Lời giải các bài tập đánh số lẻ

CHƯƠNG 1

Tiết 1.1

1. a) là mệnh đề đúng
   b) là mệnh đề sai
   c) là mệnh đề đúng
   d) là mệnh đề sai
   a) không là mệnh đề
   f) không là mệnh đề
   g) là mệnh đề đúng.

3. a) Hôm nay không là thứ năm
   b) Có ô nhiễm ở New Jersey.
   c) $2 + 1 \neq 3$
   d) Mùa hè ở Maine không nóng hoặc không nắng.

5. a) $p \wedge q$
   b) $p \wedge \neg q$
   c) $\neg p \wedge \neg q$
   d) $p \vee q$
   e) $p \rightarrow q$
   f) $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
   g) $q \leftrightarrow p$

7. a) $\neg q$
   b) $p \wedge \neg q$
   c) $p \rightarrow q$
   d) $\neg p \rightarrow \neg q$
   e) $p \rightarrow q$
   f) $q \wedge \neg p$
   g) $q \rightarrow p$

9. a) *Hoặc có nghĩa bao hàm* : Sẽ được phép theo học môn toán rời rạc nếu bạn đã học giải tích hoặc tin học hoặc cả hai. *Hoặc có nghĩa loại trừ*: Sẽ được phép theo học môn toán rời rạc nếu bạn đã học giải tích hoặc tin học, nhưng không được phép nếu bạn đã học cả hai. Ở đây nghĩa bao hàm là hàm định.

   b) *Hoặc có nghĩa bao hàm* : Bạn có thể nhận tiền bớt hoặc bạn có thể vay lãi suất thấp hoặc vừa nhận tiền bớt vừa vay lãi suất thấp. Hoặc *có nghĩa loại trừ:* Bạn có thể nhận tiền bớt hoặc có thể vay lãi suất thấp nhưng bạn không thể vừa nhận tiền bớt vừa vay lãi suất thấp. Ở đây nghĩa loại trừ là hàm định.

   c) *Hoặc có nghĩa bao hàm :* Bạn có thể đặt hai món ở cột *A* và không món nào ở cột *B* hoặc ba món ở cột *B* và không món nào ở cột *A* hoặc đặt năm món bao gồm hai món ở cột *A* và ba món ở cột *B*. *Hoặc có nghĩa loại trừ:* Bạn có thể đặt hai món ở cột *A* hoặc ba món ở cột *B* chứ không thể cả hai cột. Ở đây hàm chắc chắn là hàm định nghĩa loại trừ.

   d) *Hoặc có nghĩa bao hàm* : Tuyết rơi dày hơn 2m hoặc gió lạnh dưới -100 hoặc cả hai thì trường sẽ đóng cửa. *Hoặc có nghĩa loại trừ* : Tuyết rơi dày hơn 2m hoặc gió lạnh dưới -100, nhưng không phải cả hai thì trường sẽ đóng cửa. Ở đây chắc chắn hàm định nghĩa bao hàm.

11. a) Nếu có gió Đông Bắc thì tuyết sẽ rơi.
    b) Nếu trời ấm kéo dài một tuần, các cây táo sẽ nở hoa.

c) Nếu đội, Pistons giành được chức vô địch thì họ đã đánh bại đội Lakers.

d) Nếu bạn định đi tới đỉnh núi Long, thì bạn cần phải đi 8 dặm nữa.

e) Nếu bạn đã nổi tiếng thế giới, thì bạn sẽ được phong giáo sư

f) Nếu bạn cho xe chạy hơn 400 dặm, thì bạn cần phải mua xăng.

g) Nếu bạn đã mua chiếc đầu *CD* ít hơn 90 ngày trước đây thì giấy bảo hành của bạn còn hiệu lực.

13. a) *Mệnh đề đảo:* "Tôi sẽ đi trượt tuyết ngày mai, chỉ nếu hôm nay tuyết rơi". *Mệnh đề phản đảo*: "Nếu tôi không đi trượt tuyết ngày mai, thì hôm nay tuyết không rơi".

b) *Mệnh đề đảo:* "Nếu tôi tới lớp thì sắp có kỳ thi". *Mệnh đề phản đảo* : "Nếu tôi không tới lớp thì sẽ chưa có kỳ thi".

c) *Mệnh đề đảo:* "Nếu một số nguyên dương là số nguyên tố thì nó không có một ước số nào khác 1 và chính nó". *Mệnh đề phản đảo*: "Nếu một số nguyên dương không là số nguyên tố thì nó có một ước số khác 1 và chính nó".

15. a)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

b)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

c)

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

d)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

e)

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

f)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

17. a)

p	q	$p \to \neg q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

b)

p	q	$\neg p \leftrightarrow q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

c)

p	q	$(p \to q) \vee (\neg p \to q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

d)

p	q	$(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

e)

p	q	$(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

f)

p	q	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

19. a)

p	q	r	$p \to (\neg q \vee r)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

b)

p	q	r	$\neg p \to (q \to r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

c)

p	q	r	$(p\to q)\vee(\neg p\to r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

d)

p	q	r	$(p\to q)\wedge(\neg p\to r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

e)

p	q	r	$(p\leftrightarrow q)\vee(\neg q\leftrightarrow r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

f)

p	q	r	$(\neg p\leftrightarrow\neg q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	T

21. a) OR bit là 11 11111; AND bit là 00 00000;
XOR bit là 11 11111

b) OR bit là 111 11010; AND bit là 101 00000;
XOR bit là 010 11010

c) OR bit là 10011 11001; ADN bit là 00010 00000;
XOR bit là 10001 11001

d) OR bit là 11111 11111; AND bit là 00000 00000;
XOR bit là 11111 11111

23. 0,2; 0,6

25. 0,8; 0,6

27. Mâu thuẫn

Tiết 1.2

1. Các tương đương suy ra bằng cách chỉ ra các cặp cột tương ứng trong bảng sau phù hợp với nhau:

p	$p\wedge T$	$p\vee F$	$p\wedge F$	$p\vee T$	$p\vee p$	$p\wedge p$
T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F

3. a)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

b)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

5.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

7. a)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

b)

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

c)

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

d)

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

e)

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \to p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

f)

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$	$\neg(p \to q) \to \neg q$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T

9. Trong từng trường hợp ta sẽ chứng minh rằng nếu giả thiết đúng thì kết luận cũng đúng.

   a) Nếu giả thiết $p \wedge q$ là đúng, thì theo định nghĩa của hội thì kết luận p cũng phải đúng.

   b) Nếu giả thiết p là đúng thì theo định nghĩa của tuyển, kết luận $p \vee q$ cũng đúng.

   c) Nếu giả thiết $\neg$p là đúng, tức nếu p sai, thì kết luận $p \to q$ là đúng.

   d) Nếu giả thiết $p \wedge q$ là đúng, thì cả p và q đều đúng, do đó kết luận $p \to q$ cũng là đúng.

   e) Nếu giả thiết $\neg(p \to q)$ là đúng, thì $p \to q$ là sai vì vậy kết luận p là đúng (và q là sai).

   f) Nếu giả thiết $\neg(p \to q)$ là đúng, thì $p \to q$ là sai, sao cho p đúng và q sai. Do đó kết luận $\neg q$ là đúng.

11. a) Nếu p là đúng, thì $p \vee (p \wedge q)$ là đúng vì mệnh đề thứ nhất trong tuyển là đúng. Trái lại, nếu p là sai, thì $p \wedge q$ là sai, sao cho $p \vee (p \wedge q)$ cũng là sai. Vì p và $p \vee (p \wedge q)$ luôn có cùng giá trị chân lý vậy chúng tương dương với nhau.

    b) Nếu p là sai, thì $p \wedge (p \vee q)$ là sai vì mệnh đề thứ nhất trong phép hội là sai. Trái lại, nếu p đúng thì cả hai mệnh đề trong phép hội đều đúng vì $p \vee q$ cũng đúng. Do p và $p \wedge (p \vee q)$ luôn có cùng giá trị chân lý nên chúng tương dương với nhau.

13. Cách duy nhất để phép kéo theo này sai là khi $\neg q \wedge (p \to q)$ là đúng và $\neg q$ là sai. Vì $\neg p$ là sai nên p đúng. Do $\neg q \wedge (p \to q)$ là đúng nên $\neg q$ phải đúng, nghĩa là q là sai. Vì p đúng, nên $p \to q$ sai là không thể được.

15. Các mệnh đề đó không tương đương lôgic vì khi p, q và r đều sai thì $(p \to q) \to r$ là sai, nhưng $p \to (q \to r)$ là đúng.

17. Mệnh đề $\neg p \leftrightarrow q$ là đúng khi $\neg p$ và q cùng giá trị chân lý, mà điều này có nghĩa là p và q có giá trị chân lý khác nhau. Tương tự, $p \leftrightarrow \neg p$ đúng chỉ trong các trường hợp như trên. Do đó, hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

19. Mệnh đề $\neg(p \leftrightarrow q)$ đúng khi $p \leftrightarrow q$ là sai, mà điều này có nghĩa là p và q có các giá trị chân lý khác nhau. Vì điều này cũng xảy ra y như thế khi $\neg(p \leftrightarrow q)$ là đúng, Vậy hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

21. Nếu ta lấy đối ngẫu hai lần, thì mỗi phép ∨ sẽ đổi thành một phép ∧ rồi lại trở về phép ∨ và mỗi phép ∧ sẽ đổi thành một phép ∨ rồi lại trở về phép ∧. Đồng thời mỗi mệnh đề T chuyển thành một mệnh đề F rồi lại trở về T và mỗi mệnh đề F chuyển thành mệnh đề T rồi lại trở về F. Do đó, $(s^*)^* = s$.

22. Cho p và q là hai mệnh đề phức hợp tương đương liên quan chỉ với các phép ∧, ∨ và ¬ và T và F. Chú ý rằng $\neg p$ và $\neg q$ cũng là tương đương. Dùng các luật De Morgan với số lần đủ mức cần thiết để đẩy dấu phủ định vào trong các mệnh đề đó xa nhất có thể được, điều này đồng thời biến các ∨ thành ∧ và ngược lại, biến các T thành F và ngược lại. Điều này chứng tỏ rằng $\neg p$ và $\neg q$ hệt như p^* và q^* chỉ trừ một điều là các mệnh đề nguyên tử p_i trong chúng được thay bằng phủ định của nó. Từ đó ta có thể kết luận rằng p^* và q^* là tương đương vì $\neg p$ và $\neg q$ là tương đương.

25. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.

27. Với mệnh đề phức hợp p đã cho, hãy lập bảng chân lý rồi viết ra một mệnh đề q dưới dạng tuyển chuẩn tắc là tương đương lôgic với p. Vì q chỉ liên quan với ¬, ∧ và ∨, điều này chứng tỏ rằng tập các phép toán ¬, ∧ và ∨ là một tập đầy đủ.

29. Theo Bài tập 27, với mệnh đề phức hợp p đã cho, có thể viết được một mệnh đề q tương đương lôgic với p và chỉ chứa các phép ¬,∨,∧. Dùng các luật De Morgan ta có thể loại các phép ∧ bằng cách thay mỗi lần xuất hiện $(p_1 \wedge p_2 \wedge .. \wedge p_n)$ thành $\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee .. \vee \neg p_n)$.

31. $\neg(p \wedge q)$ là đúng khi hoặc p hoặc q hoặc cả hai đều sai và là sai khi cả p và q đều đúng. Vì đây là định nghĩa của $p \mid q$, nên hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

33. $\neg(p \vee q)$ là đúng khi cả p và q là sai, và là sai trong các trường hợp còn lại. Vì đây là định nghĩa của $p \downarrow q$ nên hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

35. $((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

37. Điều này được suy ra ngay lập tức từ bảng chân lý hoặc định nghĩa của $p \mid q$.

39. 16

41. $p \to q$ là sai nếu và chỉ nếu p đúng và q sai. Tương tự, $\neg q \to \neg p$ là sai nếu và chỉ nếu $\neg q$ đúng và $\neg p$ sai, tức là nếu p đúng và q sai. Do đó, $p \to q$ và $\neg q \to \neg p$ là tương đương lôgic.

Tiết 1.3

1. a) Đúng b) Đúng c) Sai

3. a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

5. a) Có một sinh viên học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.
   b) Mọi sinh viên đều học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.
   c) Có một sinh viên không học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.
   d) Không có sinh viên nào học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.

7. a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ b) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
   c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ d) $\forall x \neg(P(x) \vee Q(x))$

9. a) $\forall x L(x, Jerry)$ b) $\forall x \exists y\, L(x,y)$
   c) $\exists y\, \forall x L(x,y)$ d) $\forall x\, \exists y\, L(x,y)$
   e) $\exists x \neg L(\text{Lydia}, x)$ f) $\exists x\, \forall y \neg L(x,y)$
   g) $\exists x(\forall y L(y,x) \wedge \forall z\, ((\forall w L(w, z)) \to z = x))$

h) $\exists x \exists y(x \neq y \wedge L(Lynn, x) \wedge L(Lynn, y) \wedge \forall z(L(Lynn, z) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$
i) $\forall x\, L(x,x)$
j) $\exists x\ \forall y\ (L(x,y) \rightarrow x = y)$.

11. a) $\forall x P(x)$, ở đây $P(x)$ là "x cần học môn toán rời rạc" và không gian là tập toàn thể sinh viên của ngành tin học.

b) $\exists x P(x)$ với $P(x)$ là "x có máy vi tính" và không gian là tập các sinh viên trong lớp.

c) $\forall x \exists y\ P(x, y)$ với $P(x, y)$ là " x đã học môn y " và không gian đối với x là tập các sinh viên trong lớp và không gian đối với y là tập các môn tin học.

d) $\exists x \exists y\ P(x, y)$ với $P(x, y)$ và các không gian như trong câu c)

e) $\forall x \forall y\ P(x, y)$ với $P(x, y)$ là " x đã ở y " và không gian đối với x là tập các sinh viên tong lớp và không gian đối với y là tập các nhà trong ký túc xá

f) $\exists x \exists y \forall z\ (P(z,y) \rightarrow Q(x,z))$ với $P(z,y)$ là "z thuộc y" và $Q(x,z)$ là "x đã ở z" với không gian đối với x là tập các sinh viên trong lớp, không gian đối với y là tập các nhà trong ký túc xá và không gian đối với z là tập các phòng.

g) $\forall x \forall y \exists z\ (P(z,y) \wedge Q(x, z))$ với $P(z, y)$, $Q(x,z)$ và các không gian hệt như trong câu (f).

13. a) T b) T c) F
d) F e) T f) F

15. a) $P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3)$ b) $P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)$

c) $P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3) \wedge P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3) \wedge P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3)$

d) $P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3) \vee P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3) \vee P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)$

e) $(P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)) \vee (P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3)) \vee (P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3))$

f) $(P(1,1) \vee P(2,1) \vee P(3,1)) \wedge (P(1,2) \vee P(2,2) \vee P(3,2)) \wedge (P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3))$

17. a) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

b) $\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$

c) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

d) Không thể suy ra kết luận đó. Có thể có các giáo sư vô tích sự vì các tiền đề không loại trừ khả năng ngoài những kẻ ngu dốt vẫn có cả những kẻ khác vô tích sự.

19. a) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ b) $\forall x\ (R(x) \rightarrow \neg S(x))$

c) $\forall x\ (\neg Q(x) \rightarrow S(x))$ d) $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg R(x))$

e) Suy được. Giả sử x là một đứa bé. Khi đó, theo tiền đề thứ nhất x là không logic, do đó theo tiền đề thứ ba x bị coi thường. Tiền đề thứ hai nói rằng nếu x cai quản được cá sấu, thì x không bị coi thường. Do đó, x không cai quản được cá sấu.

21. $\neg\ (\exists x \forall y P(x,y)) \leftrightarrow \forall x\ (\neg \forall y P(x,y)) \leftrightarrow \forall x\ \exists y \neg P(x,y)$.

23. Cả hai mệnh đề đều đúng khi ít nhất $P(x)$ hoặc $Q(x)$ đúng đối với ít nhất một giá trị của x.

25. a) Nếu A đúng, thì cả hai vế đều tương đương logic với $\forall x P(x)$. Nếu A sai, vế trái hiển nhiên là sai. Hơn nữa, với mọi x $P(x) \wedge A$ là sai, do đó vế phải cũng là sai. Do đó hai vế là tương đương logic.

b) Nếu A đúng, thì cả hai vế đều tương đương logic với $\exists x P(x)$. Nếu A sai, vế trái hiển nhiên là sai. Hơn nữa, với mọi x, $P(x) \wedge A$ là sai, do đó $\exists x\ (P(x) \wedge A)$ là sai. Do đó, hai vế là tương đương logic.

27. Để chứng minh hai mệnh đề này là không tương đương logic, giả sử $P(x)$ là câu "x là dương" và $Q(x)$ là câu "x là âm" với không gian là tập các số nguyên. Khi đó $\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$ là đúng, nhưng $\exists x\, (P(x) \land Q(x))$ lại là sai.

29. a) Giả sử $\forall x P(x) \land \exists x Q(x)$ là đúng. Khi đó $P(x)$ đúng với mọi x và tồn tại một y sao cho $Q(y)$ là đúng. Vì $P(x) \land Q(y)$ đúng với mọi x và tồn tại một y để $Q(y)$ là đúng, nên $\forall x \exists y\, P(x) \land Q(y))$ là đúng. Ngược lại, giả sử mệnh đề thứ hai là đúng và x là một phần tử của không gian. Khi đó, tồn tại một y sao cho $Q(y)$ là đúng, túc là $\exists x\, Q(x)$ là đúng. Vì $\forall x\, P(x)$ cũng đúng, suy ra mệnh đề thứ nhất cũng đúng.

b) Giả sử $\forall x\, P(x) \lor \exists x Q(x)$ là đúng. Khi đó hoặc $P(x)$ đúng với mọi x hoặc tồn tại một y sao cho $Q(y)$ là đúng. Trong trường hợp đầu $P(x) \lor Q(y)$ đúng với mọi x, sao cho $\forall x \exists y\, (P(x) \lor Q(y))$ là đúng. Ngược lại, giả sử mệnh đề thứ hai là đúng. Nếu $P(x)$ đúng với mọi x thì mệnh đề thứ nhất cũng đúng. Nếu không, $P(x)$ sẽ là sai đối với một x nào đó, và đối với x đó cần tồn tại một y để $P(x) \lor Q(y)$ là đúng. Vì vậy, $Q(y)$ cần phải đúng, do đó $\exists y\, Q(y)$ là đúng. Từ đó suy ra mệnh đề thứ nhất là đúng.

31. a) Đúng

b) Sai, nếu không gian chứa hơn một phần tử.

c) Đúng

33. $\exists x\, P(x) \land \forall x \forall y((P(x) \land P(y)) \rightarrow (x = y)$.

35. Ta sẽ chỉ ra cách đưa một biểu thức về dạng tiền lượng chuẩn tắc (*PNF*) như thế nào, nếu các biểu thức con trong nó có thể được đưa về dạng đó. Khi ấy, bằng cách thực hiện từ trong ra ngoài ta có thể đưa một biểu thức bất kỳ về dạng *PNF* (để hình thức hóa sự suy lý cần dùng phương pháp qui nạp toán học sẽ được đề cập tới ở Tiết 3.3). Theo Bài tập 29 ở Tiết 1.2, ta có thể giả sử rằng mệnh đề chỉ dùng các liên từ logic $\lor$ và $\neg$. Bây giờ chú ý rằng mọi mệnh đề không chứa các lượng từ đều đã ở dạng *PNF* (đây là trường hợp cơ sở của suy lý). Bây giờ giả sử mệnh đề có dạng $Q\, x\, P(x)$ với Q là một lượng từ. Vì $P(x)$ là biểu thức ngắn hơn mệnh đề gốc, nên ta có thể đưa nó về dạng *PNF*. Khi ấy $Q\, x$ đặt trước dạng *PNF* đó cũng lại ở dạng *PNF* và tương đương với mệnh đề ban đầu. Tiếp sau, giả sử rằng mệnh đề có dạng $\neg P$. Nếu P đã ở dạng *PNF*, ta có thể cho dấu phủ định chạy qua tất cả các lượng từ bằng cách dùng các tương đương cho trong bảng 3. Cuối cùng, giả sử rằng mệnh đề có dạng $P \lor Q$ trong đó cả P và Q đã ở dạng *PNF*. Nếu chỉ một trong P hoặc Q có các lượng từ, ta có thể dùng Bài tập 24 để đưa các lượng từ ra trước cả P và Q. Nếu cả P lẫn Q đều có các lượng từ, ta có thể dùng Bài tập 23, Bài tập 28 hoặc Bài tập 29b để viết lại $P \lor Q$ với hai lượng từ đứng trước tuyển của mệnh đề có dạng $R \lor S$, rồi đưa $R \lor S$ về dạng *PNF*.

Tiết 1.4

1. a) $\{-1,1\}$ b) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

c) $\{0,1,4,9,16,25,36,49,64,81\}$ d) $\varnothing$

3. a) Có b) Không c) Không

5. a) Đúng b) Đúng c) Sai

d) Đúng e) Đúng f) Sai

7. Giả sử $x \in A$. Vì $A \subseteq B$ nên $x \in B$. Vì $B \subseteq C$, ta cũng thấy rằng $x \in C$. Vì $x \in A$ kéo theo $x \in C$, suy ra $A \subseteq C$.

9. a) 1 b) 1 c) 2 d) 3

11. a) $\{\varnothing, \{a\}\}$ b) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

13. a) 8 b) 16 c) 2

15. a) $\{(a,y), (b,y), (c,y), (d,y), (a,z), (b,z), (c,z), (d,z)\}$

b) $\{(y,a), (y,b), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d)\}$

17. Tập các bộ ba (a,b,c) trong đó a là tuyến bay và b,c là các thành phố.

19. $\varnothing \times A = \{(x,y) \mid x \in \varnothing$ và $y \in A\} = \varnothing$

$= \{(x, y) \mid x \in A$ và $y \in \varnothing\} = A \times \varnothing$

21. mn

23. Ta cần phải chứng minh rằng $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$ nếu và chỉ nếu $a=c$ và $b=d$. Phần "nếu" của mệnh đề trên là hiển nhiên. Vậy ta giả sử rằng khi tập đã cho bằng nhau. Trước hết ta hãy xét trường hợp $a \neq b$. Khi đó $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ chỉ chứa đúng hai phần tử trong đó có một chứa một phần tử. Vì thế $\{\{c\}, \{c,d\}\}$ *cũng phải có đúng tính chất đó, tức là* $c \neq d$ và $\{c\}$ là phần tử chỉ chứa một phần tử. Do đó $\{a\} = \{c\}$, điều này kéo theo $a = c$. Cũng như vậy các tập chứa hai phần tử $\{a,b\}$ và $\{c,d\}$ cũng cần phải bằng nhau. Vì $a=c$ và $a \neq b$ suy ra $b=d$. Bây giờ ta xét trường hợp $a=b$. Khi đó $\{\{a, a,b\}\} = \{\{a\}\}$ là tập chỉ có một phần tử. Do đó, $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ cũng chỉ có một phần tử và điều này có thể xảy ra chỉ khi $c=d$ và tập đó là $\{c\}$. Từ đó suy ra rằng $a=c$ và $b=d$.

25. Cho $S = \{a_1 a_2 ... a_n\}$. Biểu diễn mỗi tập con của S bằng một xâu bit có chiều dài n, trong đó bit thứ i bằng 1 nếu và chỉ nếu $a_i \in S$. Để sinh tất cả các tập con của S, ta liệt kê tất cả 2^n xâu bit có chiều dài n (ví dụ theo thứ tự tăng) rồi viết ra các tập con tương ứng.

Tiết 1.5

1. a) Tập các sinh viên sống cách trường trong vòng một dặm và đi bộ đi học.

b) Tập các sinh viên sống cách trường trong vòng một dặm hoặc các sinh viên đi bộ đi học (hoặc cả hai)

c) Tập các sinh viên sống cách trường trong vòng một dặm nhưng không đi bộ đi học.

d) Tập các sinh viên đi bộ đi học nhưng sống cách xa trường hơn một dặm.

3. a) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ b) $\{3\}$

c) $\{1,2,4,5\}$ d) $\{0,6\}$

5. $\overline{\overline{A}} = \{x \mid \neg(x \in \overline{A})\} = \{x \mid \neg(\neg x \in A)\} = \{x \mid x \in A\} = A$

7. a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$.

9. a) $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

b)

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

11. a) $x \in \overline{A \cap B \cap C} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \cap C \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \vee x \notin C \Leftrightarrow$
$x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \vee x \in \overline{C} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

b)

A	B	C	$A \cap B \cap C$	$\overline{(A \cap B \cap C)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

13. Cả hai vế đều bằng $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

15. a) $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cup C))$
$\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

b) Hệt như (a) với $\cup$ được thay bằng $\cap$ và $\vee$ được thay bằng $\wedge$

c) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))$
$\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

17. a) $\{4,6\}$

b) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

c) $\{4,5,6,8,10\}$

d) $\{0,2,4,5,6,7,8,9,10\}$

19. a) $B \subseteq A$

b) $A \subseteq B$

c) $A \cap B = \varnothing$

d) Không có gì để nói, vì điều này luôn luôn đúng

e) $A = B$

21. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x\,(x \notin B \rightarrow x \notin A)$
$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

23. Tập các sinh viên ngành tin nhưng không là sinh viên ngành toán hoặc các sinh viên ngành toán không là sinh viên ngành tin.

25. Một phần tử thuộc $(A \cup B) - (A \cap B)$ nếu nó thuộc hợp của A và B nhưng không thuộc giao của A và B. Điều này có nghĩa là nó hoặc thuộc A hoặc thuộc B chứ không thuộc cả A lẫn B ; tức là nó thuộc $A \oplus B$.

27. a) $A \oplus A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

b) $A \oplus \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$

c) $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A) = \varnothing \cup \overline{A} = \overline{A}$

d) $A \oplus \overline{A} = (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A) = A \cup \overline{A} = U$

29. $B = \varnothing$

31. Có. Giả sử rằng $x \in A$ nhưng $x \notin B$. Nếu $x \in C$ thì $x \notin A \oplus C$ nhưng $x \in B \oplus C$, mâu thuẫn ! Do đó, $A \subseteq B$. Tương tự, $B \subseteq A$, suy ra $A = B$.

33. Có

35. a) $\{1,2,3,...,n\}$ b) $\{1\}$

37. a) An b) $\{0,1\}$

39. a) $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ b) $\{2,4,5,6,7\}$ c) $\{1,10\}$

41. Bit ở vị trí thứ i trong xâu bit của hiệu hai tập hợp là 1 nếu bit thứ i của xâu thứ nhất là 1 và bit thứ i của xâu thứ hai là 0 và là 0 trong các trường hợp còn lại.

43. a) 1 11110 00000 00000 00000 00000 ∨ 0 11100 10000 00001 00010 10000 = 1 11110 10000 00001 00010 10000, biểu diễn $\{a,b,c,d,e,g,p,t,v\}$

b) 1 11110 00000 00000 00000 00000 ∧ 0 11100 10000 00001 00010 10000 = 0 11100 00000 00000 00000 00000, biểu diễn $\{b,c,d\}$

c) (1 11110 00000 00000 00000 00000 ∨ 0 00110 01100 00110 00011 00110) ∧ (0 11100 10000 00001 00010 10000 ∨ 0 01010 00100 00010 00001 00111) = 1 11110 01100 00110 00011 00110 ∧ 0 11110 10100 00011 00011 10111 = 0 11110 00100 00010 00011 00110, biểu diễn $\{b,c,d,e,i,o,t,u,x,y\}$

d) 1 11110 00000 00000 00000 00000 ∨ 0 11100 10000 00001 00010 10000 ∨ 0 01010 00100 00010 00001 00111 ∨ 0 00110 01100 00110 00011 00110 = 1 11110 11100 00111 00011 10111, biểu diễn $\{a,b,c,d,e,g,h,i,n,o,p, t, u, v, x,y,z\}$

45. a) $\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$ b) $\{\varnothing\}$

c) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ d) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

47. a) $\{3a, 3b, 1c, 4d\}$ b) $\{2a, 2b\}$ c) $\{1a, 1c\}$

d) $\{1b, 4d\}$ e) $\{5a, 5b, 1c, 4d\}$

49. $\overline{F}$ = {0.4 Alice, 0.1 Brian, 0.6 Fred, 0.9 Oscar, 0.5 Rita}, $\overline{R}$ = {0.6 Alice, 0.2 Brian, 0.8 Fred, 0.1 Oscar, 0.3 Rita}

51. $F \cap R$ = {0.4 Alice, 0.8 Brian, 0.2 Fred, 0.1 Oscar, 0.5 Rita}

Tiết 1.6

1 a) $f(o)$ không xác định b) $f(x)$ không xác định đối với $x < 0$

c) $f(x)$ không xác định vì có hai giá trị phân biệt được gán cho mỗi x

3. a) Không là một hàm b) Là một hàm

c) Không là một hàm

5. a) 1 b) 0 c) 0

d) -1 e) 3 f) -1

7. Chỉ có hàm ở câu (a)

9. Chỉ có các hàm ở câu (a) và (d)

11. a) Có b) không c) Có d) Không

13. a) $f(S) = \{0,1,3\}$ b) $f(S) = \{0,1,3,5,8\}$

c) $f(S) = \{0,8,16,40\}$ d) $f(S) = \{1,12,33,65\}$

15. a) Giả sử x và y là hai phần tử phân biệt thuộc A. Vì g là đơn ánh, $g(x)$ và $g(y)$ là các phần tử phân biệt thuộc B. Vì f là đơn ánh $f(g(x)) = (f_o g)(x)$ và $f(g(y)) = (f_o g)(y)$ cũng là các phần tử phân biệt thuộc C. Do đó, $f_o g$ là đơn ánh.

b) Giả sử $y \in C$. Vì f là toàn ánh, $y = f(b)$ với một b nào đó thuộc B. Bây giờ vì g là toàn ánh, nên $b = g(x)$ với một x nào đó thuộc A. Do đó, $y = f(b) = f(g(x)) = (f_o g)(x)$. Suy ra $f_o g$ là toàn ánh.

17. Không. Ví dụ, giả sử $A = \{a\}$, $B = \{b,c\}$ và $C = \{d\}$. Giả sử $g(a) = b$, $f(b) = d$ và $f(c) = d$. Khi đó, f và $f_o g$ là toàn ánh, nhưng g không toàn ánh.

19. $(f + g)(x) = x^2 + x + 3$; $(fg)(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$.

21. f là đơn ánh vì $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
f cũng là toàn ánh vì $f((y-b)/a) = y$. Vậy f là khả nghịch và $f^{-1}(y) = (y-b)/a$.

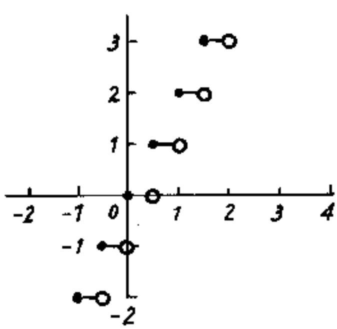
23. Cho $f(1) = a$, $f(2) = a$. Giả sử $S = \{1\}$ và $T = \{2\}$. Khi đó $f(S \cap T) = f(\varnothing) = \varnothing$, nhưng $f(S) \cap f(T) = a \cap a = a$.

25. a) $\{x \mid 0 \le x < 1\}$ b) $\{x \mid -1 \le x < 2\}$ c) $\varnothing$

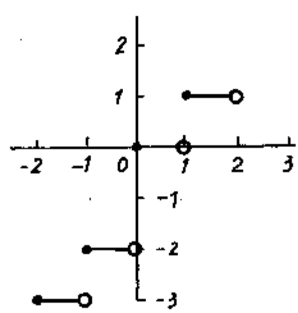
27. $f^{-1}(\overline{S}) = \{x \in A \mid f(x) \notin S\} = \overline{\{x \in A \mid f(x) \in S\}} = \overline{f^{-1}(S)}$

29. Giả sử $N \le x \le N + 1$. Nếu $N + 1/2 \le x$ khi đó $\lfloor 2x \rfloor = 2N+1$, $\lfloor x \rfloor = N$ và $\lfloor x + 1/2 \rfloor = N+1$ sao cho $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$. Nếu $x < N + \frac{1}{2}$ khi đó $\lfloor 2x \rfloor = 2N$ và $\lfloor x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = N$ và lại có hằng đẳng thức trên.

31.



33.



35. $f^{-1}(y) = (y-1)^{1/3}$

37. a) $f_{A \cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B \Leftrightarrow f_A(x) = 1$ và $f_B(x) = 1 \Leftrightarrow f_A(x) f_B(x) = 1$

b) $f_{A \cup B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B \Leftrightarrow f_A(x) = 1$ hoặc $f_B(x) = 1 \Leftrightarrow f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = 1$

c) $f_{\overline{A}}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow f_A(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - f_A(x) = 1$

d) $f_{A \oplus B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \oplus B \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \notin B)$ hoặc $(x \notin A$ và $x \in B) \Leftrightarrow f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x) = 1$

39. a) Miền là **Z** ; miền giá trị là **Z** ; miền xác định là tập các số nguyên khác không. Tập giá trị đối với nó f không xác định là $\{0\}$; không phải là hàm toàn phần.

b) Miền là **Z**, miền giá trị là **Z**, miền xác định là **Z** ; Tập giá trị đối với nó f không xác định là $\varnothing$. Là hàm toàn phần.

c) Miền là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, miền giá trị là $\mathbf{Q}$, miền xác định là $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$; tập giá trị đối với nó f không xác định là $\mathbf{Z} \times \{0\}$; không phải là hàm toàn phần.

d) Miền là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; miền giá trị $\mathbf{Z}$; miền xác định là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; tập các giá trị đối với nó f không xác định là $\varnothing$; là hàm toàn phần.

e) Miền là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; miền giá trị là $\mathbf{Z}$; miền xác định là $\{ (m,n) \mid m > n$; tập các giá trị đối với nó f không xác định là $\{ (m,n) \mid m \leqslant n\}$; không phải là hàm toàn phần.

Tiết 1.7

1. a) 3 b) -1 c) 787 d) 2639

3. a) $a_o = 2, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9$ b) $a_o = 1, a_1 = 4, a_2 = 27, a_3 = 256$
c) $a_o = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$ d) $a_o = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3.$

5. a) 20 b) 11 c) 30 d) 511

7. a) 1533 b) 510 c) 4923 d) 9842

9. a) 21 b) 78 c) 18 d) 18

11. $\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_o.$

13. a) n^2 b) $n(n+1)/2$

15. a) 0 b) 1680 c) 1 d) 1024

17. 34

19. a) đếm được, -1, -2, -3, -4, ... b) đếm được, 0, 2, -2, 4, -4, ...
c) không đếm được d) đếm được 0, 7, -7, 14, -14, ...

21. Giả sử $A - B$ là đếm được. Khi đó, vì $A = (A-B) \cup B$, nên các phần tử của A có thể liệt kê thành một dãy bằng cách xếp xen kẽ các phần tử của $A - B$ và các phần tử của B. Điều này mâu thuẫn với tính không đếm được của A.

23. Giả sử B là đếm được. Khi đó các phần tử của B có thể được liệt kê như b_1, b_2, b_3, ... Vì A là một tập con của B, nên khi trích ra dãy con của $\{b_n\}$ gồm các phần tử của A ta sẽ được bảng liệt kê các phần tử của A. Vì A là không đếm được, nên điều này là không thể.

25. Giả sử A_1, A_2, A_3 ... là các tập đếm được. Vì A_i là đếm được nên ta có thể liệt kê các phần tử của nó thành dãy $a_{i_1}, a_{i_2}, ...$ Các phần tử của tập $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ có thể được liệt kê bằng cách liệt kê tất cả các số hạng a_{ij} với $i + j = 2$, rồi tất cả các số hạng a_{ij} với $i + j = 3$, sau đó tất cả số hạng a_{ij} với $i + j = 4$, v.v...

27. Có một tập hữu hạn, cụ thể là 2^m, xâu bit có chiều dài m. Tập tất cả các xâu bit là hợp của các xâu bit có chiều dài m với $m = 0, 1, 2,$ ... Vì hợp của một số đếm được các tập đếm được là đếm được, nên có một số đếm được các xâu bit.

29. Đối với một bảng chữ cái hữu hạn bất kỳ, có một số hữu hạn các xâu có chiều dài n, với n là một số nguyên dương bất kỳ. Theo kết quả của Bài tập 25 thì chỉ có một số hữu hạn các xâu từ một bảng chữ cái hữu hạn bất kỳ đã cho. Vì tập tất cả các chương trình máy tính trong một ngôn ngữ đặc biệt nào đó là một tập con của tập tất cả các xâu của một bảng chữ cái hữu hạn, mà theo kết quả Bài tập 22 là đếm được, suy ra tập tất cả các chương trình máy tính là đếm được.

31. Bài tập 29 chứng tỏ rằng chỉ có một số đếm được các chương trình máy tính. Do đó, chỉ có một số đếm được các hàm tính được. Vì như Bài tập 30 cho thấy có một số không đếm được các hàm nhưng không phải tất cả các hàm đều là tính được.

Tiết 1.8

1. a) Có b) Có c) Không

d) Có e) Có f) Có

3. $x^4 + 9x^3 + 4x + 7 \leq 4x^4$ với mọi $x > 9$, vậy $x^4 + 9x^3 + 4x + 7$ là $O(x^4)$.

5. $(x^2 + 1)/(x + 1) = x-1 + 2/(x+1) < x$ với mọi $x > 1$, do đó $(x^2+1)/(x+1)$ là $O(x)$

7. a) 3 b) 3 c) 1 d) 0

9. $x^2 + 4x + 17 \leq 3x^3$ với mọi $x > 17$, do đó $x^2 + 4x + 17$ là $O(x^3)$. Tuy nhiên, nếu x^3 là $O(x^2 + 4x + 17)$, thì $x^3 < C(x^2 + 4x + 17) < 3Cx^2$ với một hằng số C nào đó và đối với x đủ lớn tức là $x < C$ đối với x đủ lớn. Điều này là không thể, do đó x^3 không là $O(x^2 + 4x + 17)$.

11. $3x^4 + 1 \leq 4x^4 = 8(x^4/2)$ với mọi $x > 1$, do đó $3x^4 + 1$ là $O(x^4/2)$. Cũng tương tự, vì $x^4/2 \leq 3x^4 + 1$ với mọi $x > 0$, suy ra $x^4/2$ là $O(3x^4 + 1)$.

13. Vì $2^n < 3^n$ với mọi $n > 0$, suy ra 2^n là $O(3^n)$. Nếu 3^n là $O(2^n)$ thì đối với một C nào đó, $3^n \leq C2^n$ với mọi n đủ lớn, tức là $C \geq (\frac{3}{2})^n$ với mọi n đủ lớn. Điều này không thể có, nên 3^n không là $O(2^n)$.

15. Đây là tất cả các hàm đối với chúng tồn tại các số thực dương k và C sao cho $|f(x)| < C$ với mọi $x > k$. Những hàm $f(x)$ này là giới nội đối với mọi x đủ lớn.

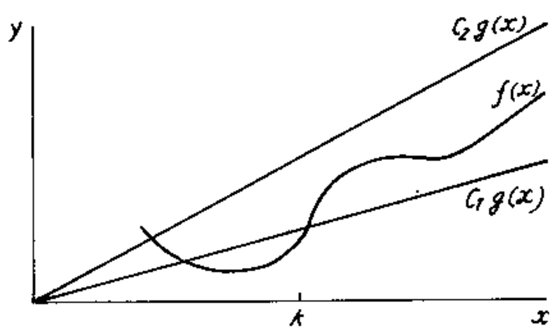
17. Tồn tại các hằng số C_1, C_2, k_1 và k_2 sao cho : $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ *với* $x > k_1$ và $|g(x)| \leq C_2|h(x)|$ *với mọi* $x > k_2$. Do đó, với $x > \max(k_1, k_2)$, suy ra $|f(x)| \leq C_1|g(x)| \leq C_1C_2|h(x)|$. *Điều này chứng tỏ* $f(x)$ là $O(h(x))$.

19. a) $O(n^3)$ b) $O(n^5)$ c) $O(n^3 n!)$

21. a) $O(n^2 \log n)$ b) $O(n^2(\log n)^2)$ c) $O(n^{2^n})$

23. Nếu $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ thì tồn tại các hằng số C_1 và C_2 sao cho $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$. *Từ đó suy ra* $|f(x)| \leq C_2|g(x)|$ *và* $|g(x)| \leq (1/C_1)|f(x)|$ *với mọi* $x > k$. Do đó, $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(f(x))$. Ngược lại, giả sử $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(f(x))$, khi đó tồn tại các hằng số C_1, C_2, k_1 và k_2 sao cho : $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ *với mọi* $x > k_1$ và $|g(x)| \leq C_2|f(x)|$ *với mọi* $x > k_2$. Vì $C_2 > 0$, suy ra $(1/C_2)|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_1|g(x)|$ với mọi $x > \max(k_1, k_2)$. Do đó, $f(x)$ là $\Theta(g(x))$.

25.



27. Vì $f(x)$ là $O(g(x))$, nên tồn tại các hằng số C và l sao cho $|f(x)| \leq C\ |g(x)|$ *với mọi* $x > l$. Từ đó, ta có $|f^k(x)| \leq C^k\ |g^k(x)|$ *với mọi* $x > l$. Vậy $f^k(x)$ là $O(g^k(x))$ bằng cách lấy hằng số là C^k.

29. Vì $f(x)$ và $g(x)$ là tăng và không giới nội, ta có thể giả thiết rằng $f(x) \geq 1$ và $g(x) \geq 1$ với các x đủ lớn. Vì $f(x)$ là $O(g(x))$, nên tồn tại các hằng số C và k sao cho $f(x) \leq C\ g(x)$ với mọi $x > k$. Điều này kéo theo $\log f(x) \leq \log C + \log g(x) \leq 2 \log g(x)$ với x đủ lớn. Từ đó suy ra $\log f(x)$ là $O(\log g(x))$.

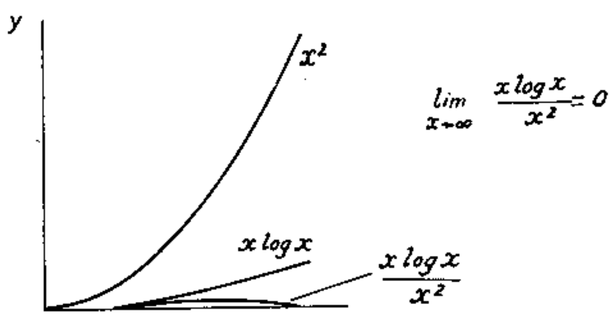
31. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\log x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x\ln 2} = 0$

(dùng qui tắc L'Hôpital)

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2^x\ln 2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2^x(\ln 2)^2} = 0$ (dùng qui tắc L'Hôpital)

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}) = 1 \neq 0$

33.



35. Không. Hãy lấy $f(x) = 1/x^2$ và $g(x) = 1/x$.

37. a) Vì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ suy ra $f(x)/g(x) < 1$ với các x đủ lớn.

