# Chương 1

# BÀI TOÁN TỐI ƯU TỔNG QUÁT VÀ ỨNG DỤNG

## 1.1. Bài toán tối ưu tổng quát và phân loại

### 1. Giới thiệu bài toán tối ưu tổng quát

Lý thuyết tối ưu là một trong lĩnh vực kinh điển của toán học có nhiều ảnh hưởng đến nhiều lĩnh vực khoa học công nghệ, kinh tế xã hội.

Một phương án tối ưu là một phương án khả thi và tốt nhất, tức là phương án làm cho hàm mục tiêu đạt kết quả min (max) và phải thỏa mãn các điều kiện yêu cầu của bài toán (thỏa mãn các điều kiện ràng buộc).

Trong mô hình toán học, mục tiêu của bài toán được biểu diễn bởi hàm: $f(x) \to \min(\max)$ với $x$ là một biến hoặc vecto biến $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Biến $x$ hoặc vector biến $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ thường có yêu cầu phải thỏa mãn một số điều kiện nào đó. Tập hợp các điều kiện của các biến thì được gọi là điều kiện ràng buộc và được biểu diễn bởi miền D (miền ràng buộc).

Dạng tổng quát của bài toán tối ưu:

Làm cực tiểu/cực đại một hàm mục tiêu: $f(x) \to \min(\max)$ (1)

Thỏa mãn các điều kiện ràng buộc $x \in D$ (2)

Yêu cầu: Tìm $x$ để thỏa mãn (2) và làm cực tiểu/ cực đại hàm mục tiêu (1)

$x^*$ (một bộ các giá trị cụ thể của $(x_1, x_2, ..., x_n)$), thỏa mãn điều kiện (1) & (2) gọi là phương án tối ưu

Nếu $x$ chỉ thỏa mãn điều kiện (2) gọi $x$ là phương án chấp nhận được hay phương án.

***Thí dụ 1:***

Tìm x sao cho : $f(x) = x^3 - 3x + 1 \to \max$ (3)

Với : $x \in D$ = [-2,2; 1,8] (4)

Với $\forall x \in$ [-2,2; 1,8] là một phương án $\Leftrightarrow -2{,}2 \le x \le 1{,}8$

Bài toán tương đương bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của $f(x)$ khi $-2{,}2 \le x \le 1{,}8$

Phương pháp tìm GTLN (đã học trong giải tích 1) thực hiện như sau:

- Tìm các cực trị của $f(x)$, tính các giá trị cực trị, tính các giá trị tại các đầu mút của miền D, sau đó so sánh để tìm ra giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất).

$\to$ Tìm các điểm dừng $f'(x)$ = 0. Tính $f(x)$ tại các điểm dừng

Tìm $f(-2,2)$; $f(1,8)$

Vậy $f^{'}(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$f(1)$ = -1

$f(-1)$ = 3

$f(-2,2)$ = -3,048

$f(1,8)$ = 1,432

Do đó $f\max$ = 3 khi $x^*$ = -1

***Thí dụ 2***: Bài toán tối ưu có thể không có điều kiện ràng buộc, bất kỳ giá trị nào của x hoặc vecto $x$ cũng là một phương án chấp nhận được. Vậy chỉ cần tìm $x$ bất kỳ sao cho $f(x) \to \min(\max)$.

Có thể điều kiện ràng buộc được xác định trong hàm mục tiêu đó là miền xác định của hàm mục tiêu

Tìm phương án tối ưu của bài toán $Z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \to \max$ (5)

Điều kiện ràng buộc được xác định từ điều kiện xác định của hàm Z, tức là $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, hay miền ràng buộc của bài toán là: $x^2 + y^2 \leq a^2$, (6)

(5) – (6) là bài toán tìm cực trị hàm hai biến

Phương pháp giải: Dùng phương pháp tìm cực trị hàm 2 biến

- Tìm điểm dừng $\begin{cases} Z^{'}_x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ Z^{'}_y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ → Có 1 điểm dừng M(0,0)

- Sau đó ứng dụng đơn điệu kết luận được M(0,0) là cực đại.

→ Phương án tối ưu $x^*$ = (0,0) → Zmax = Z(0,0) = a

***Thí dụ 3:*** Tìm phương án tối ưu của bài toán sau:

$f(x) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

Với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 & (a) \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 & (b) \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Giải ra $x^*$ = (12,6), $f\max$ = 132

**2. Phân loại các bài toán tối ưu**

Các bài toán tối ưu chính là các bài toán qui hoạch toán học (Mathematics – programming)

- Bài toán tối ưu tuyến tính: hàm mục tiêu và tất cả các ràng buộc đều có dạng tuyến tính. Thí dụ: bài toán thí dụ 3 là bài toán tối ưu tuyến tính.

- Bài toán tối ưu phi tuyến: trong đó hàm mục tiêu hoặc ít nhất một điều kiện ràng buộc là phi tuyến (có chứa ít nhất một yếu tố phi tuyến – bậc 2, logic, mũ…). Thí dụ: Bài toán thí dụ 1, thí dụ 2 là bài toán tối ưu phi tuyến.
- Bài toán tối ưu rời rạc: khi biến hoặc giá trị hàm mục tiêu là rời rạc. Có thể chia như sau:
  - Tối ưu nguyên (quy hoạch nguyên): các biến hoặc các hàm mục tiêu nhận các giá trị nguyên.
  - Tối ưu đồ thị: là một dạng đặc biệt của bài toán tối ưu rời rạc. Có các đỉnh là các điểm rời rạc. Kí hiệu: X = {A, B, C, D}. Tập cạnh E = {$e_1$, $e_2$, …, $e_8$} hoặc E = {(A, D); (A, B); … }. Tìm đường đi ngắn nhất của đồ thị thỏa mãn điều kiện nào đó.
- Bài toán quy hoạch động (những kết quả của bài toán ở bước sau thì phụ thuộc vào kết quả của bước trước).

$$1 \to 2 \to 3 \to 4$$

- Bài toán tối ưu đa mục tiêu: là bài toán trong đó có nhiều hàm mục tiêu cần phải tối ưu trên cùng một miền ràng buộc.

$$f_i(x) \to \min(\max),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x \in D$$

Trong đó có nhiều hàm mục tiêu có thể đối lập nhau.

Khi giải bài toán này phải kết hợp hài hòa các lợi ích (giá trị) đạt được của hàm mục tiêu.

## 1.2. Ứng dụng của lý thuyết tối ưu

### 1. Phương pháp mô hình hóa

Nhiều vấn đề thực tế, kinh tế, khoa học và xã hội đều có thể giải quyết bằng phương pháp tối ưu toán học. Quan trọng là từ thực tế phải xây dựng một mô hình toán học thích hợp. Từ đó sử dụng phương pháp tối ưu để giải cùng với công cụ thích hợp.

Các bước cần thiết khi áp dụng phương pháp mô hình hóa:

***Bước 1***: Khảo sát vấn đề thực tế, phát hiện vấn đề cần giải quyết bằng phương pháp tối ưu.

***Bước 2***: Phát biểu các điều kiện ràng buộc và hàm mục tiêu dưới dạng định tính.

***Bước 3***: Lựa chọn các biến quy định và sau đó định lượng hóa các điều kiện ràng buộc và hàm mục tiêu. Từ đó xây dựng mô hình định lượng và mô hình toán học (mô hình tối ưu).

***Bước 4***: Thu thập số liệu và lựa chọn phương pháp toán học thích hợp để giải mô hình.

***Bước 5***: Xây dựng thuật toán và quy trình giải. Lựa chọn công cụ (giấy bút, máy tính) có thể lập trình cho bài toán ấy.

***Bước 6***: Đánh giá kết quả thu được. Nếu phù hợp thực tế nó cho kết quả tối ưu khi đó chứng tỏ mô hình chúng ta xây dựng đúng, hợp lý, vì vậy chấp nhận kết quả. Nếu không phù hợp thực tế thì phải xem xét và điều chỉnh mô hình.

***Kết luận***: Cần có sự hợp tác của các chuyên gia chuyên ngành (chẳng hạn kỹ thuật điện, điện tử…), chuyên gia về tin học, toán học để giải quyết các bài toán thực tế.

**Một số thuật ngữ trong quá trình xây dựng mô hình:**

- Toán ứng dụng (Applied Mathematic)
- Vận trù học (Operation Research – OR)
- Khoa học quản lý (Management Science – MS)
- Ứng dụng máy tính (Computer Application)
- Mô hình tối ưu (Optimization models)
- Quy hoạch (Programming)

**2. Một số ứng dụng của lý thuyết tối ưu**

Xét một số thí dụ dẫn đến mô hình tối ưu.

***Thí dụ 4***: *Bài toán phân phối điện năng.*

Có ba hộ phụ tải cần được cung cấp điện từ hai nguồn điện cách xa nhau. Giá thành truyền tải một đơn vị điện năng (hao tổn + chi phí bảo dưỡng đường dây, tram) từ nguồn thứ i (i = 1, 2) đến hộ thứ j (j = 1, 2, 3) là Cij. Khả năng cung cấp của mỗi nguồn điện bị giới hạn bởi trữ lượng của chúng là $A_1$, $A_2$. Nhu cầu của các hộ tiêu thụ cần phải đáp ứng đủ là $B_1$, $B_2$, $B_3$. Hãy lập kế hoạch phân phối điện năng khả thi sao cho tổng chi phí truyến tải là nhỏ nhất.

