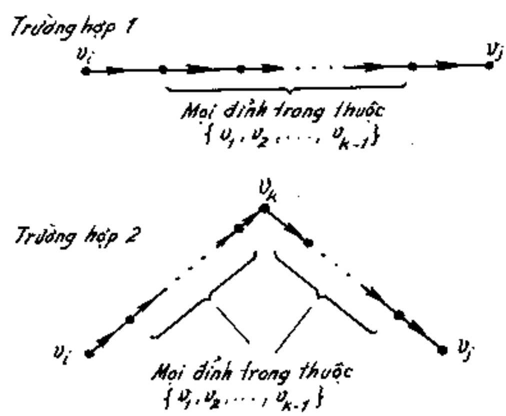
Cuối cùng, $\mathbf{W}_4$ có 1 ở vị trí (i,j) nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với các đỉnh trong chỉ là $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$ và/hoặc $v_4 = d$, nếu có. Vì đây là tất cả các đỉnh của đồ thị nên phần tử (i,j) bằng 1 nếu và chỉ nếu có một đường đi từ v_i đến v_j. Từ đó,

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận cuối cùng này chính là ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của R.

■

Thuật toán Warshall tính $\mathbf{M}_{R^*}$ bằng cách tính $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$, $\mathbf{W}_1$, ..., $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R^*}$ hiệu quả hơn. Nhận xét sau cho thấy ta có thể tính $\mathbf{W}_k$ trực tiếp từ $\mathbf{W}_{k-1}$. Có một đường đi từ v_i đến v_j với không có đỉnh trong nào khác hơn v_1, v_2, . .., v_k nếu và chỉ nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với các đỉnh trong của nó chỉ nằm trong số k-1 đỉnh đầu tiên trong bảng liệt kê hoặc có các đường đi từ v_i đến v_k và từ v_k đến v_j với các đỉnh trong chỉ thuộc số k-1 đỉnh đầu tiên trong bảng kê. Điều này có nghĩa là, hoặc một đường đi từ v_i đến v_j đã tồn tại trước khi v_k được phép như một đỉnh trong, hoặc việc cho phép v_k như một đỉnh trong tạo ra một đường đi từ v_i



Hình 4. Thêm v_k vào tập các đỉnh trong cho phép.

đến v_k và sau đó từ v_k đến v_j. Hai trường hợp này được minh họa trên Hình 4.

Loại đường đi thứ nhất tồn tại nếu và chỉ nếu $\omega_{ij}^{[k-1]} = 1$ và loại đường đi thứ hai tồn tại khi cả hai phần tử $\omega_{ik}^{[k-1]}$ và $\omega_{kj}^{[k-1]}$ đều bằng 1. Từ đó, suy ra $\omega_{ij}^{[k]} = 1$ nếu và chỉ nếu hoặc $\omega_{ij}^{[k-1]} = 1$ hoặc cả hai $\omega_{ik}^{[k-1]}$ và $\omega_{kj}^{[k-1]}$ đều bằng 1. Điều này dẫn chúng ta đến Bổ đề sau.

BỔ ĐỀ 2. Cho $\mathbf{W}_k = [\omega_{ij}^{[k]}]$ là ma trận zêrô-một có phần tử ở vị trí (i, j) nhận giá trị 1 nếu và chỉ nếu có một đường đi từ v_i đến v_j với các đỉnh trong thuộc tập hợp $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ thì

$$\omega_{ij}^{[k]} = \omega_{ij}^{[k-1]} \vee (\omega_{ik}^{[k-1]} \wedge \omega_{kj}^{[k-1]})$$

với mọi i, j và k là các số nguyên dương không vượt quá n.

Bổ đề 2 cho chúng ta phương tiện để tính một cách hiệu quả các ma trận $\mathbf{W}_k$, $k = 1, 2, ... n$. Chúng ta sẽ dùng Bổ đề 2 để biểu diễn giả mã cho thuật toán Warshall và gọi là Algorithm 2.

ALGORITHM 2. THUẬT TOÁN WARSHALL

procedure *Warshall* ($\mathbf{M}_R$: ma trận zêrô-một n x n)

$\mathbf{W} := \mathbf{M}_R$

for k := 1 **to** n

begin

  for i := 1 **to** n

  begin

    for j := 1 **to** n

    $\omega_{ij} := \omega_{ij} \vee (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj})$

  end

end $\{\mathbf{W} = [\omega_{ij}]$ là $\mathbf{M}_{R*}\}$

Độ phức tạp tính toán của thuật toán Warshall có thể đánh giá một cách dễ dàng qua các phép toán bit. Để tìm phần tử $\omega_{ij}^{[k]}$ từ các phần tử

$\omega_{ij}^{[k-1]}$, $\omega_{jk}^{[k-1]}$ và $\omega_{kj}^{[k-1]}$ theo Bổ đề 2 đòi hỏi hai phép toán bit. Để tìm n^2 phần tử của $\mathbf{W}_k$ từ các phần tử của $\mathbf{W}_{k-1}$ như vậy phải cần tới $2n^2$ phép toán bit. Vì thuật toán Warshall bắt đầu với $\mathbf{W}_o = \mathbf{M}_R$ và tính dãy n ma trận zêrô–một $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, ..., $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R*}$, nên tổng cộng các phép toán bit được dùng là $n.2n^2 = 2n^3$.

BÀI TẬP

1. Cho R là một quan hệ trên tập $\{0,1,2,3\}$ chứa các cặp được sắp $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,2)$ và $(3,0)$. Tìm

a) Bao đóng phản xạ của R

b) Bao đóng đối xứng của R

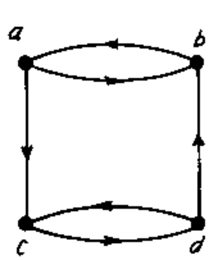
2. Cho R là quan hệ $\{(a,b) \mid a \neq b\}$ trên tập các số nguyên. Tìm bao đóng phản xạ của R.

3. Cho R là quan hệ $\{(a,b) \mid b$ chia hết cho a$\}$ trên tập các số nguyên. Tìm bao đóng đối xứng của R.

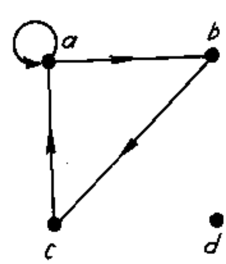
4. Làm thế nào có thể dựng được đồ thị có hướng biểu diễn bao đóng phản xạ của một quan hệ trên một tập hữu hạn từ đồ thị có hướng của quan hệ đó ?

Trong các Bài tập từ 5 – 7 hãy vẽ đồ thị có hướng biểu diễn bao đóng phản xạ của các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng sau đây :

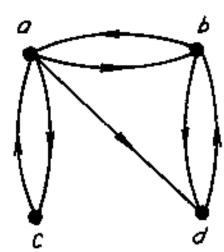
5.



6.



7.



8. Làm thế nào có thể xây dựng đồ thị có hướng biểu diễn bao đóng đối xứng của một quan hệ từ đồ thị biểu diễn quan hệ đó ?

9. Tìm đồ thị có hướng biểu diễn bao đóng đối xứng của các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị cho trong các Bài tập **5** – **7**.

10. Tìm quan hệ nhỏ nhất chứa quan hệ trong Bài tập 2 và có tính chất vừa phản xạ vừa đối xứng.

11. Tìm đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ nhỏ nhất vừa phản xạ vừa đối xứng chứa các quan hệ có đồ thị được cho trong các Bài tập 5 – 7.

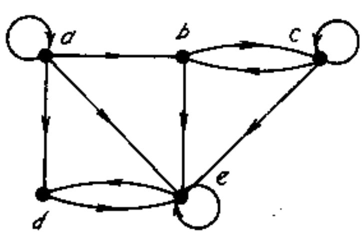
12. Giả sử quan hệ R trên tập hữu hạn A được hiểu diễn bởi ma trận $\mathbf{M}_R$. Chứng minh rằng ma trận biểu diễn hao đóng phản xạ của R là $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$.

13. Giả sử quan hệ R trên tập hữu hạn A được hiểu diễn bởi ma trận $\mathbf{M}_R$. Chứng minh rằng ma trận biểu diễn bao đóng đối xứng của R là $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R{}^t$.

14. Chứng minh rằng bao đóng của quan hệ R đối với một tính chất **P** nào đó, nếu nó tồn tại, là giao của tất cả các quan hệ có tính cbất **P** và chứa R.

15. Khi nào có thể định nghĩa "bao đóng không phản xạ" của quan hệ R, tức là quan hệ chứa R và là không phản xạ đồng thời nó được chứa trong tất cả các quan hệ không phản xạ và cbứa R ?

16. Xác định dãy các đỉnh sau có là một đường đi trong đồ thị có hướng dưới đây không ?



a) *a,b,c,e*

h) *b,e,c,b,e*

c) *a,a,b,e,d,e*

d) *b,c,e,d,a,a,b*

e) *b,c,c,b,e,d,e,d*

f) *a,a,b,b,c,c,b,e,d*

17. Tìm tất cả các chu trình có chiều dài bằng 3 trong đồ thị có hướng cho trong Bài tập 16.

18. Xác định xem có một đường đi trong đồ thị có hướng ở Bài tập 16 bắt đầu ở đỉnh đầu tiên và kết thúc ở đỉnh thứ hai đã cho dưới đây hay không ?

a) *a, b*	b) *b, a*	c) *b, b*
d) *a, e*	e) *b, d*	f) *c, d*
g) *d, d*	h) *e, a*	i) *e, c*

19. Cho R là quan hệ trên tập $\{1,2,3,4,5\}$ chứa các cặp được sắp (1,3), (2,4), (3,1), (3,5), (4,3), (5,1), (5,2) và (5,4). Tìm

a) R^2 b) R^3 c) R^4

d) R^5 e) R^6 f) R^*

20. Cho R là quan hệ chứa cặp (a,b) nếu a và b là các thành phố có chuyến bay thẳng không dừng lại từ a đến b. Khi nào thì (a,b) thuộc

a) R^2 ? b) R^3 ? c) R^* ?

21. Cho R là quan hệ cho trên tập tất cả các sinh viên, chứa cặp (a,b) nếu a và b ít nhất học chung một môn trong một lớp và $a \neq b$. Khi nào (a,b) thuộc

a) R^2 ? b) R^3 ? c) R^* ?

22. Giả sử quan hệ R là phản xạ. Chứng tỏ rằng R^* cũng phản xạ.

23. Giả sử quan hệ R là đối xứng. Chứng minh rằng R^* cũng đối xứng.

24. Giả sử quan hệ R là không phản xạ. Quan hệ R^2 có nhất thiết cũng phải không phản xạ không ?

25. Dùng Algorithm 1 tìm bao đóng bắc cầu của các quan hệ sau cho trên tập $\{1,2,3,4\}$

a) $\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (4,1)\}$

b) $\{(2,1), (2,3), (3,1), (3,4), (4,1), (4,3)\}$

c) $\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

d) $\{(1,1), (1,4), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,2)\}$

26. Dùng Algorithm 1 tìm bao đóng bắc cầu của các quan hệ sau cho trên tập $\{a,b,c,d,e\}$:

a) $\{(a,c), (b,d), (c,a), (d,b), (e,d)\}$

b) $\{(b,c), (b,e), (c,e), (d,a), (e,b), (e,c)\}$

c) $\{(a,b), (a,c), (a,e), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (d,a), (e,d)\}$

d) $\{(a,e), (b,a), (b,d), (c,d), (d,a), (d,c), (e,a), (e,b), (e,c), (e, e)\}$

27. Dùng thuật toán Warshall tìm bao đóng của các quan hệ cho trong Bài tập 25.

28. Cũng hỏi như trên đối với các quan hệ trong Bài tập 26.

29. Tìm quan hệ nhỏ nhất chứa quan hệ {(1,2), (1,4), (3,3), (4,1)} và có các tính chất sau

a) Phản xạ và bắc cầu

b) Đối xứng và bắc cầu

c) Phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

30. Hoàn tất chứng minh Bổ đề 1 cho trường hợp $a \neq b$.

31. Người ta đã đưa ra các thuật toán dùng $O(n^{2,8})$ các phép toán bit để tính tích Boole của hai ma trận zêrô−một $n \times n$. Giả sử rằng các thuật toán này có thể dùng được, hãy cho các đánh giá big − O đối với số các phép toán bit khi dùng Algorithm 1 và khi dùng thuật toán Warshall để tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ cho trên một tập n phần tử.

***32.** Xây dựng một thuật toán dùng khái niệm các đỉnh trong của một đường đi để tìm chiều dài của đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh trong một đồ thị có hướng, nếu như đường đi đó tồn tại.

33. Hãy sửa Algorithm 1 để dùng nó có thể tìm được bao đóng phản xạ của bao đóng bắc cầu của một quan hệ cho trên tập n phần tử.

34. Hãy sửa thuật toán Warshall để dùng nó có thể tìm được bao đóng phản xạ của bao đóng bắc cầu của một quan hệ cho trên tập n phần tử.

35. Chứng minh rằng bao đóng đối với một tính chất **P** nào đó của quan hệ R = {(0,0), (0,1), (1,1), (2,2)} trên tập {0,1,2} không tồn tại nếu **P** là tính chất

a) "Không có tính phản xạ".

b) "Có một số lẻ phần tử".

6.5. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

MỞ ĐẦU

Các sinh viên ở một trường đăng ký học các lớp một ngày trước khi bắt đầu học kỳ mới. Các sinh viên có tên bắt đầu bằng các chữ cái từ A đến G, từ H đến N và từ O đến Z có thể đăng ký bất kỳ lúc nào trong khoảng thời gian tương ứng từ 8h đến 11h, từ 11h đến 14h, từ 11h đến 17h. Giả sử R là quan hệ chứa (x,y) nếu và chỉ nếu các sinh viên x và y có tên bắt đầu bằng chữ cái trong cùng một khối nói ở trên. Do đó, x và y có thể đăng ký cùng một khoảng thời gian nếu và chỉ nếu $(x,y) \in R$. Dễ dàng thấy rằng R là phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Hơn thế nữa, R đã chia tập các sinh viên thành ba khối tùy thuộc vào chữ cái đầu tiên trong tên của họ. Để biết một sinh viên khi nào có thể đăng ký ta chỉ cần quan tâm sinh viên đó thuộc khối nào trong ba khối ấy, chứ không cần phải quan tâm tới bản thân sinh viên đó.

Các số nguyên a và b quan hệ với nhau bằng phép "đồng dư theo môđun 4" khi $a-b$ chia hết cho 4. Dưới đây chúng ta sẽ chỉ ra rằng quan hệ này cũng là phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Dễ dàng thấy rằng a quan hệ với b nếu và chỉ nếu a và b có cùng số dư khi chia cho 4. Từ đây suy ra rằng quan hệ này tách tập hợp các số nguyên thành 4 lớp khác nhau. Khi chúng ta chỉ cần quan tâm một số nguyên khi chia cho 4 cho số dư nào, ta chỉ cần biết nó thuộc lớp nào chứ không cần biết giá trị của nó bằng bao nhiêu.

Hai quan hệ nêu ở trên – quan hệ R và phép đồng dư theo môđun 4 – là những ví dụ về các quan hệ tương đương, cụ thể là những quan hệ có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Trong tiết này chúng ta sẽ chỉ ra rằng các quan hệ như vậy sẽ tách các tập thành những lớp rời nhau gồm các phần tử tương đương. Các quan hệ tương đương xuất hiện bất kỳ khi nào chúng ta chỉ cần quan tâm một phần tử của tập thuộc lớp nào chứ không cần quan tâm tới các đặc điểm của nó.

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Trong tiết này chúng ta sẽ nghiên cứu các quan hệ với một tổ hợp đặc biệt các tính chất cho phép chúng được dùng để liên hệ các vật tương đương nhau theo một nghĩa nào đó.

ĐỊNH NGHĨA 1. Quan hệ cho trên tập A được gọi là một *quan hệ tương đương* nếu nó là phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Hai phần tử quan hệ với nhau bằng một quan hệ tương đương được gọi là **tương đương** với nhau. (Định nghĩa này có nghĩa vì quan hệ tương đương là đối xứng). Vì một quan hệ tương đương là phản xạ, nên trong một quan hệ tương đương, một phần tử tương đương với chính nó. Hơn thế nữa, một quan hệ tương đương là bắc cầu, nên nếu a và b là tương đương và b và c là tương đương thì a và c là tương đương.

Các ví dụ sau đây minh họa khái niệm quan hệ tương đương.

Ví dụ 1. Giả sử R là quan hệ trên tập các xâu chữ cái tiếng Anh sao cho aRb nếu và chỉ nếu $l(a) = l(b)$, ở đây $l(x)$ là chiều dài của xâu x. Hỏi R có phải là một quan hệ tương đương không ?

Giải: Vì $l(a) = l(a)$, suy ra aRa với mọi xâu a, vậy R là phản xạ. Tiếp sau, giả sử rằng aRb, sao cho $l(a) = l(b)$. Khi đó bRa vì $l(b) = l(a)$, vậy R là đối xứng. Cuối cùng, giả sử rằng aRb và bRc. Khi đó $l(a) = l(b)$ và $l(b) = l(c)$. Do đó $l(a) = l(c)$, nghĩa là aRc. Vậy R là bắc cầu. Vì R là phản xạ, đối xứng và bắc cầu nên nó là một quan hệ tương đương. ■

Ví dụ 2. Cho R là một quan hệ trên tập các số nguyên sao cho aRb nếu và chỉ nếu $a = b$ hoặc $a = -b$. Trong Tiết 6.1 ta đã chứng minh rằng R là phản xạ, đối xứng và bắc cầu, vậy R là một quan hệ tương đương. ■

Ví dụ 3. Cho R là một quan hệ trên tập các số thực sao cho aRb nếu và chỉ nếu $a - b$ là một số nguyên. R có là một quan hệ tương đương không ?

Giải: Vì $a - a = 0$ là một số nguyên với mọi số thực a, nên R là phản xạ. Bây giờ giả sử rằng aRb. Khi đó $a - b$ là một số nguyên, sao cho $b - a$ cũng là một số nguyên. Vậy bRa nên R là đối xứng. Nếu aRb và bRc, thì $a - b$ và $b - c$ là các số nguyên. Do đó, $a - c = (a - b) + (b - c)$

cũng là một số nguyên. Vậy aRc, tức là R là bắc cầu. Do đó, R là một quan hệ tương đương.

■

Một trong những quan hệ tương đương được dùng rộng rãi nhất là phép đồng dư theo môđun m, với m là một số nguyên dương lớn hơn 1.

Ví dụ 4. *Đồng dư theo môđun m* : Cho m là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng quan hệ

$$R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$$

là một quan hệ tương đương trên tập các số nguyên.

Giải: Từ Tiết 2.3 ta đã biết rằng $a \equiv b \pmod{m}$ nếu và chỉ nếu $a - b$ chia hết cho m. Chú ý rằng $a - a = 0$ chia hết cho m, vì $0 = 0.m$, nên $a \equiv a \pmod{m}$, vậy R là phản xạ. Bây giờ giả sử $a \equiv b \pmod{m}$. Khi đó $a - b$ chia hết cho m, nghĩa là $a - b = km$, với k là một số nguyên. Từ đó suy ra $b - a = -km$, vậy $b \equiv a \pmod{m}$. Do đó, R là đối xứng. Tiếp theo, giả thiết rằng $a \equiv b \pmod{m}$ và $b \equiv c \pmod{m}$. Khi đó $a - b$ và $b - c$ đều chia hết cho m. Do đó, tồn tại các số nguyên k và l sao cho $a - b = km$ và $b - c = lm$. Cộng hai phương trình trên với nhau cho thấy $a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l)m$, suy ra $a \equiv c \pmod{m}$. Do đó R là bắc cầu. Suy ra, quan hệ đồng dư theo mod m là một quan hệ tương đương.

■

CÁC LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho A là tập tất cả các sinh viên ở trường bạn đã tốt nghiệp phổ thông. Xét quan hệ R trên A gồm tất cả các cặp (x,y) trong đó x và y tốt nghiệp ở cùng một trường phổ thông. Với sinh viên x đã cho, ta có thể lấy một tập các sinh viên tương đương với x đối với R. Tập này gồm tất cả các sinh viên đã tốt nghiệp phổ thông ở cùng trường với x. Tập con này của A được gọi là một lớp tương đương của quan hệ đó.

ĐỊNH NGHĨA 2. Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A. Tập tất cả các phần tử có quan hệ với một phần tử a của A được gọi là *một lớp tương đương* của a. Lớp tương đương của a đối với R được ký hiệu là $[a]_R$. Khi chỉ xét một quan hệ, ta sẽ bỏ chỉ số dưới R của ký hiệu trên mà chỉ viết $[a]$ cho lớp tương đương đó. Nói cách khác, nếu R là một quan hệ tương đương trên tập A, thì lớp tương đương của phần tử a là

$$[a]_R = \{s \mid (a,s) \in R\}$$

Nếu $b \in [a]_R$ thì b được gọi là **đại diện** của lớp tương đương đó.

Ví dụ 5. Xác định lớp tương đương của một số nguyên đối với quan hệ tương đương cho trong Ví dụ 2.

Giải. Vì một số nguyên tương đương với chính nó và số đối của nó trong quan hệ tương đương đó, suy ra $[a] = \{-a, a\}$. Tập này chứa hai số nguyên phân biệt, trừ trường hợp $a = 0$. Ví dụ, $[7] = \{-7, 7\}$; $[-5] = \{-5, 5\}$ và $[0] = \{0\}$.

Ví dụ 6. Xác định các lớp tương đương của 0 và 1 đối với quan hệ đồng dư theo mođun 4.

Giải: Lớp tương đương của 0 chứa tất cả các số nguyên a sao cho $a \equiv 0 \pmod 4$. Các số nguyên thuộc lớp này chính là các số nguyên chia hết cho 4. Từ đó, lớp tương đương của 0 đối với quan hệ này là :

$$[0] = \{\ \ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$$

Lớp tương đương của 1 chứa tất cả các số nguyên sao cho $a \equiv 1 \pmod 4$. Các số nguyên thuộc lớp này là những số khi chia cho 4 có số dư là 1. Từ đó, lớp tương đương của 1 đối với quan hệ này là :

$$[1] = \{\ \ldots, -7, -3, 1, 5, 9 \ldots\}$$

■

Trong Ví dụ 6 các lớp tương đương của 0 và 1 đối với quan hệ đồng dư theo môđun 4 có thể dễ dàng tổng quát hóa bằng cách thay 4 bằng một số nguyên dương m bất kỳ. Các lớp tương đương của quan hệ đồng dư theo mođun m được gọi là các **lớp đồng dư theo môđun m**. Lớp đồng dư của số nguyên a theo môđun m được ký hiệu là $[a]_m$. Ví dụ, từ Ví dụ 6, suy ra rằng $[0]_4 = \{\ \ldots, -8, -4, 0, 4, 8 \ldots\}$ và $[1]_4 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9 \ldots\}$.

CÁC LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ SỰ PHÂN HOẠCH

Cho A là tập các sinh viên ở trường bạn đã đăng ký học chính xác chỉ ở một ngành và giả sử R là quan hệ trên A chứa các cặp (x, y) trong đó x và y là các sinh viên học cùng một ngành. Khi này R là một quan hệ tương đương – điều này bạn đọc nên tự chứng minh lấy. Chúng ta có thể thấy rằng R sẽ tách tất cả các sinh viên thuộc tập A thành các tập con rời nhau, trong đó mỗi một tập con chứa tất cả các sinh viên theo học một ngành xác định. Ví dụ, một tập con chứa các sinh viên đăng ký (chỉ học) ngành tin học và một tập con thứ hai chứa tất cả các sinh viên đăng ký học ngành lịch sử. Hơn nữa, các tập con này là các lớp tương đương của R. Ví dụ này minh họa các lớp tương đương của một quan hệ tương đương phân hoạch một tập thành các tập con không rỗng, rời nhau như thế nào. Dưới đây chúng ta sẽ trình bày các khái niệm đó một cách chính xác hơn.

Cho R là một quan hệ trên tập A. Định lý sau chứng tỏ rằng các lớp tương đương của hai phần tử thuộc A hoặc là đồng nhất hoặc là rời nhau.

ĐỊNH LÝ 1. Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A. Các mệnh đề sau là tương đương :

(i) aRb

(ii) $[a] = [b]$

(iii) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$.

Chứng minh: Trước hết ta hãy chứng minh rằng (i) kéo theo (ii). Giả sử rằng aRb, ta sẽ phải chứng minh rằng $[a] = [b]$ bằng cách chứng tỏ $[a] \subseteq [b]$ và $[b] \subseteq [a]$. Giả sử $c \in [a]$. Khi đó aRc. Vì aRb và R là đối xứng nên bRa. Hơn nữa, vì R là bắc cầu và bRa và aRc, suy ra bRc. Do đó, $c \in [b]$, tức là $[a] \subseteq [b]$. Việc chứng minh $[b] \subseteq [a]$ hoàn toàn tương tự, và dành lại cho độc giả như một bài tập.

Thứ hai, ta sẽ chứng minh rằng (ii) kéo theo (iii). Giả sử rằng $[a] = [b]$. Suy ra $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ vì $[a]$ là không rỗng (do $a \in [a]$ vì R là phản xạ).

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng (iii) kéo theo (i). Giả sử rằng $[a] \cap [b] \neq \varnothing$. Khi đó có một phần tử c với $c \in [a]$ và $c \in [b]$. Nói một cách khác, aRc và cRb. Vì tính bắc cầu của quan hệ R suy ra aRb.

Vì (i) kéo theo (ii), (ii) kéo theo (iii) và (iii) lại kéo theo (i) suy ra ba mệnh đề (i), (ii) và (iii) là tương đương.

Bây giờ chúng ta đã có thể chỉ ra một quan hệ tương đương *phân hoạch* một tập hợp như thế nào. Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A. Hợp các lớp tương đương của R là toàn bộ tập A, vì một phần tử $a \in A$ sẽ thuộc một lớp tương đương riêng của nó, cụ thể là, lớp $[a]_R$.

Nói một cách khác

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

Thêm vào đó, theo Định lý 1, suy ra rằng các lớp tương đương này hoặc là bằng nhau hoặc là rời nhau, sao cho

$$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$$

khi

$$[a]_R \neq [b]_R.$$

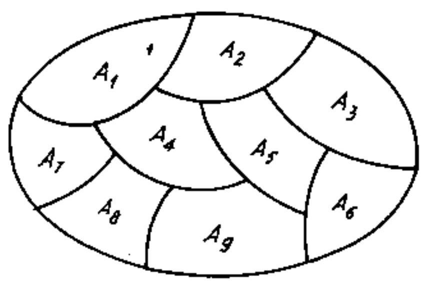
Hai nhận xét trên chứng tỏ rằng các lớp tương đương tạo nên một phân hoạch của tập A, vì nó tách A thành các tập con rời nhau. Nói một cách chính xác hơn, một **phân hoạch** của tập S là một tập hợp các tập con không rỗng rời nhau của S và có S như là hợp của chúng. Nói một cách khác, tập hợp các tập con A_i, $i \in I$ (ở đây I là tập chỉ số) tạo nên một phân hoạch của S nếu và chỉ nếu :

$$A_i \neq \varnothing \quad \text{với} \quad i \in I$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{khi } i \neq j,$$

và $$\bigcup_{i \in I} A_i = S.$$

(Ở đây ký hiệu $\bigcup_{i \in I} A_i$ biểu diễn hợp của các tập con A_i đối với mọi $i \in I$). Hình 1 minh họa khái niệm phân hoạch của một tập hợp.



Hình 1. Sự phân hoạch một tập hợp.

Ví dụ 7. Giả sử $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Tập hợp các tập con $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5\}$ và $A_3 = \{6\}$ tạo nên một phân hoạch của S, vì các tập con này đều rời nhau và hợp của chúng chính là S.

■

Chúng ta đã thấy rằng các lớp tương đương của một quan hệ tương đương trên một tập tạo nên sự phân hoạch của tập đó. Các tập con trong phân hoạch này là các lớp tương đương. Ngược lại, mỗi một phân hoạch của một tập hợp đều có thể được dùng để tạo nên một quan hệ tương đương. Hai phần tử là tương đương đối với quan hệ này nếu và chỉ nếu chúng thuộc cùng một tập con của phân hoạch đó.

Để thấy điều này, ta giả sử rằng $\{A_i \mid i \in I\}$ là một phân hoạch của S. Giả sử R là một quan hệ trên S chứa cặp (x,y) với x và y thuộc cùng một tập con A_i trong phân hoạch nói trên. Để chứng minh R là một quan hệ tương đương ta cần phải chứng minh rằng R có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ta thấy rằng $(a,a) \in R$ với mọi $a \in S$ và a ở trong cùng một tập con như chính nó. Do đó, R là phản xạ. Nếu $(a, b) \in R$ thì b và a ở trong cùng một tập con của phân hoạch, sao cho (b,a) cũng thuộc R. Do đó, R là đối xứng. Nếu $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in R$ thì a và b ở trong cùng một tập con X trong phân hoạch và b và c ở trong cùng một tập con Y trong phân hoạch đó. Vì các tập con trong một phân hoạch đều rời nhau mà b lại thuộc cả X lẫn Y, suy ra $X = Y$. Do đó, a và c thuộc cùng một tập con của phân hoạch, vậy $(a, c) \in R$. Do đó R là bắc cầu.

Từ những điều trên suy ra R là một quan hệ tương đương. Các lớp tương đương của R bao gồm các tập con của S chứa các phần tử có quan hệ và theo định nghĩa của R, đó là các tập con của phân hoạch. Định lý 2 dưới đây sẽ tổng kết các mối liên hệ mà ta vừa thiết lập giữa các quan hệ tương đương và sự phân hoạch.

ĐỊNH LÝ 2. Cho R là một quan hệ tương đương trên tập S. Khi đó các lớp tương đương của R sẽ lập nên một phân hoạch của S. Ngược lại, với một phân hoạch đã cho $\{A_i \mid i \in I\}$ của tập S, tồn tại một quan hệ tương đương R có các tập con A_i là các lớp tương đương của nó.

Các lớp đồng dư theo mođun m là một minh họa rất hữu ích cho Định lý 2. Có m lớp đồng dư khác nhau theo môđun m, tương ứng với m số dư khả dĩ khi chia một số nguyên cho m. m lớp đồng dư đó được ký hiệu bởi $[0]_m$, $[1]_m$, ..., $[m - 1]_m$. Chúng tạo ra một phân hoạch của tập các số nguyên.

Ví dụ 8. Xác định các tập trong phân hoạch các số nguyên tạo bởi quan hệ đồng dư theo môđun 4.

Giải: Có bốn lớp đồng dư, tương ứng là $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ và $[3]_4$. Đó là các tập hợp :

$$[0]_4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8 ...\}$$

$$[1]_4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9 ...\}$$

$$[2]_4 = \{..., -6, -2, 2, 6, 10 ...\}$$

$$[3]_4 = \{..., -5, -1, 3, 7, 11 ...\}$$

Các lớp đồng dư này rời nhau và mỗi số nguyên chỉ thuộc chính xác một trong 4 tập hợp đó. Nói một cách khác, như Định lý 2 đã khẳng định, các lớp đồng dư này tạo nên một phân hoạch.

■

BÀI TẬP

1. Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập $\{0,1,2,3\}$ cho dưới đây là quan hệ tương đương ? Xác định các tính chất của một quan hệ tương đương mà các quan hệ khác không có

   a) $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

   b) $\{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

   c) $\{(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

   d) $\{(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

   e) $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)\}$.

2. Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập mọi người cho dưới đây là các quan hệ tương đương. Xác định các tính chất của một quan hệ tương đương mà các quan hệ khác không có.

   a) $\{(a,b) \mid a$ và b cùng tuổi$\}$
   b) $\{(a,b) \mid a$ và b có cùng bố mẹ$\}$
   c) $\{(a,b) \mid a$ và b có bố mẹ chung$\}$
   d) $\{(a,b) \mid a$ và b đã gặp nhau$\}$
   e) $\{(a,b) \mid a$ và b nói cùng một thứ tiếng$\}$

3. Cũng hỏi như trên đối với các quan hệ trên tập các hàm từ $\mathbf{Z}$ đến $\mathbf{Z}$ cho dưới đây :

   a) $\{(f,g) \mid f(1) = g(1)\}$

   b) $\{(f,g) \mid f(0) = g(0)$ hoặc $f(1) = g(1)\}$

   c) $\{(f,g) \mid f(x) - g(x) = 1, \forall x \in \mathbf{Z}\}$

   d) $\{(f,g) \mid f(x) - g(x) = C$ với một C nào đó thuộc $\mathbf{Z}$ và $\forall x \in \mathbf{Z}\}$

   e) $\{(f,g) \mid f(0) = g(1)$ và $f(1) = g(0)\}$.

4. Hãy định nghĩa ba quan hệ tương đương trên tập các sinh viên trong lớp học môn toán rời rạc của bạn khác với các quan hệ đã nói trong

phần lý thuyết ở trên. Xác định các lớp tương đương của các quan hệ tương đương đó.

5. Giả sử A là một tập hợp không rỗng và f là một hàm có A là miền xác định của nó. Giả sử R là một quan hệ trên A gồm tất cả các cặp (x,y) với $f(x) = f(y)$.

a) Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên A

b) Xác định các lớp tương đương của R.

6. Cho A là một tập không rỗng và R là một quan hệ tương đương trên A. Chứng minh rằng tồn tại một hàm f có A là miền xác định sao cho $(x,y) \in R$ nếu và chỉ nếu $f(x) = f(y)$.

7. Chứng minh rằng quan hệ R chứa tất cả các cặp (x,y) trong đó x và y là các xâu bit có chiều dài bằng ba hoặc lớn hơn và có ba bit đầu tiên như nhau là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các xâu bit có chiều dài là ba hoặc lớn hơn.

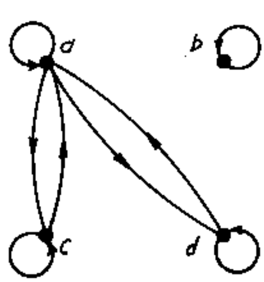
8. Chứng minh rằng quan hệ R gồm tất cả các cặp (x,y) trong đó x và y là các xâu bit có chiều dài là 3 hoặc lớn hơn với các bit trùng nhau có thể trừ ba bit đầu tiên là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các xâu bit.

9. Chứng minh rằng sự tương đương của các mệnh đề là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các mệnh đề phức hợp.

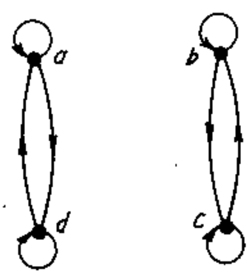
10. Cho R là quan hệ trên tập tất cả các cặp số nguyên dương được sắp sao cho $((a,b), (c,d)) \in R$ nếu và chỉ nếu $ad = bc$. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương.

Trong các Bài tập từ 11 – 13 hãy xác định xem quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng cho dưới đây có là quan hệ tương đương không ?

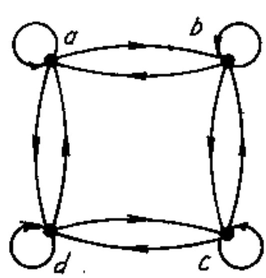
11.



12.



13.



14. Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận cho dưới đây có là một quan hệ tương đương không ?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Chứng tỏ rằng quan hệ R trên tập tất cả các xâu bit sao cho sRt nếu và chỉ nếu s và t chứa cùng một số các số 1 là một quan hệ tương đương.

16. Xác định các lớp tương đương của quan hệ tương đương cho trong Bài tập 1.

17. Cũng hỏi như trên với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 2.

18. Cũng hỏi như trên với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 3.

19. Xác định lớp tương đương của xâu bit 011 đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 15.

20. Xác định các lớp tương đương của các xâu bit sau đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 7.

a) 010 b) 1011

c) 11111 d) 01010101.

21. Mô tả các lớp tương đương của các xâu bit trong Bài tập 20 đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 8.

22. Xác định các lớp đồng dư $[4]_m$ khi m là

a) 2 b) 3

c) 6 d) 8.

23. Mô tả các lớp đồng dư theo môđun 6.

24. a) Xác định lớp tương đương của (1,2) đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 10.

b) Mô tả các lớp tương đương của quan hệ tương đương R trong Bài tập 10.

25. Trong số các tập hợp của các tập con sau, tập hợp nào là phân hoạch của $\{1,2,3,4,5,6\}$?

a) $\{1,2\}$, $\{2,3,4\}$, $\{4,5,6\}$
b) $\{1\}$, $\{2,3,6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$
c) $\{2,4,6\}$, $\{1,3,5\}$
d) $\{1,4,5\}$, $\{2,6\}$

26. Trong số các tập hợp của các tập con sau, tập hợp nào là phân hoạch của tập các số nguyên ?

a) Tập con các số chẵn và tập con các số lẻ

b) Tập con các số nguyên dương và tập các số nguyên âm.

c) Tập con các số nguyên chia hết cho 3, tập con các số nguyên chia cho 3 còn dư 1, tập con các số nguyên chia cho 3 còn dư 2.

d) Tập con các số nguyên nhỏ hơn -100, tập con các số nguyên có trị tuyệt đối không vượt quá 100 và tập con các số nguyên lớn hơn 100.

Một phân hoạch P_1 được gọi là **cái mịn** *của phân hoạch P_2 nếu mỗi tập trong P_1 đều là một tập con của một trong các tập của P_2.*

27. Chứng minh rằng sự phân hoạch tạo bởi các lớp tương đương theo môđun 6 là cái mịn của phân hoạch tạo bởi các lớp đồng dư theo môđun 3.

28. Giả sử R_1 và R_2 là các quan hệ tương đương trên tập A. Cho P_1 và P_2 là 2 phân hoạch tương ứng với R_1 và R_2. Chứng minh rằng $R_1 \subseteq R_2$ nếu và chỉ nếu P_1 là cái mịn của P_2.

29. Tìm quan hệ tương đương nhỏ nhất trên tập $\{a,b,c,d,e\}$ chứa quan hệ $\{(a,b),\ (a,c),\ (d,e)\}$.

30. Giả sử R_1 và R_2 là hai quan hệ tương đương trên tập S. Xác định xem các tổ hợp sau của R_1 và R_2 có nhất thiết phải là một quan hệ tương đương hay không ?

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 \oplus R_2$

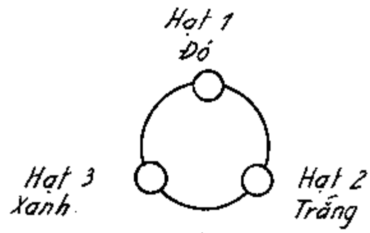
31. Xét quan hệ tương đương trong Ví dụ 3, cụ thể là

$R = \{(x,y) \mid x - y$ là một số nguyên$\}$

a) Xác định lớp tương đương của 1 đối với quan hệ tương đương đó.

b) Xác định lớp tương đương của 1/2 đối với quan hệ tương đương đó.

32*. Một vòng đeo tay có ba hạt cườm, mỗi hạt có màu hoặc là đỏ, hoặc là trắng hoặc là xanh như trong hình minh họa bên. Hãy định nghĩa một quan hệ R giữa các vòng đeo tay như sau : (B_1, B_2) trong đó B_1 và B_2 là các vòng đeo tay thuộc R nếu và chỉ nếu B_2 nhận được từ B_1 bằng cách quay nó hoặc quay rồi sau đó lấy ảnh gương của nó.



a) Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương

b) Xác định các lớp tương đương của R.

33*. Cho R là quan hệ trên tập tất cả các bàn cờ 2×2 được tô màu, trong đó mỗi ô (trong số 4 ô) được tô đỏ hoặc xanh sao cho (C_1, C_2) – với C_1 và C_2 là các bàn cờ 2×2 nói trên – thuộc R nếu và chỉ nếu C_2 có thể nhận được từ C_1 bằng cách hoặc quay bàn cờ, hoặc quay rồi sau đó lấy ảnh đối xứng gương của nó.

a) Chứng minh R là một quan hệ tương đương

b) Tìm các lớp tương đương của R.

34. a) Cho R là một quan hệ trên tập các hàm từ $\mathbf{Z}^+$ đến $\mathbf{Z}^+$ sao cho $(f, g) \in R$ nếu và chỉ nếu f là $\theta(g)$ (xem phần dẫn giải trước Bài tập 22 ở Tiết 1.8). Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương.

b) Mô tả lớp tương đương chứa $f(n) = n^2$ đối với quan hệ tương đương cho ở câu a).

35. Xác định số các quan hệ tương đương khác nhau trên tập ba phần tử bằng cách liệt kê ra các quan hệ đó.

36. Cũng hỏi như trên đối với tập gồm 4 phần tử.

37*. Khi tạo một bao đóng bắc cầu của một bao đóng đối xứng của một bao đóng phản xạ của một quan hệ, có nhất thiết nhận được một quan hệ tương đương không ?

38*. Khi lập một bao đóng đối xứng của một bao đóng phản xạ của một bao đóng bắc cầu của một quan hệ, có nhất thiết nhận được một quan hệ tương đương không ?

39. Giả sử ta dùng Định lý 2 để tạo một phân hoạch P từ một quan hệ tương đương R. Xác định quan hệ tương đương R' tạo thành nếu chúng ta lại dùng Định lý 2 để tạo một quan hệ tương đương từ P.

40. Giả sử ta dùng Định lý 2 để tạo một quan hệ tương đương R từ phân hoạch P. Hãy xác định phân hoạch P' tạo thành nếu ta lại dùng Định lý 2 để tạo một phân hoạch từ R.

41. Lập một thuật toán để tìm một quan hệ tương đương nhỏ nhất chứa một quan hệ đã cho.

42. Cho $p(n)$ là ký hiệu số các quan hệ tương đương khác nhau trên một tập n phần tử (và theo Định lý 2 thì cũng chính là số các phân hoạch của một tập n phần tử). Chứng minh rằng $p(n)$ thỏa mãn công thức truy hồi sau :

$$p(n) = \sum_{j=0}^{n-1} C(n-1, j)p(n-j-1)$$

với điều kiện ban đầu $p(0) = 1$

(Chú ý : các số $p(n)$ được gọi là *các số Bell* theo tên nhà toán học Mỹ E.T.Bell).

43. Dùng Bài tập 42 tìm số các quan hệ tương đương khác nhau trên tập n phần tử với n là số nguyên dương không vượt quá 10.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. a) Quan hệ trên một tập là gì ?

b) Có bao nhiêu quan hệ trên một tập n phần tử ?

2. a) Quan hệ phản xạ là gì ?

b) Quan hệ đối xứng là gì ?

c) Quan hệ phản đối xứng là gì ?

d) Quan hệ bắc cầu là gì ?

3. Cho một ví dụ về một quan hệ trên tập {1,2,3,4} có các tính chất sau:

a) phản xạ, đối xứng và không bắc cầu

b) không là phản xạ, nhưng đối xứng và bắc cầu

c) phản xạ, phản đối xứng và không bắc cầu

d) phản xạ, đối xứng và bắc cầu

e) phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

4. a) Có bao nhiêu quan hệ phản xạ trên một tập n phần tử ?

b) Có bao nhiêu quan hệ đối xứng trên một tập n phần tử

c) Có bao nhiêu quan hệ phản đối xứng trên một tập n phần tử.

