Chương 4

TỐI ƯU TRÊN ĐỒ THỊ

4.1. Đồ thị hữu hạn

4.1.1 Một số khái niệm về đồ thị hữu hạn

Định nghĩa 4.1

- *Đồ thị hữu hạn là một cấu trúc G = <X, U>, trong đó X là tập hữu hạn không rỗng các đỉnh, U là tập cạnh (hay cung) của đồ thị G.*
- *G được gọi là đồ thị vô hướng nếu U là tập cạnh, mỗi cạnh trong U nối hai đỉnh* x_i , x_j *được ký hiệu là cặp đỉnh* (x_i , x_j)*, và không phân biệt điểm đầu hay điểm cuối.*
- *G được gọi là đồ thị có hướng nếu U là tập cung, tức là mối cung trong U đi từ điểm* x_i *tới* x_j *được ký hiệu là* (x_i , x_j) *trong đó* x_i *gọi là điểm đầu, còn* x_j *gọi là điểm cuối của cung.*
- *Khi có cạnh / hay cung* (x_i , x_j) Č *U thì ta nói* x_i *và* x_j *là hai đỉnh kề nhau.*
- *Hai cạnh được gọi là kề nhau nếu chúng có đỉnh chung.*
- *Nếu đỉnh đầu trùng đỉnh cuối, thì* (x_i , x_i) *gọi là một khuyên.*
- *Nếu trong đồ thị G (có hướng hoặc vô hướng), ta bỏ đi một số đỉnh và các cạnh kề với các đỉnh đó thì đồ thị còn lại được gọi là đồ thị con của đồ thị G đã cho.*
- *Nếu trong đồ thị G ta bỏ đi một số cạnh, giữ nguyên các đỉnh thì đồ thị nhận được gọi là đồ thị bộ phận của đồ thị G.*

4.1.2 Biểu diễn đồ thị

- **Biểu diễn hình học**

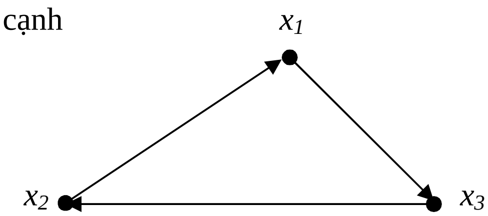
Đồ thị G = <X, U> được biểu diễn hình học trên mặt phẳng như sau: với mỗi đỉnh $x_i \in X$, cho tương ứng với 1 điểm trên mặt phẳng, được gán nhãn là x_i, với mỗi cạnh (x_i , x_j) $\in$ U, ta có đường nối giữa hai đỉnh này , với mỗi cung (x_i , x_j) $\in$ U, ta có mũi tên nối từ x_i đến x_j . Tập đỉnh X và tập cạnh (cung) U biểu diễn như trên sẽ hoàn toàn xác định đồ thị G.

- **Biểu diễn bằng ma trận kề**
    - Ta biểu diễn đồ thị có n đỉnh bằng một ma trận vuông A cấp n, mỗi hàng và mỗi cột ứng với các đỉnh theo thứ tự là x_1 , x_2, …, x_n. (để dễ theo dõi, có thể ghi các nhãn x_1 , x_2, …, x_n ở đầu mỗi hàng và mỗi cột). Các phần tử của ma trận kề sác định như sau:
    - Nếu có một cạnh hoặc cung (x_i , x_j) thì phần tử a_{ij} tương ứng (nằm trên giao điểm của hàng thứ i và cột thứ j) được ghi 1, trái lại thì a_{ij} = 0.

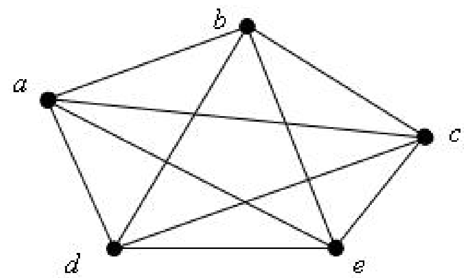
Thí dụ 1.

1. Các biểu diễn hình học của đồ thị

   a/. Đồ thị có hướng G_1 với 3 đỉnh và 3 cạnh



   b/. Đồ thị vô hướng G_2 với 5 đỉnh.



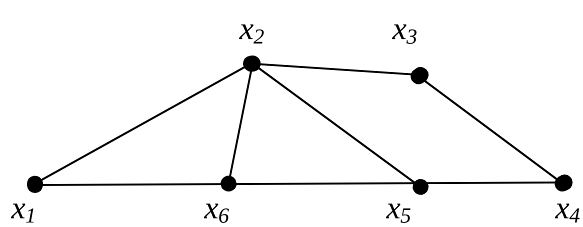
2. Các biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

   a/ ma trận kề của đồ thị có hướng G_1 với 3 đỉnh: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

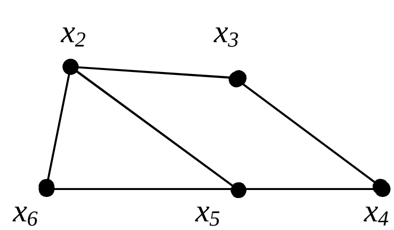
   b/ ma trận kề của đồ thị vô hướng G_2 với 5 đỉnh: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Thí dụ 2.

Cho đồ thị G với 7 đỉnh và 8 cạnh:



Bỏ đi đỉnh x_1 ta nhận được một đồ thị con của đồ thị G:



Nếu giữ nguyên các đỉnh, bỏ đi 1 số cạnh, ta nhận được các đồ thị bộ phận

4.1.3 Đồ thị liên thông.

Định nghĩa 4.2.