***Giải***

**-** *Lập mô hình toán học*

Giả thiết:

Điều kiện cân bằng thu phát: $\sum thu = \sum phát$

Tức $\sum_{i=1}^{2} A_i = \sum_{j=1}^{3} B_j$

Đặt biến $x_{ij}$ là lượng điện chuyển từ trạm cung cấp thứ i đến hộ tiêu thụ thứ j; ta có

$x_{ij} \geq 0; i = 1,2; j = 1,2,3$ (điều kiện không âm của biến)

Tổng chi phí truyền tải: $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}x_{ij}$

Vậy có hàm mục tiêu: $f(x) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}x_{ij} \to \min$ (1)

Điều kiện ràng buộc:

Tổng lượng điện từ trạm 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \le A_1$

Tổng lượng điện từ trạm 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \le A_2$

Tổng lượng điện của hộ 1: $x_{11} + x_{21} = B_1$ (2)

Tổng lượng điện của hộ 2: $x_{12} + x_{22} = B_2$

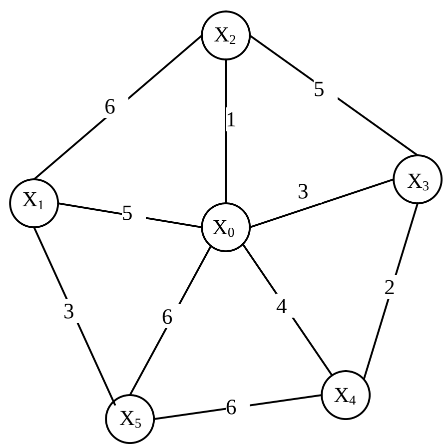
Tổng lượng điện của hộ 3: $x_{13} + x_{23} = B_3$

Điều kiện không âm của các biến $x_{11}, x_{12}, ..., x_{23} \ge 0$

Bài toán tối ưu tuyến tính chính là bài toán tìm các giá trị (1) để thỏa mãn các điều kiện (2).

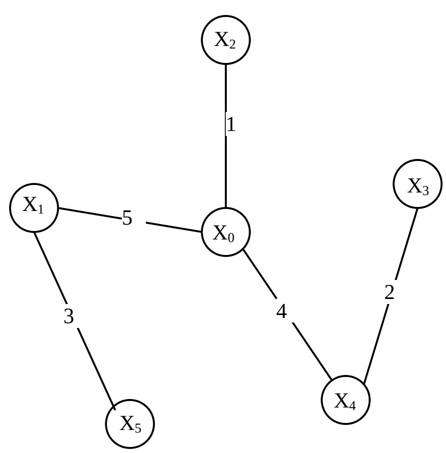
***Thí dụ 5****: Bài toán xây dựng hệ thống truyền tải điện.*

Một huyện ($X_0$) có 5 xã $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$, $X_5$. Xây dựng hệ thống truyền tải điện từ huyện đến tất cả các xã. Giữa hai địa điểm có thể thay đổi được đường dây với chi phí được cho trong hình 1. Hãy lập các phương án xây dựng hệ thống điện có thể nối liền các xã vào huyện với tổng chi phí là nhỏ nhất.




Hình 1: Các giả thiết của bài toán

Đây là một bài toán tối ưu trên đồ thị được giải bằng thuật toán PRIM, KRUSKAL




Hình 2 – Kết quả (giải bằng thuật toán PRIM). Ta có :

Sơ đồ đường dây cần xây dựng tối ưu như hình 2, tổng chi phí đầu tư nhỏ nhất : $f_{\min} = 15$

***Thí dụ 6****: Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu với tài nguyên có hạn.*

Một nhà máy sản xuất hai loại sản phẩm (I) và (II) từ hai loại nguyên liệu A và B. Biết rằng mỗi sản phẩm loại I cần 4 đơn vị nguyên liệu A và 2 đơn vị nguyên liệu B; mỗi sản phẩm loại (II) cần 2 đơn vị nguyên liệu A và 4 đơn vị nguyên liệu B. Khi bán một sản phẩm loại I lãi 8 đơn vị tiền, khi bán 1 sản phẩm loại (II) lãi 6 đơn vị tiền. Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho thu lãi nhiều nhất với số dự trữ nguyên liệu có hạn: 60 đơn vị nguyên liệu A và 48 đơn vị nguyên liệu B.

***Bài giải***

Lập mô hình: Biến quyết định $x_1, x_2$ là số sản phẩm loại (I), (II) cần sản xuất.

Tổng lãi: Hàm mục tiêu $f(x) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$ (1)

Điều kiện ràng buộc:

Tổng số nguyên liệu A: $4x_1 + 2x_2 \le 60$

Tổng số nguyên liệu B: $2x_1 + 4x_2 \le 48$ (2)

$x_1, x_2 \ge 0$

Vậy ta có bài toán tối ưu với hàm mục tiêu (1) thỏa mãn điều kiện ràng buộc (2). Đây là bài toán TUTT trong thí dụ 3.

***Bài toán 7****: Bài toán vận tải*

Người ta cần chở gạo từ hai kho $K_1$, $K_2$ tới ba nơi nhận $T_1$, $T_2$, $T_3$. Lượng gạo có ở hai kho và nhu cầu tại các nơi tiêu thụ cùng với giá cước vận tải chuyển từ kho $K_i$ đến $T_j$ (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) cho bởi bảng sau:

| TT / Kho | $T_1$ 35(T) | $T_2$ 25(T) | $T_3$ 45(T) |
|---|---|---|---|
| $K_1$ 30(T) | 5 | 2 | 3 |
| $K_2$ 75(T) | 2 | 1 | 1 |

Gọi là bài toán "vận tải", có phương pháp giải riêng tuy nhiên có thể đưa về giải bài toán tối ưu tuyến tính.

Gọi $x_{ij}$ là lượng gạo chuyển từ $K_i$ đến $T_j$, $x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3}$.

Hàm mục tiêu: $f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \to \min$ (1)

Điều kiện ràng buộc:

$$\left.\begin{array}{l} 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} \le 30 \\ 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 75 \\ 5x_{11} + 2x_{21} = 35 \\ 2x_{12} + x_{22} = 25 \\ 3x_{13} + x_{23} = 45 \\ x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,3} \end{array}\right| \quad (2)$$

# Chương 2

# TỐI ƯU TUYẾN TÍNH

## 2.1. Bài toán tối ưu tuyến tính tổng quát

### 2.1.1. hí dụ mở đầu về mô hình tối ưu tuyến tính (QHTT).

Ta xét một bài toán kinh tế về lập kế hoạch sản xuất : Giả sử một đơn vị kinh tế nông nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm I cần có 4 đơn vị nguyên liệu loại A và 2 đơn vị nguyên liệu loại B, các chỉ tiêu đó cho một đơn vị sản phẩm loại II là 2 và 4. Lượng dự trữ nguyên liệu loại A và B hiện có là 60 và 48 (đơn vị). Hãy xác định phương án sản xuất (xác định số sản phẩm cần sản xuất cho mỗi loại) đẻ đạt lợi nhuận lớn nhất, biết lợi nhuận / đơn vị sản phẩm bán ra là 8 và 6 (đơn vị tiền tệ) cho các sản phẩm loại I và II.

Ta có thể mô hình hóa bài toán này dưới dạng toán học như sau :

- Gọi số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất lần lượt là $x_1$ và $x_2$, ( $x_1, x_2 \geq 0$ )
- Ta có lợi nhuận thu được là $z = 8x_1 + 6x_2$
- Mức tiêu thụ nguyên liệu loại A là $4x_1 + 2x_2$ (không được vượt quá 60)
- Mức tiêu thụ nguyên liệu loại A là $2x_1 + 4x_2$ (không được vượt quá 48).
- Vậy việc lập kế hoach sản xuất đưa về việc giải bài toán sau :
- Tìm $x_1, x_2$ sao cho làm cực đại hàm $z = 8x_1 + 6x_2$, và thỏa mãn các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Viết lại dưới dạng một bài toán quy hoạch toán học :

Hàm mục tiêu : $$z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \qquad (1)$$

Điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Giải bài toán này, ta có phương án tối ưu $X^* = (12, 6)$, $z_{max} = 132$.

- Bài toán (1) – (2) có dạng của mô hình tối ưu toán học, hơn nữa, tất cả các biểu thức của hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc đều có dạng tuyến tính (là các đa thức với các biến quyết định $x_j$ xuất hiện trong mô hình đều ở bậc 1), vậy bài toán trên là một bài toán quy hoạch tuyến tính.

- Tổng quát hóa bài toán trên, với nhiều biến quyết định và nhiều điều kiện ràng buộc, ta có thể phát biểu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát như sau :

### 2.1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát.

Bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT) tổng quát có dạng :

- Tìm cực đại (cực tiểu) của hàm:

$$z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + ... + C_n x_n \rightarrow \max / \min \qquad (3)$$

- thỏa mãn các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \qquad ....... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i \\ \qquad ....... \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j \\ \qquad ....... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_k \ge 0, voi\, k \le n \end{cases} \qquad (4)$$

Trong đó:

- *Z = f(X)* gọi là hàm mục tiêu của bài toán, $X = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ là vecto n thành phần (một bộ n giá trị hay còn gọi là một điểm trong không gian n chiều). đó $C_j$ - các hệ số của hàm mục tiêu (j=1, 2, …, n)
- Hệ điều kiện (4) gọi là hệ ràng buộc, trong đó một số điều kiện ràng buộc dạng bất đẳng thức ( $\le$ ), một số ràng buộc dạng bất đẳng thức ( $\ge$ ), một số ràng buộc dạng đẳng thức (=). Các biến quyết định (có thể không phải là tất cả) có điều kiện không âm. Miền D xác định bởi hệ ràng buộc (6) gọi là miền ràng buộc.
- Ma trận của hệ ràng buộc có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & & ......... & \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

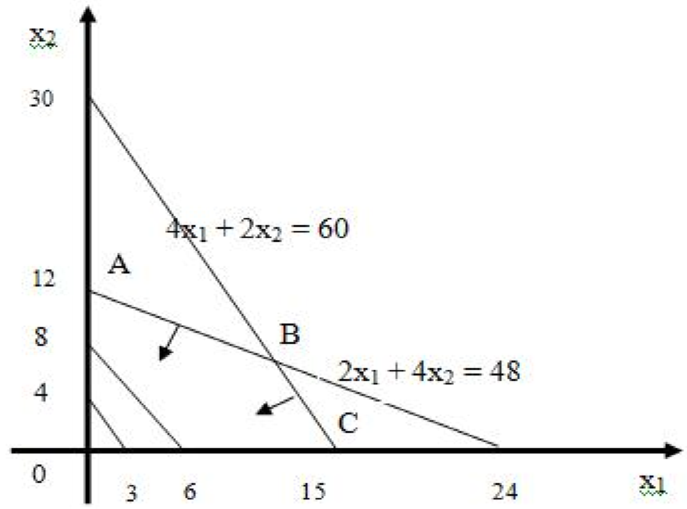
- Một phương án (hay phương án khả thi) là một vector $X = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ thỏa mãn hệ ràng buộc (4). Rõ ràng mọi điểm $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ thuộc miền ràng buôc D đều là một phương án, vì vậy miền D còn gọi là tập phương án.
- Phương án tối ưu (optimal solution) là một phương án, mà giá trị hàm mục tiêu tạiđó đạt cực đại (hay cục tiểu). Phương án tối ưu thường được ký hiệu là X* hay X-opt.

