Chương 3

BÀI TOÁN TỐI ƯU VẬN TẢI

3.1. Bài toán vận tải tổng quát

Đây là một bài toán tối ưu tuyến tính đặc biệt.

Ứng dụng: tối ưu vận tải hàng hóa, tối ưu truyền tải điện năng, sắp xếp sản xuất v.v…

3.1.1. Lập bài toán

Xem lại thí dụ 7, chương 1.

Giả sử m kho hàng A_1, A_2, …, A_m với khối lượng tương ứng là a_1, a_2, …, a_m.

n nơi nhận B_1, B_2, …, B_n với yêu cầu là b_1, b_2, …, b_n.

Giả sử: $\sum_{i=1}^{m} a_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (điều kiện cân bằng thu – phát, hay cân bằng giao - nhận)

Chi phí để chuyển 1 đơn vị hàng hóa từ A_j đến B_j là C_{ij} ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$)

Mặt khác $C = (c_{ij})_{mxn}$ – Ma trận chi phí.

Yêu cầu: vận chuyển hết hàng từ các A_i đến các B_j sao cho các A_i thì hết hàng, B_j thì nhận đủ hàng và tổng chi phí là nhỏ nhất.

Xây dựng mô hình

Đặt x_{ij} chỉ lượng hàng sẽ vận chuyển từ A_i đến B_j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$), $x_{ij} \geq 0$

Vậy tổng chi phí: $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$ (hàm mục tiêu) (1)

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m})\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n})\\
&x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})
\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Bài toán (1), (2) – là bài toán tối ưu tuyến tính dạng chính tắc. Do đó có thể giải bằng phương pháp đơn hình. Tuy nhiên, bài toán có đặc điểm số biến lớn (m x n biến), số ràng buộc lớn (m + n), vì vậy việc giải bằng phương pháp đơn hình mất nhiều công sức. Cần đưa ra phương pháp giải riêng cho bài toán vận tải.

Để giải bài toán tối ưu vận tải, ta xây dựng bài toán dạng đặc biệt của bài toán này.

3.1.2. Bài toán vận tải dạng bảng

Bài toán vận tải (1), (2) có thể viết dưới dạng bảng như sau:

Thu / Phát	B_1 b_1	B_2 b_2	…	B_n b_n
A_1 a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2 a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…				
A_m a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \ (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \ (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \ (i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n})$$

Các khái niệm:

- Các ô ứng với $x_{ij} > 0$ gọi là "ô chọn".
- Tập hợp liên tiếp các ô của bảng mà mỗi hàng hay cột có không quá 2 ô thì được gọi là một dây chuyền, nếu dây chuyền khép kín gọi là vòng.

Thí dụ 1:

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1		*	*	
a_2		*	*	●
a_3	●			●

Các ô đánh dấu * tạo thành dây chuyền (vòng)

1 vòng có 4 ô

Thí dụ 2:

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	*		*	
a_2			*	*
a_3	*			*

Các ô đánh dấu ở Thí dụ 2 là dây chuyền khép kín → vòng

3.1.3. Tính chất chung của bài toán vận tải

Tính chất 1: Bài toán vận tải vân bằng thu phát ($\sum a_i = \sum b_j$) thì luôn có phương án tối ưu.

Tính chất 2: Giả sử bảng vận tải có m hàng, n cột, E là tập các ô không tạo thành vòng gồm đúng (m + n -1) ô. Khi đó nếu thêm 1 ô mới bất kỳ thì E tạo thành vòng duy nhất.

Thí dụ: Trong thí dụ 1 có m + n -1 = 6. Thêm một ô mới bất kỳ sẽ có một vòng duy nhất (ô *).

Tính chất 3: Nếu bảng có m hàng, n cột, giả sử V là tập gồm m + n ô thì chác chắn có 1 vòng nào đó trong tập V. Nếu V chứa đúng một vòng thì loại một ô bất kỳ của vòng thì m + n – 1 ô sẽ không tạo thành vòng.

3.2 Tìm phương án cơ bản xuất phát của bài toán vận tải

3.2.1. Phương án cơ bản của bài toán vận tải

Một phương án ứng với một tập hợp ô chọn thảo mãn điều kiện ràng buộc (2).