- *Cho đồ thị hữu hạn G = <X, U>, đường đi p trong đồ thị G là dãy liên tiếp các cạnh (hay các cung) kề nhau, ký hiệu* $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ *; đỉnh* x_{i_1} *là đỉnh đầu,* x_{i_k} *là đỉnh cuối của đường đi p,*
- *Độ dài của đường đi bằng số cạnh (hay số cung) có trong đường đi đó.*
- *Chu trình (vòng) trong đồ thị là một đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.*
- *Đường đi (hay chu trình) được gọi là "đơn" nếu nó đi qua mỗi cạnh không quá một lần, được gọi là "sơ cấp" nếu nó đi qua mỗi đỉnh không quá một lần.*
- *Đồ thị G = <X, U> gọi là liên thông, nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ của đồ thị đều tồn tại đường đi nối chúng.*

4.1.4 Một số khái niệm về cây

Định nghĩa 4.3

- *Cho đồ thị vô hướng G, một đồ thị con T của G liên thông và không có chu trình gọi là một cây.*
- *Cây T chứa tất cả các đỉnh của G gọi là cây bao trùm (hay cây khung) của đồ thị G.*
- *Mỗi cây khung T của đồ thị G là một đồ thị bộ phận của G, có n đỉnh và có đúng n – 1 cạnh.*

Định nghĩa 4.4

- *Cho đồ thị vô hướng G = <X, U>, nếu mỗi cạnh e của đồ thị G được gán một số thực không âm gọi là trọng số của cạnh e, ký hiệu là l(e), thì đồ thị G gọi là đồ thị có trọng số.*
- *Cây T của đồ thị có trọng số G gọi là cây có trọng số. Trọng số của cây T được ký hiệu là l(T), và được xác định bởi:*

$$l(T) = \sum_{e \in T} l(e)$$

- *Cây khung T có trọng số nhỏ nhất được gọi là cây khung nhỏ nhất (hay cây bao trùm tối thiểu) của đồ thị G.*
- *Biểu diễn đồ thị có trọng số bằng ma trận trọng số:*

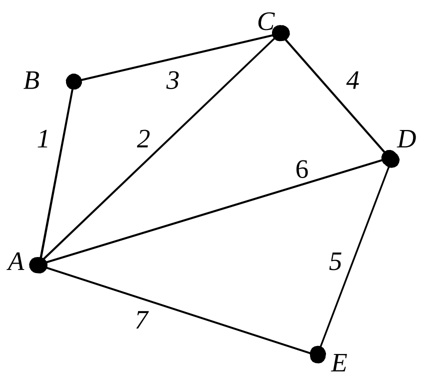
  Với đồ thị G có n đỉnh, ma trận trọng số là ma trận vuông cấp n, A = (a_{ij}) với các phần tử xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & neu\,(i, j)\, khong\ phai\ canh\, cua\, do\, thi \\ l(e), & neu\, e = (i, j)\, la\, canh\, voi\, trong\, so\, l(e) \end{cases}$$

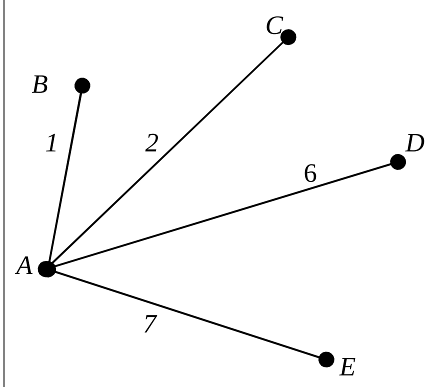
  Ma trận A xác định như trên gọi là ma trận trọng số của đồ thị G

Thí dụ 3

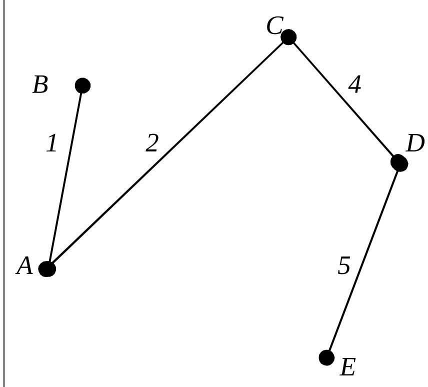
1. Cho G là một đồ thị có trọng số, bỏ đi một số cạnh, nhận được các cây khung của đồ thị G.



Đồ thị có trọng số G



Một cây khung T của đồ thị G



Cây khung nhỏ nhất T_0 của G

2. Ma trận trọng số của đồ thị G, ma trận trọng số của cây khung T và cây khung nhỏ nhất T_0.

$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(T_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Từ các ma trận trọng số, coa thể thấy l(T) = 16, l(T_0) = 12, là cây khung có trọng số nhỏ nhất.

Bài toán tìm cây khung nhỏ nhất của một đồ thị có trọng số là một bài toán tối ưu trên đồ thị, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải quyết trong phần sau.

Có nhiều bài toán tối ưu trên đồ thị, ở đây ta chỉ nghiên cứu 2 bài toán có nhiều ứng dụng trong kỹ thuật:Bài toán tìm cây khung nhỏ nhất và bài toán tìm đường đi ngắn nhất / dài nhát của một đồ thị có trọng số.