5. a) Hãy giải thích xem làm thế nào có thể dùng một quan hệ n-ngôi để biểu diễn thông tin về các sinh viên của một trường đại học.

b) Làm thế nào có thể dùng quan hệ 5-ngôi chứa tên của các sinh viên, địa chỉ, số điện thoại, ngành học và điểm bình quân của họ để lập một quan hệ 3-ngôi chỉ chứa tên, ngành học và điểm bình quân của họ ?

c) Làm thế nào có thể dùng quan hệ 4-ngôi chứa tên, địa chỉ, số điện thoại và ngành học của các sinh viên cùng với quan hệ 4-ngôi chứa tên, số thẻ sinh viên, ngành học và số các giờ chứng chỉ để tổ hợp thành một quan hệ n-ngôi, duy nhất.

6. a) Giải thích xem làm thế nào có thể dùng các ma trận zêrô-một để biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn.

b) Giải thích xem làm thế nào có thể dùng các ma trận zêrô-một biểu diễn một quan hệ để xác định được quan hệ đó có là phản xạ, đối xứng và/hoặc phản đối xứng hay không ?

7. a) Hãy giải thích xem làm thế nào có thể dùng các đồ thị có hướng để biểu diễn một quan hệ cho trên một tập hữu hạn.

b) Hãy giải thích xem làm thế nào có thể dùng các đồ thị có hướng biểu diễn một quan hệ để xác định được một quan hệ có là phản xạ, đối xứng và/hoặc phản đối xứng hay không ?

8. a) Hãy nêu định nghĩa của bao đóng phản xạ và bao đóng đối xứng của một quan hệ.

b) Làm thế nào có thể xây dựng được bao đóng phản xạ của một quan hệ.

c) Làm thế nào có thể xây dựng được bao đóng đối xứng của một quan hệ.

d) Tìm bao đóng phản xạ và bao đóng đối xứng của quan hệ $\{(1,2), (2,3), (2,4), (3,1)\}$ trên tập $\{1,2,3,4\}$.

9. a) Nêu định nghĩa của bao đóng bắc cầu của một quan hệ.

b) Một bao đóng bắc cầu của một quan hệ có thể nhận được bằng cách gộp vào tất cả các cặp (a,c) sao cho (a,b) và (b,c) thuộc quan hệ đó không ?

c) Mô tả hai thuật toán tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ.

d) Tìm bao đóng bắc cầu của quan hệ $\{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1)\}$.

10. a) Nêu định nghĩa của quan hệ tương đương.

b) Các quan hệ nào trên tập $\{a,b,c,d\}$ là quan hệ tương đương chứa (a, b) và (b,d) ?

11. a) Chứng minh rằng quan hệ đồng dư theo mođun m là một quan hệ tương đương với mọi m nguyên dương.

b) Chứng minh rằng quan hệ $\{(a,b) \mid a \equiv \pm b$ (mođun 7)$\}$ là một quan hệ tương đương trên tập các số nguyên.

12. a) Thế nào là các lớp tương đương của một quan hệ tương đương ?

b) Xác định các lớp tương đương của quan hệ đồng dư theo mođun 5.

c) Xác định các lớp tương đương của quan hệ tương đương cho trong Câu hỏi 11b.

13. Giải thích mối quan hệ giữa các quan hệ tương đương trên một tập và các phân hoạch trên tập đó.

BÀI TẬP BỔ SUNG

1. Cho S là tập tất cả các xâu chữ cái tiếng Anh. Hãy xác định xem các quan hệ cho dưới đây có là phản xạ, không phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu hay không ?

a) $R_1 = \{(a,b) \mid a$ và b không có chữ cái nào chung$\}$

h) $R_2 = \{(a,b) \mid a$ và b có chiều dài khác nhau$\}$

c) $R_3 = \{(a,b) \mid a$ dài hơn $b\}$

2. Xây dựng một quan hệ trên tập $\{a,b,c,d\}$ có các tính chất sau :

a) phản xạ, đối xứng, nhưng không bắc cầu

b) không phản xạ, đối xứng và bắc cầu

c) không phản xạ, phản đối xứng và không bắc cầu.

d) phản xạ, không đối xứng cũng không phản đối xứng, bắc cầu.

e) không là phản xạ, không phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và không bắc cầu.

3. Chứng minh rằng quan hệ trên $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ được định nghĩa bởi $(a,b)R(c, d)$ nếu và chỉ nếu $a + d = b + c$ là một quan hệ tương đương.

4. Chứng minh rằng một tập con của một quan hệ phản đối xứng cũng là một quan hệ phản đối xứng.

5. Cho R là một quan hệ phản xạ trên tập A. Chứng minh rằng $R \subseteq R^2$.

6. Giả sử R_1 và R_2 là hai quan hệ phản xạ trên tập A. Chứng minh rằng $R_1 \oplus R_2$ là một quan hệ không phản xạ.

7. Giả sử R_1 và R_2 là hai quan hệ phản xạ trên tập A. Hỏi $R_1 \cap R_2$ có là phản xạ không? $R_1 \cup R_2$ có là phản xạ không ?

8. Giả sử R là một quan hệ đối xứng trên tập A. Hỏi $\overline{R}$ có là đối xứng không ?

9. Cho R_1 và R_2 là hai quan hệ đối xứng. $R_1 \cap R_2$ có là đối xứng không? $R_1 \cup R_2$ có là đối xứng không ?

10. R được gọi là quan hệ **vòng quanh** nếu aRb và bRc kéo theo cRa. Chứng minh R là một quan hệ phản xạ và vòng quanh nếu và chỉ nếu nó là một quan hệ tương đương.

11. Chứng minh rằng khóa cơ bản trong một quan hệ n-ngôi vẫn là khóa cơ bản trong mọi phép chiếu của quan hệ đó nếu phép chiếu vẫn chứa khóa đó như một trong các trường của nó.

12. Khóa cơ bản trong một quan hệ n-ngôi có còn là khóa cơ bản trong một quan hệ lớn hơn nhận được bằng cách lấy hợp của quan hệ này với một quan hệ thứ hai không ?

13. Chứng minh rằng bao đóng phản xạ của một bao đóng đối xứng của một quan hệ đúng bằng bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ của quan hệ đó.

14. Cho R là một quan hệ trên tập tất cả các nhà toán học, chứa các cặp (a,b) nếu và chỉ nếu a và b đã viết chung một bài báo.

a) Mô tả quan hệ R^2

b) Mô tả quan hệ R^*

c) **Số Erdos** của một nhà toán học bằng 1 nếu nhà toán học đó đã viết chung một bài báo với nhà toán học Hungari Paul Erdos – người đã viết rất nhiều bài báo khoa học, số đó bằng 2 nếu nhà toán học đó không viết chung một bài báo nào với Erdos, nhưng lại viết chung với một ai đó đã từng viết chung với Erdos một bài báo, v.v... (trừ trường hợp số Erdos của chính Erdos bằng 0). Hãy cho một định nghĩa của số Erdos qua các đường đi trong R.

15*. a) Hãy nêu một ví dụ để chứng tỏ rằng bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của một quan hệ không nhất thiết phải bằng bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của quan hệ đó.

b) Tuy nhiên, hãy chứng minh rằng bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của một quan hệ cần phải chứa bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của quan hệ đó.

16. a) Cho S là tập các chương trình con của một chương trình máy tính. Ta định nghĩa quan hệ R như sau : $\mathbf{P}R\mathbf{Q}$ nếu chương trình con **P** trong quá trình thực hiện nó phải gọi chương trình con **Q**. Hãy mô tả bao đóng bắc cầu của R.

b) Đối với các chương trình con **P** nào thì (**P**, **P**) thuộc bao đóng bắc cầu của R.

c) Mô tả bao đóng phản xạ của bao đóng bắc cầu của R.

17. Giả sử rằng R và S là hai quan hệ trên tập A với $R \subseteq S$ sao cho các bao đóng của R và S đối với một tính chất **P** nào đó đều tồn tại. Chứng minh rằng bao đóng của R đối với **P** là tập con của bao đóng của S đối với **P**.

18. Chứng minh rằng bao đóng đối xứng của hợp hai quan hệ là hợp các bao đóng đối xứng của nó.

19*. Lập một thuật toán dựa trên khái niệm các đỉnh trong để tìm chiều dài của đường đi dài nhất giữa hai đỉnh trong một đồ thị có hướng hoặc để xác định rằng có những đường đi với chiều dài tùy ý giữa các đỉnh đó.

20. Trong số các quan hệ cho trên tập mọi người cho dưới đây, quan hệ nào là quan hệ tương đương ?

a) $\{(x, y) \mid x$ và y sinh cùng ngày giờ$\}$

b) $\{(x, y) \mid x$ và y sinh cùng năm$\}$

c) $\{(x, y) \mid x$ và y ở cùng một thành phố$\}$

21*. Có bao nhiêu quan hệ tương đương khác nhau cho trên tập hợp với 5 phần tử có đúng ba lớp tương đương khác nhau ?

22. Chứng minh rằng $\{(x, y) \mid x - y \in \mathbf{Q}\}$ là một quan hệ tương đương trên tập các số thực với Q là tập hợp các số hữu tỷ. Hãy xác định $[1]$, $[1/2]$ và $[\pi]$.

23. Giả sử $P_1 = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ và $P_2 = (B_1, B_2, ... B_n\}$ là hai phân hoạch của một tập S. Chứng minh rằng tập các tập con không rỗng có dạng $A_i \cap B_j$ cũng là một phân hoạch của S và phân hoạch này đều là cái mịn của P_1 và P_2 (xem chú giải ở trước Bài tập 27 của Tiết 6.5).

24*. Chứng minh rằng bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ của một quan hệ R là quan hệ tương đương nhỏ nhất chứa R.

BÀI TẬP TRÊN MÁY TÍNH

Viết các chương trình với input và output sau:

1. Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, hãy xác định xem quan hệ đó có là phản xạ và/hoặc không–phản xạ không.

2. Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, hãy xác định xem quan hệ đó có là đối xứng và/hoặc phản đối xứng không.

3. Cho một ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, xác định xem quan hệ đó có là bắc cầu hay không.

4. Cho số nguyên dương n, hãy cho hiển thị tất cả các quan hệ trên tập có n phần tử.

5*. Cho số nguyên dương n, hãy xác định số các quan hệ bắc cầu cho trên tập n phần tử.

6*. Cho số nguyên dương n, hãy xác định số các quan hệ tương đương trên tập có n phần tử.

7*. Cho số nguyên dương n, hãy cho hiển thị tất cả các quan hệ tương đương trên tập n số nguyên dương nhỏ nhất.

8. Cho một quan hệ n-ngôi, tìm hình chiếu của quan hệ này khi chỉ rõ các trường bị xóa.

9. Cho một quan hệ m-ngôi và một quan hệ n-ngôi và một tập các trường chung, tìm hợp của các quan hệ đó đối với các trường chung ấy.

10. Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng phản xạ của quan hệ đó.

11. Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng đối xứng của quan hệ đó.

12. Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của quan hệ đó bằng cách tính hợp các lũy thừa của ma trận biểu diễn quan hệ đó.

13. Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của quan hệ đó bằng cách dùng thuật toán Warshall.

14. Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn quan hệ tương đương nhỏ nhất chứa quan hệ đó.

TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

Dùng các chương trình mà bạn đã biết để làm các bài tập sau

1. Cho hiển thị tất cả các quan hệ khác nhau cho trên tập có 4 phần tử.

2. Cho hiển thị tất cả các quan hệ phản xạ và đối xứng khác nhau cho trên tập có 6 phần tử.

3. Cho hiển thị tất cả các quan hệ phản xạ và bắc cầu cho trên tập 5 phần tử.

4*. Hãy xác định có bao nhiêu quan hệ bắc cầu cho trên tập với n phần tử với mọi số nguyên dương $n \leqslant 7$.

5. Tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ mà bạn lựa chọn cho trên một tập có ít nhất 20 phần tử. Hoặc dùng một quan hệ tương ứng với các đường nối trực tiếp trong một mạng giao thông hoặc mạng thông tin hoặc dùng một quan hệ phát sinh một cách ngẫu nhiên.

6. Tính số các quan hệ tương đương khác nhau cho trên tập có n phần tử, với n là số nguyên dương không vượt quá 20.

7. Cho hiển thị tất cả các quan hệ tương đương cho trên một tập có 7 phần tử.

VIẾT TIỂU LUẬN

Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau :

1. Bàn về khái niệm quan hệ mờ. Các quan hệ mờ được dùng như thế nào ?

2. Mô tả các nguyên lý cơ bản của cơ sở dữ liệu theo mô hình quan hệ một cách mở rộng và chi tiết hơn so với những điều đã được trình bày trong Tiết 6.2. Cơ sở dữ liệu theo mô hình quan hệ được dùng rộng rãi như thế nào so với các loại cơ sở dữ liệu khác ?

3. Tìm các bài báo gốc của Marshall và của Roy (tiếng Pháp) trong đó họ đã phát triển các thuật toán tìm các bao đóng bắc cầu. Hãy bàn về cách tiếp cận của họ. Tại sao hạn cho rằng cái mà chúng ta gọi là thuật toán Marshall thực tế đã được phát minh một cách độc lập bởi hơn một người ?

4. Mô tả các lớp tương đương có thể được dùng như thế nào để định nghĩa các số hữu tỷ như là các lớp của những cặp số nguyên và các phép tính số học cơ bản được định nghĩa như thế nào theo cách tiếp cận đó (xem Bài tập 10 ở Tiết 6.5).

CHƯƠNG 7

ĐỒ THỊ

Lý thuyết đồ thị là ngành khoa học được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại. Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỷ thứ 18 bởi nhà toán học Thụy Sĩ tên là Leonhard Euler. Ông đã dùng đồ thị để giải quyết bài toán cầu Konigsberg nổi tiếng. Bài toán này sẽ được xem xét trong chương này.

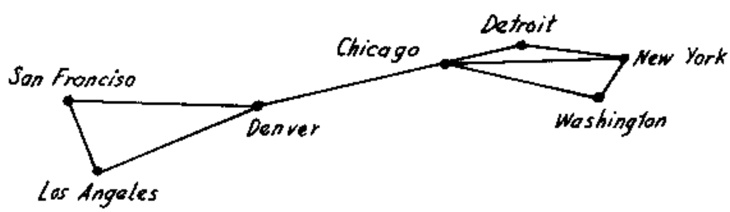
Đồ thị cũng được dùng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Ví dụ, dùng đồ thị để xác định xem có thực hiện một mạch điện trên một bảng điện phẳng được không. Chúng ta cũng có thể phân biệt hai hợp chất hóa học có cùng công thức phân tử nhưng có cấu trúc khác nhau nhờ đồ thị. Chúng ta cũng có thể xác định xem hai máy tính có được nối với nhau bằng một đường truyền thông hay không nếu dùng mô hình đồ thị mạng máy tính. Đồ thị với các trọng số được gán cho các cạnh của nó có thể dùng để giải các bài toán như bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong một mạng giao thông. Chúng ta cũng có thể dùng đồ thị để lập lịch thi và phân chia kênh cho các đài truyền hình.

7.1. MỞ ĐẦU

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó. Người ta phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị. Nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực rất khác nhau có thể giải được bằng mô hình đồ thị. Chẳng hạn người ta có thể dùng đồ thị để biểu diễn sự cạnh tranh các loài trong một môi trường sinh thái, dùng đồ thị để biểu diễn ai có ảnh hưởng lên ai trong một tổ chức nào đó, và cũng có thể dùng đồ thị để biểu diễn các kết cục của cuộc thi đấu thể thao. Chúng ta cũng sẽ chỉ ra có thể dùng đồ thị để giải các bài toán như bài toán tính số các tổ hợp khác nhau của các chuyến bay giữa hai thành phố trong một mạng hàng không, hay để giải bài toán đi tham quan tất cả các phố của một thành phố sao cho mỗi phố đi qua đúng một lần, hoặc bài toán tìm số các màu cần thiết để tô các vùng khác nhau của một bản đồ.

CÁC LOẠI ĐỒ THỊ

Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu các loại đồ thị bằng cách đưa ra cách dùng mỗi loại để mô hình các mạng máy tính khác nhau. Giả sử một mạng máy tính gồm các máy tính và các đường điện thoại. Ta có thể biểu diễn vị trí của mỗi máy tính bằng một điểm và mỗi đường điện thoại bằng một cung như trong hình 1.

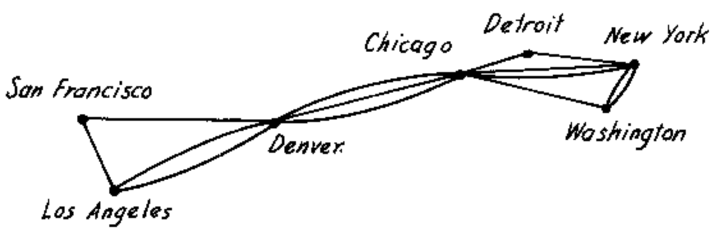


Hình 1. Mạng máy tính.

Trong mạng máy tính này ta thấy có nhiều nhất một đường điện thoại giữa hai máy, mỗi đường hoạt động theo cả hai chiều, và không máy tính nào có đường điện thoại nối đến chính nó. Do vậy mạng này có thể mô hình bằng một **đơn đồ thị**, bao gồm các đỉnh biểu diễn các máy tính và các cạnh vô hướng biểu diễn các đường điện thoại nối hai đỉnh phân biệt và không có hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh.

ĐỊNH NGHĨA 1. Một đơn đồ thị $G = (V, E)$ gồm một tập không rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không thứ tự của các đỉnh phân biệt.

Đôi khi có nhiều đường điện thoại giữa các máy tính trong mạng. Đó là khi có sự truyền thông với cường độ cao giữa các máy tính. Mạng với nhiều đường thoại được biểu diễn trên Hình 2. Đơn đồ thị không thể mô hình các mạng như thế này được. Thay vào đó người ta dùng **đa đồ thị**. Đó là đồ thị gồm các đỉnh và các cạnh vô hướng, nhưng có thể có nhiều cạnh nối mỗi cặp đỉnh. Đơn đồ thị là một trường hợp riêng của đa đồ thị.



***Hình** 2.* Mạng máy tính có nhiều đường điện thoại.

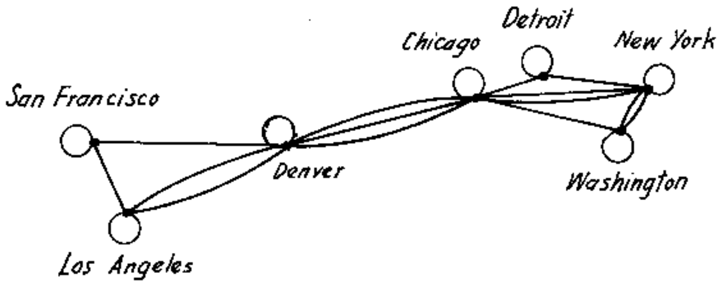
Ta không thể dùng một cặp đỉnh để xác định một cạnh trong đa đồ thị. Định nghĩa đa đồ thị vì vậy có phức tạp hơn một chút.

ĐỊNH NGHĨA 2. Một *đa đồ thị* $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V, một tập các cạnh E và một hàm f từ E tới $\{ \{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Các cạnh e_1 và e_2 được gọi là song song hay cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.

Một mạng máy tính có thể có đường điện thoại từ một máy tới chính nó. Đó là mạng trên Hình 3. Ta không thể dùng đa đồ thị để mô hình các mạng như thế được vì đa đồ thị không chứa **các khuyên**, đó là các cạnh nối một đỉnh với chính nó. Khi đó ta phải dùng một loại đồ thị tổng quát hơn, gọi là **giả đồ thị**.

ĐỊNH NGHĨA 3. *Một giả đồ thị* $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V, một tập các cạnh E và một hàm f từ E tới $\{ \{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Một cạnh là một khuyên nếu $f(e) = \{u\}$ với một đỉnh u nào đó.

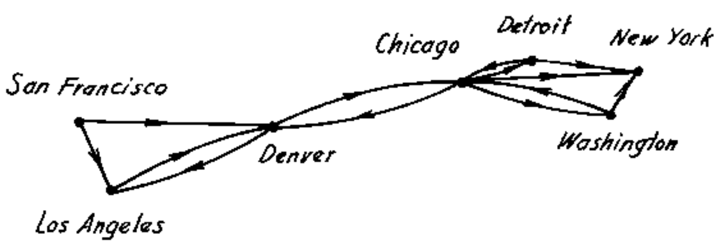
Độc giả có thể thấy rằng các cạnh bội trong một giả đồ thị gắn liền với cùng một cặp đỉnh. Tuy nhiên, ta sẽ nói rằng $\{u, v\}$ là một cạnh của đồ thị $G = (V, E)$ nếu có ít nhất một cạnh e sao cho $f(e) = \{u, v\}$. Ta sẽ không phân biệt cạnh e và tập $\{u, v\}$ tương ứng với nó trừ khi đặc tính của các cạnh bội là quan trọng.



Hình 3. Mạng máy tính có các đường nội bộ.

Tóm lại, giả đồ thị là loại đồ thị vô hướng tổng quát nhất vì nó có thể chứa các khuyên và các cạnh bội. Đa đồ thị là loại đồ thị vô hướng có thể chứa cạnh bội nhưng không thể có các khuyên, còn đồ thị đơn là loại đồ thị vô hướng không chứa cạnh bội hoặc các khuyên.

Các đường điện thoại trong một mạng máy tính có thể hoạt động chỉ theo một chiều. Chẳng hạn trên Hình 4 máy chủ ở New York có thể chỉ nhận dữ liệu từ các máy khác mà không thể gửi dữ liệu đi. Khi đó các đường điện thoại hai chiều được biểu diễn bằng một cặp cạnh có chiều ngược nhau.



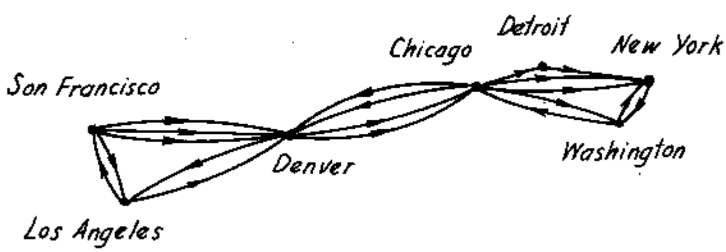
Hình 4. Mạng truyền thông có các đường điện thoại một chiều.

Chúng ta dùng đồ thị có hướng để mô hình hóa những mạng như thế. Những cạnh của đồ thị có hướng là các cặp đỉnh có thứ tự. Trong đồ thị có hướng người ta dùng khuyên, tức là một cặp có thứ tự của cùng một đỉnh, nhưng không dùng cạnh bội cùng chiều nối cùng cặp đỉnh.

ĐỊNH NGHĨA 4. Một *đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc V.

Cuối cùng trong mạng máy tính có thể có nhiều đường điện thoại sao cho có thể có nhiều đường một chiều từ mỗi địa phương tới máy chủ ở New York và có thể có nhiều đường từ máy chủ tới các máy ở xa. Đó là mạng trên hình 5. Đồ thị có hướng là không đủ để mô hình các mạng loại này, vì trong đồ thị có hướng không chứa các cạnh bội. Khi đó ta cần phải dùng **đa đồ thị có hướng**, trong đó có thể có nhiều các cạnh có hướng từ một đỉnh tới một đỉnh khác (có thể tới chính nó). Định nghĩa đa đồ thị có hướng như sau.

ĐỊNH NGHĨA 5. Một *đa đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E và một hàm f từ E tới $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$. Các cạnh e_1 và e_2 là các cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.



Hình 5.

Độc giả đã thấy rằng các cạnh bội có hướng nối cùng một cặp đỉnh. Tuy vậy ta sẽ nói rằng (u, v) là một cạnh của đồ thị $G = (V, E)$ khi nào có ít nhất một cạnh e sao cho $f(e) = (u, v)$. Ta sẽ không phân biệt cạnh e và cặp đỉnh có thứ tự (u, v) trừ khi đặc tính của các cạnh bội là quan trọng.

Các thuật ngữ dùng cho các loại đồ thị khác nhau cho thấy rõ các cạnh của đồ thị có kết hợp với các cặp đỉnh có thứ tự hay không thứ tự, các cạnh bội, các khuyên có được dùng hay không. Định nghĩa các loại đồ thị được tổng kết trong Bảng 1. Vì lý thuyết đồ thị có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau nên có nhiều thuật ngữ khác nhau được dùng đồng thời. Có lẽ các thuật ngữ này tới một ngày nào đó sẽ được chuẩn hóa.

BẢNG 1. Thuật ngữ đồ thị

Loại	Cạnh	Có cạnh bội không?	Có khuyên không?
Đơn đồ thị	Vô hướng	Không	Không
Đa đồ thị	Vô hướng	Có	Không
Giả đồ thị	Vô hướng	Có	Có
Đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Có
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có	Có

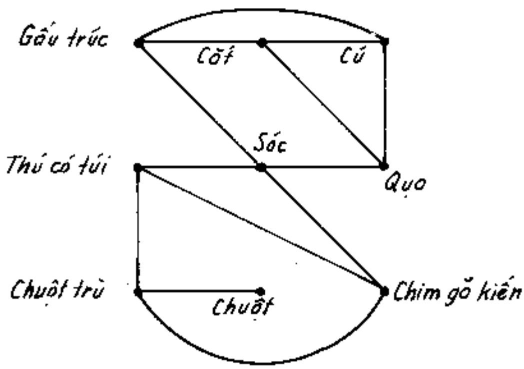
CÁC MÔ HÌNH ĐỒ THỊ

Trong tiết này chúng ta sẽ giới thiệu một số mô hình đồ thị từ các lĩnh vực ứng dụng khác nhau. Trong các tiết tiếp theo và trong các chương sau chúng ta sẽ nghiên cứu thêm các mô hình khác nhau.

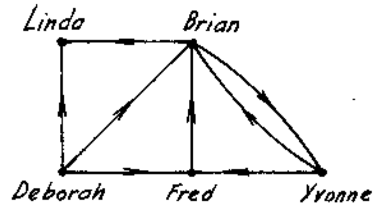
Ví dụ 1. *Đồ thị "lấn tổ" trong sinh thái học*. Đồ thị được dùng trong nhiều mô hình có tính đến sự tương tác của các loài vật. Chẳng hạn sự cạnh tranh của các loài trong một hệ sinh thái có thể mô hình hoá bằng **đồ thị "lấn tổ"**. Mỗi loài được biểu diễn bằng một đỉnh. Một cạnh vô hướng nối hai đỉnh nếu hai loài được biểu diễn bằng các đỉnh này là cạnh tranh với nhau (tức là, chúng cùng chung nguồn thức ăn). Đồ thị trên Hình 6 là mô hình của hệ sinh thái rừng. Từ đồ thị này chúng ta thấy sóc và gấu trúc là cạnh tranh với nhau còn quạ và chuột trù thì không.

■

Ví dụ 2. *Đồ thị ảnh hưởng*. Khi nghiên cứu tính cách của một nhóm người, ta thấy một số người có thể có ảnh hưởng lên suy nghĩ của những người khác. Đồ thị có hướng được gọi là **đồ thị ảnh hưởng** có thể dùng để mô hình bài toán này. Mỗi người của nhóm được biểu diễn bằng một đỉnh. Khi một người được biểu diễn bằng đỉnh a có ảnh hưởng lên người được biểu diễn bằng đỉnh b thì giữa đỉnh a và đỉnh b được nối bằng một cạnh có hướng. Trên Hình 7 biểu diễn đồ thị ảnh hưởng của các thành viên của một nhóm. Deborah có ảnh hưởng lên Brian, Fred và Linda nhưng không ai có thể ảnh hưởng lên cô ta. Còn Yvon và Brian có thể ảnh hưởng lẫn nhau.

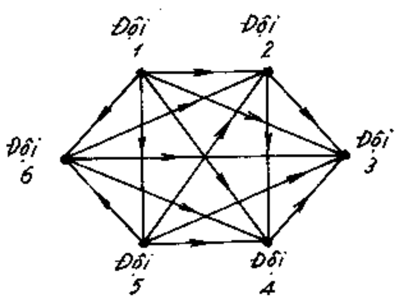


Hình 6. Đồ thị lấn đổ.

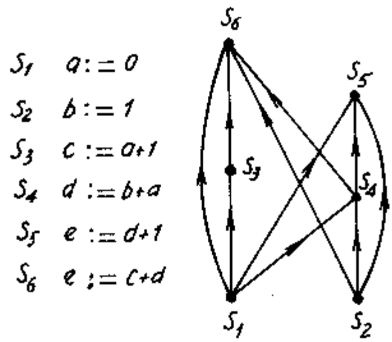


Hình 7. Đồ thị ảnh hưởng.

Ví dụ 3. *Thi đấu vòng tròn.* Một cuộc thi đấu thể thao trong đó mỗi đội đấu với mỗi đội khác đúng một lần gọi là **đấu vòng tròn**. Cuộc thi đấu như thế có thể được mô hình bằng một đồ thị có hướng trong đó mỗi đội là một đỉnh. Một cạnh đi từ đỉnh a đến đỉnh b, ký hiệu là (a, b), nếu đội a thắng đội b. Mô hình đồ thị có hướng như thế được biểu diễn trên Hình 8. Trong cuộc thi đấu này đội 1 không thua trận nào còn đội 3 không thắng trận nào.



Hình 8. Mô hình đồ thị đấu vòng tròn.



Hình 9. Đồ thị có ưu tiên trước sau.

Ví dụ 4. Các chương trình máy tính có thể thi hành nhanh hơn bằng cách thi hành đồng thời một số câu lệnh nào đó. Điều quan trọng là không được thực hiện một câu lệnh đòi hỏi kết quả của câu lệnh khác chưa được thực hiện. Sự phụ thuộc của các câu lệnh vào các câu lệnh trước có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng. Mỗi câu lệnh được biểu diễn bằng một đỉnh và có một cạnh từ một đỉnh tới một đỉnh khác nếu câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ hai không thể thực hiện được trước khi câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ nhất được thực hiện. Đồ thị này được gọi là **đồ thị có ưu tiên trước sau**. Một chương trình máy tính và đồ thị của nó được biểu diễn trên Hình 9. Chẳng hạn, câu lệnh S_5 không thể thực hiện trước khi các câu lệnh S_1, S_2 và S_4 được thực hiện.

■

BÀI TẬP

1. Vẽ các mô hình đồ thị biểu diễn các đường hàng không, và nói rõ loại của đồ thị được dùng, trong đó mỗi ngày có 4 chuyến bay từ Boston tới Newark, 2 chuyến bay từ Newark tới Boston, 3 chuyến bay từ Newark tới Miami, 2 chuyến bay từ Miami tới Newark, 1 chuyến bay từ Newark tới Detroit, 2 chuyến bay từ Detroit tới Newark, 3 chuyến bay từ Newark tới Washington, 2 chuyến bay từ Washington tới Newark và 1 chuyến bay từ Washington tới Miami. với :

   a) một cạnh giữa các đỉnh biểu diễn các thành phố có chuyến bay theo hướng nào đó.

   b) một cạnh giữa các đỉnh biểu diễn các thành phố cho mỗi chuyến bay theo hướng nào đó.

   c) một cạnh giữa các đỉnh biểu diễn các thành phố cho mỗi chuyến bay theo cả hai chiều, thêm vào đó có một khuyên biểu thị chuyến du lịch đặc biệt ngắm cảnh thành phố, cất cánh và hạ cánh tại Miami.

   d) một cạnh từ một đỉnh biểu thị thành phố có chuyến bay tới một đỉnh khác biểu thị thành phố ở đó chuyến bay kết thúc.

   e) một cạnh cho mỗi chuyến bay từ một đỉnh biểu thị thành phố nơi chuyến bay bắt đầu tới một đỉnh khác biểu thị thành phố ở đó chuyến bay kết thúc.

2. Loại đồ thị nào được dùng để mô hình hệ thống đường cao tốc giữa các thành phố lớn, trong đó

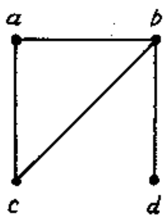
   a) có một cạnh giữa các đỉnh biểu thị các thành phố nếu giữa chúng có đường cao tốc?

b) có một cạnh giữa các đỉnh biểu thị các thành phố cho mỗi đường cao tốc giữa chúng?

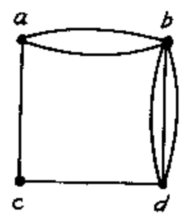
c) có một cạnh giữa các đỉnh biểu thị các thành phố cho mỗi đường cao tốc giữa chúng và có một khuyên tại đỉnh biểu thị thành phố nếu có đường cao tốc bao quanh thành phố này?

Trong các Bài tập 3 – 9 hãy xác định xem đồ thị nào là đơn đồ thị, đa đồ thị (và không là đơn đồ thị), giả đồ thị (không là đa đồ thị), đồ thị có hướng hoặc đa đồ thị có hướng (không là đồ thị có hướng).

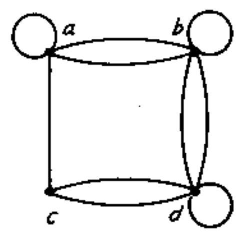
3.



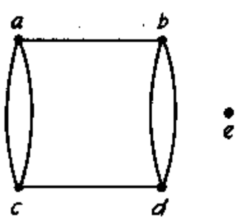
4.



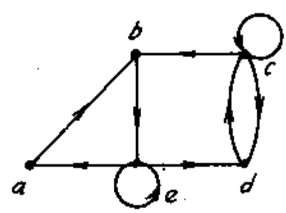
5.



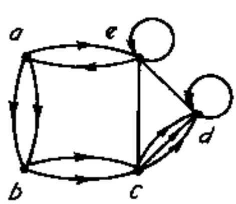
6.



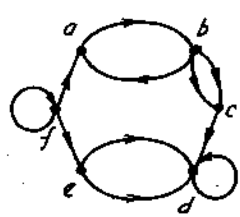
7.



8.



9.



10. Với mỗi đồ thị vô hướng trong các Bài tập 3-9, mà không là đơn đồ thị, hãy tìm tập các cạnh mà nếu bỏ chúng đi sẽ nhận được đồ thị đơn.

11. *Đồ thị giao* của các tập A_1, A_2, ... A_n là một đồ thị có một đỉnh biểu diễn mỗi tập và có cạnh nối các đỉnh biểu diễn các tập nếu các tập này có phần giao khác trống. Hãy xây dựng đồ thị giao của các tập hợp sau :

a) $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
$A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$.

b) $A_1 = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0\}$,
$A_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
$A_3 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$,
$A_4 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$,
$A_5 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$.

c) $A_1 = \{x \mid x < 0\}$, $A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$,
$A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$,
$A_5 = \{x \mid x > -1\}$. $A_6 = \mathbf{R}$.

12. Dùng đồ thị trên Hình 6 hãy xác định những loài cạnh tranh với diều hâu.

13. Hãy xây dựng đồ thị lấn tổ cho 6 loài chim trong đó chim hét cạnh tranh với chim cổ đỏ và chim giẻ cùi xanh, chim cổ đỏ cũng cạnh tranh với chim nhại, chim nhại cạnh tranh với chim giẻ cùi, và chim bổ hạt cạnh tranh với chim gõ kiến .

14. Ai có thể có ảnh hưởng lên Fred và Fred có thể ảnh hưởng lên ai trong đồ thị ảnh hưởng của Ví dụ 2?

15. Xây dựng đồ thị ảnh hưởng cho các thành viên lãnh đạo của một công ty nếu Chủ tịch có ảnh hưởng lên Giám đốc nghiên cứu và phát triển, Giám đốc maketting và Giám đốc điều hành ; Giám đốc nghiên cứu và phát triển có ảnh hưởng lên Giám đốc điều hành. Giám đốc maketting có thể ảnh hưởng lên Giám đốc điều hành; không ai có thể có ảnh hưởng lên Trưởng phòng tài chính và Trưởng phòng tài chính không có ảnh hưởng lên bất cứ ai.

16. Đội 4 đã thắng những đội nào và những đội nào đã thắng Đội 4 trong cuộc đấu vòng tròn biểu diễn trên Hình 8?

17. Trong trận đấu vòng tròn đội Hổ thắng các đội Giẻ cùi xanh, Chim giáo chủ, và Chim vàng anh ; đội Giẻ cùi xanh thắng đội Chim vàng anh và đội Chim giáo chủ. Đội chim giáo chủ thắng đội Chim vàng anh. Hãy mô hình hóa kết quả trận đấu bằng một đồ thị có hướng.

18. Câu lệnh nào cần phải thực hiện trước khi thực hiện S_6 trong chương trình cho trong Ví dụ 4? (Dùng Hình 9).

19. Hãy xây dựng đồ thị *có ưu tiên trước sau* cho chương trình sau :

$S_1 : x := 0$ $\quad$ $S_2 : x := x + 1$

$S_3 : y := 2$ $\quad$ $S_4 : z := y$

$S_5 : x := x + 2$ $\quad$ $S_6 : y := x + z$

$S_7 : z := 4.$

20. Hãy mô tả đồ thị dùng để mô hình các đường hàng không và thời gian chuyến bay của chúng. *(Gợi ý :* thêm cấu trúc vào đồ thị có hướng)

21. Hãy mô tả đồ thị dùng để mô hình quan hệ giữa các người trong một nhóm, ở đó mỗi người có thể hoặc là thích, không thích hoặc là trung lập với người khác, và quan hệ ngược có thể là khác. (*Gợi ý:* thêm cấu trúc vào đồ thị định hướng. Xem xét riêng rẽ các cạnh có chiều ngược nhau giữa các đỉnh biểu diễn hai người).

7.2. CÁC THUẬT NGỮ VỀ ĐỒ THỊ

MỞ ĐẦU

Trong mục này chúng ta sẽ đưa vào một vài thuật ngữ cơ sở của lý thuyết đồ thị, được sử dụng khi giải nhiều loại bài toán khác nhau. Một trong các bài toán như thế là bài toán xác định xem có thể vẽ đồ thị lên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau hay không. Một ví dụ khác là xác định xem có tồn tại phép tương ứng một-một giữa các đỉnh của hai đồ thị tạo ra phép tương ứng một-một giữa các cạnh của các đồ thị đó hay không. Chúng ta cũng sẽ đưa ra một vài lớp quan trọng nhất của đồ thị thường được dùng như các ví dụ và trong các mô hình.

NHỮNG THUẬT NGỮ CƠ SỞ

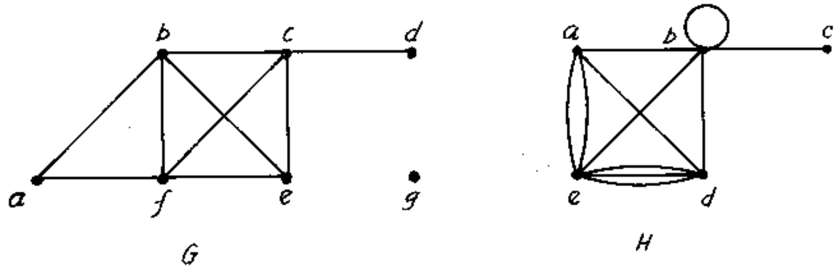
Đầu tiên chúng ta định nghĩa một vài thuật ngữ mô tả các đỉnh và cạnh của đồ thị vô hướng.

ĐỊNH NGHĨA 1. Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là *liền kề* (hay láng giềng) nếu $\{u, v\}$ là một cạnh của G. Nếu $e = \{u, v\}$ thì e gọi là *cạnh liên thuộc* với các đỉnh u và v. Cạnh e cũng được gọi là *cạnh nối* các đỉnh u và v. Các đỉnh u và v gọi là các *điểm đầu mút* của cạnh $\{u, v\}$.

Để ghi nhận số các cạnh liên thuộc với một đỉnh ta có định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA 2. *Bậc* của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Người ta ký hiệu bậc của đỉnh v là $deg(v)$.

Ví dụ 1. Bậc của các đỉnh trong các đồ thị G và H trên Hình 1 là bao nhiêu?



Hình 1. Đồ thị vô hướng G và H.

Giải: Trong G, $deg(a) = 2$, $deg(b) = deg(c) = deg(f) = 4$, $deg(d) = 1$, $deg(e) = 3$ và $deg(g) = 0$. Trong H, $deg(a) = 4$, $deg(b) = deg(e) = 6$, $deg(c) = 1$, và $deg(d) = 5$.

■

Đỉnh bậc 0 được gọi là **đỉnh cô lập**. Từ đó suy ra đỉnh cô lập không nối với bất kỳ đỉnh nào. Đỉnh g trên đồ thị G trong Ví dụ 1 là cô lập. Một đỉnh gọi là **treo** (móc) nếu và chỉ nếu có bậc bằng 1. Do vậy đỉnh treo liền kề (nối) với đúng một đỉnh khác, Đỉnh d trên đồ thị G trong Ví dụ 1 là một đỉnh treo.

Chúng ta sẽ nhận được gì nếu ta cộng bậc của tất cả các đỉnh lại với nhau? Mỗi một cạnh đóng góp 2 đơn vị vào tổng các bậc của tất cả các đỉnh vì một cạnh nối với đúng hai đỉnh. Điều này có nghĩa là tổng các bậc của tất cả các đỉnh gấp đôi số các cạnh của đồ thị. Ta có kết quả sau đây thường gọi là *Định lý bắt tay*, vì một cạnh có hai đầu mút giống như một cái bắt tay có hai bàn tay.

ĐỊNH LÝ 1. *Định lý Bắt tay.* Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó $2\ e = \sum_{v\in V} deg(v)$.

(Định lý này đúng cả khi đồ thị có cạnh bội hoặc các khuyên).

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 6?

Giải: Vì tổng các bậc của đồ thị là 10.6 = 60, nên $2\ e = 60$. Do vậy, $e = 30$.

■

Định lý 1 chỉ ra rằng tổng các bậc của tất cả các đỉnh của một đồ thị vô hướng là một số chẵn. Sự kiện đơn giản này có rất nhiều hệ quả hay, một trong số đó là Định lý 2.

ĐỊNH LÝ 2. Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

Chứng minh.: Giả sử V_1 và V_2 tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. Khi đó

$$2e = \sum_{v\in V} deg(v). = \sum_{v\in V_1} deg(v). + \sum_{v\in V_2} deg(v).$$

Vì $deg\ (v)$ là chẵn với mọi $v \in V_1$, nên tổng đầu tiên trong vế phải là một số chẵn. Do vế trái (bằng $2e$) là số chẵn nên tổng còn lại trong vế phải cũng phải là số chẵn. Vì tất cả các số hạng của tổng này là các số lẻ, nên suy ra số các số hạng này là chẵn. Hay số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

■

Có một số thuật ngữ rất hay dùng đối với đồ thị có hướng.

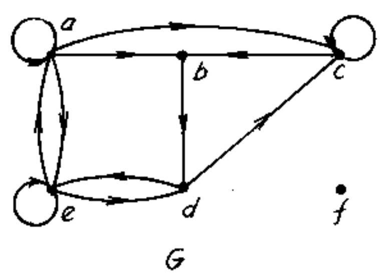
ĐỊNH NGHĨA 3. Khi (u, v) là cạnh của đồ thị có hướng G, thì u được gọi là *nối tới* v, và v được gọi là *được nối từ* u. Đỉnh u gọi là *đỉnh đầu*, đỉnh v gọi là *đỉnh cuối* của cạnh (u, v). Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên là trùng nhau.

Vì các cạnh của đồ thị có hướng là các cặp có thứ tự, nên định nghĩa bậc của đỉnh cần phải tinh hơn để phản ánh được số các cạnh nhận đỉnh này là đỉnh đầu (ra khỏi đỉnh này) và số các cạnh nhận đỉnh này là đỉnh cuối (đi vào đỉnh này).