Do đó, $|f(x)| < |g(x)|$ *với mọi* $x > k$ (k là một hằng số nào đó). Vì vậy, $f(x)$ là $O(g(x))$

39. Vì $f_2(x)$ là $o(g(x))$, từ Bài tập 37 suy ra $f_2(x)$ là $O(g(x))$. Theo Hệ quả 1, ta có $f_1(x) + f_2(x)$ là $O(g(x))$.

41. Dễ dàng chứng minh được rằng $(n-i)(i+1) \geq n$ với $i = 0,1,\ldots,n-1$. Do đó $(n!)^2 = (n.1)((n-1).2) \ldots (2.(n-1))(1.n) \geq n^n$. Suy ra $2\log n! \geq n\log n$.

Bài tập bổ sung

1. a) $q \to p$ b) $q \wedge p$

c) $\neg q \vee \neg p$ d) $q \leftrightarrow p$.

3. a) Mệnh đề không thể sai nếu $\neg p$ không sai, vậy p là đúng. Nếu p đúng và q đúng thì $\neg q \wedge (p \to q)$ là sai và mệnh đề đã cho là đúng. Nếu p đúng và q sai thì $p \to q$ là sai, do đó $\neg q \wedge (p \to q)$ là sai và mệnh đề đã cho là đúng.

b) Mệnh đề không thể sai nếu q không sai. Nếu q sai và p đúng thì $(P \vee q) \wedge \neg p$ là sai và mệnh đề đã cho là đúng. Nếu q sai và p sai, thì $(p \vee q) \wedge \neg p$ là sai do đó mệnh đề đã cho là đúng.

5. $(p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$

7. a) F b) T c) F

d) T e) F f) T

9. Giả sử $\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ là đúng. Khi đó hoặc $Q(x)$ là đúng đối với một x_o nào đó, trong trường hợp ấy $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ là đúng ; hoặc $P(x)$ là sai đối với một x_o nào đó, trong trường hợp đó $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ là đúng. Ngược lại, giả sử $\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ là sai. Điều này có nghĩa là $\forall x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$ là đúng và kéo theo $\forall x\ P(x)$ và $\forall x\ (\neg Q(x))$ cũng đúng. Mặt khác $\forall x\ (\neg Q(x))$ tương đương với $\neg \exists x\ Q(x)$. Vậy $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ là sai.

11. Không

13. $\forall x\ \forall z\ \exists y\ T(x,y,z)$ với $T(x,y,z)$ là câu "sinh viên x đã học môn y ở khoa z" trong đó các không gian là tập các sinh viên trong lớp, tập các môn học trong trường và tập các khoa của trường.

15. a) $\overline{A}$ b) $A \cap B$ c) $A - B$

d) $\overline{A} \cap \overline{B}$ e) $A \oplus B$

17. Có

19. $A \cap \overline{A} = x \mid x \in A \wedge x \notin A\} = \varnothing$

b) $A \cup \overline{A} = x \mid x \in A \vee x \notin A\ \} = U$

21. $A - (A-B) = A - (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}\ ) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B.$

23. Cho $A = \{1\}$, $B = \varnothing$, $C = \{1\}$. Khi đó, $(A-B)-C = \varnothing$ nhưng $A-(B-C) = \{1\}$.

25. Không. Ví dụ, cho $A = B = a,b$, $C = \varnothing$ và $D = a$. Khi đó, $(A-B) - (C-D) = \varnothing - \varnothing = \varnothing$, nhưng $(A-c) - (B-D) = a,b - b = a$

27. a) $|\varnothing| \leqslant |A \cap B| \leqslant |A| \leqslant |A \cup B| \leqslant |U|$

b) $|\varnothing| \leqslant |A - B| \leqslant |A \oplus B| \leqslant |A \cup B| \leqslant |A| + |B|$

29. a) Có, không b) Có, không

c) f khả nghịch với $f^{-1}(a) = 3$, $f^{-1}(b) = 4$, $f^{-1}(c) = 2$, $f^{-1}(d) = 1$; g không khả nghịch.

31. Cho $f(a) = f(b) = 1$, $f(c) = f(d) = 2$, $S = a, c\}$, $T = b,d)$. Khi đó, $f(S \cap T) = f(\varnothing\ ) = \varnothing$, nhưng $f(S) \cap f(T) = \{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\}$.

33. a) 60 b) 6144 c) 20 d) 0

35. Giả sử P_n là tập hợp các đa thức có bậc tối đa là n với hệ số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá n. Vậy P_n là hữu hạn với mọi n. Vì một đa thức bất kỳ bậc n có nhiều nhất là n nghiệm phân biệt nên chỉ có một số hữu hạn các số đại số là nghiệm của các đa thức thuộc P_n. Vì tập các số đại số là hợp của các tập nghiệm của những đa thức thuộc P_n với $n = 1,2,3, \ldots$ nên theo kết quả Bài tập 25 ở Tiết 1.7 nó là tập đếm được.

37. $O(x^2 2^x)$

39. Chú ý rằng

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} > \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1 \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

Vì $n!/2^n$ tăng vô hạn khi n tăng, nên $n!$ không thể bị chặn bởi $C.2^n$ với C là một hằng số và n đủ lớn. Do đó, $n!$ là $O(2^n)$.

CHƯƠNG II

Tiết 2.1

1. $max := 1$, $i := 2$,

   $max := 8$, $i := 3$,

   $max := 12$, $i := 4$, $i := 5$, $i := 6$, $i := 7$,

   $max := 14$, $i := 8$, $i := 9$, $i := 10$, $i := 11$

3. **procedure** sum(a_1 ..., a_n : integers)

   $sum := a_1$

   for i := 2 **to** n $sum := sum + a_i$

   {sum có giá trị cần tìm}

5. **procedure** *interchange* $(x,y$: real numbers)

   $z := x$ $x := y$ $y := z$

   (Số cực tiểu các phép gán cần dùng là ba).

7. **Tìm kiếm tuyến tính** $i := 1$, $i := 2$, $i := 3$, $i := 4$, $i := 5$, $i := 6$, $i := 7$, location := 7 ; tìm kiếm nhị phân ; $i := 1$, $l := 8$, $m := 4$, $i := 5$, $m := 6$, $i := 7$, $m := 7$, $l := 7$, location := 7

9. **procedure** *insert*$(x, a_1, a_2, ..., a_n$:integers)

   {dãy xếp theo thứ tự $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$}

   $a_{n+1} := x + 1$

   $i := 1$

   while $x > a_i$

   $\quad i := i + 1$

   for $l := 0$ **to** $n - i$

   $\quad a_{n-j+1} := a_{n-j}$

   $\quad a_i := x$

   $\quad${x đã được chèn vào vị trí đúng}

11. **procedure** *first largest* $(a_1, ..., a_n$:integers)

    $max := a_1$

    $location := 1$

    for $i := 2$ **to** n

    $\quad$**begin**

    $\quad$**if** $max < a_i$ **then**

    $\quad$**begin**

    $\quad\quad max := a_i$

    $\quad\quad location := i$

    $\quad$**end**

    end

13. **procedure** *mean-median-max-min*$(a,b,c$:integers)

    $mean := (a + b + c)/3$

    {sáu cách sắp khác nhau của a,b,c đối với $\geqslant$ aẽ được xử lý riêng biệt}

    if $a > b$ **then**

```
begin
    if b > c then
    median := b ; max :=a ; min :=c
end
(Phần còn lại của thuật toán là tương tự).
```

15. procedure *first-three* $(a_1 a_2 ... a_n)$ integers)

```
if a1 > a2 then đổi chỗ a1 và a2
    if a2 > a3 then đổi chỗ a2 và a3
    if a1 > a2 then đổi chỗ a1 và a2
```

17. procedure *onto(f* : hàm từ A đến B với $A = \{a_1, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, ..., b_m\}$ $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_m$ are integers)

```
for i := 1 to n
    hit(bi) := 0
count := 0
for i := 1 to n
    if hit(f(ai)) = 0 then
    begin
        hit(f(ai)) := 1
        count := count + 1
    end
if count = m then onto := true
else onto := false
```

19. procedure *ones(a* : xâu bit, $a = a_1 a_2 ... a_n$)

```
ones := 0
for i := 1 to n
begin
    if ai := 1 then
        ones := ones + 1
end {ones là số các số 1 trong xâu a
```

21. procedure *ternary search(s :* integer, $a_1, a_2, ..., a_n$: increasing integers)

```
i := 1 j := n
while i < j - 1
begin
    l = ⌊(i + j)/3⌋
    u = ⌊2(i + j)/3⌋
    if x > au then i := u + 1
    else   if x > al then
           begin
              i := l + 1
              j := u
           end
           else j := l
end
if x = ai then location := i
else   if x = aj then location := j
       else location := 0
{location là chỉ số của số hạng bằng x (0 nếu không tìm thấy)}
```

23. procedure *find a mode*$(a_1 a_2 ... a_n$: nondacraesing integers)

```
modecount := 0
```

```
    i := 1
    while i ≤ n
    begin
        value := a_i
        count := 1
        while i ≤ n and a_i = value
        begin
            count := count + 1
            i := i + 1
        end
        if count > modecount then
        begin
            modecount := count
            mode := value
        end
    end {mode là giá trị đầu tiên thường gặp nhất }
25. procedure find duplicate(a_1,a_2,...,a_n : integers)
    location := 0
    i := 2
    while i ≤ n và location = 0
    begin
        j := 1
        while j < i và location = 0
            if a_i = a_j then location := i
            else j := j + 1
        i := i + 1
    end {location là chỉ số của giá trị đầu tiên lặp lại giá trị trước trong dãy}
27. procedure find decrease(a_1,a_2,...,a_n : positive integers)
    location := 0
    i := 2
    while i ≤ n và location = 0
        if a_i < a_{i-1} then location := i
        else i := i + 1
    {location là chỉ số của giá trị đầu tiên nhỏ hơn giá trị ngay trước nó}
```

Tiết 2.2

1. $2n - 1$
3. Tuyến tính
5. $O(n)$
7. **a)** *power* : 1, $y := 1$; $i := 1$, *power* := 2, $y := 3$; $i := 2$, *power* := 4, $y := 15$
   b) $2n$ phép nhân và n phép cộng
9. **a)** $2^{10^9} \sim 10^{3\times10^8}$ **b)** 10^9 **c)** 3.96×10^7
   d) 3.16×10^4 **e)** 29 **f)** 12
11. **a)** 36 năm **b)** 13 ngày **c)** 19 phút
13. Số trung bình các phép so sánh là : $(3n + 4)/2$.
15. $O(\log n)$

17. $O(n)$
19. $O(n^2)$
21. $O(n)$

Tiết 2.3

1. **a)** Có **b)** Không **c)** Có **d)** Không
3. Giả sử rằng $a|b$. Khi đó tồn tại một số nguyên k sao cho $ka = b$. Vì $a(ck) = bc$, suy ra $a|bc$.
5. Nếu $a|b$ và $b|a$, thì tồn tại các số nguyên c và d sao cho $b = ac$ và $a = bd$. Do đó, $a = acd$. Vì $a \neq 0$, suy ra $cd = 1$ Vậy hoặc $c = d = 1$ hoặc $c = d = -1$ Do đó, hoặc $a = b$, hoặc $a = -b$.
7. Vì $ac|bc$, nên tồn tại số nguyên k sao cho $ack = bc$. Do đó $ak = b$, vậy $a|b$.
9. **a)** 2, 5 **b)** -11, 10 **c)** 34, 7
   d) 77, 0 **e)** 0, 0 **f)** 0, 3 **g)** -1, 2 h) 4,0
11. $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.
13. Giả sử rằng $\log_2 3 = a/b$, với $a, b \in \mathbf{Z}^+$ và $b \neq 0$. Khi đó $2^{a/b} = 3$, sao cho $2^a = 3^b$. Điều này vi phạm định lý cơ bản của số học. Do đó, $\log_2 3$ là một số vô tỷ.
15. **a)** Có **b)** Không **c)** Có **d)** Có
17. Nếu a **mod** $m = b$ **mod** m, thì a và b có cùng số dư khi chia cho m. Do đó, $a = q_1m + r$ và $b = q_2m + r$ với $0 \leq r < m$. Từ đó suy ra $a - b = (q_1 - q_2)m$, nghĩa là $m|(a - b)$. Do đó $a \equiv b \pmod{m}$.
19. Giả sử n không phải là số nguyên tố, sao cho $n = ab$, với a và b là các số nguyên lớn hơn 1 Vì $a > 1$ nên theo hằng đẳng thức cho trong *gợi ý*, $2^a - 1$ là một ước số lớn hơn 1 của $2^n - 1$. Ước số thứ hai trong hằng đẳng thức đó cũng lớn hơn 1, vậy $2^n - 1$ không phải là số nguyên tố.
21. **a)** 2 **b)** 4 **c)** 12
23. $\varnothing(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
25. Tồn tại một số b với $(b-1)k < n \leq bk$. Do đó $(b-1)k \leq n-1 < bk$. Chia cho k, ta nhận được : $b-1 < n/k \leq b$ và $b-1 \leq (n-1)/k < b$. Từ đó suy ra $\lceil n/k \rceil = b$ và $\lfloor (n-1)/k \rfloor = b-1$
27. **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 9
29. **a)** Không **b)** Không **c)** Có **d)** Không
31. Vì $min(x,y) + max(x,y) = x + y$, nên số mũ của p_i trong phân tích thừa số nguyên tố của ƯCLN (a,b). BCNN (a,b) là tổng số mũ của p_i trong phân tích ra thừa số nguyên tố của a và b.
33. Giả sử $m = tn$. Vì $a \equiv b \pmod{m}$, nên tồn tại một số nguyên s sao cho $a = b + sm$. Do đó, $a = b + (st)n$, sao cho $a \equiv b \pmod{n}$.
35. Cho $m = c = 2$, $a = 0$ và $b = 1$ Khi đó $0 = ac \equiv bc = 2 \pmod{2}$, nhưng $0 = a \not\equiv b = 1 \pmod{2}$.
37. Vì $a \equiv b \pmod{m}$, nên tồn tại một số nguyên s sao cho $a = b + sm$ hay $a - b = sm$. Khi đó, $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, $k \geq 2$, cũng là bội số của m. Từ đó suy ra $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.
39. **a)** 7, 19, 7, 7, 18, 0

b) Lấy chỗ dỗ khả dụng tiếp sau theo **mod** 31

41. 2, 8, 7, 10, 8, 2, 8, 7, 10, 8 ...

43. **a)** *GR QRW SDVV JR*

b) *QB ABG CNFF TB* **c)** *QX UXM AIIJJ ZX.*

Tiết 2.4

1. **a)** 6 **b)** 3 **c)** 11 **d)** 3

3. 8

5. **a)** 111 00111 **b)** 100 01101 10100 **c)** 10 11111 01011 01100

7. **a)** 31 **b)** 513 **c)** 341 **d)** 26 896

9. Đối mỗi chữ số thập lục phân thành một khối bốn bit

11. **a)** 10 00000 01110 **b)** 10 01101 01101 01011

c) 1 01010 11101 11010 **d)** 110 11110 11111 01011 00111 01101

13. Khai triển nhị phân của một số nguyên là một tổng duy nhất như vậy.

15. Giả sử $a = (a_{n-1}\ a_{n-2}\ ...\ a_1a_0)_{10}$. Khi đó : $a = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + ... + 10a_1 + a_0 \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1 + a_0$ (mod 3), vì $10^j \equiv 1$ (mod 3) với mọi số nguyên không âm j. Từ đó suy ra $3 \mid a$ nếu và chỉ nếu tổng các chữ số thập phân của a chia hết cho 3.

17. Giả sử $a = (a_{n-1}a_{n-2}\ ...\ a_1a_0)_2$. Khi đó $a = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + ... + 2^{n-1}\ a_{n-1} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... \pm a_{n-1}$ (mod 3). Từ đó suy ra a chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu tổng các chữ số nhị phân ở vị trí chẵn trừ đi tổng các chữ số nhị phân ở vị trí lẻ chia hết cho 3.

19. **a)** -6 **b)** 13 **c)** -14 **d)** 0

21. Phần bù đối với một của một tổng được tìm bằng cách cộng phần bù đối với một của hai số nguyên trừ số nhớ ở bit trái cùng được dùng như số nhớ tới bit cuối cùng của tổng.

23. $4n$

25. **procedure** *Cantor*(*x* : positive integer)

```
n := 1 ; f := 1
while (n + 1) * f ≤ x
begin
    n := n + 1
    f := f * n
end
y := x
while n > 0
begin
    a_n := ⌊y/f⌋
    y := y - a_n * f
    f := f/n
    n := n - 1
end {x = a_n n! + a_{n-1}(n - 1)! + ... + a_1 1!}
```

27. bước một : $c = 0$, $d = 0$, $s_0 = 1$;

bước hai : $c = 0$, $d = 1$, $s_1 = 0$;

bước ba : $c = 1$, $d = 1$, $s_2 = 0$;

bước bốn : $c = 1$, $d = 1$, $s_3 = 0$;
bước năm : $c = 1$, $d = 1$, $s_4 = 1$;
bước sáu : $c = 1$, $s_5 = 1$

29.
```
procedure subtract(a,b : positive integers, a > b,
  a = (a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0)_2
  b = (b_{n-1} b_{n-2} ... b_1 b_0)_2)
  B := 0 {B is the borrow}
  for j := 0 to n-1
  begin
     if a_j >= b_j + B then
     begin
        s_j := a_j - b_j - B
        B := 0
     end
     else
     begin
        s_j := a_j + 2 - b_j - B
        B := 1
     end
  end {(s_{n-1} s_{n-2} ... s_1 s_0)_2 là hiệu
```

31.
```
procedure compare(a,b : positive integers and
  a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_2,
  b = (b_n b_{n-1} ... b_1 b_0)_2)
  k := n
  while a_k = b_k và k > 0
     k := k - 1
  if a_k = b_k then print "a bằng b"
  if a_k = b_k then print "a lớn hơn b"
  if a_k = b_k then print "a bé hơn b"
```

33. $O(\log n)$

Tiết 2.5

1. **a)** 3×4 **b)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ **c)** $[2\ \ 0\ \ 4\ \ 6]$

d) 1 **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

3. **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 9/5 & -6/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{0} + \mathbf{A} = [0 + a_{ij}] = [a_{ij} + 0] = \mathbf{0} + \mathbf{A}$

9. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

11. Số hàng của **A** bằng số cột của **B** và số cột của **A** bằng số hàng của **B**

13. $$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \left[\sum_q a_{iq}\left(\sum_r b_{qr}c_{rl}\right)\right] = \left[\sum_q\sum_r a_{iq}b_{qr}c_{rl}\right] = \left[\sum_r\sum_q a_{iq}b_{qr}c_{rl}\right] = \left[\sum_r \left(\sum_q a_{iq}b_{qr}\right)c_{rl}\right] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

15. $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. a) Giả sử $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ và $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Khi đó, $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = [a_{ij} + b_{ij}]$. Ta có $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t$ $[a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$

b) Dùng ký hiệu như trong (a), ta có :

$$\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t = \left[\sum_q b_{qi}a_{jq}\right] = \left[\sum_q a_{jq}b_{qi}\right] = (\mathbf{AB})^t$$

Vì phần tử thứ (i,l) của nó chính là phần tử thứ (l,i) của **AB**

19. Kết quả dễ tìm được vì :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -d \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

21. $\mathbf{A}^n(\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{A}(\mathbf{A}\ ...(\mathbf{A}\ (\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1})\ ...\ \mathbf{A}^{-1})\ \mathbf{A}^{-1}$ theo luật kết hợp. Vì $\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, tính từ trong ra ngoài cho thấy $\mathbf{A}^n(\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{I}$. Tương tự, $(\mathbf{A}^{-1})^n\ \mathbf{A}^n = \mathbf{I}$. Do đó, $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$.

23. Có m_2 phép nhân cần dùng để tìm mỗi trong số m_1m_3 phần tử của tích. Do đó, cần phải dùng cả thảy $m_1m_2m_3$ phép nhân

25. $\mathbf{A}_1((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\mathbf{A}_4)$.

27. $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -2$

29. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

31. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

33. a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = [a_{ij} \vee b_{ij}] = [b_{ij} \vee a_{ij}] = \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$

b) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = [a_{ij} \wedge b_{ij}] = [b_{ij} \wedge a_{ij}] = \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$

35. a) $$\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = [a_{ij}] \vee [b_{ij} \wedge c_{ij}] = [a_{ij} \vee (b_{ij} \wedge c_{ij})] = [(a_{ij} \vee b_{ij}) \wedge (a_{ij} \vee c_{ij})] = [a_{ij} \vee b_{ij}] \wedge [a_{ij} \vee c_{ij}] = (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$$

b) $$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = [a_{ij}] \wedge [b_{ij} \vee c_{ij}] = [a_{ij} \wedge (b_{ij} \vee c_{ij})] = [(a_{ij} \wedge b_{ij}) \vee (a_{ij} \wedge c_{ij})] = [a_{ij} \wedge b_{ij}] \vee [a_{ij} \wedge c_{ij}] = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$$

37. $$\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) = \left[\bigvee_q a_{iq} \wedge \left(\bigvee_r (b_{qr} \wedge c_{rl})\right)\right] = \left[\bigvee_q \bigvee_r \left(a_{iq} \wedge b_{qr} \wedge c_{rl}\right)\right]$$

$$= \left[\bigvee_{r} \bigvee_{q} \left(a_{iq} \wedge b_{qr} \wedge c_{rl} \right) \right] = \left[\bigvee_{r} \left(\bigvee_{q} (a_{iq} \wedge b_{qr}) \right) \wedge c_{rl} \right]$$

$$= (\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \odot \mathbf{C})$$

Bài tập bổ sung

1. a) **procedure** *last max*($a_1 ... a_n$: integers)

```
max := a_1  last := 1
i := 2
while i ≤ n
begin
    if a_i ≥ max then
    begin
        max := a_i
        last := i
    end
    i := i + 1
end{ last là vị trí lần xuất hiện cuối cùng của số nguyên lớn nhất trong bảng
```

b) $2n - 1 = O(n)$ phép so sánh.

3. a) **procedure** *pair zeros*($b_1 b_2 ... b_n$: xâu bit $n \geq 2$)

```
x := b_1
y := b_2
k := 2
while (k < n và (x ≠ 0 hoặc y ≠ 0))
begin
    k := k + 1
    x := y
    y := b_k
end
if (x = 0 và y = 0) then print "YES"
else print "NO"
```

b) $O(n)$ phép so sánh

5. 5,22, -12, -29

7. Vì $ac \equiv bc \pmod m$, nên tồn tại một số nguyên k sao cho $ac = bc + km$. Do đó, $a - b = km/c$. vì $a - b$ là một số nguyên nên $c \mid km$. Giả sử d = ƯCLN (m, c), ta có thể viết $c = d.e$. vì m/d không chia hết cho ước nào của e, nên $d \mid m$ và $e \mid k$. Vậy, $a - b = (k/e)(m/d)$ với $k/e \in \mathbf{Z}$ và $m/d \in \mathbf{Z}$. Do đó $a \equiv b \pmod{m/d}$

9. 1

11. 1

13. $(a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_{10} = \sum_{k=0}^{n} 10^k a_k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \pmod 9$, vì $10^k \equiv 1 \pmod 9$ với mọi k là số nguyên không âm.

15. **a)** Không nguyên tố cùng nhau

b) Nguyên tố cùng nhau

c) Nguyên tố cùng nhau

d) Nguyên tố cùng nhau.

17. **a)** Hàm giải mã là $g(q) = \bar{a}(q - b)$ **mod** 26 vớ $\bar{a}$ là nghịch đảo của a theo môđun 26

b) PLEASE SEND MONEY (Làm ơn gửi tiền !)

19. $x \equiv 28 \pmod{30}$

21. $\mathbf{A}^{4n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{4n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{A}^{4n+2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{4n+3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

for $n \geq 0$

23. Giả sử rằng

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Cho $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vì $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, suy ra $c = 0$ và $a = d$.

Cho $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vì $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, suy ra $b = 0$. Do đó

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\mathbf{I}$.

25. **procedure** *triangular matrix multiplication* (**A**,**B** : upper triangular $n \times n$ matrices, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$)

```
for i := 1 to n
begin
    for j := i to n
    begin
        c_ij := 0
        for k := i to j
            c_ij = c_ij + a_ik b_kj
    end
end
```

27. $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Tương tự, $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$. Do đó $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

29. **a)** **Let** $\mathbf{A} \odot \mathbf{0} = [b_{ij}]$. Khi đó $b_{ij} = (a_{i1} \wedge 0) \vee \ldots \vee (a_{ip} \wedge 0) = 0$. Do đó $\mathbf{A} \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Tương tự $\mathbf{0} \odot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

b) $\mathbf{A} \vee \mathbf{0} = [a_{ij} \vee 0] = [a_{ij}] = \mathbf{A}$. Do đó, $\mathbf{A} \vee \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

Tương tự $\mathbf{0} \vee \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

c) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{0} = [a_{ij} \wedge 0] = [0] = \mathbf{0}$. Do đó $\mathbf{A} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Tương tự $\mathbf{0} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

CHƯƠNG 3

Tiết 3.1

1. **a)** Cộng **b)** Rút gọn
c) Modus ponens **d)** Modus tollens
e) Tam đoạn luận giả định

3. **a)** Ngụy biện ngộ nhận kết luận
b) Ngụy biện dùng ngay câu hỏi
c) Suy luận có cơ sở vì dùng modus tollens
d) Suy luận có cơ sở vì dùng tam đoạn luận phân biệt
e) Ngụy biện phủ nhận giả thiết.

5. Mệnh đề là hiển nhiên đúng vì 0 không là số nguyên dương. Cách chứng minh rỗng.

7. P(1) là đúng vì $(a+b)^1 = a+b \geqslant$ a+b. Chứng minh trực tiếp.

9. Cho $n=2k+1$ và $m=2l+1$ là các số lẻ. Khi đó $n+m=2(k+l+1)$ là chẵn.

11. Giả sử r là hữu tỷ và i là vô tỷ và $s=r+i$ là hữu tỷ. Khi đó theo Bài tập 10, $s+(-r) = i$ là hữu tỷ, điều này vô lý.

13. Vì $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ là hữu tỷ và $\sqrt{2}$ là vô tỷ, tích của hai số vô tỷ không nhất thiết vô tỷ.

15. $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ là hợp số, vì thế $n^2 - n + 41$ *không phải luôn luôn là nguyên tố.*

17. Giả sử rằng $3^{1/3} = a/b$ trong đó $a,b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$, và ƯCLN$(a,b) = 1$. Khi đó $3 = a^3/b^3$, hay $3b^3 = a^3$. Vì thế $3 \mid a^3$ và điều này xảy ra chỉ nếu $3 \mid a$. Gọi $a = 3m$. Khi đó $3b^3 = 27m^3$, hay $b^3 = 9m^3$. Vì thế $3 \mid b^3$, chứng tỏ $3 \mid b$. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết ƯCLN$(a,b) = 1$

19. Nếu $x \leqslant y$ khi đó $max(x,y) + min(x,y) = y+x = x+y$. Nếu $x \geqslant y$ khi đó $max(x,y) + min(x,y) = x+y$. Vì chỉ có hai trường hợp, nên đẳng thức luôn luôn đúng.

21. Có 4 trường hợp:
Trường hợp 1 : $x \geqslant 0$ và $y \geqslant 0$. Khi đó $|x|+|y| = x+y = |x+y|$.
Trường hợp 2 : $x<0$ và $y<0$. Khi đó $|x|+|y| = -x+(-y) = -(x+y) = |x+y|$ vì $x+y<0$.
Trường hợp 3 : $x \geqslant 0$ và $y<0$. Khi đó $|x|+|y| = x+(-y)$. Nếu $x \geqslant -y$ khi đó $|x+y| = x+y$. Nhưng vì $y<0$, $-y>y$ do vậy $|x|+|y| = x+(-y) > x+y = |x+y|$. Nếu $x<-y$ khi đó $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y)$. Nhưng bởi vì $x \geqslant 0$, $x \geqslant -x$ vì thế $|x|+|y| = x + (-y) \geqslant -x + (-y) = |x+y|$. *Trường hợp 4 :* $y \geqslant 0$ và $x<0$. Giống như trường hợp 3, chỉ cần trao đổi vai trò của x và y cho nhau.

23. Trước tiên giả sử rằng n là lẻ, tức là $n=2k+1$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó $5n+6=5(2k+1)+6 = 10k+11 = 2(5k+5)+1$. Vì thế $5n+6$ là lẻ. Để chứng minh trường hợp ngược lại ta giả sử n là chẵn, hay $n=2k$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó $5n+6=5.2k+6 = 2(5k+3)$ vậy $5n+6$ là chẵn. Vậy n là lẻ nếu và chỉ nếu $5n+6$ *lẻ.*

25. $a^2 \equiv b^2 \pmod p$ nếu và chỉ nếu $p \mid (a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$. Vì p là số nguyên tố nên $p \mid (a+b)$ hoặc $p \mid (a-b)$. Điều này tương đương với $a \equiv b \pmod p$ hoặc $a \equiv -b \pmod p$.

27. Mệnh đề này là đúng. Giả sử rằng m không là 1 và cũng không là -1 Khi đó mn có nhân tử m lớn hơn 1 Mặt khác, $mn = 1$, và 1 không có nhân tử như thế, nên $m = 1$ hoặc $m = -1$ Trường hợp đầu cho ta $n=1$, trường hợp sau $n = -1$, vì $n = 1/m$.

29. Số nguyên 3 không là tổng của các bình phương của hai số nguyên, vì thế mệnh đề là sai.

31. Chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tất cả các số $a_1, a_2, ... a_n$ đều nhỏ hơn A, trong đó A là trung bình cộng của các số này. Khi đó $a_1 + a_2 + ... + a_n < nA$. Từ đó suy ra $(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n < A$, đó là điều vô lý.

33. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng 4 mệnh đề là tương đương bằng cách chỉ ra rằng (*i*) suy ra (*ii*), (*ii*) suy ra (*iii*) suy ra (*iv*), (*iv*) suy ra (*i*). Trước tiên, giả sử rằng n là chẵn. Khi đó $n=2k$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó $n+1 = 2k+1$ vì thế $n+1$ là lẻ. Tức là (*i*) suy ra (*ii*). Giả sử $n+1$ là lẻ, túc là $n+1 = 2k+1$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó $3n+1 = 2n + (n+1) = 2(n+k)+1$, vậy $3n+1$ là lẻ. Hay (*ii*) suy ra (*iii*). Tiếp theo giả sử $3n+1$ là lẻ túc là $3n+1 = 2k+1$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó $3n=(2k+1)-1 = 2k$, vậu $3n$ là chẵn. Điều này chứng tỏ (*iii*) suy ra (*iv*). Cuối cùng, giả sử n là không chẵn. Khi đó n là lẻ, túc là $n=2k+1$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó $3n=2(2k+1) = 6k+3 = 2(3k+1)+1$, vậy $3n$ là lẻ. Điều này kết thúc cách chứng minh gián tiếp rằng (*iv*) suy ra (*i*).

35. Ba số nguyên 3, 5 và 7 là ba số nguyên tố có dạng mong muốn.

37. Theo tiền đề thứ hai có một con sư tử nào đó không uống cà phê. Gọi Leo là con vật như vậy. Bằng phép rút gọn ta biết được Leo là su tử. Và nhờ modus ponens tù tiền đề thứ nhất là biết được Leo là thú dữ và không uống cà phê. Theo lượng hóa tồn tại, thì tồn tại các thú dữ không uống cà phê, túc là có một số thú dữ không uống cà phê.

39. Giả sử ta có $n+1$ số nguyên tố đầu tiên $p_1, p_2, ... p_{n+1}$ Khi đó $p_1 p_2 ... p_{n+1}$ chia hết cho nhiều hơn n số nguyên tố.

41. Giả sử rằng $p_1 p_2 ... p_n$ là các aố nguyên tố đồng dư 3 theo mô-dun 4, trừ 3. Giả sử $q = 4p_1 p_2 ... p_n + 3$. Khi đó $q \equiv 3 \pmod 4$, và q không chia hết cho p_i, $i = 1,2,...n$ hoặc 3. Vì q phải có ít nhất một nhân tử nguyên tố đồng dư 3 theo modun 4, nên có số nguyên tố loại này không thuộc danh sách của ta. Đó là cách chứng minh tồn tại không kiến thiết.

43. Giả sử rằng $p_1 \to p_4 \to p_2 \to p_5 \to p_3 \to p_1$. Để chứng minh rằng một một trong các mệnh đề này suy ra bất kỳ mệnh đề nào khác, hãy dùng phép tam đoạn luận giả định.

45. Cho $a = \sqrt{2}$ và $b = \sqrt{2}$. Nếu $c = a^b$ là hữu tỷ, bài toán được chứng minh. Nếu c vô tỷ, thì $c^b = (a^b)^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ là hữu tỷ. Đó là cách chứng minh không kiến thiết.

47. Mọi quân đô-mi-nô khi đặt lên bản cờ sẽ phủ được đúng một ô trắng và một ô đen. Khi đó một tập các quân đô-mi-nô sẽ phủ một số ô trắng bằng đúng số ô đen. Vì ta cắt bỏ hai góc đối diện của bàn cờ nên hoặc là số ô trắng nhiều hơn số ô đen 2 đơn vị hoặc số ô đen nhiều hơn số ô trắng 2 đơn vị. Do vậy không thể phủ toàn bộ bàn cờ bị cắt bỏ hai góc đối diện bằng các quân đô-mi-nô được.

49. Có cơ sở.

Tiết 3.2

1. $n(n+1)$

3. Gọi $P(n)$ là " $\sum_{j=0}^{n} 3.5^j = 3(5^{n+1} - 1)/4$". *Bước cơ sở* $P(0)$ là đúng vì $\sum_{j=0}^{0} 3.5^j = 3 = 3.(5^1 - 1)/4$.

Bước quy nạp : Giả sử $\sum_{j=0}^{n} 3.5^j = 3.(5^{n+1} - 1)/4$. Khi đó $\sum_{j=0}^{n+1} 3.5^j = 3.(5^{n+1} - 1)/4 + 3.5^{n+1} = 3.(5^{n+2} - 1)/4$.

5. Khi khảo sát các giá trị nhỏ của n ta phỏng đoán $P(n)$ là đúng với $P(n)$ là "$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{2^n - 1}{2^n}$". *Bước cơ sở* $P(1)$ là đúng vì $\frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1}$. *Bước quy nạp* : Giả sử $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Khi đó $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$.

7. Gọi $P(n)$ là "$\sum_{j=1}^{n} j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$". Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng vì $\sum_{j=1}^{1} j^2 = 1 = 1.(1 + 1)(2.1 + 1)/6$. Bước quy nạp : Giả sử $\sum_{j=1}^{n} j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$. Khi đó :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} j^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) + (n + 1)^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6 + (n + 1)^2\\ &= (n + 1)[2n^2 + n + 6n + 6]/6 = (n + 1)(n + 2)(2n + 3)/6\\ &= (n + 1)\ ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)/6.\end{aligned}$$

9. Gọi $P(n)$ là "$1^2 + 3^2 + ... + (2n + 1)^2 = (n + 1)(2n + 1)(2n + 3)/3$". Bước cơ sở $P(1)$ là đúng vì $1^2 = 1 = (0 + 1)(0 + 1)(0 + 3)/3$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $1^2 + 3^2 + ... + (2n + 1)^2 + (2(n + 1) + 1)^2 = (n + 1)(2n + 1)(2n + 3)/3 + (2(n + 1) + 1)^2 = (2n + 3)[(n + 1)(2n + 1)/3 + (2n + 3)] = (2n + 3)(2n^2 + 9n + 10)/3 = (2n + 3)(2n + 5)(n + 2)/3 = ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)(2(n + 1) + 3)/3$.

11. Gọi $P(n)$ là "$1 + n.h \leq (1 + h)^n$, $h > -1$". Bước cơ sở : $P(0)$ là đúng vì $1 + 0h = 1 \leq (1 + h)^0$. Bước quy nạp : Giả sử $1 + n.h \leq (1 + h)^n$. Khi đó vì $(1 + h) > 0$, nên $(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \geq (1 + h)(1 + n.h) = 1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$.

13. Gọi $P(n)$ là "$2^n > n^2$". Bước cơ sở $P(5)$ là đúng vì $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Bước qui nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng tức là $2^n > n^2$. Khi đó $2^{n+1} = 2.2^n > n^2 + n^2 > n^2 + 4n \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, vì $n > 4$.

15. Gọi $P(n)$ là "$1.2 + 2.3 + ... + n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2)/3$". Bước cơ sở $P(1)$ là đúng vì $1.2 = 2 = 1(1 + 1)(1 + 2)/3$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng, khi đó $1.2 + 2.3 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = [n(n + 1)(n + 2)/3] + (n + 1)(n + 2) = (n + 1)(n + 2)[(n + 3) + 1)] = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/3$.

17. Gọi $P(n)$ là "$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} n(n + 1)/2$". Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng vì $1^2 = 1 = (-1)^0 1(1 + 1)/2$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n + 1)^2 = (-1)^{n-1} n(n + 1)/2 + (-1)^n(n + 1)^2 = (-1)^n(n + 1)[-n/2 + (n + 1)] = (-1)^n(n + 1)[n/2 + 1] = (-1)^n(n + 1)(n + 2)/2$.

19. Gọi $P(n)$ là "một bưu phí n xu có thể tạo được bằng các con tem 3 xu và 5 xu". Bước cơ sở : $P(8)$ là đúng vì bưu phí 8 xu có thể trả bằng một tem 3 xu và một tem 5 xu. Bước quy nạp : Giả sử rằng $P(n)$ đúng, tức là có thể tạo được bưu phí n xu. Bây giờ chúng ta chứng minh có thể tạo được bưu phí $(n + 1)$ xu. Vì theo giả thiết quy nạp có thể tạo được bưu phí n xu. Nếu nó có chứa tem 5 xu thì ta thay nó bằng 2 con tem 3 xu để tạo được bưu phí $(n + 1)$ xu. Nếu tạo bưu phí n xu chỉ bằng các con tem 3 xu, thì do $n > 9$ bằng cách thay 3 con tem 3 xu bằng 2 con tem 5 xu ta sẽ tạo ra bưu phí $(n + 1)$ xu.

21. Gọi $P(n)$ là "$n^5 - n$ là chia hết cho 5". Bước cơ sở : $P(0)$ là đúng vì $0^5 - 0 = 0$ chia hết cho 5. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là $n^5 - n$ là chia hết cho 5. Khi đó $(n + 1)^5 - (n + 1) = (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - (n + 1) = (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ chia hết cho 5 vì là tổng của hai số hạng chia hết cho 5.

23. Gọi $P(n)$ là "$(2n - 1)^2 - 1$ chia hết cho 8". Trường hợp cơ sở $P(1)$ là đúng vì $8 \mid 0$. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Vì $(2(n + 1) - 1)^2 - 1 = ((2n - 1)^2 - 1) + 8n$ chia hết cho 8 nên $P(n + 1)$ là đúng.

25. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "một tập có với n phần tử sẽ có $n(n - 1)/2$ tập con gồm 2 phần tử. Bước cơ sở : $P(2)$ là đúng vì một tập gồm hai phần tử có một tập con gồm hai phần tử. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Gọi S là tập gồm $n + 1$ phần tử. Chọn phần tử a từ S và gọi $T = S - \{a\}$. Tập con gồm hai phần tử của S hoặc là chứa a hoặc không chứa a. Những tập con không chứa a là các tập con có 2 phần tử của T. Thao giả thiết quy nạp số đó bằng $n(n - 1)/2$. Có n tập con gồm hai phần tử của S chứa a, vì các tập con như thế chứa a và một phần tử của T. Vì thế có $n(n - 1)/2 + n = (n + 1)\,n/2$ tập con gồm hai phần tử của S. Điều này kết thúc bằng cách chứng minh bằng quy nạp.

27. Gọi $P(n)$ là mệnh đề $1^4 + 2^4 + ... + n^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$. $P(1)$ là đúng vì $1.2.3.5/30 = 1$. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $(1^4 + 2^4 + ... + n^4) + (n + 1)^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30 + (n + 1)^4 = ((n + 1)/30)(n(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1) + 30(n + 1)^3) = ((n + 1)/30)(n + 2)(3n + 3)(3(n + 1)^2 + 3(n + 1) - 1)$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

29. Bằng kiểm tra trực tiếp ta thấy bất đẳng thức $2n + 3 \leqslant 2^n$ không đúng với $n = 0, 1, 2, 3$. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "bất đẳng thức trên là đúng với n nguyên dương". Bước cơ sở : $P(4)$ là đúng vì $2.4 + 3 = 11 \leqslant 16 = 2^4$. Bước quy nạp giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $2(n + 1) + 3 = (2n + 3) + 2 \leqslant 2^n + 2$. Nhưng vì $n \geqslant 1$, $2^n + 2 \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

31. a) Những bưu phí có thể tạo bằng các tem 5 xu và tem 6 xu là 5 xu, 6 xu, 10 xu, 11 xu, 12 xu, 15 xu, 16 xu, 17 xu, 18 xu và tất cả các bưu phí lớn hơn hay bằng 20 xu.

b) Chúng ta sẽ chứng tỏ các bưu phí lớn hơn hay bằng 20 xu có thể tạo được bằng các con tem 5 xu và 6 xu. Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "một bưu phí n xu có thể tạo thành từ các con tem 5 xu và 6 xu". $P(20)$ là đúng vì bưu phí 20 xu có thể tạo thành bằng 4 con tem 5 xu. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Nếu có một con tem 5 xu được dùng để tạo ra bưu phí n xu thì thay nó bằng con tem 6 xu sẽ tạo được bưu phí $n + 1$ xu. Nếu để tạo bưu phí n xu chỉ dùng các con tem 6 xu thì vì $n \geqslant 20$ nên ít nhất có 4 con tem 6 xu đã dùng. Khi đó thay 4 con tem này bằng 5 con tem 5 xu ta sẽ tạo được bưu phí $(n + 1)$ xu. Vì thế $P(n + 1)$ là đúng. Điều này kết thúc cách chứng minh quy nạp.

c) Cho $P(n)$ như trong phần b) Các trường hợp cơ sở là $P(20)$, $P(21)$, $P(22)$, $P(23)$ và $P(24)$. Chúng đúng vì các bưu phí 20 xu, 21 xu, 22 xu, 23 xu và 24 xu có thể tạo thành từ các con tem 5 xu và 6 xu, bằng cách dùng 4 con tem 5 xu, 3 con 5 xu và 1 con 6 xu, 2 con 5 xu và 2 con 6 xu, 1 con 5 xu và 3 con 6 xu, và 4 con 6 xu. Bây giờ ta giả sử $P(k)$ là đúng với $20 \leqslant k \leqslant n$, trong đó $n \geqslant 24$. Vì $n + 1 \geqslant 25$ từ đó suy ra $n - 4 \geqslant 20$, tức là theo giả thiết quy nạp bưu phí $n - 4$ có thể tạo thành. Thêm 1 con tem 5 xu nữa ta sẽ tạo ra bưu phí $n + 1$ xu hay $P(n + 1)$ là đúng. Điều đó kết thúc cách chứng minh quy nạp.