4.2. Bài toán tìm cây khung nhỏ nhất trên đồ thị có trọng số

4.2.1 Thí dụ dẫn đến bài toán tìm cây khung nhỏ nhất

(xem thí dụ 5 chương 1)

Một huyện có 5 xã cần xây dựng hệ thống truyền tải điện nối huyện với tất cả các xã. Giữa hai địa điểm có thể xây dựng được đường dây với chi phí được cho trong bảng, (các ô ghi chi phí xây dựng đường dây giữa 2 địa điểm ở hàng / cột tương ứng, ô ghi 0 là không có phương án xây dựng)

Các điểm	Huyện	Xã 1	Xã 2	Xã 3	Xã 4	Xã 5
Huyện	0	5	1	3	4	6
Xã 1	0	0	6	0	0	3
Xã 2	1	6	0	5	0	0
Xã 3	3	0	5	0	2	0
Xã 4	4	0	0	2	0	6
Xã 5	3	3	0	0	6	0

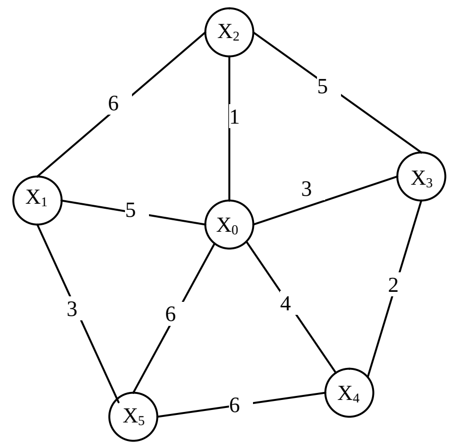
Hãy lập các phương án xây dựng hệ thống điện có thể nối liền các xã với huyện với tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất.

Giải: bảng chi phí trên tương ứng với một ma trận trọng số của đồ thị G, với các đỉnh ứng với các địa điểm, tập đỉnh của đồ thị G là x_0 (ứng với Huyện), x_1: xã 1, x_2: xã 2, …, x_5 ứng với xã 5.

Ta có ma trận trọng số của đồ thị G:

$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Từ ma trận trọng số, ta xác định được đồ thị như hình bên:



Yêu cầu của bài toán tương ứng với việc tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị có trọng số G trên đây.

4.2.2 Các thuật toán tìm cây khung nhỏ nhất

1. Thuật toán KRUSKAL

Thuật toán thực hiện việc tìm cây khung tối thiểu của đồ thị có trọng số G gồm n đỉnh, G = <X , U>. Gọi T_0 là cây khung nhỏ nhất cần tìm, T_0 = < X, V>, để T là một cây khung thì T phải gồm n đỉnh và có đúng n – 1 cạnh (xem Định nghĩa 4.3), để là cây khung nhỏ nhất thì V phải là tập cạnh có tổng trọng số nhỏ nhất, và các cạnh của V không tạo thành chu trình.

Từ đó có các bước của thuật toán KRUSKAL:

Bước 1:

Xắp xếp các cạnh của G theo thứ tự trọng số tăng dần (không giảm).

Bước 2:

Lần lượt chọn các cạnh có trọng số tăng dần để đưa vào V, sao cho các cạnh bổ xung không tạo thành chu trình với các cạnh đã có. Kết thúc việc bổ xung V khi đã chọn đủ n – 1 cạnh.

Bước 3:

Vẽ lại cây T_0 từ đồ thị G, chỉ giữ lại những cạnh đã được chọn trong V.

Tính tổng trọng số của cây khung nhỏ nhất $l(T_0)$.

Kết thúc thuật toán.

Thí dụ 4.

Giải bài toán trong thí dụ trên bằng thuật toán KRUSKAL.

Bước 1: Xắp xếp 10 cạnh của đồ thị theo thứ tự không giảm của trọng số

(x0, x2)

(x3, x4)

(x0, x3); (x1, x5);

(x0, x4);

(x0, x1); (x2, x3);

(x1, x2); (x0, x5); (x4, x5)

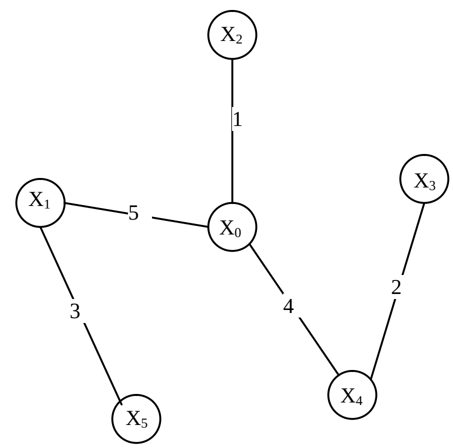
<u>*Bước 2:*</u>

Chọn tập cạnh V gồm n – 1 cạnh, từ trên xuống, sao cho không tạo thành chu trình:

V = {(x0, x2); (x3, x4); (xi, x5); (x0, x4); (x0, x1)}, đã chọn đủ n –1 = 5 cạnh. Kết thúc bước 2.

<u>*Bước 3:*</u> Vẽ lại cây T_0 từ đồ thị G. (hình bên)

Tính $l(T_0)$ = 15.



2. Thuật toán PRIM

Thuật toán KRUSKAL sẽ kém hiệu quả khi đồ thị G ban đầu là "dày" (có nhiều cạnh, gần với đồ thị đầy đủ: mỗi cặp đỉnh đều có 1 cạnh nối chúng), vì khi đó việc xắp xếp các cạnh ở bước 1 trong thuật toán KUSKAL là rất tốn công sức. Thuật toám PRIM khắc phục được các nhược điểm này.

Thuật toán PRIM tìm tập cạnh V của cây khung nhỏ nhất T_0 = < X, V>, theo các bước sau:

Bước 1:

Chọn 1 đỉnh bất kỳ, giả sử là đỉnh A, thường chọn 1 đỉnh của cạnh có trọng số nhỏ nhất.