### 2.1.3. Phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Phương pháp đồ thị có ý nghĩa minh hoạ và giúp hiểu bản chất một số khái niệm cơ bản. Để giải ví dụ trên ta thực hiện các bước sau đây.

Bước 1: Vẽ miền ràng buộc (miền các phương án khả thi) là tập hợp các phương án khả thi (hay các phương án, nói một cách ngắn gọn). Mỗi phương án được thể hiện qua bộ số ($x_1$, $x_2$) còn gọi là véc tơ nghiệm, thoả mãn tất cả các ràng buộc đã có kể cả điều kiện không âm của các biến (xem hình I.1).

- Trước hết chúng ta vẽ đồ thị $4x_1 + 2x_2 = 60$ bằng cách xác định hai điểm trên đồ thị: ($x_1$ = 0; $x_2$ = 30) và ($x_2$ = 0; $x_1$ = 15).




*Hình 1.1 . Phương pháp đồ thị giải bài toán QHTT*

Đồ thị trên là một đường thẳng chia mặt phẳng làm hai nửa mặt phẳng: một phần gồm các điểm ($x_1$, $x_2$) thoả mãn $4x_1 + 2x_2 \leq 60$; một phần thoả mãn $4x_1 + 2x_2 \geq 60$ . Ta tìm được nửa mặt phẳng thoả mãn $4x_1 + 2x_2 \leq 60$ .

- Tương tự, có thể vẽ đồ thị $2x_1 + 4x_2 = 48$ bằng cách xác định hai điểm thuộc đồ thị ($x_1$ = 0, $x_2$ = 12) và ( $x_2$ = 0, $x_1$ = 24). Sau đó tìm nửa mặt phẳng thoả mãn $2x_1 + 4x_2 \leq 48$ .

- Lúc này, giao của hai nửa mặt phẳng tìm được trên cho ta tập hợp các điểm ($x_1$, $x_2$) thoả mãn các ràng buộc. Tuy nhiên, để thoả mãn điều kiện không âm của các biến, ta chỉ xét các điểm nằm trong góc phần tư thứ nhất. Vậy miền các phương án khả thi là miền giới hạn bởi tứ giác OABC (còn gọi là đơn hình vì là miền tạo nên bởi giao của các nửa mặt phẳng).

<u>Bước 2:</u> Trong miền (OABC) ta tìm điểm ($x_1$, $x_2$) sao cho

$z = 8x_1 + 6x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

*Cách 1:* Dùng đường đồng mức. Tùy theo giá trị của $x_1$, $x_2$ mà z có những mức giá trị khác nhau.

- Vẽ đường đồng mức: $8x_1 + 6x_2 = c$, ta có thể chọn giá trị c bất kỳ, nhưng chọn c = 24 là bội số chung của 6 và 8 để việc tìm toạ độ các điểm cắt hai trục toạ độ thuận lợi hơn, với các số nguyên, ở mức c = 24, dễ dàng tìm được hai điểm nằm trên đường đòng mức này là ($x_1$= 0; $x_2$ = 4) và ($x_2$ = 0; $x_1$ = 3). Các điểm nằm trên đường đồng mức này đều cho giá trị hàm mục tiêu z = 24.

- Tương tự, có thể vẽ đường đồng mức thứ hai: $8x_1 + 6x_2 = 48$ đi qua hai điểm ($x_1$ = 0; $x_2$ = 8) và ($x_2$ = 0; $x_1$ = 6). Chúng ta nhận thấy, nếu tịnh tiến song song đường đồng mức lên trên theo hướng của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ (8,6) thì giá trị của hàm mục tiêu $z = 8x_1 + 6x_2$ tăng lên.

Vậy giá trị z lớn nhất đạt được khi đường đồng mức đi qua điểm B(12, 6) (tìm được $x_1$ =12; $x_2$ = 6 bằng cách giải hệ phương trình $4x_1 + 2x_2 = 60$ và $2x_1 + 4x_2 = 48$ ).

***Kết luận:*** Trong các phương án khả thi thì phương án tối ưu là ($x_1$=12; $x_2$ = 6). Tại phương án này, giá trị hàm mục tiêu là lớn nhất $z_{max}$ = 8.12 + 6.6 = 132.

***Nhận xét:*** Phương án tối ưu của bài toán trên (hay các BTQHTT khác), nếu có, luôn đạt được tại một trong các đỉnh của miền phương án D, hay còn gọi là các điểm cực biên của D (điểm cực biên là điểm thuộc D, mà không thể tìm được một đoạn thẳng nào cũng thuộc D nhận điểm đó là điểm trong). Nhận xét trên đây là một định lý toán học đã được chứng minh một cách tổng quát. Nói một cách hình ảnh, muốn đạt được phương án tối ưu cho các BTQHTT thì cần phải “mạo hiểm” đi xét các điểm cực biên của miền phương án, và cũng chỉ cần xét các điểm cực biên là đủ, vì bài toán nếu có phương án tối ưu thì chỉ đạt được tại một phương án cực biên nào đó. Từ đó ta đưa ra cách 2 để giải bài toán QHTT.

*Cách 2:* Từ nhận xét trên, để tìm phương án tối ưu ta chỉ cần so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại các điểm cực biên của miền rang buộc D..

Đầu tiên chọn điểm cực biên O(0, 0), tính giá trị f tại O: f (0, 0) = 0;

Tại điểm cực biên A(0,12) tính giá tri f(0, 12) = 72;

Tại điểm cực biên C (15,0), tính giá trị f(15, 0) = 120;

Tại điểm cực biên B (12,6), tính giá trị f(12, 6) = 132.

So sánh giá trị hàm mục tiêu tại các điểm cực biên nói trên, giá trị max z đạt tại điểm B(12, 6). Vậy phương án tối ưu X*= (12, 6), giá trị cực đại hàm mục tiêu $z_{max}$ = f(12, 6) = 132. Bài toán đã được giải.

### 2.1.4. Quy trình tổng quát giải bài toán QHTT

- Nhận xét về phương pháp đồ thị

Từ phương pháp đồ thị, ta có nhận xét chung về phương pháp giải bài toán QHTT như sau: để tìm phương án tối ưu của BTQHTT ta xuất phát từ một điểm cực biên nào đó, tìm cách cải thiện hàm mục tiêu bằng cách đi tới điểm cực biên kề nó. Tiếp tục như vậy cho tới khi tìm được phương án tối ưu. Trong trường hợp BTQHTT có phương án tối ưu thì quy trình giải này sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước (do số điểm cực biên là hữu hạn) để nhận được phương án tối ưu.

Đối với BTQHTT đang xét, quy trình giải được minh hoạ như sau:

Nếu xuất phát tại O (0,0) chọn một trong 2 đỉnh kề, ta có hai hướng đi đến phương án tối ưu đạt tại phương án cực biên B(12, 6):

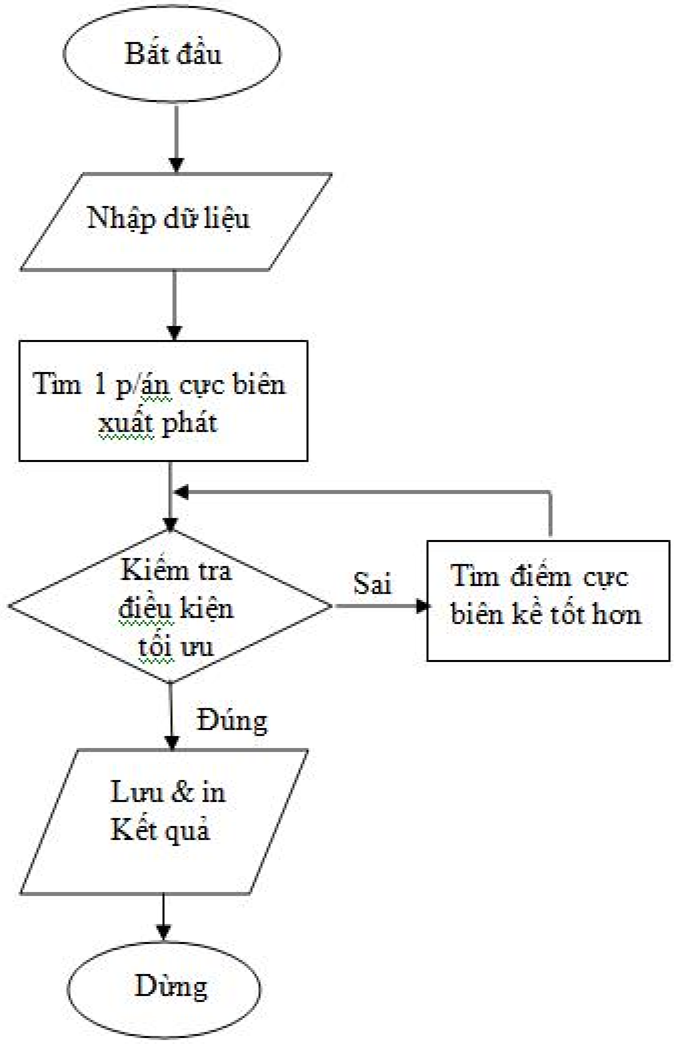
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tại O(0,0)<br>f(0, 0) = 0 | → | đến A(0,12)<br>f(0, 12) = 72 | → | đến B(12,6)<br>f(12, 6) = 132 |
| Tại O(0,0)<br>f(0, 0) = 0 | → | đến C(15, 0)<br>f(15, 0) = 120 | → | đến B(12,6)<br>f(12, 6) = 132 |

*Hình 1.2 . Quá tình đi đến phương án tối ưu của bài toán QHTT*

Với bài toán QHTT chỉ có hai biến như trên thì tập phương án là một đa giác lồi. Khi bài toán có nhiều hơn hai biến thì ta có tập phương án là “tập lồi đa diện”, đây là toán học khá phức tạp, với số biến lớn hơn 3 thì không thể biểu diễn hình học. Dựa trên quá trình giải bài toán QHTT trên đồ thị với hai biến, người ta tổng quát hóa quy trình giải bài toán QHTT, làm cơ sở xây dựng thuật toán “đơn hình” để giải bài toán QHTT trong các trường hợp tổng quát.