ĐỊNH NGHĨA 4. Trong đồ thị có hướng **bậc – vào** của đỉnh v ký hiệu là $deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là v. **Bậc – ra** của đỉnh v, ký hiệu là $deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v. (Chú ý, một khuyên tại một đỉnh sẽ góp thêm 1 đơn vị vào bậc – vào và 1 đơn vị vào bậc – ra của đỉnh này).

Ví dụ 3. Tìm bậc – vào và bậc – ra của mỗi đỉnh trong đồ thị có hướng G trên Hình 2.

Giải: Các bậc-vào là $deg^-(a) = 2$, $deg^-(b) = 2$, $deg^-(c) = 3$, $deg^-(d) = 2$, $deg^-(e) = 3$ và $deg^-(f) = 0$. Các bậc – ra là $deg^+(a) = 4$, $deg^+(b) = 1$, $deg^+(c) = 2$, $deg^+(d) = 2$, $deg^+(e) = 3$ và $deg^+(f) = 0$. ■



Hình 2. Đồ thị có hướng G.

Vì mỗi cạnh (hay còn gọi là cung) có một đỉnh đầu và một đỉnh cuối nên tổng các bậc – vào và tổng các bậc – ra của tất cả các đỉnh trong một đồ thị có hướng là như nhau và bằng số cạnh của nó. Đó chính là nội dung của Định lý sau.

ĐỊNH LÝ 3. Gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Khi đó

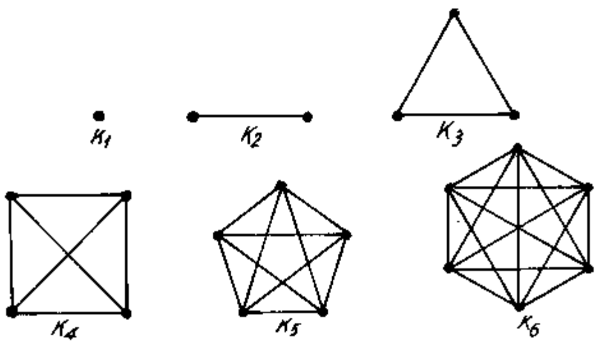
$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|.$$

Một số tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng của các cạnh của nó. Do đó, sẽ có lợi hơn khi ta lờ đi các hướng này. Đồ thị vô hướng nhận được bằng cách này được gọi là **đồ thị vô hướng nền**. Đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng nền của nó có cùng số cạnh.

NHỮNG ĐỒ THỊ ĐƠN ĐẶC BIỆT

Bây giờ chúng ta sẽ xét một vài lớp đồ thị đơn thường gặp trong các ứng dụng.

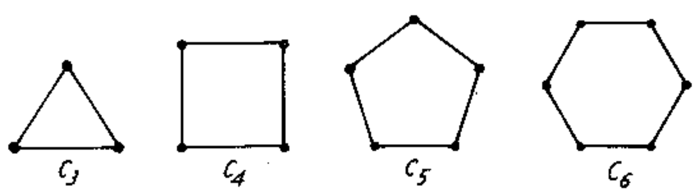
Ví dụ 4. *Đồ thị đầy đủ.* Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt. Các đồ thị K_n, với $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ được biểu diễn trên Hình 3.



***Hình** 3.* Các đồ thị K_n, $1 \leqslant n \leqslant 6$.

■

Ví dụ 5. *Chu trình (vòng).* Chu trình C_n, $n \geqslant 3$ là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$ và $\{v_n, v_1\}$. Các chu trình C_3, C_4, C_5, và C_6 biểu diễn trên Hình 4.



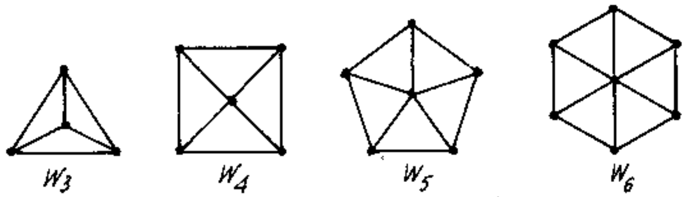
***Hình** 4.* Các chu trình C_3, C_4, C_5 và C_6.

■

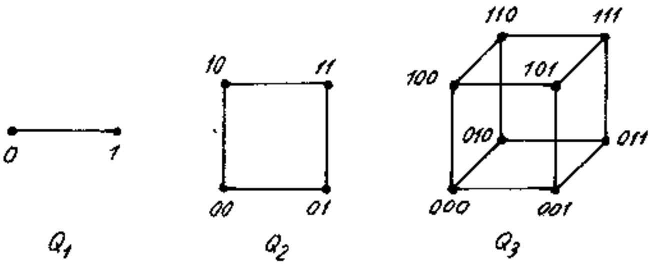
Ví dụ 6. *Đồ thị hình bánh xe.* Khi thêm một đỉnh vào chu trình C_n với $n \geqslant 3$ và nối đỉnh này với mỗi một trong n đỉnh của C_n bằng những cạnh mới, ta sẽ nhận được đồ thị hình bánh xe. Các bánh xe W_3, W_4, và W_6 biểu diễn trên Hình 5.

■

Ví dụ 7. *Các khối n chiều.* Các khối n chiều, ký hiệu là Q_n, là các đồ thị có 2^n đỉnh mỗi đỉnh được biểu diễn bằng xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit. Các đồ thị Q_1, Q_2 và Q_3 được biểu diễn trên Hình 6.



***Hình** 5*. Các bánh xe W_3, W_4, W_5, và W_6.



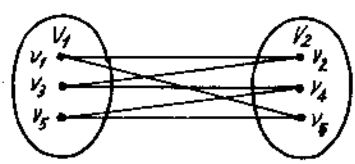
***Hình** 6*. Các khối n chiều Q_n với $n = 1$, 2 và 3.

ĐỒ THỊ PHÂN ĐÔI

Đôi khi các đỉnh của đồ thị có thể chia làm hai tập con sao cho mỗi cạnh nối một đỉnh của tập con này với một đỉnh của tập con kia. Ví dụ, đồ thị biểu diễn quan hệ hôn nhân của một làng, trong đó mỗi người được biểu diễn bằng một đỉnh còn cạnh biểu thị quan hệ vợ chồng giữa hai người. Tập các đỉnh có thể chia thành hai tập con, một tập gồm đàn ông và một tập gồm toàn đàn bà.

ĐỊNH NGHĨA 5. Một đồ thị đơn G được gọi là đồ thị **phân đôi** nếu tập các đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.

Trong Ví dụ 8 ta sẽ chỉ ra C_6 là phân đôi, và trong Ví dụ 9 thì K_3 là không phân đôi.



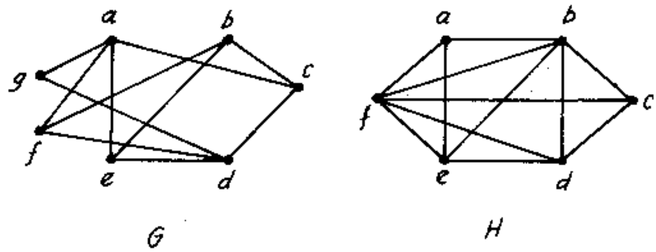
***Hình** 7*. Minh họa C_6 là đồ thị phân đôi.

Ví dụ 8. C_6 là phân đôi như chỉ ra trên Hình 7, vì các đỉnh của nó có thể chia làm hai tập con $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ và $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ và mỗi cạnh của C_6 nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.

Ví dụ 9. K_3 là không phân đôi. Thật vậy, nếu ta chia các đỉnh của nó thành hai phần rời nhau thì một trong hai phần này phải chứa 2 đỉnh. nếu đồ thị là phân đôi thì các đỉnh này không thể nối với nhau bằng một cạnh, nhưng trong K_3, mỗi đỉnh được nối với một đỉnh bất kỳ khác bằng một cạnh.

■

Ví dụ 10. Các đồ thị G, H trên Hình 8 có là đồ thị phân đôi không?



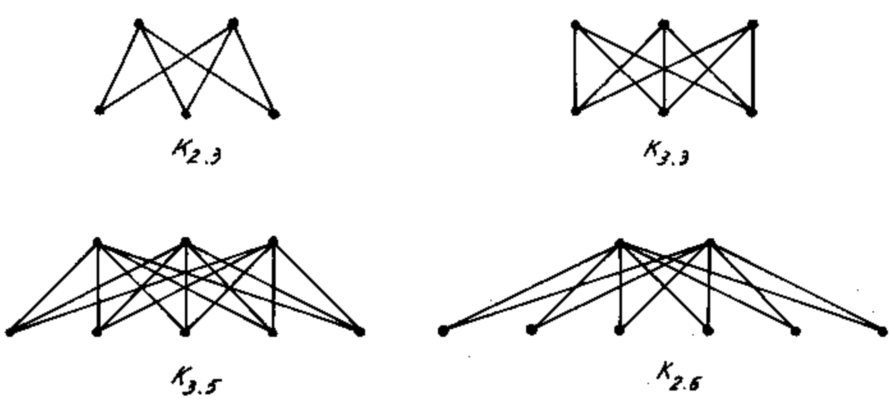
Hình 8. Các đồ thị vô hướng G và H.

Giải: Đồ thị G là phân đôi, vì các đỉnh của nó là hợp của hai tập rời nhau $\{a, b, c\}$ và $\{c, e, f, g\}$ và mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của tập con này với một đỉnh của tập con kia. (Chú ý rằng để G là đồ thị phân đôi thì không nhất thiết mỗi đỉnh của$\{a, b, c\}$ phải được nối với mọi đỉnh của $\{c, e, f, g\}$, chẳng hạn b và g là không kề nhau).

Đồ thị H là không phân đôi vì không thể chia tập các đỉnh của nó thành hai tập con sao cho các cạnh không nối hai đỉnh của cùng một tập con. (Độc giả tự kiểm tra lại điều này với các đỉnh a, b, f).

■

Ví dụ 11. Đồ thị phân đôi đầy đủ. *Đồ thị phân đôi đầy đủ* $K_{m,n}$ là đồ thị có tập đỉnh được phân thành hai tập con tương ứng có m đỉnh và n



Hình 9. Một số đồ thị phân đôi đầy đủ.

đỉnh và có một cạnh giữa hai đỉnh nếu và chỉ nếu một đỉnh thuộc tập con này và đỉnh thứ hai thuộc tập con kia. Các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,5}$, và $K_{2,6}$ được biểu diễn trên Hình 9.

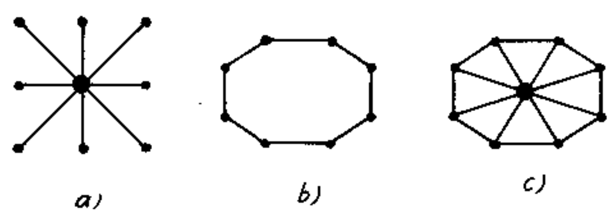
■

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra cách dùng các loại đồ thị đặc biệt trong các mô hình truyền dữ liệu và xử lý song song.

Ví dụ 12. *Các mạng cục bộ (LAN).* Các máy tính đặt trong một tòa nhà, như các máy tính loại vừa và các máy tính cá nhân cùng với các thiết bị ngoại vi như máy in, máy vẽ được nối với nhau bằng một mạng cục bộ. Một số mạng cục bộ dùng *cấu trúc hình sao*, trong đó tất cả các thiết bị được nối với thiết bị điều khiển trung tâm. Mạng cục bộ có thể biểu diễn bằng một đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{1,n}$ như trên Hình 10(a). Các thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác đều phải qua thiết bị điều khiển trung tâm.

Mạng cục bộ cũng có thể có *cấu trúc vòng tròn*, trong đó mỗi thiết bị nối với đúng hai thiết bị khác. Mạng cục bộ với cấu trúc vòng tròn được mô hình bằng các chu trình C_n như trên Hình 10(b). Thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác được truyền đi theo vòng tròn cho tới khi đến nơi nhận.



Hình 10. Các cấu trúc hình sao, vòng tròn và hỗn hợp của mạng cục bộ.

Cuối cùng, một số mạng cục bộ dùng cấu *trúc hỗn hợp* (cấu trúc lai) của hai cấu trúc trên. Các thông báo được truyền vòng quanh theo vòng tròn hoặc có thể qua thiết bị trung tâm. Sự dư thừa này có thể làm cho mạng đáng tin cậy hơn. Mạng cục bộ với sự dư thừa này có thể mô hình hóa bằng đồ thị hình bánh xe W_n như chỉ ra trên Hình 10.

■

Ví dụ 13. Cho tới gần đây, các máy tính mới thực hiện được các chương trình có một phép toán tại một thời điểm. Do đó các thuật toán để giải các bài toán được thiết kế để thực hiện một bước tại mỗi thời điểm. Đó là các thuật toán **nối tiếp**. (Phần lớn các thuật toán mô tả trong cuốn sách này là thuật toán nối tiếp). Tuy nhiên, nhiều bài toán với số lượng tính toán rất lớn như bài toán mô phỏng thời tiết, tạo hình trong y học, hay phân tích mật mã không thể giải được trong một khoảng thời gian hợp lý nếu dùng thuật toán nối tiếp ngay cả khi dùng các siêu máy tính. Ngoài ra, do những giới hạn về mặt vật lý đối với tốc độ thực hiện các phép toán cơ sở, nên thường gặp các bài toán không thể giải trong khoảng thời gian hợp lý bằng các thao tác nối tiếp.

Khi **xử lý song song**, người ta dùng các máy tính có nhiều bộ xử lý riêng biệt, mỗi bộ xử lý có bộ nhớ riêng, nhờ đó có thể khắc phục được những hạn chế của các máy nối tiếp. Các **thuật toán song song** phân chia bài toán chính thành một số bài toán con sao cho có thể giải đồng thời được. Do vậy, bằng các thuật toán song song và nhờ việc sử dụng các máy tính có bộ đa xử lý người ta hy vọng có thể giải nhanh các bài toán phức tạp. Trong thuật toán song song có một dãy các chỉ thị theo dõi việc thực hiện thuật toán, gửi các bài toán con tới các bộ xử lý khác nhau, chuyển các thông tin vào, thông tin ra tới các bộ xử lý thích hợp.

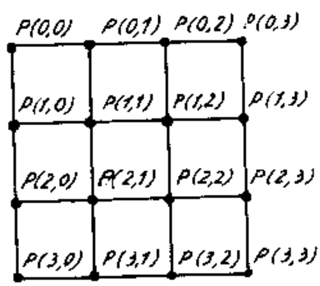
Khi dùng cách xử lý song song, mỗi bộ xử lý có thể cần các thông tin ra của các bộ xử lý khác. Do đó chúng cần phải được kết nối với nhau. Người ta có thể dùng loại đồ thị thích hợp để biểu diễn mạng kết nối các bộ xử lý trong một máy tính có nhiều bộ xử lý. Bây giờ chúng ta sẽ mô tả các kiểu mạng kết nối thường dùng nhất cho các máy xử lý song song. Kiểu mạng kết nối thường dùng để thực hiện một thuật toán song song cụ thể phụ thuộc vào những yêu cầu đối với việc trao đổi dữ liệu giữa các bộ xử lý, phụ thuộc vào tốc độ mong muốn, và tất nhiên vào phần cứng hiện có.

Mạng kết nối các bộ xử lý đơn giản nhất và cũng đắt nhất có các liên kết hai chiều giữa mỗi cặp bộ xử lý. Các mạng này có thể mô hình bằng K_n, đồ thị đầy đủ n đỉnh, trong đó n là số bộ xử lý. Tuy nhiên, với các mạng liên kết này cũng có những vấn đề hết sức nghiêm túc đặt ra, chẳng hạn, số kết nối quá nhiều. Thực ra, số các kết nối cần phải có giới hạn. Khi có nhiều bộ xử lý thì mỗi bộ không thể nối trực tiếp với tất cả các bộ xử lý khác. Ví dụ, nếu ta có 64 bộ xử lý thì có $C(64,2) = 2016$ kết nối, mỗi bộ xử lý nối trực tiếp với 63 bộ xử lý khác.

Mặt khác, hình như cách đơn giản nhất để kết nối n bộ xử lý với nhau là sắp xếp chúng như một **bảng một chiều** hay **mảng một chiều**. Mỗi bộ xử lý P_i, khác P_1 và P_n, được nối với các bộ xử lý cạnh nó P_{i-1} và P_{i+1} bằng các đường hai chiều. P_1 được nối với P_2 và P_n nối với P_{n-1}. Mảng một chiều có 6 bộ xử lý được biểu diễn trên Hình 11. Ưu điểm của mảng một chiều là mỗi bộ xử lý có nhiều nhất 2 đường nối trực tiếp với các bộ xử khác. Nhược điểm là nhiều khi cần có rất nhiều các **kết nối trung gian** để các bộ xử lý trao đổi thông tin với nhau.

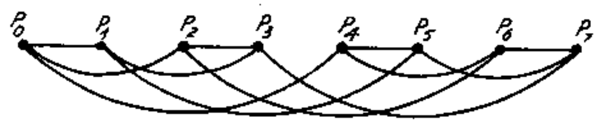
Hình 11. Mảng một chiều đối với sáu bộ xử lý.

Mạng kiểu lưới (hoặc **mảng hai chiều**) rất hay được dùng cho các mạng liên kết. Trong một mạng như thế, số các bộ xử lý là một số chính phương, $n = m^2$. Các bộ xử lý được gán nhãn $P(i, j)$, $0 \leq i \leq m - 1$, $0 \leq j \leq m - 1$. Các kết nối 2 chiều sẽ nối bộ xử lý $P(i, j)$ với 4 bộ xử lý bên cạnh, tức là với $P(ij \pm 1)$ và $P(i \pm 1, j)$ chừng nào mà các bộ xử lý còn ở trong lưới. (Chú ý, các bộ xử lý ở các góc chỉ có 2 bộ xử lý liền cạnh, còn các bộ xử lý ở trên biên chỉ nối với 3 bộ xử lý. Đôi khi người ta còn dùng các lưới mà mỗi bộ xử lý đều nối với đúng 4 bộ xử lý khác. (Xem Bài tập 44 ở cuối tiết này). Mạng kiểu lưới cũng hạn chế số liên kết cho mỗi bộ xử lý. Sự truyền thông giữa một số cặp bộ xử lý đòi hỏi $O(\sqrt{n}) = O(m)$ các kết nối trung gian. (Xem Bài tập 45 ở cuối mục này). Một đồ thị cho mạng kiểu lưới gồm 16 bộ xử lý được biểu diễn trên Hình 12.



Hình 12. Mạng kiểu lưới có 16 bộ xử lý.

Có lẽ mạng kết nối quan trọng nhất là mạng kiểu siêu khối. Với các mạng loại này số các bộ xử lý là lũy thừa của 2, $n = 2^m$. Các bộ xử lý được gán nhãn là P_0, P_1, ..., P_{n-1}. Mỗi bộ xử lý có liên kết 2 chiều với m bộ xử lý khác. Bộ xử lý P_i nối với bộ xử lý có chỉ số biểu diễn bằng dãy nhị phân khác với dãy nhị phân biểu diễn i tại đúng một bit. Mạng kiểu siêu khối cân bằng số các kết nối trực tiếp của mỗi bộ xử lý và số các kết nối gián tiếp sao cho các bộ xử lý có thể truyền thông được. Nhiều máy tính đã chế tạo theo mạng kiểu siêu khối và nhiều thuật toán đã được thiết kế để sử dụng mạng kiểu siêu khối. Đồ thị Q_n - khối n chiều, biểu diễn mạng kiểu siêu khối có n bộ xử lý. Hình 13 biểu diễn mạng siêu khối có 8 bộ xử lý. (Hình 13 thể hiện một cách vẽ Q_3 khác so với Hình 6). ■



Hình 13. Mạng siêu khối có 8 bộ xử lý.

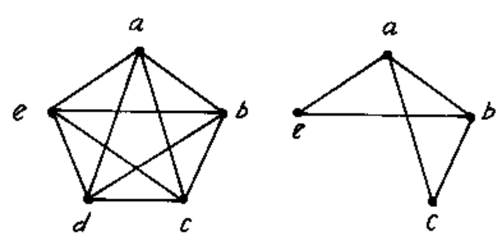
CÁC ĐỒ THỊ MỚI TỪ ĐỒ THỊ CŨ

Đôi khi để giải quyết một bài toán chúng ta chỉ cần một phần của đồ thị. Ví dụ, chúng ta có thể chỉ quan tâm tới một phần của mạng máy tính lớn, phần này chỉ bao gồm bốn trung tâm máy tính tại New York, Denver, Detroit và Atlanta. Khi đó ta có thể lờ đi các trung tâm, các đường điện thoại không kết nối 2 trong 4 trung tâm kể trên. Trong mô hình đồ thị của mạng rộng, ta có thể loại bỏ các đỉnh ứng với các trung tâm không thuộc 4 trung tâm mà chúng ta quan tâm, và cũng loại bỏ tất cả các cạnh liên kết với các đỉnh bị xóa. Khi đó ta nhận được một đồ thị bé hơn. Đồ thị như vậy được gọi là **đồ thị con** của đồ thị ban đầu.

ĐỊNH NGHĨA 6. *Đồ thị con* của đồ thị $G = (V,H)$ là đồ thị $H = (W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.

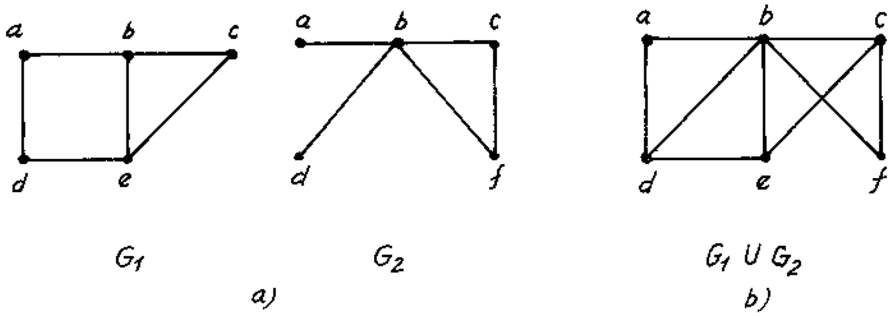
Ví dụ 14. Đồ thị G trên Hình 14 đồ thị con của đồ thị K_5.

Hai hay nhiều đồ thị có thể kết hợp theo các cách khác nhau. Một đồ thị mới gồm tất cả các đỉnh và cạnh của các đồ thị này được gọi là **đồ thị hợp** của các đồ thị đã cho. Ta có định nghĩa tổng quát sau.



Hình 14. Đồ thị con của K_5.

ĐỊNH NGHĨA 7. *Hợp* của hai đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị đơn có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$. Ta ký hiệu hợp của các đồ thị G_1 và G_2 là $G_1 \cup G_2$.



Hình 15. (a) Các đồ thị đơn G_1 và G_2 và b) Hợp của chúng $G_1 \cup G_2$

Ví dụ 15. Tìm đồ thị hợp của các đồ thị trên Hình 15 (a).

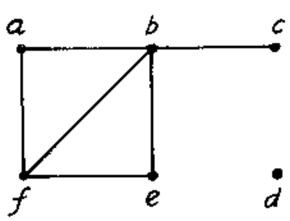
Giải: Tập các đỉnh của hợp $G_1 \cup G_2$ là hợp hai tập đỉnh, tức là $\{a, b, c, d, e, f\}$. Tập các cạnh là hợp hai tập cạnh. Đồ thị hợp được thể hiện trên Hình 15 (b).

■

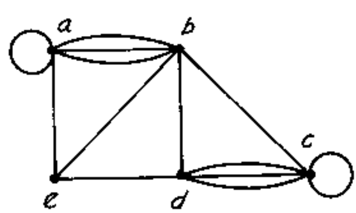
BÀI TẬP

Trong các Bài tập 1 – 3 hãy tìm số đỉnh, số cạnh, và số bậc của mỗi đỉnh trong các đồ thị vô hướng đã cho. Hãy xác định tất cả các đỉnh cô lập và các đỉnh treo.

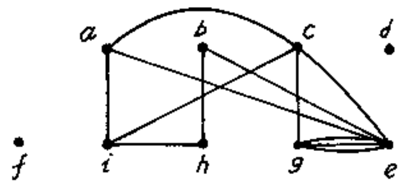
1.



2.



3.



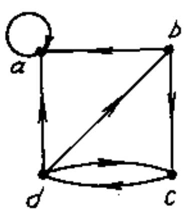
4. Tìm tổng bậc của các đỉnh trên các đồ thị trong các Bài tập 1 – 3. Hãy kiểm tra xem nó có bằng hai lần số cạnh không?

5. Có thể tồn tại đồ thị đơn có 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 không?

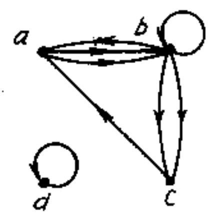
6. Trong một cuộc liên hoan mọi người bắt tay nhau. Hãy chỉ ra rằng tổng số lượt người được bắt tay là một số chẵn, giả sử rằng không ai tự bắt tay mình.

Trong các Bài tập 7 – 9 hãy xác định số đỉnh, số cạnh, số bậc vào và số bậc ra của mỗi đỉnh đối với các đa đồ thị có hướng.

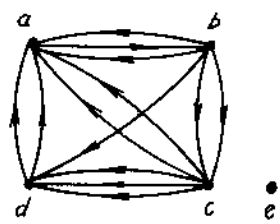
7.



8.



9.



$deg^-(a) = 3$; $deg^+(a) = 1$. $deg^-(b) = 3$
$deg^-(b) = 1$; $deg^+(b) = 2$ $deg^+(b) = 4$.
$deg^-(c) = 2$; $deg^+(c) = 1$ $deg^-(d) = 1$

10. Với mỗi đồ thị trong các Bài tập 7 – 9 hãy tính trực tiếp tổng các bậc vào và bậc ra của các đỉnh. Chỉ ra rằng chúng bằng tổng các cạnh của đồ thị.

11. Xây dựng các đồ thị vô hướng nền cho các đồ thị có hướng trên Hình 2.

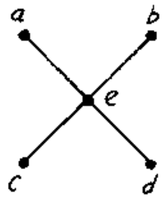
12. Hãy vẽ các đồ thị sau đây :

a) K_7 b) $K_{1,8}$ c) $K_{4,4}$

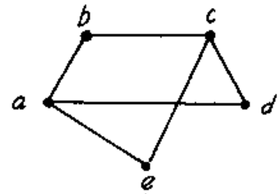
d) C_7 e) W_7 f) Q_4.

Trong các Bài tập 13–17 các đồ thị đã cho có là phân đôi không.

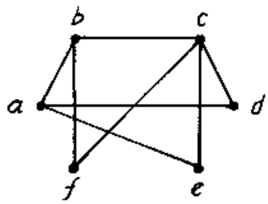
13.



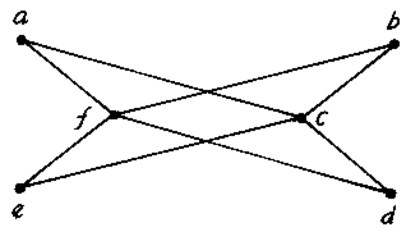
14.



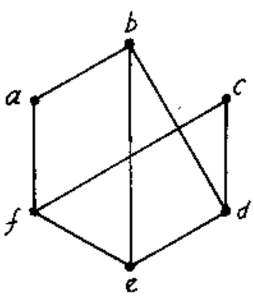
15.



16.



17.



18. Với các giá trị nào của n các đồ thị sau là đồ thị phân đôi?

a) K_n b) C_n
c) W_n d) Q_n.

19. Các đồ thị sau đây có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

a) K_n b) C_n
c) W_n d) $K_{m,n}$ e) Q_n.

20. Cho biết các đỉnh của đồ thị có bậc là 4, 3, 3, 2, 2. Tính số cạnh của đồ thị và vẽ đồ thị này.

21. Có tồn tại đồ thị đơn có 5 đỉnh với số bậc sau đây không? Nếu có hãy vẽ đồ thị đó.

a) 3, 3, 3, 3, 2 b) 1, 2, 3, 4, 5

c) 1, 2, 3, 4, 4 d) 3, 4, 3, 4, 3

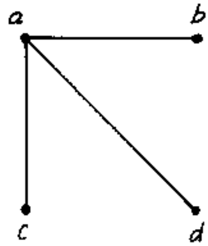
e) 0, 1, 2, 2, 3 f) 1, 1, 1, 1, 1.

22. Đồ thị K_2 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

23. Đồ thị K_3 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

24. Đồ thị W_3 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

25. Hãy vẽ tất cả đồ thị con của đồ thị bên.



26. Gọi G là đồ thị có v đỉnh và e cạnh, còn M, m tương ứng là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của các đỉnh của G. Chỉ ra rằng

a) $\dfrac{2e}{v} \geqslant m$, b) $\dfrac{2e}{v} \leqslant M$.

Đồ thị đơn được gọi là **chính qui** *nếu mọi đỉnh của nó có bậc như nhau. Đồ thị được gọi là n –* **chính qui** *nếu mọi đỉnh của nó có bậc n.*

27. Với các giá trị nào của n đồ thị sau đây là chính qui?

a) K_n b) C_n

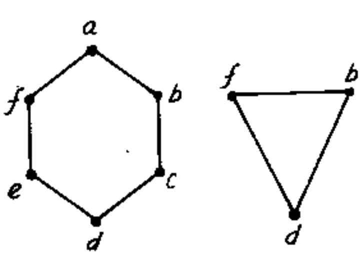
c) W_n d) Q_n.

28. Với các giá trị nào của m và n đồ thị $K_{m,n}$ là chính qui?

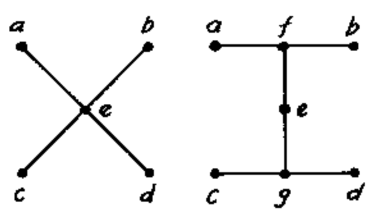
29. Tính số đỉnh của một đồ thị chính qui bậc 4 và có 10 cạnh.

Trong các Bài tập 30–32 hãy tìm hợp của cặp hai đồ thị đơn (giả sử các cạnh có các đầu mút trùng nhau là như nhau).

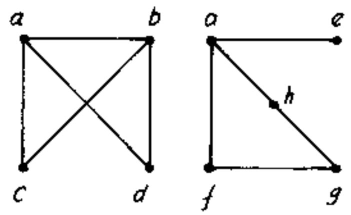
30.



31.



32.



33. **Đồ thị bù** $\overline{G}$ của đồ thị đơn G có cùng số đỉnh như G. Hai đỉnh là liền kề trong $\overline{G}$ nếu và chỉ nếu nó không là liền kề trong G. Hãy tìm

a) $\overline{K}_n$ b) $\overline{K}_{m,n}$

c) $\overline{C}_n$ d) $\overline{Q}_n$

34. Nếu đồ thị đơn G có 15 cạnh và $\overline{G}$ có 13 cạnh khi đó G có bao nhiêu đỉnh?

35. Nếu đồ thị đơn G có v đỉnh và e cạnh khi đó $\overline{G}$ có bao nhiêu cạnh ?

36*. Chứng minh rằng nếu G là đồ thị đơn phân đôi có v đỉnh và e cạnh, khi đó $e \leqslant v^2/4$.

37. Chứng minh rằng nếu G là đồ thị đơn có n đỉnh, khi đó hợp của G và $\overline{G}$ là K_n.

38*. Mô tả thuật toán dùng để xác định một đồ thị đơn có là phân đôi hay không.

Nghịch đảo *của đồ thị có hướng* $G = (V, E)$, *được ký hiệu là* G^c, *là đồ thị có hướng* (V, F) *trong đó* $(u, v) \in F$ *nếu và chỉ nếu* $(v, u) \in E$.

39. Hãy vẽ đồ thị nghịch đảo của mỗi đồ thị trong các Bài tập 7–9 của tiết 7.1.

40. Chứng tỏ rằng $(G^c)^c = G$ với mọi đồ thị có hướng G.

41. Chứng minh rằng đồ thị G là nghịch đảo của chính nó nếu và chỉ nếu quan hệ được biểu diễn bởi G (xem Tiết 6.3) là đối xứng.

42. Hãy mở rộng định nghĩa nghịch đảo của đồ thị có hướng cho đa đồ thị có hướng.

43. Hãy vẽ mạng kiểu lưới kết nối 9 bộ xử lý song song.

44. Trong một phương án mạng kiểu lưới kết nối $n = m^2$ bộ xử lý song song, bộ xử lý $P(i,j)$ được kết nối với 4 bộ xử lý $P((i\pm1)$ **mod** $m, j)$, $P(i, (j\pm1)$ **mod** $m)$, sao cho các kết nối bao xung quanh các cạnh của lưới. Hãy vẽ mạng kiểu lưới có 16 bộ xử lý theo phương án này.

45. Hãy chỉ ra mỗi cặp bộ xử lý trong mạng lưới với $n = m^2$ bộ xử lý có thể truyền thông được bằng cách dùng $O(\sqrt{n}) = O(m)$ các kết nối trung gian giữa các bộ xử lý được nối trực tiếp.

7.3. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ VÀ SỰ ĐẲNG CẤU

MỞ ĐẦU

Có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Đọc xong chương này các bạn sẽ thấy khi làm việc với đồ thị nếu có thể chọn được cách biểu diễn thích hợp nhất thì sẽ rất có lợi. Trong tiết này ta sẽ chỉ ra các cách khác nhau để biểu diễn đồ thị.

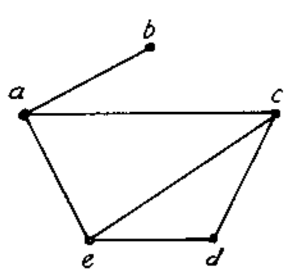
Đôi khi, hai đồ thị có dạng đúng như nhau, theo nghĩa có phép tương ứng một – một giữa các đỉnh của chúng mà vẫn bảo tồn các cạnh. Trong trường hợp đó ta nói rằng hai đồ thị là **đẳng cấu**. Việc xác định xem hai đồ thị có là đẳng cấu với nhau hay không là một bài toán quan trọng của lý thuyết đồ thị sẽ được nghiên cứu trong tiết này.

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Một cách biểu điễn đồ thị không có cạnh bội là liệt kê tất cả các cạnh của đồ thị. Nói cách khác để biểu diễn đồ thị không có cạnh bội ta dùng **danh sách liền kề**. Danh sách này chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 1. Dùng danh sách liền kề để mô tả đồ thị đơn trên Hình 1.

Giải: Bảng 1 liệt kê tất cả các đỉnh liền kề với mỗi đỉnh của đồ thị.



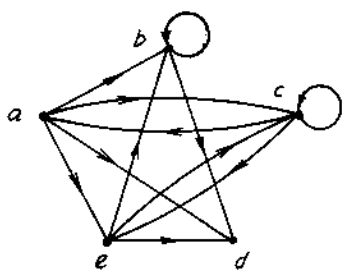
Hình 1. Đồ thị đơn

BẢNG 1. Danh sách cạnh của một đồ thị đơn

Đỉnh	Đỉnh liền kề
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Ví dụ 2. Hãy biểu diễn đồ thị có hướng trên Hình 2 bằng cách liệt kê tất cả các đỉnh cuối của các cung xuất phát từ mỗi đỉnh của đồ thị.

Giải: Bảng 2 biểu diễn đồ thị có hướng trên Hình 2.



Hình 2. Đồ thị có hướng.

BẢNG 2. Danh sách các cạnh của đồ thị có hướng

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
a	*b, c, d, e*
b	*b, d*
c	*a, c, e*
d	
e	*b, c, d*

■

MA TRẬN LIỀN KỀ

Khi biểu diễn đồ thị bởi danh sách các cạnh hay danh sách liền kề, thì việc thực hiện một thuật toán có thể sẽ rất cồng kềnh, nếu đồ thị có nhiều cạnh. Để đơn giản việc tính toán ta có thể biểu diễn đồ thị bằng ma trận. Có hai kiểu ma trận thường được dùng để biểu diễn đồ thị sẽ được giới thiệu dưới đây.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị đơn trong đó $|V| = n$ và các đỉnh được liệt kê một cách tùy ý $v_1,...,v_n$. **Ma trận liền kề A** (hay $\mathbf{A}_G$) của G ứng với danh sách các đỉnh này là ma trận không–một cấp $n \times n$ có phần tử hàng i cột j bằng 1 nếu v_i và v_j liền kề nhau, và bằng 0 nếu chúng không được nối với nhau. Nói cách khác ma trận liền kề của đồ thị là ma trận $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \{v_i, v_j\} \text{ là một cạnh của } G, \\ 0 & \text{nếu không có cạnh nối đỉnh } v_i \text{ với đỉnh } v_j. \end{cases}$$

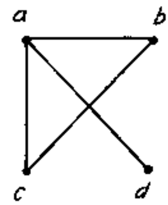
Lưu ý là ma trận liền kề của một đồ thị tùy thuộc vào thứ tự liệt kê các đỉnh. Do vậy có tới $n!$ ma trận kề liền khác nhau của một đồ thị n đỉnh vì có n ! cách sắp xếp n đỉnh.

Ma trận liền kề của một đồ thị đơn là đối xứng, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ vì nếu v_i được nối với v_j thì v_j cũng được nối với v_i và ngược lại, nếu v_i không liền kề với v_j thì v_j cũng không liền kề với v_i. Hơn thế nữa, vì đồ thị đơn không có khuyên nên $a_{ii} = 0$ với $i = 1, 2, ..., n$.

Ví dụ 3. Dùng ma trận liền kề hãy biểu diễn đồ thị trên Hình 3.

Giải: Ta sắp xếp các đỉnh theo thứ tự a, b, c, d. Ma trận biểu diễn đồ thị này là :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

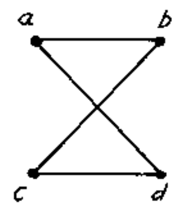


***Hình** 3.* Đồ thị đơn.

■

Ví dụ 4. Hãy vẽ đồ thị có ma trận liền kề theo thứ tự của các đỉnh là a, b, c, d.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 4. Đồ thị ứng với ma trận liền kề cho trước.

Giải: Đồ thị ứng với ma trận liền kề này được biểu diễn trên Hình 4.

■

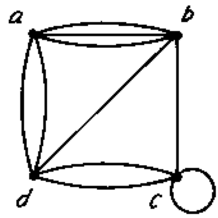
Ma trận liền kề cũng có thể dùng để biểu diễn đồ thị vô hướng có khuyên và có cạnh bội. Khuyên tại đỉnh a_i được biểu diễn bằng 1 tại vị trí *(i, i)* của ma trận liền kề. Khi có cạnh bội ma trận liền kề không còn là ma trận không – một nữa, vì phần tử ở vị trí thứ *(i, j)* của ma trận này bằng số cạnh nối các đỉnh a_i và a_j. Tất cả các đồ thị vô hướng, kể cả đa đồ thị và giả đồ thị đều có ma trận trận liền kề đối xứng.

■

Ví dụ 5. Dùng ma trận liền kề biểu diễn giả đồ thị trên Hình 5.

Giải: Ma trận liền kề với thứ tự các đỉnh a, b, c, d *là*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$



***Hình** 5.* Giả đồ thị.

■

Chúng ta đã dùng ma trận không–một trong Chương 6 để biểu diễn các đồ thị có hướng. Ma trận liền kề của đồ thị có hướng $G = (V, E)$ có giá trị bằng 1 tại vị trí (i, j) nếu có một cạnh (cung) từ v_i tới v_j trong đó $v_1, v_2, ..., v_n$ là một danh sách bất kỳ của các đỉnh đồ thị. Nói cách khác nếu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ là ma trận liền kề của đồ thị có hướng theo danh sách này của đỉnh thì

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu có cạnh đi từ } v_i \text{ tới } v_j \\ 0 & \text{ở mọi vị trí khác.} \end{cases}$$

Ma trận liền kề của đồ thị có hướng không có tính đối xứng. Vì có thể không có cạnh từ a_j tới a_i khi có cạnh từ a_i tới a_j.

Cũng có thể dùng ma trận kề để biểu diễn đa đồ thị có hướng. Ma trận kề khi đó không là ma trận không–một khi có cạnh bội cùng hướng nối hai đỉnh. Trong ma trận liền kề của đa đồ thị có hướng, a_{ij} bằng số các cung đi từ đỉnh v_i tới đỉnh v_j

MA TRẬN LIÊN THUỘC

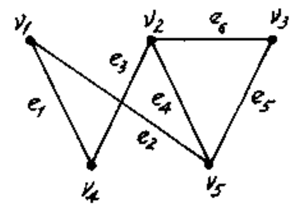
Một cách thường dùng nữa để biểu diễn đồ thị là dùng **ma trận liên thuộc**. Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng, $v_1, v_2, ..., v_n$ là tập các đỉnh còn $e_1, e_2, ..., e_m$ là tập các cạnh của nó. Khi đó ma trận liên thuộc theo thứ tự trên của V và E là ma trận $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ nối với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ không nối với đỉnh } v_i \end{cases}$$

Ví dụ 6. Hãy biểu diễn đồ thị trên Hình 6 bằng ma trận liên thuộc.

Giải: Ma trận liên thuộc có dạng

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Hình 6. Đồ thị vô hướng.

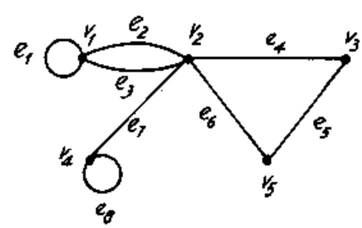
■

Các ma trận liên thuộc cũng có thể được dùng để biểu diễn các các cạnh bội và khuyên. Các cạnh bội được biểu diễn trong ma trận liên thuộc bằng cách dùng các cột có các phần tử giống hệt nhau vì các cạnh này được nối với cùng một cặp các đỉnh. Các khuyên được biểu diễn bằng cách dùng một cột với đúng một phần tử bằng 1 tương ứng với đỉnh nối với khuyên đó.

Ví dụ 7. Hãy biểu diễn đồ thị trên Hình 7 bằng ma trận liên thuộc.

Giải. Ma trận liên thuộc có dạng

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Hình 7. Giả đồ thị.

■

SỰ ĐẲNG CẤU CỦA CÁC ĐỒ THỊ

Thường thường người ta cần biết xem có thể vẽ được hai đồ thị theo cùng một cách không. Chẳng hạn, trong hóa học, đồ thị thường để tạo mô hình các hợp chất. Các hợp chất khác nhau có thể có cùng công thức phân tử nhưng cấu trúc có thể khác nhau. Các hợp chất như vậy sẽ được biểu diễn bằng các đồ thị mà ta không thể vẽ được cùng một cách. Những đồ thị biểu diễn các hợp chất đã biết có thể được dùng để xác định xem một hợp chất cho là mới thực ra đã biết từ trước chưa.

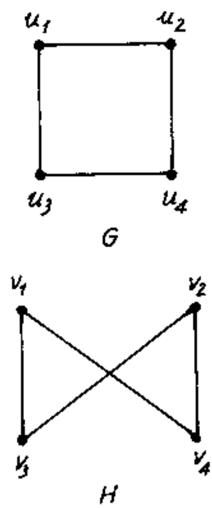
Sau đây là một vài thuật ngữ đối với các đồ thị có cấu trúc như nhau.

ĐỊNH NGHĨA 1. Các đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là *đẳng cấu* nếu có hàm song ánh f từ V_1 lên V_2 sao cho các đỉnh a và b là liền kề trong G_1 nếu và chỉ nếu $f(a)$ và $f(b)$ là liền kề trong G_2 với mọi a và b trong V_1. Hàm f như thế được gọi là *một đẳng cấu*.

Nói cách khác khi hai đơn đồ thị là đẳng cấu, sẽ tồn tại một phép tương ứng một-một giữa các đỉnh của hai đồ thị bảo toàn quan hệ liền kề.