Bước 2:

- Chọn cạnh kề với đỉnh A, có trọng số nhỏ nhất trong các cạnh kề với A, đỉnh kia của cạnh chọn giả sử là đỉnh B.
- Tiếp tục chọn tiếp cạnh kề với 1 trong các đỉnh đã chọn, sao cho cạnh mới chọn có trọng số nhỏ nhất và không tạo thành chu trình với các cạnh đã chọn.
- Tiếp tục quá trình trên, bổ xung các đỉnh mới và các cạnh mới cho đến khi đủ n – 1 cạnh.

Bước 3:

Vẽ lại cây T_0 từ đồ thị G, chỉ giữ lại những cạnh đã được chọn trong V.

Tính tổng trọng số của cây khung nhỏ nhất $l(T_0)$.

Kết thúc thuật toán.

Học viên tự thực hiện lại thí dụ trên bằng thuật toán PRIM.

4.3. Sơ đồ Quản lý dự án (PERT)

4.3.1. Khái niệm về sơ đồ PERT

PERT – Project Evaluation and Review Technique – Kỹ thuật kiểm soát và đánh giá dự án

1. Bảng phân chia công việc.

Để lập lịch và kiểm soát thời gian thực hiện dự án, trước hết phải xác định được bảng phân chia công việc. Bảng này được xác định trong quá trình lập kế hoạch dự án mức chi tiết (WBS), bảng phân chia công việc không phải toàn bộ cấu trúc WBS, nhưng phải xác định được các công việc, thời gian để hoàn thành mỗi công việc và điều kiện ràng buộc của mỗi công việc với các công việc khác.

Thí dụ 1. Bảng phân chia công việc của một dự án xây dựng được xác định như sau:

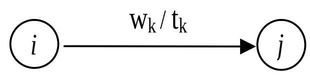
Tên công việc	Thời gian cần (ngày)	Thứ tự thực hiện (sau các công việc)
W_1	8	Bắt đầu ngay
W_2	4	Bắt đầu ngay
W_3	10	Bắt đầu ngay
W_4	6	W_1
W_5	6	W_1
W_6	8	W_2 , W_5
W_7	5	W_2 , W_5
W_8	2	W_7 , W_3
W_9	5	W_4
W_{10}	5	W_6, W_8, W_9
W_{11}	9	W_4

2. Các thành phần của sơ đồ PERT.

Với một bảng phân chia công việc (WBS), *sơ đồ PERT là một đồ thị có hướng, có trọng số* với các đỉnh và các cung được xác định như sau:

- Các đỉnh của sơ đồ ứng với các *sự kiện:* đó là thời điểm bắt đầu và/ hoặc kết thúc của một công việc trong WBS. Mỗi đỉnh được gán nhãn là một số tự nhiên (*i*) chỉ số thứ tự của đỉnh (sự kiên), với $0 \le i \le n$.
  - Các đỉnh được ký hiệu trên sơ đồ: i (với $0 \le i \le n$)
  - Đỉnh không có cung đi vào là đỉnh khởi đầu, ứng với $i = 0$.
  - Đỉnh không có cung đi ra là đỉnh kết thúc, ứng với $i = n$.
- Các cung của sơ đồ ứng với các *công việc*: Mỗi cung được gán nhãn là tên công việc và trọng số là thời gian tương ứng : (w_k / t_k), với $1 \le k \le m$, (trong đó ký hiệu thời gian cần thiết để hoàn thành công việc w_k là t_k hay $t(w_k)$, m là tổng số công việc trong WBS).

- Một cung w_k với trọng số t_k đi từ đỉnh *(i)* đến đỉnh *(j)* được ký hiệu trên sơ đồ:



- Ký hiệu công việc theo các đỉnh: Công việc w_k ứng với cung đi từ đỉnh *i* tói đỉnh *j* có thể ký hiệu là *(i, j),* thời gian để hoàn thành công việc này cũng được ký hiệu là t_{ij} hay *t(i, j).*

▪ Một đường đi trong sơ đồ PERT là một dãy các cung (hay dãy các đỉnh) liên tiếp sao cho đỉnh cuối của cung này là đỉnh đầu của cung kế tiếp trong dãy.

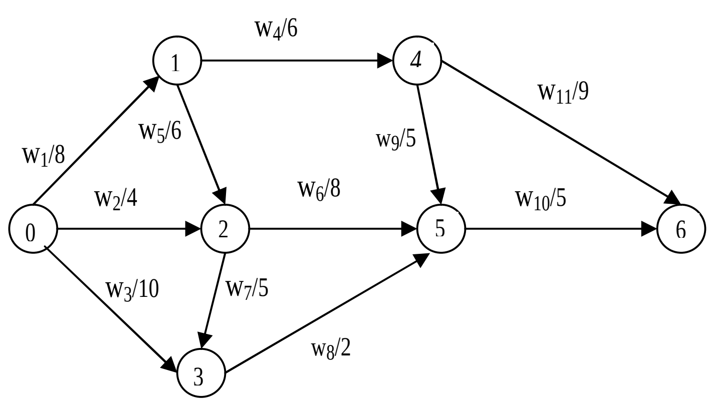
- Tổng trọng số của các cung dọc theo đường đi gọi là độ dài của đường đi đó.