33. Tất cả các khoản tiền là bội của \$10 và lớn hơn hay bằng \$40 có thể tạo thành cũng như khoản tiền \$20. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$10n$\$ có thể tạo thành". $P(4)$ là đúng vì \$40 được tạo bởi 2 tờ \$20. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng với $n \geq 4$. Nếu có 1 tờ \$50 được dùng để tạo $10n$\$ thì ta thay nó bằng 3 tờ \$20 ta sẽ nhận được $10(n + 1)$\$ Nếu không thì ít nhất có 2 tờ \$20 vì $10n$ lớn hơn hay bằng \$40. Thay thế 2 tờ này bằng 1 tờ \$50 ta sẽ được một khoản tiền $10(n + 1)$\$. Vậy $P(n)$ là đúng.

35. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$AB^n = B^nA$".$P(1)$ là đúng vì $AB = BA$. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $AB^{n+1} = AB^nB = B^nAB = B^nBA = B^{n+1}A$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

37. Gọi $P(n)$ là "$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$" Bước cơ sở : $P(1)$ hiển nhiên là đúng. Bước quy nạp : Giả sử rằng $P(n)$ là đúng. Khi đó : $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}] \cap B$

$= [(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B] \cup (A_{n+1}) \cap B) =$

$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) \cup (A_{n+1} \cap B)$.

39. Gọi $P(n)$ là : " $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k$ "

Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng. Bước quy nạp : Giả sử rằng $P(n)$ là đúng. Khi đó :

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k} = \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}} = \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)} \cap \overline{A}_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k \cap \overline{A}_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} \overline{A}_k$$

41. Gọi $P(n)$ là "$[(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \to p_n)] \to [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to p_n]$". Bước cơ sở : $P(2)$ là đúng vì $(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)$ là hằng đúng. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng. Để chỉ ra $[(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \to p_n) \wedge (p_n \to p_{n+1})] \to (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to p_{n+1}$ là hằng đúng, ta giả sử giả thiết của phép kéo theo này là đúng. Cả hai giả thiết và $P(n)$ là đúng, ta suy ra $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to p_n$ là đúng. Vì điều đó là đúng và vì $p_n \to p_{n+1}$ là đúng ta suy ra theo phép tam đoạn luận giả định, rằng $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to p_{n+1}$ là đúng. Từ đó suy ra $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to p_{n+1}$.

43. Hai tập không gối lên nhau nếu $n + 1 = 2$. Thực tế, $P(1) \to P(2)$ là sai.

45. Giả sử rằng tính được sắp tốt là có. Giả sử $P(1)$ là đúng và phép kéo theo $(P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n)) \to P(n + 1)$ là đúng với mọi số dương $n \geq 1$. Giả sử S là tập các số dương n sao cho $P(n)$ sai. Chúng ta sẽ chỉ rằng $S = \varnothing$. Giả sử $S \neq \varnothing$. Khi đó theo tính chất được sắp tốt thì có ít nhất một số nguyên trong S. Chúng ta biết rằng m không thể bằng 1 vì $P(1)$ là đúng. Vì $n = m$ là số dương nhỏ nhất sao cho $P(n)$ là sai, $P(1), P(2), \ldots, P(m - 1)$ là đúng và $m - 1 \geq 1$. Vì $(P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(m - 1)) \to P(m)$ là đúng, ta suy ra $P(m)$ cũng phải đúng, đó là điều vô lý. Vậy $S = \varnothing$.

47. Gọi $P(n)$ là "$H_{2^n} \leq 1 + n$". Bước cơ sở : $P(0)$ là đúng vì $H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 1 + 0$. Bước quy nạp : Giả sử $H_{2^n} \leq 1 + n$. Khi đó :

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} = \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} \leq 1+n + 2^n \ (1/2^{n+}) < 1 + n + 1 = 1 + (n + 1)$$

$+ 1 = 1(n + 1)$.

49. Gọi $P(n)$ là "$1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$". Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng vì $1 > 2(\sqrt{2} - 1)$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{n+1} > 2(\sqrt{n+1} - 1) + 1/\sqrt{n+1}$. Nếu ta chỉ re được $2(\sqrt{n+1} - 1) + 1/\sqrt{n+1} > 2(\sqrt{n+2} - 1)$, thì $P(n + 1)$ đúng. Bất đẳng thức này tương đương với $2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) < 1/\sqrt{n+1}$, hay $2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) < \sqrt{n+1}/\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}/\sqrt{n+1}$, hay $2 < 1 + \sqrt{n+2}/\sqrt{n+1}$ là điều hiển nhiên đúng.

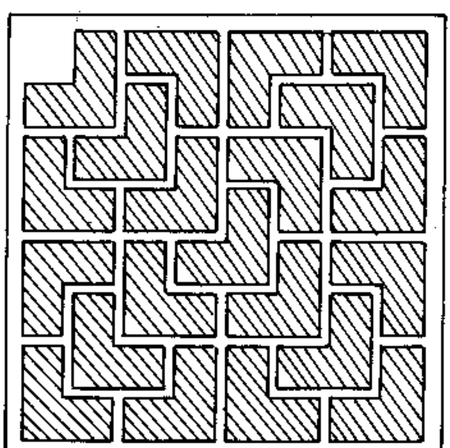
51. Trước tiên chúng ta chứng minh kết quả này khi n là luỹ thừa của 2, tức là nếu $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Gọi $P(k)$ là mệnh đề $A \geq G$ trong đó A và G trung bình cộng và trung bình nhân của tập $n = 2^k$ số thực dương. Bước cơ sở : $k = 1$ và $n = 2^1 = 2$. Lưu ý là $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, hay $a_1 - 2\sqrt{a_1a_2} + a_2 \geq 0$ tức là $(a_1 + a_2)/2 \geq (a_1a_2)^{1/2}$. Bước quy nạp : giả sử $P(k)$ là đúng, với $n = 2^k$. Chúng ta sẽ chỉ ra $P(k + 1)$ là đúng. Chúng ta có $2^{k+1} = 2n$. Ta có $(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})/(2n) = ((a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n + (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n})/n)/2$ và tương tự ta có $(a_1a_2\dots a_{2n})^{1/(2n)} = [(a_1a_2\dots a_n)^{1/n}(a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{2n})^{1/n}]^{1/2}$.

Để đơn giản ta gọi $A(x, y, \dots)$ và $G(x, y, \dots)$ là trung bình cộng và trung bình nhân của các số $x, y, \dots$ Nếu $x \leq x'$, $y \leq y'$, v.v. Khi đó $A(x, y, \dots) \leq A(x', y', \dots)$ và $G(x, y, \dots) \leq G(x', y', \dots)$. Vì thế $A(a_1, \dots a_{2n}) = A(A(a_1, \dots a_n), A(a_{n+1}, \dots a_{2n})) \geq A(G(a_1, \dots a_n), G(a_{n+1}, \dots, a_{2n})) \geq G(G(a_1, \dots, a_n), G(a_{n+1}, \dots, a_{2n})) = G(a_1, \dots a_{2n})$. Điều này kết thúc việc chứng minh cho trường hợp n là luỹ thừa của 2. Nếu n không là luỹ thừa của 2, gọi m là luỹ thừa bậc cao hơn liền sát của 2 và $a_{n+1}, \dots, a_m$ tất cả bằng $A(a_1, \dots, a_n) = \bar{a}$. Khi đó chúng ta có $(a_1, \dots a_n)a^{m-n})^{1/m} \leq A(a_1, \dots a_m)$, vì m là luỹ thừa của 2. Vì $A(a_1, \dots, a_n) = \bar{a}$ ta suy ra $(a_1 \dots a_n)^{1/m}a^{1-n/m} \leq a^{n/m}$. Nâng cả hai vế lên luỹ thừa bậc m/n cho ta $G(a_1, \dots, a_n) \leq A(a_1, \dots, a_n)$.

53. Không có gì phải chứng minh trong trường hợp cơ sở, khi $n = 1$. Bây giờ ta giả sử có giả thiết quy nạp. Giả sử $p | a_1a_2\dots a_na_{n+1}$. Lưu ý là ƯCLN($p$, $a_1a_2\dots a_n$) = 1 hoặc p. Nếu nó là 1, theo Bổ đề 1 trong Tiết 2.5, $p | a_{n+1}$. Nếu nó bằng p thì $p | a_1a_2\dots a_n$, theo giả thiết quy nạp $p | a_i$ với một i nào đó, sao cho $i \leq n$. Định lý được chứng minh.

55. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "nếu $x_1, x_2, \dots x_n$ là các số thực phân biệt, khi đó $n - 1$ phép nhân cần phải thực hiện để tìm tích của các số này bất kể dấu ngoặc được chèn như thế nào vào tích này". Bây giờ chúng ta chứng minh $P(n)$ đúng bằng nguyên lý quy nạp thứ hai. Trường hợp cơ sở $P(1)$ là đúng vì $1 - 1 = 0$ phép nhân cần phải làm để tính tích x_1. Giả sử $P(k)$ là đúng với $1 \leq k \leq n$. Phép nhân cuối cùng dùng để tìm tích $n + 1$ số thực phân biệt $x_1, x_2, \dots x_n\ x_{n+1}$ là phép nhân của tích k số đầu tiên với k nào đó và tích của $n + 1 - k$ số cuối của chúng. Dùng giả thiết quy nạp, $k - 1$ phép nhân được dùng để tính tích k số bất kể cách đặt dấu ngoặc trong tích, và $n + 1 - k$ phép nhân được dùng để tìm tích của $n + 1 - k$ số còn lại. Vì còn phải làm một phép nhân nữa để tìm tích $n + 1$ số, tổng số phép nhân được dùng là $(k - 1) + (n + 1 - k) + 1 = n$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng. Điều khẳng định được chứng minh xong.

57.



59. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "mọi bàn cờ ba chiều $2^n \times 2^n \times 2^n$ với một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$ bị cắt bỏ có thể lấp kín bằng các khối lập phương $2 \times 2 \times 2$ bị cắt bỏ một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì viên xây trùng với chính bàn cờ. Giả sử $P(n)$ là đúng. Xét khối lập phương $2^{n+1} \times 2^{n+1} \times 2^{n+1}$ với một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$ bị cắt bỏ. Chia khối này thành 8 phần bằng các mặt phẳng song song với các mặt và đi qua tâm của khối. Một trong tám khối con này bị cắt bỏ khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. Đặt viên xây sao cho tâm của nó tại tâm của bàn cờ và phần bị khuyết của viên này xây nằm trong một phần tám của bàn cờ mà ở đó bị cắt bỏ khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. Điều này sẽ tạo ra tám khối lập phương $2^n \times 2^n \times 2^n$ mỗi khối đều bị cắt bỏ khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. Theo giả thiết quy nạp chúng ta có thể lấp kín mỗi một trong 8 khối này bằng các viên xây bị cắt bỏ khối $1 \times 1 \times 1$. Kết hợp lại ta được một cách lấp đầy bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

61. Giả sử rằng $a = dq + r = dq' + r'$ sao cho $0 \leqslant r < d$ và $0 \leqslant r' < d$. Khi đó $d(q - q') = r' - r$. Từ đó suy ra d chia hết $r' - r$. Vì $-d < r' - r < d$, chúng ta có $r' - r = 0$. Vì thế $r' = r$. Ta suy ra $q = q'$.

Tiết 3.3

1. a) $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 7$, $f(4) = 9$.

b) $f(1) = 3$, $f(2) = 9$, $f(3) = 27$, $f(4) = 81$.

c) $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 16$, $f(4) = 65536$.

d) $f(1) = 3$, $f(2) = 13$, $f(3) = 183$, $f(4) = 33673$.

3. a) $f(2) = -1$, $f(3) = 5$, $f(4) = 2$, $f(5) = 17$.

b) $f(2) = -4$, $f(3) = 32$, $f(4) = -4096$, $f(5) = 536870912$.

c) $f(2) = 8$, $f(3) = 176$, $f(4) = 92762$, $f(5) = 25764174848$.

d) $f(2) = -1/2$, $f(3) = -4$, $f(4) = 1/8$, $f(5) = -32$.

5. Có thể có bao nhiêu câu trả lời đúng. Chúng tôi đưa ra một số câu trả lời tương đối đơn giản.

a) $a_{n+1} = a_n + 6$ với $n \geqslant 1$ và $a_1 = 6$

b) $a_{n+1} = a_n + 2$ với $n \geqslant 1$ và $a_1 = 3$

c) $a_{n+1} = 10a_n$ với $n \geqslant 1$ và $a_1 = 10$

d) $a_{n+1} = a_n$ với $n \geqslant 1$ và $a_1 = 5$

7. $F(0) = 0$, $F(n) = F(n-1) + n$ với $n \geqslant 1$

9. $P_m(0) = 0$, $P_m(n+1) = P_m(n) + m$ với $n \geqslant 1$

11. Gọi $P(n)$ là "$f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$". Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì $f_1 = 1 = f_2$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2(n+1)}$.

13. *Bước cơ sở* : $f_0f_1 + f_1f_2 = 0.1 + 1.1 = 1^2 = f_2{}^2$. *Bước quy nạp* : Giả sử $f_0f_1 + f_1f_2 + \dots + f_{2n-1}f_{2n} = f_{2n}{}^2$. Khi đó $f_0f_1 + f_1f_2 + \dots + f_{2n-1}f_{2n} + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n}{}^2 + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n}(f_{2n} + f_{2n+1}) + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n}f_{2n+2} + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n+2}(f_{2n} + f_{2n+1}) = f^2_{2n+2}$.

15. Số các phép chia dùng trong thuật toán Euclid tìm UCLN(f_{n+1}, f_n) bằng 0 với $n=0$, bằng 1 với $n=1$ và bằng $n - 1$ với $n \geqslant 2$. Để chứng minh kết quả này với $n \geqslant 2$, chúng ta dùng quy nạp toán học. Với $n=2$, một phép chia chỉ ra rằng UCLN(f_3, f_2) =

UCLN(2,1)=UCLN(1,0)=1. Bây giờ giả sử $(n-1)$ được dùng để tìm UCLN(f_{n+1}, f_n). Để tìm số UCLN(f_{n+2}, f_{n+1}) trước tiên chia f_{n+2} cho f_{n+1} ta được $f_{n+2} = 1 \cdot f_{n+1} + f_n$. Sau một phép chia ta có UCLN(f_{n+2}, f_{n+1}) = UCLN(f_{n+1}, f_n). Theo giả thiết quy nạp ta suy ra có đúng $n-1$ phép chia được dùng. Điều đó chứng tỏ để tìm UCLN(f_{n+2}, f_{n+1}) cần n phép chia.

17. $|A| = -1$. Vì thế $|A^n| = (-1)^n$. Từ đó suy ra $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

19. a) Chứng minh bằng quy nạp. Bước cơ sở : Với $n=1$, $max(-a_1) = -a_1 = -min(a_1)$. Với $n=2$, có hai trường hợp. Nếu $a_2 \geqslant a_1$ khi đó $-a_1 \geqslant -a_2$ vì thế $max(-a_1, -a_2) = -a_1 = -min(a_1, a_2)$. Nếu $a_2 < a_1$ khi $-a_1 < -a_2$ vì thế $max(-a_1, -a_2) = -a_2 = -min(a_1, a_2)$. Bước quy nạp : Giả sử đúng với n $(n \geqslant 2)$. Khi đó $max(-a_1, -a_2, ..., -a_n, -a_{n+1}) = max(max(-a_1, -a_2, ..., -a_n), -a_{n+1}) = max(-min(a_1, a_2, ..., a_n), -a_{n+1}) = -min(min(a_1, a_2, ..., a_n), a_{n+1}) = -min(a_1, ..., a_{n+1})$.

b) Chứng minh quy nạp toán học. Khi $n=1$, kết quả là đồng nhất thức $a_1 + b_1 = a_1 + b_1$. Với $n = 2$ trước tiên xét trường hợp $a_1 + b_1 \geqslant a_2 + b_2$. Khi đó $max(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = a_1 + b_1$. Ta cũng thấy $a_1 \leqslant max(a_1, a_2)$ và $b_1 \leqslant max(b_1, b_2)$ vì thế $a_1 + b_1 \leqslant max(a_1, a_2) + max(b_1, b_2)$. Do đó $max(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = a_1 + b_1 \leqslant max(a_1, a_2) + max(b_1, b_2)$. Trường hợp $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ là tương tự. Bước quy nạp : Giả sử kết quả đúng với n. Khi đó

$$\begin{aligned}
&max(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, a_{n+1} + b_{n+1})\\
&= max(max(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n), a_{n+1} + b_{n+1})\\
&\leqslant max(max(a_1, a_2, ..., a_n), a_{n+1}) + max(max(b_1, b_2, ..., b_n), b_{n+1})\\
&= max(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) + max(b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}).
\end{aligned}$$

c) Tương tự như b) nhưng thay "*max*" bằng "*min*" và đảo ngược mỗi bất đẳng thức.

21. $5 \in S$ và $x + y \in S$ nếu $x, y \in S$.

23. a) $0 \in S$, và nếu $x \in S$, thì $x + 2 \in S$ và $x - 2 \in S$.

b) $2 \in S$ và nếu $x \in S$ khi đó $x + 3 \in S$.

c) $1 \in S$, $2 \in S$, $3 \in S$, $4 \in S$ và nếu $x \in S$ khi đó $x + 5 \in S$.

25. Nếu x là một tập hoặc là một biến biểu diễn một tập, khi đó x là một công thức được tạo tốt. Nếu x và y là các công thức được tạo tốt, khi đó $\overline{x}$, $(x \cup y)$, $(x \cap y)$ và $(x - y)$ cũng là các công thức như thế.

27. $\lambda^R = \lambda$ và $(ux)^R = xu^R$ với $x \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$.

29. $w^0 = \lambda$ và $w^{n+1} = ww^n$

31. Khi xâu chứa n số 0 tiếp sau là n số 1 với n là một số nguyên dương nào đó.

33. Gọi $P(i)$ là "$l(w^i) = i.l(w)$". $P(0)$ là đúng vì $l(w^0) = 0 = 0.l(w)$. Giả sử $P(i)$ đúng. Khi đó $l(w^{i+1}) = l(ww^i) = l(w) + l(w^i) = l(w) + i.l(w) = (i + 1)l(w)$.

35. a) $P_{m,n} = P_m$ vì số lớn hơn m không thể dùng trong khi phân tích số m.

b) Vì chỉ có một cách phân tích số 1, cụ thể là 1 = 1, ta suy ra $P_{1,n} = 1$. Vì chỉ có một cách phân tích số m thành các số 1, nên $P_{m,1}=1$. Khi $n > m$ ta suy ra $P_{m,n} = P_{m,m}$ vì không dùng một số lớn hơn m. $P_{m,m} = 1 + P_{m,m-1}$ vì có một cách phân tích đặc biệt, cụ thể là $m=m$, khi được m được phép có trong phân tích $P_{m,n} = P_{m,n-1} + P_{m-n,n}$ nếu $m > n$ vì phân tích m thành các số nguyên không vượt quá n hoặc là không dùng số n và vì thế nó được tính trong $P_{m,n-1}$ hoặc là dùng số n và cách phân tích số $m - n$ và hiển nhiên được tính trong $P_{m-n,n}$.

c) $P_5 = 7$, $P_6 = 11$

37. Gọi $P(n)$ là "$A(n,2) = 4$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $A(1,2) = A(0,A(1,1)) = A(0,2) = 2.2 = 4$. *Bước quy nạp* : Giả sử $P(n)$ là đúng tức là $A(n, 2) = 4$. Khi đó $A(n + 1, 2) = A(n,A(n + 1, 1)) = A(n,2) = 4$.

39. a) 16 b) 65356

41. Dùng lý luận quy nạp kép chứng minh mệnh đề mạnh hơn : $A(m,k) > A(m, l)$ khi $k > l$. *Bước cơ sở* : Khi $m = 0$ mệnh đề là đúng vì $k > l$ suy ra $A(0,k) = 2k > 2l = A(0,l)$. *Bước quy nạp* : Giả sử $A(m,x) > A(m, y)$ với tất cả các số nguyên không âm x và y với $x > y$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng điều đó suy ra $A(m + 1, k) > A(m + 1, l)$ nếu $k > l$. *Bước cơ sở* : Khi $l = 0$ và $k > 0$, $A(m + 1, l) = 0$ và hoặc là $A(m + 1, k) = 2$, hoặc là $A(m + 1, k) = A(m, A(m + 1, k - 1))$. Nếu $m = 0$, ta có $2A(1, k - 1) = 2^k$. Nếu $m > 0$ thì nó lớn hơn 0 theo giả thiết quy nạp. Trong mọi trường hợp $A(m + 1, k) > 0$ và thực tế thì $A(m + 1, k) \geq 2$. Nếu $l = 1$ và $k > 1$ khi đó $A(m + 1, l) = 2$, và $A(m + 1, k) = A(m, A(m + 1, k - 1))$ với $A(m + 1,k - 1) \geq 2$. Vì thế theo giả thiết quy nạp, $A(m, A(m + 1, k - 1)) \geq A(m, 2) > A(m, 1) = 2$. *Bước quy nạp* : Giả sử $A(m + 1, r) > A(m + 1, s)$ với mọi $r > s$, $s = 0, 1, \ldots l$. Khi đó nếu $k + 1 > l + 1$ ta suy ra $A(m + 1, k + 1) = A(m, A(m + 1, k)) > A(m, A(m + 1, l)) = A(m + 1, l + 1)$.

43. Theo Bài tập 42 ta suy ra $A(i,l) \geq A(i - 1, j) \geq A(i - l, j) \geq \ldots \geq A(0, l) = 2l \geq l$.

45. Gọi $P(n)$ là "$F(n)$ được định nghĩa tốt" khi đó $P(0)$ là đúng vì $F(0)$ là được xác định. Giả sử $P(k)$ là đúng với $k < n$. Khi đó $F(n)$ là được định nghĩa tốt tại n vì $F(n)$ được biểu diễn qua $F(0)$, $F(1)$, ..., $F(n - 1)$. Vì thế $P(n)$ là đúng với mọi n.

Tiết 3.4

1. **procedure** *mult*(n : nguyên dương, x : nguyên)
  if n=1 **then** *mult*(n,x) := x
  else *mult*(n,x) := x + *mult*(n - 1,x) ;

3. **procedure** *sum of odds*(n : nguyên dương)
  if n=1 **then** *sum of odds*(n) := 1
  else *sum of odds*(n) := *sum of odds*(n - 1) + $2n$ - 1 ;

5. **procedure** *smallest*($a_1, a_2, \ldots, a_n$: nguyên dương)
  if n=1 **then** *smallest*($a_1, a_2, \ldots, a_n$) := a_1
  else *smallest*($a_1, a_2, \ldots, a_n$) := *min*(*smallest*($a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$), a_n)

7. **procedure** *modfactorial*(n,m : nguyên dương)
  if n=1 **then** *modfactorial*(n,m) := 1
  else *modfactorial*(n,m) := (n* *modfactorial*(n - 1, m)) **mod** m

9. **procedure** *UCLN*(a,b : nguyên không âm)
  if a=0 **then** *UCLN*(a,b) := b
  else **if** a=b - a **then** *UCLN*(a,b) := a
    else **if** a < b - a **then** *UCLN*(a,b) := *UCLN*(a,b - a)
      else *UCLN*(a,b) := *UCLN*(b - a,a) ;

11. n phép nhân so với 2^n.

13. O(log n) so với n.

15. **procedure** a(n : nguyên không âm)
  if n=0 **then** a(n) := 1
  else **if** n=1 **then** a(n) := a2
    else a(n) := a(n - 1)*a(n - 2).

17. Lặp

19. **procedure** *iteractive* (n : nguyên không âm)
  if n=0 **then** z := 1

```
else   if n=1 then z := 2
       else
       begin
           x := 1
           y := 2
           z := 3
           for i := 1 to n - 2
           begin
               w := x + y + z
               x := y
               y := z
               z := w
           end
       end
{z là số hạng thứ n của dãy}
```

21. Trước tiên ta đưa ra thủ tục đệ quy và sau đó là thủ tục lặp.

```
procedure r(n : nguyên dương)
if n < 3 then r(n) := 2n + 1
else r(n) := r(n - 1)*(r(n - 2))^2(r(n - 3))^3
procedure i(n : nguyên không âm)
if n=0 then z :=1
else   if n=1 then z :=3
       else
       begin
           x := 1
           y :=3
           z := 5
           for i := 1 to n - 2
           begin
               w := z*y^2*x^3
               x := y
               y := z
               z := w
           end
       end
{z là số hạng thứ n của dãy}
```

23.
```
procedure reverse(w : xâu nhị phân)
n : = length (w)
if n ≤ 1 then reverse(w) := w
else reverse(w) : = substr(w,n,m)* reverse(w,1, n - 1)
{ substr(w,a,b) là xâu con của w gồm các ký tự ở vị trí thứ a và thứ b}
```

25.
```
procedure A(m,n : nguyên không âm)
if m=0 then A(m,n) := 2n
else   if n=0 then A(m,n) := 0
       else   if n=1 then A(m,n) := 2
              else A(m,n) := A(m - 1,A(m,n - 1)).
```

Tiết 3.5

1. Giả sử x=0. Đoạn chương trình đầu tiên gán 1 cho y sau đó gán $x + y = 0 + 1 = 1$ cho z.

3. Giả sử y=3. Đoạn chương trình gán 2 cho x và sau đó gán $x + y = 2 + 3 = 5$ cho z. Vì $y = 3 > 0$ nên nó gán $z + 1 = 5 + 1 = 6$ cho z.

5. $(p \wedge \text{điều\_kiện1})\ \{S_1\}q$

$(p \wedge \neg\ \text{điều\_kiện1} \wedge \text{điều kiện2})\{S_2\}q$

.

.

.

$(p \wedge \neg\ \text{điều\_kiện1} \wedge \neg\ \text{điều kiện2})$

$\quad \ldots \wedge \neg\ \text{điều\_kiện}\ (n-1)\{S\}q$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\therefore p$ {**if** điều_kiện1 **then** S_1

else if điều_kiện2 **then** S_2 ;... ; **else** $\{S_n\}q$

7. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng p : "$power = x^{i-1}$ và $i \leq n + 1$" là bất biến vòng lặp. Ta thấy rằng ban đầu p là đúng, vì trước khi vòng lặp bắt đầu, i=1 và $power = 1 = x^0 = x^{1-1}$. Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng nếu p là đúng và $i \geq n$ sau khi thực hiện vòng lặp, khi đó p vẫn đúng sau khi thực hiện thêm một lần nữa. Vòng lặp, mỗi lần, làm tăng i lên 1 đơn vị. Do vậy, vì $i \leq n$ trước khi thực hiên bước này và $i \leq n + 1$ sau bước này. Bước lặp này cũng gán $power^*x$ cho $power$. Do giả thiết quy nạp $power$ được gán $x^{i-1}x = x^i$. Vì thế p vẫn còn đúng. Hơn nữa, vòng lặp kết thúc sau n bước lặp với $i = n + 1$, vì trước khi vào vòng lặp i=1 và tăng thêm 1 sau mỗi bước, và vòng lặp kết thúc khi $i > n$. Do đó, khi kết thúc $power = x^n$ như ta chờ đợi.

9. Giả sử p là "m và n là các số nguyên". Khi đó nếu điều kiện $n < 0$ là đúng, thì $a = -n = |n|$ sau khi S_1 được thi hành. Nếu điều kiện $n < 0$ là sai thì $a = n = |n|$ sau khi S_1 được thi hành. Vì thế $p\{S_1\}q$ là đúng trong đó q là $p \wedge (a = |n|)$. Vì S_2 gán 0 cho cả k và x, nên rõ ràng $q\{S_2\}r$ là đúng trong đó r là $q \wedge (k=0) \wedge (x=0)$. Giả sử r là đúng. Gọi $P(k)$ là "$x=mk$, và $k \leq a$". Chúng ta có thể chỉ ra $P(k)$ là một bất biến vòng lặp đối với vòng lặp S_3, $P(0)$ là đúng vì trước khi vào vòng lặp $x = 0 = m.0$ và $0 \leq a$. Bây giờ ta giả sử $P(k)$ là đúng và $k < a$, khi đó $P(k + 1)$ là đúng vì x được gán $x + m = mk + m = m(k + 1)$. Vòng lặp kết thúc khi k=a, và lúc đó $x = ma$. Vì thế $r\{S_3\}_S$ là đúng trong đó S là "$a = |n|$ và $x = ma$". Bây giờ nếu giả sử S là đúng. Khi đó nếu $n < 0$ ta suy ra $a = -n$, tức là $x = -mn$. Trong trường hợp này S_4 sẽ gán $-xx = mn$ cho $product$. Nếu $n > 0$ khi đó $x = ma = mn$, tức là S_4 gán mn cho $product$. Vậy $s\{S_4\}t$ là đúng.

11. Giả sử rằng khẳng định đầu p là đúng. Khi đó vì $p\{S\}q_o$ là đúng, q_o là đúng sau khi S được thi hành. Do đó $q_o \to q_1$ là đúng, ta suy ra q_1 là đúng sau khi S được thi hành. Vì thế $p\{S\}\ q_1$ là đúng.

13. Chúng ta sẽ dùng mệnh đề p "UCLN(a,b) = UCLN(x,y) và $y \geq 0$" như một bất biến vòng lặp. Ta nhận thấy p là đúng trước khi vào vòng lặp, vì khi đó $x = a$ và $b = y$ và y là nguyên dương, khi dùng khẳng định đầu. Bây giờ giả sử p là đúng và $y > 0$; khi đó vòng lặp sẽ thực hiện một lần nữa. Trong vòng lặp x và y được thay tương ứng bởi y và x **mod** y. Theo Bổ đề 1 của Tiết 2.4 ta có UCLN(x,y) = UCLN(y,x **mod** y). Hơn nữa sau khi thực hiện vòng lặp giá trị của UCLN(x,y) được giữ nguyên như trước. Ngoài ra vì y là số dư nên nó cùng lắm là bằng 0. Vì vậy, p vẫn còn đúng hay nó là bất biến vòng lặp. Nếu vòng lặp kết thúc thì $y = 0$. Trong trường hợp này chúng ta có

UCLN$(x,y) = x$ như khẳng định cuối cùng. Vì thế chương trình với thông tin ra là x đã tính đúng UCLN(a,b). Cuối cùng chúng ta có thể chứng minh rằng vòng lặp phải kết thúc vì mỗi vòng lặp làm giảm giá trị của y mỗi bước 1 đơn vị. Do vậy vòng lặp có thể lặp nhiều nhất b lần.

Các bài tập bổ sung

1. Cho $a = 2n + 1$ và $b=2m + 1$. Khi đó $ab = (2n + 1)(2m + 1) = 2(2mn + m + n)$ là một số lẻ.

3. Sai $\sqrt{2} + (\sqrt{-2}) = 0$ là một phản ví dụ.

5. Đó là một ví dụ về nguỵ biện khẳng định kết luận.

7. Chứng minh từng trường hợp.
Trường hợp 1 : $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Khi đó $|xy| = xy = |x||y|$.
Trường hợp 2 : $x \geq 0$ và $y < 0$. Khi đó $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.
Trường hợp 3 : $x < 0$ và $y \geq 0$. Khi đó $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.
Trường hợp 4 : $x < 0$ và $y < 0$. Khi đó $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

9. Giả sử các x_j là phân biệt. Gọi $P(x)$ như trong phần gợi ý. Khi đó $P(x)$ là một đa thức (bậc $n - 1$) và nếu $x=x_m$ khi đó $\prod_{i \neq j} (x - x_j)/(x - x_i) = 0$ trừ khi $i=m$. Vì thế $P(x_m) = \prod_{j \neq m} y_m(x_m - x_j)/(x_m - x_j) = 1y_m = y_m$.

11. Gọi $P(n)$ là "$1.1 + 2.2 + ... + n.2^{n-1} = (n - 1)2^n + 1$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ *là đúng vì* $1.1 = 1 = (1 - 1)2^1 + 1$. Bước quy nạp : *Giả sử rằng* $P(n)$ đúng. Khi đó "$1.1 + 2.2 + ... + n.2^{n-1} + (n + 1)\, 2^n = (n - 1)2^n + 1 + (n + 1)\, 2^n = 2n\; 2^n + 1 = (n + 1)2^n + 1$.

13. Gọi $P(n)$ là "$1/1.4 + ... + 1/[(3n - 2)(3n + 1)] = n/(3n + 1)$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $1/1.4 = 1/4$. *Bước qui nạp* : Giả sử $P(n)$ đúng. Khi đó " $1/1.4 + . . . + 1/[(3n-2)(3n+1)] + 1/[(3n + 1)(3n + 4)] = n/(3n + 1) + 1/[(3n + 1)(3n + 4)] = [(3n + 4)n + 1]/[(3n + 1)(3n + 4)] = (n + 1)/(3n + 4)$.

15. Gọi $P(n)$ là "$2^n > n^3$". *Bước cơ sở* : $P(10)$ là đúng vì $1024 > 1000$. *Bước quy nạp* : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 9n^2 \leq n^3 + n^3 = 2.2^n = 2^{n+1}$!

17. Gọi $P(n)$ là "$a - b$ là một thừa số $a^n - b^n$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ hiển nhiên là đúng. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a - b)$. Vì $(a - b)$ là thừa số của $a^n - b^n$ và của chính $a - b$, nên $a - b$ là thừa số của $a^{n+1} - b^{n+1}$!

19. Gọi $P(n)$ là "$a(a + d) + ... + (a + nd) = (n + 1)(2a + nd)/2$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $a + (a + d) = 2a + d = 2(2a + d)/2$. *Bước quy nạp* : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $a + (a + d) + ... + (a + nd) + (a(n + 1)d) = (n + 1)(2a + nd)/2 + (a(n + 1)d) = (2an + 2a + n^2d + nd + 2a + 2nd + 2d)/2 = (2an + 4a + n^2d + 3nd + 2d)/2 = (n + 1)(2a + (n + 1)d)$.

21. Chúng sẽ dùng nguyên lý quy nạp thứ hai để chỉ ra rằng f_n là chẵn nếu $n \equiv 0 \pmod 3$ còn không thì là lẻ. Bước cơ sở là đúng vì $f_0 = 0$ là chẵn, $f_1 = 1$ là lẻ. Bây giờ giả sử rằng nếu $k \leq n$ thì f_k là chẵn nếu $k \equiv 0 \pmod 3$ còn không thì là lẻ. Bây giờ giả sử $n + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Khi đó $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ là chẵn vì f_n và f_{n-1} đều là lẻ. Nếu $n + 1 \equiv 1 \pmod 3$. Khi đó $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ là lẻ vì f_n là chẵn và f_{n-1} là lẻ. Cuối cùng, nếu $n + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Khi đó $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ là lẻ vì f_n là lẻ và f_{n-1} là chẵn. Điều này kết thúc cách chứng minh quy nạp.

23. Gọi $P(n)$ là "$f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} = f_{n+k+1}$ với mọi số k nguyên không âm". Bước cơ sở sẽ chỉ ra $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. $P(0)$ là đúng vì $f_k f_o + f_{k+1} f_1 = f_k 0 + f_{k+1} 1 = f_{k+1}$. Vì $f_k f_1 + f_{k+1} f_2 = f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$ vậy $P(1)$ đúng. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó theo giả thiết quy nạp và định nghĩa hồi quy của các số Fibonacci ta suy ra $f_k f_{n+1} + f_{k+1} f_{n+2} = f_k(f_{n-1} + f_n) + f_{k+1}(f_n + f_{n+1}) = (f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n) + (f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1}) = f_{n-1+k+1} + f_{n+k+1} = f_{n+k+2}$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

25. Gọi $P(n)$ là "$l_o^2 + l_1^2 + ... + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$". *Bước cơ sở :* $P(0)$, $P(1)$ là đúng vì $l_o^2 = 2^2 = 2.1 + 2 = l_o l_1 + 2$ và $l_o^2 + l_1^2 = 2^2 + 1^2 = 1.3 + 2 = l_1 l_3 + 2$. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó theo giả thiết quy nạp $l_o^2 + l_1^2 + ... + l_n^2 + l_{n+1}^2 = l_n l_{n+1} + 2 + l_{n+1}^2 = l_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + 2 = l_{n+1} l_{n+2} + 2$. Vậy $P(n + 1)$ đúng.

27. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "đẳng thức trên đúng với mọi n nguyên". Bước cơ sở $P(1)$ hiển nhiên đúng. Giả sử $P(n)$ đúng. Khi đó $\cos(n + 1)x + i\sin(n + 1)x = \cos(nx + x)\, i\sin(nx + x) = \cos nx\cos x - \sin nx\sin x + i(\sin nx\cos x + \cos nx\sin x) = (\cos nx + i\sin nx)(\cos x + i\sin x) = (\cos x + i\sin x)^n(\cos x + i\sin x) = (\cos x + i\sin x)^{n+1}$. Điều đó chứng tỏ $P(n + 1)$ đúng.

29. a) 92 b) 91 c) 91 d) 91 e) 91 f) 91.

31. Bước cơ sở là sai vì tổng đã cho chỉ có với $n \neq 1$

33. Gọi $P(n)$ là "mặt phẳng được chia thành $n^2 - n + 2$ miền bằng n đường tròn nếu mọi cặp đường tròn có hai điểm chung, nhưng không có ba đường tròn nào có ba điểm chung". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì một đường tròn chia mặt phẳng thành $2 = 1^2 - 1 + 2$ miền. Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là n đường tròn chia mặt phẳng thành $n^2 - n + 2$ miền. Vòng tròn thứ $(n + 1)$ cắt mỗi một trong n vòng tròn kia ở 2 điểm, các giao điểm này sẽ tạo ra $2n$ cung mới. Mỗi cung này chia miền cũ thành 2 miền. Vì thế có $2n$ miền cũ được chia đôi, hay khi thêm vòng tròn thứ $(n + 1)$ đã làm tăng thêm $2n$ miền. Khi đó ta có $n^2 - n + 2 + 2n = (n^2 + 2n + 1) - (n + 1) + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$ miền.

35. Giả sử $\sqrt{2}$ là hữu tỷ. Khi đó $\sqrt{2} = a/b$, với a,b là các số nguyên dương. Từ đó suy ra tập $S = \{n\sqrt{2} \mid n \in N\} \cap N$ là một tập các số nguyên dương và không rỗng vì $b\sqrt{2} = a$ thuộc S. Giả sử r là phần tử nhỏ nhất của S, nó tồn tại do tính được sắp. Khi đó $r = s\sqrt{2}$ với số dương s nào đó. Ta có $r - s = s\sqrt{2} - s = s(\sqrt{2} - 1)$ là một số nguyên dương vì $\sqrt{2} > 1$. Vì thế $r - s$ thuộc S. Điều này vô lý vì $r - s = s\sqrt{2} - s < s$. Vậy $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ.

37. Giả sử tính được sắp tốt là sai. Gọi S là tập không rỗng các số nguyên không âm và nó không có phần tử nhỏ nhất. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$i \notin S$, $i = 0, 1, 2, ..., n$". $P(0)$ là đúng vì nếu $0 \notin S$ thì S có phần tử nhỏ nhất, cụ thể là 0. Bây giờ $P(n)$ đúng. Khi đó $0 \notin S$, $1 \notin S$, ..., $n \notin S$. Rõ ràng $(n + 1)$ không thể thuộc S vì nếu nó thuộc S thì nó phải là phần tử nhỏ nhất của S. Vậy $P(n + 1)$ là đúng. Theo nguyên lý quy nạp toán học, $n \notin S$ với mọi số nguyên dương n. Tức là $S = \varnothing$ là mâu thuẫn.

39. a) Gọi d = UCLN($a_1, a_2, ..., a_n$). Khi đó d là ước số của mọi a_i và nó cũng là ước của UCLN(a_{n-1}, a_n). Vì thế d là ước chung của $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$ và UCLN(a_{n-1}, a_n). Để chứng minh d là UCLN của các số này, ta giả sử c là ước chung của chúng. Khi đó c là ước của a_i, $i = 1, 2, ..., n - 2$ và của UCLN(a_{n-1}, a_n), tức là nó cũng là ước của a_{n-1} và a_n. Vì thế c là ước chung của $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$. Vì thế nó là ước của d hay d là UCLN của $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$ và UCLN(a_{n-1}, a_n).

b) Nếu $n=2$ áp dụng thuật toán Euclid. Nếu $n \neq 2$ áp dụng thuật toán Euclid cho a_{n-1} và a_n, nhận được d = UCLN(a_{n-1}, a_n) và khi đó áp dụng thuật toán này theo kiểu đệ quy với $a_1, a_2, ..., a_{n-2}, d$.

41. $f(n) = n^2$. Gọi $P(n)$ là "$f(n) = n^2$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $f(1) = 1 = 1^2$, theo định nghĩa của hàm f. *Bước quy nạp* : Giả sử $f(n) = n^2$. Khi đó $f(n + 1) = f((n + 1) - 1) + 2(n + 1) - 1 = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

43. a) λ, 0, 1, 00, 01, 11, 000, 001, 011, 111, 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 00000, 00001, 00011, 00111, 01111, 11111.

b) $S = \{\alpha, \beta \mid \alpha$ là xâu m số 0 và β là xâu n số 1, $m \geq 0$, $n \geq 0\}$

45. λ, (), (()), ()()

47. a) 0, b) -2 c) 2, d) 0

49.
```
procedure generate (n : nguyên không âm)
if n là lẻ then
begin
    S := S(n - 1)
    T := T(n - 1)
end
else    if n=0 then
        begin
            S := ∅
            T := {λ} ;
        end
        else
        begin
            T1 := T(n - 2)
            S1 := S(n - 2) ;
            T := T1 ∪ {(x) | x ∈ T1 ∪ S1 và l(x) = n - 2}
            S := S1 ∪ {xy | x ∈ T1 và y ∈ T1 ∪ S1 và l(xy) = n}
    end {T ∪ S là tập các xâu cân bằng có độ dài nhiều nhất bằng n}
```

51. Nếu ban đầu $x \leq y$, $x := y$ là không được thi hành, vì thế khẳng định cuối $x \leq y$ là đúng. Nếu ban đầu $x > y$, $x := y$ là được thi hành, vì thế khẳng định cuối $x \leq y$ là đúng.