Ví dụ 8. Hãy chỉ ra rằng các đồ thị $G = (V, E)$ và $H = (W, F)$ trên Hình 8 là đẳng cấu.

Giải: Hàm f với $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$ và $f(u_4) = v_2$ là phép tương ứng một - một giữa V và W . Để thấy phép tương ứng này bảo toàn quan hệ liền kề ta thấy trong G các đỉnh liền kề là u_1 và u_2, u_1 và u_3, u_2 và u_4, u_3 và u_4, và mỗi cặp $f(u_1) = v_1$ và $f(u_2) = v_4$, $f(u_1) = v_1$ và $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ và $f(u_4) = v_2$ cuối cùng $f(u_3) = v_3$ và $f(u_4) = v_2$ là liền kề trong H. ■

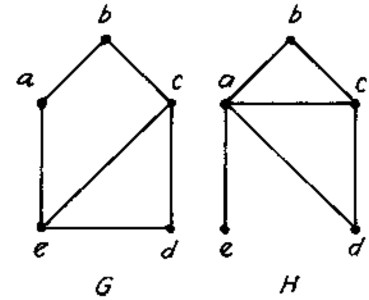


Hình 8. Đồ thị G và H.

Thông thường việc xác định xem hai đồ thị có là đẳng cấu hay không là rất khó khăn. Có tới $n!$ phép tương ứng một-một giữa hai tập đỉnh của hai đơn đồ thị có n đỉnh. Thử mỗi phép tương ứng xem nó có bảo toàn tính liền kề hay không là không thực tế, nhất là khi n đủ lớn.

Tuy nhiên, thường người ta chứng tỏ hai đồ thị đơn là không đẳng cấu bằng cách chỉ ra chúng không có chung một tính chất mà các đơn đồ thị đẳng cấu cần phải có. Tính chất như thế gọi là **một bất biến** đối với phép đẳng cấu của các đơn đồ thị. Chẳng hạn, các đơn đồ thị đẳng cấu có cùng số đỉnh. Hơn thế nữa, các đơn đồ thị đẳng cấu có cùng số cạnh, bởi vì phép tương ứng một-một giữa các đỉnh sẽ tạo ra phép tương ứng một-một giữa các cạnh. Và sau nữa, bậc của các đỉnh của các đơn đồ thị đẳng cấu phải như nhau. Tức là, đỉnh v bậc d trong G phải tương ứng với đỉnh $f(v)$ bậc d trong H, vì đỉnh w trong G là nối với đỉnh v nếu và chỉ nếu $f(v)$ và $f(w)$ là liền kề trong H.

Ví dụ 9. Hãy chỉ ra rằng các đồ thị trên Hình 9 là không đẳng cấu.

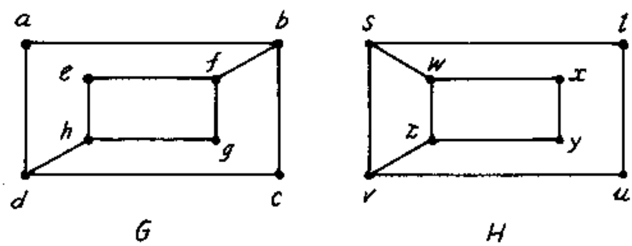


Hình 9. Các đồ thị G và H.

Giải: Cả hai đồ thị G và H đều có 5 đỉnh và 6 cạnh. Tuy nhiên H có đỉnh e bậc 1 còn G thì không có đỉnh nào bậc 1 cả. Từ đó suy ra G và H là không đẳng cấu. ∎

Số đỉnh, số cạnh, bậc của đỉnh là các bất biến đối với phép đẳng cấu. Nếu bất kỳ đại lượng nào trong các đại lượng này của hai đồ thị là khác nhau thì chúng là không đẳng cấu. Tuy nhiên, khi các đại lượng này như nhau, điều đó cũng không có nghĩa hai đồ thị này là đẳng cấu. Không có các bất biến mà nhờ chúng có thể xác định được hai đơn đồ thị là đẳng cấu.

Ví dụ 10. Hãy xác định xem hai đồ thị trên Hình 10 có đẳng cấu hay không.



Hình 10. Các đồ thị G và H.

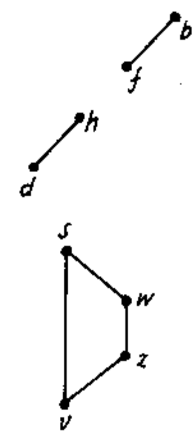
Giải: Cả hai đồ thị G và H đều có 8 đỉnh và 10 cạnh. Chúng cũng có 4 đỉnh bậc 2 và 4 đỉnh bậc 3. Vì các bất biến này là như nhau nên ta vẫn còn hy vọng các đồ thị này là đẳng cấu.

Tuy nhiên các đồ thị này là không đẳng cấu. Thật vậy, vì $deg(a) = 2$ trong G nên a phải ứng với một trong các đỉnh t, u, x hoặc h của H, vì đó là các đỉnh bậc 2 trong H. Nhưng cả 4 đỉnh này đều nối với một đỉnh bậc 2 khác trong H, mà điều này không đúng với đỉnh a trong G.

Có thể chứng minh G và H là không đẳng cấu bằng cách khác. Nếu hai đồ thị G và H là đẳng cấu thì các đồ thị con tạo nên từ các đỉnh bậc 3 và các cạnh nối chúng lại của hai đồ thị cũng phải đẳng cấu (độc giả tự chứng minh). Tuy nhiên các đồ thị con này, thể hiện trên Hình 11 là không đẳng cấu.

■

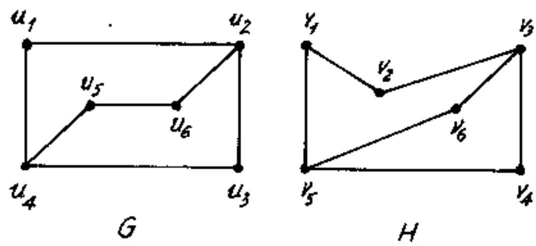
Để chứng minh hàm f từ tập các đỉnh của đồ thị G lên tập các đỉnh của đồ thị H là một phép đẳng cấu, chúng ta cần phải chỉ ra rằng f bảo tồn các cạnh. Một cách rất thuận tiện là sử dụng ma trận liền kề. Đặc biệt để chỉ ra f là đẳng cấu chúng ta có thể chỉ ra *rằng ma trận liền kề của* G là giống như ma trận liền kề của H với hàng và cột được gán nhãn tương ứng với ảnh qua f của các đỉnh trong G, đó là nhãn của hàng và cột tương ứng trong ma trận kề của G. Chúng ta minh họa cách chứng minh đó qua ví dụ sau.



Hình 11. Các đồ thị con của G và H tạo nên từ các đỉnh bậc 3 và các cạnh nối chúng.

Ví dụ 11. Hãy xác định xem hai đồ thị trên Hình 12 có đẳng cấu hay không.

Giải: Cả hai đồ thị G và H có 6 đỉnh và 7 cạnh. Cả hai đều có 4 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 3. Cũng dễ chỉ ra rằng các đồ thị con của G và H gồm các đỉnh bậc 2 và các cạnh nối chúng là đẳng cấu (độc giả hãy tự kiểm tra lại điều này). Vì các đồ thị G và H là phù hợp đối với các bất biến này, nên hợp lý hơn là ta cố gắng tìm phép đẳng cấu f.



Hình 12. Các đồ thị G và H.

Bây giờ ta định nghĩa hàm f sau đó kiểm tra xem nó có là một phép đẳng cấu hay không. Vì $\deg(u_1) = 2$ và vì u_1 không nối với một đỉnh bậc 2 nào khác nên ảnh của u_1 cần phải là hoặc v_4 hoặc là v_6 vì chỉ các đỉnh này mới không nối với các đỉnh bậc 2 khác trong H. Ta chọn $f(u_1) = v_6$ (nếu sau đó ta thấy rằng việc chọn này không dẫn đến một đẳng cấu thì ta sẽ chọn lại $f(u_1) = v_4$). Vì u_2 nối với u_1 nên ảnh của u_2 có thể là v_3 hoặc v_5. Chúng ta chọn chẳng hạn, $f(u_2) = v_3$. Cứ tiếp tục theo cách này, dùng tính liền kề của các đỉnh và bậc của các đỉnh như dấu hiệu dẫn đường chúng ta sẽ có $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ và $f(u_6) = v_2$. Vậy là chúng ta đã lập được phép tương ứng một-một giữa các đỉnh của hai đồ thị G và H, cụ thể là : $f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ và $f(u_6) = v_2$. Bây giờ để kiểm tra xem f có bảo tồn các cạnh hay không, ta lập ma trận liền kề của G.

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

và ma trận liền kề của H với các nhãn của hàng và cột tương ứng là ảnh của các đỉnh của G qua f. Cụ thể là :

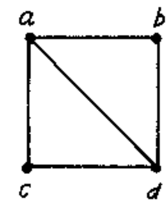
$$\mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vì $\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_H$ ta suy ra f bảo tồn các cạnh. Vậy ta kết luận f là một phép đẳng cấu, hay G và H là đẳng cấu. Lưu ý là nếu f không là đẳng cấu chúng ta cũng không thể kết luận G và H là không đẳng cấu, vì có thể tồn tại phép tương ứng một-một khác giữa các đỉnh của G và H là phép đẳng cấu.

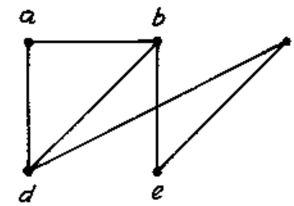
BÀI TẬP

Trong các Bài tập 1–4 hãy dùng danh sách liền kề biểu diễn các đồ thị sau

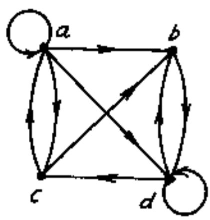
1.



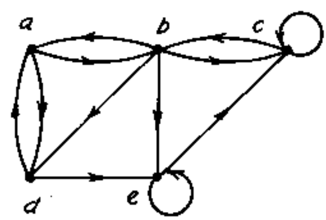
2.



3.



4.



5. Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 1 bằng ma trận liền kề.

6. Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 2 bằng ma trận liền kề.

7. Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 3 bằng ma trận liền liền kề.

8. Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 4 bằng ma trận liền kề.

9. Hãy biểu diễn các đồ thị sau đây bằng ma trận liền kề.

a) K_4 b) $K_{1,4}$ c) $K_{2,3}$

d) C_4 e) W_4 f) Q_3.

Trong các Bài tập 10–12 hãy vẽ đồ thị có các ma trận liền kề sau :

10.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11.

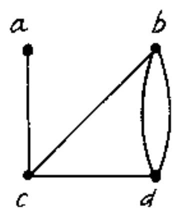
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12.

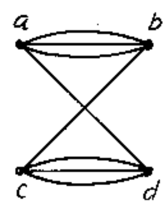
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trong các Bài tập 13-15 hãy biểu diễn đồ thị đã cho bằng ma trận liền kề.

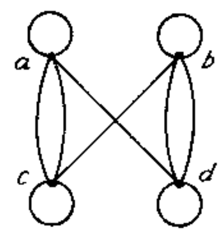
13.



14.



15.



Trong các Bài tập 16-18 hãy vẽ các đồ thị vô hướng được biểu diễn bởi các ma trận liền kề sau:

16.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

17.

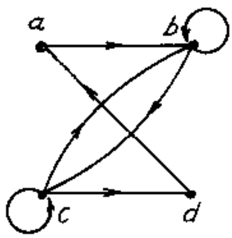
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

18.

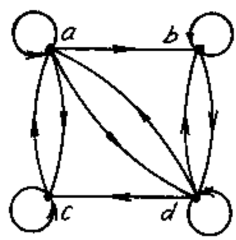
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Trong các Bài tập 19-21 hãy tìm ma trận kề của các đa đồ thị có hướng.

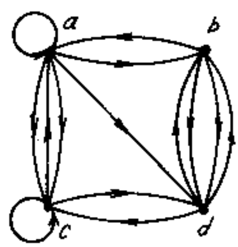
19.



20.



21.



Trong các Bài tập 22-24 hãy vẽ đồ thị được biểu diễn bằng ma trận liền kề

22.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

23.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

24.
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

25. Có phải mọi ma trận vuông không–một đối xứng, có các số 0 trên đường chéo đều là ma trận liền kề của đồ thị đơn?

26. Dùng ma trận liên thuộc hãy biểu diễn các đồ thị trong các Bài tập 1 và 2.

27. Dùng ma trận liên thuộc hãy biểu diễn các đồ thị trong các Bài tập 13–15.

28*. Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng của một ma trận liền kề đối với một đồ thị vô hướng? Đối với đồ thị có hướng?

29*. Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một cột của một ma trận liền kề đối với một đồ thị vô hướng? Đối với đồ thị có hướng?

30. Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng của một ma trận liên thuộc đối với một đồ thị vô hướng.

31. Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một cột của một ma trận liên thuộc đối với một đồ thị vô hướng.

32*. Tìm ma trận liền kề cho các đồ thị sau :

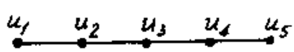
a) K_n b) C_n c) W_n

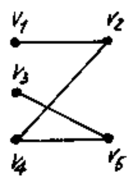
d) $K_{m,n}$ e) Q_n

33*. Tìm ma trận liên thuộc của các đồ thị trong các phần a) – d) của Bài tập 32.

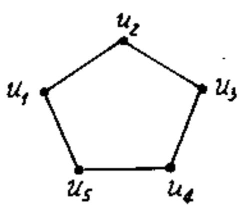
Trong các Bài tập 34-44 hãy xác định xem các cặp đồ thị đã cho có là đẳng cấu không.

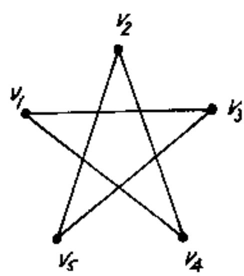
34.



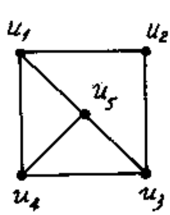


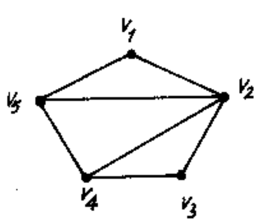
35.



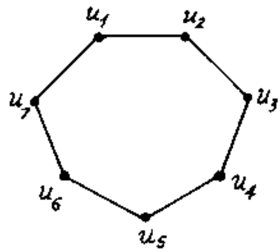


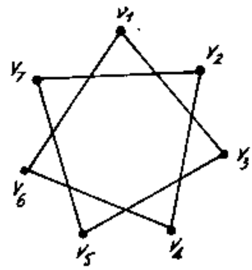
36.



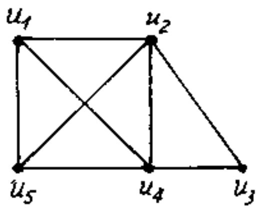


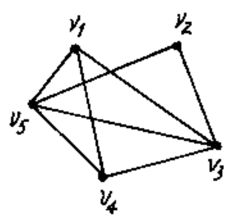
37.


u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7

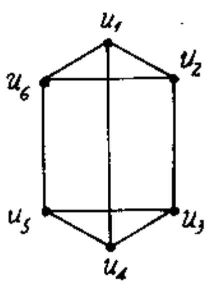

v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7

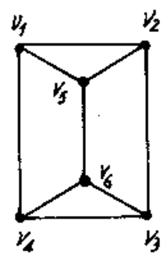
38.


u_1
u_2
u_3
u_4
u_5

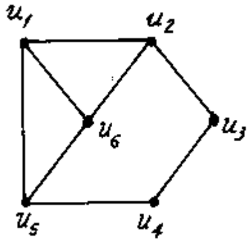

v_1
v_2
v_3
v_4
v_5

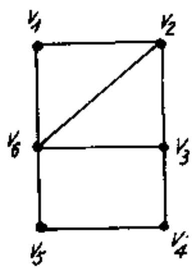
39.


u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6

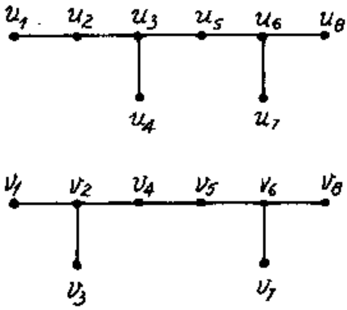

v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6

40.

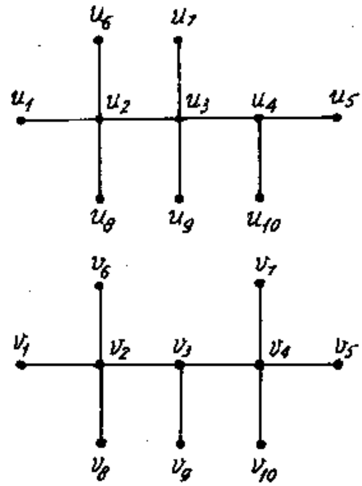

u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6


v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6

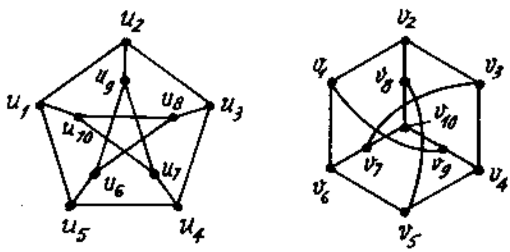
41.



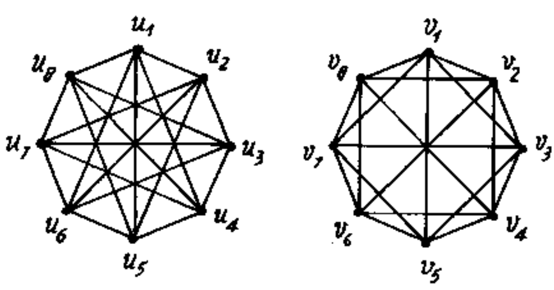
42.



43.



44.



45. Chứng minh rằng phép đẳng cấu của các đồ thị đơn là một quan hệ tương đương.

46. Giả sử G và H là các đồ thị đơn đẳng cấu. Chỉ ra rằng các đồ thị bù $\overline{G}$, $\overline{H}$ cũng là đẳng cấu.

47. Hãy mô tả hàng và cột của ma trận liền kề của đồ thị tương ứng với đỉnh cô lập.

48. Hãy mô tả hàng và cột của ma trận liên thuộc của đồ thị tương ứng với đỉnh cô lập.

49. Chỉ ra rằng có thể sắp xếp các đỉnh của một đồ thị phân đôi với số đỉnh lớn hơn hoặc bằng hai sao cho ma trận liền kề của nó có dạng.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

trong đó 4 phần tử là các ma trận chữ nhật.

Một đơn đồ thị được gọi là **tự-bù** *nếu G và $\overline{G}$ là đẳng cấu.*

50. Chỉ ra rằng đồ thị bên là tự–bù.

51. Hãy tìm đồ thị đơn tự–bù có 5 đỉnh.

52*. Chỉ ra rằng nếu G là đồ thị đơn tự-bù với v đỉnh khi đó $v \equiv 0$ hoặc 1 (mod 4).

53. Với số nguyên n nào thì C_n là tự bù?

54. Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu với n đỉnh khi n bằng

a) 2 ? b) 3 ? c) 4 ?

55. Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu với 5 đỉnh và 3 cạnh?

56. Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu với 6 đỉnh và 4 cạnh?

57. Các đồ thị đơn với ma trận liền kề sau đây có là đẳng cấu không?

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

58. Hãy xác định xem các đồ thị không có khuyên với ma trận liên thuộc sau đây có là đẳng cấu không.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

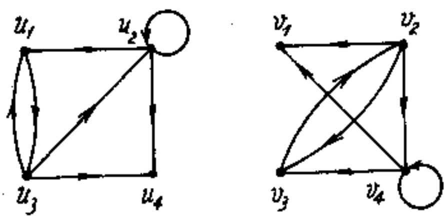
b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

59. Hãy mở rộng định nghĩa đẳng cấu của đơn đồ thị cho các đồ thị vô hướng có khuyên và cạnh bội.

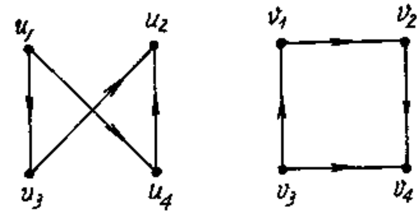
60. Định nghĩa đẳng cấu cho các đồ thị có hướng.

Trong các Bài tập 61-46 xác định xem cặp đồ thị có hướng đã cho có là đẳng cấu không.

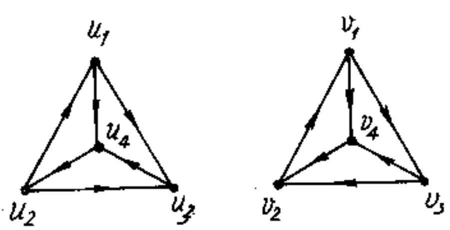
61.



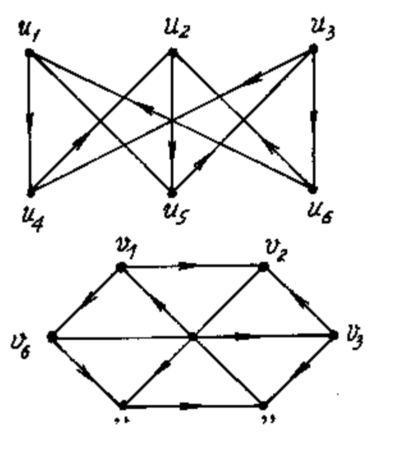
62.



63.



64.



65. Chỉ ra rằng nếu G và H là các đồ thị có hướng đẳng cấu thì nghịch đảo của G và H (theo định nghĩa cho ở trước Bài tập 39 của Tiết 7.2) cũng là đẳng cấu.

66*. Có bao nhiêu đơn đồ thị có hướng không đẳng cấu với n đỉnh khi n bằng

a) 2 ? b) 3 ? c) 4 ?

67*. Tích của ma trận liên thuộc và chuyển vị của nó đối với một đồ thị vô hướng là gì?

68*. Cần bao nhiêu số nguyên để biểu diễn một đồ thị đơn có v đỉnh và e cạnh nếu dùng

a) danh sách liền kề b) ma trận liền kề

c) ma trận liên thuộc.

7.4. TÍNH LIÊN THÔNG

MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán có thể được mô hình với các đường đi dọc theo các cạnh của đồ thị. Ví dụ, người ta dùng đồ thị để nghiên cứu bài toán xác định xem có thể gửi một thông báo giữa hai máy tính qua đường truyền thông trung gian được hay không. Dùng mô hình có đường đi trong đồ thị cũng có thể giải được các bài toán tìm đường tối ưu cho xe phát thư, xe đổ rác, cho việc chẩn đoán trong mạng máy tính.

ĐƯỜNG ĐI

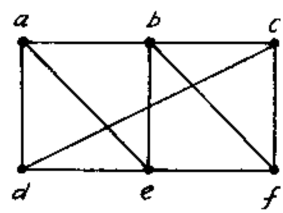
Chúng ta bắt đầu bằng định nghĩa thuật ngữ cơ sở của lý thuyết đồ thị có liên quan tới đường đi.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Đường đi độ dài n* từ u tới v, với n là một số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh e_1, e_2, ..., e_n của đồ thị sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1, x_2\}, \ldots, f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, với

$x_0 = u$ và $x_n = v$. Khi đồ thị là đơn ta ký hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ..., x_n$ (vì danh sách các đỉnh này xác định duy nhất đường đi). Đường đi được gọi là một *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, tức là $u = v$. Đường đi hoặc chu trình khi đó gọi là đi qua các đỉnh $x_1, x_2, ... x_{n-1}$. Đường đi hay chu trình gọi là *đơn* nếu nó không chứa cùng một cạnh quá một lần.

Khi không cần phân biệt các cạnh bội ta sẽ ký hiệu đường đi $e_1, e_2, ... e_n$ trong đó $f(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ với $i = 1, 2, ..., n$ bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ... x_n$. Ký hiệu này xác định đường đi chỉ theo các đỉnh mà nó đi qua. Có thể có nhiều đường đi qua dãy các đỉnh này.

Ví dụ 1. Trong đồ thị đơn trên Hình 1,a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4 vì $\{a, d\}$, $\{d, c\}$, $\{c, f\}$ và $\{f, e\}$ đều là các cạnh. Tuy vậy, d, e, c, a không là đường đi vì $\{e, c\}$ không là cạnh của đồ thị. Còn b, c, f, e, b là một chu trình độ dài 4 vì $\{b, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$ và $\{e, b\}$ là các cạnh và đường đi này bắt đầu và kết thúc tại b. Đường đi a, b, e, d, a, b độ dài 5 không là đường đi đơn vì nó chứa cạnh $\{a, b\}$ hai lần.



Hình 1. Đồ thị đơn.

Đường đi và chu trình trong đồ thị có hướng cũng đã được đưa vào từ Chương 5. Bây giờ ta định nghĩa đường đi như thế cho đa đồ thị có hướng.

ĐỊNH NGHĨA 2. *Đường đi* độ dài n, với n nguyên dương, từ u tới v trong đa đồ thị có hướng là dãy các cạnh $e_1, e_2, ..., e_n$ của đồ thị sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1, x_2\}$, ..., $f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$. Khi không có cạnh bội trong đồ thị ta ký hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ..., x_n$. Đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh được gọi là một *chu trình*. Đường đi hay chu trình gọi là *đơn* nếu nó không chứa cùng một cạnh quá một lần.

Khi không cần phân biệt các cạnh bội ta sẽ ký hiệu đường đi $e_1, e_2, ..., e_n$ trong đó $f(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ với $i = 1, 2, ..., n$ bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ... x_n$. Ký hiệu này xác định đường đi chỉ theo các đỉnh mà nó đi qua. Có thể có nhiều đường đi qua dãy các đỉnh này.

TÍNH LIÊN THÔNG TRONG ĐỒ THI VÔ HƯỚNG

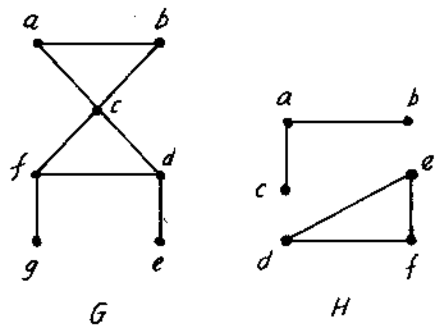
Khi nào mọi cặp máy tính trong một mạng có thể trao đổi thông tin với nhau, nếu các thông báo có thể gửi qua một hay nhiều máy trung gian?

Nếu mạng máy tính này được biểu diễn bằng một đồ thị trong đó mỗi máy được biểu thị bằng một đỉnh còn mỗi đường truyền thông được biểu diễn bằng một cạnh, thì câu hỏi trên có dạng : Có phải luôn luôn tồn tại một đường đi giữa hai đỉnh trong một đồ thị không?

ĐỊNH NGHĨA 3. Một đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

Như vậy, hai máy tính bất kỳ trong mạng có thể truyền thông với nhau được nếu và chỉ nếu đồ thị của mạng này là liên thông.

Ví dụ 2. Đồ thị G trên hình 2 là liên thông, vì giữa mọi cặp đỉnh phân biệt đều có đường đi (độc giả tự kiểm tra lại điều này). Tuy vậy đồ thị H trên Hình 2 là không liên thông. Chẳng hạn giữa các đỉnh a và d là không có đường đi trong H.



Hình 2. Đồ thị G và H.

■

Trong Chương 8 chúng ta sẽ cần tới Định lý sau đây.

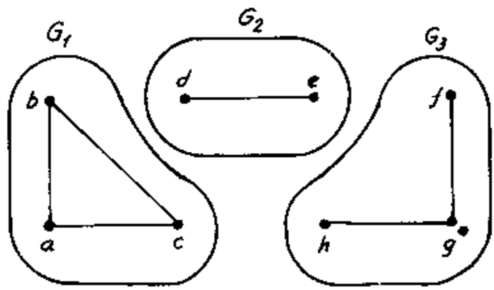
ĐỊNH LÝ 1. Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.

Chứng minh: Giả sử u và v là hai đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$. Vì G là liên thông nên có ít nhất một đường đi giữa u và v. Gọi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ với $x_0 = u$ và $x_n = v$, là dãy các đỉnh của đường đi có độ dài ngắn nhất. Đây chính là đường đi đơn cần tìm. Thật vậy, giả sử nó không là đường đi đơn, khi đó, $x_i = x_j$ với $0 \leq i < j$. Điều này có nghĩa là giữa các đỉnh u và v có đường đi ngắn hơn qua các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_n$ nhận được bằng cách xoá đi các cạnh tương ứng với dãy các đỉnh $x_i, \ldots, x_{j-1}$.

■

Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông, mỗi cặp các đồ thị con này không có đỉnh chung. Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các **thành phần liên thông** của đồ thị đang xét.

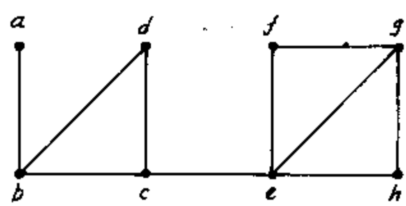
Ví dụ 3. Đồ thị G là hợp của ba đồ thị con liên thông rời nhau G_1, G_2 và G_3 như chỉ ra trên Hình 3. Ba đồ thị con này là 3 thành phần liên thông của G. ■



Hình 3. Đồ thị G và các thành phần liên thông G_1, G_2 và G_3 của nó.

Đôi khi, việc xóa đi một đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra một đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị xuất phát. Các đỉnh như thế gọi là các **đỉnh cắt** hay các **điểm khớp**. Việc xóa đỉnh cắt khỏi một đồ thị liên thông sẽ tạo ra một đồ thị con không liên thông. Hoàn toàn tương tự, một cạnh mà khi ta hỏ nó đi sẽ tạo ra một đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn so với đồ thị xuất phát được gọi là một **cạnh cắt** hay một **cầu**.

Ví dụ 4. Tìm các đỉnh cắt và cạnh cắt của đồ thị G trên Hình 4.



Hình 4. Đồ thị G

Giải: Đỉnh cắt của G là b, c và e. Xóa một trong các đỉnh này (và các cạnh nối với nó) sẽ làm mất tính liên thông của đồ thị. Các cạnh cắt (cầu) là $\{a, b\}$ và $\{c, e\}$. Xóa một trong các cầu này sẽ làm đồ thị mất tính liên thông. ■

TÍNH LIÊN THÔNG TRONG ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Có hai khái niệm về tính liên thông của đồ thị có hướng tuỳ theo chúng ta có quan tâm tới hướng của các cạnh hay không.

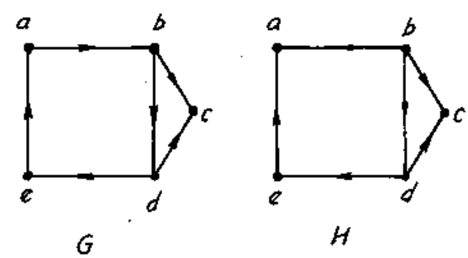
ĐỊNH NGHĨA 4. Đồ thị có hướng gọi là *liên thông mạnh* nếu có đường đi từ a tới b và từ b tới a với mọi đỉnh a và b của đồ thị.

Trong đồ thị có hướng liên thông mạnh luôn tồn tại dãy các cạnh có hướng từ một đỉnh bất kỳ tới một đỉnh bất kỳ khác của đồ thị. Đồ thị có hướng có thể không là liên thông mạnh nhưng vẫn còn liên thông theo một nghĩa nào đó. Để chính xác điều này ta có định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA 5. Đồ thị có hướng gọi là *liên thông yếu* nếu có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng nền.

Do vậy đồ thị có hướng là liên thông yếu nếu và chỉ nếu luôn tồn tại đường đi giữa hai đỉnh khi ta không quan tâm tới hướng của các cạnh. Rõ ràng mọi đồ thị có hướng liên thông mạnh cũng là đồ thị liên thông yếu.

Ví dụ 5. Các đồ thị có hướng trên Hình 5 có là liên thông mạnh không? Có là liên thông yếu không?



Hình 5. Các đồ thị có hướng G và H.

Giải: G là liên thông mạnh vì có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị có hướng này. Vì vậy G cũng là liên thông yếu. Còn H không là liên thông mạnh. Không có đường đi có hướng từ a tới b trong đồ thị này. Tuy vậy H là liên thông yếu vì có đường đi giữa bất kỳ hai đỉnh của thị vô hướng nền của H (Độc giả tự kiểm tra điều này).

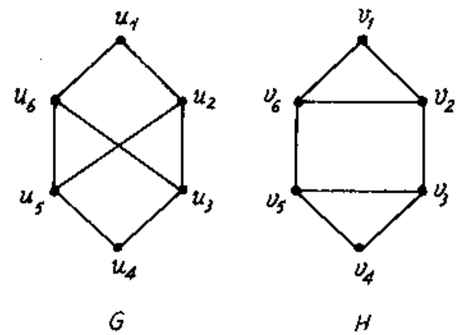
■

ĐƯỜNG ĐI VÀ SỰ ĐẲNG CẤU

Có một số cách dùng đường đi và chu trình để xác định xem hai đồ thị có đẳng cấu hay không. Chẳng hạn sự tồn tại chu trình đơn với độ dài đặc biệt là một bất biến rất có ích để chỉ ra hai đồ thị là không đẳng cấu. Thêm vào đó, đường đi có thể dùng để xây dựng các ánh xạ có khả năng là các phép đẳng cấu.

Như chúng tôi đã nói, một bất biến đẳng cấu rất có ích đối với các đơn đồ thị là sự tồn tại chu trình đơn với độ dài k lớn hơn 2 (chứng minh điều này là Bài tập 36 ở cuối tiết này). Ví dụ 6 minh họa cách dùng bất biến này để chứng tỏ hai đồ thị là không đẳng cấu.

Ví dụ 6. Xác định xem hai đồ thị trên Hình 6 có là đẳng cấu với nhau không?



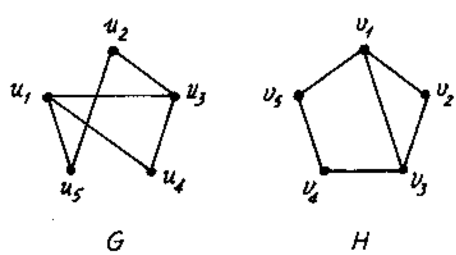
Hình 6. Các đồ thị G và H.

Giải: Cả hai đồ thị G và H đều có 6 đỉnh và 8 cạnh. Mỗi đồ thị có bốn đỉnh bậc 3, hai đỉnh bậc 2. Vì thế ba bất biến – số đỉnh, số cạnh, bậc của các đỉnh – của hai đồ thị là như nhau. Tuy nhiên H có chu trình đơn độ dài 3, cụ thể là v_1, v_2, v_6, v_1 trong khi đó G không có chu trình đơn độ dài 3 (ta có thể kiểm tra trực tiếp điều khẳng định này và dễ thấy tất các chu trình đơn của G đều có độ dài 4). Vì sự tồn tại chu trình đơn độ dài 3 là một bất biến đối với phép đẳng cấu nên các đồ thị G và H là không đẳng cấu.

■

Chúng ta đã chỉ ra cách dùng sự tồn tại của một loại đường đi, cụ thể là chu trình đơn độ dài đặc biệt, để chứng minh hai đồ thị là không đẳng cấu. Chúng ta cũng có thể dùng đường đi để tìm các ánh xạ có khả năng là các đẳng cấu.

Ví dụ 7. Xác định xem hai đồ thị G và H trên Hình 7 có là đẳng cấu với nhau không?



Hình 7. Các đồ thị G và H.

Giải: Cả hai đồ thị G và H đều có 5 đỉnh và 6 cạnh, cả hai đều có hai đỉnh bậc 3 và ba đỉnh bậc 2, cả hai đều có một chu trình đơn độ dài 3, một chu trình đơn độ dài 4, và chu trình đơn độ dài 5. Vì tất cả các bất biến đều phù hợp nên G và H có thể là đẳng cấu. Để tìm phép đẳng cấu có thể này chúng ta sẽ đi theo đường đi qua tất cả các đỉnh sao cho các đỉnh tương ứng trong hai đồ thị có cùng bậc. Ví dụ, các đường đi u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 trong G và v_3, v_2, v_1, v_5, v_4 trong

H, cả hai đều đi qua mọi đỉnh của đồ thị xuất phát từ đỉnh bậc 3, đi qua các đỉnh bậc 2, 3, 2 và kết thúc ở đỉnh bậc 2. Theo các đường này, trên đồ thị ta có ánh xạ f sao cho $f(u_1) = v_3$, $f(u_4) = v_2$, $f(u_3) = v_1$, $f(u_2) = v_5$, và $f(u_5) = v_4$. Độc giả có thể chỉ ra rằng ánh xạ này là một đẳng cấu, và như vậy G và H là hai đồ thị đẳng cấu hoặc bằng cách chỉ ra f bảo tồn các cạnh hoặc chỉ ra với một cách sắp xếp các đỉnh thích hợp hai ma trận liền kề của các đồ thị G và H là như nhau.

■

ĐẾM ĐƯỜNG ĐI GIỮA CÁC ĐỈNH

Số đường đi giữa hai đỉnh của đồ thị có thể xác định được khi sử dụng ma trận liền kề.

ĐỊNH LÝ 2. Cho G là một đồ thị với ma trận liền kề $\mathbf{A}$ theo thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ (với các cạnh vô hướng hoặc có hướng hay là cạnh bội, có thể có khuyên). Số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận $\mathbf{A}^r$.

Chứng minh. Ta sử dụng quy nạp toán học để chứng minh định lý này. Gọi G là đồ thị với ma trận liền kề $\mathbf{A}$ (giả sử sắp xếp các đỉnh theo thứ tự $v_1, v_2, \ldots, v_n$). Giả sử số các đường đi có độ dài 1 đến v_j là phần tử (i, j) của $\mathbf{A}$, vì phần tử này là số cạnh từ v_i tới v_j.

Giả sử phần tử (i, j) của ma trận $\mathbf{A}^r$ là số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j. Đây là giả thiết quy nạp. Vì $\mathbf{A}^{r+1} = \mathbf{A}^r\mathbf{A}$, nên phần tử (i,j) của $\mathbf{A}^{r+1}$ bằng $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj}$

trong đó b_{ik} là phần tử (i, k) của $\mathbf{A}^r$. Theo giả thiết quy nạp b_{ik} là số đường đi độ dài r từ v_i tới v_k.

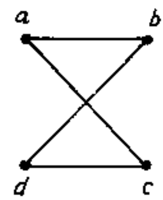
Đường đi độ dài $r + 1$ từ v_i tới v_j sẽ được tạo nên từ đường đi độ dài r từ v_i tới đỉnh trung gian v_k nào đó và một cạnh từ v_k tới v_j. Theo quy tắc nhân số các đường đi như thế là tích của số đường đi độ dài r từ v_i tới v_k, tức là b_{ik}, và số các cạnh từ v_k tới v_j tức là a_{kj}. Khi cộng các tích này lại theo tất cả các đỉnh trung gian v_k có thể ta sẽ nhận được kết quả mong muốn.

■

Ví dụ 8. Bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ a tới d trong đồ thị đơn G trên Hình 8?

Giải: Ma trận liền kề của đồ thị G (theo thứ tự a, b, c, d) là

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 8. Đồ thị G.

Vì thế, số đường đi độ dài 4 từ a tới d là giá trị của phần tử (i,j) của $\mathbf{A}^4$. Vì

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

nên có đúng 8 đường đi độ dài 4 từ a tới d. Kiểm tra trực tiếp trên đồ thị ta được 8 đường đi độ dài 4 từ a tới d là : a, b, a, b, d ; a, b, a, c, d ; a, b, d, b, d ; a, b, d, c, d ; a, c, a, b, d ; a, c, a, c, d ; a, c, d, b, d ; và a, c, d, c, d.

■

Định lý 2 có thể dùng để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của đồ thị (xem Bài tập 32), và cũng có thể dùng để xác định xem đồ thị có liên thông hay không (xem Bài tập 37 và 38).

BÀI TẬP

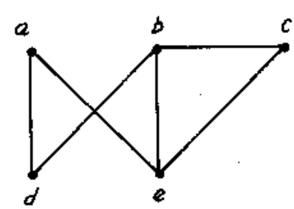
1. Mỗi danh sách các đỉnh sau đây có tạo nên đường đi trong đồ thị đã cho không? Đường đi nào là đơn? Đường đi nào là chu trình? Độ dài của các đường đi này là bao nhiêu?

a) a, e, b, c, b

c) e, b, a, d, b, e

b) a, e, a, d, b, c, a

d) c, b, d, a, e, c



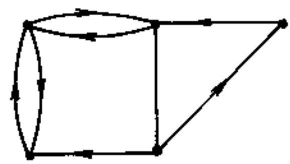
2. Mỗi danh sách các đỉnh sau đây có tạo nên đường đi trong đồ thị đã cho không? Đường đi nào là đơn? Đường đi nào là chu trình? Độ dài của các đường đi này là bao nhiêu?

a) a, b, e, c, b

c) a, d, b, e, a

b) a, d, a, d, a

d) a, b, e, c, b, d, a

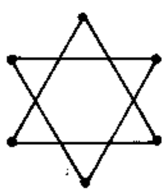


Trong các Bài tập 3-5 hãy xác định xem các đồ thị sau có liên thông không.

3.

4.

5.



6. Mỗi một đồ thị trong các Bài tập 3–5 có bao nhiêu thành phần liên thông? Hãy tìm các thành phần liên thông đó.

7*. Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh khác nhau trong K_4 nếu n là

a) 2 b) 3

c) 4 d) 5

8*. Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh liền kề tùy ý trong $K_{3,3}$ với mỗi giá trị của n trong Bài 7.

9*. Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh không liền kề tùy ý trong $K_{3,3}$ với mỗi giá trị của n trong Bài 7.

10. Hãy tìm số đường đi giữa hai đỉnh c và d trong đồ thị trên Hình 1 có độ dài :

a) 2 b) 3 c) 4

d) 5 e) 6 f) 7

11. Hãy tìm số đường đi từ a tới e của đồ thị có hướng trong Bài tập 2 có độ dài :

a) 2　　b) 3　　c) 4

d) 5　　e) 6　　f) 7

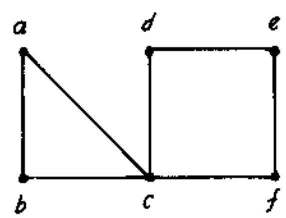
12*. Chứng tỏ rằng đồ thị liên thông với n đỉnh có ít nhất $n-1$ cạnh.

13. Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị, R là một quan hệ trên V gồm các cặp đỉnh (u, v) sao cho có đường đi từ u tới v hoặc $u = v$. Chứng tỏ rằng R là quan hệ tương đương.

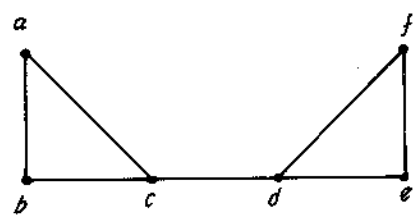
14*. Chỉ ra rằng trong mọi đơn đồ thị luôn luôn tồn tại đường đi từ một đỉnh bậc lẻ tới một đỉnh bậc lẻ khác.

Trong các Bài tập 15–17 hãy tìm tất cả các đỉnh cắt của đồ thị.