- *Sơ đồ khối giải bài toán quy hoạch tuyến tính*

Quy trình giải BTQHTT tổng quát có sơ đồ khối giản lược như trình bày trên hình 1.3. Trong sơ đồ này, vì mục đích trình bày vấn đề đơn giản, chúng ta không đề cập tới các trường hợp khi BTQHTT có miền phương án là tập rỗng (lúc đó ta không tìm được phương án xuất phát) cũng như khi ta không tìm được điểm cực biên kề tốt hơn mặc dù điều kiện tối ưu chưa thoả mãn (lúc đó tập các giá trị hàm mục tiêu z không bị chặn).




*Hình 1.3 . Sơ đồ khối quá trình giải bài toán QHTT*

## 2.2. Các dạng đặc biệt của bài toán quy hoạch tuyến tính

Cơ sở lý luận của thuật toán đơn hình dựa trên quy trình giải được trình bày trong sơ đồ khối trên. Ta phải bắt đầu bằng một phương án cực biên xuất phát. Để tìm được phương án cực biên xuất phát, bài toán phải được đưa về dạng chính tắc, sau đó là dạng chuẩn.

### 2.2.1. Bài toán QHTT dạng chính tắc

2.2.1.1 Định nghĩa bài toán QHTT dạng chính tắc

***Định nghĩa 2.1.*** Bài toán QHTT (3) – (4) được gọi là ở dạng chính tắc nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) các ràng buộc đều là đẳng thức

(b) tất cả các biến đều có điều kiện không âm. ( $x_j \geq 0\ \forall j$ )

Như vậy, bài toán QHTT dạng chính tắc có dạng:

Hàm mục tiêu:

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \rightarrow \max/\min \qquad (5)$$

Các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad ....... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\ \quad ....... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases} \qquad (6)$$

2.2.1.2 Đưa bài toán QHTT tổng quát về dạng chính tắc

Khi bài toán không thỏa mãn các điều kiện (a) và / hoặc (b) trên đây, ta tìm cách biến đổi để nó trở thành bài toán dạng chính tắc. Ta xét các trường hợp cụ thể thông qua các thí dụ.

- Trường hợp các ràng buộc đều có dấu (≤).

Bằng cách thêm ẩn bù (hay biến bù: *slack variables*) có hệ số +1 vào vế trái ràng buộc tương ứng và có hệ số 0 trong hàm mục tiêu. Ta có BTQHTT dạng chính tắc tương đương bài toán ban đầu.

***Thí dụ 2.1***: Xét bài toán $z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

với các ràng buộc $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Ta đưa BTQHTT về dạng chính tắc bằng cách thêm hai ẩn bù $x_3$ và $x_4$. Các ẩn bù này có hệ số +1 trong phương trình ràng buộc và có hệ số 0 trong hàm mục tiêu. Ta có BTQHTT dạng chính tắc tương đương bài toán ban đầu:

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- Trường hợp có điều kiện ràng buộc với dấu (≥ ).

Bằng cách thêm ẩn bù (hay biến bù: *slack variables*) có hệ số -1 vào vế trái ràng buộc tương ứng và có hệ số 0 trong hàm mục tiêu. Ta có BTQHTT dạng chính tắc tương đương bài toán ban đầu

Thí dụ 2: Xét bài toán $z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ta thêm ẩn bù $x_3$ với hệ số +1 vào vế trái ràng buộc thứ nhất như thí dụ trên (ứng với điều kiện ràng buộc là (≤), và ẩn bù $x_4$ với hệ số -1 vào vế trái rang buộc thứ hai. Các ẩn bù này có hệ số 0 trong hàm mục tiêu. Ta có BTQHTT dạng chính tắc tương đương bài toán ban đầu:

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- Trường hợp có biến không dương.

Bài toán QHTT có thể có biến nào đó có điều kiện không dương $x_j \leq 0$ (thực tế ít gặp, nhưng về lý thuyết vẫn phải xét đến). Bài toán đã vi phạm điều kiện (b) trong định nghĩa 2.1, để đưa về dạng chính tắc ta đổi biến $x'_j = -x_j$, khi đó biến mới $x'_j$ sẽ có điều kiện $x'_j \geq 0$.

Thí dụ: Xét bài toán $z = 8x_1 - 6x_2 \rightarrow \max$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Biến $x_2$ có điều kiện không dương, để đưa về dạng chính tắc ta thực hiện phép đổi biến: $x'_2 = -x_2$, khi đó $x'_2$ sẽ có điều kiện $x'_2 \geq 0$. Bài toán ban đầu được đưa về bài toán tương đương:

$$z = 8x_1 + 6x'_2 \rightarrow \max$$

với các ràng buộc $\begin{cases} 4x_1 - 2x'_2 + x_3 \leq 60 \\ 2x_1 - 4x'_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x'_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$

Sau đó tiếp tục áp dụng phương pháp thêm ẩn bù để đưa bài toán về dạng chính tắc.

- Trường hợp có biến không có giả thiết về dấu (biến với dấu tuỳ ý).

Bài toán QHTT có thể có biến $x_j$ nào đó không có giả thiết về dấu (khi đó biến $x_j$ có thể có dấu tuỳ ý, thực tế ít gặp, nhưng về lý thuyết vẫn phải xét đến). Bài toán đã vi phạm điều kiện (b) trong định nghĩa 1.1. Để đưa về dạng chính tắc ta đổi biến $x_j = x'_j - x''_j$, với $x'_j \geq 0$, $x''_j \geq 0$.

***Thí dụ 2.2:*** Xét bài toán $z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0, x_2 \quad \text{tuỳ ý} \end{cases}$$

Lúc này ta viết biến $x_2$ dưới dạng $x_2 = x'_2 - x''_2$ với $x'_2 \geq 0$, $x''_2 \geq 0$.

Bài toán trở thành: $z = 8x_1 + 6x'_2 - 6x''_2 \rightarrow \max$

Các ràng buộc sẽ là

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 \leq 48 \\ x_1, x'_2, x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

Sau đó tiếp tục áp dụng phương pháp thêm ẩn bù để đưa bài toán về dạng chính tắc.

*Kết luận:* Bao giờ cũng đưa được bài toán QHTT bất kỳ (các biến có dấu tuỳ ý, các ràng buộc có thể ≤ hay ≥) về dạng chính tắc.

### 2.2.2. Bài toán QHTT dạng chuẩn và phương án cơ bản

2.2.2.1 Định nghĩa bài toán QHTT dạng chuẩn

***Định nghĩa 2.2.*** Bài toán QHTT (5) **–** (6) được gọi là ở dạng chuẩn nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) Bài toán phải ở dạng chính tắc.

(b) Các hệ số $b_i$ ở vế phải là không âm.

(c) Mỗi phương trình ràng buộc phải có một *ẩn cơ sở*, đó là ẩn có hệ số +1 và không có mặt ở tất cả các phương trình khác.

2.2.2.2 Đưa bài toán QHTT dạng chính tắc về dạng chuẩn

Giả sử bài toán QHTT đã ở dạng chính tắc, nếu nó vi phạm các điều kiện (b) và / hoặc (c) trong định nghĩa 1.2, thì ta sẽ thực hiện các biến đổi để đưa nó về dạng chuẩn.

- Nếu có vế phải $b_i < 0$: Ta chỉ cần nhân cả 2 vế của ràng buộc tương ứng với -1, để được $b_i > 0$.
- Nếu bài toán không đủ ẩn cơ sở:

Với ràng buộc thứ i không có ẩn cơ sở, ta thêm vào ẩn giả $x_{n+i}$ không âm với hệ số bằng +1 vào vế trái của ràng buộc đó để làm ẩn cơ sở. Ẩn giả này sẽ có hệ số -M trong hàm mục tiêu, nếu là bài toán $z \to \max$, (và có hệ số là M, nếu là bài toán $z \to \min$), với M là số dương lớn tùy ý.

Với các phép biến đổi trên, mọi bài toán QHTT dạng chính tắc đều có thể đưa về dạng chuẩn.

***Nhận xét:*** Khi bài toán QHTT đã ở dạng chuẩn, ma trân hệ số của hệ ràng buôc sẽ có dạng đặc biệt: i cột cuối cùng của ma trận này ứng với các ẩn cơ sơ, sẽ là các vecto chỉ có thành phần thứ i có giá trị bằng 1, các thành phần khác cùng cột đều bằng không.

Bằng cách xắp xếp thứ tự các ràng buộc phù hợp, hệ ràng buộc của bài toán QHTT dạng chuẩn luôn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\ \qquad \dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m} \geq 0 & \end{cases} \tag{9}$$

Với ma trận hệ ràng buộc có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots.\, a_{1n} \;\; 1 \;\; 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots. a_{2n} \;\; 0 \;\; 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ . \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots. a_{mn} \;\; 0 \;\; 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

2.2.2.3 Phương án cơ bản của bài toán QHTT dạng chuẩn.

***Định nghĩa 2.3.*** Phương án cơ bản của bài toán QHTT dạng chuẩn là một phương án có giá trị của các ẩn không phải ẩn cơ sở đều bằng 0.

- Phương án cơ bản xuất phát của bài toán QHTT dạng chuẩn

Khi bài toán đã ở dạng chuẩn, từ hệ ràng buộc (9), ta thấy: nếu cho các ẩn không phải ẩn cơ sở nhận giá trị 0, còn các ẩn cơ sở nhận giá trị bằng vế phải tương ứng của nó, tức là $x_{n+i} = b_i$ thì hệ ràng buộc sẽ thỏa mãn. Nói cách khác, với bài toán ỏ dạng chuẩn thì ta luôn nhận được một phương án xuất phát:

$$X^0 = (0, 0, \ldots 0, b_1, b_2, \ldots b_m)$$

***Thí dụ:*** Đưa bài toán QHTT sau về dạng chuẩn, và tìm một phương án cơ bản xuất phát::

Hàm mục tiêu: $z = 9x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 36 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 = 40 & (2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

* Đưa về dạng chính tắc.