CHƯƠNG 4

Tiết 4.1

1. a) 5850 b) 343
3. a) 4^{10} b) 5^{10}
5. 42
7. 26^3
9. 676
11. 2^8
13. $n + 1$ (tính cả xâu rỗng)
15. 475255 (tính cả xâu rỗng)
17. a) 128 b) 450 c) 9 d) 675
    e) 450 f) 450 g) 225 h) 75
19. a) 990 b) 500 c) 27
21. 3^{50}
23. 52 457 600
25. 20 077 200
27. a) 0 b) 120 c) 720 d) 2520
29. a) 2 nếu $n = 1$, 2 nếu $n = 2$, 0 nếu $n \geq 3$
    b) 2^{n-2} với $n > 1$; 1 nếu $n = 1$
    c) $2(n - 1)$
31. $(n + 1)^m$
33. Nếu n chẵn $2^{n/2}$; nếu lẻ $2^{(n+1)/2}$
35. a) 240 b) 480 c) 360
37. 352
39. 147
41. 33
43. 7 104 000 000 000
45. 18
47. 17
49. Gọi $P(m)$ là quy tắc cộng với m công việc. Trường hợp cơ sở ta lấy $m=2$. Đó chính là quy tắc cộng cho 2 việc. Bây giờ giả sử $P(m)$ là đúng. Xét $n + 1$ việc T_1, T_2, ..., T_m, T_{m+1} có thể được thực hiện tương ứng bằng n_1, n_2, ..., n_m, n_{m+1} cách sao cho không có hai cách nào có thể được làm đồng thời. Để thực hiện một trong những cách này, ta có thể làm một trong m cách đầu tiên hoặc làm công việc T_{m+1} Theo quy tắc cộng với 2 việc, số cách làm $m + 1$ việc sẽ bằng tổng các cách làm m việc đầu

tiên với n_{m+1} Theo giả thiết quy nạp số cách làm m việc là $n_1 + n_2 + \dots + n_m$. Vậy số cách làm $m + 1$ việc sẽ là $n_1 + n_2 + \dots + n_m + n_{m+1}$

51. $n(n - 3)/2$

Tiết 4.2

1. Vì có 6 lớp mà mỗi tuần lễ chỉ học 5 ngày, theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai lớp gặp nhau cùng một ngày.

3. 13

5. Gọi $a, a+1, \dots, a + n - 1$ là dãy n số nguyên liên tiếp. Khi đó các số nguyên $(a + i)$ mod n, $i = 0, 1, 2, \dots n - 1$ là khác nhau từng đôi một, vì $0 < (a + j) - (a + k) < n$ với mọi $0 \leq k < j \leq n - 1$ Vì có n giá trị có thể $(a + i)$ mod n, và trong tập này có n số nguyên khác nhau, nên mỗi một trong các số này xuất hiện đúng một lần. Từ đó suy ra trong dãy n số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho n.

7. 4951

9. Điểm giữa của đoạn nối các điểm (a, b, c) và (d, e, f) là $((a + d)/2, (b + e)/2, (c + f)/2)$. Các toạ độ của điểm giữa này là nguyên nếu và chỉ nếu a và d cùng tính chẵn lẻ, b và e cùng tính chẵn lẻ, c và f cùng tính chẵn lẻ. Vì có 8 bộ ba chẵn lẻ khác nhau (chẳng hạn (chẵn, lẻ, chẵn)), theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 9 điểm có cùng bộ ba chẵn lẻ như nhau. Điểm giữa của cặp điểm này có toạ độ nguyên.

11. a) Chia tám số nguyên đầu tiên thành 4 cặp có tổng bằng 9 như sau : {1,8}, {2,7}, {3,6} và {4,5}. Nếu ta lấy 5 số bất kỳ trong 8 số này theo nguyên lý Dirichlet ít nhất có 2 số thuộc cùng một cặp. Tổng hai số đó bằng 9. Đó là điều cần chứng minh.

b) Không. Lấy {1, 2, 3, 4} làm ví dụ.

13. 21 251

15. Gọi d_j là $jx - N(jx)$ trong đó $N(jx)$ là số nguyên gần jx nhất với $1 \leq j \leq n$. Mỗi d_j là một số vô tỷ giữa - 1/2 và 1/2. Chúng ta giả sử rằng n là số chẵn, trường hợp n lẽ sẽ ... Xét n khoảng $\{x \mid j/n < x < (j + 1)/n\}$, $\{x \mid -(j + 1)/n < x < -j/n\}$ với $j = 0, 1, \dots (n/2) - 1$. Nếu d_j thuộc vào khoảng $\{x \mid 0 < x < 1/n\}$ hoặc khoảng $\{x \mid -1/n < x < 0\}$ với một vài j thì đó là điều cần chứng minh. Nếu không như vậy thì vì có $n - 2$ khoảng và n số d_j nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất một khoảng $\{x \mid (k - 1)/n < x < k/n\}$ chứa d_r và d_s với $r < s$. Ta chỉ còn phải chỉ ra rằng $(s - r)x$ là nằm bên trong phạm vi $1/n$ kể từ số nguyên gần nhất của nó.

17. 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13

19. **procedure** *long* $(a_1, \dots a_n$: nguyên dương)

```
{Đầu tiên tìm dãy con tăng dài nhất}
max := 0, set := 00 ... 00 {n bit}
for i := 1 to 2^n
begin
    last := 0
    count := 0
    OK := True.
    for j := 1 to n
    begin
    if set(j) = 1 then
```

```
        begin
            if a_i > last then last := a_i
            count := count + 1
        end
        else
            OK := False
        end
        if count > max then
        begin
            max := count
            best := set
            end
        set := set + 1 (cộng nhị phân)
    end     {max x là độ dài và best chỉ dãy}
            {lặp cho dãy con giảm bằng cách thay a_i < last thay cho a_i > last
        và last := ∞ thay cho last := 0}
```

21. Do tính đối xứng ta chỉ cần chứng minh mệnh đề đầu tiên. Gọi A là một người nào đó trong nhóm 10 người. Hoặc là A có ít nhất 4 người bạn hoặc là A có ít nhất 6 kẻ thù trong số 9 người kia (vì $3 + 5 < 9$). Trong trường hợp đầu ta giả sử rằng B,C,D và E là bạn của A. Nếu 2 người bất kỳ trong những người này là bạn của nhau thì ta đã tìm được ba người là bạn của nhau. Ngược lại, cả bốn người này không ai là bạn của ai, tức là ta có tập 4 người là kẻ thù lẫn nhau. Trong trường hợp thứ hai, ta giả sử $\{B,C,D,E,F,G\}$ là tập những kẻ thù của A. Thao ví dụ 11, trong tập này hoặc có 3 người là bạn lẫn nhau, hoặc ba người là kẻ thù lẫn nhau và cùng với A lập thành tập 4 người là kẻ thù của nhau.

23. Có tất cả 6 432 816 khả năng cho 3 chữ viết tắt họ tên và ngày sinh. Vì thế, theo nguyên lý Dirichlet tổng quát có ít nhất $\lceil 25\ 000\ 000/6\ 432\ 816 \rceil = 4$ người có cùng họ tên viết tắt và cùng ngày sinh.

25. 18

27. Vì có tất cả 6 máy tính, nên số các máy tính kết nối với một máy là một số nguyên nằm giữa 0 và 5. Nhưng 0 và 5 không thể đồng thời xảy ra. Thật vậy, nếu một máy tính không nối với máy nào thì tất cả các máy còn lại chỉ có thể nối với nhiều nhất là 4 máy khác, và nếu có một máy nối với 5 máy thì có nghĩa là không có máy nào cô lập. Theo nguyên lý Dirichlet vì có nhiều nhất 5 khả năng cho số các máy kết nối với một máy, nên có ít nhất 2 trong 6 máy có số máy kết nối với chúng bằng nhau.

29. Gọi a_i là số trận đấu thực hiện trong giờ i. Khi đó $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{75} \leq 125$. Ta cũng có : $25 \leq a_1 + 24 < a_2 + 24 < \ldots < a_{75} + 24 \leq 149$. Có 150 số a_1, $a_2 \ldots a_{75}$, $a_1 + 24$, $a_2 + 24$, $\ldots$ $a_{75} + 24$. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 số bằng nhau. Vì tất cả các a_i là khác nhau, và tất cả các $a_i + 24$ là khác nhau, nên suy ra $a_i = a_j + 24$ với $i > j$. Vậy trong khoảng thời gian từ giờ thứ $(j + 1)$ tới giờ thứ i có đúng 24 trận.

31. Dùng nguyên lý Dirichlet tổng quát đặt S vật $f(s)$ với $s \in S$ vào T hộp, mỗi hộp một vật.

33. a) Nếu trong lớp có ít hơn 9 sinh viên năm thứ nhất, ít hơn 9 sinh viên năm thứ hai và ít hơn 9 học sinh lớp 12 thì cả lớp có nhiều nhất 24 sinh viên, điều này trái với giả thiết lớp có 25 sinh viên.

b) Nếu trong lớp có ít hơn 3 sinh viên năm thứ nhất, ít hơn 9 sinh viên năm thứ hai và ít hơn 5 học sinh lớp 12 thì khi đó nhiều nhất 2 sinh viên năm thứ nhất, nhiều nhất 19 sinh viên năm thứ hai và nhiều nhất 4 học sinh lớp 12 và do vậy cả lớp có nhiều nhất 24 sinh viên, điều này trái với giả thiết lớp có 25 sinh viên.

35. a) Giả sử rằng $i_k \leq n$ với mọi k. Khi đó thao nguyên lý Dirichlat tổng quát có ít nhất $\lceil (n^2 + 1)/n \rceil = n + 1$ số $i_1, i_2, \ldots, i_{n^2+1}$ bằng nhau.

b) Nếu $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$ khi đó dãy con chứa a_{k_j} và tiếp ssu là dãy con tăng độ dài $i_{k_{j+1}}$ bắt đầu bằng $a_{k_{j+1}}$ mâu thuẫn với đẳng thức $i_{k_j} = i_{k_{j+1}}$. Vì thế $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$.

c) Nếu không có dãy con tăng với độ dài lớn hơn n khi đó áp dụng phần a) và b). Do đó chúng ta có $a_{k_{n+1}} > a_{k_n} > \ldots > a_{k_2} > a_{k_1}$ là dãy con giảm độ dài $n + 1$.

Tiết 4.3

1. abc, acb, bac, bca, cab, cba.

3. 720

5. a) 120 b) 720 c) 8
d) 6720 e) 40 320 f) 3 626 800

7. 15 120

9. 1320

11. $2(n!)^2$

13. 65 780

15. $2^{100} - 5051$

17. a) 94 109 400 b) 941 094 c) 3 764 376 d) 90 345 024
e) 114 072 f) 2328 g) 24 h) 79 727 040
i) 3 764 376 j) 109 440

19. a) 12 650 b) 303 600

21. 18 915

23. a) 122 523 030 b) 72 930 375
c) 223 149 655 d) 100 626 625

25. 54 600

27. 45

29. 912

31. 11 232 000

33. $C(n+1,k) = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \dfrac{(n+1)}{k}\,\dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = (n+1)C(n,k-1)/k$

Đẳng thức này cùng với $C(n,0)=1$ cho ta định nghĩa truy hồi.

35. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

37. 101

39. $-2^{10}\,C(19,9) = -94\ 595\ 072$

41. $-2^{101}3^{99}C(200, 99)$

43. $(-1)^{(200-k)/3}C(100,(200-k)/3)$ nếu $k \equiv 2 \pmod 3$ và $-100 \leq k \leq 200$; các hệ số khác bằng 0.

45. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

47. $C(n, k-1) + C(n, k) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C(n+1,k)$

49. a) $C(n + r + 1, r)$ là số cách chọn dãy r số 0 và $n + 1$ số 1 bằng cách chọn r vị trí cho các số 0. Luân phiên giả sử là số hạng thứ $(l + 1)$ là số hạng cuối cùng bằng 1, sao cho $n \leq l \leq n + r$. Một khi ta xác định được vị trí của số 1 cuối cùng chúng ta sẽ quyết định được việt đặt các số 0 trong l chỗ trước số 1 cuối cùng. Trong dãy này có n số 1 và $l - n$ số 0. Theo quy tắc cộng ta suy ra có $\sum_{j=n}^{n+r} C(l, l-n) = \sum_{k=0}^{r} C(n+k,k)$ cách thực hiện điều đó.

b) Gọi $P(r)$ là mệnh đề cần chứng minh. Bước cơ sở là đẳng thức $C(n,0) = C(n + 1,0)$ vì cả hai vế đều bằng 1. Giả sử $P(r)$ là đúng. Khi đó,

$$\sum_{k=0}^{r+1} C(n+k,k) = \sum_{k=0}^{r} C(n+k,k) + C(n+r+1,r+1)$$
$$= C(n + r + 1, r) + C(n + r + 1, r + 1) = C(n + r + 2r + 1)$$

Đó là điều cần chứng minh.

51. Ta có thể chọn đầu tiên là chủ tịch hội đồng bằng n cách khác nhau. Khi đó có thể chọn các thành viên của hội đồng bằng 2^{n-1} cách. Vì thế có $n2^{n-1}$ cách chọn hội đồng và chủ tịch hội đồng. Trong khi đó số các cách chọn hội đồng gồm k người là $C(n,k)$. Khi ta chọn được hội đồng k thành viên, ta có k cách chọn chủ tịch. Vì vậy có $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$ cách chọn hội đồng và chủ tịch của hội đồng. Kết hợp lại ta có đẳng thức cần chứng minh.

52. Giả sử tập hợp có n phần tử. Thao định lý 7 ta có :
$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \ldots + (-1)^n C(n, n) = 0$
Từ đó suy ra : $C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \ldots = C(n, 1) + C(n, 3) + C(n, 5) + \ldots$
Vế trái là số các tập con có số các phần tử là số chẵn, còn vế phái là số các tập con có số các phần tử là số lá.

55. a) Đường đi trong bài toán gồm m dịch chuyển sang phải và n dịch chuyển lên trên. Mỗi đường đi như thế có thể biểu diễn bằng dãy nhị phân độ dài $m + n$ với m số 0 và n số 1, trong đó 0 biểu thị dịch chuyển sang phải và 1 biểu thị dịch chuyển lên trên.

b) Số các xâu nhị phân dài $(m + n)$ bit chứa đúng n số 1 là $C(m + n, n) = C(m + n, m)$ vì xâu đó được xác định bằng cách chỉ ra vị trí của n số 1 hay m số 0.

57. Theo Bài tập 55 số đường đi dài n là 2^n, bằng số các xâu nhị phân dài n. Mặt khác một đường đi độ dài n (có kiểu như trong Bài 55) phải kết thúc ở điểm có tổng các toạ độ của nó bằng n, cụ thể là $(n - k, k)$ với k là số nguyên sao cho $0 \leq k \leq n$. Theo Bài 55 số các đường đi như vậy mà kết thúc ở điểm $(n - k, k)$ là $C(n - k + k, k) = C(n, k)$. Vì vậy ta có : $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

59. Theo Bài tập 55, số các đường từ (0, 0) tới $(n + 1, r)$ có dạng như trong Bài tập này là $C(n + r + 1, r)$. Nhưng đường đi như thế bắt đầu bằng cách đi l bước theo phương thẳng đứng với $0 \leq l \leq r$. Số các đường đi như thế bằng số các đường đi như trong Bài 55 từ $(1, l)$ tới $(n + 1, r)$. Và số này bằng số các đường đi từ (0,0) tới $(n, r - l)$ hay là $C(n + r - l, r - l)$. Vì $\sum_{j=0}^{r} C(n+r-l, r-l) = \sum_{k=0}^{r} C(n+k, k)$

từ đó suy ra : $\sum_{k=1}^{r} C(n+k,k) = C(n+r+1,r)$

Tiết 4.4

1. 1/13
3. 1/2
5. 1/2
7. 1/64
9. 47/52
11. $1/C(52,\ 5)$
13. $1 - (C(48,\ 5)/C(52,\ 5))$
15. $C(13,\ 2)C(4,\ 2)C(4,\ 2)C(44,\ 1)/C(52,\ 5)$
17. $10\,240/C(52,\ 5)$
19. $1\,302\,540/C(52,5)$
21. 1/64
23. 8/25
25. a) $1/C(50,6) = 1/15\,890\,700$ b) $1/C(52,6) = 1/20\,358\,520$
    c) $1/C(56,6) = 1/32\,468\,436$ d) $1/C(60,6) = 1/50\,063\,860$
27. a) 139 128/319 865 b) 212 667/511 313
    c) 151 340/368 529 d) 163 647/446 276
29. $1/C(100,\ 8)$
31. a) 9/19 b) 81/361 c) 1/19
    d) 1 889 568/2 478 099 e) 48/361
33. Ba con súc sắc

Tiết 4.5

1. 243
3. 26^6
5. 125
7. 35
9. a) 1716 b) 50 388 c) 2 629 575
   d) 330 e) 9 724
11. 9
13. 4 504 501
15. a) 10 626 b) 1365
    c) 11 649 d) 106
17. 2520
19. 302 702 400
21. 30 492

23. $C(59,50)$

25. 35

27. 83 160

29. 63

31. 19 635

33. 210

35. 27 720

37. $52!/(7!^5\ 17!)$

39. $24.13^4/(52.51.50.49)$

41. a) $C(k + n - 1, n)$ b) $(k + n - 1)!/(k - 1)!$

43. Có $C(n, n_1)$ cách chọn n_1 vật cho hộp đầu tiên. Một khi các vật này đã được chọn ta có $C(n - n_1, n_2)$ cách chọn vật cho hộp thứ hai. Tương tự có $C(n - n_1 - n_2, n_3)$ cách chọn n_3 vật cho hộp thứ ba. Tiếp tục như thế cho tới khi ta có $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k) = C(n_k, n_k) = 1$ cách chọn các vật cho hộp cuối cùng (vì $n_1 + \ldots + n_k = n$). Theo quy tắc tích, số các cách tất cả các vật sẽ là $C(n, n_1)\ C(n - n_1, n_2) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$ tức là bằng $n!/(n_1!n_2!\ldots n_k!)$.

45. a) Vì $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_r$ ta suy ra $x_1 + 0 < x_2 + 1 < \ldots < x_r + r - 1$. Vì $1 \leqslant x_i \leqslant n + r - 1$, dãy này được tạo bởi r phần tử khác nhau của T.

b) Giả sử $1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_r \leqslant n + r - 1$. Gọi $y_k = x_k - (k-1)$. Khi đó có thể chỉ ra rằng $y_k \leqslant y_{k+1}$ với $k = 1,2,\ldots,r - 1$ và $1 \leqslant y_k \leqslant n$ với $k = 1,2, \ldots, r$. Từ đó suy ra $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ là tổ hợp có lặp của S.

c) Từ (a) và (b) suy ra có phép tương ứng một - một giữa tổ hợp có lặp của r phần tử của tập S và tổ hợp chập r của T, một tập có $n + r - 1$ phần tử. Vậy có $C(n + r - 1, r)$ tổ hợp có lặp chập r từ S.

47. 5

49. Các số hạng trong khai triển có dạng $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$, trong đó $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Số hạng như thế xuất hiện từ việc chọn n_1 nhân tử x_1, n_2 nhân tử x_2, $\ldots$, n_m nhân tử x_m. Có thể thực hiện điều đó bằng $C(n; n_1, n_2, \ldots, n_m)$ cách, vì một cách chọn là hoán vị của n_1 nhãn "1", n_2 nhãn "2",... và n_m nhãn "m".

51. 2520

Tiết 4.6

1. a) 2134 b) 54132 c) 12534
d) 45312 e) 6714253 f) 31542676

3. 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

5. {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,4,5}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,4,5}, {3,4,5}.

7. Xâu nhị phân biểu diễn tổ hợp chập r liền sau cần phải khác xâu nhị phân biểu diễn tổ hợp xuất phát tại ví trí thứ i vì tại các vị trí $i + 1, \ldots, r$ là các số lớn nhất có thể có được. Và $a_i + 1$ là số nhỏ nhất mà ta có thể đặt vào vị trí thứ i nếu ta muốn có tổ hợp lớn hơn tổ hợp xuất phát. Khi đó $a_i + 2, \ldots, a_i + r + i + 1$ là các số nhỏ nhất có thể có tại các vị trí $i + 1$ tới r. Như vậy ta đã tạo ra tổ hợp chập r liền sau.

9. 123, 132, 213, 231, 312, 321, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 125, 152, 215, 251, 512, 521, 134, 143, 314, 341, 413, 431, 135, 153, 315, 351, 513, 531, 145, 154, 415, 451, 514, 541, 234, 243, 324, 342, 423, 432, 235, 253, 325, 352, 523, 532, 245, 254, 425, 452, 524, 542, 345, 354, 435, 453, 534, 543.

11. Ta sẽ chứng minh nó là song ánh bằng cách chỉ ra nó có ngược. Cho số nguyên dương nhỏ hơn $n!$, gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ là các số Cantor của nó. Đặt n vào vị trí $n - a_{n-1}$ vì rõ ràng a_{n-1} là số các số nguyên nhỏ hơn n và đứng sau trong hoán vị. Sau đó đặt $(n - 1)$ vào vị trí còn trống thứ $(n - 1) - a_{n-2}$, trong đó ta đánh số các vị trí còn trống theo thứ tự 1, 2, ..., n - 1. Cứ tiếp tục quá trình này cho tới khi 1 được đặt vào vị trí trống cuối cùng. Vì chúng ta đã xây dựng được ánh xạ ngược nên phép tương ứng đã cho là song ánh.

13. **procedure** *Cantor permutation* (n, i : các số nguyên với $n \geq 1$ và $0 \leq i < n!$)

```
x := n
for j := 1 to n
    p_j := 0
for k := 1 to n - 1
begin
    c := ⌊x/(n - k)!⌋
    x := x - c(n - k)!
    h := n
    while p_h ≠ 0
        h := h - 1
    for j := 1 to c
    begin
        h := h - 1
        while p_h≠0
            h := h - 1
    end
    h := 1
    while p_h ≠ 0
        h := h + 1
    p_h := 1
{p_1p_2...p_n là hoán vị tương ứng với i}
```

Bài tập bổ sung

1. a) 151200 b) 1000000
   c) 210 d) 5005

3. 3^{100}

5. 24600

7. a) 4060 b) 2688 c) 25009600

9. a) 192 b) 301 c) 300 d) 300

11. 639

13. Tổng lớn nhất có thể là 240 và tổng nhỏ nhất có thể 15. Vì thế số các tổng có thể là 226. Vì có 252 tập con 5 phần tử của tập 10 phần tử, theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra ít nhất có hai tập có tổng như nhau.

13. a) 50 b) 50 c) 14 d) 5

14. Gọi $a_1a_2...a_m$ là các số nguyên và gọi $d_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. Nếu $d_i \equiv 0 \pmod{m}$ với một i nào đó, bài toán được chứng minh. Ngược lại d_1 **mod** m, ... d_m **mod** m là m số nguyên có giá trị thuộc $\{1, 2, ..., m - 1\}$. Theo nguyên lý Dirichlet $d_k = d_l$ với k, l nào đó $1 \leqslant k < l \leqslant m$. Khi đó $\sum_{j=k+1}^{l} a_j = d_l - d_k \equiv 0 \pmod{m}$.

19. Có thể nhận được biểu diễn thập phân của một số hữu tỷ a/b bằng cách chia a cho b trong đó a được viết dưới dấu phẩy thập phân và theo sau là một dãy dài tùy ý các số 0. Bước cơ sở là tìm chữ số tiếp theo của thương, tức là $\lfloor r/b \rfloor$, trong đó r là số dư cùng với chữ số tiếp theo của số bị chia được hạ xuống. Số dư hiện thời nhận được từ số dư ở bước trước bằng cách trừ đi b lần chữ số của thương ở bước trước. Cuối cùng, số bị chia không còn mà chỉ có số 0 được hạ xuống. Hơn nữa, số dư chỉ có thể nhận nhiều nhất b giá trị. Như vậy, theo nguyên lý Dirichlet, đến một lúc nào đó chúng ta sẽ có một tình trạng giống như đã có. Từ điểm này về sau, việc tính toán được tiến hành hoàn toàn như trước, tức là thương sẽ lặp lại.

21. a) 125 970 b) 20 c) 141 120 525
d) 141 120 505 e) 177 100 f) 141 078 021

23. $4^{13}/C(52,13)$

25. a) 10 b) 8 c) 7

27. Số cách chọn r phần tử từ tập n phần tử chính bằng số cách quyết định xem không chọn $n - r$ phần tử nào.

29. $C(n+2, r+1) = C(n + 1, r + 1) + C(n + 1, r) = 2C(n + 1, r+1) - C(n + 1, r + 1) + C(n + 1, r)$

$$= 2C(n + 1, r + 1) - (C(n, r+1)) + C(n,r) + (C(n, r) + C(n, r - 1))$$
$$= 2C(n + 1, r + 1) - C(n, r + 1) + C(n, r - 1).$$

31. Theo định lý nhị thức, $3^n = (2 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$

32. $C(n + 1,5)$

35. a) $1/C(52,13)$ b) $4/C(52,13)$ c) $2\,944\,656/C(52, 13)$
d) $35\,335\,872/C(52,13)$ e) $1\,244\,117\,160/C(52,13)$ f) $29\,858\,811\,840/C(52,13)$

37. 5^{24}

39. a) 45 b) 57 c) 12

41. a) 386 b) 56 c) 512

43. 0 nếu $n < m$; $C(n - 1, n - m)$ nếu $n \geqslant m$.

45. **procedure** *next permutation* (n : nguyên dương, $a_1a_2...a_r$: nguyên dương không vượt quá n và $a_1a_2...a_r \neq nn...n$) ;

```
i := r
while a_i = n
begin
    a_i = 1
    i := i - 1
end
a_i := a_i + 1
{a_1a_2...a_r là hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển}.
```

CHƯƠNG 5

Tiết 5.1

1. a) 2, 12, 72, 432, 2592 b) 2, 4, 16, 256, 65 536

c) 1, 2, 5, 11, 26 d) 1, 1, 0, 1, 3

3. a) Có b) Không

c) Không d) Có e) Có

f) Có g) Không h) không

5. a) $a_n = 2 \cdot 3^n$ b) $a_n = 2n+3$

c) $a_n = 1+n(n+1)/2$ d) $a_n = n^2+4n+4$

e) $a_n = 1$ f) $a_n = (3^{n+1}-1)/2$

g) $a_n = 5n!$ h) $a_n = 2^n n!$

7. a) $a_n = 3a_{n-1}$ b) 5 904 900

9. a) $a_n = n+a_{n-1}$, $a_o = 0$ b) $a_{12} = 78$

c) $a_n = n(n+1)/2$

11. Gọi $P(n)$ là "$H_n=2^n-1$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $H_1=1$. *Bước quy nạp* : Giả sử $H_n = 2^n-1$. Khi đó vì $H_{n+1} = 2H_n+1$ ta suy ra $H_{n+1} = 2(2^n-1)+1 = 2^{n+1} - 1$.

13. a) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-5}$ với $n \geqslant 5$

b) $a_o = 1$, $a_1 = 2$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$.

c) 1217

15. 9494

17. a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ với $n \geqslant 2$

b) $a_o = 0$, $a_1 = 0$

c) 94

19. a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ với $n \geqslant 3$.

b) $a_o = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

c) 81

21. a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$

b) $a_o = 1$, $a_1 = 1$

c) 34

23. a) $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$

b) $a_o = 1$, $a_1 = 3$

c) 448

25. a) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$

b) $a_o = 1$, $a_1 = 3$

c) 239

27. a) $a_n = 2a_{n-1}$ với $n \geq 2$ b) $a_1 = 3$
c) 96

29. a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 2$
b) $a_0 = 1, a_1 = 1$ c) 89

31. a) $R_n = n + R_{n-1}$, $R_0 = 1$
b) $R_n = n(n+1)/2 + 1$

33. a) $S_n = S_{n-1} + (n^2-n+2)/2$, $S_0 = 1$;
b) $S_n=(n^3+5n+6)/6$

35. 64

37. a) $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$
b) $a_0 = 1$ $a_1 = 3$
c) 1224

39. Rõ ràng $S(m,1) = 1$ với $m \geq 1$. Nếu $m \geq n$, khi đó một hàm từ tập m phần tử tới tập n phần tử mà không là toàn ánh, sẽ là hàm toàn ánh từ tập m phần tử lên tập k phần tử của tập n phần tử xuất phát, với $1 \leq k \leq n-1$. Ta có $S(m,k)$ hàm toàn ánh từ tập m phần tử lên tập k phần tử. Nhưng ta cũng có $C(n,k)$ tập hợp k phần tử của tập n phần tử. Vậy số các hàm toàn ánh từ tập m phần tử lên các tập con k phần tử của tập n phần tử là $C(n,k)\,S(m,k)$. Vì thế có tất cả $\sum_{k=1}^{n-1} C(n,k)S(m,k)$ hàm từ tập m phần tử tới tập n phần tử mà không là hàm toàn ánh. Nhưng ta có tết cả n^m hàm từ tập m phần tử tới tập n phần tử, vì thế

$$S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n,k)S(m,k).$$

41. a) 0 b) 0 c) 2 d) $2^{n-1}-2^{n-2}$

42. $a_n-2\nabla a_n + \nabla^2 a_n = a_n-2(a_n-a_{n-1})+(\nabla a_n - \nabla a_{n-1}) = -a_n+2a_{n-1} + ((a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})) = -a_n + 2a_{n-1} + (a_n-2a_{n-1}-a_{n-2}) = a_{n-2}$

45. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_n - \nabla a_n) + (a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n) = 2a_n - 3\nabla a_n + \nabla^2 a_n$
hoặc $a_n = 3\nabla a_n - \nabla^2 a_n$.

Tiết 5.2

1. a) Bậc 3 b) Không c) Bậc 4
d) Không e) Không f) Bậc 2

3. a) $a_n = 3.2^n$ b) $a_n = 2$ c) $a_n = 3.2^n-2.3^n$
d) $a_n = 6.2^n-2n.2^n$ e) $a_n = n(-2)^{n-1}$ f) $a_n = 2^n - (-2)^n$
g) $a_n = (1/2)^{n+1} - (-1/2)^{n+1}$

5. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

7. $(2^{n+1} + (-1)^2)/3$

9. a) $P_n = 1.2\,P_{n-1} + 0.45\,P_{n-2}$, $P_0 = 100\ 000$, $P_1 = 120\ 000$
b) $P_n = (250\ 000/3)(3/2)^n + (50\ 000/3)(-3/10)^n$.

11. a) *Bước cơ sở* : Với $n=1$ chúng ta có $1 = 0 + 1$ và với $n=2$ ta có $3 = 1+2$. *Bước quy nạp* : Giả sử đúng với $k \leq n$. Khi đó $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} = f_{n-1} + f_{n+1} + f_{n-2} + f_n = (f_{n-1} + f_{n-2}) + (f_{n+1} + f_n) = f_n + f_{n+2}$

b) $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

13. $a_n = 8(-1)^n - 3(-2)^n + 4.3^n$

15. $a_n = 5 + 3\ (-2)^n - 3^n$.

17. Gọi $a_n = C(n,0) + C(n-1,1) + \ldots + C(n-k,k)$ trong đó $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Trước tiên giả sử rằng n là chẵn, vì thế $k=n/2$ và số hạng cuối cùng là $C(k, k)$. Theo đồng nhất thức Pascal ta có $a_n = 1 + C(n-2,0)+C(n-2,1) + C(n-3,1)+C(n-3,2) + \ldots + C(n-k,k-2) + C(n-k,k-1) + 1 = 1 + C(n-2,1) + C(n-3,2) + \ldots + C(n-k,k-1) + C(n-2,0) + C(n-3,1) + \ldots + C(n-k,k-2) + 1 = a_{n-1} + a_{n-2}$ vì $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = k-1 = \lfloor (n-2)/2 \rfloor$. Khi n lẻ ta cũng tính toán tương tự như trên. Vì $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với mọi số nguyên dương n, $n \geq 2$. Cũng như vậy, $a_1 = C(1,0) = 1$ và $a_2 = C(2,0) + C(1,1) = 2$, chúng là f_2 và f_3. Ta suy ra $a_n = f_{n+1}$ với mọi n nguyên dương.

19. a) $3a_{n-1} + 2^n = 3(-2)^n + 2^n = 2^n(-3+1) = 2^{n+1} = a_n$.

b) $a_n = \alpha\ 3^n - 2^{n+1}$ c) $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

21. a) $A = -1$, $B = -7$ b) $a_n = \alpha\ 2^n - n - 7$

c) $a_n = 11.2^n - n - 7$

23. a) $1, -1, i, -i$

b) $a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{2+i}{4} i^n + \frac{2-i}{4}(-i)^n$

25. a) Dùng công thức cho f_n ta thấy $\left| f_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$

Điều này chứng tỏ f_n là số nguyên gần nhất với $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b) Nhỏ hơn khi n chẵn, lớn hơn khi n lẻ.

27. $a_n = f_{n-1} + 2f_n - 1$

29. a) $a_n = 3\ a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$

b) $(4^{n+1} + (-1)^n)/5$

Tiết 5.3

1. 14

3. Bước một là $(1110)_2(1010)_2 = (2^4 + 2^2)(11)_2(10)_2 + 2^2((11)_2 - (10)_2)((10)_2 - (10)_2) + (2^2 + 1)(10)_2.(10)_2$. Tích là : $(10001100)_2$.

5. $C = 50665C + 729 = 33979$

7. a) 2 b) 4 c) 7

9. a) 79 b) 48829 c) 30517579

11. $O(\log n)$

13. $O(n^{\log_3 2})$

15. 5

17. Với $k = log_b n$, ta suy ra $f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c(n/b^j)^d = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} cn^d = a^k f(1) + kcn^d$
$= a^{\log_b n} f(1) + c(\log_b n)n^d = n^{\log_b a} f(1) + cn^d \log_b n = n^d f(1) + cn^d \log_b n.$

19. Gọi $k = \log n$ với n là lũy thừa của b. Bước cơ sở : Nếu n=1 với $k = 0$ thì $c_1 n^d + c_2 n^d + c_2 n^{\log_b a} = c_1 + c_2 = b^d c/(b^d-a)+f(1)+b^d c/(a-b^d) = f(1)$. Bước quy nạp : Giả sử đúng với k, với $n = b^k$. Khi đó với $n = b^{k+1}$, $f(n) = af(n/b) + cn^d = a\{[b^d c/(b^d-a)](n/b)^d + [f(1) + b^d c/(a-b^d)].(n/b)^{\log_b a})\} + cn^d = b^d\ c/(b^d-a)n^d\ a/b^d + [f(1) + (b^d c/(a-b^d)]n^{\log_b a} + cn^d = n^d[ac/(b^d-a) + c(b^d-a)/(b^d-a)]+[f(1)+b^d c/(a-b^d c)]n^{\log_b a} = [(b^d c)/(b^d-a)]n^d + [f(1) + b^d c/(a-b^d)]\ n^{\log_b a}$

21. Nếu $a > b^d$, thì $\log_b a > d$, vì thế số hạng thứ hai sẽ trội hơn và $O(n^{\log_b a})$.

23. $O(n^{\log_4 5})$

25. $O(n^3)$

Tiết 5.4

1. a) 30 b) 29 c) 24 d) 18

3. 1%

5. a) 300 b) 150 c) 175 d) 100

7. 492

9. 974

11. 55

13. 248

15. 50,138

17. 234

19. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|-$
$|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_1 \cap A_4|-|A_1 \cap A_5|-|A_2 \cap A_3|-$
$|A_2 \cap A_4|-|A_2 \cap A_5|-|A_3 \cap A_4|-|A_3 \cap A_5|-|A_4 \cap A_5|+$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_2 \cap A_5|+|A_1 \cap A_2 \cap A_5|+$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_5|+|A_1 \cap A_4 \cap A_5|+|A_2 \cap A_3 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3 \cap A_5|+$
$|A_2 \cap A_4 \cap A_5|+|A_3 \cap A_4 \cap A_5|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|-$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5|-|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5|-|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|-$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$

21. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|+$
$|A_6|-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_1 \cap A_4|-|A_1 \cap A_5|-|A_1 \cap A_6|-$
$|A_2 \cap A_3|-|A_2 \cap A_4|-|A_2 \cap A_5|-|A_2 \cap A_6|-|A_3 \cap A_4|-$
$|A_3 \cap A_5|-|A_3 \cap A_6|-|A_4 \cap A_5|-|A_4 \cap A_6|-|A_5 \cap A_6|$

Bài tập bổ sung

1. a) $A_n = 4A_{n-1}$ b) $A_1 = 40$ c) $A_n = 10.4^n$

3. a) $M_n = M_{n-1} + 160000$ b) $M_1 = 186000$

c) $M_n = 160000n + 26000$ d) $T_n = T_{n-1} + 160000n + 26000$

e) $T_n = 80000n^2 + 160000n$

5. a) $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ b) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$

c) $a_{12} = 12$

7. a) 2 b) 5

c) 8 d) 16

9. $a_n = 2^n$

11. $a_n = \sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_1} \alpha_{kj} n^{j-1} r_k^n$ trong đó α_{kj} là các hằng số.

13. $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$

15. $O(n^4)$

17. $O(n)$

19. a) $18n + 18$ b) 18 c) 0

21. $\Delta(a_nb_n) = a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n = a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + b_n(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1}\Delta b_n + b_n\Delta a_n$

23. 7

25. 110

27. 0

29. a) 19 b) 65 c) 122

d) 167 e) 168

31. $D_{n-1}/(n-1)!$

33. 11/32

CHƯƠNG 6

Tiết 6.1

1. a) {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)}

   b) {(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)}

   c) {(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)}

   d) {(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,2), (3,0), (3,3), (4,0)} giả sử rằng 0 không chia hết cho 0

   e) {(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (4,3)}

   f) {(1,2), (2,1), (2,2)}

3. a) Bắc cầu
   b) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu
   c) Đối xứng
   d) Phản đối xứng
   e) Phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu
   f) Không có các tính chất đó

5. a) Đối xứng
   b) Đối xứng, bắc cầu
   c) Đối xứng
   d) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu
   e) Phản xạ, bắc cầu
   f) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu
   g) Phản đối xứng
   h) Phản đối xứng, bắc cầu

7. *(c)*, *(d)*, *(f)*

9. Có, ví dụ quan hệ {(1,1)} trên {1,2}

11. *(a)*

13. 2^{mn}

15. a) {(*a*,*b*) | *a* chia hết cho *b* } b) {(*a*,*b*) | *b* không chia hết cho *a* }

17. Đồ thị của f^{-1}

19. a) {(*a*,*b*) | *a* được yêu cầu phải đọc hoặc đã đọc *b* }

   b) {(*a*,*b*) | *a* được yêu cầu phải đọc và đã đọc *b* }

   c) {(*a*,*b*) | *a* được yêu cầu phải đọc *b* nhưng chưa đọc hoặc *a* đã đọc *b* nhưng không được yêu cầu phải đọc}.

   d) {(*a*,*b*) | *a* được yêu cầu phải đọc *b* nhưng chưa đọc nó }

   e) {(*a*,*b*) | *a* đã đọc *b* nhưng không được yêu cầu phải đọc nó}

21. $S \circ R$ = {(*a*,*b*) | *a* là bố hoặc mẹ của *b*}

   $R \circ S$ = {(*a*,*b*) | *a* là cô hoặc chú bác của *b*}

23. 8

25. a) $2^{n(n+1)/2}$
   b) $2^n 3^{n(n-1)/2}$
   c) $3^{n(n-1)/2}$
   d) $2^{n(n-1)}$
   e) $2^{n(n-1)/2}$
   f) $2^{n^2} - 2 \cdot 2^{n(n-1)}$

27. Không thể tồn tại một số *b* như vậy.

29. Nếu R là đối xứng và $(a,b) \in R$, thì $(b,a) \in R$, sao cho $(a,b) \in R^{-1}$. Do đó $R \subseteq R^{-1}$. Chứng minh tương tự $R^{-1} \subseteq R$. Suy ra $R = R^{-1}$. Ngược lại, nếu $R = R^{-1}$ và $(a,b) \in R$, thì $(a, b) \in R^{-1}$, sao cho $(b,a) \in R$. Vậy R là đối xứng.

31. R là phản xạ nếu và chỉ nếu $(a, a) \in R$ với mọi $a \in A$, tức là nếu và chỉ nếu $(a,a) \in R^{-1}$ (vì $(a,a) \in R$ nếu và chỉ nếu $(a,a) \in R^{-1}$), điều này có nghĩa là nếu và chỉ nếu R^{-1} là phản xạ.

33. Dùng qui nạp toán học. Kết quả là tầm thường với $n=1$. Giả sử R^n là phản xạ và bắc cầu. Theo Định lý 1, $R^{n+1} \subseteq R$. Để thấy rằng $R \subseteq R^{n+1} = R^n \circ R$, giả sử $(a,b) \in R$. Theo giả thiết của phép qui nạp $R^n = R$ và do đó nó là phản xạ. Vậy $(b,b) \in R^n$. Do đó $(a,b) \in R^{n+1}$.

35. Dùng qui nạp toán học. Kết quả là tầm thường với $n=1$. Giả sử R^n là phản xạ. Khi đó $(a,a) \in R^n$ với mọi $a \in A$ và $(a,a) \in R$. Do vậy $(a,a) \in R^n \circ R = R^{n+1}$ với mọi $a \in A$.

37. Khôngs. Ví dụ lấy $R = \{(1,2), (2,1)\}$.

Tiết 6.2

1. $\{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}$

3. (Nadir, 122, 34, Detroit, 08 :10), (Acme, 221, 22, Denver, 08 :17), (Acme, 122, 33, Anchorage, 08 :22), (Acme, 323, 34, Honolulu 08 :30), (Nadir, 199, 13 Detroit, 08 :47), (Acme, 222, 22, Denver, 09 :10), (Nadir, 322, 34, Detroit, 09 :44).

5. Hãng hàng không và số chuyến bay, hãng hàng không và giờ cất cánh.

7. $P_{3,5,6}$

9.

Hãng hàng không	Nơi đến
Nadir	Detroit
Acme	Denver
Acme	Anchorage
Acme	Honolulu

11.

Nhà cung cấp	Chi tiết số	Dự án	Số lượng	Mã màu
23	1092	1	2	2
23	1101	3	1	1
23	9048	4	12	2
31	4975	3	6	2
31	3477	2	25	2
32	6984	4	10	1
32	9191	2	80	4
33	1001	1	14	8

Tiết 6.3

1. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

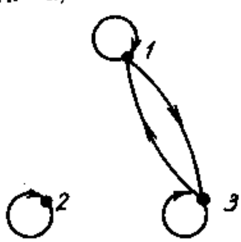
3. R là phản xạ nếu và chỉ nếu tất cả các phần tử trên đường chéo đều bằng 0.

5. Thay mỗi số 0 thành 1 và mỗi số 1 thành 0.

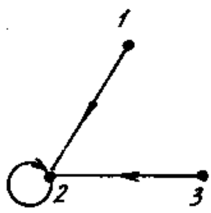
7. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

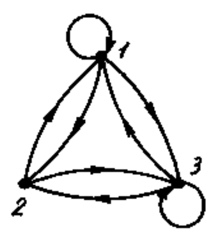
11. a)



b)



c)



13. $\{(a,b),\ (a,c),\ (b,c),\ (c,b)\}$

15. $\{(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,b),\ (d,d)\}$

17. a) Chỉ không phản xạ b) Chỉ phản xạ c) Chỉ đối xứng

19. Chứng minh bằng qui nạp toán học. Kết quả tầm thường với $n=1$. Giả sử nó đúng với n. Vì $R^{n+1} = R^n \circ R$, nên ma trận của nó là $\mathbf{M}_R \odot M_R{}^n$. Theo giả thiết qui nạp thì điều đó có nghĩa là $\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R^{[n]} = \mathbf{M}_R^{[n+1]}$

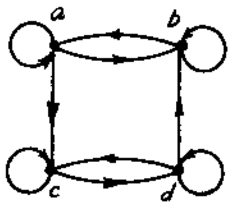
Tiết 6.4

1. a) $\{(0,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,2),\ (3,0),\ (3,3)\}$

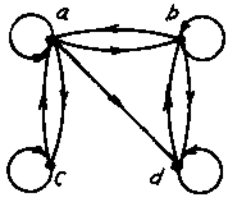
b) $\{(0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,0)\}$

3. $\{(a,b)\ |\ a$ chia hết cho b hoặc b chia hết cho $a\}$

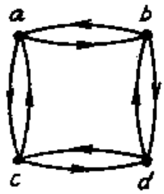
5.