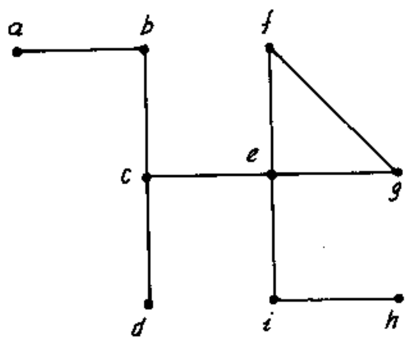
15.



16.



17.



18. Hãy tìm tất cả các cạnh cắt (hay cầu) của các đồ thị trong các Bài 15–17.

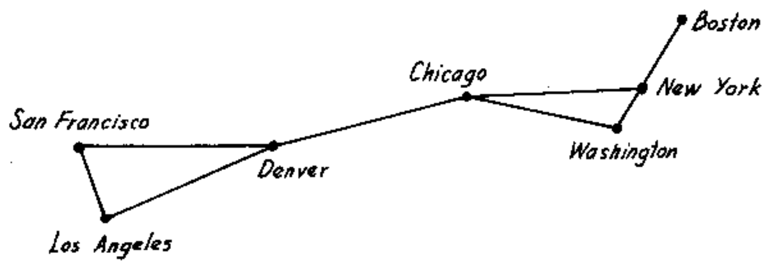
19*. Giả sử v là đỉnh đầu mút của một cạnh cắt. Chỉ ra rằng v là đỉnh cắt nếu và chỉ nếu nó không là đỉnh treo.

20*. Chỉ ra rằng đỉnh c trong đơn đồ thị liên thông G là đỉnh cắt nếu và chỉ nếu có các đỉnh u và v cả hai đều khác c sao cho mọi đường đi giữa u và v đều qua c.

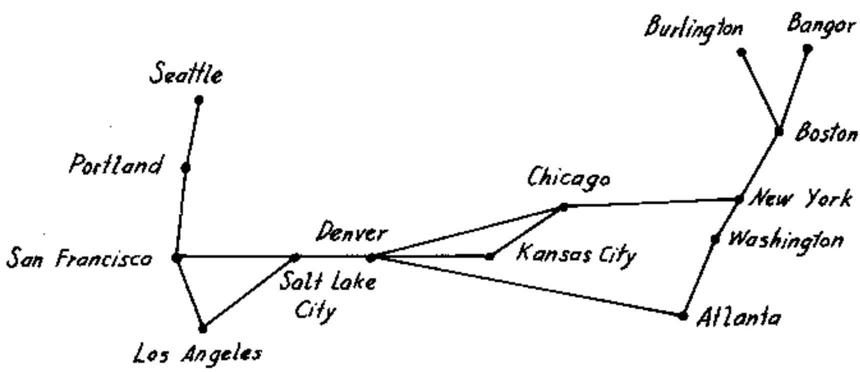
21*. Chỉ ra rằng một đơn đồ thị với ít nhất hai đỉnh sẽ có ít nhất hai đỉnh không là đỉnh cắt.

22*. Chứng tỏ một cạnh trong đơn đồ thị là cạnh cắt nếu và chỉ nếu cạnh này không có mặt trong bất kỳ chu trình đơn nào của đồ thị.

23. Đường truyền thông trong mạng máy tính sẽ được cung cấp đường dự phòng nếu có sự cố làm cho không thể gửi một thông báo nào đi được. Với mỗi mạng truyền thông sau đây hãy xác định các đường cần phải được dự phòng.



a)



b)

Các đỉnh cơ sở *trong một đồ thị có hướng là tập S các đỉnh sao cho từ một đỉnh nào đó thuộc S có đường đi tới mọi đỉnh của đồ thị không thuộc và không có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ thuộc tập S.*

24. Hãy tìm các đỉnh cơ sở cho mỗi đồ thị có hướng cho trong các Bài tập 7–9 ở Tiết 7.2.

25. Hãy nêu ý nghĩa của các đỉnh cơ sở trong đồ thị ảnh hưởng (Ví dụ 2, Tiết 7.1). Hãy tìm các đỉnh cơ sở của đồ thị ảnh hưởng trong Ví dụ này.

26. Chứng tỏ rằng nếu đơn đồ thị liên thông G là hợp của các đồ thị G_1 và G_2, khi đó G_1 và G_2 có ít nhất một đỉnh chung.

27*. Chỉ ra rằng nếu đơn đồ thị G có k thành phần liên thông và các thành phần liên thông này tương ứng có $n_1, n_2, ..., n_k$ đỉnh, khi đó số các cạnh của G không vượt quá $\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2)$

28*. Sử dụng Bài tập 27 hãy chỉ ra rằng một đơn đồ thị với n đỉnh và k thành phần liên thông có nhiều nhất $(n - k)(n - k + 1)/2$ cạnh. (*Gợi ý* : Trước tiên hãy chỉ ra rằng

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq n^2 - (k - 1)(2n - k)$$

trong đó n_i là số đỉnh của thành phần liên thông thứ *i*).

29*. Chỉ ra rằng đơn đồ thị n đỉnh là liên thông nếu nó có nhiều hơn $(n - 1)(n - 2)/2$ cạnh.

30. Hãy mô tả ma trận liền kề của đồ thị với n thành phần liên thông khi các đỉnh của đồ thị được liệt kê sao cho các đỉnh trong mỗi thành liên thông được liệt kê liên tiếp.

31. Có bao nhiêu đơn đồ thị liên thông không đẳng cấu với n đỉnh, khi n bằng

a) 2? b) 3?

c) 4? d) 5?

32. Hãy giải thích cách dùng Định lý 2 để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh v tới đỉnh w trong một đồ thị.

33. Dùng Định lý 2 tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa đỉnh a và đỉnh f trong đa đồ thị trên Hình 1.

34. Dùng Định lý 2 tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh c trong đồ thị có hướng trong Bài tập 2.

35. Cho P_1 và P_2 là hai đường đi đơn giữa các đỉnh u và v trong đơn đồ thị G không chứa cùng một tập các cạnh. Chỉ ra rằng có một chu trình đơn trong G.

36. Chứng tỏ rằng sự tồn tại của chu trình đơn độ dài k, trong đó k là nguyên dương lớn hơn 2, là một bất biến đẳng cấu.

37. Hãy giải thích cách dùng Định lý 2 để xác định xem một đồ thị có là liên thông hay không.

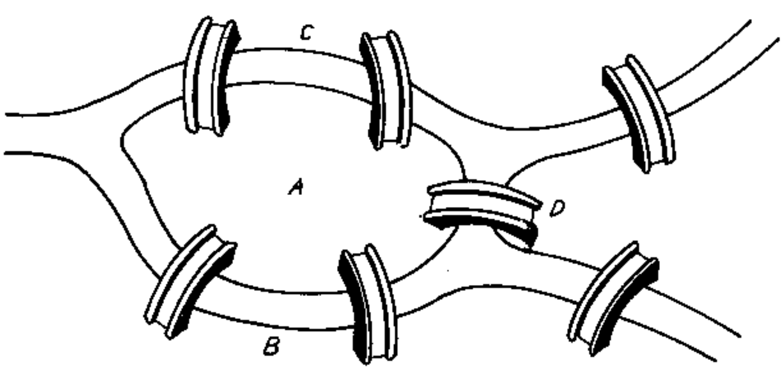
38. Dùng Bài tập 37 chỉ ra rằng đồ thị G trong Hình 2 là liên thông còn đồ thị H trên hình này thì không liên thông.

7.5. ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

MỞ ĐẦU

Thành phố Konigsberg thuộc Phổ (bây giờ gọi là Kaliningrad thuộc Cộng hòa Nga), được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel. Các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ thứ 18 người ta đã xây bẩy chiếc cầu nối các vùng này với nhau. Hình 1 vẽ các vùng và các cầu qua sông của thành phố.

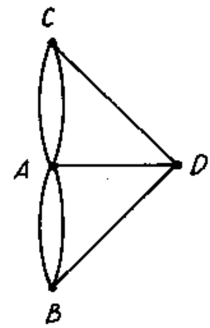
Vào chủ nhật, người dân ở đây thường đi bộ dọc theo các phố. Họ tự hỏi không biết có thể xuất phát tại một địa điểm nào đó trong thành



Hình 1. Thành phố Konigsberg ở thế kỷ 18.

phố đi qua tất cả các cầu, mỗi chiếc cầu không đi qua nhiều hơn một lần, rồi lại trở về điểm xuất phát được không.

Nhà toán học Thụy sỹ, Leonhard Euler, đã giải bài toán này. Lời giải của ông công bố năm 1736, có thể là một ứng dụng đầu tiên của lý thuyết đồ thị. Euler đã nghiên cứu bài toán này, mô hình nó bằng một đa đồ thị, bốn vùng được biểu diễn bằng 4 đỉnh, các cầu là các cạnh, như trên Hình 2.



Hình 2. Mô hình đa đồ thị của thành phố Konigsberg.

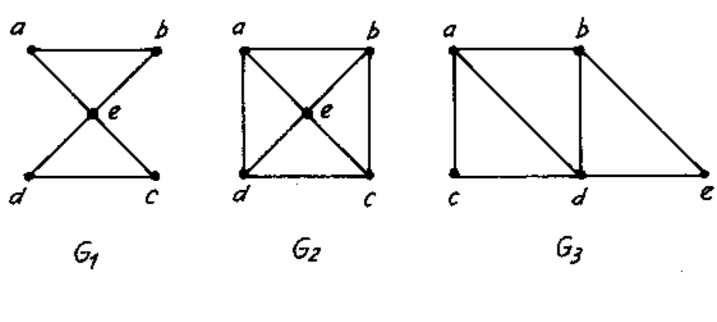
Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu mỗi cầu đi qua không quá một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình này như sau: Có tồn tại chu trình đơn trong đa đồ thị chứa tất cả các cạnh?

ĐỊNH NGHĨA 1. Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là *chu trình Euler. Đường đi Euler* trong G là đường đi đơn chứa mọi cạnh của G.

Các ví dụ sau minh họa khái niệm chu trình và đường đi Euler.

Ví dụ 1. Đồ thị nào trên Hình 3 có chu trình Euler? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler không?

Giải: Đồ thị G_1 có chu trình Euler, ví dụ a, e, c, d, e, b, a. Cả hai đồ thị G_2 và G_3 đều không có chu trình Euler (độc giả tự kiểm tra lại điều

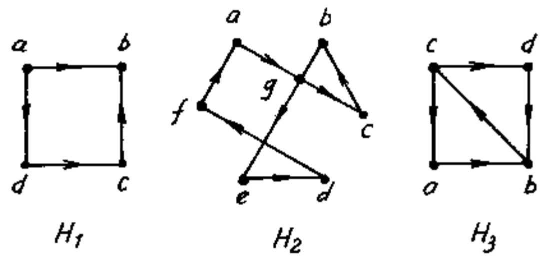


Hình 3. Các đồ thị vô hướng G_1, G_2 và G_3.

này). Tuy nhiên G_3 có đường đi Euler, cụ thể là *a, c, d, e, b, d, a, b*. G_2 không có đường đi Euler (độc giả tự kiểm tra lại).

■

Ví dụ 2. Đồ thị nào trên Hình 4 có chu trình Euler? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler không?



Hình 4. Các đồ thị có hướng H_1, H_2 và H_3.

Giải: Đồ thị H_2 có chu trình Euler, ví dụ *a, g, c, b, g, e, d, f, a*. Cả hai đồ thị H_1 và H_3 đều không có chu trình Euler (độc giả tự kiểm tra lại điều này). H_3 có đường đi Euler, cụ thể là *c, a, b, c, d, b*, nhưng H_1 không có đường đi Euler (độc giả tự kiểm tra lại).

CÁC ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO CHU TRÌNH VÀ ĐƯỜNG ĐI EULER

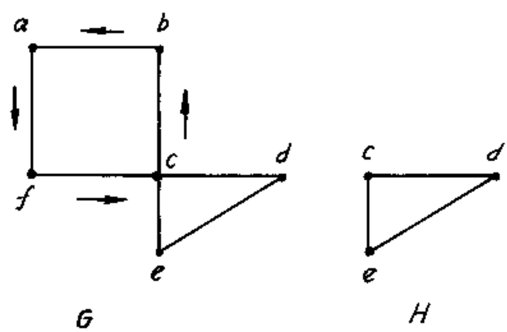
Có các tiêu chuẩn rất đơn giản để khẳng định một đa đồ thị có chu trình hoặc đường đi Euler hay không. Euler đã phát hiện ra các tiêu chuẩn này khi giải bài toán cầu Konigsberg. Chúng ta giả sử trong mục này chỉ xét các đồ thị hữu hạn, tức là các đồ thị có một số hữu hạn các đỉnh và các cạnh.

Chúng ta có thể nói gì nếu một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler? Khi đó ta có thể chỉ ra mọi đỉnh của nó có bậc chẵn. Thật vậy, trước tiên ta thấy chu trình Euler bắt đầu bằng đỉnh *a* và tiếp tục bằng cạnh liên thuộc với *a*, tức là cạnh $\{a, b\}$. Cạnh $\{a, b\}$ góp 1 vào *deg(a)*. Mỗi lần khi chu trình đi qua một đỉnh, nó tăng thêm 2 đơn vị cho bậc của đỉnh đó, vì chu trình đi vào một đỉnh bằng một cạnh liên thuộc và rời khỏi đỉnh này bằng một cạnh liên thuộc khác. Cuối cùng chu trình kết thúc ở đỉnh mà nó xuất phát, do vậy nó tăng thêm 1 vào *deg(a)*. Do đó *deg(a)* phải là một số chẵn, bởi vì chu trình góp 1 khi bắt đầu và 1 khi kết thúc, góp 2 mỗi lần đi qua *a*. Đỉnh khác *a* cũng có bậc chẵn vì chu trình góp 2 đơn vị vào bậc của nó mỗi lần nó đi qua đỉnh này. Do đó ta kết luận, nếu đồ thị liên thông có chu trình Euler thì mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

Có phải điều kiện cần để tồn tại chu trình Euler này cũng là điều kiện đủ? Tức là, có phải nếu tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn thì nhất định tồn tại chu trình Euler trong một đa đồ thị liên thông?

Giả sử G là một đa đồ thị liên thông và bậc của mỗi đỉnh đều là một số chẵn. Chúng ta sẽ xây dựng một chu trình đơn bắt đầu từ đỉnh a tùy ý của G. Gọi $x_o = a$. Trước tiên ta chọn tùy ý cạnh $\{x_o, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, ..., $\{x_{n-1}, x_n\}$ càng dài càng tốt. Ví dụ trong đồ thị G trên Hình 5 ta bắt đầu tại a và chọn liên tiếp các cạnh $\{a,f\}$, $\{f, c\}$, $\{c, b\}$ và $\{b, a\}$.

Đường đi sẽ kết thúc vì đồ thị có một số hữu hạn các đỉnh. Nó bắt đầu tại a với cạnh có dạng $\{a, x\}$ và kết thúc tại a với cạnh dạng $\{y, a\}$. Điều này xảy ra là bởi vì mỗi lần đường đi qua một đỉnh bậc chẵn nó chỉ dùng một cạnh để vào đỉnh này như vậy ít nhất vẫn còn một cạnh nữa để ra khỏi đỉnh này. Đường này có thể dùng tất cả các cạnh hoặc có thể không.



***Hình** 5.* Xây dựng chu trình Euler trong G.

Nếu tất cả các cạnh được sử dụng thì ta nhận được chu trình Euler. Trong trường hợp ngược lại, ta gọi H là đồ thị con nhận được từ G bằng cách xóa các cạnh đã dùng và các đỉnh không liên thuộc với các cạnh còn lại. Chẳng hạn khi xóa đi chu trình a, f, c, b, a khỏi đồ thị trên Hình 5, chúng ta nhận được đồ thị con đặt tên là H.

Vì G là liên thông, H có ít nhất một đỉnh chung với chu trình đã bị xóa. Gọi w là đỉnh như vậy. (Trong ví dụ của ta đó là đỉnh c).

Mỗi đỉnh của H có bậc chẵn (vì tất cả các đỉnh của G bậc chẵn, và với mỗi đỉnh ta xóa đi từng cặp liên thuộc với nó để tạo ra H). Lưu ý rằng H có thể là không liên thông. Bắt đầu từ w ta xây dựng đường đi đơn trong H bằng cách chọn càng nhiều cạnh càng tốt như đã làm đối với G. Đường này phải kết thúc tại w. Chẳng hạn, trên Hình 5, c, d, e, c là một đường đi trong H. Tiếp theo ta tạo một chu trình trong G bằng cách ghép chu trình trong H và chu trình ban đầu trong G (điều này làm được vì w là một đỉnh của chu trình này). Thực hiện điều này trên đồ thị của Hình 5 ta được chu trình a, f, c, d, e, c, b, a.

Tiếp tục quá trình này cho tới khi tất cả các đỉnh được sử dụng (Quá trình này phải kết thúc vì chỉ có một số hữu hạn các cạnh trong đồ thị). Và do vậy ta đã xây dựng được chu trình Euler. Cách xây dựng chu trình đã chứng tỏ nếu các đỉnh của một đa đồ thị liên thông có bậc chẵn thì đồ thị có chu trình Euler.

Tổng kết những kết quả này ta có Định lý 1.

ĐỊNH LÝ 1. Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler nếu và chỉ nếu mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

Bây giờ chúng ta giải bài toán cầu Konigsberg. Vì đa đồ thị biểu diễn các cầu này như trên Hình 2, có 4 đỉnh bậc lẻ, nên không tồn tại chu trình Euler. Không có cách nào để một người có thể xuất phát tại một điểm nào đó, đi qua mỗi chiếc cầu đúng một lần và lại trở về điểm xuất phát.

Thuật toán 1 đưa ra một thủ tục xây dựng chu trình Euler theo cách đã bàn luận ở trên. (Vì chu trình được chọn tùy ý nên có một vài điều không rõ ràng. Chúng ta không khó khăn mà loại bỏ sự mập mờ này bằng cách chỉ rõ mỗi bước của thủ tục một cách chính xác hơn).

THUẬT TOÁN 1. Xây dựng chu trình Euler.

procedure *Euler* (G : đa đồ thị liên thông với tất cả các đỉnh bậc chẵn)
chu trình := chu trình trong *G* bắt đầu tại một đỉnh được chọn tùy ý và các cạnh được thêm vào để xây dựng đường đi qua các đỉnh và cuối cùng quay lại đỉnh này.

H := *G* với các cạnh của *G* sau khi bỏ đi chu trình

while *H* còn các cạnh

begin

Chu trình con := chu trình trong *H* bắt đầu tại đỉnh trong *H* cũng là đỉnh đầu mút của một cạnh thuộc chu trình.

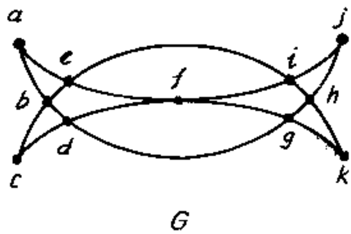
H : = *H* với các cạnh của *chu trình con*, và tất cả các đỉnh cô lập bị loại bỏ.

chu trình : = *chu trình* với *chu trình con* được chèn vào tại một đỉnh thích hợp

end {*chu trình* là chu trình Euler}

Trong ví dụ sau cho ta cách dùng đường đi và chu trình Euler để giải các bài toán trò chơi.

Ví dụ 3. Nhiều trò chơi yêu cầu bạn vẽ một bức tranh bằng sự chuyển động liên tục và không được nâng bút khỏi mặt giấy, sao cho không phần nào của bức tranh được vẽ lại. Chúng ta có thể giải bài toán này bằng chu trình và đường đi Euler. Ví dụ có thể vẽ **thanh mã tấu của Mohammed** trên Hình 6 bằng cách như vậy được không, nếu bắt đầu và kết thúc vẽ tại cùng một điểm?



Hình 6. Thanh mã tấu của Mohammed.

Giải: Chúng ta có thể dễ dàng giải bài toán này. Vì tất cả các đỉnh của đồ thị trên Hình 6 có bậc chẵn nên nó có chu trình Euler. Bây giờ ta sẽ dùng Thuật toán 1 để xây dựng chu trình đó. Trước tiên ta xây dựng chu trình $a, b, d, c, b, e, i, f, e, a$. Để nhận được đồ thị con H ta xóa các cạnh trong chu trình này và tất cả các đỉnh trở thành cô lập khi ta xóa các cạnh đó. Sau đó ta lại xây dựng được chu trình $d, g, h, j, i, h, k, g, f, d$ trong H. Khi đó tất cả các cạnh của đồ thị G đã được sử dụng. Ghép chu trình mới vào chu trình trước tại các vị trí thích hợp, ta sẽ nhận được chu trình Euler $a, b, d, g, h, j, i, h, k, g, f, d, c, b, e, i, f, e, a$. Chu trình này cho cách vẽ thanh mã tấu không nâng bút khỏi mặt giấy hoặc vẽ lại một phần của bức vẽ.

■

Một thuật toán khác để xây dựng chu trình Euler, gọi là thuật toán Fleury, được mô tả trong các bài tập ở cuối mục này.

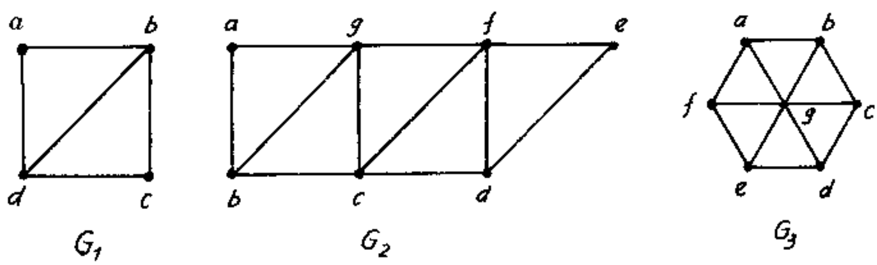
Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng một đa đồ thị liên thông có đường đi Euler (và không có chu trình Euler) nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ. Trước tiên, ta giả sử đồ thị đã cho có đường đi Euler từ a tới b, nhưng không có chu trình Euler. Cạnh đầu tiên của đường đi góp 1 vào $deg(a)$. Sau đó mỗi lần đường đi lại qua đỉnh a thì nó tăng thêm 2 đơn vị cho $deg(a)$. Do vậy, a là một đỉnh bậc lẻ. Cạnh cuối cùng của đường đi góp 1 cho $deg(b)$ và mỗi lần đi qua b nó cũng tăng thêm 2 cho $deg(b)$. Vì thế bậc của b là lẻ. Các đỉnh trung gian đều có bậc chẵn vì mỗi lần đường đi tới rồi lại rời nó nên tăng 2 đơn vị cho bậc của nó. Vậy, đồ thị đã cho có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

Bây giờ ta giả sử ngược lại, đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ, chẳng hạn a và b. Ta xét đồ thị rộng hơn tạo nên bằng cách thêm một cạnh nối a với b vào đồ thị xuất phát. Khi đó bậc của tất cả các đỉnh của đồ thị mới này đều là số chẵn, theo Định lý 1, nó có chu trình Euler. Xóa cạnh mới vẽ thêm vào ta sẽ nhận được đường đi Euler của đồ thị xuất phát.

Định lý sau đây sẽ tổng kết những kết quả này.

ĐỊNH LÝ 2. Đa đồ thị liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Ví dụ 4. Đồ thị nào trên Hình 7 có đường đi Euler?



Hình *7.* Ba đồ thị vô hướng.

Giải: G_1 có đúng hai đỉnh bậc lẻ là b và d. Do đó, nó có đường đi Euler nhận b và d là các điểm đầu mút. Một trong các đường đi Euler là d, a, b, c, d, b. Tương tự G_2 cũng có đúng hai đỉnh bậc lẻ là b và d. Do đó nó có đường đi Euler nhận b và d là các điểm đầu mút. Một trong các đường đi Euler là $b, a, g, b, c, g, f, c, d, f, e, d$. Còn G_3 không có đường đi Euler vì nó có 6 đỉnh bậc lẻ.

■

Bây giờ trở lại bài toán cầu Konigsberg : Có thể xuất phát từ một địa điểm nào đó trong thành phố đi qua tất cả các cầu (mỗi cầu đi qua đúng một lần) và kết thúc hành trình tại một điểm nào đó trong thành phố được không? Như đã thấy đa đồ thị biểu diễn các cầu ở Konigsberg có 4 đỉnh bậc lẻ, theo Định lý 2 không có đường đi Euler trong đồ thị này. Vì vậy không thể có hành trình như bài toán nêu ra.

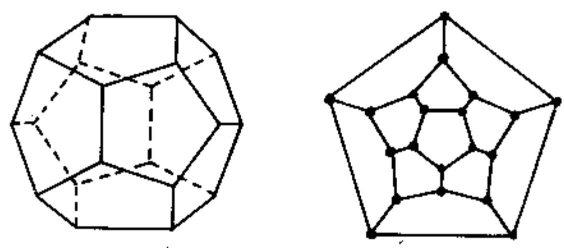
Điều kiện cần và đủ để tồn tại đường đi và chu trình Euler trong một đồ thị có hướng sẽ được bàn luận trong các Bài tập ở cuối Tiết này.

ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH HAMILTON

Chúng ta đã nghiên cứu điều kiện cần và đủ để tồn tại đường đi và chu trình đi qua mọi cạnh của đồ thị, mỗi cạnh qua đúng một lần. Liệu ta có thể làm tương tự đối với đường đi và chu trình chứa mọi đỉnh của đồ thị đúng một lần không?

ĐỊNH NGHĨA 2. Đường đi $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đường đi Hamilton* nếu $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ và $x_i \neq x_j$ với $0 \leq i < j \leq n$. Chu trình $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 1)$ trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là **chu trình Hamilton** nếu $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ là đường đi Hamilton.

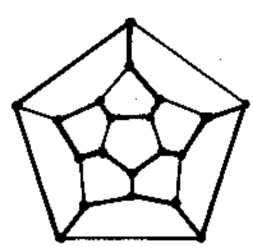
Những thuật ngữ này xuất phát từ trò chơi đố vui do William Rowan Hamilton,, nhà toán học người Ailen, nghĩ ra năm 1857. Giả sử ta có một khối 12 mặt, mỗi mặt là một hình ngũ giác đều như trên Hình 8a). Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối này được đặt bằng tên của một thành phố. Hãy tìm một đường xuất phát từ một thành phố, đi dọc theo các cạnh của khối, ghé thăm mỗi một trong 19 thành phố còn lại đúng một lần, cuối cùng lại trở về thành phố ban đầu.



a) b)

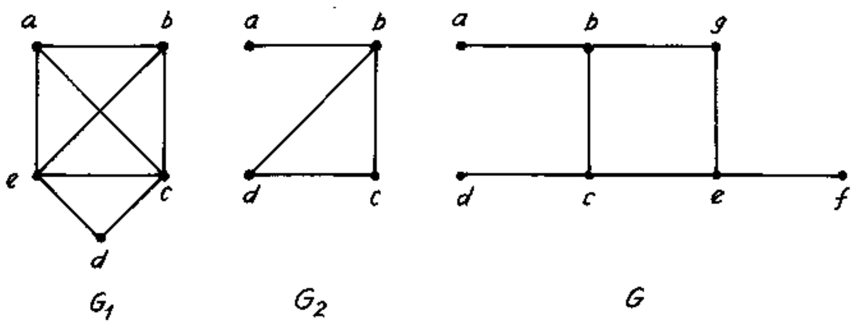
Hình 8. Trò chơi "Vòng quanh thế giới" của Hamilton.

Chúng ta xét bài toán dưới dạng tương đương : Trong đồ thị trên Hình 8b có tồn tại hay không một chu trình đi qua mọi đỉnh, mỗi đỉnh đúng một lần? Lời giải của trò chơi đố vui Hamilton được biểu diễn trên Hình 9.



Hình 9. Lời giải của trò chơi "Vòng quanh thế giới".

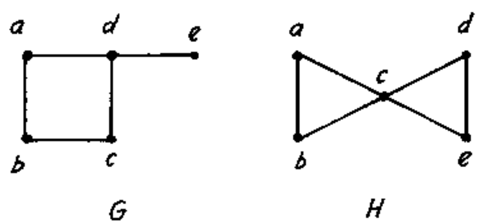
Ví dụ 5. Đồ thị nào trong các đồ thị đơn trên Hình 10 có chu trình Hamilton ? Nếu không, có đường đi Hamilton không?



Hình 10. Ba đơn đồ thị.

Giải: G_1 có chu trình Hamilton a, b, c, d, e, a. Không có chu trình Hamilton trong G_2 (vì bất cứ chu trình nào chứa mọi đỉnh cũng phải chứa cạnh $\{a, b\}$ hai lần). Nhưng G_2 có đường đi Hamilton a, b, c, d. G_3 không có cả chu trình Hamilton lẫn đường đi Hamilton, vì bất kỳ đường đi nào chứa mọi đỉnh cũng phải chứa một trong các cạnh $\{a, b\}$, $\{d, c\}$ và $\{e, f\}$ quá một lần.

Ví dụ 6. Hãy chỉ ra rằng không một đồ thị nào trên Hình 11 có chu trình Hamilton.



Hình 11. Hai đồ thị không có chu trình Hamilton.

Giải: Không có chu trình Hamilton trong đồ thị G vì G có đỉnh bậc 1, đó là đỉnh e.

Bây giờ xét H. Vì bậc của các đỉnh a, b, d và e đều bằng 2 nên mọi cạnh liên thuộc với các đỉnh này phải thuộc chu trình Hamilton nào đó. Dễ dàng thấy rằng không tồn tại chu trình Hamilton trong H vì nếu ngược lại thì chu trình đó phải chứa cả 4 cạnh liên thuộc với c, điều này là không thể xảy ra.

Ví dụ 7. Chỉ ra rằng K_n có chu trình Hamilton với mọi $n \geqslant 3$.

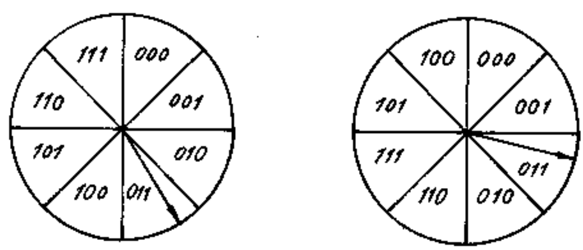
Giải: Chúng ta có thể xây dựng chu trình Hamilton trong K_n xuất phát từ bất kỳ đỉnh nào. Một chu trình như thế có thể xây dựng bằng cách ghé thăm các đỉnh theo một thứ tự tùy chọn, sao cho đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, mọi đỉnh đều được ghé thăm đúng một lần. Điều đó là có thể vì giữa hai đỉnh bất kỳ của K_n đều có các cạnh.

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu định lý cho ta điều kiện đủ để tồn tại chu trình Hamilton. Đây là một trong số các định lý quen biết.

ĐỊNH LÝ 3. Giả sử G là một đơn đồ thị liên thông với n đỉnh trong đó $n \geqslant 3$, khi đó G có chu trình Hamilton nếu bậc của mỗi đỉnh ít nhất bằng $n/2$.

Bây giờ ta sẽ đưa ra một ứng dụng của chu trình Hamilton để mã hóa.

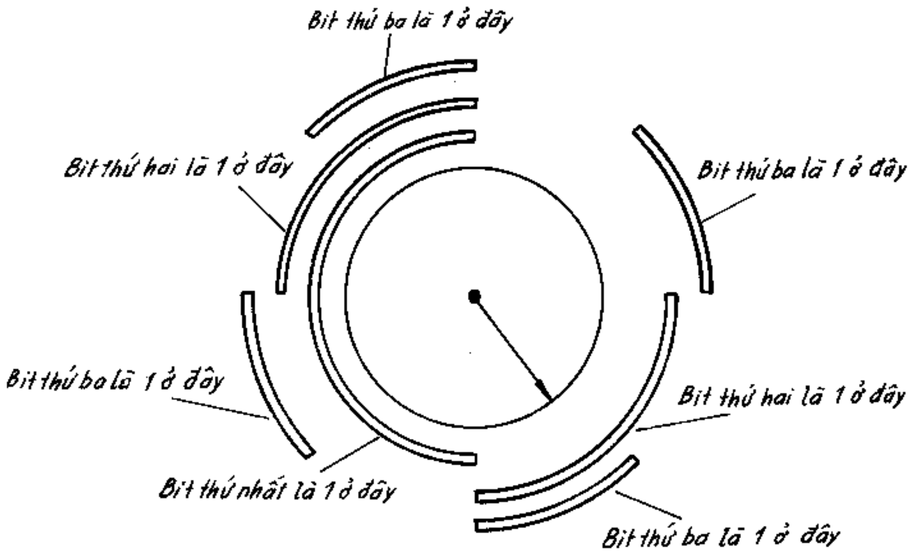
Ví dụ 8. *Mã Gray.* Vị trí của kim chỉ thị xoay tròn có thể được biểu điễn dưới dạng số. Một cách thể hiện là chia đường tròn thành 2^n cung có độ dài hằng nhau và cho mỗi cung ứng với một xâu nhị phân độ dài n. Trên Hình 12 biểu điễn 2 cách chuyển đổi nhờ các xâu nhị phân độ dài 3.

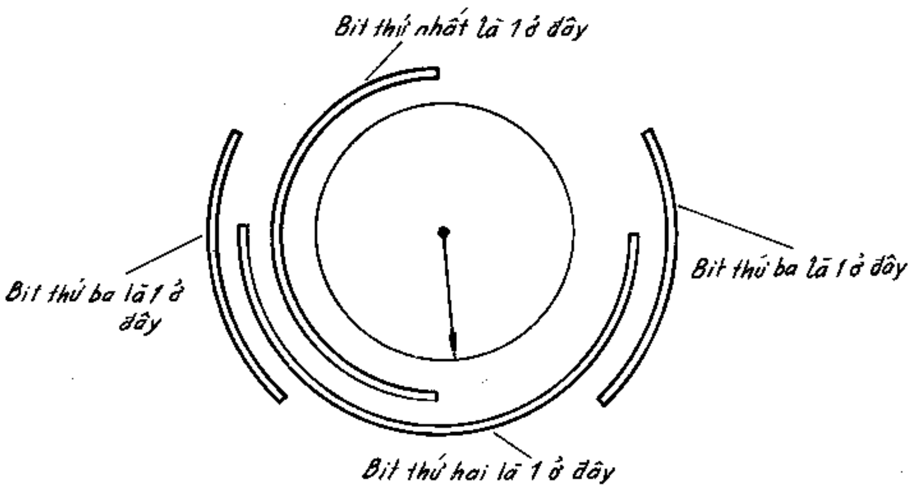


Hình 12. Chuyển đổi vị trí của kim chỉ thị thành dạng số.

Biểu diễn số của vị trí của kim chỉ thị có thể xác định bằng n chỗ tiếp xúc. Mỗi tiếp xúc được dùng để đọc một bit trong biểu diễn số của vị trí. Điều này được minh họa trên Hình 13.

Khi kim ở gần giáp ranh của hai cung, có thể dễ lầm lẫn khi đọc vị trí của nó. Điều này có thể gây nên các lỗi lớn khi đọc các xâu nhị phân. Ví dụ, theo sơ đồ mã hóa ở Hình 12a, nếu có một lỗi nhỏ khi xác định vị trí của kim, xâu nhị phân 100 được đọc thay cho 011. Cả 3 bit đều sai.

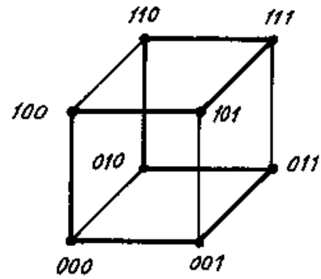




Hình 13. Biểu diễn số của vị trí kim chỉ thị.

Để giảm đến mức tối thiểu ảnh hưởng của lỗi xác định vị trí của kim, người ta gán các xâu nhị phân cho 2^n cung sao cho hai xâu biểu diễn bằng hai cung kề nhau chỉ sai khác nhau một bit. Điều này được thể hiện trong sơ đồ mã hóa trên Hình 12b. Lỗi khi xác định vị trí của kim chỉ thị cho xâu 010 thay cho xâu 011. Chỉ một bit bị sai.

Mã Gray là cách gán nhãn cho các cung của đường tròn sao cho các cung kề nhau được gán bằng các xâu khác nhau đúng một bit. Cách gán trong Hình 12b là một mã Gray. Chúng ta có thể tìm mã Gray bằng cách liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài n sao cho mỗi xâu chỉ khác xâu trước nó tại đúng một vị trí. Và xâu cuối cùng khác với xâu đầu tiên cũng chỉ ở một vị trí. Chúng ta có thể mô hình bài toán này bằng khối n chiều Q_n. Cái mà chúng ta cần để giải bài toán này là một chu trình Hamilton trong Q_n. Các chu trình Hamilton như thế dễ dàng tìm được. Ví dụ, chu trình Hamilton cho Q_3 được thể hiện trên Hình 14. Dãy các xâu nhị phân sai khác nhau đúng một bit được sinh bởi chu trình Hamilton là 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100. ∎

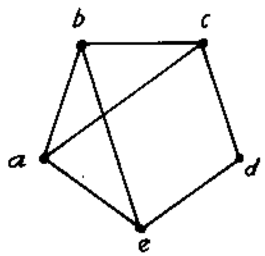


Hình 14. Chu trình Hamilton đối với Q_3

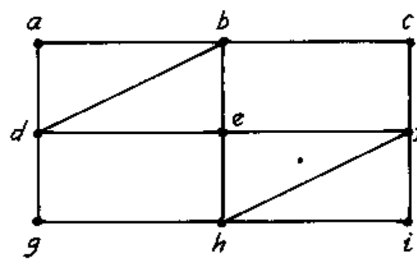
BÀI TẬP

Trong các Bài tập 1–7 hãy xác định xem mỗi đồ thị có chu trình Euler hay không. Xây dựng chu trình đó, nếu nó tồn tại.

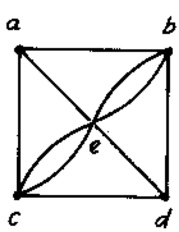
1.



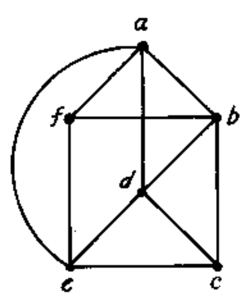
2.



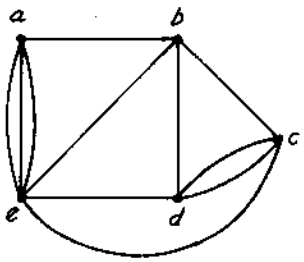
3.



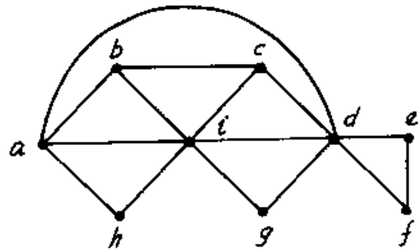
4.



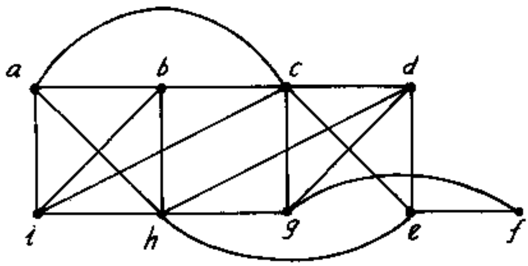
5.



6.



7.



8. Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 1 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

9. Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 2 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

10. Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 3 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

11. Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 4 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

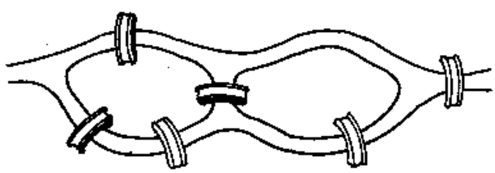
12. Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 5 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

13. Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 6 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

14. Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 7 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

15. Ngoài 7 chiếc cầu đã xây dựng từ thế kỷ thứ 18, ở Kaliningrad (Konigsberg), người ta xây thêm hai chiếc nữa nối khu B với khu C và khu B với khu D. Một người nào đó có thể đi qua 9 chiếc cầu, mỗi chiếc đi qua đúng một lần, và lại trở về nơi xuất phát được không?

16. Một người nào đó có thể đi qua những chiếc cầu như trên hình vẽ sau, mỗi chiếc cầu đi qua đúng một lần, và lại trở về nơi xuất phát được không?

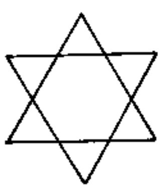


17. Khi nào có thể sơn vạch phân đôi các đường phố trong một thành phố mà không cần đi qua một phố quá một lần? (Giả sử tất cả các phố đều là đường hai chiều)

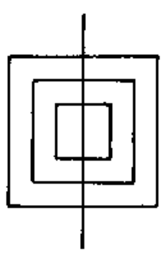
18. Hãy lập một thủ tục tương tự như Thuật toán 1 để xây dựng các đường đi Euler trong một đa đồ thị.

Trong các Bài tập 19-21 hãy xác định xem có thể vẽ bức tranh bằng một nét liền, không nâng bút khỏi giấy vẽ hoặc vẽ lại một phần bức tranh đó hay không.

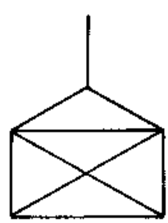
19.



20.



21.

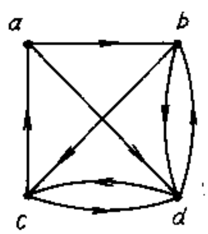


22*. Chỉ ra rằng trong một đa đồ thị có hướng không có đỉnh cô lập luôn tồn tại chu trình Euler nếu và chỉ nếu đồ thị là liên thông yếu đồng thời bậc–vào và bậc–ra của mỗi đỉnh là bằng nhau.

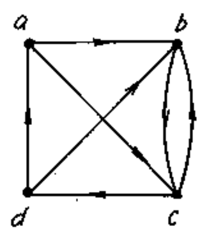
23*. Giả sử G là một đa đồ thị có hướng không có đỉnh cô lập. Chỉ ra rằng G có đường đi Euler, nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu đồ thị là liên thông yếu đồng thời bậc–vào và bậc–ra của tất cả các đỉnh là bằng nhau, trừ hai đỉnh, một đỉnh có bậc–vào lớn hơn bậc–ra một đơn vị, còn đỉnh kia có bậc–ra lớn hơn bậc–vào một đơn vị.

Trong các Bài tập 24-28 hãy xác định xem các đồ thị có hướng đã cho có chu trình Euler hay không. Xây dựng các chu trình này, nếu chúng tồn tại.

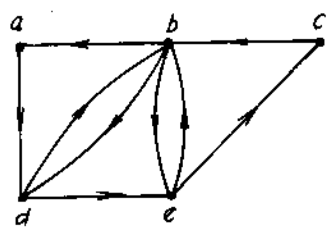
24.



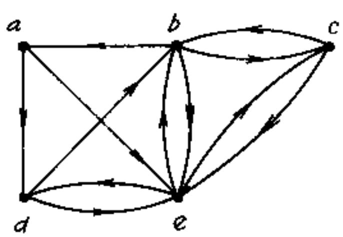
25.



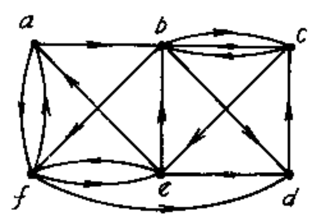
26.



27.



28.



29. Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 24 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

30. Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 25 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

31. Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 26 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

32. Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 27 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

33. Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 28 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

34*. Hãy thiết kế một thuật toán để xây dựng một chu trình Euler trong đồ thị có hướng.