3. Vẽ sơ đồ PERT

Với mỗi bảng phân chia công việc, việc lập sơ đồ PERT được thực hiện bằng việc vẽ các đỉnh và các cung ứng với mỗi công việc, sao cho thỏa mãn các điều kiện ràng buộc trong bảng phân chia công việc. Các đỉnh được thiết lập theo thứ tự sau:

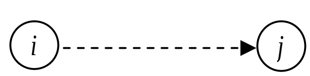
- Đỉnh xuất phát gán nhãn (đánh số) là đỉnh (0).
- Các đỉnh và các cung tiếp theo: khi có một đỉnh đã được đánh số *(i),* đỉnh kề với đỉnh *(i)* mà có cung hướng từ *(i)* đến đỉnh này, sẽ được đánh số là *(i+1),* nếu có nhiều đỉnh kề với *(i)* như vậy thì các đỉnh kề tiếp theo được đánh số *(i+2), (i+3),* …Trên mỗi cung tương ứng được gán nhãn bởi tên công việc và thời gian hoàn thành: w_k / t_k.
- Quá trình trên sẽ đánh số được các đỉnh cho đến khi số cung của sơ đồ bằng số công việc.
- Những đỉnh không có cung đi ra khỏi nó, được gộp lại làm một đỉnh, gọi là đỉnh kết thúc, được đánh số *(n), n* là số thứ tự cao nhất trong các đỉnh của sơ đồ.

Thí dụ 2. Với bảng phân chia công việc trong thí dụ 1, ta xây dựng được sơ đồ PERT như sau:



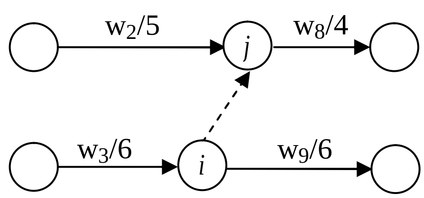
Hình 1 **–** Sơ đồ Pert cho thí dụ 1

Chú ý khi lập sơ đồ: Đôi khi phải dùng cung giả. Kí hiệu trên sơ đồ:



Không có công việc và trọng số nào ứng với cung giả này. Mục đích của cung giả là để kết hợp các sự kiện, tạo thành một đỉnh bắt đầu cho một công việc mới, sao cho thỏa mãn các điều kiện ràng buộc về thứ tự công việc trong bảng phân chia công việc.

Chẳng hạn khi có yêu cầu công việc như sau: W_8 bắt đầu sau W_2 và W_3 , còn W_9 bắt đầu sau W_3, khi đó ta biểu diễn các ràng buộc này như sau:



Ở đây ta không thể gộp đỉnh *(i)* và đỉnh *(j)* lại để làm đỉnh bắt đầu cho W_8 vì W_9 không thể phụ thuộc vào W_2 , do đó việc đưa cung giả vào đảm bảo ràng buộc cho W_8 nhưng không làm ảnh hưởng đến điều kiện bắt đầu của W_9.

4.3.2. Chỉ tiêu thời gian của các sự kiện

1. Thời điểm sớm nhất của sự kiện

- Khái niệm: *Thời điểm sớm nhất của sự kiện (i)* , ký hiệu $t_S(i)$, là thời điểm sớm nhất có thể bắt đầu công việc *(i , j)* hoặc là thời điểm sớm nhất có thể kết thúc công việc *(h , i). (với h < i < j)*
- Tính thời điểm sớm của sự kiện:
  - Rõ ràng là $t_S(0) = 0$, do sự kiện (0) là sự kiện khởi công dự án, tại thời điểm $t_0 = 0$.
  - Với i > 0: $t_S(i)$ là độ dài của đường đi dài nhất từ đỉnh (0) đến đỉnh (i), tức là sự kiện (i) chỉ có thể xuất hiện khi tất cả các công việc từ khi khởi công đến sự kiện (i) đều đã hoàn thành.
  - Nếu tại đỉnh *(j)* có nhiều cung đi vào: $(i_1, j), (i_2, j)$, …ta có thời điểm sớm nhất của sự kiện *(j)* được tính như sau:

$$t_S(j) = \max\{t_S(i_k) + t(i_k, j) , k = 1, 2, \ldots\}$$

với $i_k = i_1, i_2, \ldots$là các đỉnh có cung đi vào (j), và $t(i_k, j)$ là thời gian của công việc (i_k, j).

Thí dụ: Trở lại sơ đồ PERT trong thí dụ trên, ta tính được các thời điểm sớm nhất của các sự kiện:

- $t_S(0) = 0$,
- $t_S(1) = 0 + 8 = 8$,
- $t_S(2) = \max\{t_S(0)+4 ; t_S(1)+6\} = \max\{ 0+4 ; 8+6\} = 14$,
- $t_S(3) = \max\{ 0+10 ; 14+5\} = 19$,
- $t_S(4) = t_S(1) + 6 = 8 + 6 = 14$,
- $t_S(5) = \max\{14+5 ; 14+8 ; 19+2\} = 22$,
- $t_S(6) = \max\{ 14+9 ; 22+5\} = 27$.

2. Thời điểm muộn nhất của sự kiện

- Khái niệm: *Thời điểm muộn nhất của sự kiện (i)* , ký hiệu $t_m(i)$, là thời điểm muộn nhất mà sự kiện (i) phải xuất hiện để bắt đầu một công việc mới mà không làm kéo dải tổng thời gian hoàn thành dự án. Nói các khác, $t_m(i)$ là thời điểm sự kiện thứ i phải xuất hiện khi tất cả các công việc ứng với các cung đi vào (i) đã hoàn thành, nếu sự kiện (i) xuất hiện sau thời điểm này thì thời điểm kết thúc dự án sẽ bị chậm lại.