Thêm ẩn bù $x_3$ vào ràng buộc (1) khi đó ta có:

Hàm mục tiêu mới: $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 \rightarrow \max$

Điều kiện ràng buộc mới:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 36 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 = 48 & (2) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

* Kiểm tra các ẩn cơ sở.

Ràng buộc (1) đã có ẩn cơ sở $x_3$, ta thấy thiếu một ẩn cơ sở chuo ràng buộc (2), do đó thêm một ẩn giả $x_4$, ẩn giả này có hệ số +1 trong ràng buộc (2), nhưng có hệ số -M (M $\geq$ 0, rất lớn ) trong hàm mục tiêu. Bài toán đưa về dạng chuẩn như sau:

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 - Mx_4 \rightarrow \max$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 & = 36 \\ \quad 2x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 & = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{cases}$$

Phương án cơ bản xuất phát: $X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$= (0, 0, 36, 40)

Chú ý: Ta cần phân biệt ẩn bù và ẩn giả:

1. Ẩn bù dùng để đưa bài toán QHTT tổng quát về dạng chính tắc, còn ẩn giả để đưa bài toán QHTT dạng chính tắc về dạng chuẩn.
2. Trong các ràng buộc, hệ số của ẩn bù có thể bảng +1 hoặc -1, hệ số của ẩn giả luôn luôn bằng +1.
3. Trong hàm mục tiêu, hệ số của ẩn bù luôn bằng 0, còn hệ số của ẩn giả là -M (*nếu z* ì *max*), và là M (*nếu z* ì *min*)

## 2.3 Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

### 2.3.1. Thuật toán đơn hình (với bài toán *z* ì *max*)

- Điều kiện để giải được bài toán tối ưu tuyến tính bằng phương pháp đơn hình: Bài toán phải ở dạng chuẩn và có một phương án cơ bản xuất phát $X^1$
- Theo phần 1.2, ta luôn luôn đưa được bài toán về dạng chuẩn và tìm được một phương án cơ bản xuất phát.
- Các bước của thuật toán đơn hình:

  Bước 1: Xuất phát:

  Lập bảng đơn hình (1) ứng với phương án xuất phát $X^{(1)}$: xác định các ẩn cơ sở, các hệ số để đưa vào bảng đơn hình khởi đầu.

  Bước 2: Kiểm tra điều kiện tối ưu

  (a) Tính các $\Delta_j$

  (b) Kiểm tra điều kiện tối ưu: $\Delta_j \geq 0\ \forall j$.
  Nếu thỏa mãn: dừng thuật toán. Chuyển sang bước 4.
  Nếu vi phạm điều kiện tối ưu, tức là còn có giá trị $\Delta_j < 0$ (với cột j nào đó), chuyển bước 3.

  Bước 3: Biến đổi bảng.

  (a) Chọn cột xoay

  (b) Chọn dòng xoay

  (c) Xác định phần tử trục

  (d) Xác định ẩn cơ sở mới để đưa vào, và ẩn cơ sở cũ để loại khỏi bảng đơn hình mới

  (e) Tính toán các hệ số trong bảng đơn hình (2) ứng với phương án $X^{(2)}$, sau đó chuyển sang bước 2. Quá trình này lặp lại cho đến khi thỏa mãn điều kiện tối ưu thì chuyển sang bước

4, hoặc phát hiện bài toán không có phương án tối ưu nếu có $\Delta_j < 0$ mà theo cột này mọi $a_{ij} < 0$.

*Bước 4*: Xác định nghiệm bài toán.

(a) Phương án tối ưu:

Giả sử điều kiện tối ưu thỏa mãn ở bảng đơn hình thứ (k) ứng với phương án trong bảng là $X^{(k)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots 0)$, tức là các ẩn bù và ẩn giả $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$ đều có giá trị bằng 0, khi đó ta chọn phương án tối ưu của bài toán gốc là :

$$X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

(b) Giá trị hàm mục tiêu: $z_{max} = f(X^*)$.

- Ta sẽ trình bày các bước của thuật toán thông qua thí dụ sau:

***Thí dụ:*** Tìm phương án tối ưu cho bài toán:

$$z = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

Với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 & (a) \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 & (b) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

*a) Đưa về dạng chính tắc*

Thêm các ẩn bù $x_3$, $x_4$ vào các ràng buộc (a), (b). Bài toán được đưa về dạng chính tắc:

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

Điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 & = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 & = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

*b) Đưa về dạng chuẩn.*

Bài toán đã ở dạng chuẩn với các ẩn cơ sở là $x_3$ và $x_4$, ta có ngay một phương án cơ bản xuất phát là $X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ = (0, 0, 60, 48)

Khi bài toán đã thỏa mãn điều kiện (a) và (b) thì việc giải bài toán bằng phương pháp đơn hình, gồm các bước sau:

*Bước 1*: Khởi đầu.

Lập bảng đơn hình (1) ứng với phương án xuất phát $X^{(1)}$: xác định các ẩn cơ sở, các hệ số để đưa vào bảng đơn hình khởi đầu.

*Bước 2*: Kiểm tra điều kiện tối ưu

(a) Tính các $\Delta_j$

(b) Kiểm tra điều kiện tối ưu: $\Delta_j \geq 0\ \forall j$.

Nếu thỏa mãn: dừng thuật toán. Chuyển sang bước 4.

Nếu vi phạm điều kiện tối ưu, tức là còn có giá trị $\Delta_j < 0$ (với cột j nào đó), chuyển bước 3.

- Sau hai bước trên, ta có bảng đơn hình đầu tiên, với các giá trị $\Delta_j$ ở dòng cuối. Do điều kiện tối ưu bị vi phạm, ta chuyển sang bước 3.

Bảng đơn hình (1)

| Hệ số $c_i$ | Ẩn cơ sở | Ph. án | $c_1 = 8$ | $c_2 = 6$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| 0<br>0 | $x_3$<br>$x_4$ | 60<br>48 | 4<br>2 | 2<br>4 | 1<br>0 | 0<br>1 |
| $\Delta_j = \sum c_i.a_{ij} - c_j$ | | | $\Delta_1 = -8$ | $\Delta_2 = -6$ | $\Delta_3 = 0$ | $\Delta_4 = 0$ |

*Bước 3*: Biến đổi bảng.

(a) Chọn cột xoay: ứng với $\Delta_j < 0$ nhỏ nhất, đó là $\Delta_1 = -8$. Cột xoay là cột 1.

(b) Chọn dòng xoay: trên cột xoay, tìm dòng ứng với min $\frac{b_i}{a_{ij}}$ với $a_{ij} \geq 0$ . Trong bản đơn hình (1) là dòng 1.

(c) Xác định phần tử trục là phần tử giao của dòng xoay và cột xoay. (phần tử được đánh dấu trong bảng đơn hình (1).

(d) Xác định ẩn cơ sở mới là ẩn ứng với cột xoay để đưa vào, và ẩn cơ sở cũ ứng với hàng xoay để loại khỏi bảng đơn hình mới. Trong bảng đơn hình (1): ẩn đưa vào là $x_1$ , ẩn loại ra sẽ là $x_3$. Sau đó lập bảng đơn hình mới ứng với cơ sở mới.

(e) Tính toán các hệ số trong bảng đơn hình mới (bảng 2), ta nhận được phương án $X^{(2)}$:

- Chia tất cả dòng xoay cũ cho phần tử trục (kể cả ở cột phương án), sau đó chuyển dòng mới vào vị trí tương ứng ở bảng mới (gọi là dòng xoay mới).

- Biến đổi để các phần tử cùng cột với côt xoay cũ có dạng vecto đơn vị, với phần tử trục bằng 1, bằng phép biển đổi Gauss cho ma trận hệ số và cả cột phương án, đưa kết quả vào bảng mới

sau đó chuyển sang bước 2.

Bảng đơn hình (2)

| Hệ số $c_i$ | Ẩn cơ sở | Ph. án | $c_1 = 8$ | $c_2 = 6$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| 8<br>0 | $x_1$<br>$x_4$ | 15<br>18 | 1<br>0 | 1/2<br>3 | 1/4<br>-1/2 | 0<br>1 |
| $\Delta_j = \sum c_i.a_{ij} - c_j$ | | | $\Delta_1 = 0$ | $\Delta_2 = -2$ | $\Delta_3 = 2$ | $\Delta_4 = 0$ |

Với bảng đơn hình (2), điều kiện tối ưu chưa thỏa mãn, bước 3 được lặp lại, ta nhận được bảng đơn hình (3), với phương án $X^3$.

Bảng đơn hình (3)

| Hệ số $c_i$ | Ẩn cơ sở | Ph. án | $c_1 = 8$ | $c_2 = 6$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| 8 | $x_1$ | 12 | 1 | 0 | 1/3 | 1/6 |
| 6 | $x_2$ | 6 | 0 | 1 | -1/6 | 1/3 |
| $\Delta_j = \sum c_i.a_{ij} - c_j$ | | | $\Delta_1 = 0$ | $\Delta_2 = 0$ | $\Delta_3 = 5/3$ | $\Delta_4 = 2/3$ |

Điều kiện tối ưu đã thỏa mãn với bảng (3): $\Delta_j \geq 0\ \forall j$. Chuyển sang bước 4.

*<u>Bước 4</u>*: Xác định nghiệm bài toán.

(a) Phương án trên bảng là tối ưu: $X^3 = (12, 6, 0, 0)$

khi đó ta chọn phương án tối ưu của bài toán gốc là :

$$X^* = (12, 6).$$

(b) Giá trị hàm mục tiêu: $f_{max} = f(X^*) = 8*12+6*6 = 132$.