35. Hãy thiết kế một thuật toán để xây dựng một đường đi Euler trong đồ thị có hướng.

36. Với giá trị nào của n các đồ thị sau đây có chu trình Euler?

a) K_n b) C_n

c) W_n d) Q_n

37. Với giá trị nào của n các đồ thị trong Bài 36 có đường đi nhưng không có chu trình Euler?

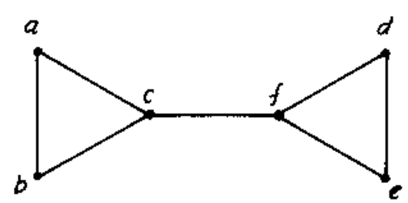
38. Với giá trị nào của m và n các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có :

a) chu trình Euler? b) đường đi Euler?

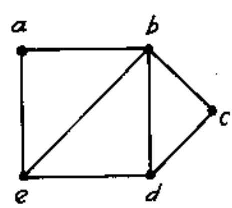
39. Hãy xác định số lần nhỏ nhất cần phải nâng bút khỏi giấy khi vẽ các đồ thị trong các Bài tập 1–7, mà không được vẽ lại bất kỳ phần nào của đồ thị.

Trong các Bài tập từ 40–46 hãy xác định xem các đồ thị đã cho có chu trình Hamilton hay không. Nếu có hãy tìm các chu trình như thế. Nếu không, hãy giải thích lý do vì sao không tồn tại.

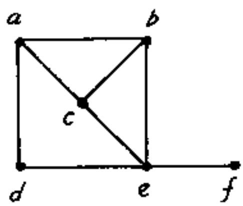
40.



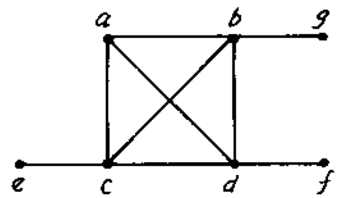
41.



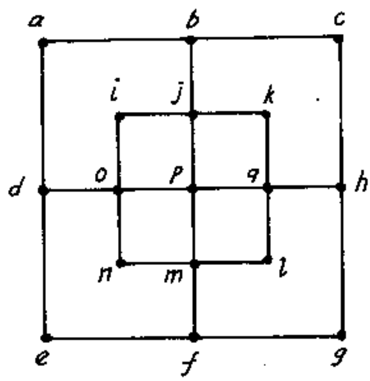
42.



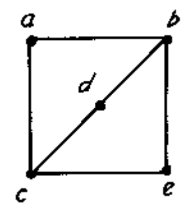
43.



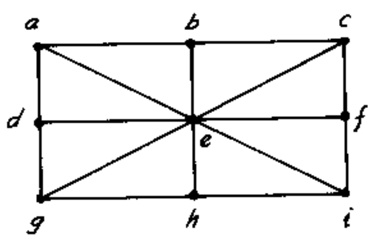
44.



45.



46.



47. Đồ thị trong Bài 40 có đường đi Hamilton không ? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

48. Đồ thị trong bài 41 có đường đi Hamilton không? Nếu có hãy tìm đường đi đó. Nếu không hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

49. Đồ thị trong bài 42 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

50. Đồ thị trong Bài 43 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

51. Đồ thị trong Bài 44 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

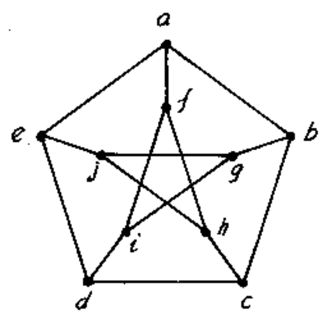
52. Đồ thị trong Bài 45 có đường đi Hamilton không? Nếu có hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

53*. Đồ thị trong Bài 46 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

54. Với giá trị nào của n các đồ thị trong Bài 36 có đường đi Hamilton?

55. Với giá trị nào của m và n các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton?

56*. Chỉ ra rằng đồ thị Petersen biểu diễn trên hình vẽ bên không có chu trình Hamilton, nhưng đồ thị con nhận được bằng cách xóa một đỉnh v và tất cả các đỉnh liền thuộc với v sẽ có chu trình Hamilton.



57*. Chỉ ra rằng có mã Gray bậc n, với n nguyên dương. Hay cũng vậy, chứng minh khối n chiều, $n > 1$ luôn luôn có chu trình Hamilton (*Gợi ý* : Dùng quy nạp toán học. Chỉ ra cách tạo mã Gray bậc n từ bậc $n - 1$).

Thuật toán Fleury *xây dựng chu trình Euler bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của một đa đồ thị liên thông và tạo chu trình bằng cách chọn lần lượt các cạnh. Mỗi lần một cạnh được chọn, nó được xóa đi. Các cạnh được chọn liên tiếp sao cho mỗi cạnh bắt đầu tại nơi mà cạnh liền trước kết thúc và chỉ chọn cầu nếu không còn cạnh nào khác để chọn.*

58. Dùng thuật toán Feleury để tìm chu trình trong đồ thị G của Ví dụ 5.

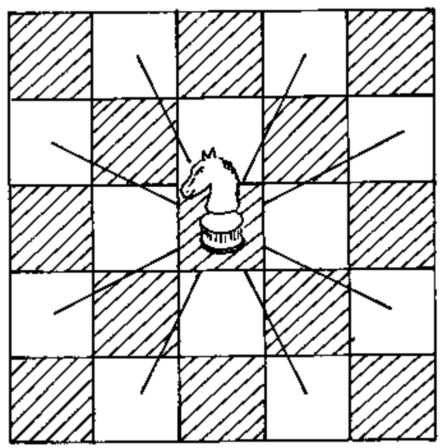
59*. Biểu diễn thuật toán Fleury dưới dạng giả mã.

60*. Chứng minh rằng thuật toán Fleury luôn luôn tạo ra chu trình Euler.

61*. Hãy đưa ra một biến thể của thuật toán Fleury để xây dựng đường đi Euler.

62. Một thông báo có thể gửi qua mạng máy tính để thực hiện các cuộc trắc nghiệm các đường truyền thông và các thiết bị. Các loại đường đi nào có thể được dùng để thử các đường truyền thông? Để thử các thiết bị?

63. Chứng tỏ rừng đồ thị phân đôi với một số lẻ các đỉnh không có chu trình Hamilton



Con mã có thể di chuyển hoặc là hai ô theo chiều ngang và một ô theo chiều dọc hoặc là hai ô theo chiều dọc và một ô theo chiều ngang, tức là nếu nó đang ở ô có tọa độ (x, y) thì nó có thể di chuyển tới một ô bất kỳ trong 8 ô $(x\pm2, y\pm1)$, $(x\pm1, y\pm2)$, nếu các ô đó vẫn còn nằm trong bàn cờ (Xem hình vẽ bên).

Hành trình của con mã *là dãy các di chuyển hợp lệ từ một ô nào đó đến tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần. Hành trình của con mã được gọi là* **tái lập** *nếu có một di chuyển đưa quân mã từ ô cuối cùng của hành trình về ô xuất phát. Chúng ta có thể mô hình các hành trình bằng đồ thị với các đỉnh là các ô của bàn cờ, và các cạnh nối hai đỉnh nếu quân mã có thể di chuyển hợp lệ giữa các ô biểu diễn bằng các đỉnh này.*

64. Vẽ đồ thị biểu diễn các di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ 3×3.

65. Vẽ đồ thị biểu diễn các di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ 3×4.

66. a) Chứng minh rằng việc tìm hành trình trên bàn cờ $m \times n$ là tương đương với việc tìm đường đi Hamilton trên đồ thị biểu diễn các di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ này.

b) Chứng minh rằng việc tìm hành trình tái lập trên bàn cờ $m \times n$ là tương đương với việc tìm chu trình Hamilton trên đồ thị tương ứng.

67*. Chứng tỏ có hành trình của quân mã trên bàn cờ 3×4.

68*. Chứng tỏ không có hành trình của quân mã trên bàn cờ 3×3.

69*. Chứng tỏ không có hành trình của quân mã trên bàn cờ 4×4.

70. Chứng tỏ đồ thị biểu diễn di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ $m \times n$, với mọi m, n nguyên dương là đồ thị phân đôi.

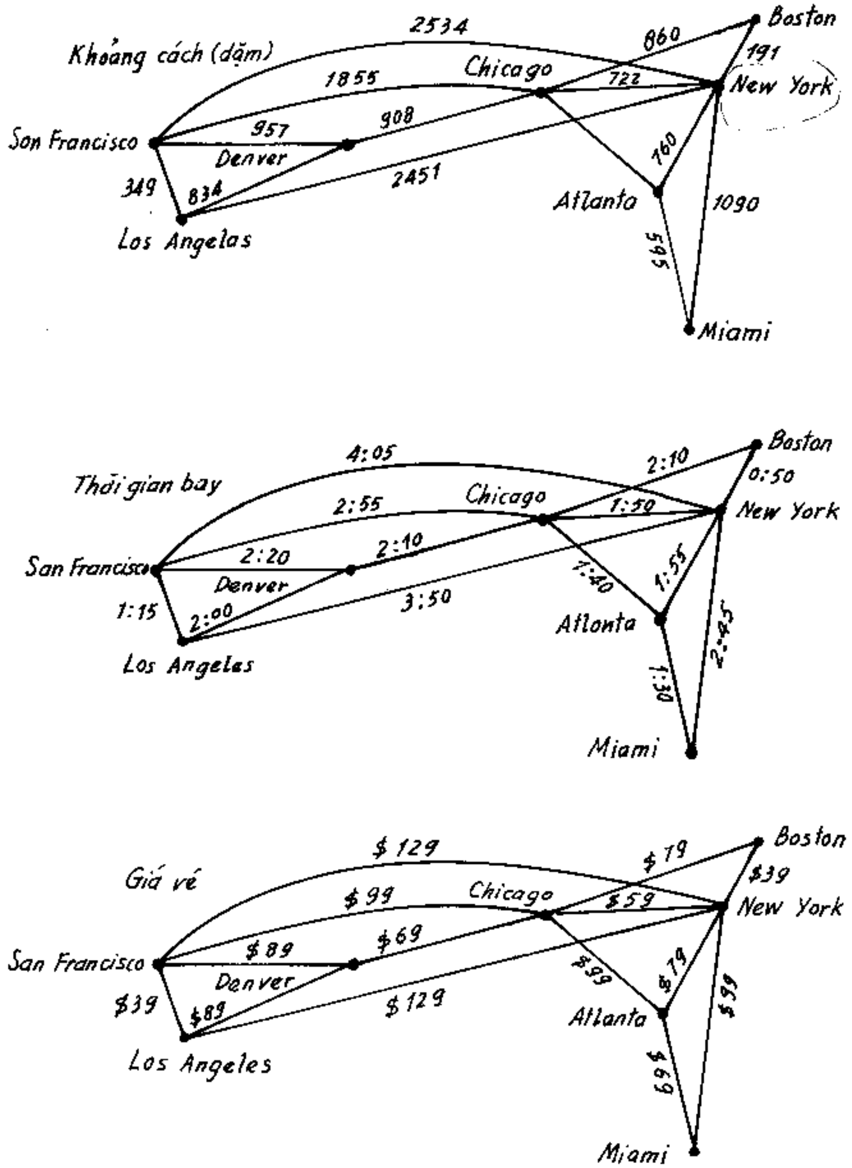
71. Chứng tỏ rằng không có hành trình tái lập của quân mã trên bàn cờ $m \times n$, với mọi m, n lẻ.
(Gợi ý : Dùng các Bài tập 63, 66b và 70).

72*. Chứng tỏ rằng có hành trình của quân mã trên bàn cờ 8×8.
(Gợi ý : Ta có thể xây dựng hành trình bằng phương pháp Warnsdorff Xuất phát từ ô bất kỳ và luôn luôn di chuyển tới ô mà số ô chưa dùng nối với nó là nhỏ nhất. Bằng cách này có thể xây dựng được hành trình của quân mã nếu nó tồn tại).

7.6. BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

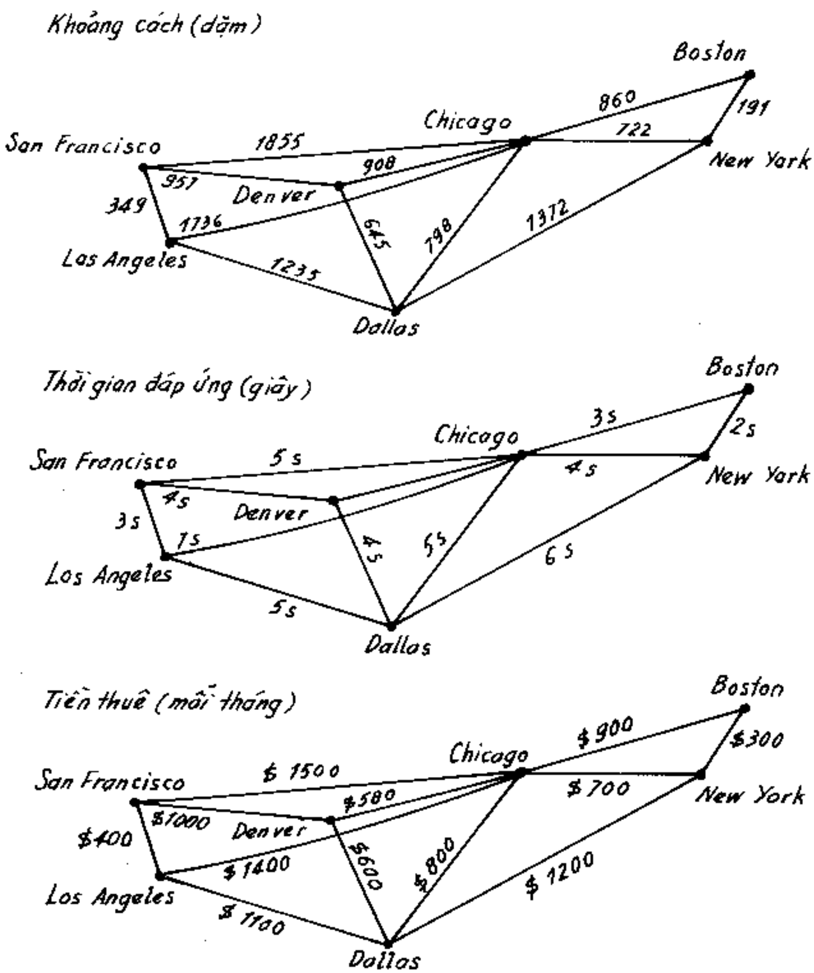
MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán có thể mô hình bằng **đồ thị có trọng số**. Đó là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gán một con số (nguyên hoặc thực) gọi là **trọng số** ứng với cạnh đó. Ví dụ ta cần mô hình một hệ thống đường hàng không. Trong mô hình cơ sở trước đây, mỗi thành phố được biểu diễn bằng một đỉnh, mỗi chuyến bay là một cạnh nối hai đỉnh tương ứng. Nếu trong bài toán đang xét ta cần tính đến khoảng cách giữa các thành phố thì ta cần gán cho mỗi cạnh của đồ thị cơ sở trên khoảng cách giữa các thành phố tương ứng. Nếu quan tâm tới đến thời gian của mỗi chuyến bay thì ta sẽ gán các thời lượng này cho mỗi cạnh của đồ thị cơ sở. Nếu trong bài toán đang xét chúng ta lại tính đến tiền vé của mỗi chuyến bay thì ta gán tiền vé như trọng số ứng với cạnh nối hai thành phố tương ứng. Trên Hình 1 biểu diễn các cách gán trọng số khác nhau cho các cạnh của đồ thị tùy theo mục đích của bài toán đặt ra.



Hình 1. Các đồ thị có trọng số dùng để lập mô hình hệ thống hàng không.

Các đồ thị có trọng số cũng được dùng để lập mô hình các mạng máy tính. Chi phí truyền thông (chẳng hạn, tiền thuê bao đường điện thoại hàng tháng), thời gian đáp ứng của các máy tính qua các đường truyền thông này, hoặc là khoảng cách giữa các máy tính, tất cả đều có thể được nghiên cứu bằng cách dùng một đồ thị có trọng số. Hình 2 trình diễn đồ thị có trọng số ứng với ba cách gán trọng số cho mỗi cạnh của đồ thị mạng máy tính : khoảng cách, thời gian đáp ứng qua mạng và chi phí thuê bao hàng tháng.



Hình 2. Các đồ thị có trọng số mô hình mạng máy tính.

Trong các ứng dụng chúng ta gặp nhiều loại bài toán liên quan tới đồ thị có trọng số. Chẳng hạn, xác định đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một mạng, trong đó ta coi **độ dài** của đường đi trong đồ thị có trọng số là tổng các trọng số ứng với các cạnh của đường đi này. (Độc giả cần lưu ý khái niệm *độ dài* ở đây khác với khái niệm *độ dài* là *số các cạnh* trong một đường đi của đồ thị không trọng số). Một vấn đề được đặt ra là xác định đường đi ngắn nhất, tức là đường đi có độ dài ngắn nhất, giữa hai đỉnh của đồ thị. Chẳng hạn, trong hệ thống hàng không được biểu diễn bằng đồ thị cho trên Hình 1, thì đường đi ngắn nhất trên không có giữa Boston và Los Angeles là bao nhiêu? Tổ hợp các chuyến bay nào giữa Boston và Los Angeles có tổng thời gian bay (tổng thời gian ở trên trời, không kể thời gian chờ giữa hai chuyến bay) là nhỏ nhất? Hành trình nào giữa hai thành phố này là rẻ nhất? Trên mạng máy tính ở Hình 2, trong các đường điện thoại nối các máy ở San Francisco và các máy ở New York đường nào có chi phí rẻ nhất? Đường nào cho thời gian trả lời nhanh nhất cho một cuộc truyền thông giữa các máy ở San Francisco và các máy New York? Đường nào có khoảng cách không gian ngắn nhất?

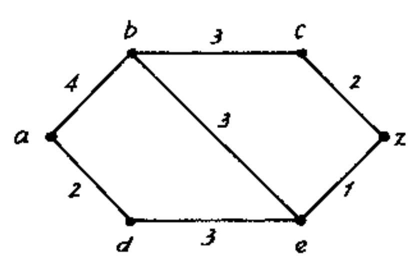
THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Có một số thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số. Chúng ta sẽ giới thiệu thuật toán do E.Dijkstra, nhà toán học người Hàlan, đề xuất năm 1959. Trong phiên bản mà ta sẽ trình bày, người ta giả sử đồ thị là vô hướng, các trọng số là dương. Chỉ cần thay đổi đôi chút là có thể giải được bài toán đường đi ngắn nhất trong đồ thị có hướng.

Trước khi trình bày thuật toán ta xét một ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Tính độ dài của đường đi ngắn nhất giữa a và z trong đồ thị có trọng số cho trên Hình 3.

Giải: Mặc dù đường đi ngắn nhất dễ dàng tìm được bằng cách kiểm tra trực tiếp, nhưng chúng ta sẽ phát triển một số ý tưởng giúp ta dễ hiểu thuật toán Dijkstra hơn. Ta sẽ tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới các đỉnh kế tiếp cho tới khi đạt tới đỉnh z.



Hình 3. Đơn đồ thị có trọng số.

Chỉ có 2 đỉnh b và d liên thuộc với a nên chỉ có hai đường đi xuất phát từ a là a, b và a, d, với các độ dài tương ứng là 4 và 2. Do đó d là đỉnh gần a nhất.

Bây giờ ta tìm đỉnh tiếp theo gần a nhất trong tất cả các đường đi qua a và d (cho đến khi đạt tới đỉnh cuối cùng). Đường đi như thế ngắn nhất tới b là a, b với độ dài 4, và đường đi như thế ngắn nhất tới e là a, d, e, độ dài 5. Do vậy đỉnh tiếp theo gần a nhất là b.

Để tìm đỉnh thứ ba gần a nhất, ta chỉ xét các đường đi qua a, d và b (cho đến khi đạt tới đỉnh cuối cùng). Đó là đường đi a, b, c độ dài 7 và đường đi a, d, e, z độ dài 6. Vậy z là đỉnh tiếp theo gần a nhất và độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới z là 6.

■

Ví dụ 1 minh họa những nguyên tắc chung dùng trong thuật toán Đijkstra. Đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới z có thể tìm được cách bằng kiểm tra trực tiếp. Nhưng cách làm này là hoàn toàn không dùng được cho cả người và máy khi đồ thị có nhiều cạnh.

Bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa a và z trong đơn đồ thị liên thông, vô hướng có trọng số. Thuật toán Đijkstra được thực hiện bằng cách tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới đỉnh đầu tiên, độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới đỉnh thứ hai, v.v, cho tới khi tìm được độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới đỉnh z.

Thuật toán này dựa trên một dãy các bước lặp. Một tập đặc biệt các đỉnh được xây dựng bằng cách cộng thêm một đỉnh trong mỗi bước lặp. Thủ tục gán nhãn được thực hiện trong mỗi lần lặp đó. Trong thủ tục gán nhãn này, đỉnh w được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới w và chỉ đi qua các đỉnh đã thuộc tập đặc biệt. Một đỉnh được thêm vào tập này là đỉnh có nhãn nhỏ nhất so với các đỉnh chưa có trong tập đó.

Bây giờ ta sẽ đưa ra các chi tiết của thuật toán Dijkstra. Đầu tiên gán cho đỉnh a nhãn bằng 0 và các đỉnh khác là ∞. Ta ký hiệu $L_0(a) = 0$ và $L_0(v) = \infty$ cho tất cả các đỉnh khác (bước lặp thứ 0). Các nhãn này là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới các đỉnh này, trong đó đường đi này chỉ chứa đỉnh a. (Vì không có đường đi từ a tới các đỉnh khác a nên ∞ là độ dài đường đi ngắn nhất giữa a và các đỉnh này).

Theo thuật toán Dijkstra ta sẽ xây dựng tập đặc biệt các đỉnh. Gọi S_k là tập này sau bước lặp thứ k của thủ tục gán nhãn. Chúng ta bắt đầu bằng $S_o = \varnothing$. Tập S_k được tạo thành từ S_{k-1} bằng cách thêm vào đỉnh u không thuộc S_{k-1} có nhãn nhỏ nhất. Khi đỉnh u được gộp vào S_k chúng ta sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S_k sao cho $L_k(v)$, nhân của v tại bước k, là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới v mà đường đi này chỉ chứa các đỉnh thuộc S_k (tức là các đỉnh đã thuộc tập đặc biệt các đỉnh cùng với u).

Giả sử v là một đỉnh không thuộc S_k. Để sửa nhãn của v ta thấy $L_k(v)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới v và chỉ chứa các đỉnh thuộc S_k. Để sửa đổi nhãn ta lưu ý rằng đường đi ngắn nhất từ a tới v chứa chỉ các phần tử của S_k hoặc là đường đi ngắn nhất từ a tới v chỉ chứa các phần tử của S_{k-1} hoặc là đường đi ngắn nhất từ a tới u ở bước $k - 1$ cùng với cạnh (u, v). Nói cách khác ta có.

$$L_k(a,v) = \min \{L_{k-1}(a,v),\ L_{k-1}(a,u) + w(u,v)\}.$$

Thủ tục này được lặp bằng cách liên tiếp thêm các đỉnh vào tập đặc biệt các đỉnh cho tới khi đạt tới đỉnh z. Khi thêm z vào tập đặc biệt các đỉnh thì nhãn của nó bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới z. Thuật toán Dijkstra được cho trong Thuật toán 1. Sau này chúng ta sẽ chứng minh thuật toán này là đúng.

THUẬT TOÁN 1. THUẬT TOÁN DIJKSTRA.

procedure *Dijkstra* (G : đơn đồ thị liên thông có trọng số, với
trọng số dương)

{G có các đỉnh $a = v_o, v_1, ..., v_n = z$ và trọng số $w(v_i, v_j)$,
với $w(v_i,v_j) = \infty$ nếu $\{v_i,v_j\}$ không là một cạnh trong G}

for i := 1 **to** n

$L(v_i) := \infty$

$L(a) := 0$

$S: = \phi$

{Ban đầu các nhãn được khởi tạo sao cho nhân của *a* bằng không, các đỉnh khác bằng ∞, tập S là rỗng}

while $z \notin S$

begin

u := đỉnh không thuộc S có nhãn $L(u)$ nhỏ nhất.

$S := S \cup \{u\}$

for tất cả các đỉnh v không thuộc S

if $L(u) + w(u,v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u,v)$

{thêm vào S đỉnh có nhãn nhỏ nhất, và sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S}

end {$L(z)$ = độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới z}.

Ví dụ sau minh họa cách hoạt động của thuật toán Dijkstra. Sau đó chúng ta sẽ chỉ ra rằng thuật toán này luôn luôn cho độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số.

Ví dụ 2. Dùng thuật toán Dijkstra hãy tìm độ dài của đường đi ngắn giữa hai đỉnh a và z của đồ thị có trọng số trên Hình 4a.

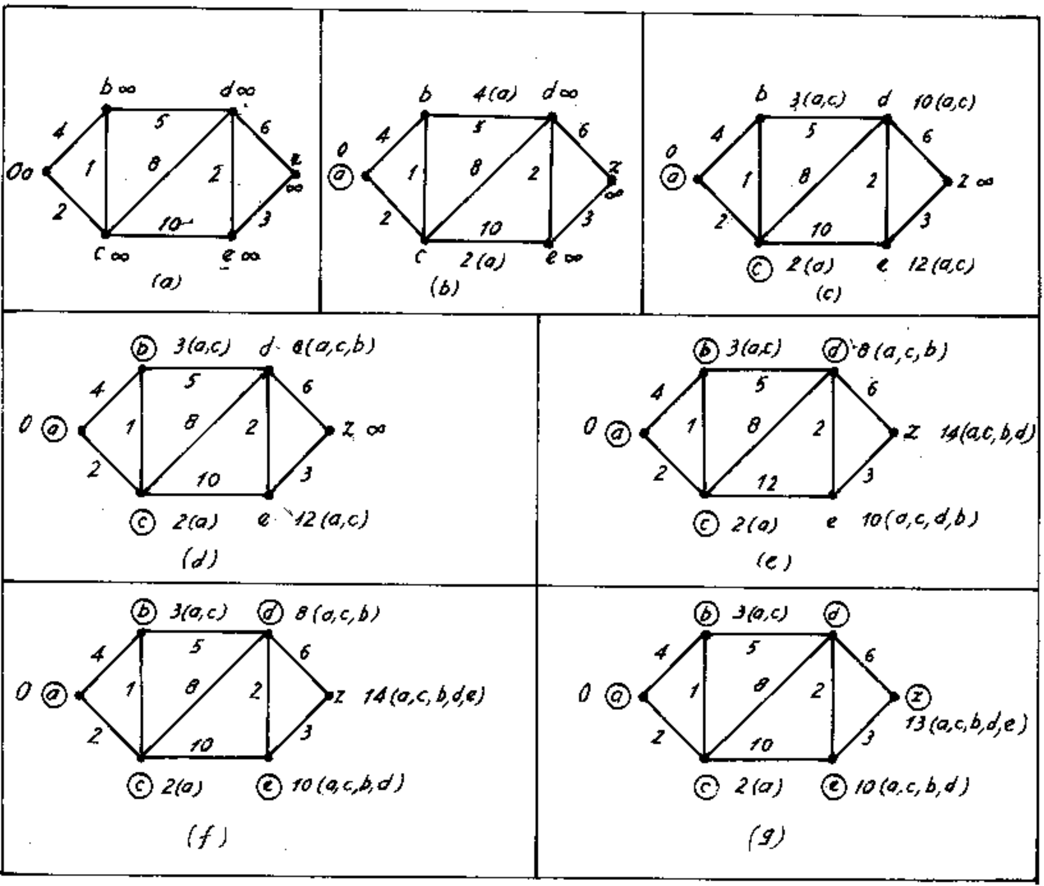
Giải: Các bước dùng thuật toán Dijkstra tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh a và z được biểu diễn trên Hình 4. Tại mỗi bước lặp của thuật toán các đỉnh của tập S được khoanh tròn. Đường đi ngắn nhất chỉ chứa các đỉnh đã thuộc S_k từ a tới mỗi đỉnh được in ra cho mỗi bước lặp. Thuật toán kết thúc khi z được khuyên tròn. Ta nhận được đường đi ngắn nhất từ a tới z là a, c, b, d, e, z với độ dài bằng 13.

Bây giờ chúng ta dùng lý luận quy nạp để chứng minh thuật toán Dijkstra luôn cho độ dài đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh a và z trong một đồ thị vô hướng liên thông có trọng số. Tại bước k ta có giả thiết quy nạp là :

(i) nhãn của đỉnh v trong S là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh này và

(ii) nhãn của đỉnh v không thuộc S là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới đỉnh này và đường đi này chỉ chứa các đỉnh (ngoài chính đỉnh này) thuộc S.

Khi $k = 0$, tức là khi chưa có bước lặp nào được thực hiện, $S = \{a\}$, vì thế độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới các đỉnh khác a là ∞ và độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới chính nó bằng 0 (ở đây chúng ta cho phép đường đi không có cạnh). Vì thế bước cơ sở là đúng.



Hình 4. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới z.

Giả sử giả thiết quy nạp là đúng với bước k. Gọi v là đỉnh thêm vào S ở bước lặp $k+1$, vì vậy v là đỉnh không thuộc S ở cuối bước k có nhãn nhỏ nhất (nếu có nhiều đỉnh có nhãn nhỏ nhất thì có thể chọn một đỉnh nào đó làm v). Từ giả thiết quy nạp ta thấy rằng trước khi vào vòng lặp thứ $(k+1)$ các đỉnh thuộc S đã được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a. Đỉnh v cũng vậy phải được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a. Nếu điều này không xảy ra, thì ở cuối bước lặp thứ k sẽ có đường đi với độ dài nhỏ hơn $L_k(v)$ chứa cả đỉnh không thuộc S (vì $L_k(v)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới v chứa chỉ các đỉnh thuộc S sau bước lặp thứ k). Gọi u là đỉnh đầu tiên của đường đi này không thuộc S. Đó là đường đi với độ dài nhỏ hơn $L_k(v)$ từ a tới u chứa chỉ các đỉnh của S. Điều này trái với cách chọn v. Vì thế, (i) vẫn còn đúng ở cuối bước lặp $(k+1)$.

Gọi u là đỉnh không thuộc S sau bước $(k+1)$. Đường đi ngắn nhất từ a tới u chứa chỉ các đỉnh thuộc S sẽ hoặc là chứa v hoặc là không. Nếu nó không chứa v thì theo giả thiết quy nạp độ dài của nó là $L_k(u)$. Nếu nó chứa v thì nó sẽ tạo thành đường đi từ a tới v với độ dài có thể ngắn nhất và chứa chỉ các đỉnh của S khác v, kết thúc bằng cạnh từ v tới u. Khi đó độ dài của nó sẽ là $L_k(v) + w(v, u)$. Điều này chứng tỏ (ii) là đúng, vì $L_{k+1}(u) = \min\{L_k(u), L_k(v) + w(v,u)\}$.

Định lý sau đây đã được chứng minh.

ĐỊNH LÝ 1. Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị đơn vô hướng liên thông có trọng số.

Bây giờ chúng ta có thể đánh giá độ phức tạp tính toán của thuật toán Dijkstra (qua các phép cộng và so sánh). Thuật toán dùng không quá $n - 1$ bước lặp, vì một đỉnh thêm vào tập đặc biệt tại mỗi bước lặp. Bây giờ ta sẽ ước tính số phép toán dùng trong mỗi bước lặp. Ta có thể xác định một đỉnh không thuộc S_k có nhãn nhỏ nhất nhờ không quá $n - 1$ phép so sánh. Sau đó ta dùng các phép cộng và so sánh để sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S_k. Từ đó suy ra rằng có không hơn $2(n - 1)$ phép toán được dùng trong mỗi bước lặp, vì có không quá $n-1$ nhãn cần sửa đổi trong mỗi bước lặp. Vì ta dùng không quá $n - 1$ bước lặp, mỗi bước dùng không quá $2(n-1)$ phép toán, nên ta có định lý sau.

ĐỊNH LÝ 2. Thuật toán Dijkstra dùng $O(n^2)$ phép toán (cộng và so sánh) để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị đơn vô hướng liên thông có trọng số.

BÀI TẬP

1. Với mỗi một bài toán sau đây về hệ thống giao thông, hãy mô tả một mô hình đồ thị có trọng số có thể dùng để giải quyết các bài toán đó.

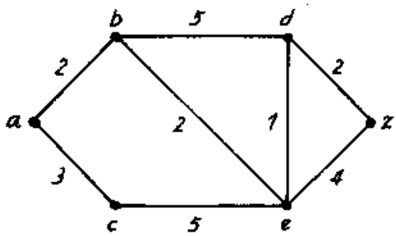
   a) tính tổng thời gian nhỏ nhất cần để đi giữa hai bến đỗ ?

   b) Xác định khoảng cách ngắn nhất từ bến này tới bến khác?

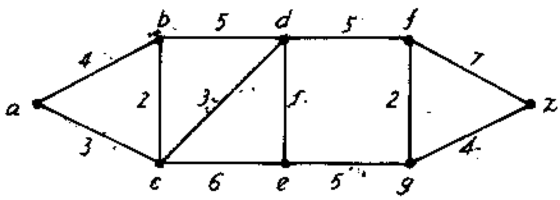
   c) Giá rẻ nhất phải trả cho một hành trình giữa hai bến xe, nếu giá vé giữa các bến đỗ bằng tổng các giá vé giữa các bến trung gian?

Trong các Bài tập 2-4 hãy tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa a và z trong đồ thị có trọng số đã cho.

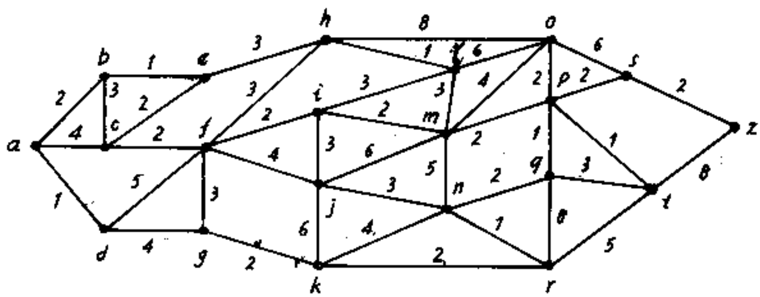
2.



3.



4.



5. Tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh a và z trong mỗi đồ thị đơn có trọng số của các Bài tập 2–4.

6. Tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh sau đây của đồ thị trong Bài tập 3.

a) a và d b) a và f

c) c và f d) b và z

7. Tìm đường đi ngắn nhất của đồ thị trong Bài tập 3, giữa các cặp đỉnh trong Bài tập 6.

8. Tìm đường đi ngắn nhất (ra dặm) giữa mỗi một cặp thành phố trong mạng hàng không cho trên Hình 1.

a) New York và Los Angeles c) Miami và Denver

b) Boston và San Francisco d) Miami và Los Angeles.

9. Tìm một tổ hợp các chuyến bay với tổng thời gian bay ít nhất giữa các cặp thành phố trong Bài tập 8, thời gian bay cho trên Hình 1.

10. Tìm một tổ hợp các chuyến bay với giá vé rẻ nhất giữa các cặp thành phố trong Bài tập 8, giá vé cho trên Hình 1.

11. Tìm đường ngắn nhất (khoảng cách) giữa hai trung tâm máy tính ở mỗi cặp thành phố sau của mạng truyền thông trên Hình 2.

a) Boston và Los Angeles c) Dalas và San Francisco

b) New York và San Francisco d) Denver và New York.

12. Tìm đường có thời gian đáp ứng ít nhất giữa hai trung tâm máy tính ở mỗi cặp thành phố như Bài tập 11, với thời gian đáp ứng cho trên Hình 2.

13. Tìm đường có giá chi phí ít nhất giữa hai trung tâm máy tính ở mỗi cặp thành phố như Bài tập 11, với giá chi phí cho trên Hình 2.

14. Hãy giải thích cách tìm đường đi với số các cạnh nhỏ nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị vô hướng bằng cách coi nó như một bài toán đường đi ngắn nhất của đồ thị có trọng số.

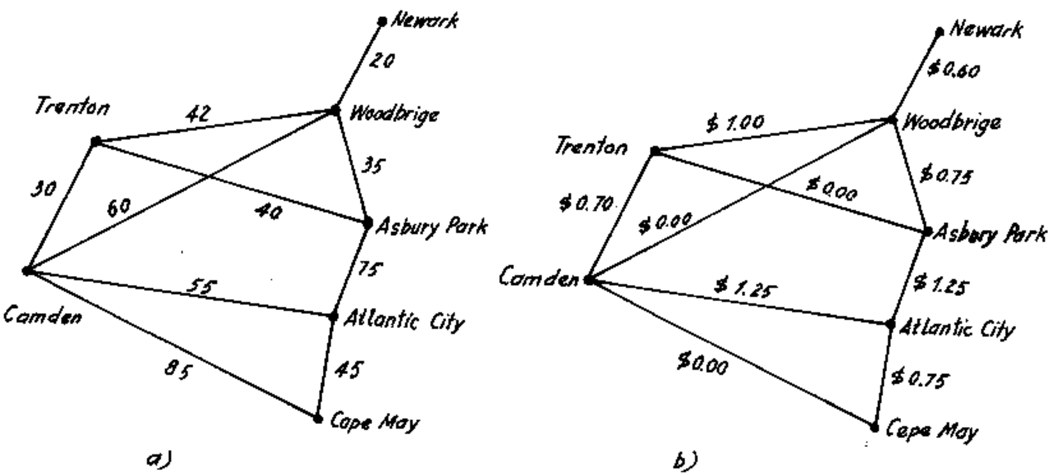
15. Hãy mở rộng thuật toán Dijkstra tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị đơn liên thông có trọng số để tìm chiều dài của đường đi ngắn nhất giữa một đỉnh a và tất cả các đỉnh khác của đồ thị.

16. Hãy mở rộng thuật toán Dijkstra tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị đơn liên thông có trọng số sao cho có thể xây dựng được đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh này.

17. Các đồ thị có trọng số trong hình vẽ sau đây biểu diễn một số đường chính ở bang New Jersey. Trong hình a) cho khoảng cách giữa các thành phố trên các con đường này. Hình b) cho tiền thuế đường.

a) Hãy tìm đường đi có khoảng cách ngắn nhất giữa Newark và Camden, và giữa Newark và Cape May, khi sử dụng các con đường này.

b) Tìm đường đi với tiền thuếđường ít nhất giữa các cặp thành phố như trong câu a).



18. Đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị có trọng số có là duy nhất không, nếu trọng số của các cạnh phân biệt là khác nhau.

19. Hãy kể một số ứng dụng trong đó cần phải tìm độ dài của đường đi đơn dài nhất trong đồ thị có trọng số.

20. Xác định độ dài của đường đi dài nhất trong đồ thị có trọng số trên Hình 4 giữa a và z? Giữa c và z?

Thuật toán Floyd *có thể dùng để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh trong một đồ thị đơn liên thông có trọng số. Tuy nhiên, thuật toán này không thể dùng để xây dựng các đường đi ngắn nhất này. (Dưới đây, ta gán trọng số bằng vô cùng lớn cho các cặp đỉnh không nối bởi một cạnh của đồ thị).*

THUẬT TOÁN 2. THUẬT TOÁN FLOYD.

procedure *Floyd* (G : đơn đồ thị có trọng số)
{G có các đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ và các trọng số $w(v_i, v_j) = \infty$
nếu (v_i, v_j) không là một cạnh}

for i := **1** to n

for j := **1 to** n

$d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)$

for i := 1 **to** n

for j := **1 to** n

for k := 1 **to** n

if $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$ **then**

$d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)$

($d(v_i, v_j)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất giữa v_i và v_j}

21. Dùng thuật toán Floyd tìm khoảng cách giữa tất cả các cặp đỉnh trong đồ thị có trọng số trên Hình 4.

22*. Chứng minh rằng thuật toán Floyd xác định được khoảng cách ngắn nhất giữa các cặp đỉnh trong một đơn đồ thị có trọng số.

23*. Hãy cho đánh giá big – O của số phép toán (so sánh và cộng) dùng trong thuật toán Floyd xác định khoảng cách ngắn nhất giữa các cặp đỉnh trong một đơn đồ thị có trọng số và n đỉnh.

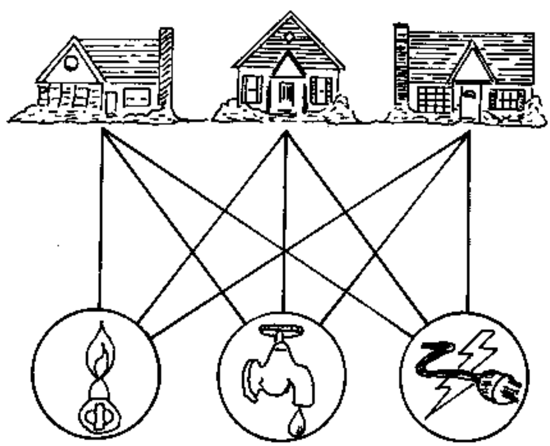
24*. Chỉ ra rằng thuật toán Dijkstra có thể không hoạt động nếu các cạnh có thể có trọng số âm.

7.7. ĐỒ THỊ PHẲNG

MỞ ĐẦU

Chúng ta nghiên cứu bài toán nối ba ngôi nhà với ba thiết bị sinh hoạt riêng rẽ, như trên Hình 1. Có thể nối các ngôi nhà với các thiết bị này sao cho không có đường nối nào cắt nhau? Bài toán này có thể được mô hình bằng đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$. Câu hỏi ban đầu có thể diễn đạt như sau :

Có thể vẽ $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau?



Hình 1. Ba ngôi nhà và ba thiết bị sinh hoạt.

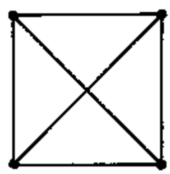
Trong tiết này chúng tế sẽ nghiên cứu bài toán : có thể vẽ một đồ thị trên một mặt phẳng không có các cạnh nào cắt nhau không. Đặc biệt chúng ta sẽ trả lời bài toán nhà – thiết bị sinh hoạt. Thường có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Khi nào có thể tìm được ít nhất một cách biểu diễn đồ thị không có cạnh cắt nhau?

ĐỊNH NGHĨA 1. Một đồ thị được gọi là *phẳng* nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là điểm mút của các cạnh). Hình vẽ như thế gọi là một *biểu diễn phẳng* của đồ thị.

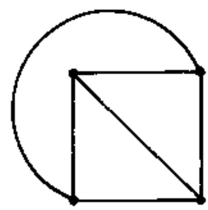
Một đồ thị có thể là phẳng ngay cả khi nó thường được vẽ với những cạnh cắt nhau, vì có thể vẽ nó bằng cách khác không có các cạnh cắt nhau.

Ví dụ 1. K_4 trên Hình 2 với hai cạnh cắt nhau có là đồ thị phẳng không?

Giải: K_4 là đồ thị phẳng bởi vì có thể vẽ lại như trên Hình 3 không có đường cắt nhau.



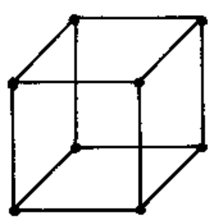
***Hình** 2.* Đồ thị K_4.



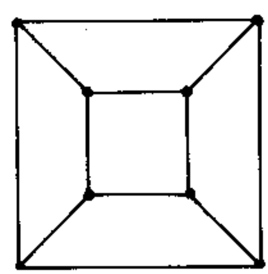
***Hình** 3.* K_4 vẽ không có đường cắt nhau.