- Tính thời điểm muộn nhất của sự kiện: luôn tính từ đỉnh kết thúc (n) lùi dần về các đỉnh có chỉ số nhỏ hơn, cho đến đỉnh khởi đầu (0)
  - Rõ ràng là sự kiện (n) xuất hiện khi tất cả các công việc đã hoàn thành: $t_m(n) = t_S(n)$.
  - Dự án phải bắt đầu từ thời điểm $t_0 = 0$, do đó : $t_m(0) = t_S(0) = 0$.
  - Với các đỉnh (i) mà $0 < i < n$:

    $t_m(i) = t_m(n)$ – {độ dài đường đi dài nhất từ đỉnh (i) đến đỉnh (n)}
  - Nếu tại đỉnh (i) có nhiều cung đi ra: (i , j_1) , (i , j_2) , …ta có thời điểm muộn nhất của sự kiện (i) được tính như sau:

$$t_m(i) = \min \{t_m(j_k) - t(i, j_k) , k = 1, 2, \ldots\}$$

với $j_k = j_1, j_2, \ldots$là các đỉnh có cung đi vào từ đỉnh (i), và $t(i , j_k)$ là thời gian của công việc (i , j_k).

Thí dụ: Trở lại sơ đồ PERT trong thí dụ trên, ta tính được các thời điểm muôn nhất của các sự kiện:

- $t_m(6) = t_S(6) = 27$,
- $t_m(5) = t_m(6) – t(5 , 6) = 27 – 5 = 22$,
- $t_m(4) = \min\{t_m(5) – t(4 , 5) ; t_m(6) – t(4 , 6)\} = \min\{ 22- 5 ; 27 - 9\} = 17$,
- $t_m(3) = t_m(5) – t(3 , 5) = 22 – 2 = 20$,
- $t_m(2) = \min\{t_m(3) – t(2 , 3) ; t_m(5) – t(2 , 5)\} = \min\{ 20- 5 ; 22 - 8\} = 14$,
- $t_m(1) = \min\{t_m(2) – t(1 , 2) ; t_m(4) – t(1 , 4)\} = \min\{ 14 - 6 ; 17 - 6\} = 8$,
- $t_m(0) = 0$.

3. Thời gian dữ trữ của sự kiện

- Khái niệm: *Thời gian dự trữ của sự kiện (i)*, ký hiệu d_i, là khoảng thời gian mà sự kiện (i) có thể chờ để xuất hiện mà không ảnh hưởng đến tiến độ hoàn thành dự án.

- Tính thời gian dự trữ của các sự kiện:

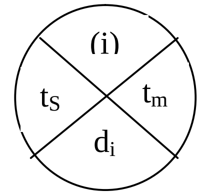
$$d_i = t_m(i) – t_S(i), \text{ với mọi } 0 \leq i \leq n.$$

Thí dụ: Trở lại sơ đồ PERT trong thí dụ trên, ta tính được thời gian dự trữ của các sự kiện:

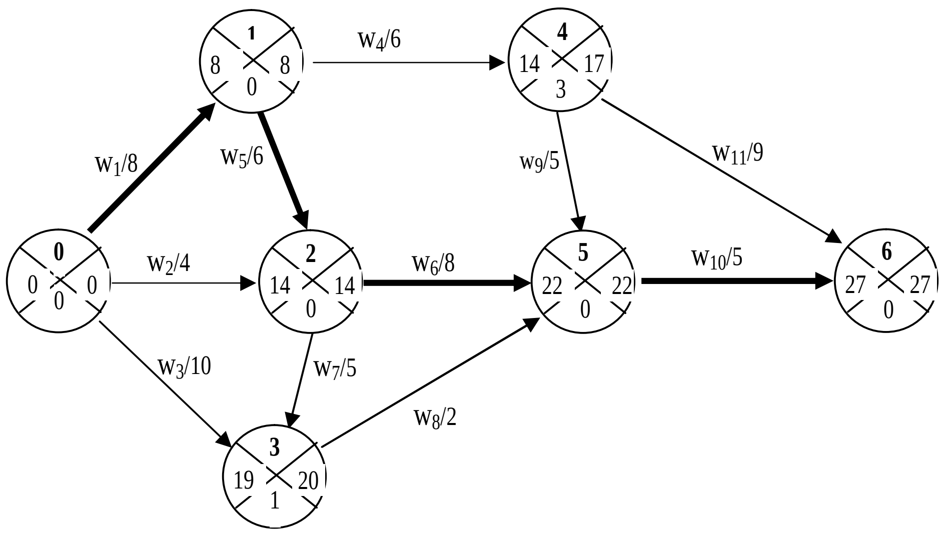
- $d_0 = t_m(0) – t_S(0) = 0$, $d_4 = 17 – 14 = 3$,
- $d_1 = t_m(1) – t_S(1) = 8 – 8 = 0$, $d_5 = 22 - 22 = 0$,
- $d_2 = 14 – 14 = 0$, $d_6 = 27 - 27 = 0$.
- $d_3 = 20 – 19 = 1$,

4. Ký hiệu các chỉ tiêu thời gian của sự kiện trên sơ đồ.

- Khi đã tính được tất cả các chỉ tiêu về thời gian của các sự kiện, ta có thể ghi vào mỗi đỉnh trong sơ đồ để tiện theo dõi, tìm đường găng, công việc găng, tính toán các chỉ tiêu về công việc …



Thí dụ: Vẽ lại sơ đồ PERT trong thí dụ trên với đầy đủ các chỉ tiêu thời gian tại các đỉnh:



Hình 2. Sơ đồ PERT với đầy đủ các chỉ tiêu thời gian tại các đỉnh

4.3.3. Khái niệm về đường găng

- Các khái niệm:
  - Đường đi dài nhất (theo trọng số) từ đỉnh (0) đến đỉnh (n) trong sơ đồ PERT gọi là *đường găng* (*Critical-Path : đường tới hạn, đường quyết định*).
  - Có thể có nhiều đường găng trên một PERT.
  - Các sự kiện ứng với các đỉnh (i) trên đường găng gọi là *sự kiện găng*, các sự kiện này không có thời gian dự trữ và phải xuất hiện đúng thời điểm duy nhất : $t_m(i) = t_S(i)$.
- Xác định đường găng theo các đỉnh găng:
  - Xác định các đỉnh găng: đó là các đỉnh có $d_i = 0$.
  - Đường găng là *đường đi có hướng từ đỉnh khởi đầu đến đỉnh kết thúc, đi qua các đỉnh găng*.
  - Các công việc ứng với các cung dọc theo đường găng gọi là *công việc găng*, các công việc còn lại là các *công việc không găng*.
  - Độ dài đường găng (tổng trọng số các cung dọc theo đường găng) là khoảng thời gian sớm nhất có thể hoàn thành dự án.
  - Nếu rút ngắn được một công việc găng thì sẽ rút ngắn thời gian hoàn thành dự án, ngược lại nếu công việc găng bị kéo dài thì thời gian hoàn thành dự án sẽ chậm trễ.

Thí dụ: Từ sơ đồ trong hình 2, ta có các đỉnh găng là (0), (1), (2), (5) và (6). Đường găng là đường đi có hướng qua các đỉnh này: (0) → (1) → (2) → (5) → (6) , (là dãy các mũi tên được tô đậm trong sơ đồ).

4.3.4. Chỉ tiêu thời gian của các công việc

1. Thời điểm bắt đầu và kết thúc công việc

- *Thời điểm có thể bắt đầu sớm nhất công việc (i , j)* là thời điểm sớm nhất xuất hiện sự kiện (i): $t_S(i)$.
- *Thời điểm có thể kết thúc muộn công việc (i , j)* mà không ảnh hưởng đến tiến độ các công việc khác là thời điểm muộn nhất xuất hiện sự kiện (j) là: $t_m(j)$.
- *Thời điểm có thể bắt đầu muộn công việc (i , j)* mà không ảnh hưởng đến tiến độ các công việc khác là thời điểm muộn nhất xuất hiện sự kiện (i) là: $t_m(j)$.
- *Thời điểm có thể kết thúc sớm nhất công việc (i , j)* là: $t_S(i) + t(i, j)$.

Thí dụ: Từ sơ đồ ở hình 2, ta có:

- Thời điểm bắt đầu sớm công việc W_4 là 8, và kết thúc muộn W_4 là 17.
- Thời điểm bắt đầu sớm công việc W_{11}` là 14, và bắt đầu muộn là 17.

2. Thời gian dự trữ chung của công việc

- Khái niệm: *Thời gian dự trữ chung của công việc (i , j),* ký hiệu d_{ij}, là khoảng thời gian tối đa mà công việc (i , j) có thể kéo dài mà không ảnh hưởng đến tiến độ toàn dự án.
- Tính: $$d_{ij} = t_m(j) - t_S(i) - t_{ij}$$
- Rõ ràng, với các công việc găng thì thời gian dự trữ chung bằng không.

Thí dụ: Từ sơ đồ ở hình 2, ta có thời gian dữ trữ chung của các công việc không găng:

- $d_{02} = t_m(2) - t_S(0) - t_{02} = 14 - 0 - 4 = 10$,
- $d_{03} = 20 - 0 - 10 = 10$,
- $d_{14} = 17 - 8 - 6 = 3$,
- $d_{23} = 20 - 14 - 5 = 1$
- $d_{45} = 22 - 14 - 5 = 3$,
- $d_{35} = 22 - 19 - 2 = 1$,
- $d_{46} = 27 - 14 - 9 = 4$.

Nói chung, khi kéo dài chỉ một công việc *(i , j)* thêm một khoảng thời gian bằng thời gian dự trữ chung của nó là d_{ij} thì không ảnh hưởng đến tiến độ dự án. Nếu kéo dài nhiều công việc thì tiến độ dự án có thể bị ảnh hưởng, khi đó phải sử dụng thời gian dự trữ độc lập của mỗi công việc.

Chẳng hạn: nếu kéo dài W_4 thêm khoảng thời gian dự trữ 3 ngày thì W_{11} (phải bắt đầu sau sau W_4) vẫn có thể hoàn thành trước ngày thứ 27, và không ảng hưởng tiến độ dự án (27 ngày). Nhưng nếu cả W_{11} cũng kéo dài hết thời gian dự trữ 4 ngày của nó, thì nó phải hoàn thành sau ngày thứ 30, và dự án sẽ hoàn thành sau 30 ngày, tiến độ ban đầu của dự án bị phá vỡ!

3. Thời gian dự trữ độc lập của công việc.

- Khái niệm: Thời gian dự trữ độc lập của công việc (i , j), ký hiệu d^*_{ij} , là khoảng thời gian tối đa mà công việc (i , j) có thể kéo dài mà không ảnh hưởng đến thời điểm hoàn thành muộn $t_m(i)$ của các công việc ngay trước đó, và không ảnh hưởng đến thời điểm bắt đầu sớm $t_S(j)$ của các công việc ngay sau đó.
- Tính: $d^*_{ij} = max \{0 ; t_S(j) - t_m(i) - t_{ij} \}$
- Rõ ràng, với các công việc găng thì thời gian dự trữ độc lập bằng không.
- Có thể tìm đường găng theo các công việc găng như sau:
  - Tính thời gian dự trữ chung của tất cả các công việc, từ đó xác định tất cả các công việc găng (i, j) ứng với thời gian dự trữ $d_{ij} = 0$.
  - Đường găng là đường đi có hướng đi qua tất cả các công việc găng.