### 2.3.2. Thuật toán đơn hình mở rộng.

Khi bài toán QHTT ở dạng chuẩn có các ẩn giả $x_j$ (j = n+k, .., n+m), thì bài toán có dạng:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ;;; + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + \ldots - Mx_{n+k} - \ldots - Mx_m \text{ ì } max$$

Với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & = b_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad\quad + x_{n+k} & = b_k \\ \quad \ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad\quad\quad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m} \geq 0 & \end{cases}$$

- Trong đó, các ẩn giả là $x_{n+k}$, $x_{n+k+1}$, …, $x_{n+m.}$ Các ẩn này sẽ có hệ số trong hàm mục tiêu là –M (với bài toán $z$ ì $max$) , trong đó M là số dương rất lớn.

- Bài toán trên được gọi là bài toán M, (hay bài toán đánh thuế). Thuật toán đơn hình giải bài toán này được gọi là thuật toán đơn hình mở rộng, hay thuật toán M, (hay phương pháp đánh thuế), thuật toán hoàn toàn giống như thuật toán đơn hình thông thường cho bài toán không có ẩn giả, chỉ cần lưu ý khi so so sánh các $\Delta_j$ thì chú ý rằng –M là số âm rất nhỏ, nhỏ hơn mọi số âm cụ thể nào đó.

Xét thí dụ giải bài toán QHTT bảng phương pháp đơn hình mở rộng:

***Thí dụ 2***: *Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:*

$$z = 9x_1 + 6x_2 \to \max$$

Điều kiện:

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 36 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 = 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

* Đưa về dạng chính tắc.

Thêm ẩn bù $x_3$ vào ràng buộc (1) khi đó ta có:

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 \to \max$$

Điều kiện:

$$\text{(II)} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 36 \\ 2x_1 + 4x_2 = 40 & (2) \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

* Kiểm tra các ẩn cơ sở.

Ta thấy thiếu một ẩn cơ sở do đó thêm một ẩn giả $x_4$ vào (2) để làm ẩn cơ sở.

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 - Mx_4 \to \max$$

Điều kiện:

$$\text{(II)} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 36 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Phương án xuất phát: $x^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$=(0, 0, 36, 40)

| $C_i$ | Cơ sở | P/án $b_i$ | 9 | 6 | 0 | -M | $\leftarrow C_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
| 0<br>-M | $x_3$<br>$x_4$ | 36<br>40 | 3<br>4 | 3<br>2 | 1<br>0 | 0<br>1 | |
| | | | $\Delta_1$=-4M-9 | $\Delta_2$=-2M-6 | $\Delta_3$=0 | $\Delta_4$=0 | |
| 0 | $x_3$ | 6 | 0 | 3/2 | 1 | -3/4 | |
| 9 | $x_1$ | 10 | 1 | 1/2 | 0 | 1/4 | |
| | | | $\Delta_1$=0 | $\Delta_2 = -\frac{3}{2}$ | $\Delta_3$=0 | $\Delta_4 = \frac{9}{4} + M > 0$ | $\to$Khi đã loại 1 ẩn giả thì loại cả cột chứa ẩn giả. |
| 6 | $x_2$ | 4 | 0 | 1 | 2/3 | | |
| 9 | $x_1$ | 8 | 1 | 0 | -1/3 | | |
| | | | $\Delta_1$=0 | $\Delta_2$=0 | $\Delta_3$=1 | | |

Ở bảng đơn hình cuối, điều kiện tối ưu đã thỏa mãn, phương án tối ưu của bài toán M là X = (8, 4, 0, 0)

Phương án tối ưu của bài toán gốc là: $X^* = (8, 4)$.

Giá trị cực đại của hàm mục tiêu là: $z_{max} = f(X^*) = 9*8 + 6*4 = 96$.

Chú ý: Với bài toán M (có ẩn giả)

- Nếu với 1 phương án thỏa mãn điều kiện tối ưu mà ẩn giả có giá trị khác 0 thì bài toán không có lời giải ( $f_{\max} \to -\infty$, $f_{\min} \to +\infty$ ).

- Khi một ẩn giả bị loại thì nó sẽ loại vĩnh viễn, do đó sẽ bỏ cột tương ứng.

### 2.3.3. Thuật toán đơn hình với bài toán *z* ì *min*.

Trường hợp này, các bước của thuật toán đơn hình và thuật toán đơn hình mở rộng tương tự như với bài toán *z* ì *max*, chỉ chú ý một số thay đổi sau:

1. Ở bước 2: Kiểm tra điều kiện tối ưu là: $\Delta_j \le 0 \ \forall j$.

Nếu vi phạm điều kiện tối ưu, tức là còn có giá trị $\Delta_j > 0$ (với cột j nào đó), chuyển bước 3.

2. Ở bước 3: Chọn cột xoay ứng với cột có $\Delta_j > 0$ lớn nhất. Bài toán không có phương án tối ưu nếu có $\Delta_j > 0$ mà theo cột này mọi $a_{ij} < 0$.

Các bước chọn dòng xoay và biến đổi bảng như trường hợp bài toán *z* ì *max*.

3. Với bài toán có ẩn giả (phương pháp đơn hình mở rộng), hệ số của ẩn giả trong hàm mục tiêu là M. Các bước còn lại theo các chú ý trên.

## 2.4. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính trên máy tính

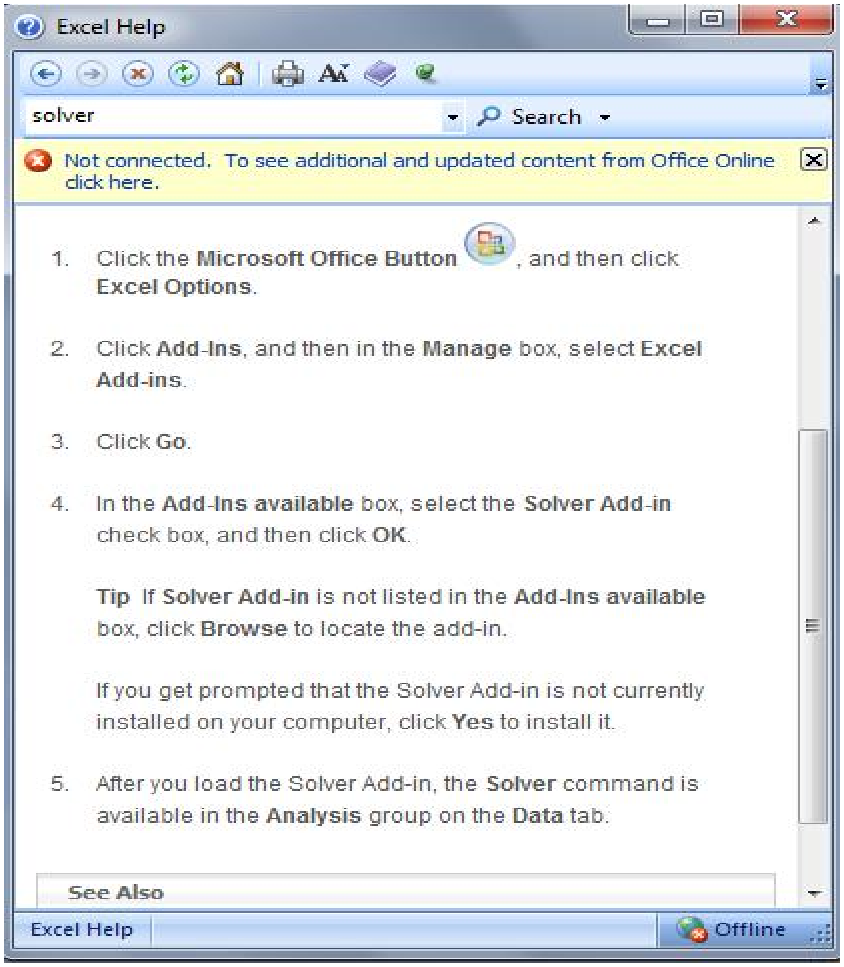
### 2.4.1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính trong Excel

Excel là một phần mềm đóng gói thương phẩm được sử dụng rộng rãi trong tính toán, tổng hợp dữ liệu, xử lý phân tích số liệu thống kê, giải các bài toán tối ưu / quy hoạch v.v... Đối với bài toán quy hoạch phi tuyến, khi sử dụng phần mềm Excel, nói chung chúng ta chỉ có thể tìm được phương án tối ưu địa phương mà không thể tìm được phương án tối ưu toàn cục. Chính vì vậy, chỉ nên sử dụng Excel để giải các BTQHTT.

Trước hết, phải chắc chắn rằng máy tính của bạn có Excell đã được cài đặt trình giải QHTT Solver.

Trong MS Excell 2003: Vào Tool -> Solve, nếu chưa có Solve thì vào Tool -> Add Ins.. để cài thêm công cụ Solve)

Trong MS Excell 2007 và cao hơn: thực hiện cài đặt solver theo các hướng dẫn trong của sổ hội thoại sau:

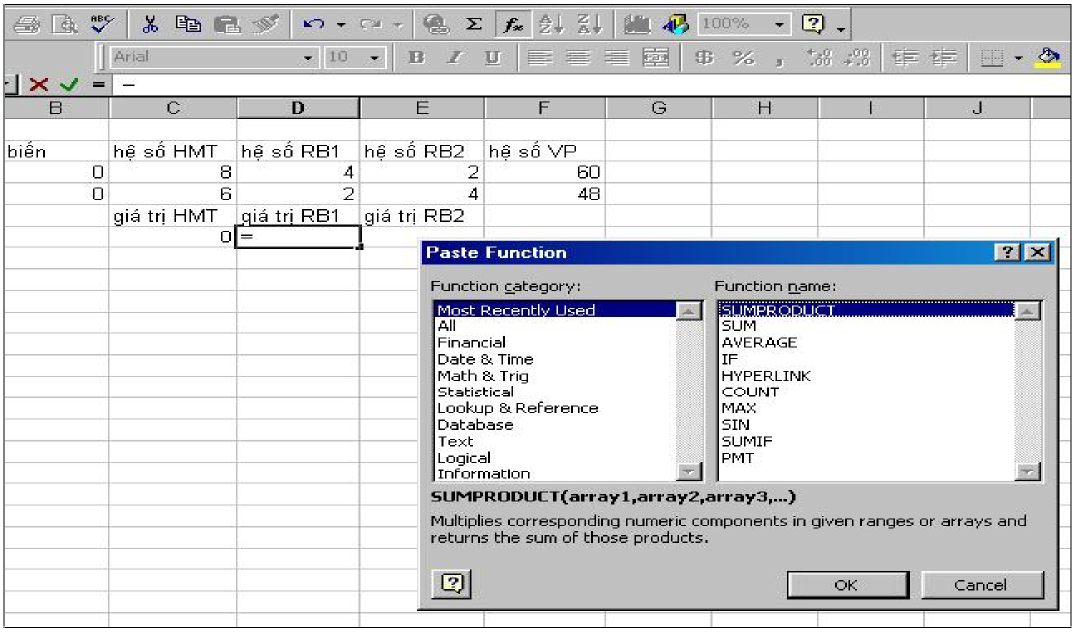



***Thí dụ.*** Giải BTQHTT

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

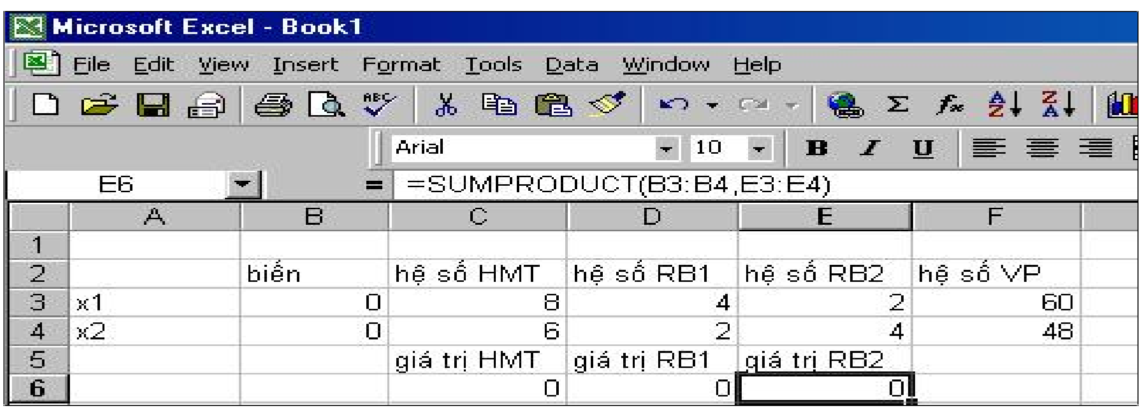
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \text{ á } 60; \\ 2x_1 + 4x_2 \text{ á } 48; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Trước hết, người giải phải nhập dữ liệu như trên hình I.4.



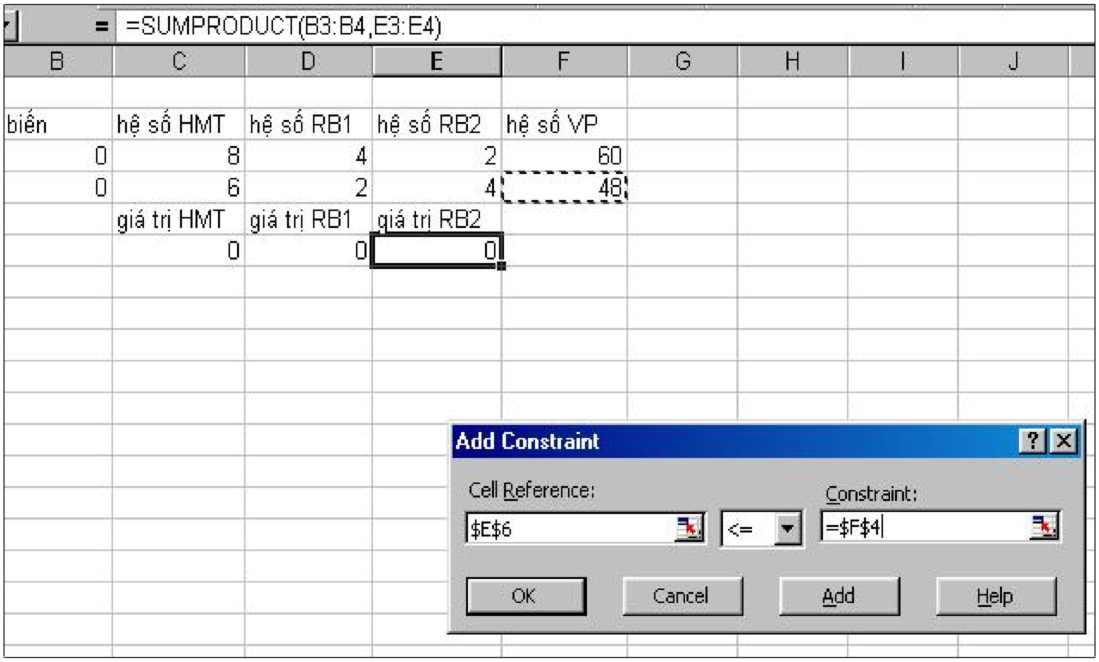

*Hình 1.4. Nhập dữ liệu cho bài toán quy hoạch tuyến tính trong Excel*

Như vậy, cần chọn vùng ô B3 và B4 cho hai biến $x_1$ và $x_2$, với giá trị ban đầu đều bằng 0. Tiếp theo, nhập các hệ số hàm mục tiêu, hệ số các ràng buộc và hệ số vế phải vào các ô tương ứng ở các cột C, D, E và F. Sau đó có thể gõ trực tiếp công thức, hoặc dùng hàm SUMPRODUCT để tính giá trị của hàm mục tiêu $z = 8x_1 + 6x_2$ và ghi vào ô C6 . Tương tự tính giá trị các vế trái của các ràng buộc và ghi vào các ô D6 và E6 . Lúc này chúng ta sẽ nhận được bảng số liệu xuất phát như trên hình I.5.



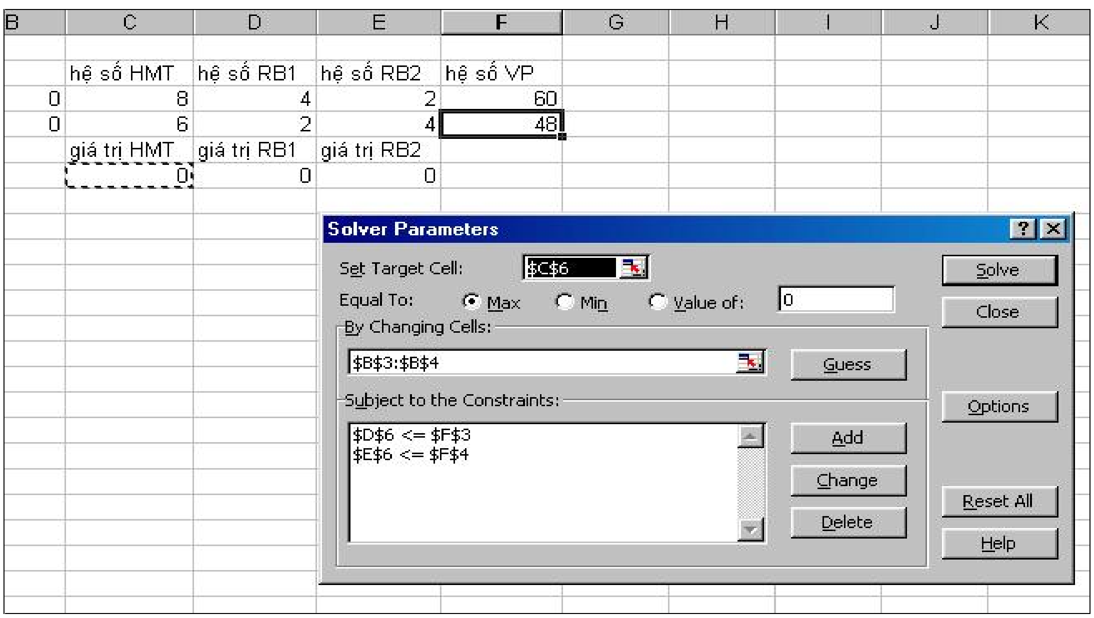

*Hình 1.5. Số liệu xuất phát của bài toán quy hoạch tuyến tính*

Thực hiện lệnh *Tools > Solver* bằng cách trước tiên nhập ô giá trị hàm mục tiêu C6 vào khung Set Target Cell, nhập các ô B3 và B4 chứa giá trị các biến $x_1$ và $x_2$ vào khung By Changing Cell. Sau đó, nhập các ràng buộc bằng cách nháy chuột máy tính vào nút Add… như chỉ ra trên hình I.6 cho ràng buộc: $2x_1 + 4x_2$ á 48, tức là \$E\$6 <= \$F\$4.



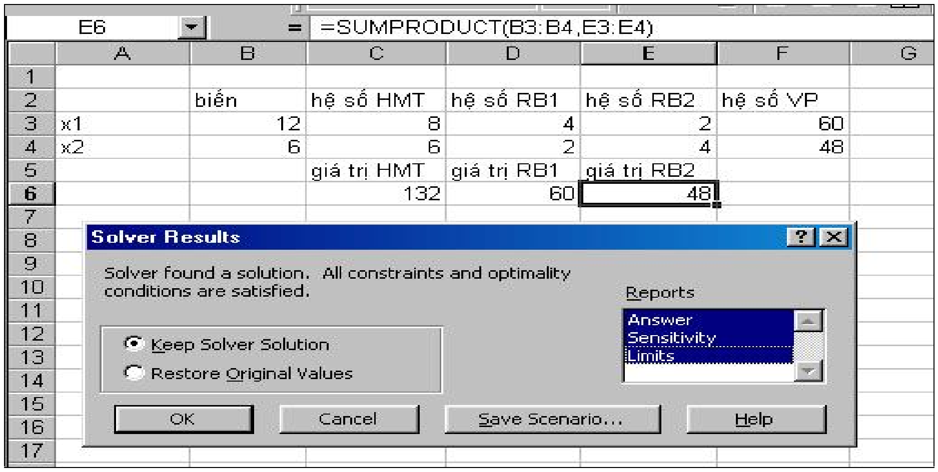

*Hình 1.6. Nhập các ràng buộc cho bài toán quy hoạch tuyến tính*

Chú ý rằng khi giải bài toán dạng cực đại hoá ta cần nháy chuột vào nút Max. Cuối cùng, chúng ta đã nhập xong tất cả các điều kiện của bài toán như trên hình I.7.