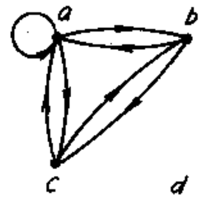
7.



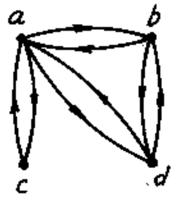
9. a)



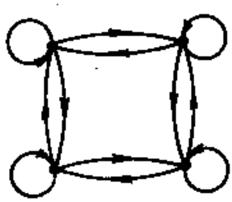
b)



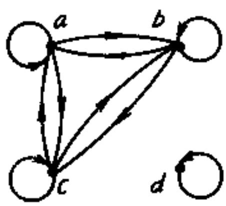
c)



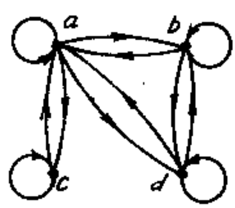
11. a)



b)



c)



13. Bao đúng đối xứng của R là $R \cup R^{-1}$. $\mathbf{M}_{R \cup R^{-1}} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^t$

15. Chỉ khi R là không phản xạ, trong trường hợp này R là bao đóng của chính nó.

17. *a,a,a,a ; b,c,c,b ; c,b,c,c ; c,c,b,c ; c,c,c,c ; d,e,e,d ; e,d,e,e ; e,e, d,e ; e,e,e,e.*

19. a) {{(1,1), (1,5), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,5), (5,3), (5,4)}

b) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,5), (3,1), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)}

c) {1,1), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

d) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

e) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5,), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

f) ((1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

21. a) Nếu có một sinh viên *c* cùng lớp với *a* và *a* cùng lớp với *b*.

b) Nếu có hai sinh viên c và d sao cho a và c cùng lớp, c và d cùng lớp và d và b cùng lớp.

c) Nếu có một dãy $s_o, \ldots, s_n$ các sinh viên với $n \geq 1$ sao cho $s_o = a$, $s_n = b$ và đối với mỗi $i = 1,2,\ldots,n$, s_i và s_{i-1} cùng lớp.

23. Kết quả suy ra từ $(R^*)^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R^*$

25. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

27. Đáp số như đối với Bài tập 25.

29. a) {(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

b) {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

c) {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

31. Thuật toán 1 : $O(n^{3,8})$; Thuật toán 2 : $O(n^3)$

33. Xuất phát từ

$\mathbf{A} := \mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$ và vòng lặp chỉ đối với $i := 2$ đến n-1

35. a) Vì R là phản xạ, nên mỗi quan hệ chứa nó cũng cần phải là phản xạ.

b) Cả {(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (2,2)} và {(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)} đều chứa R và có một số lẻ phần tử, nhưng không có tập nào là tập con của tập nào.

Tiết 6.5

1. a) Quan hệ tương đương b) Không phản xạ, không bắc cầu

c) Quan hệ tương đương d) Không bắc cầu

e) Không đối xứng, không bắc cầu

3. a) Quan hệ tương đương b) Không bắc cầu

c) Không phản xạ, không đối xứng, không bắc cầu

d) Quan hệ tương đương e) Không phản xạ, không bắc cầu

5. a) $(x,x) \in R$ vì $f(x) = f(x)$, vậy R là phản xạ. $(x,y) \in R$ nếu và chỉ nếu $f(x) = f(y)$ điều này đúng nếu và chỉ nếu $f(y) = f(x)$, tức nếu và chỉ nếu $(y,x) \in R$. Do đó, R là đối xứng. Nếu $(x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ khi đó $f(x) = f(y)$ và $f(y) = f(z)$, do đó $f(x) = f(z)$. Vì vậy $(x,z) \in R$, suy ra R là bắc cầu.

b) Các tập $f^{-1}(b)$ đối với b trong miền giá trị của f.

7. Giả sử x là một xâu có chiều dài là 3 hoặc lớn hơn. Vì x phù hợp với chính nó trong ba bit đầu tiên nên $(x,x) \in R$, vậy R là phản xạ. Giả sử $(x,y) \in R$, khi đó x và y như nhau ở ba bit đầu tiên, tức là y và x như nhau ở ba bit đầu tiên, do đó $(y,x) \in R$.

Vậy R là đối xứng nếu (x, y) và (y,z) đều thuộc R, thì x và y và y và z như nhau ở ba bit đầu tiên. Do đó, x và z như nhau ở ba bit đầu tiên. Vậy $(x,z) \in R$, suy ra R là phản xạ.

9. Mệnh đề p tương đương với q có nghĩa là chúng có bảng giá trị chân lý như nhau. R là phản xạ vì p có bảng giá trị chân lý hệt như p. R là đối xứng vì nếu p và q có cùng bảng chân lý thì q và p cũng như vậy. Nếu p và q có cùng bảng chân lý và q và r cũng có cùng bảng chân lý thì p và r cũng có cùng bảng chân lý. Do đó, R là bắc cầu.

11. Không

13. Không

15. R là phản xạ vì xâu bit s có cùng số các số 1 như chính nó. R là đối xứng vì s và t có cùng số các số 1 kéo theo t và s cũng có cùng số các số 1. R là bắc cầu vì s và t có cùng số các số 1 và t và u có cùng số các số 1 kéo theo s và u có cùng số các số 1.

17. a) Các tập người cùng tuổi

b) Các tập người có cùng bố và mẹ

19. Tập tất cả các xâu có chính xác hai số 1

21. a) $\{s \mid s$ là xâu có chiều dài bằng 3$\}$

b) $\{s1 \mid s$ là xâu có chiều dài bằng 3$\}$

c) $\{s11 \mid s$ là xâu có chiều dài bằng 3$\}$

d) $\{s10101 \mid s$ là sâu có chiều dài bằng 3$\}$

23. $\{6n + k \mid n \in \mathbf{Z}\}$ với $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

25. a) Không b) Có c) Có d) Không

27. $[0]_6 \subseteq [0]_6$, $[1]_6 \subseteq [1]_6$, $[2]_6 \subseteq [2]_3$, $[3]_6 \subseteq [0]_6$, $[4]_6 \subseteq [1]_3$, $[5]_6 \subseteq [2]_6$.

29. $\{(a,b), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c), (d, d), (d,e), (e,d), (e,e)\}$

31. a) $\mathbf{Z}$ b) $\{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbf{Z}\}$

33. a) R là phản xạ vì bất kỳ cách tô màu nào đều có thể nhận được từ chính nó qua phép quay 360°. Để thấy R là đối xứng và bắc cầu chú ý rằng mỗi phép quay đều được phân tích thành hai phép phản xạ gương và ngược lại hợp thành của hai phép phản xạ gương sẽ là một phép quay. Do đó $(C_1, C_2) \in R$ nếu và chỉ nếu C_2 có thể nhận được từ C_1 bằng hợp thành của các phép phản xạ gương. Do đó, nếu $(C_1,C_2) \in R$ thì (C_2, C_1) cũng thuộc R vì nghịch đảo của hợp thành các phép phản xạ gương cũng là một hợp thành các phép phản xạ (theo thứ tự ngược lại). Do đó, R là đối xứng. Để thấy R là bắc cầu, giả sử (C_1, C_2) và (C_2, C_3) thuộc R. Lấy hợp thành của các phép phản xạ trong mỗi trường hợp sẽ cho hợp thành của các phép phản xạ cho thấy $(C_1, C_3) \in R$.

b) Biểu diễn các cách tô màu thành dãy có chiều dài 4 với r và b ký hiệu là đỏ (red) và xanh (blue), tương ứng. Rồi ta liệt kê các chữ ký hiệu màu của ô vuông trên bên trái, ô vuông trên bên phải, ô vuông dưới bên trái, ô vuông dưới bên phải theo thứ tự đó. Các lớp tương đương là : $\{rrrr\}$, $\{bbbb\}$, $\{rrrb, rrbr, rbrr, brrr\}$, $\{bbbr, bbrb, brbb, rbbb\}$, $\{rbbr, brrb\}$, $\{rrbb, brbr, bbrr, rbrb\}$.

35. 5

37. Có

39. R

41. Trước hết lập bao đóng phản xạ của R, sau đó lập bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ, và cuối cùng lập bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ.

43. $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 5$, $p(4) = 15$, $p(5) = 52$, $p(6) = 203$, $p(7) = 877$, $p(8) = 4140$, $p(9) = 21147$, $p(10) = 115975$.

Bài tập bổ sung

1. a) Không phản xạ (vì ta không đưa vào xâu rỗng), đối xứng.

b) Không phản xạ, đối xứng

c) Không phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

3. $((a,b), (a,b)) \in R$ vì $a + b = a + b$. Do đó R là phản xạ. Nếu $((a,b), (c,d)) \in R$, thì $a+d = b+c$ sao cho $c+b = d+a$. Từ đó suy ra $((c,d), (a,b)) \in R$, nên R là đối xứng. Giả sử $((a,b), (c,d))$ và $((c,d), (e,f))$ thuộc R. Khi đó $a+d = b+c$ và $c+f = d+e$. cộng hai phương trình đó và trừ hai vế của phương trình cho $c+d$, ta được $a+f = b+e$. Do đó $((a,b), (e,f))$ thuộc R, tức R là bắc cầu.

5. Giả sử $(a,b) \in R$. Vì $(b,b) \in R$, suy ra $(a,b) \in R^2$.

7. Có, có

9. Có, có.

11. Hai bản ghi với chìa khóa đồng nhất trong hình chiếu cũng sẽ có các chìa khóa đồng nhất trong bản gốc.

13. $(\Delta \cup R)^{-1} = \Delta^{-1} \cup R^{-1} = \Delta \cup R^{-1}$.

15. a) $R = \{(a, b), (a, c)\}$. Bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của R là $\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$ và nó khác với bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của R là $\{(a,b), (a,c), (b, a), (c,a)\}$.

b) Giả sử (a,b) thuộc bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của R. Ta cần phải chứng minh rằng (a,b) thuộc bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của R. Ta biết rằng ít nhất một trong hai phần tử (a,b) và (b,a) thuộc bao đóng bắc cầu của R. Do đó, hoặc tồn tại một đường đi từ a đến b hoặc tồn tại một đường đi từ b đến a (hoặc cả hai). Trong trường hợp đầu, có một đường đi từ a đến b trong bao đóng đối xứng của R. Trong trường hợp sau, ta có thể lập một đường đi từ a đến b trong bao đóng đối xứng của R bằng cách đảo hướng của tất cả các cạnh trong đường đi b đến a, khi đi theo hướng ngược lại. Do đó, (a,b) thuộc bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của R.

17. Bao đóng của S đối với tính chất **P** là một quan hệ với tính chất **P**, nó chứa R vì $R \subseteq S$. Do đó, bao đóng của S đối với tính chất **P** chứa bao đóng của R đối với tính chất **P**.

19. Dùng ý tưởng cơ bản của thuật toán Warshall, trừ điều cho rằng $\omega^{[k]}_{ij}$ bằng chiều dài của đường đi dài nhất từ v_i đến v_j khi dùng các đỉnh trong với các chỉ số dưới không không vượt quá k và bằng -1 nếu không có một đường đi như vậy. Để tìm $\omega^{[k]}_{ij}$ từ các phần tử của $\mathbf{W}_{k-1}$, đối với mỗi cặp (i, j) hãy xác định xem có tồn tại các đường đi từ v_i đến v_k và từ v_k đến v_j hay không khi không dùng các đỉnh có chữ số lớn hơn k. Nếu hoặc $\omega^{[k-1]}_{ik}$ hoặc $\omega^{[k-1]}_{kj}$ bằng -1, thì một cặp các đường đi như thế là không tồn tại, ta đặt $\omega^{[k]}_{ij} = \omega^{[k-1]}_{ij}$. Nếu cặp đường đi như thế tồn tại, thì sẽ có hai khả năng. Nếu $\omega^{[k-1]}_{kh} > 0$, thì sẽ có các đường đi với chiều dài tùy ý từ v_i đến v_j, ta đặt $\omega^{[k]}_{ij} = \infty$. Nếu $\omega^{[k-1]}_{kk} = 0$, ta đặt $\omega^{[k-1]}_{ij} = \max(\omega^{[k-1]}_{ij}, \omega^{[k-1]}_{ik} + \omega^{[k-1]}_{kj})$. (Ban đầu lấy $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$).

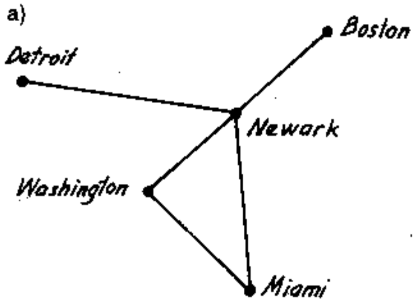
21. 25

23. Vì $A_i \cap B_j$ là một tập con của A_i và B_j nên tập hợp của các tập con là cái làm mịn của mỗi một phân hoạch đã cho. Chúng ta cần phải chứng minh rằng nó cũng là một phân hoạch. Theo cách xây dựng ta thấy rằng tất cả các tập đó đều không rỗng. Để thấy rằng hợp của chúng là S, ta giả sử rằng $s \in S$. Vì P_1 và P_2 là các phân hoạch của S, nên tồn tại các tập A_i và B_j sao cho $s \in A_i$ và $s \in B_j$, do đó $s \in A_i \cap B_j$. Vậy hợp của các tập đó chính là S. Để thấy rằng các tập đó đôi một rời nhau, ta chú ý rằng nếu không có $i = i'$ và $j = j'$ thì $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = (A_i \cap A_{i'}) \cap (B_j \cap B_{j'}) = \varnothing$.

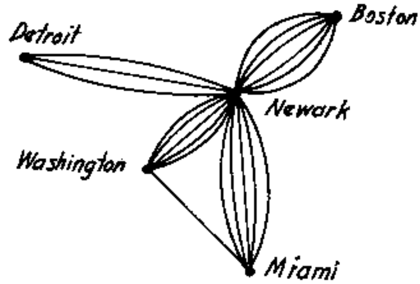
CHƯƠNG 7

Tiết 7.1

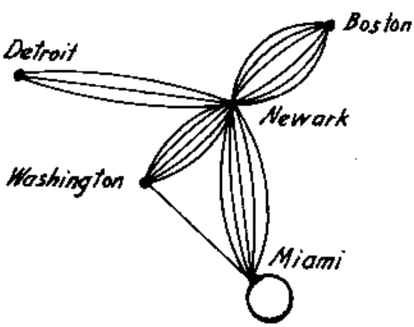
1. a)



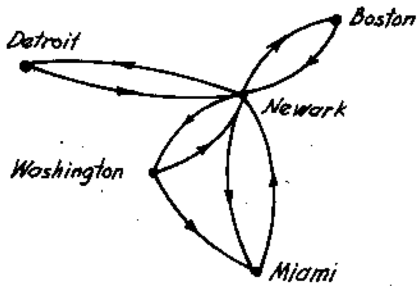
b)



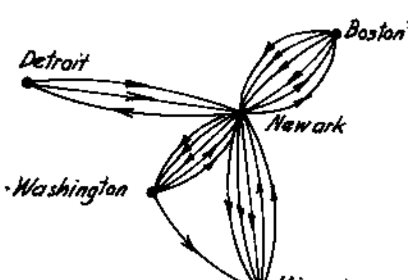
c)



d)



e)



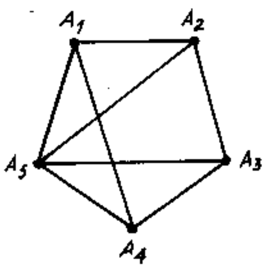
3. Đơn đồ thị

5. Giả đồ thị

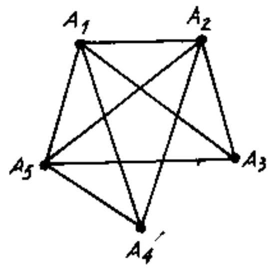
7. Đồ thị có hướng

9. Đa đồ thị có hướng

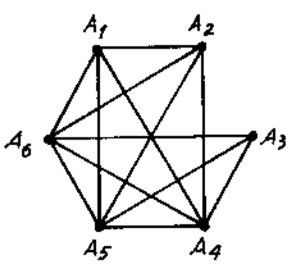
11. a)



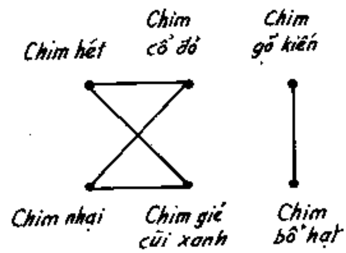
b)



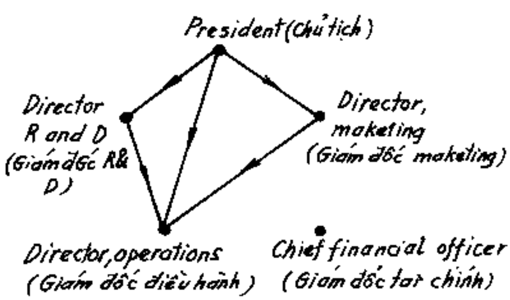
c)



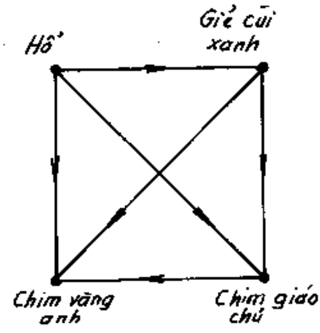
13.



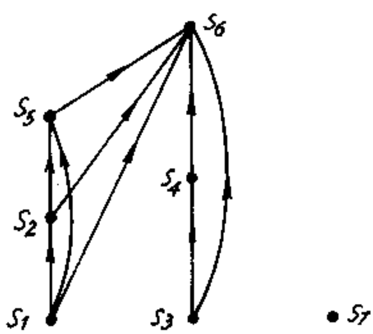
15.



17.



19.



21. Biểu diễn mỗi người trong nhóm bằng một đỉnh. Giữa mỗi cặp đỉnh có một cạnh có hướng. Gán nhãn cho cạnh từ A tới B bằng " + " nếu A thích B, bằng " − " nếu A không thích B, và bằng số 0 nếu A trung lập đối với B.

Tiết 7.2

1. $v = 6$; $e = 6$; $deg(a) = 2$, $deg(b) = 4$, $deg(c) = 1$, $deg(d) = 0$, $deg(e) = 2$, $deg(f) = 3$; c : đỉnh treo, d : đỉnh cô lập

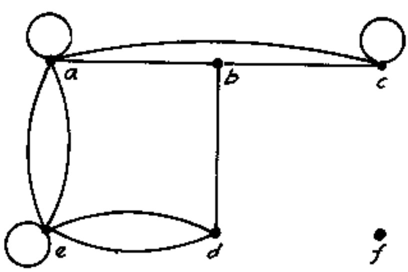
3. $v = 9$; $e = 12$; $deg(a) = 3$, $deg(b) = 2$, $deg(c) = 4$, $deg(d) = 0$, $deg(e) = 6$ $deg(f) = 0$; $deg(g) = 4$; $deg(h) = 2$; $deg(i) = 3$; d và f các đỉnh cô lập.

5. Không vì tổng các bậc của các đỉnh không thể là số lẻ.

7. $v = 4$; $e = 7$; $deg^-(a) = 3$, $deg^-(b) = 1$, $deg^-(c) = 2$, $deg^-(d) = 1$, $deg^+(a) = 1$, $deg^+(b) = 2$, $deg^+(c) = 1$, $deg^+(d) = 3$.

9. 5 đỉnh, 13 cạnh $deg^-(a) = 6$, $deg^+(a) = 1$, $deg^-(b) = 1$, $deg^+(b) = 5$, $deg^-(c) = 2$, $deg^+(c) = 5$, $deg^-(d) = 4$, $deg^+(d) = 2$, $deg^-(e) = 0$, $deg^+(e) = 0$.

11.



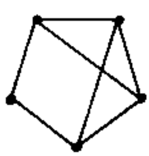
13. Phân đôi

15. Không phân đôi

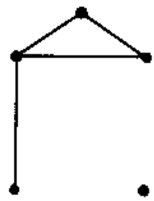
17. Không phân đôi

19. a) n đỉnh, $n(n-1)/2$ cạnh
b) n đỉnh, n cạnh
c) $n + 1$ đỉnh, $2n$ cạnh
d) $m + n$ đỉnh, mn cạnh
e) 2^n đỉnh, $n2^{n-1}$ cạnh

21. a) Có



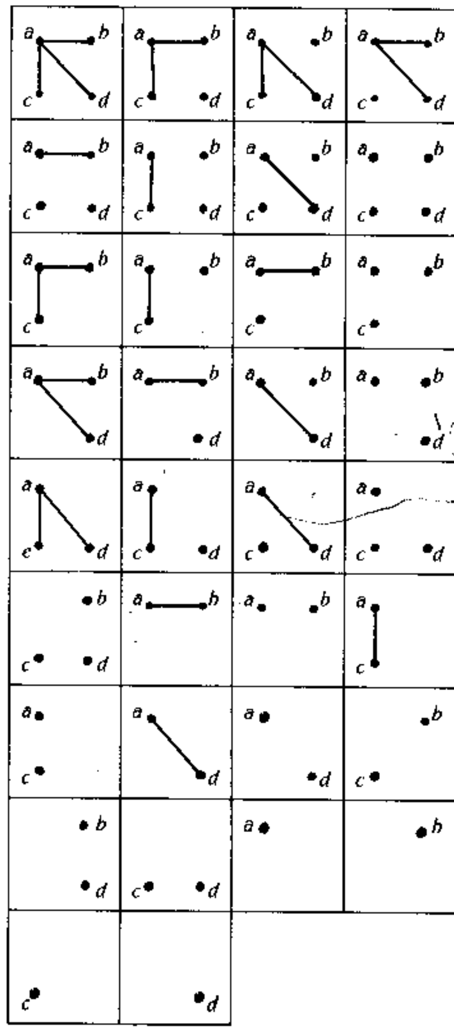
b) Không, tổng các bậc lẻ là lẻ
c) Không
d) Không, tổng các bậc là số lẻ
e) Có



f) Không, tổng các bậc là lẻ.

22. 17

25.



27. a) Với mọi $n \geq 1$,

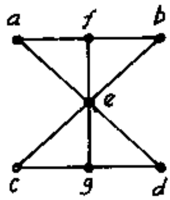
b) Với mọi $n \geq 3$

c) Với $n = 3$

d) Với mọi $n \geq 0$

29. 5

31.



33. a) Đồ thị có n đỉnh, không có cạnh

b) Hợp của K_m và K_n

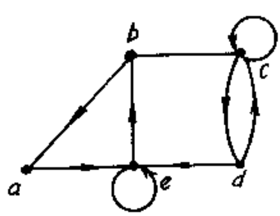
c) Đồ thị có các đỉnh $\{v_1, \ldots, v_n\}$ và có cạnh giữa v_i và v_j trừ khi $i \equiv j \pm 1 \pmod{n}$

d) Đồ thị mà các đỉnh của nó được biểu diễn bằng xâu nhị phân độ dài n và có cạnh giữa 2 đỉnh nếu các xâu nhị phân tương ứng khác nhau ít nhất 1 bit

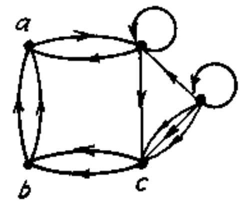
35. $v(v - 1)/2 - e$

37. Hợp của G và $\overline{G}$ chứa cạnh nối mỗi cặp trong n đỉnh. Vì thế nó là K_n.

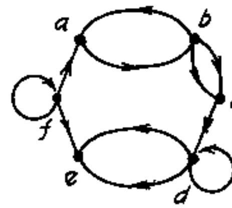
39. Bài tập 7 :



Bài tập 8 :

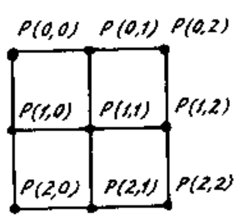


Bài tập 9 :



41. Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là nghịch đảo của nó nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn điều kiện $(u, v) \in E$ nếu và chỉ nếu $(v, u) \in E$. Đó chính là điều kiện để quan hệ được biểu diễn bởi G là đối xứng.

43.



45. Ta có thể nối $P(i, j)$ và $P(k, l)$ bằng cách dùng $i - k$ bước nhảy để nối $P(i, j)$ và $P(k, j)$; và $|j - l|$ bước nhảy để nối $P(k, j)$ và $P(k, l)$. Vì thế để nối $P(i, j)$ và $P(k, l)$ cần không quá $|i - k| + |j - l|$ bước nhảy ; số này nhỏ hơn hay bằng $m + m = 2m$, có bậc $O(m)$

Tiết 7.3

1.

Đỉnh	Các đỉnh liền kề
a	b, c, d
b	a, d
c	a, d
d	a, b, c

3.

Đỉnh	Các đỉnh liền kề
a	a, b, c, d
b	d
c	a, b
d	b, c, d

5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó các đỉnh được liệt kê theo thứ tự từ điển.

7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

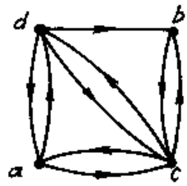
e)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

f)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11.



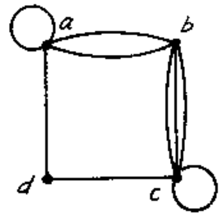
13.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17.



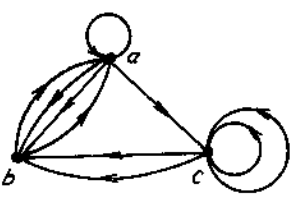
19.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

23.



25. Có

27. Bài tập 13 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 14 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 15 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29. $deg(v)$ - số khuyên tai v ; $deg^-(v)$

31. 2 nếu e không là khuyên, 1 nếu e là khuyên

33. a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \mathbf{B} & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó **B** là lời giải của b)

d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

35. Đẳng cấu

37. Đẳng cấu

39. Đẳng cấu

41. Không đẳng cấu

43. Đẳng cấu

45. G là đẳng cấu với chính nó, vì luôn có hàm đồng nhất, vì thế phép đẳng cấu có tính phản xạ. Giả sử G đẳng cấu với H. Khi đó tồn tại phép tương ứng một - một f từ G tới H bảo toàn quan hệ liền kề. Từ đó suy ra f^{-1} là phép tương ứng một - một từ H tới G bảo toàn quan hệ liền kề. Vì thế phép đẳng cấu là đối xứng. Nếu G đẳng cấu với H và H đẳng cấu với K thì tồn tại các phép tương ứng một - một f và g từ G tới H và từ H tới K bảo toàn quan hệ liền kề. Từ đó suy ra $g \circ f$ là phép tương ứng một - một từ G tới K bảo toàn quan hệ liền kề. Vì thế phép đẳng cấu có tính chất bắc cầu.

47. Tất cả là 0.

49. Gán nhãn các đỉnh theo thứ tự sao cho tất cả các đỉnh của phần thứ nhất của tập các đỉnh sẽ được lấy trước. Vì không có cạnh nào nối các đỉnh trong cùng một phần của tập các đỉnh, ma trận liền kề sẽ có dạng như mong đợi.

51. C_5

53. $n = 5$

55. 4

57. a) Có b) Không c) Không

59. $G = (V_1, E_1)$ là đẳng cấu với $H = (V_2, E_2)$ nếu và chỉ nếu tồn tại các hàm f từ V_1 tới V_2 và g từ E_1 tới E_2 sao cho mỗi hàm là phép tương ứng một - một và với mọi cạnh e trong E_1 các điểm đầu mút của $g(e)$ là $f(v)$ và $f(w)$ trong đó v và w là các điểm mút của e.

61. Có

63. Có

65. Nếu f là phép đẳng cấu từ đồ thị có hướng G tới đồ thị có hướng H thì f cũng là đẳng cấu từ G^c tới H^c. Để thấy điều đó hãy lưu ý rằng (u, v) là cạnh của G^c nếu và chỉ nếu (v, u) là cạnh của G, nếu và chỉ nếu $(f(v), f(u))$ là cạnh của H, nếu và chỉ nếu $(f(u), f(v))$ là cạnh của H^c.

67. Tích là $[a_{ij}]$ trong đó a_{ij} là số các cạnh từ v_i tới v_j $(i \neq j)$ và a_{ii} là số các cạnh liên thuộc với v_i.

Tiết 7.4

1. a) Đường đi độ dài 4 ; không có chu trình ; không đơn.
b) Không đường đi c) Không đường đi
d) Chu trình đơn độ dài 5.

3. Không

5. Không

7. a) 3 b) 7 c) 20 d) 61

9. a) 3 b) 0 c) 27 d) 0

11. a) 1 b) 0 c) 2
d) 1 e) 5 f) 3

13. R là phản xạ theo định nghĩa. Giả sử rằng $(u, v) \in R$; khi đó có đường đi từ u tới v. Sau đó ta có $(v, u) \in R$ vì có đường đi từ v tới u, cụ thể là đường đi từ u tới v theo chiều ngược lại. Do đó, R là đối xứng. Giả sử rằng $(u, v) \in R$ và $(v, w) \in R$ khi đó có đường đi từ u tới v và từ v tới w. Ghép hai đường đi này ta được đường đi từ u tới w. Vì thế $(u, w) \in R$. Từ đó suy ra R là có tính bắc cầu.

15. *c*

17. *b, c, e, i.*

19. Nếu một dỉnh là dỉnh treo thì nó không là dỉnh cắt. Vì thế điểm đầu mút của cạnh cắt là dỉnh cắt nên nó không là dỉnh treo. Loại bỏ một cạnh cắt sẽ tạo ra đồ thị có số thành phần liên thông nhiều hơn đồ thị xuất phát. Nếu điểm đầu mút của cạnh cắt không là dỉnh treo, thì thành phần liên thông tạo ra sau loại bỏ cạnh cắt sẽ chứa dỉnh này. Do đó, việc loại bỏ đỉnh này và tất cả các cạnh liên thuộc với nó kể cả cạnh cắt ban đầu, sẽ tạo ra đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn. Vì thế điểm đầu mút của cạnh cắt không phải là đỉnh treo chính là đỉnh cắt.

21. Giả sử có đồ thị liên thông G với nhiều nhất một đỉnh không là đỉnh cắt. Định nghĩa khoảng cách giữa các đỉnh u và v, ký hiệu là $d(u, v)$, là độ dài đường đi ngắn nhất giữa u và v trong G. Gọi s và r là các đỉnh trong G sao cho $d(s, r)$ là cực đại. Hoặc là s hoặc là t (hoặc cả hai) là đỉnh cắt, vì thế không mất tính tổng quát, giả sử s là đỉnh cắt. Giả sử w thuộc thành phần liên thông không chứa r của đồ thị nhận được bằng cách xóa s và tất cả các cạnh liên thuộc nó khỏi G. Vì mọi đường đi từ w tới r chứa s, nên $d(w, r) > d(s, r)$. Điều này là vô lý.

23. a) Denver - Chicago, Boston - New York

b) Seatle - Porlsnd, Porland - San Francisco, Salt Lake City - Denver, New York - Boston, Boston - Burlington, Boston - Bangor.

25. Tập những người có ảnh hưởng tập thể lên mọi người (trực tiếp hay gián tiếp) ; {Deborah, Yvonna}.

27. Một cạnh không thể nối hai đỉnh thuộc hai thành phần liên thông khác nhau. Vì có nhiều nhất $C(n_i, 2)$ cạnh trong thành phần liên thông với n_i đỉnh, ta suy ra có nhiều nhất $\sum_{i=1}^{k} C(n_i,2)$ cạnh.

29. Giả thử G là không liên thông. Khi đó nó có thành phần liên thông gồm k đỉnh với k là số nguyên nào đó $1 \leq k \leq n - 1$. G có thể có nhiều nhất là $C(k, 2) + C(n - k, 2) = [k(k - 1) + (n - k)(n - k - 1)]/2 = k^2 - nk + (n^2 - n)/2$ cạnh. Hàm f này đạt cực tiểu tại $k = n/2$ và cực đại tại $k = 1$ hoặc $k = n - 1$. Vì thế, nếu G là không liên thông số cạnh không thể vượt quá giá trị của hàm này tại $k = 1$ hoặc $k = n - 1$, tức là $(n - 1)(n - 2)/2$.

31. a) 1 b) 2 c) 6 d) 21

33. 2

35. Gọi các đường đi P_1 và P_2 là $u = x_o, x_1, \ldots, x_n = v$ và $u = y_o, y_1, \ldots, y_n = v$, tương ứng. Vì P_1 và P_2 không chứa cùng một tập các cạnh, nên chúng có thể khác nhau. Nếu điều đó xảy ra chỉ sau khi một đường đã kết thúc thì phần còn lại của đường đi kia sẽ là một chu trình đơn từ v tới v. Còn nếu ngược lại, ta giả sử $x_o = y_o, x_1 = y_1, \ldots, x_i = y_i$, nhưng $x_{i+1} \neq y_{i+1}$. Đi theo đường $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots$ cho tới khi một lần nữa lại gặp một đỉnh của P_1. Mỗi lần gặp P_1 ta đi theo nó tiến hay lui nếu cần để trở về với x_i. Vì $x_i = y_i$ nên ta được một chu trình đơn vì không có cạnh nào trong số các x_k có thể được lặp lại, và không có cạnh nào trong số x_k có thể bằng một trong các y_k mà chúng ta đã dùng.

37. Đồ thị G là liên thông nếu và chỉ nếu mọi phần tử ngoài đường chéo của $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{n-1}$ là số dương trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận liền kề của G.

Tiết 7.5

1. Không
3. Không
5. $a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, c, a$
7. $a, i, h, g, d, e, f, g, c, e, h, d, c, a, b, i, c, b, h, a$
9. Tồn tại đường đi Euler : $f, a, b, c, d, e, f, b, d$ là một đường đi Euler như thế.
11. Tồn tại đường đi Euler : $b, c, d, e, f, d, g, i, d, a, h, i, a, b, i, c$ là một đường đi Euler như thế.
13. Tồn tại đường đi Euler : $b, c, d, e, f, d, g, i, d, a, h, i, a, b, i, c$
15. Không, A vẫn có bậc lẻ.
17. Khi đồ thị với các đỉnh là các điểm tại đó các phố giao nhau còn các cạnh là các phố có đường đi Euler.
19. Có
21. Không
23. Nếu có đường đi Euler, khi chúng ta đi thao nó, mỗi đỉnh, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối, phải có bậc - vào và bậc - ra bằng nhau vì mỗi lần chúng ta tới một đỉnh theo một cạnh thì chúng ta rời đỉnh đó theo cạnh khác. Đỉnh xuất phát có bậc - ra lớn hơn bậc - vào một đơn vị, vì ta dùng một cạnh để đi rs khỏi đỉnh này, và sau đó mỗi khi chúng ta lại qua nó thì ta dùng một cạnh để vào và một cạnh để ra khỏi nó. Tương tự, đỉnh cuối phải có bậc - vào lớn hơn bậc - ra một đơn vị. Vì đường đi Euler với hướng đã bị xóa bỏ tạo ra đường đi giữa hai đỉnh tùy ý trong đồ thị vô hướng nền, nên đồ thị là liên thông yếu. Ngược lại, đồ thị có bậc thỏa mãn các điều kiện như trong bài toán. Nếu ta thêm một cạnh nối từ đỉnh có bậc - ra ít hơn tới đỉnh có bậc - vào ít hơn, khi đó đồ thị sẽ có mọi đỉnh với bậc - ra và bậc - vào bằng nhau. Vì đồ thị vẫn còn là liên thông yếu, theo Bài tập 22, đồ thị mới này có chu trình Euler. Xóa cạnh mới thêm vào ta sẽ được đường đi Euler.
25. Không
27. Không
29. $a, b, d, b, c, d, c, a, d$
31. $a, d, b, d, e, b, e, c, b, a$
33. $a, b, c, e, b, d, c, b, f, d, e, f, e, a, f, a$
35. Theo thủ tục như trong Algorithm 1, chú ý tới hướng của các cạnh.
37. a) $n = 2$ b) Không c) Không d) $n = 1$
39. Bài tập 1 : 1 lần ; Bài tập 2 - 7 : 0 lần
41. a, b, c, d, e, a là chu trình Hamilton.
43. Không tồn tại chu trình Hamilton, vì nếu có thì khi chu trình đi tới c nó sẽ không thể đi tiếp được nữa.
45. Không tồn tại chu trình Hamilton, vì mọi cạnh của đồ thị là liên thuộc với một đỉnh bậc 2 và do vậy nó phải thuộc chu trình.
47. a, b, c, f, d, e là đường đi Hamilton. 49. f, e, d, a, b, c là đường đi Hamilton.
51. Không tồn tại đường đi Hamilton. Có 8 đỉnh bậc 2 và chỉ có hai trong số đó có thể là đỉnh cuối của đường đi. Với mỗi một trong 6 đỉnh kia, hai cạnh liên thuộc với nó phải thuộc đường đi. Dễ thấy rằng nếu đó là đường đi Hamilton thì có đúng một trong các đỉnh góc bên trong phải là đỉnh cuối. Điều đó là không thể.

53. $a, b, c, f, i, h, g, d, e$ là đường đi Hamilton.

55. $m = n \geq 2$

57. Kết quả là tầm thường với $n = 1$: mã là 0, 1. Giả sử ta có mã Gray bậc n. Gọi c_1, c_2, ..., c_k, $k = 2^n$ là mã như thế. Khi đó $0c_1$, ..., $0c_k$, $1c_1$, ..., $1c_k$ là mã Gray bậc $n + 1$.

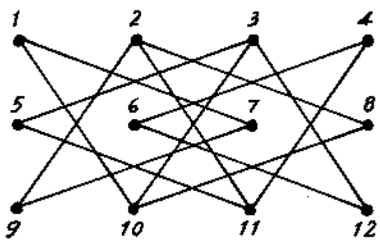
59. **procedure** *Fleury* $(G = (V, E)$: đa đồ thị liên thông với bậc của tất cả các đỉnh là chẵn. $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\})$

$v := v_1$
circuit $:= v$
$H := G$
while H còn có các cạnh
begin
  $e :=$ cạnh đầu tiên có điểm đầu mút v trong H (theo thứ tự liệt kê của V) sao cho e không là cạnh cắt của H, nếu nó tồn tại, và đơn giản là cạnh cắt đầu tiên của H có với điểm đầu mút v, nếu không
  $w :=$ điểm đầu mút kia của e.
  circuit:= *circuit* với cạnh e, w được thêm vào.
  $v := w$
  $H := H - e$
end {*circuit* là chu trình Euler}

61. Nếu G có chu trình Euler, thì nó cũng là đường đi Euler. Nếu không, ta thêm một cạnh giữa hai đỉnh bậc lẻ, rồi áp dụng thuật toán để nhận được chu trình Euler. Sau đó xóa cạnh mới đi.

63. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị phân đôi với $V = V_1 \cup V_2$, trong đó không có cạnh nối các đỉnh cùng trong V_1 hoặc cùng trong V_2. Giả sử V có chu trình Hamilton. Chu trình như thế phải có dạng $a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_k, b_k, a_1$ trong đó $a_i \in V_1$ và $b_1 \in V_2$ với $i = 1, 2, ..., k$. Vì chu trình Hamilton qua mỗi đỉnh đúng một lần, trừ v_1, tại đó nó bắt đầu và kết thúc. Số các đỉnh của đồ thị bằng $2k$ là một số chẵn. Vì vậy đồ thị phân đôi với số lẻ các đỉnh không thể có chu trình Hamilton.

65.



67. Ta biểu diễn các ô của bàn cờ 3 x 4 như sau :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Hành trình của quân mã là : 8, 10, 1, 7, 9, 2, 11, 5, 3, 12, 6, 4.

69. Ta biểu diễn các ô của bàn cờ 4 x 4 như sau :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Chỉ có 2 dịch chuyển từ mỗi góc bàn cờ. Nếu ta gộp vào chu trình tất cả các cạnh 1 - 10, 1 - 7, 16 - 10, và 16 - 7 thì chu trình kết thúc quá sớm, vì thế ít nhất một trong các cạnh này phải bỏ qua. Không mất tính tổng quát, giả sử đường đi xuất phát bằng các cạnh 1 - 10, 10 - 16, 16 - 7. Trong các dịch chuyển từ ô 3 tới các ô 5, 10, và 12 ta thấy ô 10 đã có hai cạnh liên thuộc rồi, nên các cạnh 3 - 5, và 3 - 12 có thể thuộc chu trình Hamilton. Tương tự, các cạnh 8 - 2, và 8 - 15 cũng cần phải thuộc chu trình. Từ ô 9 chỉ có các dịch chuyển tới các ô 2, 7 và 15. Nếu chu trình chứa hai cạnh từ 9 tới 2 và 15 thì chu trình kết thúc quá sớm. Do đó cạnh 9 - 7 phải thuộc chu trình .. Nhưng ô 14 bắt buộc phải nối với ô 5 và 12 kết thúc chu trình quá sớm (5 - 14 - 12 - 3 - 5). Mâu thuẫn này chứng tỏ không có hành trình của quân mã trên bàn cờ 4 x 4.

71. vì có $m.n$ ô trên bàn cờ m x n, nếu cả m và n là lẻ, sẽ có một số lẻ các ô. Theo Bài tập 70, đồ thị tương ứng sẽ là phân đôi, và theo Bài 63 nó không có chu trình Hamilton. Do đó không có hành trình tái lập của quân mã.

Tiết 7.6

1. a) Đỉnh là các bến xe, các cạnh nối các bến liền kề, trọng số là thời gian cần thiết để đi từ bến xa này tới bến xa khác.
b) Như câu a) chỉ trọng số bây giờ là khoảng cách giữa các bến xa.
c) Như câu a) chỉ có trọng số bây giờ là tiền vé giữa các bến xe.

3. 16

5. Bài tập 2 : a, b, e, d, z
Bài tập 3 : $a, c, d, e, g, z.$
Bài tập 4 : $a, b, e, h, l, m, p, s, z$

7. a) a, c, d b) a, c, d, f
c) c, d, f d) b, d, e, g, z

9. a) Trực tiếp b) Qua New York
c) Qua Atlanta và Chicago d) Qua New York

11. a) Qua Chicago b) Qua Chicago
c) Qua Los Angeles d) qua Chicago.

13. a) Qua Chicago b) Qua Chicago
c) Qua Los Angeles d) Qua Chicago.