Thí dụ: Từ sơ đồ ở hình 2, ta có thời gian dữ trữ độc lập của các công việc không găng:

- $d^*_{02} = t_S(2) - t_m(0) - t_{02}$ = 14 – 0 – 4 = 10,
- d^*_{03} = 19– 0 – 10 = 9,
- d^*_{14} = 14 – 8 – 6 = 0,
- d^*_{45} = 22 – 17 – 5 = 0,
- d^*_{35} = 22 – 20 – 2 = 0,
- d^*_{46} = 27 – 17 – 9 = 1.

Nhận xét: Ta luôn có $0 \le d^*_{ij} \le d_{ij}$

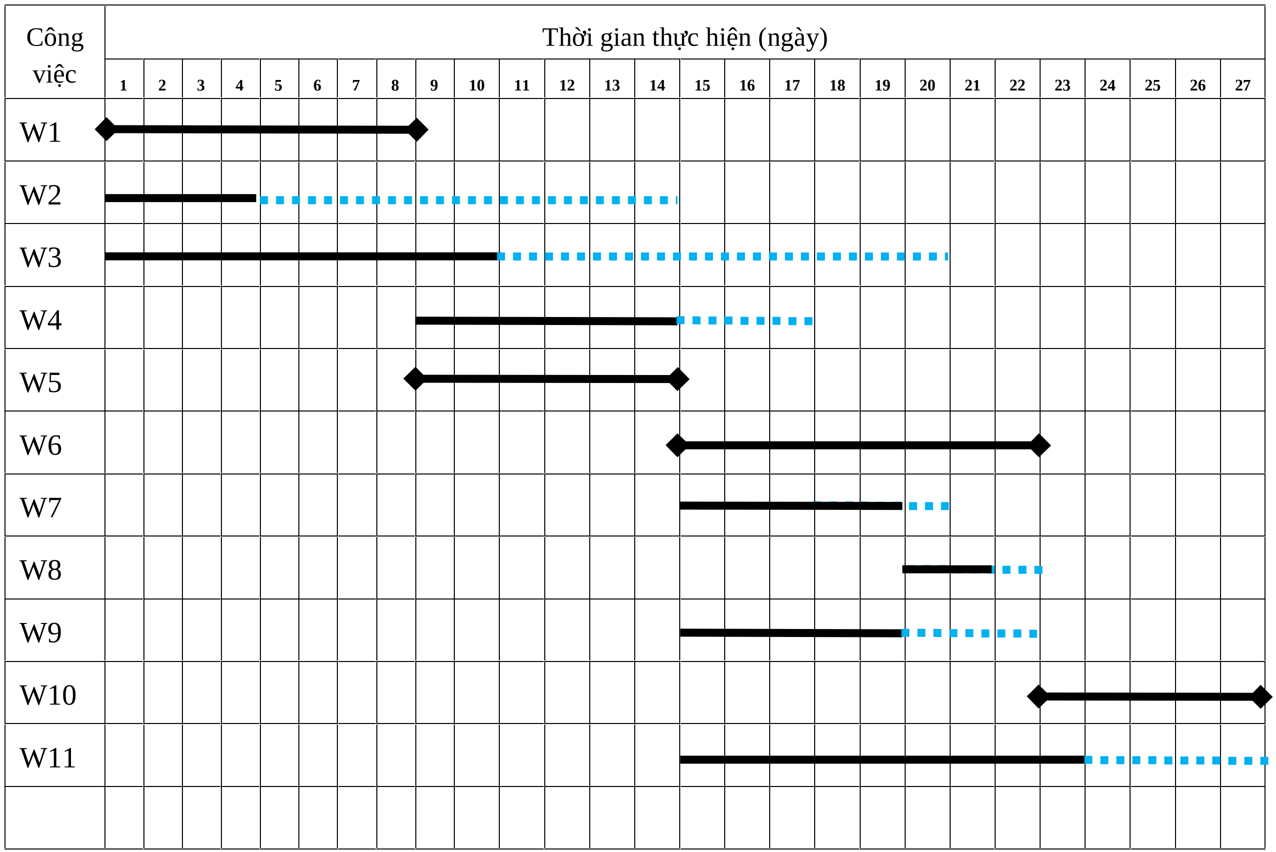
4.3.5. Biểu đồ Gantt

Sau khi lập được sơ đồ PERT và tính toán các chỉ tiêu thời gian của các sự kiện và các công việc, có thể lập biểu đồ Gantt để có thể dễ dàng theo dõi và quản lý dự án theo một lịch biểu trực quan.

Hiện nay đã có nhiều công cụ để xây dựng biểu đồ Gantt cho các dự án, chẳng hạn MS Project. Sinh viên tự tìm hiểu để sử dụng các công cụ này

Với sơ đồ trong hình 2, có thể chuyển qua biểu đồ Gantt như sau:

- Mỗi công việc được biểu diễn trong sơ đồ bằng 1 đoạn có độ dài bảng thời gian công việc.
- Điểm đầu và điểm cuối mỗi công việc ứng với thời điểm bắt đầu sớm nhất và kết thúc sớm nhất của mỗi công việc.
- Các công việc găng được đánh dấu chấm lớn ở 2 đầu đoạn thẳng.
- Các công việc không găng có thời gian dự trữ là đoạn thẳng không liền nét.


Công việc
Thời gian thực hiện (ngày)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
W1
W2
W3
W4
W5
W6
W7
W8
W9
W10
W11