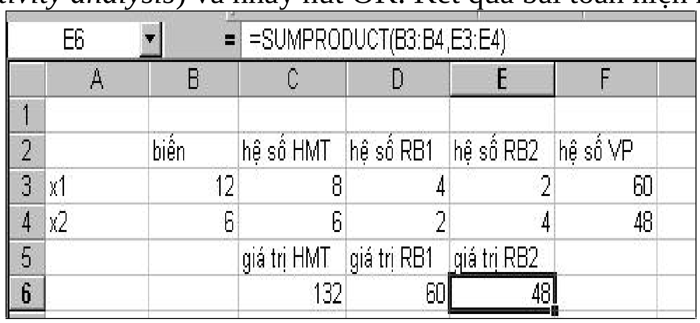

*Hình 1.7. Các điều kiện của bài toán đã nhập xong*

Cuối cùng ta nháy nút *Solve*, hộp thoại *Solve Results* sẽ hiện ra như trên hình 1.8.



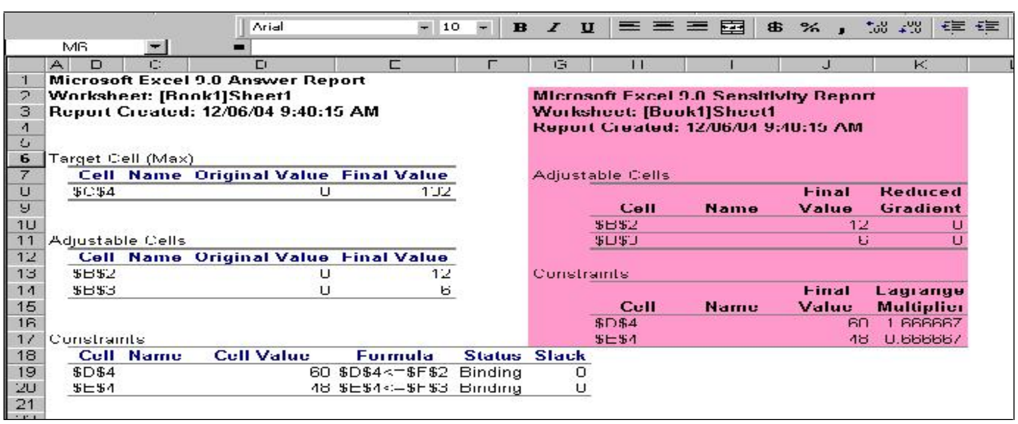

*Hình 1.8. Hộp thoại Solver Results khi giải bài toán.*

Bôi đen toàn bộ các lựa chọn trong khung *Report* để nhận được kết quả chi tiết bao gồm cả phân tích độ nhạy (*Sensitivity analysis*) và nháy nút OK. Kết quả bài toán hiện ra trên hình I.9.




*Hình 1.9. Kết quả bài toán trên màn hình máy tính.*

Như vậy, phương án tối ưu của bài toán trên là $x_1 = 12$, $x_1 = 6$ và giá trị cực đại của hàm mục tiêu là z = 132. Ngoài ra, có thể phân tích chi tiết hơn kết quả của bài toán thông qua các báo cáo *Answer Report* và *Sensitivity Report* nhận được trên màn hình máy tính (hình 1.10).




*Hình 1.10. Kết quả chi tiết của bài toán*

Ta thấy tại cột *Status Slack* có các *Binding* đều bằng 0. Điều này có nghĩa là các ràng buộc đều được thoả mãn chặt với dấu “ = ”. Còn cột *Langrange Multiplier* cho ta biết các giá trị tối ưu của các biến đối ngẫu tương ứng ( còn gọi là các giá ước định *Shadow Prices* để định giá các nguồn dự trữ / hệ số vế phải trong một số bài toán thực tế ).

### 2.4.2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phần mềm MATLAB.

*Xem module Linprog trong Matlab.*

Solve linear programming problems Equation

Finds the minimum of a problem specified by

*f*, *x*, *b*, *beq*, *lb*, and *ub* are vectors, and *A* and *Aeq* are matrices.

Syntax

```
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog(...)
[x,fval,exitflag] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...)
```

Description

`linprog` solves linear programming problems.

`x = linprog(f,A,b)` solves min `f'*x` such that `A*x ≤ b`.

`x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)` solves the problem above while additionally satisfying the equality constraints `Aeq*x = beq`. Set `A = []` and `b = []` if no inequalities exist.

`x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)` defines a set of lower and upper bounds on the design variables, `x`, so that the solution is always in the range `lb ≤ x ≤ ub`. Set `Aeq = []` and `beq = []` if no equalities exist.

`x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)` sets the starting point to `x0`. This option is only available with the medium-scale algorithm (the `LargeScale` option is set to `'off'` using `optimset`). The default large-scale algorithm and the simplex algorithm ignore any starting point.

`x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)` minimizes with the optimization options specified in the structure `options`. Use `optimset` to set these options.

`x = linprog(problem)` finds the minimum for `problem`, where `problem` is a structure described in Input Arguments.

Create the structure `problem` by exporting a problem from Optimization Tool, as described in Exporting to the MATLAB Workspace.

`[x,fval] = linprog(...)` returns the value of the objective function `fun` at the solution `x`: `fval = f'*x`.

`[x,fval,exitflag] = linprog(...)` returns a value `exitflag` that describes the exit condition.

`[x,fval,exitflag,output] = linprog(...)` returns a structure `output` that contains information about the optimization.

`[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...)` returns a structure `lambda` whose fields contain the Lagrange multipliers at the solution `x`.

> Note If the specified input bounds for a problem are inconsistent, the output `x` is `x0` and the output `fval` is `[]`.

Input Arguments

Function Arguments contains general descriptions of arguments passed into `linprog`. Options provides the function-specific details for the `options` values.

| | | |
|---|---|---|
| `problem` | `f` | Linear objective function vector `f` |
| | `Aineq` | Matrix for linear inequality constraints |
| | `bineq` | Vector for linear inequality constraints |
| | `Aeq` | Matrix for linear equality constraints |
| | `beq` | Vector for linear equality constraints |
| | `lb` | Vector of lower bounds |
| | `ub` | Vector of upper bounds |
| | `x0` | Initial point for `x`, active set algorithm only |
| | `solver` | `'linprog'` |
| | `options` | Options structure created with `optimset` |

Output Arguments

Function Arguments contains general descriptions of arguments returned by `linprog`. This section provides function-specific details for `exitflag`, `lambda`, and `output`:

`exitflag` Integer identifying the reason the algorithm terminated. The following lists the values of `exitflag` and the corresponding reasons the algorithm terminated.

| | |
|---|---|
| `1` | Function converged to a solution `x`. |
| `0` | Number of iterations exceeded `options.MaxIter`. |
| `-2` | No feasible point was found. |
| `-3` | Problem is unbounded. |
| `-4` | `NaN` value was encountered during execution of the algorithm. |
| `-5` | Both primal and dual problems are infeasible. |
| `-7` | Search direction became too small. No further progress could be made. |

`lambda` Structure containing the Lagrange multipliers at the solution `x` (separated by constraint type). The fields of the structure are:

| | |
|---|---|
| `lower` | Lower bounds `lb` |
| `upper` | Upper bounds `ub` |
| `ineqlin` | Linear inequalities |
| `eqlin` | Linear equalities |

`output` Structure containing information about the optimization. The fields of the structure are:

| | |
|---|---|
| `iterations` | Number of iterations |
| `algorithm` | Optimization algorithm used |
| `cgiterations` | 0 (large-scale algorithm only, included for backward compatibility) |
| `constrviolation` | Maximum of constraint functions |
| `message` | Exit message |

Options

Optimization options used by `linprog`. Some options apply to all algorithms, and others are only relevant when using the large-scale algorithm. You can use `optimset` to set or change the values of these fields in the options structure, `options`. See Optimization Options for detailed information.

`LargeScale` Use large-scale algorithm when set to `'on'` (default). Use medium-scale algorithm when set to `'off'`.

Medium-Scale and Large-Scale Algorithms

Both the medium-scale and large-scale algorithms use the following options:

`Diagnostics` Display diagnostic information about the function to be minimized or solved. The choices are `'on'` or the default `'off'`.

`Display` Level of display.

- `'off'` displays no output.
- `'iter'` displays output at each iteration. The `'iter'` option only works with the large-scale and medium-scale simplex algorithms.
- `'final'` (default) displays just the final output.

`MaxIter` Maximum number of iterations allowed, a positive integer. The default is:

- `85` for the large-scale algorithm
- `10*numberOfVariables` for the simplex algorithm
- `10*max(numberOfVariables, numberOfInequalities + numberOfBounds)` for the medium-scale active-set algorithm

`TolFun` Termination tolerance on the function value, a positive scalar. The default is:

- `1e-8` for the large-scale algorithm
- `1e-6` for the simplex algorithm

- The option is not used for the medium-scale active-set algorithm

Medium-Scale Algorithm Only

The medium-scale algorithm uses the following option:

`Simplex` If `'on'`, `linprog` uses the simplex algorithm. The simplex algorithm uses a built-in starting point, ignoring the starting point `x0` if supplied. The default is `'off'`. See Medium-Scale linprog Simplex Algorithm for more information and an example.

***Thí dụ 2.3.***

Find `x` that minimizes

$f(x) = -5x_1 - 4x_2 - 6x_3$,

subject to

$x_1 - x_2 + x_3 \le 20$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 42$

$3x_1 + 2x_2 \le 30$

$0 \le x_1,\ 0 \le x_2,\ 0 \le x_3$.

First, enter the coefficients

```
f = [-5; -4; -6]
A =  [1 -1  1
      3  2  4
      3  2  0];
b = [20; 42; 30];
lb = zeros(3,1);
```

Next, call a linear programming routine.

```
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(f,A,b,[],[],lb);
```

Entering `x`, `fval`, ... gets

```
x =
     0.0000
    15.0000
     3.0000
Fval =
```

...