15. Không dừng thuật toán khi z được thêm vào tập S.

17. a) Qua Woodbrige, qua Woodbrige và Camden.
b) Qua Woodbrige, qua Woodbrige và Camden

19. Ví dụ, hành trình của các cuộc tham quan, dọn vệ sinh đường phố.

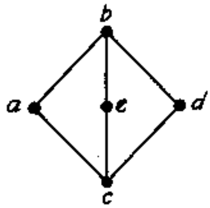
21.

	a	b	c	d	e	z
a	4	3	2	8	10	13
b	3	2	1	5	7	10
c	2	1	2	6	8	11
d	8	5	6	4	2	5
e	10	7	8	2	8	3
z	13	10	11	5	3	6

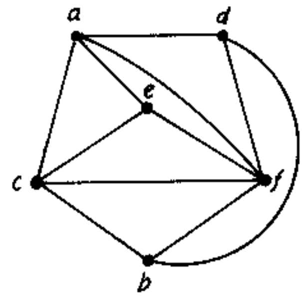
23. $O(n^3)$

Tiết 7.7

1. Có
3.



5. Không
7. Có



9. Tam giác được tạo thành bằng biểu diễn phẳng của đồ thị con của K_5 gồm các cạnh nối v_1, v_2 và v_3. Các đỉnh v_4 cần phải đặt ở bên trong hoặc ở bên ngoài tam giác. Ta chỉ xét trường hợp v_4 ở trong tam giác còn trường hợp kia tương tự. Vẽ ba cạnh nối v_1, v_2, v_3 tới v_4. Khi đó ta có 4 miền, và v_5 thuộc một miền nào đó trong 4 miền này. Có thể nối nó với chỉ ba, mà không phải bốn, trong những đỉnh kia.
11. 8
13. Vì không có khuyên hoặc cạnh bội và không có chu trình đơn độ dài 3, và bậc của miền vô hạn ít nhất là 4, nên mỗi miền có bậc ít nhất là bốn. Như vậy, $2e \geq 4r$, hoặc $r \leq e/2$. Nhưng $r = e - v + 2$, nên $e - v + 2 \leq e/2$, từ đó suy ra $e \leq 2v - 4$.
15. Trong Hệ quả 2, ta có $2e \geq 5r$ và $r = e - v + 2$. Vì thế $e - v + 2 \leq 2e/5$. Từ đó suy ra $e \leq (5/3)v - (10/3)$.
17. Chỉ (a) và (c).
21. Không đồng phôi với $K_{3,3}$
21. Phẳng
23. Không phẳng
25. a) 1 b) 3 c) 9
    d) 2 e) 4 f) 16
27. Vẽ $K_{m,n}$ như mô tả trong phần gợi ý. Số điểm cắt nhau bằng 4 lần số điểm cắt nhau trong góc phần tư thứ nhất. Các đỉnh trên trục x nằm bên phải gốc tọa độ là (1, 0), (2, 0), ..., $(m/2, 0)$ và các đỉnh nằm trên trục y, bên trên gốc tọa độ là (0, 1), (0, 2), ..., $(0, n/2)$. Chúng ta nhận được đúng một giao điểm của cạnh nối 2 điểm $(a, 0)$ và $(b, 0)$ và cạnh nối hai điểm $(0, r)$ và $(0, s)$ trong đó $1 \leq a < b \leq m/2$ và $1 \leq r < s \leq n/2$. Vì vậy số các giao điểm của các cạnh đồ thị trong góc phần tư thứ nhất bằng số các cách lấy 2 điểm phân biệt trên trục x và 2 điểm phân biệt trên trục y, tức là

$$C(m/2, 2).C(n/2) = \frac{(m/2)(m/2-1)}{2}\,\frac{(n/2)(n/2-1)}{2} = \frac{mn(m-2)(n-2)}{64}$$

Vì thế tất cả các điểm giao nhau của các cạnh đồ thị là :

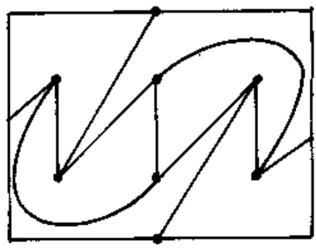
$4mn(m-2)(n-2)/64 = mn(m-2)(n-2)/16$.

29. a) 2 b) 2 c) 2
    d) 2 e) 2 f) 2

31. Công thức là đúng với $n \leq 4$. Nếu $n>4$, theo Bài tập 30 độ dày của K_n ít nhất là $C(n, 2)/(3n - 6) = (n + 1+2/(n - 2))/6$ được làm tròn lên thành $(n+1)/6 + 1 = (n + 7)/6$. Vì đại lượng này không bao giờ là số nguyên, nó bằng số nguyên tiếp theo làm tròn xuống tức là $\lfloor (n + 7)/6 \rfloor$.

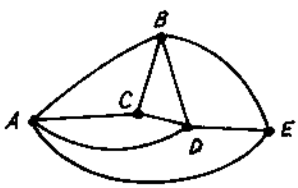
33. Điều đó suy ra từ Bài tập 32 vì K_{mn} có mn cạnh và $m + n$ đỉnh và không có các tam giác vì nó là đồ thị phân đôi.

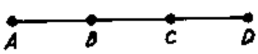
35.

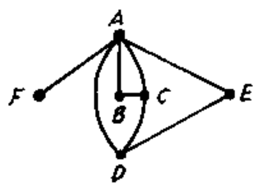


Tiết 7.8

1. a) b) c)







3. 3

5. 3

7. 2

9. 3

11. Các đồ thị không có cạnh

13. 3 nếu n chẵn, 4 nếu n lẻ

15. Đợt 1 : Toán 115, Toán 185, Đợt 2 : Toán 116, CS 473, Đợt 3 : Toán 195, CS 101 ; Đợt 4: CS 102 ; Đợt 5 : CS 273.

17. 5

19. Bài tập 3 : 3
Bài tập 4 : 6
Bài tập 5 : 3
Bài tập 6 : 4
Bài tập 7 : 3
Bài tập 8 : 6
Bài tập 9 : 4

21. 5

23. Tập các đỉnh với một màu là một phần, và tập các đỉnh với mầu kia là phần thứ hai. Vì không có cạnh nào có thể nối các đỉnh cùng màu nên không có cạnh nào nối các đỉnh thuộc cùng một phần.

25. Màu 1 : e, f, d ; Màu 2 : c, a, i, g ; Màu 3 : h, b, j

27. Màu C_6

29. a) 6 b) 7 c) 9 d) 11

31. Biểu diễn mỗi tần số bằng một màu và các vùng bằng các đỉnh. Nối hai đỉnh bằng một cạnh nếu các vùng mà các đỉnh này biểu diễn có sự giao thoa sóng với nhau. Khi đó cách tô bộ k - màu là sự phân chia các tần số để không có sự nhiễu sóng.

Các bài tập bổ sung

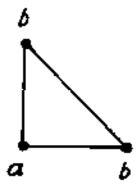
1. 2500

3. Có

5. Có

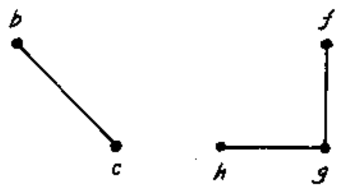
7. $\sum_{i=1}^{m} n_i$ đỉnh, $\sum_{i<j} n_i n_j$ cạnh.

9. a)



b)

c)

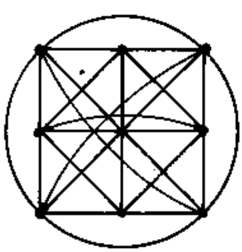


11. Các đồ thị con đầy đủ chứa tập các đỉnh sau : $\{b, c, e, f\}$, $\{a, b, g\}$, $\{a, d, g\}$, $\{d, e, g\}$

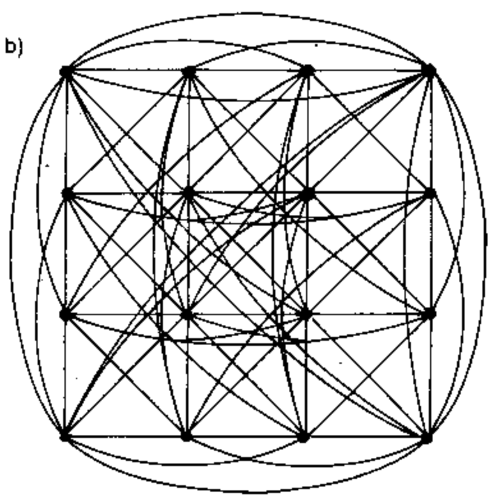
13. Các đồ thị con đầy đủ chứa tập các đỉnh sau : $\{b, c, d, j, k\}$, $\{a, b, j, k\}$, $\{e, f, g, i\}$, $\{a, b, i\}$, $\{a, i, j\}$, $\{b, d, e\}$, $\{b, e, i\}$, $\{b, i, j\}$, $\{g, h, i\}$, $\{h, i, j\}$.

15. $\{c, d\}$ là tập trội tối thiểu

17. a)



b)



19. a) 1 b) 2 c) 3

21. a) Đường đi từ u tới v trong G tạo ra đường đi từ $f(u)$ tới $f(v)$ trong đồ thị đẳng cấu H.

b) Giả sử f là phép đẳng cấu từ G tới H. Nếu $v_o, v_1, ..., v_n, v_o$ là chu trình Hamilton trong G, thì $f(v_o), f(v_1), ..., f(v_n), f(v_o)$ phải là chu trình Hamilton trong H vì nó vẫn còn là chu trình và $f(v_i) \neq f(v_j)$ với $0 \leqslant i < j \leqslant n$.

c) Giả sử f là phép đẳng cấu từ G tới H. Khi đó nếu $v_o, v_1, ..., v_o$ là chu trình Euler trong G, thì $f(v_o), f(v_1), .., f(v_n), f(v_o)$ phải là chu trình Euler trong H vì nó vẫn còn là chu trình và nó chứa mỗi đỉnh đúng một lần.

d) Hai đồ thị đẳng cấu phải có cùng số tự cắt vì chúng có thể được vẽ theo cùng một cách trong mặt phẳng.

c) Giả sử f là phép đẳng cấu từ G tới H. Khi đó v là một đỉnh cô lập trong G nếu và chỉ nếu $f(v)$ là cô lập trong H. Vì thế các đồ thị phải có cùng số các đỉnh cô lập.

f) Giả sử f là phép đẳng cấu từ G tới H. Nếu G là đồ thị phân đôi, thì tập các đỉnh của G có thể được chia thành V_1 và V_2, trong đó không có cạnh nào nối hai đỉnh của V_1 hoặc nối hai đỉnh của V_2. Khi đó tập các đỉnh của H có thể được chia thành $f(V_1)$ và $f(V_2)$ trong đó không có cạnh nào nối hai đỉnh của $f(V_1)$ hoặc nối hai đỉnh của $f(V_2)$.

23. 3

25. a) Có .b) Không

27. Không

29. Có

31. Nếu e là cạnh cắt với các điểm đầu mút là u và v, thì nếu chúng ta định hướng cho e từ u tới v thì sẽ không có đường đi trong đồ thị có hướng từ v tới u, hoặc e có thể không là cạnh cắt. Lý luận tương tự nếu chúng ta định hướng e từ v tới u.

33. $n - 1$

35. Gọi các đỉnh là các chú gà con. Ta vẽ cạnh (u, v) trong đồ thị nếu và chỉ nếu chú gá u lớn hơn chú gà v.

37. a) 4 b) 2 c) 3

d) 4 e) 4 f) 2

39. a) Giả sử $G = (V, E)$ và $a, b \in V$. Ta phải chỉ ra rằng khoảng cách giữa a và b trong $\overline{G}$ nhiều nhất là bằng 2. Nếu $\{a, b\} \notin E$, khoảng cách này bằng 1, vì thế ta giả sử $\{a, b\} \in E$. Vì đường kính của G lớn hơn 3, nên có các đỉnh u và v sao cho khoảng cách giữa chúng trong G lớn hơn 3. Hoặc u hoặc là v hoặc cả hai là không thuộc tập $\{a, b\}$. Giả sử u khác cá a và b. Hoặc là $\{a, u\}$ hoặc là $\{b, u\}$ thuộc E vì nếu không a, u, b là đường đi trong $\overline{G}$ có độ dài bằng 2. Vì thế, không mất tính tổng quát ta giả sử $\{a, u\} \in E$. Như vậy v không thể là a hoặc b và bằng cách lý luận như vậy ta có hoặc $\{a, v\} \in E$ hoặc $\{b, v\} \in E$. Trong mỗi trường hợp, sẽ cho ta đường đi độ dài nhỏ hơn hay bằng 3 từ u tới v trong G. Đó là điều vô lý.

b) Giả sử $G = (V, E)$ và $a, b \in V$ ta cần chỉ ra rằng khoảng cách giữa a và b trong $\overline{G}$ không vượt quá 3. Nếu $\{a, b\} \notin E$, ta suy ra kết quả, vì thế ta giả sử $\{a, b\} \notin E$. Vì đường kính của G lớn hơn hoặc bằng 3, nên có các đỉnh u và v sao cho khoảng cách giữa chúng trong G lớn hơn hay bằng 3. Hoặc là u hoặc là v hoặc cả hai là không thuộc tập $\{a, b\}$. Giả sử u khác cả a và b. Hoặc là $\{a, u\}$ hoặc là $\{b, u\}$ thuộc E nếu không a, u, b là đường đi trong $\overline{G}$ có độ dài bằng 2. Vì thế, không mất tính tổng quát ta giả sử $\{a, u\} \in E$. Như vậy v khác a và b. Nếu $\{a, v\} \in E$ khi đó u, a, v là đường đi độ dài 2 trong G, vậy $\{a, v\} \notin E$, và như vậy $\{b, v\} \in E$ (còn không thì sẽ có đường đi a, v, b độ dài 2 trong $\overline{G}$). Vì thế $\{u, b\} \notin E$ vì nếu không u, b, v là đường đi trong G độ dài 2. Như vậy a, v, u, b là đường đi độ dài 3 trong G như chúng ta chờ đợi.

41. a, b, e, z

43. a, c, b, d, e, z

45. Nếu G là phẳng, thì vì $e \leq 3v - 6$, G có nhiều nhất 27 cạnh. (Nếu G là không liên thông nó thậm chí có số cạnh còn ít hơn. Tương tự $\overline{G}$ có nhiều nhất 27 cạnh. Nhưng hợp G và $\overline{G}$ là K_{11}, có 55 cạnh, và $55 > 27 + 27$.

47. Giả sử G là được tô bằng k màu và có số độc lập là i. Vì mỗi lớp màu phải là một tập độc lập nên nó có không nhiều hơn i phần tử. Như vậy có nhiều nhất $k.i$ đỉnh.

49. Giả sử P là đơn điệu tăng. Nếu tính không có P không được giữ lại khi các cạnh bị xóa khỏi đồ thị đơn, khi đó có đơn đồ thị không có P và một đơn đồ thị khác G' với cùng các đỉnh, nhưng bỏ qua một số cạnh của G có P. Nhưng P là đơn điệu tăng, do vậy G' có P. Vì thế G nhận được bằng cách thêm cạnh vào G'. Đó là điều mâu thuẫn, chứng minh phần đảo là tương tự.

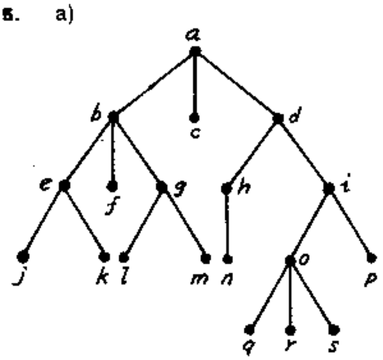
CHƯƠNG 8

Tiết 8.1

1. (a), (c), (e)

3. Không

5. a)



b) c

c)

7. a) 2 b) 4 c) 9

9. Phần "chỉ nếu" là Định lý 2 và định nghĩa của cây. Giả sử G là đơn đồ thị liên thông với n đỉnh và n - 1 cạnh. Nếu G không là cây, nó chứa, theo Bài tập 8, một cạnh mà việc bỏ cạnh đó đi sẽ tạo ra đồ thì G' vẫn còn liên thông. Nếu G' không là cây, thì bỏ một cạnh sẽ tạo ra đồ thị G'' liên thông. Lập lại quá trình này cho tới khi nhận được một cây. Quá trình này đòi hỏi nhiều nhất n - 1 bước vì chỉ có n - 1 cạnh. Theo Định lý 2 đồ thị kết quả có n - 1 cạnh vì nó có n đỉnh. Từ đó suy ra không có cạnh nào bị xóa bỏ, vì thế mà G là một cây.

11. 9999

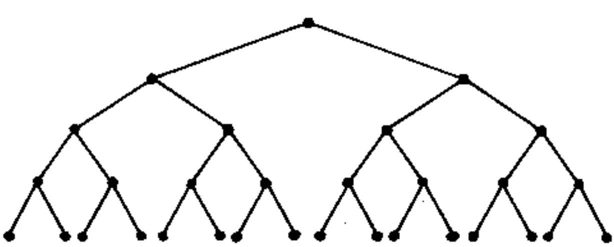
13. 2000

15. 999

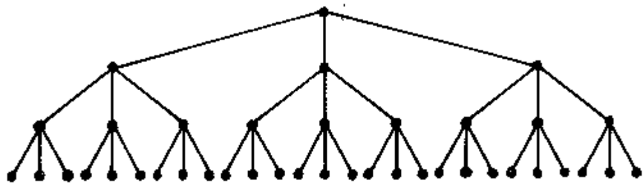
17. 1000000 đôla.

19. Theo Định lý 4 không tồn tại cây như thế vì điều đó là không thể với m = 2 hoặc m = 84.

21. Cây nhị phân hoàn toàn với chiều cao 4 :



Cây tam phân hoàn toàn với chiều cao 3 :



23. a) Theo Định lý 3 ta suy ra $n = mi + 1$. Vì $i + l = n$, ta có $l = n - i$.
Do đó $l = (mi + 1) - i = (m - 1)i + 1$.

b) Chúng ta có $n = m.i + 1$ và $i + l = n$. Vì thế $i = n - l$.
Từ đó suy ra $n = m(n - l) + 1$. Giải ra đối với n cho ta $n = (ml - 1)/(m - 1)$.
Từ $i = n - l$ chúng ta nhận được $i = \left[\frac{ml - 1}{m - 1}\right] - l = \frac{l - 1}{m - 1}$

25. $n - 1$

27. a) 1 b) 3 c) 5

29. a) Thư mục bố

b) Thư mục con hoặc tệp tin chứa trong nó

c) Thư mục con hoặc tệp tin chứa trong cùng một thư mục bố d) Tất cả các thư mục trên đường dẫn tới thư mục hiện thời

e) Tất cả các thư mục con và các tệp tin trong thư mục này hoặc thư mục con trong thư mục này v.v.

f) Độ dài của đường dẫn tới thư mục này

g) Độ sâu của hệ, tức là độ dài của đường dẫn dài nhất

31. Cho $n = 2^k$, trong đó k là số nguyên dương. Nếu $k = 1$, không có gì phải chứng minh cả vì ta có thể cộng 2 số bằng $n - 1 = 1$ bộ xử lý trong $\log 2 = 1$ bước. Giả sử có thể cộng $n = 2^k$ số trong $\log n$ bước bằng mạng kết nối kiểu cây của $n - 1$ bộ xử lý. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ là $2n = 2^{k+1}$ số mà ta đang muốn tính tổng. Mạng kết nối kiểu cây của $2n - 1$ bộ xử lý bao gồm mạng kết nối kiểu cây của $n - 1$ bộ xử lý cùng với 2 bộ xử lý mới như là con của mỗi lá. Trong một bước ta có thể dùng các lá của mạng lớn để tìm $x_1 + x_2, x_3 + x_4, ..., x_{2n-1} + x_{2n}$ cho ta n số, mà theo giả thiết quy nạp ta có thể cộng bằng $\log n$ bước bằng phần còn lại của mạng. Vì ta đã dùng $\log n + 1$ bước và $\log(2n) = \log 2 + \log n = 1 + \log n$. Đó là điều cần chứng minh.

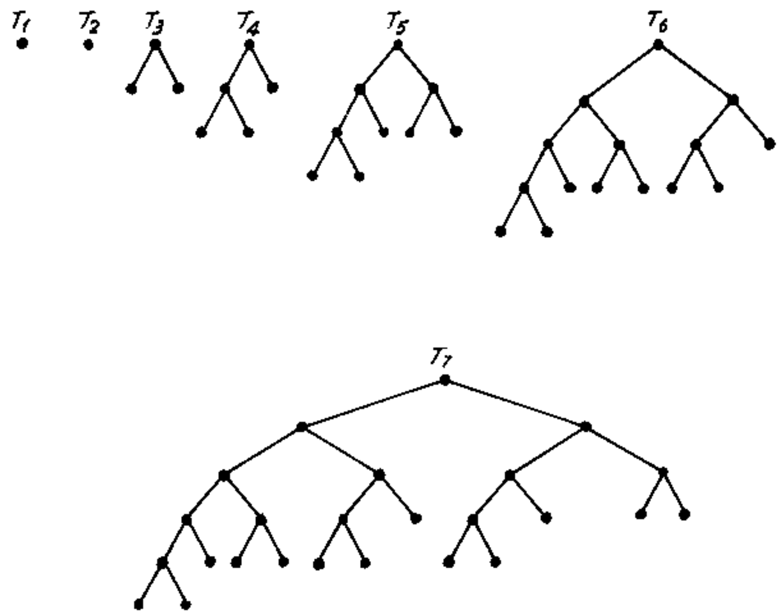
33. Chỉ có c

35. c và h

37. Giả sử cây T có ít nhất hai tâm. Gọi u và v là các tâm khác nhau và cả hai có tâm sai e, và u không liền kề với v. Vì T là liên thông, nên có đường đi đơn P từ u tới v. Gọi c là một đỉnh tùy ý nào đó trên đường đi này và khác u và v. Vì tâm sai của c ít nhất là e, nên có đỉnh w sao cho đường đi đơn duy nhất từ c tới w có độ dài ít nhất bằng e. Rõ ràng đường đi này không thể chứa cả u và v, nếu không thì sẽ có chu trình đơn. Thực ra đường đi này từ c tới w rời P và không quay về P một khi nó có thể đi theo một phần của P hướng tới hoặc là u hoặc là v. Không mất tính

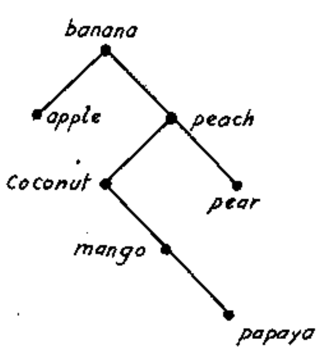
tổng quát, ta giả sử đường đi này không theo P tới u. Khi đó đường đi từ u tới c tới w là đơn, và có độ dài hơn e, là điều vô lý. Vì thế u và v là liền kề. Bây giờ vì hai tâm tùy ý là liền kề nếu nó có hơn 2 tâm nên T chứa K_3, một chu trình đơn, như một đồ thị con, điều này là mâu thuẫn.

39.

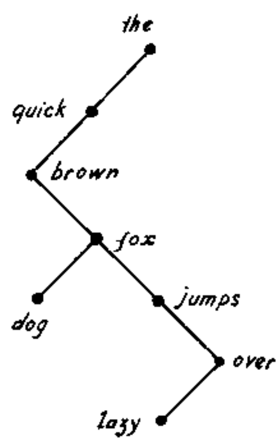


Tiết 8.2

1.



5.



3. a) 3 b) 1
c) 4 d) 5

7. Cần ít nhất $\lceil \log_3 4 \rceil = 2$ lần vì chỉ có bốn kết cục (do không yêu cầu xác định đồng xu giả là nặng hơn hay nhẹ hơn). Thực vậy, chỉ cần hai lần cân. Đầu tiên cân đồng xu 1 với đồng xu 2. Nếu chúng bằng nhau, thì ta cân đồng 1 với đồng 3. Nếu đồng

1 và đồng 3 bằng nhau, thì đồng giả là đồng 4, còn nếu chúng khác nhau thì đồng xu 3 là giả. Nếu đồng 1 và đồng 2 là khác nhau, thì ta cân đồng 1 với đồng 3. Nếu thăng bằng thì đồng 2 là giả, còn nếu không cân bằng thì đồng 1 là giả.

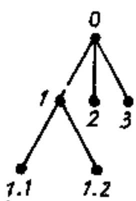
9. Cần ít nhất $\lceil \log_3 13 \rceil = 3$ lần cân. Thực vậy, chỉ cần ba lần cân. Đầu tiên ta đặt các đồng xu 1, 2 và 3 lên đĩa cân bên trái, và 4, 5 và 6 lên đĩa cân bên phải. Nếu bằng nhau thì áp dụng ví dụ 2 cho các đồng xu 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Còn nếu không thăng bằng ta áp dụng ví dụ 2 cho các đồng xu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8.

11. a) Có b) Không c) Có d) Có

13. *a* :000, *e* :001, *i* :01, *k* :1100, *o* :1101, *p* :11110, *u* :11111.

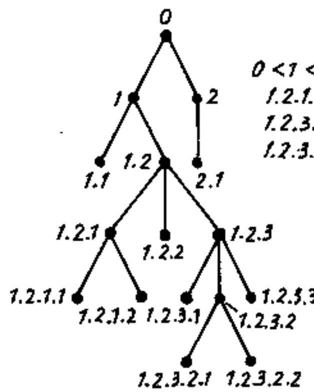
Tiết 8.3

1.



$0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 2 < 3$

3.



$0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.2.1 < 1.2.1.1 < 1.2.1.2 < 1.2.2 < 1.2.3 < 1.2.3.1 < 1.2.3.2 < 1.2.3.2.1 < 1.2.3.2.2 < 1.2.3.3 < 2 < 2.1$

5. Không

7. *a, b, d, e, f, g, c*

9. *a, b, e, k, l, m, f, g, n, r, s, c, d, h, o, i, j, p, q*

11. *d, b, i, e, m, j, n, o, a, f, c, g, k, h, p, l*

13. *d, f, g, e, b, c, a*

15. *k, l, m, e, f, r, s, n, g, b, c, o, h, i, p, q, j, d, a*

17. a) - * ↑ + *x* 23 - *y* + 3*x*5
b) *x*2 + 3 ↑ *y*3*x* + - * 5 -
c) ((((*x* + 2) ↑ 3)*(*y* - (3 + *x*))) - 5)

19. a) + + *x***xy*/*xy*, + *x*/ + **xyxy*
b) *xy** + *xy*/ + , *xy***x* + *y*/ +
c) ((*x* + (*x***y*)) + (*x*/*y*)), (*x* + (((*x***y*) + *x*)/*y*))

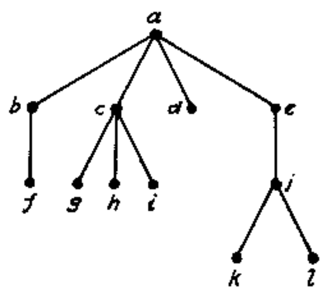
21. a) ↔ ¬ ∧ *pq* ∧ ¬ *p* ¬ *q* , ∨ ∧ ¬ *p* ↔ *q* ¬ *p* ¬ *q*
b) *pq* ∧ ¬ *p* ¬ *q* ¬ ∨ ↔ , *p* ¬ *qp* ¬ ↔ ∧ *q* ¬ ∨
c) (((*p* ∧ *q*) ¬) ↔ ((*p* ¬) ∨ (*q* ¬))) , (((*p* ¬) ∧ (*q* ↔ (*p* ¬))) ∨ (*q* ¬)) (toán tử một ngôi đi sau toán hạng của nó)

23. a) - ∩ AB ∪ A - BA b) *AB* ∩ *ABA* - ∪ - c) ((*A* ∩ *B*) - (*A* ∪ (*B* - *A*)))

25. 14

27. a) 1 b) 1 c) 4 d) 2205

29.



31. Dùng quy nạp toán học. Kết quả là tầm thường với danh sách có một phần tử. Giả sử kết quả là đúng cho danh sách n phần tử. Với bước quy nạp ta xuất phát từ cuối. Tìm dãy các đỉnh ở cuối danh sách bắt đầu từ lá cuối cùng kết thúc tại gốc, mỗi đỉnh là con cuối của đỉnh tiếp theo nó. Xóa lá này và áp dụng giả thiết quy nạp.

33. *c, d, b, f, g, h, e, a* trong mỗi trường hợp.

35. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp. gọi $S(X)$ và $O(X)$ tương ứng là số các ký hiệu và số các toán tử trong công thức được tạo đúng X. Mệnh đề là đúng với công thức được tạo đúng độ dài 1, vì chúng có 1 ký hiệu là 0 toán tử. Giả sử mệnh đề là đúng với tất cả các công thực được tạo đúng với độ dài nhỏ hơn n. Công thức được tạo đúng độ dài n phải có dạng $^*XY$ trong đó * là toán tử và X và Y là các công thức được tạo đúng độ dài nhỏ hơn n. Khi đó theo giả thiết quy nạp $S(^*XY) = S(X) + S(Y) = (O(X) + 1) + (O(Y) + 1) = O(X) + O(Y) + 2$. Vì $O(^*XY) = 1 + O(X) + O(Y)$. Từ đó suy ra $S(^*XY) = O(^*XY) + 1$

37. Chẳng hạn :

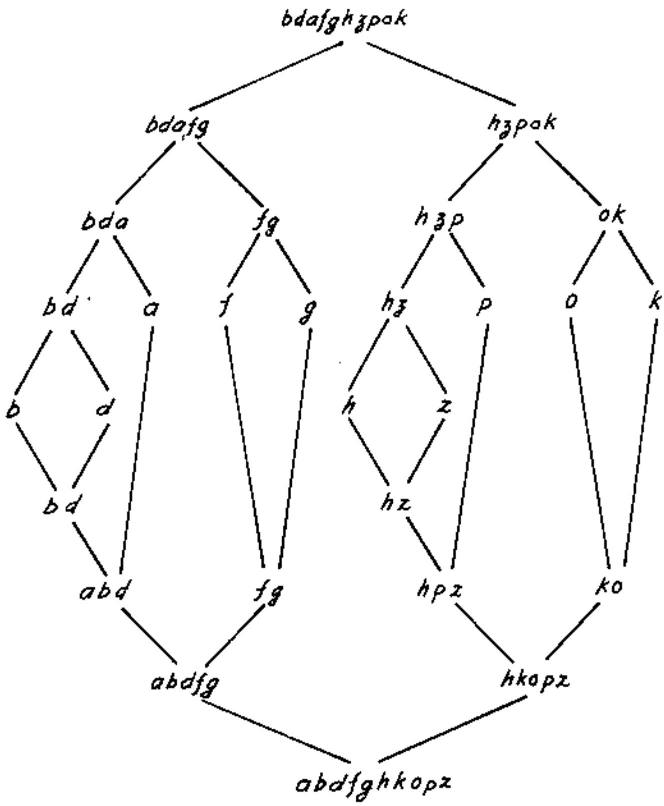
xy + zx∘ + x∘, xyz + + yx + + ,
xy xy ∘ ∘ xy ∘∘ z ∘ + , *xz x zz + ∘, yyyy∘∘∘* ,
zx + yz + ∘,

Tiết 8.4

1. Cuối bước thứ nhất : 1, 3, 5, 4, 7 ; Cuối bước thứ hai : 1, 3, 4, 5, 7 : Cuối bước thứ ba : 1, 3, 4, 5, 7 ; Cuối bước thứ tư : 1, 3, 4, 5, 7.

3. **procedure** *better bubblesort* ($a_1, a_2, \ldots, a_n$: số nguyên) ;
   i : = 1 ; *done* : = **false** ;
   while ($i<n$ and *done* = **false**)
   begin
   done : = **true**
   for j : = 1 **to** n - 1
   if $a_j > a_{j+1}$ **then**
   begin
   đổi chỗ a_j và a_{j+1} cho nhau.
   done : = **false** ;
   end
   i : = i + 1
   end {$a_1, a_2, \ldots, a_n$ là dãy tăng}

5.



7. Đó là hai danh sách 1, 2, ..., m - 1, $m + n$ - 1 và m, m + 1, ..., $m + n$ - 2, $m + n$.

9. a) 1, 5, 4, 3, 2 ; 1, 2, 4, 3, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ;
b) 1, 4, 3, 2, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; c) 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5.

11. $O(n^2)$

13. n - 1

15. 6

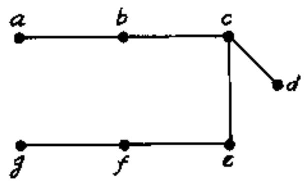
17. $O(n^2)$ trong trường hợp xấu nhất

19. **procedure** *mergesort* ($a_1, a_2, ..., a_n$: số nguyên)
$m := \lceil n/2 \rceil$
if $n > 1$ **then**
begin
$L_1 := (a_1, a_2, ..., a_m)$
$L_2 := (a_{m+1}, a_2, ..., a_n)$
$L_1 :=$ *mergesort* (L_1)
$L_2 :=$ *mergesort* (L_2)
$L := merge(L_1, L_2)$
end
else $L := (a_1)$ {danh sách một phần tử đã được sắp xếp}
{L được sắp xếp}.

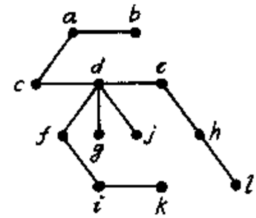
Tiết 8.5

1. $m - n + 1$

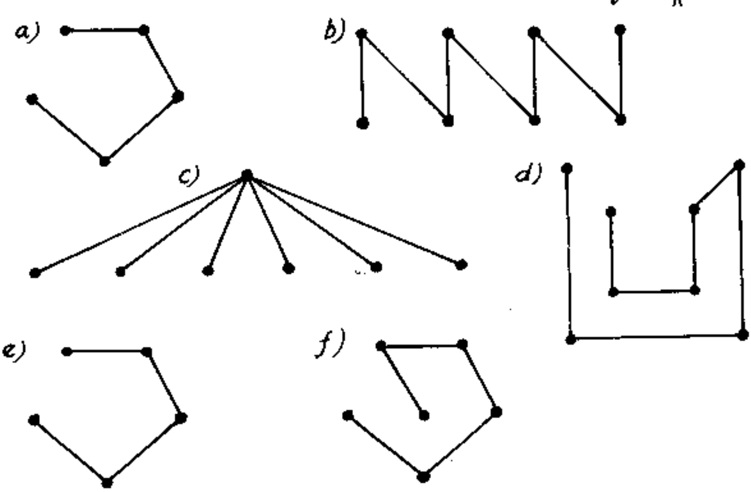
3.



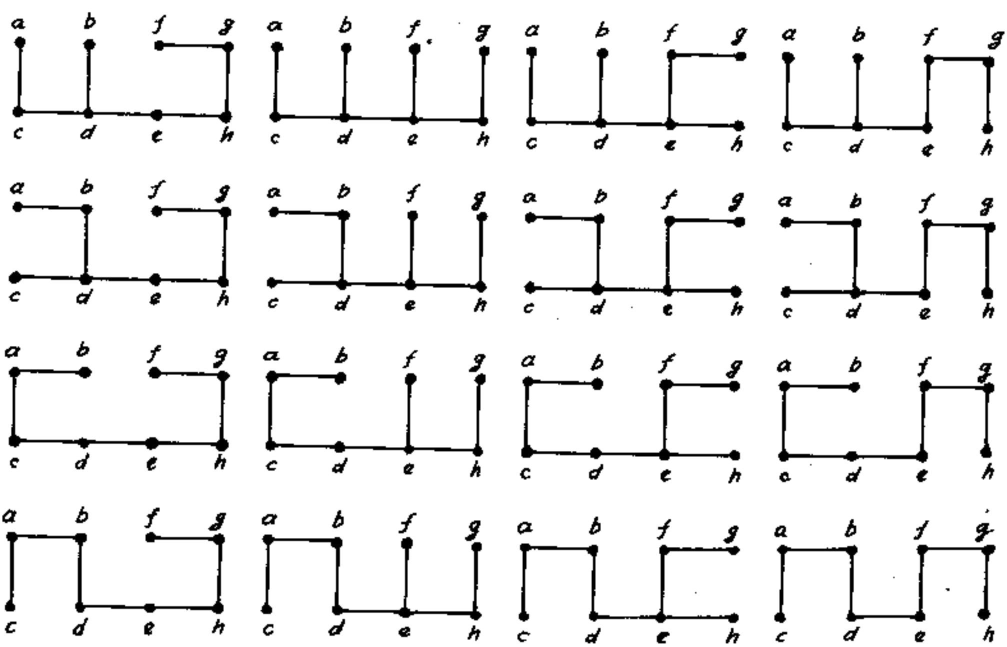
5.



7.

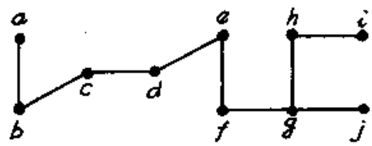


9.

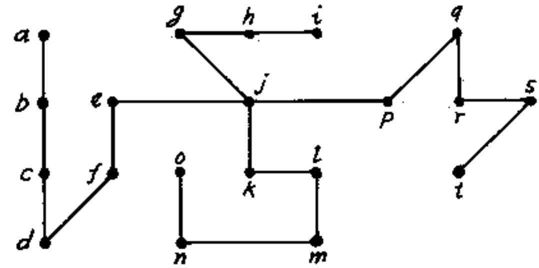


11. a) 3 b) 16 c) 4 d) 5

13.



15.



17. Tập các chuyến bay bị cắt là : Boston - New York, Detroit - Boaton, Boston - Washington, Naw York - Washington, New York - Chicago, Atlanta - Washington, Atlanta - Dallas, Atlanta - Los Angeles, Atlanta - St. Louis, St.Louis - Dallas, St.Louis - Detroit, St.Louis - Denvar, Dallas - San Diego, Dallas - Los Angelas, Dallaa - San Francisco, San Diego - Los Angeles, Los Angeles - San Francisco, San Francisco - Seattle.

19. Các cây

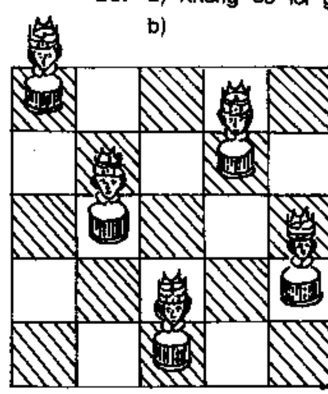
21. **procedure** *depth first search* (G : dơn đồ thị với các đỉnh được sắp thứ tự $v_1, v_2, \ldots, v_n$)

T := cây có gốc v_1 và không có đỉnh nào khác ;
visit (v_1)
{T là cây cần có}
procedure *visit* (v)
for mỗi láng giềng w của v
begin
  if w không thuộc T **then**
  begin
    đặt đỉnh w và cạnh $\{v, w\}$ vào T
    visit(w)
  end
end.

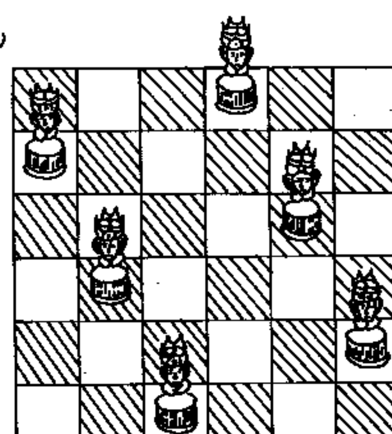
23. Chứng minh bằng quy nạp theo chiều dài của đường đi : Nếu đường đi có độ dài 0, thì kết quả là tầm thường. Nếu độ dài là 1 thì u là liền kề với v, vậy u ở mức 1 trong cây khung ưu tiên chiều rộng. Giả sử kết quả là đúng cho đường đi độ dài l. Nếu độ dài của đường đi là $l + 1$, gọi u' là đỉnh giáp cuối trong đường đi ngắn nhất từ v tới u. Theo giả thiết quy nạp u' ở mức l trong cây khung ưu tiên chiều rộng. Nếu u ở mức không quá l thì rõ ràng độ dài của đường đi ngắn nhất từ v tới u cũng không vượt quá l. Vì thế u còn chưa được ghép vào cây khung ưu tiên chiều rộng, sau khi các đỉnh mức l đã được gộp vào. Vì u là liền kề u' nó sẽ được ghép thêm vào ở mức $l + 1$ (mặc dù cạnh nối u' với u không cần ghép vào).

25. a) Không có lời giải.

b)



c)



27. Xuất phát tại đỉnh và đi theo đường đi không trở lại các đỉnh đến khi nào không thể đi được nữa, khi đó quay lại nơi xuất phát sau khi viếng thăm tất cả các đỉnh. Khi không thể đi dọc theo đường đi, quay lui trở lại và cố mở rộng đường đi hiện thời theo hướng khác.

29. Lấy hợp của các cây khung của các thành phần liên thông của G. Chúng là rời nhau nên kết quả là một rừng.

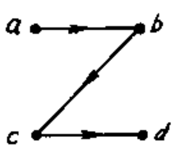
31. $m - n + c$

33. Dùng cách tìm kiếm ưu tiên chiều rộng cho mỗi thành phần liên thông.

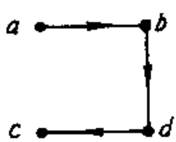
35. Gọi T là cây khung trên Hình 3 và T_1, T_2, T_3 và T_4 là các cây khung trên Hình 4. Ký hiệu khoảng cách giữa T' và T'' là $d(T', T'')$. Khi đó $d(T, T_1) = 6$, $d(T, T_2) = 4$, $d(T, T_3) = 4$, $d(T, T_4) = 2$, $d(T_1, T_2) = 4$, $d(T_1, T_3) = 4$, $d(T_1, T_4) = 6$, $d(T_2, T_3) = 4$, $d(T_2, T_4) = 2$ và $d(T_3, T_4) = 4$.

37. Giả sử $e_1 = \{u, v\}$ như đã nói trong đề bài. Khi đó $T_2 \cup \{e_1\}$ có chu trình đơn C chứa e_1. Đồ thị $T_1 - \{e_1\}$ có hai thành phần liên thông. Các điểm cuối của e_1 thuộc các thành phần liên thông khác nhau. Đi theo C từ u ngược tới e_1 cho tới khi bạn tới đỉnh đầu tiên trong cùng một thành phần liên thông với v. Cạnh vừa mới đi qua là e_2. Rõ ràng $T_2 \cup \{e_1\} - \{e_2\}$ là cây vì e_2 thuộc C. Cũng vậy, $T_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}$ là cây vì e_2 nối hai thành phần liên thông với nhau.

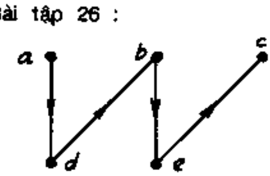
39. Bài tập 24 :



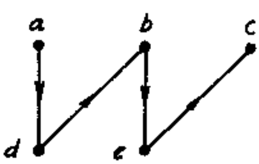
Bài tập 25 :



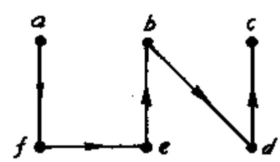
Bài tập 26 :



Bài tập 27 :



Bài tập 28 :



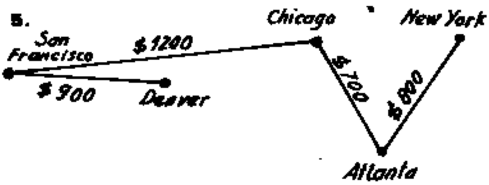
41. Trước tiên hãy xây dựng chu trình Euler trong đồ thị có hướng. Sau đó xóa khỏi chu trình này mọi cạnh đi tới đỉnh đã được viếng thăm trước đó.