■

Ví dụ 2. Q_3 trên Hình 4 có là đồ thị phẳng không?



***Hình** 4.* Đồ thị Q_3.



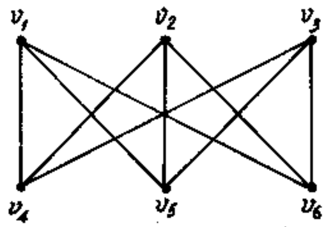
***Hình** 5.* Biểu diễn phẳng.

Giải: Q_3 là phẳng vì có thể vẽ lại như trên Hình 5 không có cạnh nào cắt nhau.

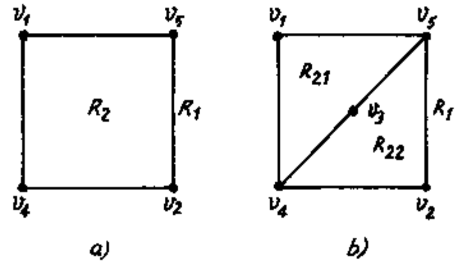
■

Chúng ta có thể chỉ ra một đồ thị là phẳng bằng cách thể hiện biểu diễn phẳng của nó. Chứng tỏ một đồ thị là không phẳng sẽ khó khăn hơn nhiều. Chúng ta sẽ đưa ra một ví dụ về cách chứng minh một đồ thị không là phẳng.

Ví dụ 3. $K_{3,3}$ trên Hình 6 có là đồ thị phẳng không?



Hình 6. Đồ thị $K_{3,3}$.



Hình 7. Chứng minh $K_{3,3}$ là không phẳng.

Giải: Mọi ý định vẽ $K_{3,3}$ trong một mặt phẳng không có cạnh cắt nhau đều thất bại. Ta sẽ chỉ ra nguyên nhân. Trong một biểu diễn phẳng bất kỳ của $K_{3,3}$, các đỉnh v_1, v_2 đều phải nối với v_4 và v_5. Bốn đỉnh này tạo thành một đường cong kín chia mặt phẳng thành hai miền R_1 và R_2 như trên Hình 7(a). Đỉnh v_3 nằm trong R_1 hoặc R_2. Khi v_3 nằm trong R_2, tức là bên trong của đường cong khép kín, cạnh giữa v_3 và v_4, cạnh giữa v_3 và v_5 chia R_2 thành 2 miền con R_{21} và R_{22} như trên Hình 7(b).

Tiếp theo, rõ ràng không có cách nào đặt đỉnh v_6 mà không tạo ra các cạnh cắt nhau. Ví dụ nếu v_6 nằm trong R_1 thì cạnh nối v_6 với v_3 sẽ cắt ít nhất một cạnh khác. Nếu v_6 nằm trong R_{21} thì cạnh (v_6, v_1) sẽ cắt một cạnh nào đó.

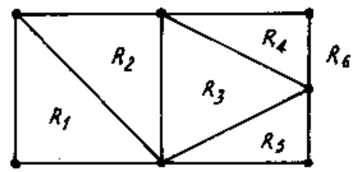
Tương tự ta có thể chứng tỏ rằng không thể vẽ được đồ thị phẳng nếu v_3 nằm trong R_1. Độc giả tự chứng minh phần này (xem bài tập cuối tiết này). Từ đó suy ra $K_{3,3}$ là không phẳng.

■

Ví dụ 3 chính là bài toán nhà–thiết bị sinh hoạt được mô tả trong đầu tiết này. Ba ngôi nhà và ba thiết bị sinh hoạt không thể nối với nhau trên một mặt phẳng mà không cắt nhau. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh K_5 là không phẳng. (Xem Bài tập 9 cuối tiết này).

CÔNG THỨC EULER

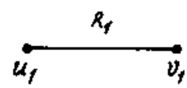
Biểu diễn phẳng của một đồ thị chia mặt phẳng thành các miền, kể cả miền vô hạn. Ví dụ biểu diễn phẳng của đồ thị trên Hình 8 chia mặt phẳng thành 6 miền. Chúng được gán nhãn như hình vẽ. Euler đã chứng minh rằng tất cả các biểu diễn phẳng của một đồ thị đều chia mặt phẳng thành cùng một số miền như nhau. Để làm điều này ông ta đã tìm mối quan hệ giữa số miền, số đỉnh, số cạnh của một đồ thị phẳng.



Hình 8. Các miền trong biểu diễn phẳng một đồ thị.

ĐỊNH LÝ 1. *Công thức Euler.* Gọi G là một đồ thị đơn phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh. Gọi r là số miền trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó $r = e - v + 2$.

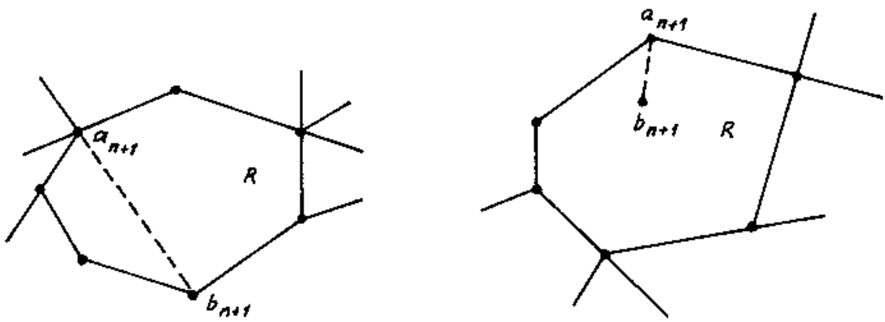
Chứng minh. Trước tiên ta xác định biểu diễn phẳng của G. Ta sẽ chứng minh định lý bằng cách xây dựng một dãy các đồ thị con G_1, G_2, ...,$G_e = G$, mỗi bước ghép thêm một cạnh vào đồ thị ở bước trước. Điều này làm được khi sử dụng định nghĩa đệ quy như sau. Lấy tùy ý một cạnh của G để nhận được G_1. Để nhận được G_n từ G_{n-1} ta thêm tuỳ ý một cạnh liên thuộc với một đỉnh của G_{n-1} và thêm một đỉnh khác liên thuộc với cạnh mới đó, nếu nó chưa có trong G_{n-1}. Điều này làm được vì G là liên thông. G sẽ nhận được sau khi e cạnh được ghép thêm vào các đồ thị tạo ra trước. Gọi r_n, e_n, và v_n tương ứng là số miền, số cạnh, số đỉnh của biểu diễn phẳng của G_n do biểu diễn phẳng của G sinh ra.



Hình 9. Trường hợp cơ sở của chứng minh Định lý Euler.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Hệ thức $r_1 = e_1 - v_1 + 2$ là đúng với G_1 vì $e_1 = 1$, $v_1 = 2$ và $r_1 = 1$. Điều này thể hiện trên Hình 9.

Bây giờ giả sử rằng $r_n = e_n - v_n + 2$. Gọi $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ là cạnh gộp vào G_n để được G_{n+1}. Có hai khả năng xảy ra. Trường hợp đầu cả hai đỉnh a_{n+1}, b_{n+1} đã thuộc G_n. Khi đó chúng phải ở trên biên của miền chung R nếu không thì không thể gộp cạnh $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ vào G_n mà không có các cạnh cắt nhau (G_{n+1} là phẳng). Cạnh mới này sẽ chia miền R thành hai miền con. Do đó $r_{n+1} = r_n + 1$, $e_{n+1} = e_n + 1$ *và* $v_{n+1} = v_n$. Do vậy ta có công thức $r_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$. Trường hợp này được minh họa trên Hình 10a.



Hình 10. Thêm một cạnh vào G_n để tạo G_{n+1}.

Trường hợp thứ hai, một trong hai đỉnh của cạnh mới chưa thuộc G_n. Giả sử a_{n+1} thuộc G_n còn b_{n+1} thì không. Thêm cạnh này không sinh ra một miền mới nào, vì b_{n+1} phải ở trong miền có a_{n+1} ở trên biên của nó. Do đó, $r_{n+1} = r_n$. Nhưng $e_{n+1} = e_n + 1$, và $v_{n+1} = v_n + 1$. Mỗi vế của công thức không đổi nên công thức vẫn đúng. Nói cách khác $r_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$. Trường hợp này được minh họa trên Hình 10b.

Vậy với mọi n ta đều có $r_n = e_n - v_n + 2$. Vì đồ thị gốc là G_e nhận được sau khi thêm e cạnh, định lý được chứng minh.

■

Công thức Euler được minh họa trong ví dụ sau.

Ví dụ 4. Giả sử rằng đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc bằng 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Giải: Đồ thị phẳng này có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc bằng 3, do vậy $v = 20$. Vì tổng số bậc của các đỉnh, $3v = 3.20 = 60$, bằng hai lần số cạnh, tức là $2e$, chúng ta có $e = 60 : 2 = 30$. Do vậy theo công thức Euler, số các miền là

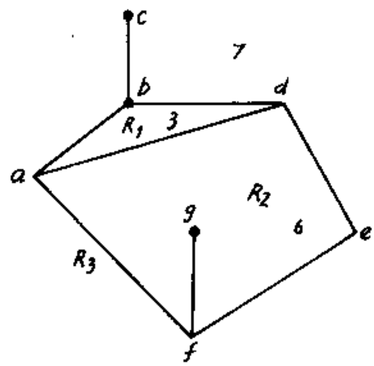
$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12.$$

■

Công thức Euler có thể dùng để lập một số bất đẳng thức đối với các đồ thị phẳng. Hệ quả sau cho ta một bất đẳng thức như vậy.

HỆ QUẢ 1. Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh trong đó $v \geqslant 3$, khi đó $e \leqslant 3v - 6$.

Chứng minh bổ đề 1 dựa trên khái niệm **bậc của miền**. Đó là số cạnh trên biên của miền đó. Khi một cạnh xuất hiện hai lần trên biên (tức là nó được vẽ hai lần khi vẽ biên) nó sẽ góp 2 đơn vị vào bậc của miền. Bậc của các miền của đồ thị trên Hình 11 được thể hiện ngay trên hình vẽ.



Hình 11. Bậc của miền.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh Hệ quả 1.

Chứng minh. Một đơn đồ thị phẳng liên thông khi vẽ trên một mặt phẳng sẽ chia mặt phẳng thành r miền. Bậc của mỗi miền ít nhất bằng 3. (Vì ta chỉ xét đồ thị đơn nên không có cạnh bội để tạo ra miền bậc 2, và không có khuyên để tạo ra miền bậc 1). Đặc biệt, bậc của miền vô hạn ít nhất bằng 3 vì có ít nhất 3 đỉnh trong đồ thị. Ta cũng nhận thấy là tổng số bậc của các miền bằng đúng hai lần số cạnh của đồ thị, vì mỗi cạnh xuất hiện trên biên của các miền đúng hai lần (hoặc trên biên của hai miền khác nhau, hoặc hai lần trên biên của cùng một miền). Vì mỗi miền có bậc lớn hơn hoặc bằng ba nên ta suy ra

$$2e = \sum_{R} \deg(R) \geqslant 3r$$

Vì thế
$$\frac{2e}{3} \geqslant r.$$

Theo công thức Euler ta có $r = e - v + 2$. Vậy

$$e - v + 2 \leqslant \frac{2e}{3}.$$

Giải ra ta được :

$$e \leqslant 3v - 6.$$

Đó là điều cần chứng minh.

■

Ví dụ 5. Dùng Hệ quả 1, chứng tỏ rằng K_5 là không phẳng.

Giải: Đồ thị K_5 có 5 đỉnh và 10 cạnh. Vì bất đẳng thức $e \leqslant 3v - 6$ là không thỏa mãn đối với đồ thị này, do $e = 10$, $3v - 6 = 15 - 6 = 9$. do đó K_5 không phẳng.

Như đã chỉ ra từ trước $K_{3,3}$ là không phẳng. Đồ thị này có 6 đỉnh và 9 cạnh. Điều đó có nghĩa là bất đẳng thức $e \leqslant 3v - 6$ thoả mãn. Nhưng không thể khẳng định đồ thị là phẳng được. Tuy vậy hệ quả sau có thể dùng để chứng minh $K_{3,3}$ là không phẳng.

HỆ QUẢ 2. Nếu một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh trong đó $v \geqslant 3$, và không có chu trình độ dài 3, thì $e \leqslant 2v - 4$

Việc chứng minh Hệ quả 2 tương tự như chứng minh Hệ quả 1, trừ một điều là trong trường hợp này do không có chu trình độ dài 3, nên bậc của một miền ít nhất phải là 4. Các chi tiết của chứng minh xin dành cho bạn đọc (Xem Bài tập 13 ở cuối tiết này)

Ví dụ 6. Dùng hệ quả 2 chỉ ra rằng đồ thị $K_{3,3}$ là không phẳng.

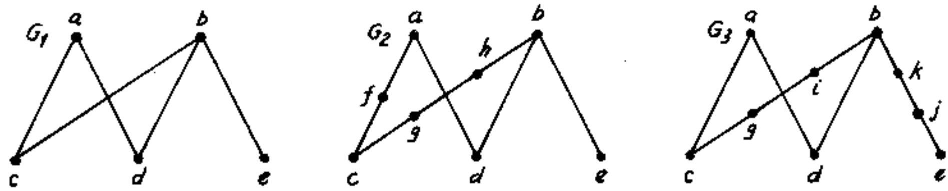
Giải: Vì $K_{3,3}$ không có chu trình độ dài 3 (dễ thấy điều này vì nó là đồ thị phân đôi, nên có thể áp dụng Hệ quả 2. $K_{3,3}$ có 6 đỉnh và 9 cạnh. Vì $e = 9$ và $2v - 4 = 8$, Hệ quả 2 không thỏa mãn, vậy đồ thị là không phẳng.

■

ĐỊNH LÝ KURATOWSKI

Chúng ta đã thấy $K_{3,3}$ và K_5 là không phẳng. Rõ ràng, một đồ thị là không phẳng nếu nó chứa cả hai đồ thị này như là các đồ thị con. Hơn thế nữa, tất cả các đồ thị không phẳng cần phải chứa đồ thị con nhận được từ $K_{3,3}$ hoặc K_5 bằng một số phép toán cho phép nào đó.

Nếu một đồ thị là phẳng, mọi đồ thị nhận được từ đồ thị này bằng cách bỏ đi cạnh $\{u, v\}$ và thêm vào đỉnh mới w cùng hai cạnh $\{u, w\}$ và $\{w, v\}$ cũng là phẳng. Phép toán như trên gọi là phép **phân chia sơ cấp**. Các đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là **đồng phôi** nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp. Ba đồ thị trên Hình 12 là đồng phôi, vì chúng có thể nhận được từ đồ thị đầu tiên bằng các phép phân chia sơ cấp. (Độc giả hãy xác định các phép phân chia sơ cấp để nhận G_2 và G_3 từ G_1).



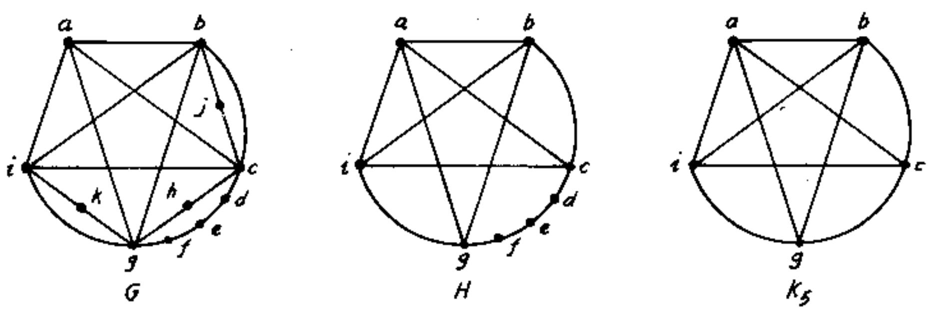
Hình 12. Các đồ thị đồng phôi.

Nhà toán học Balan, Kuratowski, đã thiết lập định lý sau đây vào năm 1930. Định lý này đã biểu thị đặc điểm của các đồ thị phẳng nhờ khái niệm đồ thị đồng phôi.

ĐỊNH LÝ 2. Đồ thị là không phẳng nếu và chỉ nếu nó chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

Rõ ràng đồ thị chứa đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5 là không phẳng. Tuy nhiên chứng minh điều ngược lại, tức là mọi đồ thị không phẳng đều chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5, là rất phức tạp và chúng ta sẽ không trình bày ở đây. Ví dụ sau minh họa cách sử dụng Định lý Kuratowski.

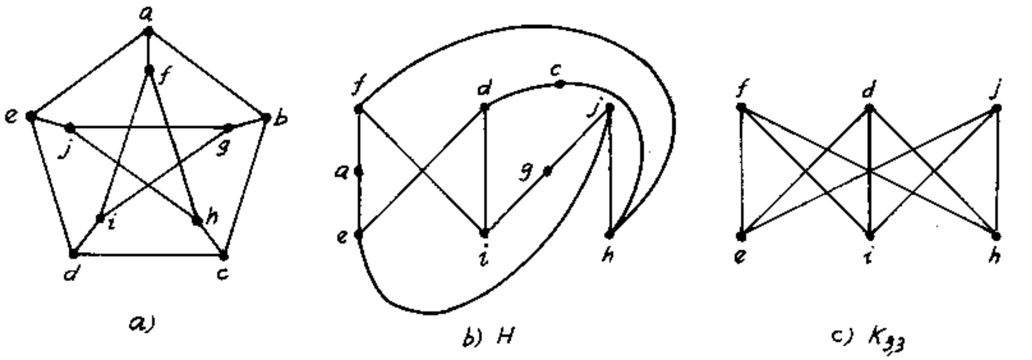
Ví dụ 7. Đồ thị G trên Hình 13 có là đồ thị phẳng hay không?



Hình 13. Đồ thị vô hướng G, đồ thị con H đồng phôi với K_5 và K_5.

Giải: G có một đồ thị con H đồng phôi với K_5. H nhận được bằng cách xóa h, j và k và tất cả các cạnh liên thuộc với các đỉnh này. H là đồng phôi với K_5 vì nó có thể nhận được từ K_5 (với các đỉnh a, b, c, g và i) bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp, thêm vào các đỉnh d, e và f. (Độc giả tự xây dựng dãy phân chia sơ cấp này). Do đó G là không phẳng.

Ví dụ 8. Đồ thị Petersen trên Hình 14a có là đồ thị phẳng không?



Hình 14. (a) Đồ thị Peterson, (b) đồ thị con H đồng phôi với $K_{3,3}$ và (c) $K_{3,3}$.

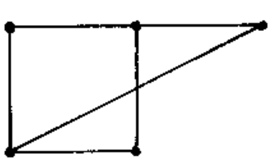
Giải: Đồ thị con H của đồ thị Petersen nhận được bằng cách bỏ đỉnh b và 3 cạnh liên thuộc với nó, như trên Hình 14b là đồng phôi với $K_{3,3}$ với các tập đỉnh $\{f, d, j\}$ và $\{e, i, h\}$, vì nó nhận được hằng một dãy các phân chia sơ cấp : xoá $\{d, h\}$ và thêm $\{c, h\}$ và $\{c, d\}$, xóa $\{e, f\}$ và thêm $\{a, e\}$ và $\{a, f\}$, xóa $\{i, j\}$ và thêm $\{g, i\}$ và $\{g, j\}$. Vì thế đồ thị Petersen là không phẳng.

BÀI TẬP

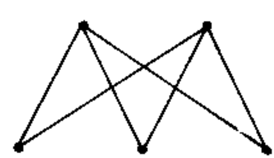
1. Năm ngôi nhà có thể nối với hai thiết bị sinh hoạt với đường nối không cắt nhau được không?

Trong các Bài tập 2-4 vẽ các đồ thị phẳng đã cho với các cạnh không cắt nhau.

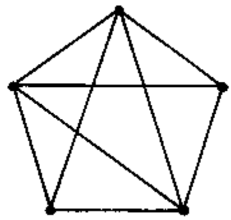
2.



3.

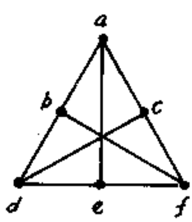


4.

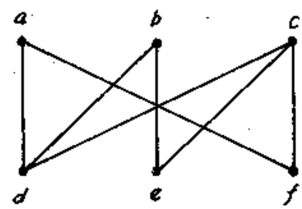


Trong các Bài tập 5-7 xác định xem đồ thị đã cho có là phẳng không. Nếu có , thì hãy vẽ nó không có các cạnh cắt nhau.

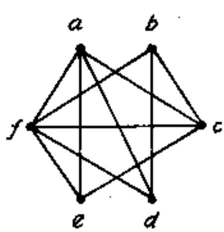
5.



6.



7.



8. Hãy hoàn tất chứng minh trong Ví dụ 3.

9. Chỉ ra rằng K_5 là không phẳng bằng cách sử dụng lý luận tương tự như trong Ví dụ 3.

10. Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 8 đỉnh bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

11. Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 6 đỉnh, mỗi đỉnh đều bậc 4. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

12. Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 30 cạnh. Nếu biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành 20 miền, thì đồ thị này có bao nhiêu đỉnh?

13. Chứng minh Hệ quả 2.

14. Giả sử một đơn đồ thị phân đôi, phẳng, liên thông có e cạnh và v đỉnh. Chỉ ra rằng $e \leq 2v - 4$ nếu $v \geq 3$.

15*. Giả sử một đơn đồ thị phẳng, liên thông có e cạnh và v đỉnh và không có chu trình độ dài 4 hoặc ít hơn. Chỉ ra rằng $e \leq (5/3)v - (10/3)$ nếu $v \geq 4$.

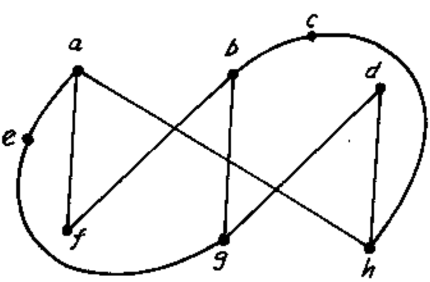
16. Giả sử một đồ thị phẳng có k thành phần liên thông, e cạnh và v đỉnh, biểu diễn phẳng của nó chia mặt phẳng thành r miền. Hãy tìm công thức cho r qua e, v và k.

17. Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất : Bỏ một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc với nó tạo ra một đồ thị phẳng.

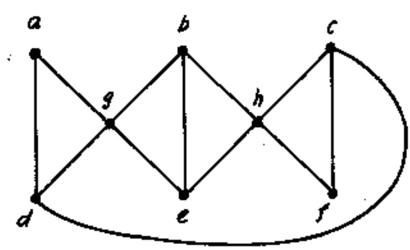
a) K_5 b) K_6 c) $K_{3,3}$

Trong các bài tập 18–20 hãy kiểm tra xem đồ thị nào là đồng phôi với $K_{3,3}$.

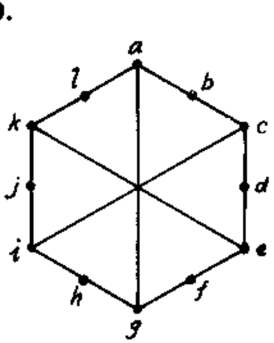
18.



19.

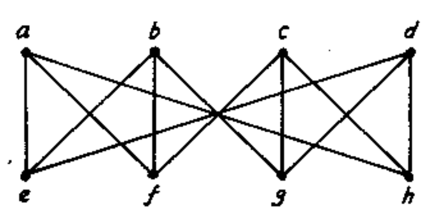


20.

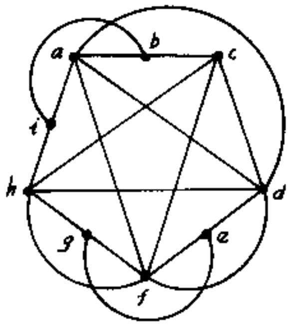


Trong các Bài tập 21–23 dùng Định lý Kuratowski để xác định xem đồ thị đã cho có là phẳng hay không.

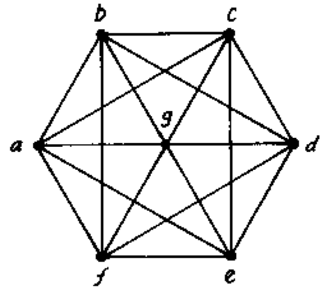
21.



22.



23.



Số điểm cắt nhau *của một đơn đồ thị là số điểm cắt nhau nhỏ nhất có thể xuất hiện trong biểu diễn phẳng của đồ thị này, trong đó không có ba cung nào biểu diễn cạnh có thể cắt nhau tại cùng một điểm.*

24. Chỉ ra rằng $K_{3,3}$ có số điểm cắt nhau là 1.

25.** Tìm số điểm cắt nhau của mỗi một trong các đồ thị không phẳng sau :

a) K_5 b) K_6 c) K_7

b) $K_{3,4}$ e) $K_{4,4}$ f) $K_{5,5}$

26*. Tìm số điểm cắt nhau của đồ thị Peterson.

27*. Chỉ ra rằng nếu m và n là hai số nguyên dương chẵn thì số điểm cắt nhau của $K_{m,n}$ là nhỏ hơn hay bằng $mn(m - 2)(n - 2)/6$.
(*Gợi ý* : Đặt m đỉnh trên trục x sao cho chúng cách đều và đối xứng qua gốc tọa độ, và n đỉnh dọc theo trục y sao cho chúng cách đều và đối xứng qua gốc tọa độ. Sau đó nối mỗi một trong m đỉnh trên trục x với mỗi một trong n đỉnh trên trục y, rồi đếm số chỗ cắt nhau).

Độ dày *của đồ thị đơn G là số nhỏ nhất các đồ thị con phẳng của G mà G là hợp của chúng.*

28. Chứng tỏ rằng $K_{3,3}$ có độ dày bằng 2

29*. Tìm độ dày của các đồ thị trong Bài tập 25.

30. Chỉ ra rằng nếu G là đơn đồ thị liên thông có v đỉnh và e cạnh, thì khi đó độ dày của G ít nhất là $[e/(3v - 6)]$.

31*. Dùng Bài tập 30 chỉ ra rằng độ dày của K_n ít nhất là $\lfloor (n + 7)/6 \rfloor$ với mọi n nguyên dương.

32. Chỉ ra rằng nếu G là đơn đồ thị liên thông có v và e cạnh, và không có chu trình độ dài bằng 3, khi đó độ dày của G ít nhất là $[e/(2v - 4)]$.

33. Dùng Bài tập 32 chỉ ra rằng độ dày của $K_{m,n}$ ít nhất là $[mn/(2m + 2n - 4)]$, với mọi m, n nguyên dương.

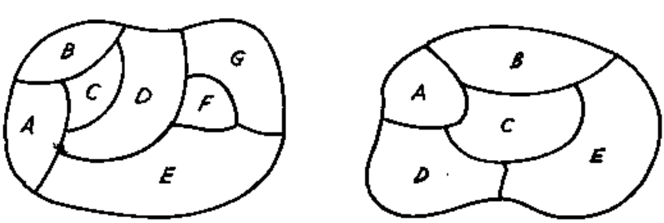
34*. Vẽ K_5 trên một mặt xuyến (ví dụ như chiếc xăm ô tô bơm căng – ND) sao cho không có cạnh cắt nhau.

35*. Vẽ $K_{3,3}$ trên mặt xuyến sao cho không có cạnh cắt nhau.

7.8. TÔ MÀU ĐỒ THỊ

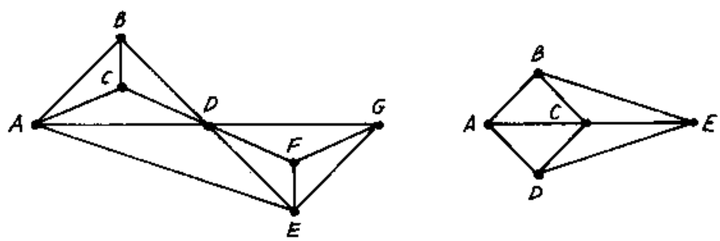
MỞ ĐẦU

Những bài toán liên quan đến tô màu bản đồ đã dẫn đến rất nhiều kết quả trong lý thuyết đồ thị. Khi một bản đồ được tô màu, hai miền có chung biên giới được tô bằng hai màu tùy ý miễn là khác nhau. Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, chúng ta tô mỗi miền bằng một màu khác nhau. Tuy nhiên điều đó là không thực tế. Nếu bản đồ có nhiều miền thì sẽ rất khó phân biệt những màu gần giống nhau. Do vậy người ta chỉ dùng một số màu cần thiết để tô bản đồ. Một bài toán được đặt ra là : xác định số màu tối thiểu cần có để tô một bản đồ sao cho các miền kề nhau không cùng một màu. Ví dụ, với bản đồ bên trái của Hình 1 bốn màu là đủ, nhưng ba màu là không đủ. (Độc giả tự kiểm tra lại điều này). Trong bản đồ bên phải của Hình 1, ba màu là đủ (nhưng hai là không đủ).



Hình 1. Hai bản đồ.

Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị. Để lập sự tương ứng đó, mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh . Các cạnh nối hai đỉnh, nếu các miền được biểu diễn bằng hai đỉnh này có biên giới chung nhau. Hai miền chung nhau chỉ một điểm không được coi là kề nhau. Đồ thị nhận được bằng cách như vậy gọi là **đồ thị đối ngẫu** của bản đồ đang xét. Rõ ràng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có đồ thị đối ngẫu phẳng. Hình 2 biểu diễn các đồ thị đối ngẫu với các bản đồ trên Hình 1.



Hình 2. Các đồ thị đối ngẫu của các bản đồ trên Hình 1.

Bài toán tô màu các miền của bản đồ là tương đương với bài toán tô màu các đỉnh của đồ thị đối ngẫu sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau có cùng một màu. Chúng ta có định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Tô màu* một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của nó sao cho không có hai đỉnh liền kề được gán cùng một màu.

Một đồ thị có thể được tô màu bằng cách gán các màu khác nhau cho mỗi đỉnh của nó. Tuy vậy, với hầu hết các đồ thị, ta có thể tô màu chúng với số màu ít hơn số đỉnh. Vậy số màu ít nhất cần thiết là bao nhiêu?

ĐỊNH NGHĨA 2. *Số màu* của một đồ thị là số tối thiểu các màu cần thiết để tô màu đồ thị này.

Chúng ta thấy rằng câu hỏi về số màu lớn nhất của các đồ thị phẳng chính là câu hỏi về số cực đại các màu cần thiết để tô các bản đồ phẳng sao cho không có hai miền kề nhau được gán cùng một màu. Bài toán này đã được nghiên cứu từ hơn 100 năm nay. Câu trả lời chính là một trong các định lý nổi tiếng nhất trong toán học.

ĐỊNH LÝ 1. *Định lý Bốn Màu.* Số màu của một đồ thị phẳng là không lớn hơn bốn.

Định lý Bốn màu đầu tiên được đưa ra như một phỏng đoán vào năm 1850. Và cuối cùng đã được hai nhà toán học Mỹ là Kenneth Appel và Wolfgang Haken chứng minh năm 1976. Trước năm 1976 cũng đã có nhiều chứng minh sai, mà thông thường rất khó tìm thấy chỗ sai, đã được công bố. Hơn thế nữa đã có nhiều cố gắng một cách vô ích để tìm phản ví dụ bằng cách cố vẽ bản đồ cần hơn bốn màu để tô nó.

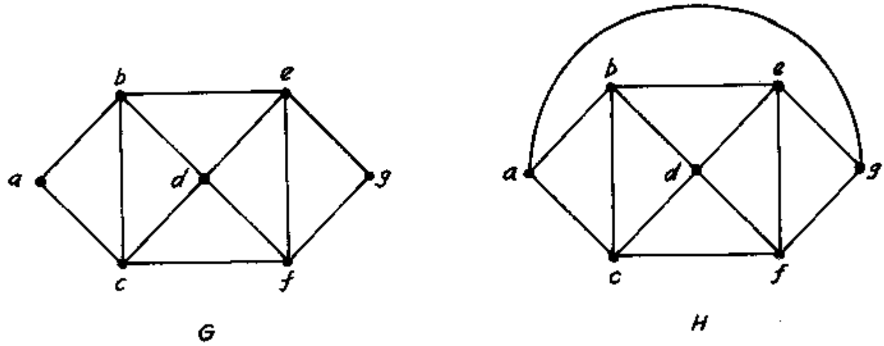
Có lẽ một chứng minh sai nổi tiếng nhất trong toán học là chứng minh sai bài toán bốn màu được công bố năm 1879 bởi luật sư, nhà toán học nghiệp dư Luân-đôn tên là Alfred Kempe. Các nhà toán học chấp nhận cách chứng minh của ông ta cho tới năm 1890, khi Percy Heawood phát hiện ra sai lầm trong chứng minh của Kempe. Tuy nhiên, cách lập luận của Kempe lại là cơ sở cho chứng minh của Appel và Haken. Chứng minh của họ dựa trên sự phân tích từng trường hợp một cách cẩn thận nhờ máy tính. Họ đã chỉ ra rằng nếu bài toán bốn màu là sai thì sẽ có một phản ví dụ thuộc một trong gần 2000 loại khác nhau và đã chỉ ra không có loại nào dẫn tới phản ví dụ cả. Trong chứng minh của mình họ đã dùng hơn 1000 giờ máy. Cách chứng minh này đã gây ra nhiều cuộc tranh cãi vì máy tính đã đóng vai trò quan trọng biết bao. Chẳng hạn, liệu có thể có sai lầm trong chương trình và điều đó dẫn đến kết quả sai không? Lý luận của họ có thực sự là một chứng minh hay không, nếu nó phụ thuộc vào thông tin ra từ một máy tính không đáng tin cậy?

Bài toán bốn màu áp dụng chỉ cho các đồ thị phẳng. Các đồ thị không phẳng có thể có số màu lớn tùy ý như sẽ được chỉ ra trong Ví dụ 2.

Cần phải làm hai điều khi chứng minh số màu của đồ thị là n. Trước tiên chúng ta phải chứng tỏ rằng đồ thị có thể được tô màu bằng n màu. Điều này có thể thực hiện bằng cách tô màu đồ thị đó. Sau đó chúng ta phải chứng tỏ rằng không thể tô màu đồ thị với số màu ít hơn . Ví dụ sau đây minh họa cách tìm số màu.

Ví dụ 1. Số màu của đồ thị G và H trên Hình 3 bằng bao nhiêu?

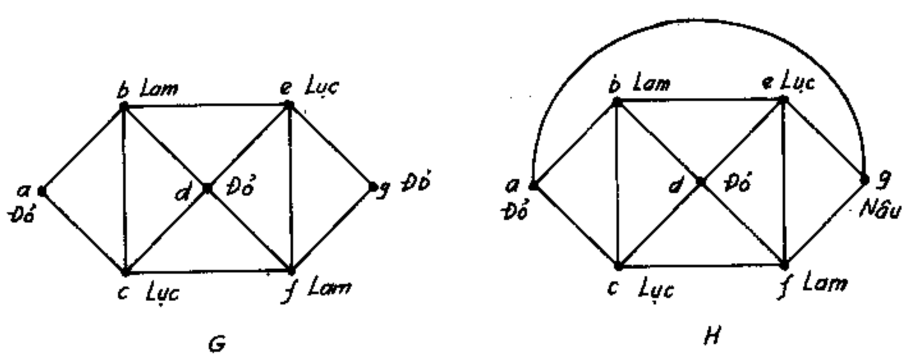
Giải: Số màu của G ít nhất là 3, vì các đỉnh a, b và c phải được gán các màu khác nhau. Để thấy G có thể tô bằng 3 màu ta gán màu đỏ cho a, màu lam cho b và màu lục cho c. Khi đó d có thể (và phải) tô màu đỏ vì nó liền kề với b và c. Tiếp theo e có thể (và phải) tô màu



***Hình** 3.* Các đơn đồ thị G và H.

lục vì nó liền kề với các đỉnh màu đỏ và lam, đỉnh f có thể (và phải) tô màu lam vì nó liền kề với các đỉnh màu đỏ và màu lục. Cuối cùng, g có thể (và phải) tô màu đỏ vì nó liền kề với các đỉnh màu lam và màu lục. Vậy là ta đã tô màu đồ thị G bằng đúng 3 màu. Hình 4 thể hiện cách tô màu như thế.

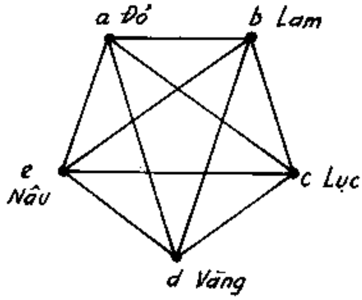
Đồ thị H được tạo nên từ đồ thị G bằng cách thêm vào một cạnh nối a với g. Mọi ý định tô H bằng 3 màu cần phải tuân theo lý luận đã dùng khi tô màu G, trừ giai đoạn cuối cùng, khi các đỉnh khác g đã được tô màu. Vì g liền kề (trong H) với các đỉnh màu đỏ, màu lam và màu lục nên ta buộc phải dùng màu thứ tư, chẳng hạn màu nâu. Vì thế H có số mậu bằng 4. Cách tô màu H thể hiện trên Hình 4.



***Hình** 4.* Tô màu đồ thị G và H.

Ví dụ 2. Tìm số màu của đồ thị K_n.

Giải: Có thể xây dựng cách tô màu đồ thị K_n với n màu khác nhau. Có cách tô màu nào dùng ít màu hơn không? Câu trả lời là không. Không có hai đỉnh nào có thể gán cùng màu vì mọi cặp đỉnh của đồ thị này đều liền kề. Vì thế số màu của K_n bằng n. (Nhớ lại rằng K_n là không phẳng nếu $n \geq 5$, vì thế kết quả này không mâu thuẫn với Định lý bốn màu). Cách tô màu K_5 bằng 5 màu được thể hiện trên Hình 5.

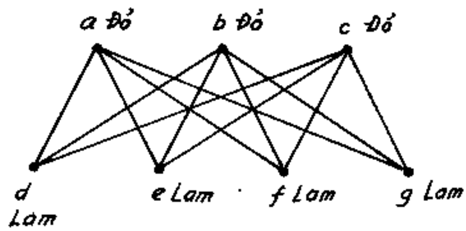


Hình 5. Tô màu đồ thị K_5.

■

Ví dụ 3. Tìm số màu của đồ thị phân đôi, đầy đủ $K_{m,n}$, trong đó m và n là các số nguyên dương.

Giải: Hình như số màu cần thiết phụ thuộc vào m và n. Tuy nhiên, ta chỉ cần 2 màu. Tô tập m đỉnh bằng một màu, và tập n đỉnh bằng màu khác. Vì mỗi cạnh chỉ nối các đỉnh từ tập m đỉnh tới đỉnh thuộc tập n đỉnh nên không có hai đỉnh liền kề nào cùng màu. Hình 6 thể hiện cách tô màu đồ thị $K_{3,4}$.



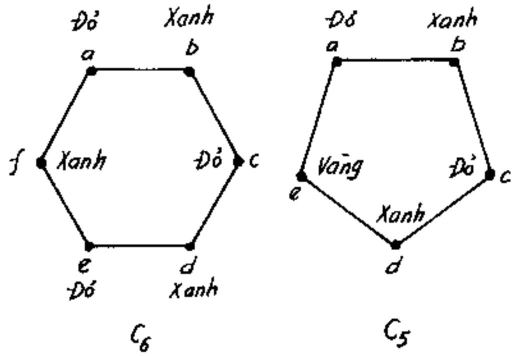
Hình 6. Tô màu đồ thị $K_{3,4}$.

■

Mọi đơn đồ thị phân đôi liên thông có số màu bằng 2 hoặc 1, vì lý lẽ như trong Ví dụ 3 áp dụng được cho mọi đồ thị như thế. Ngược lại, mọi đồ thị có số màu bằng 2 đều là đồ thị phân đôi. (Xem các Bài tập 23 và 24 cuối tiết này).

Ví dụ 4. Số màu của đồ thị C_n là bao nhiêu? (Nhớ lại rằng C_n là chu trình với n đỉnh).

Giải: Trước tiên ta nghiên cứu một vài trường hợp cụ thể. Giả sử $n = 6$. Lấy ra một đỉnh và tô nó bằng màu đỏ. Đi theo chiều kim đồng hồ của đồ thị phẳng trên Hình 7, cần gán màu thứ hai, chẳng hạn màu xanh cho đỉnh tiếp theo, cứ tiếp tục như thế theo chiều kim đồng hồ, đỉnh thứ ba có thể tô màu đỏ, đỉnh thứ tư tô màu xanh, đỉnh thứ năm tô màu đỏ và cuối cùng đỉnh thứ 6 có thể tô màu xanh. Vậy số màu của C_6 là 2.



***Hình** 7.* tô màu đồ thị C_5 và C_6.

Tiếp theo, cho $n = 5$, xét đồ thị C_5. Lấy một đỉnh và tô nó bằng màu đỏ. Đỉnh tiếp theo chiều kim đồng hồ tô màu xanh, cứ tiếp tục ta được đỉnh d màu xanh. Đỉnh thứ 5, đỉnh e, không thể tô màu đỏ hoặc xanh được vì nó liền kề với các đỉnh có màu xanh và đỏ. Do đó cần màu thứ ba cho đỉnh này, chẳng hạn màu vàng. Vậy số màu của C_5 là 3. Xem Hình 7.

Nói chung, cần hai màu nếu n chẵn để tô màu đồ thị C_n và nếu n lẻ thì số màu của C_n bằng 3. Độc giả có thể tự chứng minh điều này một cách không có gì khó khăn.

NHỮNG ỨNG DỤNG CỦA BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

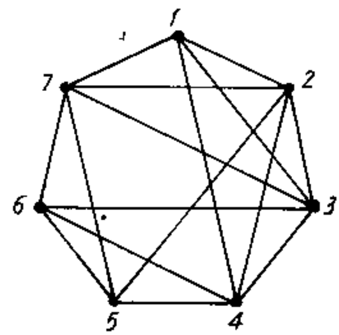
Bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng khác nhau để xếp lịch và gán nhãn. Các ví dụ ứng dụng như vậy sẽ được xét ở đây. Ứng dụng đầu tiên liên quan tới việc sắp lịch thi.

Ví dụ 5. *Lập lịch thi.* Hãy lập lịch thi trong trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một lúc.

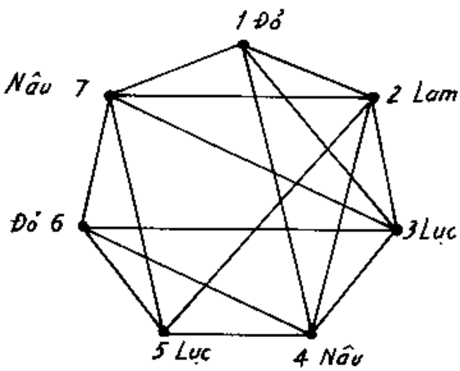
Giải: Có thể giải bài toán lập lịch bằng mô hình đồ thị, với các đỉnh là các môn thi, có một cạnh giữa hai đỉnh nếu có sinh viên phải thi cả hai môn được biểu diễn bằng hai đỉnh này. Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy việc lập lịch thi sẽ tương ứng với việc tô màu đồ thị này.

Ví dụ có 7 môn thi cần xếp lịch. Giả sử các môn học được đánh số từ 1 tới 7, và các cặp môn thi sau có chung sinh viên : 1 và 2, 1 và 3, 1 và 4, 1 và 7, 2 và 3, 2 và 4, 2 và 5, 2 và 7, 3 và 4, 3 và 7, 4 và 5, 4 và 6, 5 và 7, 6 và 7. Trên Hình 8 biểu diễn đồ thị tương ứng. Việc lập lịch thi chính là việc tô màu đồ thị này.