Tiết 8.6

1. Deep Spring - Oasis, Oasis - Dyer, Oasis - Silverspeak, Silverspeak - Goldfield, Lida - Gold Point, Gold Point - Beatty, Lida - Goldfield, Goldfield - Tonopah, Tonopah - Manhattan, Tonopah - Warm Springs.

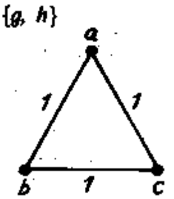
3. $\{e, f\}$, $\{c, f\}$, $\{e, h\}$, $\{h, i\}$, $\{b, e\}$, $\{b, d\}$, $\{a, d\}$, $\{g, h\}$.

5.



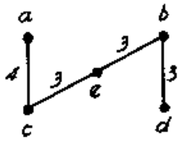
7. $\{e, f\}$, $\{a, d\}$, $\{h, i\}$, $\{b, d\}$, $\{c, f\}$, $\{e, h\}$, $\{b, c\}$, $\{g, h\}$

9.

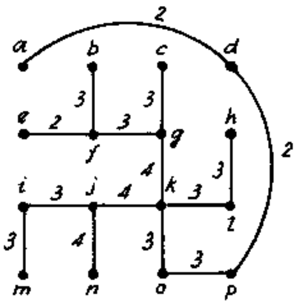


11. Thay cho việc chọn các cạnh có trọng số tối thiểu ở mỗi giai đoạn, hãy chọn các cạnh có trọng số lớn nhất có cùng tính chất.

13.



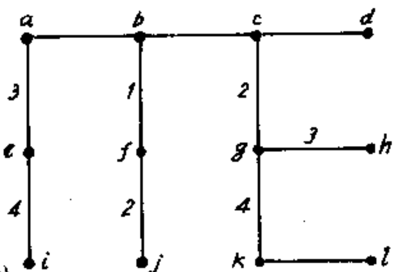
15.



17. Trước tiên tìm cây khung nhỏ nhất T của đồ thị G có n cạnh. Khi đó với $i = 1$ tới $n - 1$ ta chỉ xóa cạnh thứ i của T khỏi G và tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị còn lại. Chọn một trong $n - 1$ cây với độ dài ngắn nhất.

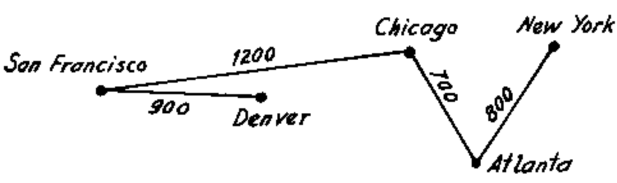
19. Nếu tất cả các cạnh có trọng số khác nhau, ta sẽ nhận được mâu thuẫn trong khi chứng minh rằng thuật toán Prim là việc tốt khi cạnh e_{k+1} được ghép thêm vào T và cạnh e bị xóa, thay cho việc có thể tạo ra cây khung khác.

21.

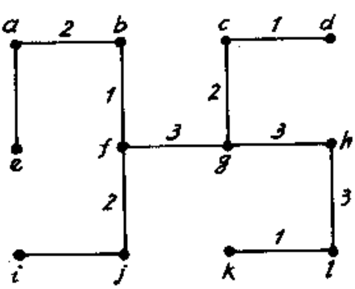


23. Như thuật toán Kruskal, chỉ khác là khi xuất phát $T := $ tập các cạnh cho trước và lặp từ $i = 1$ tới $i = n - 1 - s$ trong đó s là số các cạnh của tập trên.

25. a)



b)



27. Theo Bài tập 24, tại mỗi giai đoạn của thuật toán Sollin ta có một rừng. Vì thế, sau khi $n - 1$ cạnh được chọn, ta có một cây. Ta chỉ còn phải chỉ ra đó là cây khung tối thiểu. Gọi T là cây khung tối thiểu có nhiều cạnh chung nhất với cây Sollin S. Nếu $T \neq S$ khi đó có cạnh $e \in S - T$ được thêm vào ở một giai đoạn nào đó trong thuật toán, trước giai đoạn đó tất cả các cạnh trong S cũng là các cạnh trong T. $T \cup \{e\}$ chứa một chu trình đơn duy nhất. Tìm cạnh $e' \in S - T$ và cạnh $e'' \in T - S$ trên chu trình này và "liền kề" khi nhìn các cây của giai đoạn này như "các siêu đỉnh". Khi đó theo thuật toán ta có $w(e') \leqslant w(e'')$. Vì thế thay T bởi $T - \{e''\} \cup \{e'\}$ để tạo ra cây khung tối thiểu gần S hơn T.

29. Mỗi một trong r cây được nối với ít nhất một cây khác bởi một cạnh mới. Vì thế cuối cùng có nhiều nhất $r/2$ cây (mỗi cây mới chứa hai hoặc nhiều hơn cây cũ). Để làm điều này chúng ta cần thêm vào $r - (r/2) = r/2$ cạnh. Vì số các cạnh thêm vào là nguyên, nên ít nhất số đó là $\lceil r/2 \rceil$.

31. Nếu $k \geqslant \log n$, khi đó $n/2^k \leqslant 1$, vì thế $\lceil n/2^k \rceil = 1$, theo Bài 30, thuật toán kết thúc sau nhiều nhất $\log n$ bước lặp.

Bài tập bổ sung

1. Giả sử T là một cây. Khi đó T không có chu trình đơn. Nếu ta ghép thêm cạnh e nối hai đỉnh không liền kề u và v, thì rõ ràng một chu trình đơn được tạo ra, vì khi e được thêm vào T, đồ thị nhận được không còn là cây nữa vì có quá nhiều cạnh. Chu trình đơn duy nhất được tạo thành từ cạnh e cùng với đường đi duy nhất P trong T từ v tới u. Giả sử T thỏa mãn những điều kiện đã cho. Tất cả những điều ta cần chứng tỏ là T liên thông, vì trong đồ thị không có chu trình đơn. Giả sử T không liên thông. Khi đó gọi u và v thuộc các thành phần liên thông khác nhau. Việc thêm cạnh $e = \{u, v\}$ không thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

3. Giả sử rằng cây T có n đỉnh với các bậc tương ứng là $d_1, d_2, \dots, d_n$. vì $2e = \sum_{i=1}^{n} d_i$ và $e = n - 1$ ta có $2(n - 1) = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Vì mỗi $d_i \geqslant 1$ ta suy ra $2(n - 1) = n + \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)$ hay là $n - 2 = \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)$. Vì thế, nhiều nhất $n - 2$ số hạng của tổng này bằng 1 hoặc lớn hơn. Do vậy, ít nhất có 2 số hạng bằng không. Từ đó suy ra $d_i = 1$ với ít nhất hai giá trị của i.

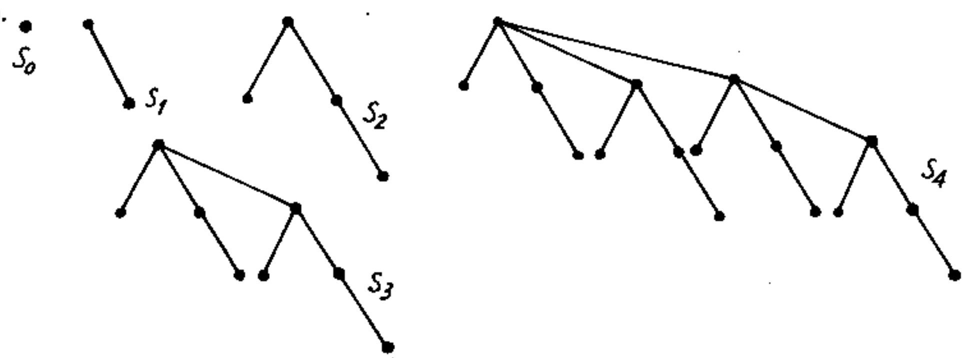
5. $2n - 2$

7. T không có chu trình, vì thế không thể có đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

9. Tô màu mỗi thành phần liên thông một cách riêng rẽ. Với mỗi thành phần liên thông này, trước hết chọn gốc cho cây, sau đó tô tất cả các đỉnh ở mức chẵn bằng màu đỏ, và các đỉnh ở mức lẻ tô bằng màu xanh.

11. Cận trên : k^h ; cận dưới : $2\lceil k/2 \rceil^{h-1}$

13.



15. Dùng quy nạp toán học. Kết quả là tầm thường với $k = 0$. Giả sử nó đúng với $k - 1$. T_{k-1} là cây mẹ của T. Theo quy nạp, cây con của T có thể nhận được từ T_0, T_1, ... T_{k-2} theo cách đã nói. Cuối cùng nối r_{k-2} với r_{k-1} như trong định nghĩa của S_k cây.

17. **procedure** *level* (T : cây có gốc được sắp với gốc r) :
queue := dãy gồm chỉ gốc r
while *queue* còn chứa ít nhất một số hạng
begin
v := đỉnh đầu tiên trong queue
liệt kê v
xóa v khỏi queue và đặt các con của v vào cuối queue
end

19. Xây dựng cây bằng cách chèn gốc đối với địa chỉ 0, và sau đó chèn cây con đối với mỗi đỉnh được gán nhãn i, với i là số nguyên dương, dựng các cây con với các nhãn là i, j với j là nguyên, v.v.

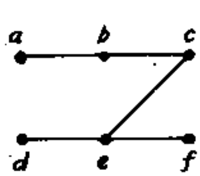
20. procedure insertion ($a_1, a_2, ..., a_n$: số thực)
for $j := 2$ **to** n
begin
$i := 1$
while $a_j > a_i$
$i := i + 1$;
$m := a_j$
for $k := 0$ **to** $j - i - 1$
$a_{j-k} := a_{j-k-1}$
$a_i := m$
end {$a_1, a_2, ..., a_n$ là được sắp}

23. Nếu u là đỉnh treo và $e = \{u, v\}$ là một cạnh của đồ thị liên thuộc với u, khi đó không có cạnh nào khác liên thuộc với u. Do vậy, e phải thuộc bất kỳ cây khung nào, vì nếu không thì cây khung có thể không chứa cạnh liên thuộc với u.

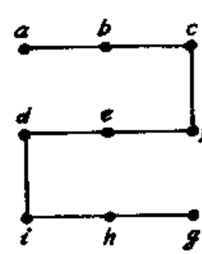
25. a) Có b) Không c) Có

27. Các đồ thị kết quả không có cạnh thuộc nhiều hơn một chu trình đơn có kiểu như đã mô tả. Vì thế nó là một cactus.

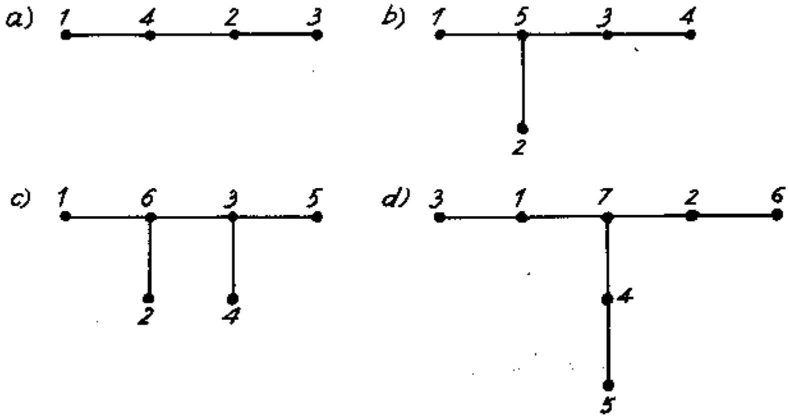
29.



31.



33.

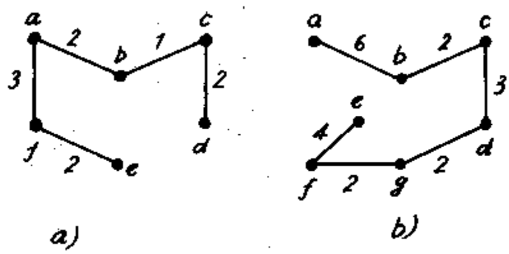


35. 6

37. a) Có b) Không c) Có

39. Gọi G' là đồ thị nhận được bằng cách xóa khỏi G đỉnh v và tất cả các cạnh liên thuộc với v. Cây khung nhỏ nhất của G có thể nhận được bằng cách lấy cạnh có trọng số tối thiểu liên thuộc với v cùng với cây khung nhỏ nhất G'.

41.



CHƯƠNG 9

Tiết 9.1

1. a) 1 b) 1 c) 0 d) 0

3. (0, 0) and (1, 1)

5. $x + xy = x.1 + xy = x(1 + y) = x(y + 1) = x.1 = x$

7.

x	y	z	$x\bar{y}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}z$	$x\bar{y}+y\bar{z}+\bar{x}z$	$\bar{x}y$	$\bar{y}z$	$x\bar{z}$	$\bar{x}y+\bar{y}z+x\bar{z}$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.

x	$x + x$	$x . x$
0	0	0
1	1	1

11.

x	$x + 1$	$x . 0$
0	1	0
1	1	0

13.

x	y	z	$y + z$	$x+(y+z)$	$x + y$	$(x+y)+z$	yz	$x(yz)$	xy	$(xy)z$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

15.

x	y	xy	$\overline{(xy)}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} + \bar{y}$	$x + y$	$\overline{(x + y)}$	$\bar{x}\ \bar{y}$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1

17.

x	y	$x \oplus y$	$x + y$	xy	$\overline{(xy)}$	$(x+y)\,\overline{(xy)}$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y}+\bar{x}y$
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

19. a) Đúng, như bảng giá trị chân lý cho thấy.
b) Sai. Ví dụ lấy $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$
c) Sai. Ví dụ lấy $x = 1,\ y = 1,\ z = 0.$

21. Theo luật De Morgan phần bù của một biểu thức giống như đối ngẫu, trừ diều là phải lấy phần bù của mỗi biến.

23. 16

25. Theo các luật nuốt, phân phối và đồng nhất, thì
$x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 = (x \vee x) \wedge (x \vee \bar{x}) = x \vee (x \wedge \bar{x}) = x \wedge 1 = x.$

27. Vì $0 \vee 1 = 1$ và $0 \wedge 1 = 0$, theo các luật đồng nhất và giao hoán, suy ra $\bar{0} = 1$
Tương tự, vì $1 \vee 0 = 1$ và $1 \wedge 0$, suy ra $\bar{1} = 0$

29. Trước hết chú ý rằng $x \wedge 0 = 0$ và $x \vee 1 = 1$ với mọi x - (điều này dễ dàng chứng minh được). Để chứng minh hằng dẳng thức thứ nhất, chỉ cần chúng tỏ rằng : $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1$ và $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 0$. Theo các luật kết hợp, phân phối, giao hoán, nuốt và đồng nhất, ta có $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = y \vee ((x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{y})) = y \vee (1 \wedge (x \vee \bar{y}) = y \vee (x \vee \bar{y}) = (y \vee \bar{y}) \vee x = 1 \vee x = 1$ và $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = \bar{y} \wedge (\bar{x} \wedge (x \vee y)) = \bar{y} \wedge ((\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge y)) = \bar{y} \wedge (0 \vee (\bar{x} \wedge y)) = \bar{y} \wedge (\bar{x} \wedge y) = \bar{x} \wedge (y \wedge \bar{y}) = \bar{x} \wedge 0 = 0$. Hằng đẳng thức thứ hai được chứng minh tương tự.

31. Dùng các giả thiết, Bài tập 25, và luật phân phối suy ra $x = x \vee 0 = x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y = 0$. Tương tự, $y = 0$. Để chứng minh mệnh đề thứ hai, chú ý rằng $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y = 1$. Tương tự, $y = 1$

Tiết 9.2

1. a) $\bar{x}\bar{y}z$ b) $\bar{x}y\bar{z}$ c) $\bar{x}yz$ d) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

3. a) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ b) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz$
c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$ d) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

5. $wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}xyz + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

7. a) $\bar{x} + \bar{y} + z$ b) $x + y + z$ c) $x + \bar{y} + z$

9. $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0$ nếu và chỉ nếu $y_i = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Điều này đúng nếu và chỉ nếu $x_i = 0$ khi $y_i = x_i$ và $x_i = 1$ khi $y_i = \bar{x}_i$.

11. a) $x + y + z$
b) $(x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$
c) $(x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})$
d) $(x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

13. a) $x + y + z$ b) $x + \overline{(y + \overline{(\bar{x} + z)})}$
c) $\overline{(x + \bar{y})}$ d) $\overline{(x + \overline{(x + \bar{y} + \bar{z})})}$

15. a)

x	$\overline{x}$	$x \downarrow x$
1	0	0
0	1	1

b)

x	y	xy	$x \downarrow x$	$y \downarrow y$	$(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0

c)

x	y	$x+y$	$(x \downarrow y)$	$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	0

17. a) $(((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))) \mid (z \mid z)$

b) $(((x \mid x) \mid (z \mid z)) \mid y) \mid (((x \mid x) \mid (z \mid z)) \mid y)$

c) x

d) $(x \mid (y \mid y)) \mid (x \mid (y \mid y))$

19. Không biểu diễn $\overline{x}$ bằng cách dùng + và •, vì không có cách nào đạt được giá trị 0 nếu đầu vào là 1.

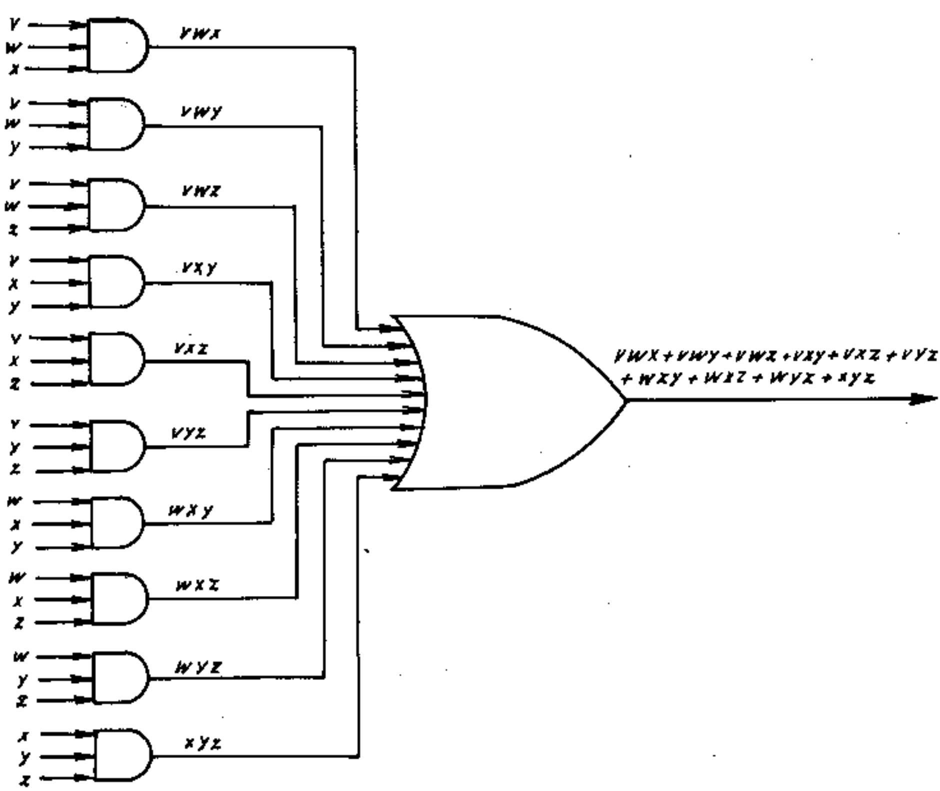
Tiết 9.3

1. $(x + y)\overline{y}$

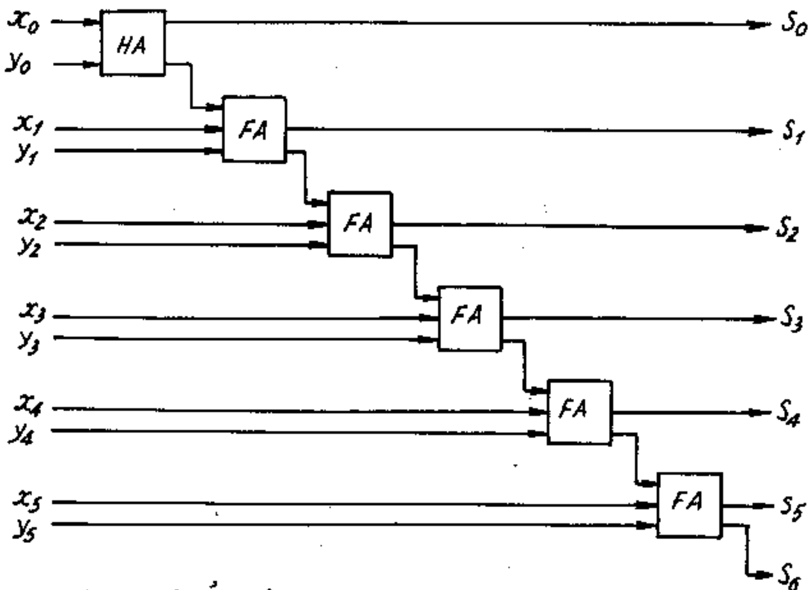
3. $\overline{(xy)} + (\overline{z} + x)$

5. $(x + y + z) + (\overline{x} + y + z) + (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$

7.



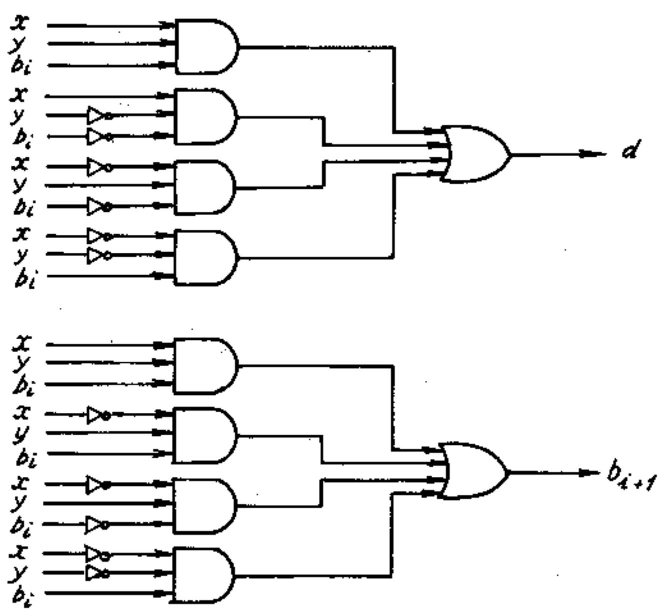
9.



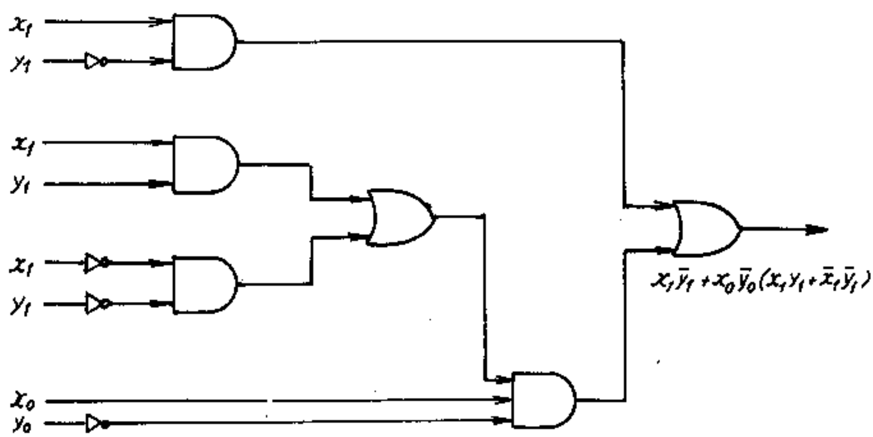
HA : Bộ nửa cộng

FA : Bộ cộng đầy đủ

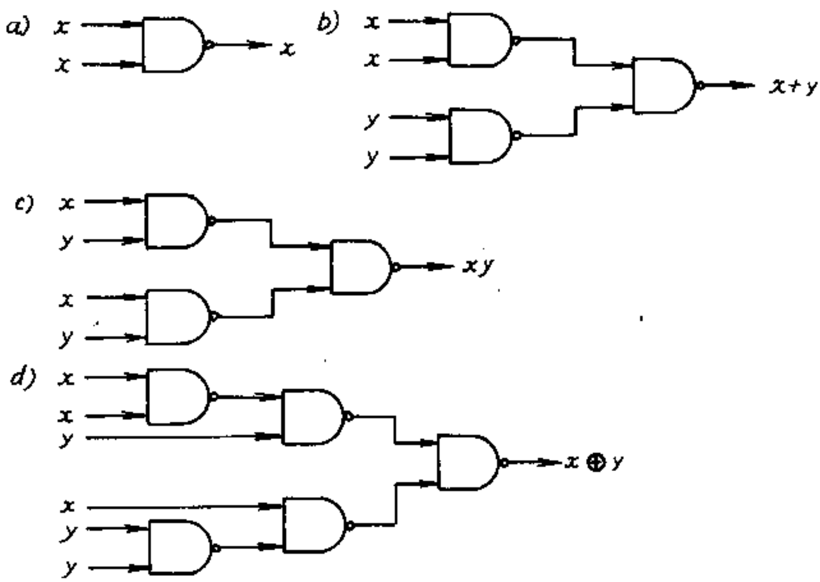
11.



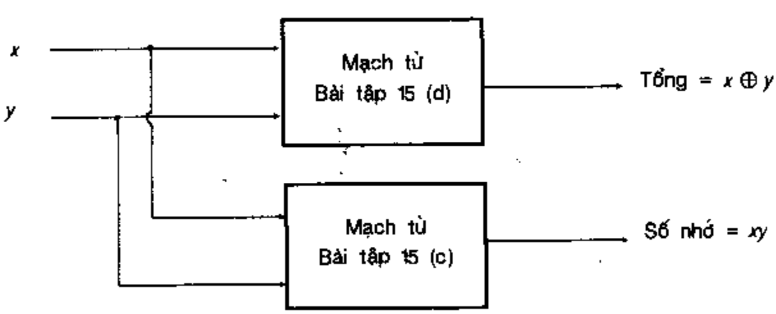
13.


x_1
y_1
x_1
y_1
x_1
y_1
x_0
y_0
$x_1\bar{y}_1 + x_0\bar{y}_0(x_1y_1 + \bar{x}_1\bar{y}_1)$

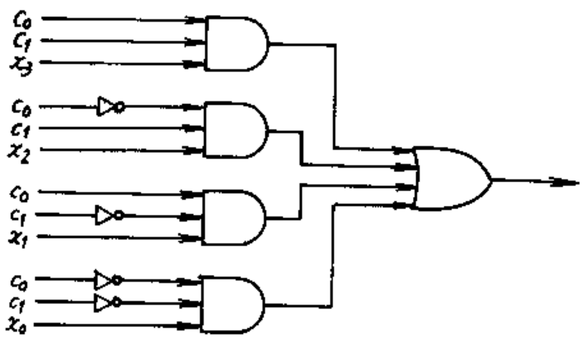
15.


a) x
x
x
b) x
x
y
y
$x + y$
c) x
y
x
y
xy
d) x
x
y
x
y
y
$x \oplus y$

17.


x
y
Mạch từ
Bài tập 15 (d)
Tổng = $x \oplus y$
Mạch từ
Bài tập 15 (c)
Số nhớ = xy

19.



Tiết 9.4

1. a)

	y	$\overline{y}$
x		
$\overline{x}$	1	

b) xy và $\overline{x}\,\overline{y}$

3. a)

	y	$\overline{y}$
x		1
$\overline{x}$		

b)

	y	$\overline{y}$
x	1	
$\overline{x}$		1

c)

	y	$\overline{y}$
x	1	1
$\overline{x}$	1	1

5. a)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x				
$\overline{x}$		1		

b) $\overline{x}yz$, $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $xy\overline{z}$

7. a)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	
$\overline{x}$				

b)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	
$\overline{x}$	1		1	

c)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x	1	1		
$\overline{x}$		1		1

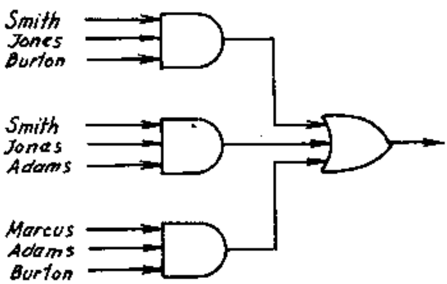
9. a)

	yz	$y\bar z$	$\bar y \bar z$	$\bar y z$
wx				
$w\bar x$				
$\bar w \bar x$				
$\bar w x$		1		

b) $wxy\bar z$, $\bar w xyz$, $\bar w x\bar y \bar z$, $\bar w \bar x y \bar z$

11. a) 32 b) 5

13.

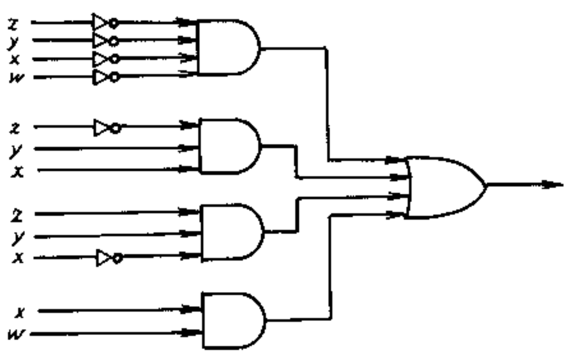


15. a) $\bar x z$
b) y
c) $x\bar z + \bar x z + \bar y z$
d) $xz + \bar x y + \bar y \bar z$

17. a) $wxz + wx\bar y + w\bar y z + w\bar x y \bar z$
b) $x\bar y z + \bar w \bar y z + wxy\bar z + w\bar x yz + \bar w \bar x y \bar z$
c) $\bar y x + wxz + w\bar x\bar y + \bar w \bar x y \bar z$
d) $wy + yz + \bar x y + wxz + \bar w \bar x z$

19. $x(y + z)$

21.



23. $\bar x \bar z + xz$

Bài tập bổ sung

1. a) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$;
b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$;
$x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$;
$x = 1$, $y = 1$, $z = 0$; $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.
c) Không có giá trị nào.

3. a) Có b) Không c) Không d) Có

5. $2^{2^{n-1}}$

7. a) Nếu $F(x_1, \ldots, x_n) = 1$ thì $(F + G)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) + G(x_1, \ldots, x_n) = 1$ theo luật nuốt. Do đó $F \leqslant F + G$.

b) Nếu $(FG)(x_1, \dots, x_n) = 1$, thì $F(x_1, \dots, x_n) . G(x_1, \dots, x_n) = 1$. Do đó, $F(x_1, \dots, x_n) = 1$. Suy ra $FG \leq F$.

9. a) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
b) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
c) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

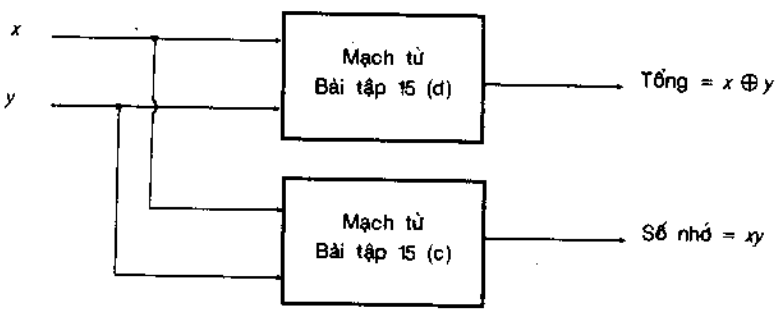
11.

x	y	$x \odot y$	$x \oplus y$	$\overline{x \oplus y}$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1

13. Có, như bảng chân lý sẽ cho thấy

15. a) 6 b) 5 c) 5 d) 6

17.



19. $x_3 + x_2\bar{x}_1$

21. Giả sử có các trọng là a và b. Khi đó tồn tại một số thực T sao cho $xa + yb \geq T$ đối với (1, 0) và (0, 1), nhưng với $xa + yb < T$, đối với (0, 0) và (1, 1). Do đó $a \geq T$, $b \geq T$, $0 < T$, và $a + b < T$. Vậy a và b là dương, điều này kéo theo $a + b > a \geq T$, mâu thuẫn.

CHƯƠNG 10

Tiết 10.1

1. a) **câu** ⇒ **danh ngữ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động từ** ⇒ ...(sau ba bước)...⇒ *the happy hare runs.*

   b) **câu** ⇒ **danh ngữ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động từ trạng từ** ...(sau năm bước)... ⇒ *the sleepy tortoise runs quickly.*

   c) **câu** ⇒ **danh ngữ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ danh từ ngoại động từ danh ngữ** ⇒ **quán từ danh từ ngoại động từ quán từ danh từ** ⇒...(sau 5 bước)...⇒ *the tortoise passes the hare.*

   d) **câu** ⇒ **danh ngữ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ ngoại động từ danh ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ ngoại động từ quán từ tính từ danh từ** ⇒...(sau 6 bước)...⇒ *the sleepy hare passes the happy tortoise* .

3. Cách duy nhất để có một danh từ, như tortoise, ở cuối là có một danh ngữ ở cuối mà ta có thể đạt được chỉ qua sản xuất **câu** → **danh ngữ ngoại động ngữ danh ngữ**. Tuy nhiên, **ngoại động ngữ** → **ngoại động từ** → *passes* , nên câu này không chứa *passes* .

5. $S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000111$

7. a) $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 00S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 00S111 \Rightarrow 00S1111 \Rightarrow 001111$

   b) $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 001A \Rightarrow 0011A \Rightarrow 00111A \Rightarrow 001111$

9. $S \Rightarrow 0SAB \Rightarrow 00SABAB \Rightarrow 00ABAB \Rightarrow 00AABB \Rightarrow 001ABB \Rightarrow 0011BB \Rightarrow 00112B \Rightarrow 001122$

11. a) $S \to 00S$, $S \to \lambda$

    b) $S \to 10A$, $A \to 00A$, $A \to \lambda$

    c) $S \to AAS$, $S \to BBS$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $S \to \lambda$, $A \to 0$, $B \to 1$

    d) $S \to 0000000000A$, $A \to 0A$, $A \to \lambda$

    e) $S \to AS$, $S \to ABS$, $S \to A$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$

    f) $S \to ABS$, $S \to \lambda$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$

    g) $S \to ABS$, $S \to T$, $S \to U$, $T \to AT$, $T \to A$, $U \to BU$, $U \to B$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$

13. a) Loại 2, không phải loại 3

    b) Loại 3, không phải loại 2

    c) Loại 0, không phải loại 1

    d) Loại 2, không phải loại 3

e) Loại 2

f) Loại 0, không phải loại 1

g) Loại 3

h) Loại 0, không phải loại 1

i) Loại 2, không phải loại 3

j) Loại 2, không phải loại 3

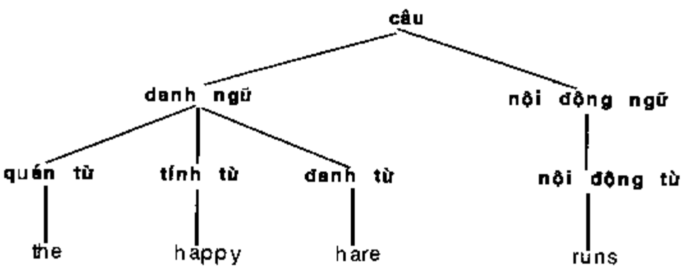
15. Giả sử S_1 và S_2 tương ứng là các ký hiệu xuất phát của G_1 và G_2. Giả sử S là ký hiệu xuất phát mới

a) Thêm S và các sản xuất $S \rightarrow S_1$ và $S \rightarrow S_2$

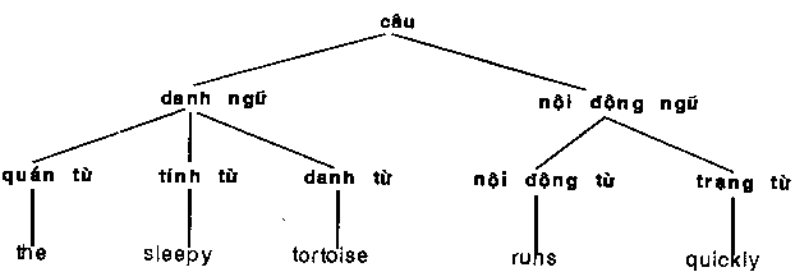
b) Thêm S và sản xuất $S \rightarrow S_1S_2$

c) Thêm S và các sản xuất $S \rightarrow \lambda$ và $S \rightarrow S_1S$

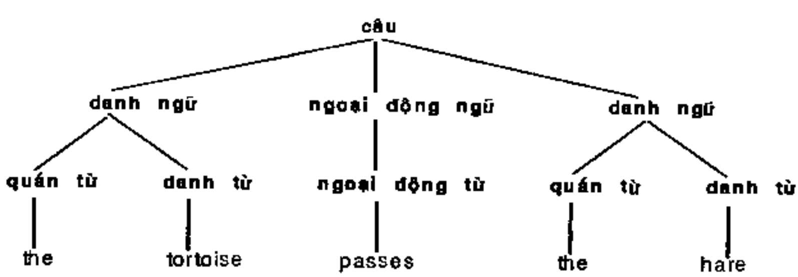
17. a)



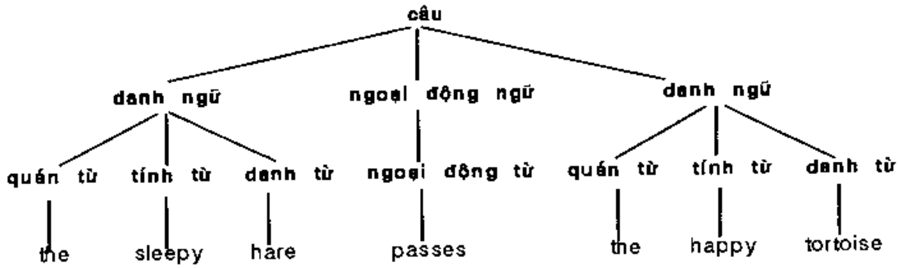
b)



c)

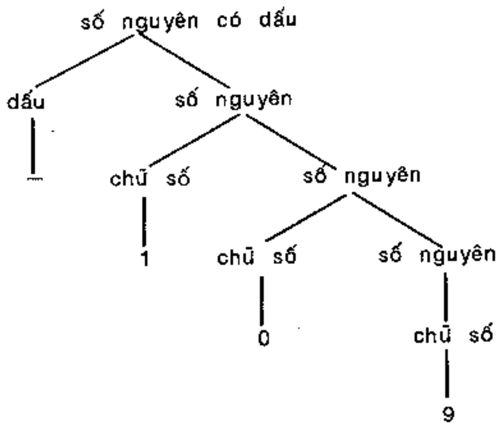


d)



19. a) Có b) Không c) Có d) Không

21.



23. a) S → <dấu><số nguyên>

S → <dấu><số nguyên><số nguyên dương>

<dấu> → +

<dấu> → −

<số nguyên> → <chữ số>

<số nguyên> → <số nguyên><chữ số>

<chữ số> → i, i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0

<số nguyên dương> → <số nguyên><chữ số khác không><số nguyên><số nguyên dương> → <chữ số khác không>

<chữ số khác không> → i, i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9

b) <số thập phân có dấu> ::= <dấu><số nguyên> | <dấu><số nguyên>,<số nguyên dương>

<dấu> ::= + | −

<số nguyên> ::= <chữ số> | <số nguyên><chữ số>

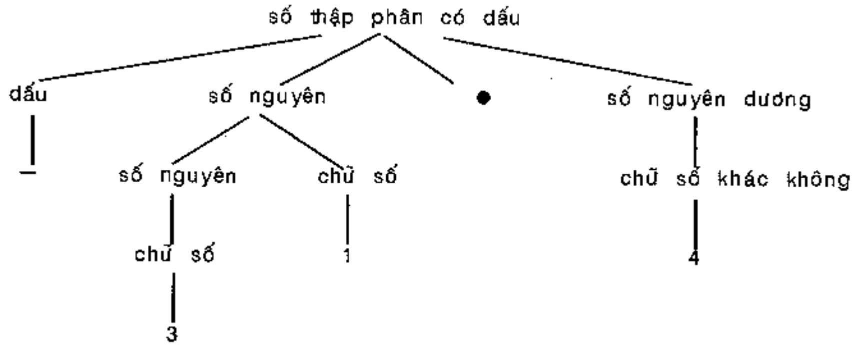
<chữ số> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<chữ số khác không> ::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<số nguyên dương> ::= <số nguyên><chữ số khác không> | <chữ số khác không><số nguyên> | <số nguyên><số nguyên khác không><số

nguyên > | <chữ số khác không>

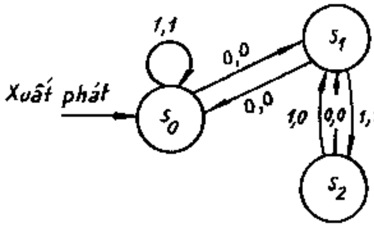
c)



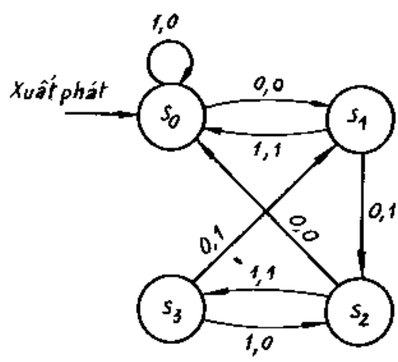
25. $\{(u, v) \mid v$ là dẫn xuất từ $u\}$

Tiết 10.2

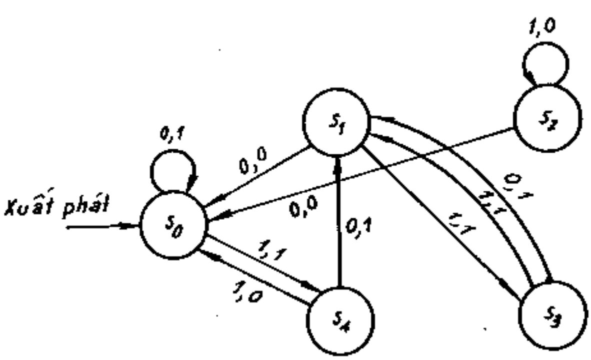
1. a)



b)

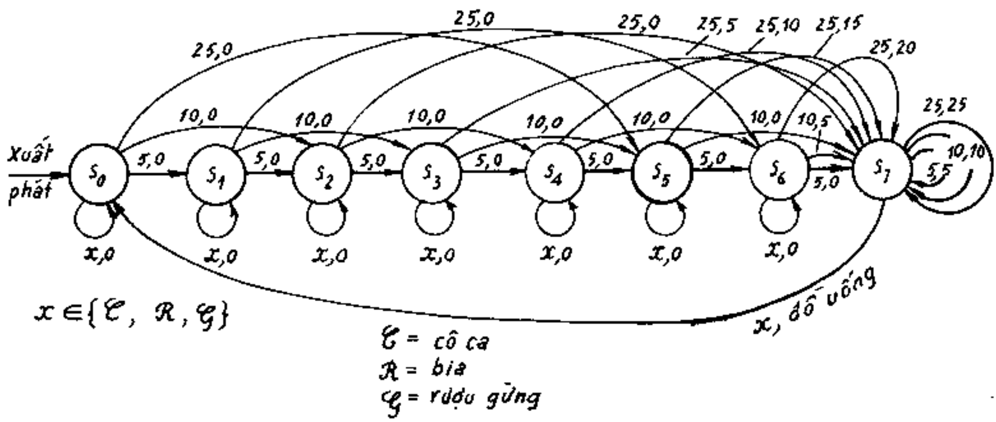


c)

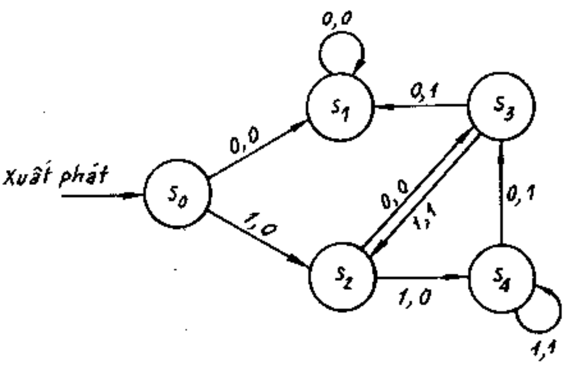


3. a) 1100 b) 00110110 c) 11111111111

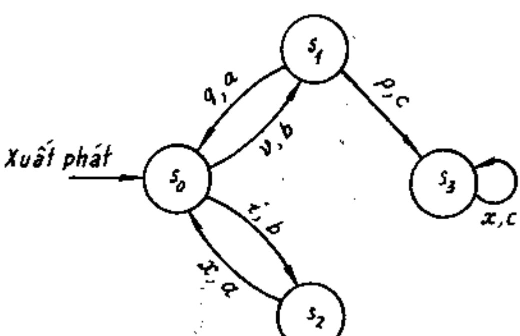
5.



7.

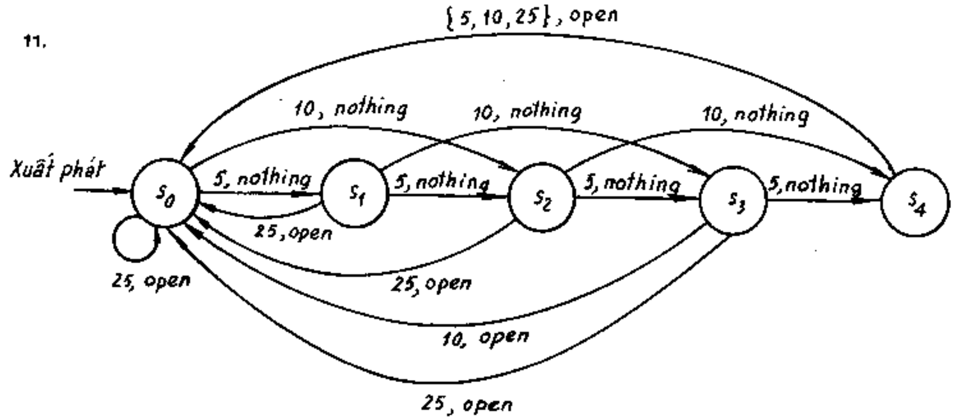


9.

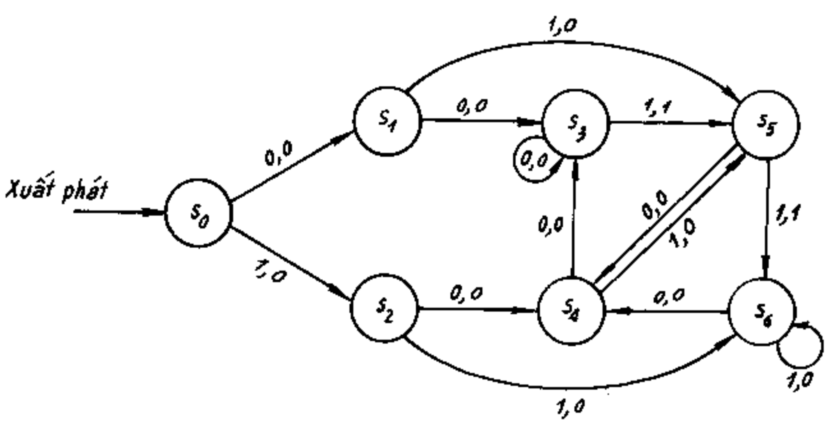


v = ID hợp thức a = "Nhập ID người dùng"
i = ID không hợp thức b = "Nhập mật khẩu"
p = Mật khẩu hợp thức c = Nhắc
q = Mật khẩu không hợp thức x = Đầu vào bất kỳ

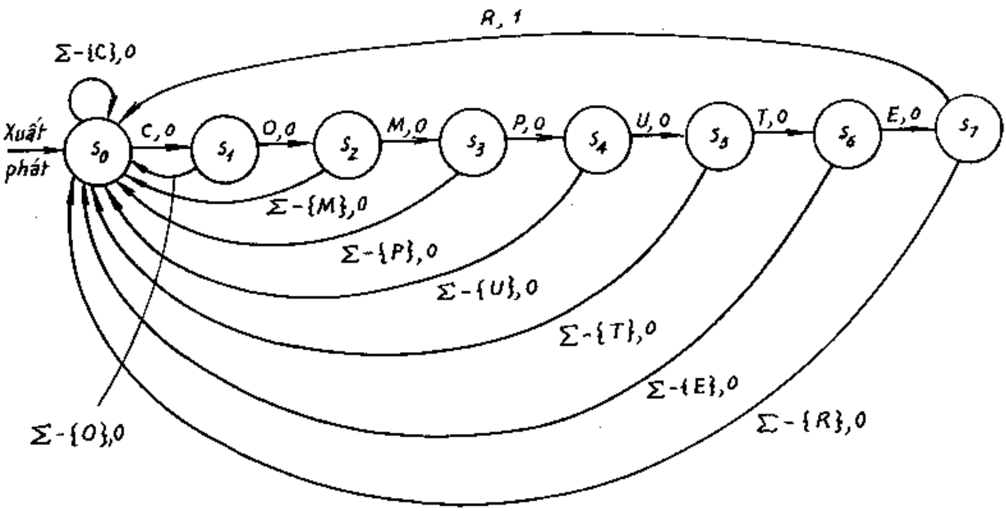
11.


{5, 10, 25}, open
10, nothing
10, nothing
10, nothing
Xuất phát
5, nothing
5, nothing
5, nothing
5, nothing
25, open
25, open
25, open
10, open
25, open

13.


1,0
0,0
1,1
0,0
Xuất phát
0,0
0,0
0,0
1,0
1,1
1,0
0,0
0,0
1,0
1,0

15.

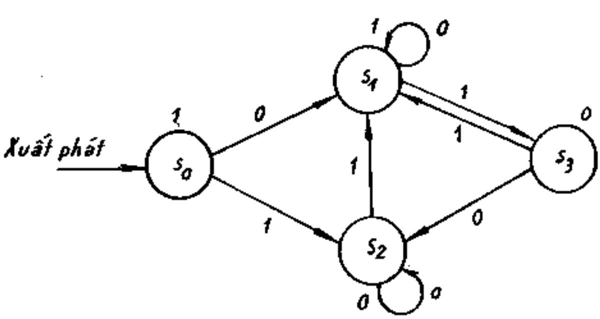


17.

Trạng thái	f		g
	Đầu vào		
	0	1	
s_0	s_1	s_2	1
s_1	s_1	s_0	1
s_2	s_1	s_2	0

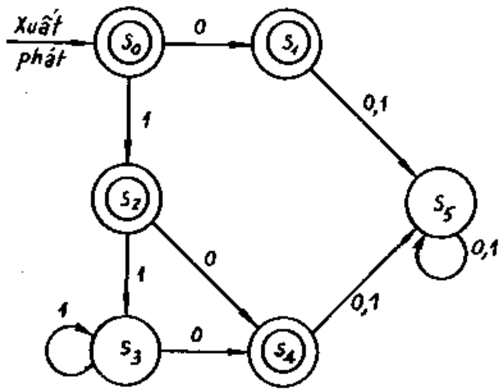
19. a) 11111 b) 1000000 c) 100011001100

21.



Tiết 10.3

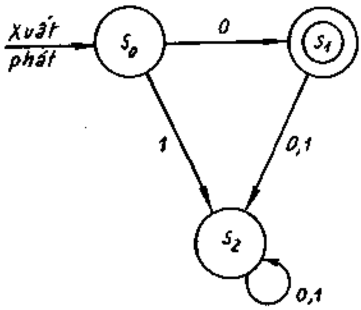
1. a) {000, 001, 1100, 1101}
   b) {000, 0011, 010, 0111}
   c) {00, 011, 110, 1111}
   d) {000000, 000001, 000100, 000101, 010000, 010001, 010100, 010101}
3. A = {1, 101}, B = {0, 11, 000}; A = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000}, B = {λ}; A = {λ, 10}, B = {10, 111, 1000} hoặc A = {λ}, B = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000}
5. a) Tập tất cả các xâu gồm không hoặc nhiều hơn các cặp bit 10 liên tiếp.
   b) Tập tất cả các xâu gồm toàn các số 1 sao cho số các số 1 chia hết cho 3, kể cả xâu rỗng.
   d) Tập tất cả các xâu bắt đầu và kết thúc bằng số 1 và có ít nhất hai số 1 giữa mỗi cặp số 0.
7. Một xâu thuộc A^* nếu và chỉ nếu nó là ghép của một số tùy ý các xâu trong A. Vì mỗi xâu thuộc A cũng là thuộc B, suy ra một xâu trong A^* cũng là phép ghép của các xâu trong B. Do đó $A^* \subseteq B^*$
9. a) Có b) Có
   c) Có d) Không
   e) Có f) Có
11. a) Có b) Có
   c) Không d) Không
   e) Không f) Không
13. {0, 10, 11}{0, 1}*
15. $\{0^m1^n \mid m \geq 0$ và $n \geq 1\}$
17. {0, 01, 11}
19. $\{\lambda, 0\} \cup \{0^m1^n \mid m \geq 1, n \geq 1\}$
21. $\{10^n \mid n \geq 0\} \cup \{10^n10^m \mid n, m \geq 0\}$
23.



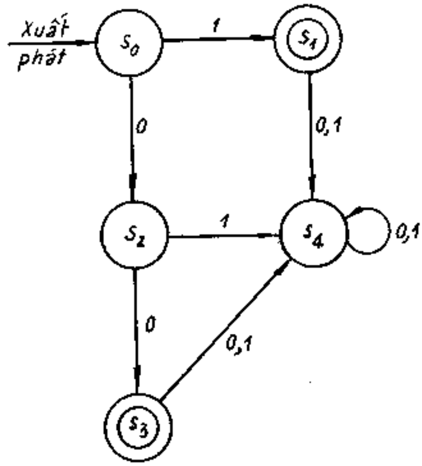
25. Thêm vào trạng thái không - kết thúc s_3 với các chuyển dịch tới s_3 từ s_0 khi đầu vào là 0, từ s_1 khi đầu vào là 1, và từ s_3 khi đầu vào là 0 hoặc 1.

27.

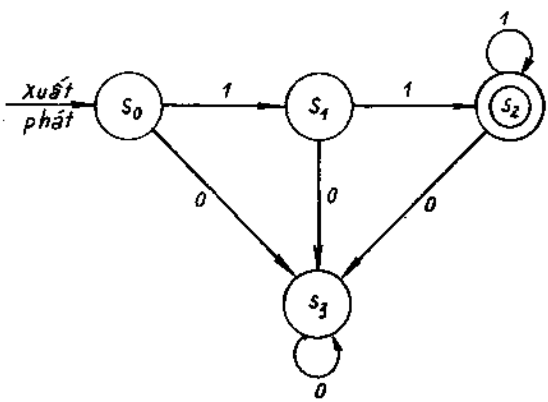
a)



b)



c)



29. Giả sử M là một ôtômat hữu hạn chấp nhận tập các xâu bit chứa một số như nhau các số 0 và số 1. Giả sử M có n trạng thái. Xét xâu $0^{n+1}1^{n+1}$. Theo nguyên lý Dirichlet, khi M xử lý xâu này, nó cần phải gặp hai lần cùng một trạng thái sau khi nó đọc n+1 số 0 đầu tiên, giả sử trạng thái đó là s. Khi đó k số 0 trong đầu vào sẽ đưa M từ s trở lại chính nó, với k là một số nguyên dương nào đó. Nhưng khi đó, M sau khi đọc $0^{n+1+k}1^{n+1}$ sẽ kết thúc chính ở chỗ hệt như sau khi nó đọc $0^{n+1}1^{n+1}$. Do đó, vì M chấp nhận $0^{n+1}1^{n+1}$ nên nó cũng phải chấp nhận $0^{n+k+1}1^{n+1}$ mà điều này là mâu thuẫn!

Tiết 10.4

1. a) Một số bất kỳ các số 1 được tiếp theo sau bởi một số 0

b) Một số bất kỳ các số 1 được tiếp theo sau bởi một hoặc nhiều hơn các số không

c) 111 hoặc 001

d) Xâu gồm một số tùy ý các số 1 hoặc các cặp 00 hoặc một số mỗi loại ở một hàng

e) λ hoặc xâu kết thúc bằng một số 1 và có một hoặc nhiều hơn các số 0 đứng trước mỗi số 1

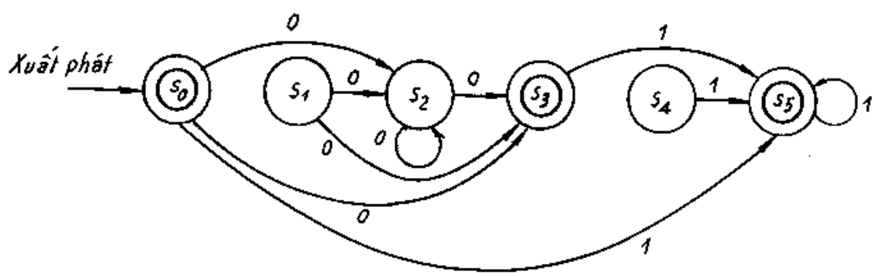
f) Xâu với chiều dài ít nhất bằng 3 tận cùng bằng 00.

3. a) $\mathbf{00^*1}$ b) $\mathbf{(0\cup1)(0\cup1)(0\cup1)^*0000^*}$

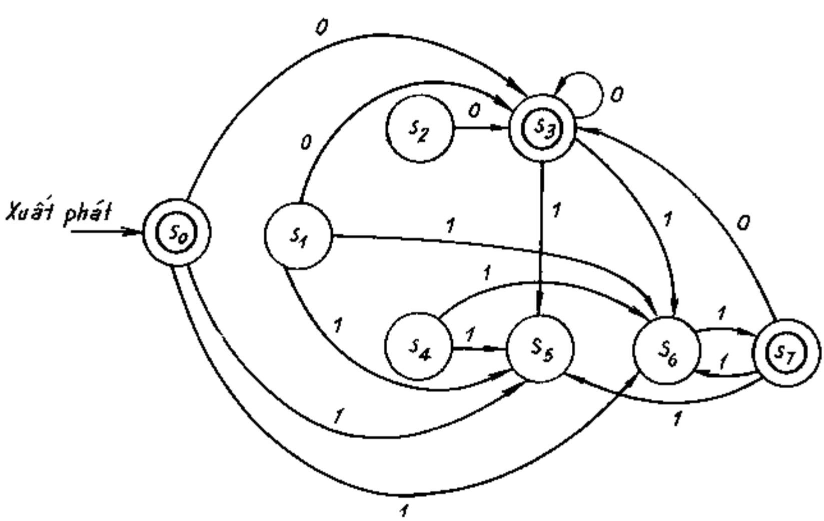
c) $\mathbf{0^*1^*\cup1^*0^*}$ d) $\mathbf{11(111)^*(00)^*}$

5. Dùng phép chứng minh quy nạp. Nếu biểu thức chính quy đối với A là $\emptyset$, λ hoặc x, kết quả là tầm thường. Nếu không, giả sử rằng biểu thức chính quy đối với A là **BC**. Khi đó $A = BC$ khi B là tập được phát sinh bởi **B** và C là tập được phát sinh bởi **C**. Theo giả thiết quy nạp, thì tồn tại các biểu thức chính quy **B**' và **C**' sinh B^R và C^R, tương ứng. Vì $A^R = (BC)^R = C^R B^R$, nên **C'B'** là biểu thức chính quy đối với A^R. Nếu biểu thức chính quy đối với A là $\mathbf{B\cup C}$ thì biểu thức chính quy đối với A^R là $\mathbf{B'} \cup \mathbf{C'}$ vì $(B \cup C)^R = B^R \cup C^R$. Cuối cùng, nếu biểu thức chính quy đối với A là B^*, thì dễ dàng thấy rằng $(\mathbf{B}')^*$ là biểu thức chính quy đối với A^R.

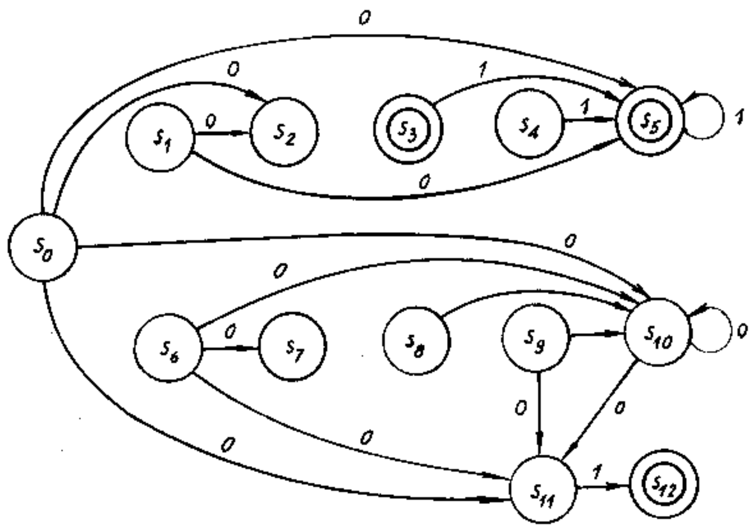
7. a)



b)



c)



9. $S \to 0A$, $S \to 1B$, $S \to 0$, $A \to 0B$, $A \to 1B$, $B \to 0B$, $B \to 1B$.

11. $S \to 0C$, $S \to 1A$, $S \to 1$, $A \to 1A$, $A \to 0C$, $A \to 1$, $B \to 0B$, $B \to 1B$, $B \to 0$, $B \to 1$, $C \to 0C$, $C \to 1B$, $C \to 1$.

13. Điều này được suy ra vì dấu vào dẫn tới trạng thái kết thúc trong ôtômat tương ứng một cách duy nhất với một dẫn xuất trong văn phạm.

15. Phần "chỉ nếu" là hiển nhiên vì I là hữu hạn. Đối với phần "nếu", giả sử các trạng thái là $s_{i_0}, s_{i_n}, s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots s_{i_n}$, trong đó $n = l(x)$. Vì $n \geqslant |S|$, nên một trạng thái nào đó sẽ được lặp lại theo nguyên lý Dirichlet. Giả sử y là phần của x gây ra vòng lặp, sao cho $x = uyv$ và y đưa s_j đến s_j đối với một j nào đó. Khi đó $uy^kv \in L(M)$ với mọi k. Vậy $L(M)$ là vô hạn.

17. Giả sử $L = \{0^{2n}1^n\}$ là chính quy. Giả sử S là tập các trạng thái của một ôtômat hữu hạn chấp nhận tập L. Giả sử $z = 0^{2n}1^n$ với $3n \geqslant |S|$. Khi đó, theo Bổ đề bơm, $z = 0^{2n}1^n = uvw$, với $l(v) \geqslant 1$ và $uv^iw \in \{0^{2n}1^n \mid n \geqslant 0\}$. Rõ ràng v không thể chứa cả 0 và 1 vì v^2 khi đó chứa 10. Vậy v chỉ chứa toàn số 0 hoặc toàn số 1 và do đó uv^2w chứa quá nhiều số 0 hoặc quá nhiều số 1, nên nó không thuộc L. Mâu thuẫn này chứng tỏ L không phải là chính quy.

19. Giả sử tập các xâu "thuận nghịch đọc" trên {0, 1} là chính quy. Giả sử S là tập các trạng thái của ôtômat hữu hạn chấp nhận tập các xâu đó. Giả sử $z = 0^n10^n$ với $n > |S|$. Áp dụng Bổ đề bơm ta được $uv^iw \in L$ với mọi số nguyên i không âm với $l(v) \geqslant 1$ và $l(uv) \leqslant |S|$, và $z = 0^n10^n = uvw$. Khi đó v cần phải là xâu gồm các số 0 (vì $|n| > S$), vậy uv^2w không phải là thuận nghịch đọc. Do đó tập các xâu thuận nghịch đọc không phải là chính quy.

Tiết 10.5

1. a) Phần không trống của băng chứa xâu 1111 khi máy dừng lại.

b) Phần không trống của băng chứa xâu 011 khi máy dừng lại.

c) Phần không trống của băng chứa xâu 00001 khi máy dừng lại.

d) Phần không trống của băng chứa xâu 00 khi máy dừng lại.

3. Nếu băng chứa ít nhất một số 1 thì máy sẽ thay đổi mỗi một số 1 thành số không xuất phát từ số 1 đầu tiên và sẽ dừng lại khi đạt tới ký hiệu trống đầu tiên. Nếu băng ban đầu là trống máy sẽ dừng lại mà không làm thay đổi gì băng cả. Nếu phần không trống của băng chứa toàn số không, thì máy sẽ chuyển động tuần tự qua các số không đó và dừng lại.

5. $(s_0, 0, s_1, 1, R)$, $(s_0, 1, s_0, 1, R)$

7. $(s_0, 0, s_0, 0, R)$, $(s_0, 1, s_1, 1, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_1, 0, R)$

9. $(s_0, 0, s_1, 0, R)$, $(s_0, 1, s_0, 0, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_0, 0, R)$, (s_1, B, s_2, B, R)

11. $(s_0, 0, s_0, 0, R)$, $(s_0, 1, s_1, 1, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_0, 1, R)$, (s_0, B, s_2, B, R)

13. Nếu xâu đầu vào là trống hoặc xuất phát từ số 1 máy sẽ dừng lại ở trạng thái không kết thúc s_0. Trong các trường hợp còn lại, số 0 ban đầu được đổi thành M và máy sẽ nháy qua các số 0 và 1 trung gian cho tới khi hoặc là nó tới cuối của xâu đầu vào hoặc tới một M nữa. Tại điểm này nó lùi lại một ô và chuyển sang trạng thái s_2. Vì xâu được chấp nhận cần phải có một số 1 ở bên phải đối với mỗi số 0 ở bên trái, nên cần phải có một số 1 ở đây, nếu xâu là chấp nhận được. Do đó, dịch chuyển duy nhất ra khỏi s_2 xảy ra khi ô này chứa số 1. Nếu đúng như vậy, máy sẽ thay nó bằng M và lùi sang trái; nếu không, máy sẽ dừng lại ở trạng thái không kết thúc s_2. Trên đường giật lùi máy dừng ở trạng thái s_3 cho tới khi nó thấy các số 1, sau đó nó dừng ở trạng thái s_4 cho tới khi thấy các số 0. Cuối cùng, hoặc là nó gặp một số 1 trong khi vẫn ở trạng thái s_4 tại điểm mà nó dừng lại không chấp nhận, hoặc là nó đạt tới M ở phải cùng đã được viết thay cho 0 ở đầu của xâu. Nếu điều này xảy ra khi máy ở trạng thái s_5, thì sẽ không còn một số 0 nào nữa trong xâu, vậy sẽ tốt nhất là trường hợp cũng không còn số 1 nào nữa; điều này được thực hiện bằng các dịch chuyển (s_3, M, s_5, M, R) và (s_5, M, s_6, M, R) và s_6 là trạng thái kết thúc. Nếu không, máy sẽ dừng ở trạng thái không - kết thúc s_5. Khi gặp M này, nếu máy đang ở trạng thái s_4, mọi chuyện sẽ lại lặp lại một lần nữa trừ điều là bây giờ xâu sẽ có số 0 còn lại ở trái cùng và số 1 còn lại ở phải cùng đều được thay bằng M. Như vậy, máy sẽ chuyển động - mà vẫn ở trạng thái s_4 - tới số 0 còn lại ở trái cùng rồi quay lại trạng thái s_0 và lặp lại quá trình trên.

15. (s_0, B, s_9, B, L), $(s_0, 0, s_1, 0, L)$, (s_1, B, s_2, E, R), (s_2, M, s_2, M, R), $(s_2, 0, s_3, M, R)$, $(s_3, 0, s_3, 0, R)$, (s_3, M, s_3, M, R), $(s_3, 1, s_4, M, R)$, $(s_4, 1, s_4, 1, R)$, (s_4, M, s_4, M, R), $(s_4, 2, s_5, M, R)$, $(s_5, 2, s_5, 2, R)$, (s_5, B, s_6, B, L), (s_6, M, s_8, M, L), $(s_6, 2, s_7, 2, L)$, $(s_7, 0, s_7, 0, L)$, $(s_7, 1, s_7, 1, L)$, $(s_7, 2, s_7, 2, L)$, (s_7, M, s_7, M, L), (s_7, E, s_2, E, R), (s_8, M, s_8, M, L), (s_8, E, s_9, E, L) ở đây M và E là các ký hiệu đánh dấu với E đánh dấu đầu trái của đầu vào.

17. $(s_0, 1, s_1, B, R)$, $(s_1, 1, s_2, B, R)$, $(s_2, 1, s_3, B, R)$, $(s_3, 1, s_4, 1, R)$, $(s_1, B,$

s_4, 1, R), (s_2, B, s_4, 1, R), (s_3, B, s_4, 1, R)

19. (s_0, 1, s_1, B, R), (s_1, 1, s_2, B, R), (s_1, B, s_6, B, R), (s_2, 1, s_3, B, R), (s_2, B, s_6, B, R), (s_3, 1, s_4, B, R), (s_3, B, s_6, B, R), (s_4, 1, s_5, B, R), (s_4, B, s_6, B, R), (s_6, B, s_{10}, 1, R), (s_5, 1, s_5, B, R), (s_5, B, s_7, 1, R), (s_7, B, s_8, 1, R), (s_8, B, s_9, 1, R), (s_9, B, s_{10}, 1, R)

21. (s_0, 0, s_0, 0, R), (s_0, *, s_5, B, R), (s_3, *, s_3, *, L), (s_3, 0, s_3, 0, L), (s_3, 1, s_3, 1, L), (s_3, B, s_0, B, R), (s_5, 1, s_5, B, R), (s_5, 0, s_5, B, R), (s_5, B, s_6, B, L), (s_6, B, s_6, B, L), (s_6, 0, s_7, 1, L), (s_7, 0, s_7, 1, L), (s_0, 1, s_1, 0, R), (s_1, 1, s_1, 1, R), (s_1, *, s_2, *, R), (s_2, 0, s_2, 0, R), (s_2, 1, s_3, 0, L), (s_2, B, s_4, B, L), (s_4, 0, s_4, 1, L), (s_4, *, s_8, B, L), (s_8, 0, s_8, B, L), (s_8, 1, s_8, B, R).

23. (s_0, B, s_1, 1, L), (s_0, 1, s_1, 1, R), (s_1, B, s_0, 1, R)

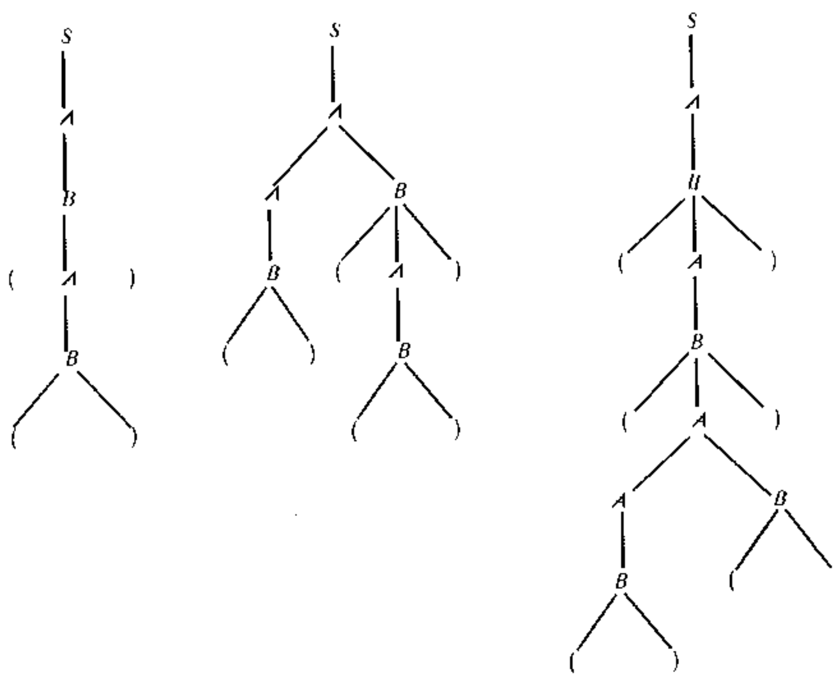
Bài tập bổ sung

1. a) $S \to 00S111$, $S \to \lambda$

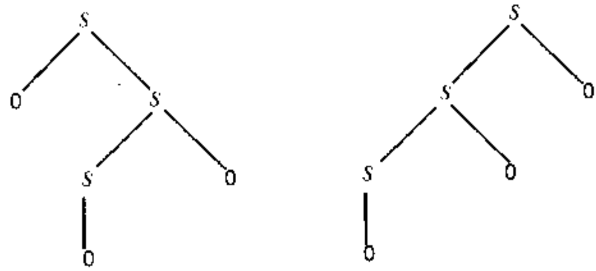
b) $S \to AABS$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$, $S \to \lambda$

c) $S \to ET$, $T \to 0TA$, $T \to 1TB$, $T \to \lambda$, $0A \to A0$, $1A \to A1$, $0B \to B0$, $1B \to B1$, $EA \to E0$, $EB \to E1$, $E \to \lambda$

3.



5.

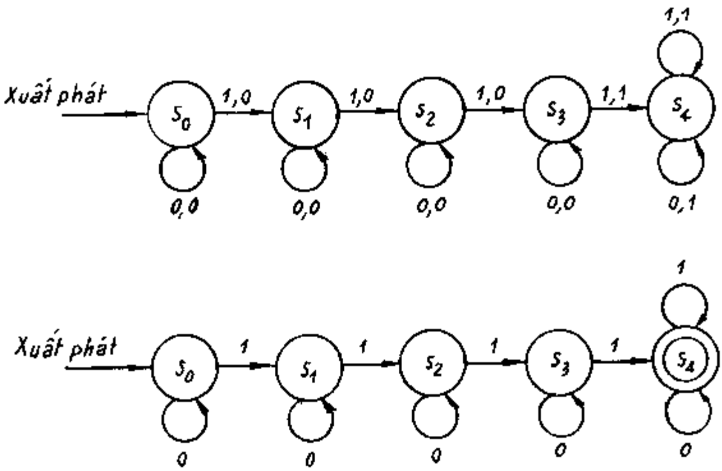


7. Không, ví dụ $A = \{1, \ 10\}$ và $B = \{0, \ 00\}$

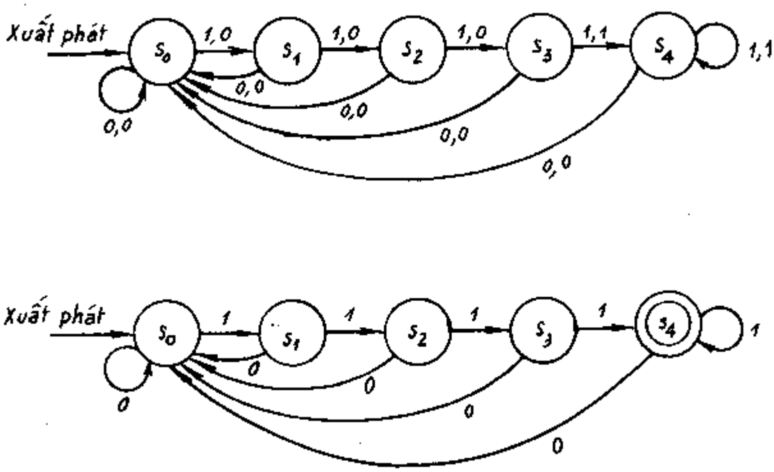
9. Không, lấy $A = \{00, \ 000, \ 00000\}$ và $B = \{00, \ 000\}$.

11. a) 1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 2 f) 4

13.

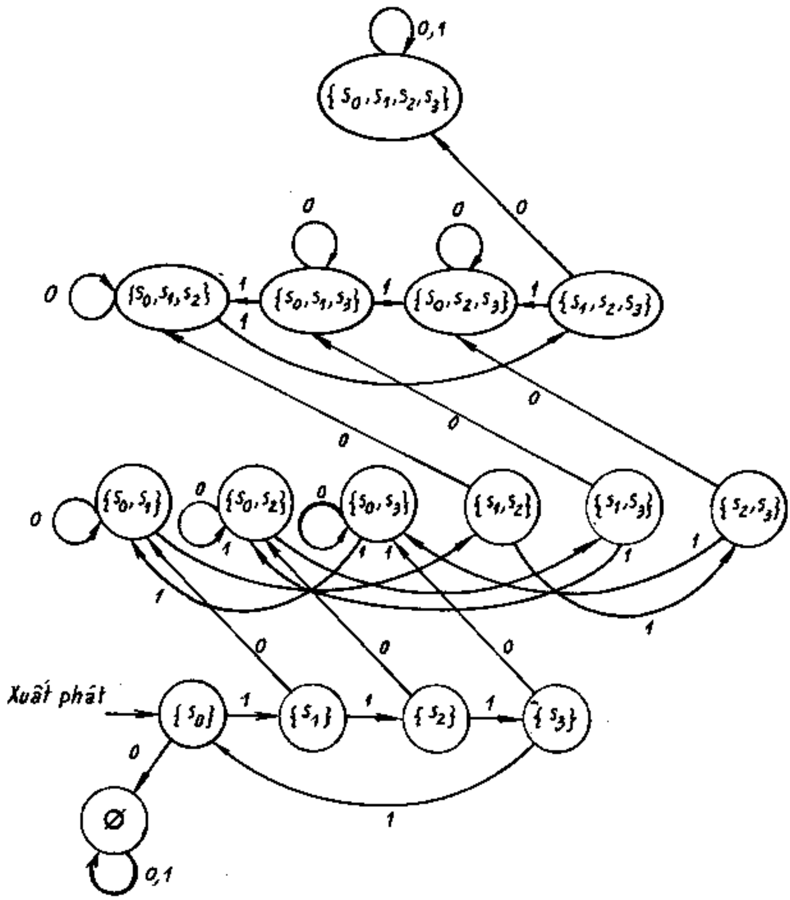


15.

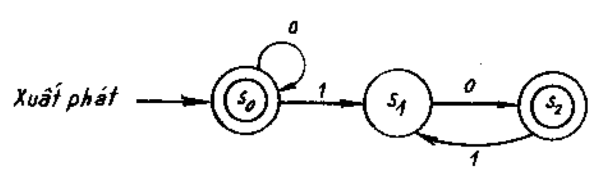


17. a) $n^{nk+1}m^{nk}$ b) $n^{nk+1}m^{n}$

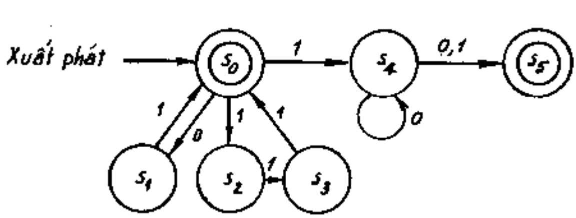
19.



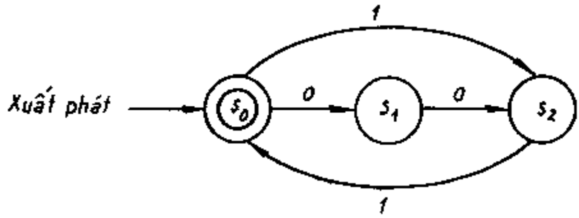
21. a)



b)

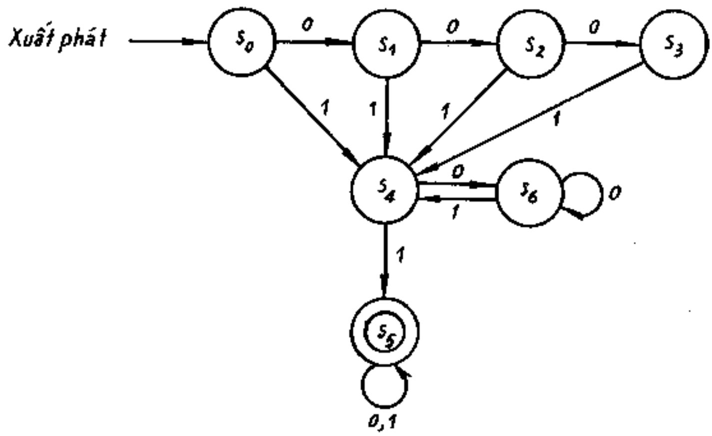


c)

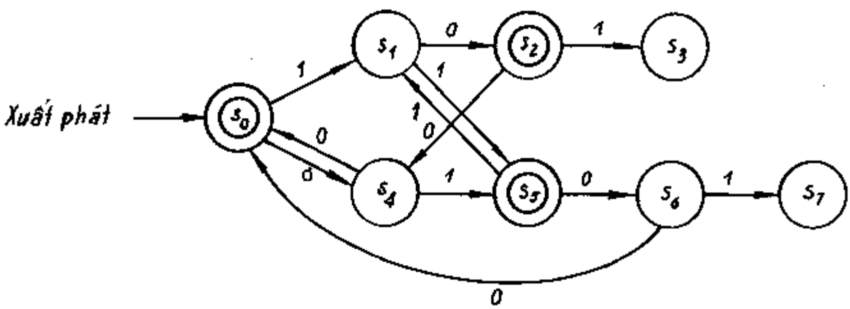


23. Xây dựng ôtômat hữu hạn tất định cho A với các trạng thái S và các trạng thái kết thúc F. Đối với $\overline{A}$ dùng chính ôtômat đó nhưng với các trạng thái cuối cùng là $S - F$.

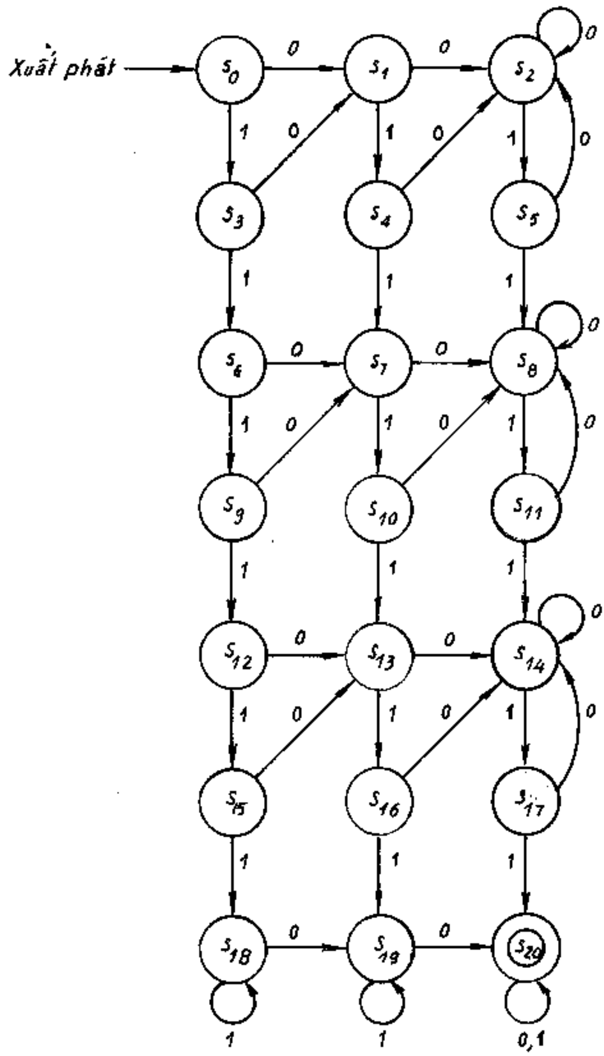
25. a)



b)



c)



27. Giả sử $L = \{1^p \mid p$ là số nguyên tố$\}$ là chính quy và S là tập các trạng thái của một ôtômat hữu hạn chấp nhận L. Giả sử $z = 1^p$ trong đó p là số nguyên tố với $p > |S|$ (số nguyên tố như vậy tồn tại, vì số các số nguyên tố là vô hạn). Theo Bổ đề bơm, z có thể được viết dưới dạng $z = uvw$ với $l(uv) \leqslant |S|$, $l(v) \geqslant 1$ và đối với mọi số nguyên i không âm $uv^iw \in L$. Vì z là xâu gồm toàn các số 1, nên $u = 1^a$, $v = 1^b$ và $w = 1^c$ với $a + b + c = p$, $a + b \leqslant n$ và $b \geqslant 1$. Khi đó $uv^iw = 1^a1^{bi}1^c = 1^{(a+b+c)+b(i-1)} = 1^{p+b(i-1)}$. Bây giờ lấy $i = p + 1$, khi đó $uv^iw = 1^{p(1+b)}$. Vì $p(1 + b)$ không phải là số nguyên tố, nên $uv^iw \notin L$, điều này là mâu thuẫn.

Mục lục

Chương 4

ĐẾM CÁC PHẦN TỬ

Chương V
KỸ THUẬT ĐẾM CAO CẤP

Chương 8
CÂY

Chương 10
MÔ HÌNH TÍNH TOÁN

LỜI GIẢI CÁC BÀI TẬP ĐÁNH SỐ LẺ

Kenneth H. Rosen

TOÁN HỌC RỜI RẠC ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC

Chịu trách nhiệm xuất bản	:	PGS, TS TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập	:	ĐẶNG VĂN SỬ, TRẦN HIẾN
Sửa bài in thử	:	THẠCH, SỬ, HƯƠNG
Vẽ bìa	:	HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HƯNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 1000 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Công ty in Tổng hợp Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số: 111-29 do Cục xuất bản cấp ngày 10-10-2002.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2003.

Kenneth H. Rosen

TOÁN HỌC RỜI RẠC ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC

Chịu trách nhiệm xuất bản :	PGS, TS TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập :	ĐẶNG VĂN SỬ, TRẦN HIẾN
Sửa bài in thử :	THẠCH, SỬ, HƯƠNG
Vẽ bìa :	HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HƯNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 1000 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Công ty in Tổng hợp Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số: 111-29 do Cục xuất bản cấp ngày 10-10-2002.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2003.