Vì số màu của đồ thị này là 4 (độc giả tự kiểm tra lại điều này), nên cần có 4 đợt thi. Cách tô đồ thị bằng 4 màu và lịch thi được biểu diễn trên Hình 9.



Hình 8. Đồ thị biểu diễn bài toán lập lịch thi.



Đợt thi	Môn thi
I	1,6
II	2
III	3,5
IV	4,7

Hình 9. Dùng bài toán tô màu để lập lịch thi.

■

Bây giờ ta xét bài toán phân chia kênh truyền hình.

Ví dụ 6. *Phân chia tần số.* Các kênh truyền hình từ số 2 tới số 13 được phân chia cho các đài truyền hình ở Bắc Mỹ sao cho không có hai đài phát nào cách nhau không quá 150 dặm lại dùng cùng một kênh. Có thể chia kênh truyền hình như thế nào bằng mô hình tô màu đồ thị?

Giải: Ta xây dựng đồ thị bằng cách coi mỗi đài phát là một đỉnh. Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh nếu chúng ở cách nhau không quá 150 dặm. Việc phân chia kênh tương ứng với việc tô màu đồ thị, trong đó mỗi màu biểu thị một kênh.

■

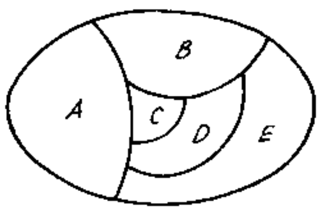
Áp dụng bài toán tô màu đồ thị với bộ dịch.

Ví dụ 7. *Các thanh ghi chỉ số.* Trong các bộ dịch hiệu quả cao việc thực hiện các vòng lặp được tăng tốc khi các biến dùng thường xuyên được lưu tạm thời trong các thanh ghi chỉ số của Bộ xử lý trung tâm (*CPU*) mà không phải ở trong bộ nhớ thông thường. Với một vòng lặp cho trước cần bao nhiêu thanh ghi chỉ số? Bài toán này có thể giải bằng mô hình tô màu đồ thị. Để xây dựng mô hình ta coi mỗi đỉnh của đồ thị là một biến trong vòng lặp. Giữa hai đỉnh có một cạnh nếu các biến biểu thị bằng các đỉnh này phải được lưu trong các thanh ghi chỉ số tại cùng thời điểm khi thực hiện vòng lặp. Như vậy số màu của đồ thị chính là số thanh ghi cần có vì những thanh ghi khác nhau được phân cho các biến khi các đỉnh biểu thị các biến này là liền kề trong đồ thị.

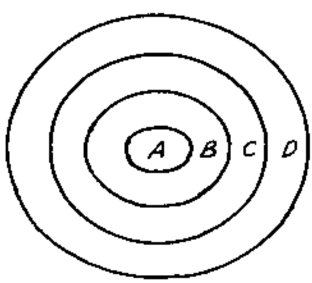
BÀI TẬP

1. Hãy xây dựng đồ thị đối ngẫu với mỗi bản đồ sau.

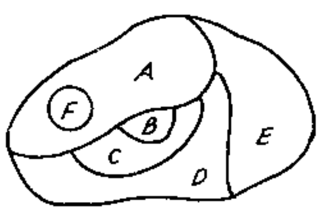
a)



b)



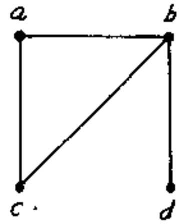
c)



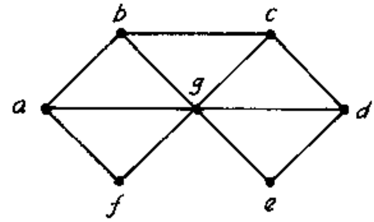
2. Tìm số màu cần để tô bản đồ trong Bài tập 1 sao cho không có hai miền kề nhau có cùng một màu.

Trong các bài tập 3-9 hãy tìm số màu của đồ thị đã cho.

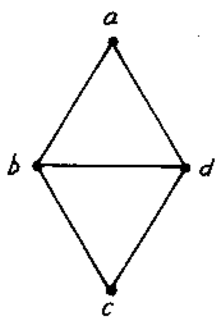
3.



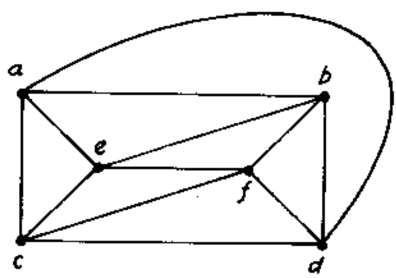
4.



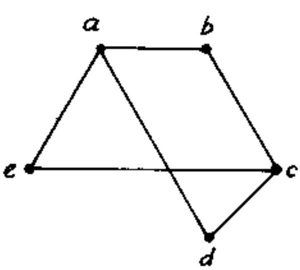
5.



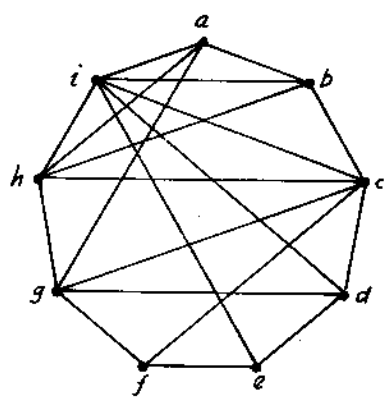
6.



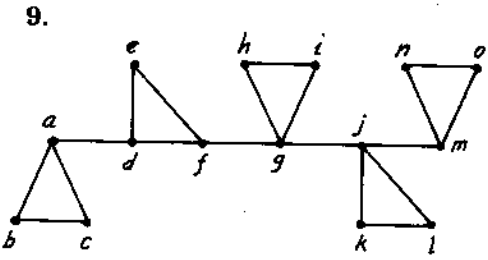
7.



8.



9.



10. Với các đồ thị trong các Bài tập 3–9, hãy xét xem có thể giảm số màu bằng cách xóa một đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với nó không.

11. Những đồ thị nào có số màu bằng 1?

12. Số màu tối thiểu cần thiết để tô bản đồ nước Mỹ là bao nhiêu? Không coi hai bang là liền kề nếu chúng chỉ gặp nhau ở góc. Giả sử Michigan là một bang. Coi các đỉnh biểu thị Alaska và Hawaii là các đỉnh cô lập.

13. Tính số màu của đồ thị Wn

14. Chứng minh rằng một đơn đồ thị có chu trình và có một số lẻ các đỉnh không thể tô bằng hai màu.

15. Hãy lập lịch thi các môn Toán 115, Toán 116, Toán 185, Toán 195, *CS* 101, *CS* 102, *CS* 273, và *CS* 473 (CS – Tin học) với số ít nhất các đợt thi, nếu không có sinh viên nào thi cả hai môn Toán 115 và *CS* 473, Toán 116 và *CS* 473, Toán 195 và *CS* 101, Toán 195 và *CS* 102, Toán 115 và Toán 116, Toán 115 và Toán 185, và Toán 185 và Toán 195, nhưng có sinh viên thi trong mọi tổ hợp khác của các môn.

16. Sáu đài truyền hình ở cách nhau như đã cho trong bảng dưới đây. Hỏi phải cần bao nhiêu kênh khác nhau để phát sóng, nếu hai đài không thể dùng cùng một kênh khi chúng cách nhau không quá 150 dặm?

	1	2	3	4	5	6
1	-	85	175	200	50	100
2	85	-	125	175	100	160
3	175	125	-	100	200	250
4	200	175	100	-	210	220
5	50	100	200	210	-	100
6	100	160	250	220	100	-

17. Khoa toán có **6** hội đồng họp mỗi tháng một lần. Cần có bao nhiêu thời điểm họp khác nhau để đảm bảo rằng không ai bị xếp lịch họp hai hội đồng cùng một lúc, nếu các hội đồng là :

C_1 = {Arlinghaus, Brand, Zaslavsky},

C_2 = {Brand, Lee, Rosen},

C_3 = {Arlinghaus, Rosen, Zaslavsky}.

18. Một vườn bách thú muốn xây dựng chuồng tự nhiên để trưng bày các con thú. Không may, một số loại thú sẽ ăn thịt các con thú khác nêu có cơ hội. Có thể dùng mô hình đồ thị và tô màu đồ thị như thế nào để xác định số chuồng khác nhau cần có và cách nhốt các con thú vào các chuồng thú tự nhiên này?

Tô màu cạnh *đồ thị là gán các màu cho các cạnh sao cho các cạnh liên thuộc với một đỉnh chung được gán các màu khác nhau.* **Số màu cạnh** *của một đồ thị là số nhỏ nhất các màu cần dùng để tô màu các cạnh của nó.*

19. Hãy tìm số màu cạnh của đồ thị trong các Bài tập 3-9.

20*. Hãy tìm số màu cạnh của các đồ thị

a) K_n b) $K_{m,n}$ c) C_n d) W_n

21. Bảy biến xuất hiện trong vòng lặp của một chương trình. Các biến và các bước trong đó chúng cần phải lưu là : t : các bước từ 1 tới 6; u : bước 2 ; v : các bước từ 2 tới 4 ; w : các bước 1, 3 và 5 ; x : các bước 1 và 6 ; y : các bước từ 3 tới 6 ; và z : các bước 4 và 5. Cần bao nhiêu thanh ghi chỉ số khác nhau để lưu các biến trên khi thực hiện vòng lặp này?

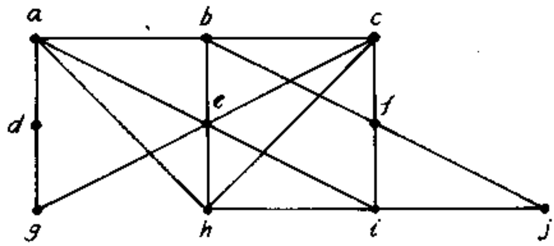
22. Có thể nói gì về số màu của đồ thị có K_n như một đồ thị con?

23. Chỉ ra rằng một đơn đồ thị với số màu bằng 2 là đồ thị phân đôi.

24. Chỉ ra rằng một đồ thị phân đôi liên thông có số màu bằng 2.

Thuật toán sau đây có thể dùng để tô màu đồ thị đơn. Trước tiên liệt kê các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ theo thứ tự bậc giảm dần, tức là $deg(v_1) \geq deg(v_2) \geq deg(v_2 \geq \dots \geq deg(v_n)$. Gán màu 1 cho v_1 và cho đỉnh tiếp theo trong danh sách mà không liền kề với v_1 (nếu nó tồn tại), và lần lượt cho mỗi đỉnh không kề với các đỉnh có màu 1. Sau đó gán màu 2 cho đỉnh đầu tiên trong danh sách còn chưa được tô màu. Lần lượt gán màu 2 cho các đỉnh trong danh sách nếu các đỉnh này chưa được tô màu và không nối với các đỉnh có màu 2. Nếu vẫn còn các đỉnh chưa được tô màu hãy gán màu 3 cho đỉnh chưa được tô màu đầu tiên trong danh sách và cho các đỉnh chưa tô màu và không liền kề với các đỉnh có màu 3. Tiếp tục quá trình này cho tới khi tất cả các đỉnh được tô màu.

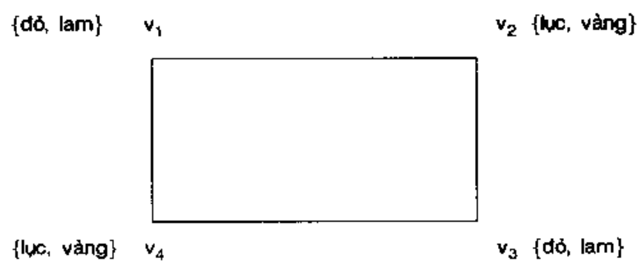
25. Xây dựng cách tô màu đồ thị sau đây bằng thuật toán trên.



26*. Dùng giả mã mô tả thuật toán tô màu nói trên.

27*. Chỉ ra rằng cách tô màu theo thuật toán trên có thể dùng nhiều màu hơn số màu cần thiết để tô màu đồ thị đã cho.

Tô bộ k-màu *cho đồ thị G là cách gán một tập k màu khác nhau cho mỗi đỉnh của đồ thị sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau nào có chung một màu. Ta ký hiệu $X_k(G)$ là số dương nhỏ nhất n sao cho G có cách tô bộ k-màu bằng n màu. Ví dụ, $X_2(C_4) = 4$. Chỉ dùng bốn màu chúng ta có thể gán bộ hai màu cho mỗi đỉnh của C_4, sao cho không có hai đỉnh kề nào có chung một màu. Hơn nữa, ít hơn 4 màu là không đủ bởi vì hai đỉnh v_1 và v_2 mỗi đỉnh cần gán hai màu, và không thể gán một màu chung cho cả hai đỉnh này.*



28. Tìm các giá trị sau :

a) $X_2(K_3)$ b) $X_2(K_4)$

c) $X_2(W_4)$ d) $X_2(C_5)$

e) $X_2(K_{3,4})$ f) $X_3(K_5)$

g) $X_3(C_5)$ h) $X_3(K_{4,5})$

29*. Cho G và H là các đồ thị trên Hình 3. Hãy tìm

a) $X_2(G)$ b) $X_2(H)$

c) $X_3(G)$ d) $X_3(H)$.

30. $X_k(G)$ bằng bao nhiêu nếu G là đồ thị phân đôi và k là một số nguyên dương?

31. Các tần số cho điện thoại di động được phân chia theo vùng. Mỗi vùng được phân một tập các tần số để các máy ở vùng đó sử dụng. Một tần số như nhau không thể dùng trong các vùng ở đó xảy ra hiện tượng giao thoa sóng. Hãy giải thích cách dùng tô bộ k- màu để phân k tần số cho mỗi vùng điện thoại di động.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. a) Hãy định nghĩa đồ thị đơn, đa đồ thị, giả đồ thị, đồ thị có hướng, và đa đồ thị có hướng.

   b) Bằng ví dụ hãy chỉ ra mỗi loại đồ thị trong câu a) có thể dùng để mô hình. Ví dụ hãy giải thích cách lập mô hình các khía cạnh khác nhau của mạng máy tính hay hệ thống hàng không.

2. Hãy cho ít nhất 4 ví dụ về cách dùng đồ thị để lập mô hình các bài toán thực tế.

3. Hãy nêu mối quan hệ giữa tổng số bậc của các đỉnh trong một đồ thị vô hướng và số cạnh của nó. Hãy giải thích vì sao có mối quan hệ đó.

4. Tại sao trong đồ thị vô hướng số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn?

5. Hãy nêu mối quan hệ giữa tổng số bậc-vào và tổng các bậc-ra của các đỉnh trong một đồ thị có hướng. Hãy giải thích vì sao có mối quan hệ đó.

6. Hãy mô tả họ các đồ thị sau đây :

a) K_n – đồ thị đầy đủ với n đỉnh.

b) $K_{m,n}$ – đồ thị đầy đủ phân đôi thành m đỉnh và n đỉnh.

c) C_n – các chu trình với n đỉnh.

d) W_n – các bánh xe cỡ n.

c) Q_n – các khối hộp n chiều.

7. Trong mỗi họ đồ thị ở Bài tập 6 có bao nhiêu cạnh, bao nhiêu đỉnh?

8. a) Đồ thị phân đôi là gì?

b) Đồ thị nào trong các đồ thị K_n, C_n, W_n là đồ thị phân đôi?

c) Làm thế nào để xác định được một đồ thị có là phân đôi không?

9. a) Hãy mô tả ha phương pháp khác nhau để hiểu diễn đồ thị.

h) Hãy vẽ một đơn đồ thị có ít nhất 5 đỉnh và 8 cạnh. Hãy minh họa cách dùng các phương pháp mô tả ở câu a) để hiểu diễn đồ thị này.

10. a) Thế nào là hai đơn đồ thị đẳng cấu?

b) Bất biến với phép đẳng cấu giữa hai đơn đồ thị là gì?

c) Hãy cho ví dụ về hai đồ thị có cùng số đỉnh, số cạnh, và bậc của các đỉnh nhưng không đẳng cấu.

d) Có tồn tại tập các bất biến có thể dùng để xác định hai đồ thị đơn có là đẳng cấu với nhau không?

11. a) Đồ thị liên thông là gì?

b) Thế nào là các thành phần liên thông của một đồ thị.

12. a) Hãy giải thích cách dùng ma trận liền kề để biểu diễn đồ thị.

b) Ma trận liền kề có thể dùng như thế nào để xác định xem một hàm từ tập đỉnh của đồ thị G tới tập đỉnh của đồ thị H có là đẳng cấu hay không?

c) Ma trận liền kề có thể dùng như thế nào để xác định số các đường đi độ dài r, trong đó r là một số dương, giữa hai đỉnh của một đồ thị.

13. a) Hãy xác định chu trình Euler và đường đi Euler trong đồ thị vô hướng.

b) Hãy mô tả bài toán cầu Konigsberg và giải thích cách phát biểu bài toán này dưới dạng chu trình Euler.

c) Làm thế nào để có thể xác định xem một đồ thị vô hướng có đường đi Euler hay không?

d) Làm thế nào để có thể xác định xem một đồ thị vô hướng có chu trình Euler hay không?

14. a) Định nghĩa chu trình Hamilton trong đồ thị đơn.

b) Hãy đưa ra một số tính chất của đơn đồ thị để suy ra đồ thị không có chu trình Hamilton.

15. Hãy đưa ra ví dụ về các bài toán có thể giải bằng cách tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số.

16. a) Mô tả thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số.

b) Hãy vẽ đồ thị có trọng số với ít nhất 10 đỉnh, 20 cạnh. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh nào đó của đồ thị.

17. a) Đồ thị phẳng là gì?

b) Cho ví dụ về đồ thị không phẳng.

18. a) Hãy đưa ra công thức Euler cho đồ thị phẳng.

b) Có thể dùng công thức Euler như thế nào để chỉ ra một đồ thị đơn là không phẳng.

19. Hãy phát biểu định lý Kuratowski và giải thích ý nghĩa của nó.

20. a) Định nghĩa số màu của đồ thị.

b) Số màu của đồ thị K_n, trong đó n là một số nguyên dương, bằng bao nhiêu?

c) Số màu của đồ thị C_n, trong đó n là một số nguyên dương lớn hơn 2, bằng bao nhiêu?

d) Số màu của đồ thị $K_{m,n}$, trong đó m,n là các số nguyên dương, bằng bao nhiêu?

21. Hãy phát biểu Định lý bốn màu. Có tồn tại các đồ thị không thể tô bằng bốn màu không?

22. Hãy giải thích cách dùng bài toán tô màu để lập mô hình các bài toán thực tế. Hãy đưa ra ít nhất hai ví dụ.

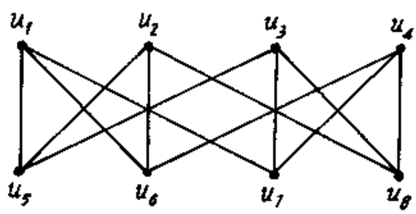
BÀI TẬP BỔ SUNG

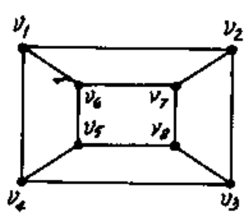
1. Một đồ thị có 100 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 50. Hãy tính số cạnh của nó.

2. Đồ thị K_3 có bao nhiêu đồ thị con không đẳng cấu?

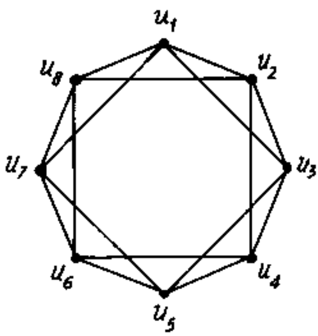
Trong các Bài tập 3-5, các cặp đồ thị đã cho có đẳng cấu hay không.

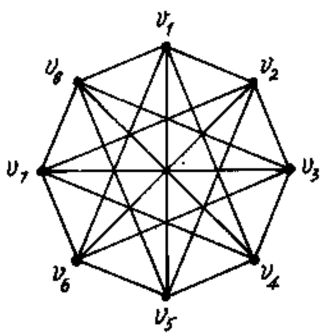
3.



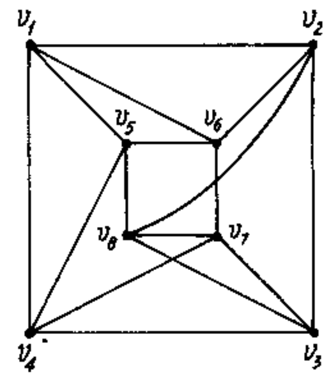


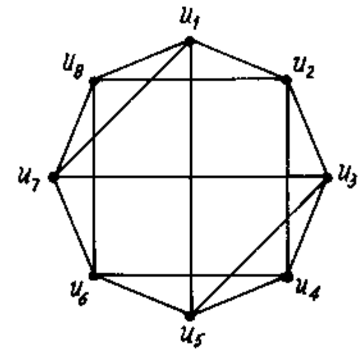
4.





5.





Đồ thị đầy đủ m - phần $K_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ có các đỉnh được phân thành m tập con trong đó mỗi tập có n_1, n_2, ..., n_m phần tử và các đỉnh nối với nhau nếu và chỉ nếu chúng thuộc các tập con khác nhau.

6. Vẽ các đồ thị sau :

a) $K_{1,2,3}$ b) $K_{2,2,2}$ c) $K_{1,2,2,3}$

7. Đồ thị đầy đủ m – phần $K_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

8*. a) Hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng trong một đơn đồ thị hữu hạn có ít nhất hai đỉnh, luôn tồn tại hai đỉnh cùng bậc.

b) Hãy làm như câu a) với một đa đồ thị hữu hạn.

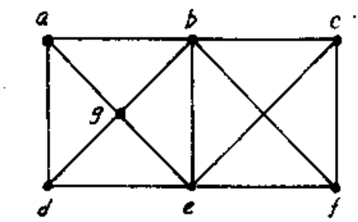
Cho G = (V,E) là một đơn đồ thị. **Đồ thị con sinh** *bởi tập con W của tập V là đồ thị (W, F) trong đó F chứa các cạnh của E nếu và chỉ nếu cả hai đầu mút của nó đều thuộc W.*

9. Xét các đồ thị trên Hình 3 của Tiết 7.4. Hãy tìm đồ thị con sinh bởi:
a) $\{a, b, c\}$ b) $\{a, e, g\}$ c) $\{b, c, f, g, h\}$.

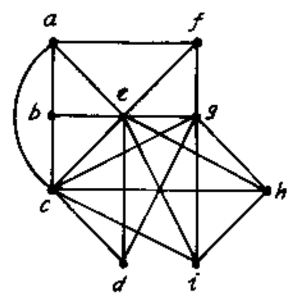
10. Cho n là một số nguyên dương. Chỉ ra rằng đồ thị con sinh bởi tập con không rỗng của tập đỉnh của K_n là một đồ thị đầy đủ.

Clic *trong một đơn đồ thị vô hướng là một đồ thị con đầy đủ không nằm trong bất cứ đồ thị con đầy đủ nào rộng hơn nó. Trong các Bài tập 11–13 hãy tìm tất cả các clic trong các đồ thị đã cho.*

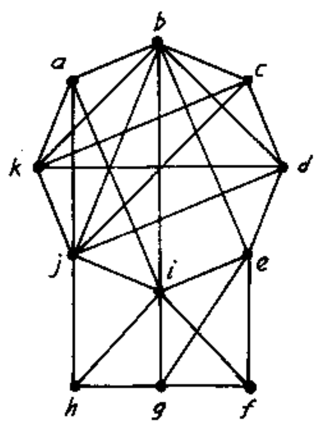
11.



12.

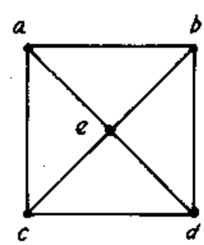


13.

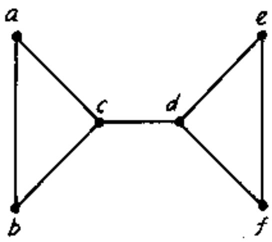


Tập trội *của các đỉnh trong một đơn đồ thị là tập gồm các đỉnh sao cho mọi đỉnh khác đều nối với ít nhất một trong các đỉnh của tập này. Tập đỉnh trội với số phần tử nhỏ nhất được gọi là* **tập trội tối thiểu.** *Trong các bài tập 14–16 hãy tìm tập trội tối thiểu cho mỗi đồ thị đã cho*

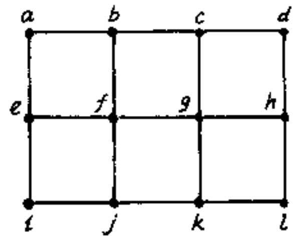
14.



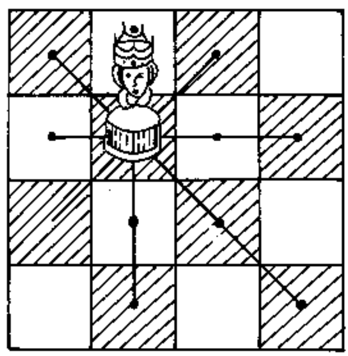
15.



16.



Đồ thị đơn có thể dùng để xác định số nhỏ nhất các quân hậu có thể khống chế toàn bàn cờ. Giả sử cho bàn cờ cỡ $n \times n$ có n^2 ô vuông. Một đơn đồ thị có n^2 đỉnh, mỗi đỉnh ứng với một ô vuông, hai đỉnh được nối với nhau nếu con hậu đứng ở ô được biểu diễn bằng một đỉnh có thể khống chế được ô biểu diễn bằng đỉnh kia.



Các ô vuông bị quân hậu khống chế.

17. Hãy xây dựng đơn đồ thị biểu diễn bàn cờ $n \times n$ với các cạnh biểu thị sự khống chế của quân hậu, cho các trường hợp sau :

a) $n = 3$, b) $n = 4$.

18. Hãy nói cách áp dụng khái niệm tập trội tối thiểu vào bài toán xác định số nhỏ nhất các quân hậu khống chế toàn bàn cờ $n \times n$.

19.** Hãy tìm số tối thiểu các quân hậu khống chế toàn bàn cờ $n \times n$ với

a) $n = 3$; b) $n = 4$ c) $n = 5$.

20. Cho G_1 và H_1 là đẳng cấu và G_2 và H_2 là đẳng cấu. Hãy chứng minh hoặc bác bỏ khẳng định rằng $G_1 \cup G_2$ và $H_1 \cup H_2$ là đẳng cấu.

21. Chỉ ra rằng mỗi một trong các tính chất sau đây là một bất biến mà các đồ thị đơn đẳng cấu hoặc là có hoặc là không có tính chất này.

a) Liên thông ; b) Tồn tại chu trình Hamilton

c) Tồn tại chu trình Euler. đ) Có số tự cắt C

e) Có n đỉnh cô lập ; f) Đồ thị phân đôi.

22. Hãy nói cách tìm ma trận liền kề của $\overline{G}$ từ ma trận liền kề của G, trong đó G là một đơn đồ thị.

23. Có bao nhiêu đơn đồ thị liên thông, phân đôi không đẳng cấu và có 4 đỉnh?

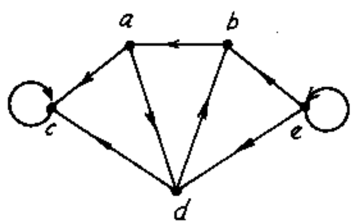
24*. Có bao nhiêu đơn đồ thị liên thộng, không đẳng cấu với 5 đỉnh và

1. không có đỉnh nào bậc lớn hơn 2?
2. có số màu bằng 4?
3. là đồ thị không phẳng?

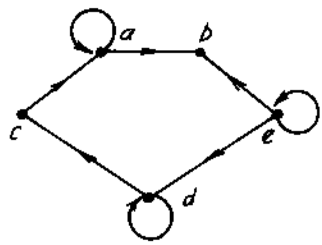
Đồ thị có hướng được gọi là **tự nghịch đảo** *nếu nó đẳng cấu với nghịch đảo của nó.*

25. Các đồ thị sau có phải là tự nghịch đảo không.

a)



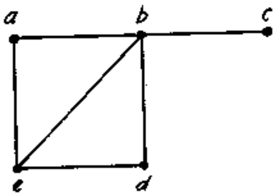
b)



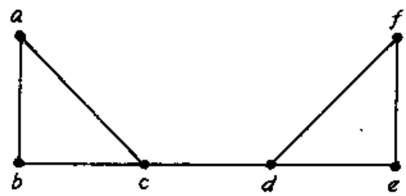
26. Chỉ ra rằng nếu G là đồ thị có hướng tự nghịch đảo và H là đồ thị có hướng đẳng cấu với G thì H cũng là tự nghịch đảo.

Định hướng *một đồ thị vô hướng đó là việc gán một chiều nào đó cho các cạnh của nó sao cho đồ thị có hướng nhận được là liên thông mạnh. Nếu có thể định hướng được một đồ thị vô hướng thì đồ thị này gọi là đồ thị có* **thể định hướng** *được. Trong các Bài tập từ 27-29 hãy xác định xem các đồ thị đó có thể định hướng được không?*

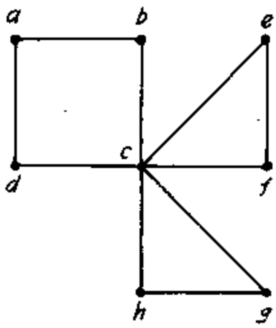
27.



28.



29.



30. Vì giao thông ở trung tâm thành phố rất khó khăn, nên các kỹ sư giao thông đã lập nhiều kế hoạch thay đổi tất cả các đường phố, các đường hiện là hai chiều sẽ trở thành đường một chiều. Hãy giải thích cách mô hình bài toán đó.

31*. Hãy chỉ ra rằng một đồ thị là không định hướng được nếu nó có cạnh cắt.

Đồ thị xoay *là đồ thị có hướng sao cho nếu u và v là các đỉnh của đồ thị thì có đúng một cạnh (u, v) hoặc (v, u) nối hai đỉnh này.*

32. Có bao nhiêu đồ thị xoay khác nhau với n đỉnh?

33. Tổng các bậc–vào và bậc–ra của một đỉnh trong một đồ thị xoay bằng bao nhiêu?

34*. Hãy chỉ ra mọi đồ thị xoay đều có đường đi Hamilton.

35. Cho hai con gà trong một đàn gà, một con lớn hơn con kia. Điều này quyết định **thứ tự mổ nhau** của đàn. Có thể dùng đồ thị xoay để mô hình thứ tự mổ nhau như thế nào?

36. Giả sử G là một đa đồ thị liên thông với $2k$ đỉnh bậc lẻ. Chứng tỏ rằng tồn tại k đồ thị con nhận G như là hợp của chúng, trong đó mỗi đồ thị con có đường đi Euler và không có hai đồ thị con nào có một cạnh chung.

(*Gợi ý* : Ghép k cạnh vào đồ thị nối các cặp đỉnh bậc lẻ và dùng chu trình Euler cho đồ thị lớn hơn này).

37*. Giả sử G là đơn đồ thị với n đỉnh. **Chiều rộng** của G ký hiệu $B(G)$ là số nhỏ nhất của max $\{\,|i-j|\ |\, a_i$ và a_j là kề nhau $\}$, đối với tất cả các hoán vị $a_1, a_2, \ldots, a_n$ của các đỉnh. Điều này có nghĩa là chiều rộng là số nhỏ nhất đối với tất cả các danh sách các đỉnh trong các số lớn nhất của hiệu các chỉ số ứng với các đỉnh kề nhau. Hãy tìm chiều rộng của các đồ thị sau.

a) K_5 b) $K_{1,3}$ c) $K_{2,3}$

d) $K_{3,3}$ e) Q_3 f) C_5

38*. **Khoảng cách** giữa hai đỉnh phân biệt v_1 và v_2 của một đơn đồ thị liên thông là độ dài (số các cạnh) của đường đi ngắn nhất giữa v_1 và v_2. **Bán kính** của đồ thị là số nhỏ nhất, đối với tất cả các đỉnh v, của khoảng cách cực đại từ v tới các đỉnh khác. **Đường kính** của đồ thị là khoảng cách cực đại giữa hai đỉnh phân biệt. Hãy tìm bán kính và đường kính của các đồ thị

a) K_6 b) $K_{4,5}$ c) Q_3 d) C_6

39*. a) Chứng tỏ rằng nếu đường kính của đơn đồ thị G ít nhất bằng 4 khi đó đường kính của phần bù của nó không lớn hơn 2.

b) Chứng tỏ rằng nếu đường kính của đơn đồ thị G ít nhất bằng 3 khi đó đường kính của phần bù của nó không lớn hơn 3.

40*. Giả sử một đa đồ thị có $2m$ đỉnh bậc lẻ. Chứng tỏ rằng mọi chu trình chứa tất cả các cạnh của đồ thị sẽ chứa ít nhất m cạnh hơn một lần.

41. Tìm đường đi ngắn thứ hai giữa hai đỉnh a và z trong Hình 3 của Tiết 7.6.

42. Hãy đề xuất thuật toán tìm đường đi ngắn thứ hai giữa hai đỉnh của một đơn đồ thị liên thông, có trọng số.

43. Tìm đường đi ngắn thứ hai giữa hai đỉnh a và z đi qua đỉnh e trong Hình 4 của Tiết 7.6.

44. Hãy đề xuất thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đơn đồ thị liên thông, có trọng số và đường đi này phải qua một đỉnh thứ ba xác định nào đó.

45*. Chỉ ra rằng nếu G là đơn đồ thị với ít nhất 11 đỉnh, khi đó hoặc là G hoặc là $\overline{G}$, phần bù của G, là không phẳng.

Tập các đỉnh trong một đồ thị được gọi là **độc lập** *nếu không có hai đỉnh nào trong tập này được nối với nhau.* **Số độc lập** *của một đồ thị là số cực đại các đỉnh của tập độc lập ứng với đồ thị đó.*

46*. Tìm số độc lập của :

a) K_n b) C_n c) Q_n d) $K_{m,n}$

47. Chỉ ra rằng số đỉnh trong một đơn đồ thị là nhỏ hơn hay bằng tích của số độc lập và số màu của đồ thị đó.

Một tính chất nào đó vẫn giữ nguyên khi thêm một cạnh vào một đơn đồ thị (không thêm đỉnh) được gọi là **đơn điệu tăng**, *và một tính chất nào đó vẫn giữ nguyên khi bỏ một cạnh khỏi một đơn đồ thị (không xóa đỉnh) được gọi là* **đơn điệu giảm**.

48. Với mỗi đồ thị có tính chất sau hãy xét xem nó là đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm.

a) Đồ thị G liên thông.

b) Đồ thị G không liên thông.

c) Đồ thị G có chu trình Euler.

d) Đồ thị G có chu trình Hamilton.

e) Đồ thị G là phẳng.

f) Đồ thị G có số màu bằng 4.

g) Đồ thị G có bán kính bằng 3.

h) Đồ thị G có đường kính bằng 3.

49. Chứng minh rằng tính chất P của đồ thị là đơn điệu tăng nếu và chỉ nếu tính chất Q của đồ thị là đơn điệu giảm, trong đó Q là tính chất không có P.

BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH

Viết chương trình với các Input và Output sau đây:

1. Cho các cặp đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị vô hướng, hãy xác định bậc của mỗi đỉnh.

2. Cho các cặp có thứ tự các đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị có hướng, hãy xác định bậc–vào và bậc–ra của mỗi đỉnh.

3. Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị hãy xác định xem đồ thị đó có là phân đôi không.

4. Cho các cặp đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị, hãy xây dựng ma trận liền kề cho đồ thị này. (Viết các phiên bản làm việc khi có khuyên, cạnh bội, cạnh có hướng).

5. Cho ma trận liền kề của đồ thị, hãy liệt kê các cạnh của đồ thị này và số lần mỗi cạnh xuất hiện.

6. Cho các cặp đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị vô hướng và số lần mỗi cạnh xuất hiện, hãy xây dựng ma trận liên thuộc của đồ thị.

7. Cho ma trận liên thuộc của một đồ thị vô hướng, hãy liệt kê các cạnh của nó và cho số lần xuất hiện của mỗi cạnh.

8. Cho số nguyên dương n, hãy tạo ra một đồ thị vô hướng bằng cách sinh ra ma trận liền kề cho đồ thị đó sao cho tất cả các đơn đồ thị có khả năng được tạo ra như nhau.

9. Cho số nguyên dương n, hãy tạo ra một đồ thị có hướng bằng cách sinh ra ma trận liền kề cho đồ thị sao cho tất cả các đồ thị có hướng có khả năng được tạo ra như nhau.

10. Cho danh sách các cạnh của hai đơn đồ thị có không quá 6 đỉnh, hãy xác định xem hai đồ thị này có là đẳng cấu không.

11. Cho ma trận kề của đồ thị và một số nguyên dương n, hãy tìm số đường đi có độ dài n giữa hai đỉnh. (Tạo ra phiên bản cho đồ thị có hướng và vô hướng).

12*. Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị hãy xác định xem đồ thị này có liên thông hay không, và tìm số thành phần liên thông nếu nó là không liên thông.

13. Cho các cặp đỉnh tương ứng với các cạnh của một đa đồ thị, hãy xác định xem nó có chu trình Euler hay không, nếu không thì nó có đường đi Euler không? Hãy xây dựng đường đi hoặc chu trình Euler nếu chúng tồn tại.

14*. Cho các cặp có thứ tự của các đỉnh tương ứng với các cạnh của một đa đồ thị có hướng. Hãy xây dựng đường đi hoặc chu trình Euler nếu chúng tồn tại.

15.** Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị, hãy tạo ra chu trình Hamilton hoặc khẳng định đồ thị đó không có chu trình như thế.

16.** Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị hãy tạo ra đường đi Hamilton hoặc khẳng định đồ thị đó không có đường đi như thế.

17. Cho danh sách các cạnh và trọng số của chúng trong một đơn đồ thị liên thông có trọng số và hai đỉnh của đồ thị này, hãy tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa chúng bằng thuật toán Dijkstra. Sau đó tìm đường đi đó.

18. Cho danh sách các cạnh của một đồ thị vô hướng hãy tìm cách tô màu đồ thị này bằng thuật toán cho trong tập Bài tập của Tiết 7.8.

19. Cho danh sách sinh viên và các môn mà họ theo học. Hãy lập lịch thi.

20. Cho khoảng cách giữa các cặp đài truyền hình, hãy phân chia tần số cho các đài này.

TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

Sử dụng chương trình mà bạn tự viết để làm các bài tập sau

1. Hãy biểu thị tất cả các đơn đồ thị có 4 đỉnh.

2. Hãy biểu thị tất cả các đơn đồ thị không đẳng cấu có 6 đỉnh.

3. Hãy biểu thị tất cả các đồ thị có hướng không đẳng cấu có 4 đỉnh.

4. Hãy tạo ra một cách ngẫu nhiên 10 đồ thị đơn khác nhau với 20 đỉnh sao cho mỗi đồ thị như thế có khả năng được tạo ra là như nhau.

5. Xây dựng mã Gray trong đó từ mã là các xâu nhị phân độ dài 6.

6. Hãy xây dựng các hành trình của con mã trên bàn cờ có kích thước khác nhau.

7. Hãy xét xem mỗi đồ thị mà bạn tạo ra trong Bài tập 4 có là đồ thị phẳng hay không. Nếu có thể hãy xác định độ dày của mỗi đồ thị không phẳng.

8. Hãy xét xem mỗi đồ thị mà bạn tạo ra trong Bài tập 4 có liên thông hay không. Nếu nó không liên thông, hãy xác định số thành phần liên thông của nó.

9. Hãy tạo ra một cách ngẫu nhiên các đơn đồ thị có 10 đỉnh. Thuật toán dừng khi hạn tạo được một đồ thị có chu trình Euler. Hãy trình diễn chu trình Euler đó.

10. Hãy tạo ra một cách ngẫu nhiên các đơn đồ thị có 10 đỉnh. Thuật toán dừng khi hạn tạo được một đồ thị có chu trình Hamilton. Hãy trình diễn chu trình Hamilton đó.

11. Tìm số màu của mỗi đồ thị mà hạn đã tạo ra trong Bài tập 4.

12**. Tìm đường đi ngắn nhất cho một thương nhân đi thăm mỗi thủ phủ của 50 bang của Mỹ, giả sử giữa chúng đều có đường hàng không.

13**. Đánh giá xác suất để một đơn đồ thị n đỉnh được tạo ngẫu nhiên là liên thông, với mỗi số n nguyên dương không vượt quá 10 bằng cách tạo ngẫu nhiên một đơn đồ thị rồi kiểm tra tính liên thông của nó.

VIẾT TIỂU LUẬN

Dùng tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau

1. Mô tả nguồn gốc và sự phát triển của lý thuyết đồ thị trước năm 1900.

2. Thảo luận ứng dụng của đồ thị để nghiên cứu hệ sinh thái.

3. Thảo luận ứng dụng của đồ thị trong xã hội học và tâm lý học.

4. Mô tả thuật toán vẽ đồ thị trên giấy hoặc trên màn hiển thị với các đỉnh, các cạnh đã cho của đồ thị đó. Vấn đề nào cần chú ý khi vẽ đồ thị sao cho nó có dạng tốt nhất để dễ hiểu các tính chất của nó.

5. Các công cụ phần mềm có khả năng làm được những việc nào trong các việc sau : nhập vào, hiển thị, thao tác đồ thị?

6. Mô tả một vài thuật toán xác định xem hai đồ thị có là đẳng cấu hay không, và đưa ra độ phức tạp tính toán của các thuật toán này. Thuật toán nào là hiệu quả nhất?

7. Hãy định nghĩa các dãy Bruijn và cho biết chúng được áp dụng khi nào. Hãy trình bày cách xây dựng dãy Bruijn khi dùng chu trình Euler.

8. Hãy mô tả *Bài toán người đưa thư Trung Quốc* và cách giải bài toán này.

9. Hãy nêu ra một vài điều kiện để một đồ thị có chu trình Hamilton.

10. Hãy trình bày *Bài toán hành trình của một thương nhân* và một số thuật toán để giải bài toán này.

11. Hãy mô tả một số thuật toán xác định tính phẳng của một đồ thị. Độ phức tập tính toán của các thuật toán này là bao nhiêu?

12. Khi lập mô hình các mạch tích hợp rất lớn (*VLSI*) các đồ thị đôi khi được đóng vào một quyển sách với các đỉnh nằm ở gáy sách và các cạnh ở trên các trang. Hãy định nghĩa *số sách* của một đồ thị và tìm số sách của các đồ thị khác nhau kể cả K_n với $n = 3, 4, 5$ và 6.

13. Hãy nói sơ qua về lịch sử bài toán bốn màu.

14. Hãy kể về vai trò của máy tính trong chứng minh định lý bốn màu. Có thể tin một chứng minh dựa trên máy tính là đúng đắn được không?

15. Hãy mô tả và so sánh những thuật toán tô màu đồ thị. Nói rõ chúng tạo ra các cách tô màu với số màu ít nhất có thể được, và độ phức tạp của các thuật toán này.

16. Hãy giải thích cách dùng bài toán tô đa màu đồ thị trong các mô hình khác nhau.

17. Hãy trình bày cách dùng lý thuyết đồ thị ngẫu nhiên trong chứng minh không kiến thiết về sự tồn tại của các đồ thị có những tính chất nào đó.