Phương án cơ bản là một phương án có đúng m + n – 1 ô mà không tạo thành vòng. Nếu phương án cơ bản có m + n -1 tạo thành vòng thì gọi là phương án cơ bản suy biến.

Phương án cơ bản không suy biến đầu tiên để đưa vào giải bài toán vận tải gọi là phương án cơ bản xuất phát.

3.2.2. Tìm phương án cơ bản xuất phát của bài toán vận tải

a) Phương pháp góc Tây – Bắc: Bắt đầu phân phối hàng cho ô đầu tiên bên trái của bảng (ô góc Tây – Bắc) một lượng hàng tối đa có thể được x_{11} = min(a_1, b_1). Khi một hàng hay một cột bị loại ra khi hết hàng hoặc đã đủ hàng thì ta tiếp tục phân phối cho ô ở góc Tây Bắc của bảng còn lại. Cứ như vậy cho đến khi mọi hàng, cột đều bị loại. Nếu không đủ m + n -1 ô chọn, thì bổ sung 1 ô chọn sao cho không tạo thành vòng với $x_{ij} = 0$.

Thí dụ: Tìm phương án xuất phát bằng phương pháp góc Tây Bắc

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3
	20	40	30
A_1	1	3	5
30	20	10	
A_2	5	4	2
25		25	
A_3	8	5	4
35		5	30

$$\sum A_i = \sum B_j = 90$$

Số ô chọn 5 = m + n -1 → phương án cơ bản.

Mặt khác, các ô chọn không tạo thành vòng

→ Phương án trên là phương án cơ bản không suy biến.

→ Đây là phương án xuất phát của bài toán

b) Phương pháp "min – cước": phân phối hàng vào ô có giá cước nhỏ nhất với lượng hàng tối đa. Sau đó loại ô đó ra. Sau đó tiếp tục với các ô có giá cước nhỏ nhất trong các ô còn lại… Cho đến hết. Khi đó thu được 1 phương án có m + n – 1 ô chọn (Nếu không đủ thì bổ sung $x_{ij} = 0$).

3.3 Thuật toán giải bài toán vận tải

Có hai thuật toán:Thuật toán "Thế vị" và thuật toán "Qui không" giá cước ô chọn, được xây dựng dựa trên tính chất cơ bản sau của bài toán vận tải.

3.3.1. Tính chất cơ bản của bài toán vận tải

Định lý: Nếu thêm vào 1 hàng (hay 1 cột) của ma trận cước phí cùng 1 giá trị tùy ý thì phương án vận tải tối ưu của bài toán không thay đổi.

(đương nhiên Tổng chi phí có thay đổi, do các giá cước đã thay đổi).

3.3.2. Thuật toán qui không giá cước ô chọn

Bước 1: Tìm phương án xuất phát gồm m + n -1 ô không có vòng bằng các phương pháp đã biết.

Bước 2: Qui không cước phí ô chọn

- Cộng vào hàng thứ i của ma trận cước phí số r_i.
- Cộng vào cột thứ j của ma trận cước phí số s_j
- Sao cho cước phí mới của các ô chọn đều bằng 0.
- Cước phí mới ô chọn $C_{ij}^{'} = C_{ij} + r_i + s_j = 0$

Bước 3: Kiểm tra điều kiện tối ưu

- Nếu sau khi các giá cước các ô chọn $C_{ij}^{'} = 0$ mà các ô còn lại (ô loại – không phải ô chọn) đều có $C_{ij}^{'} \geq 0$ với mọi ô loại thì phương án đang xét là phương án tối ưu. Khi đó tổng chi phí $f(x) = \sum_{\forall ôchon} C_{ij} x_{ij}$.
- Nếu sau khi qui không giá cước ô chọn mà tồn tại ô là ô loại mà $C_{ij}^{'} < 0$ (ô vi phạm), phương án chưa tối ưu, cần kiểm tra xem ô nào là vi phạm nhiều nhất ($C_{ij}^{'} < 0$ nhỏ nhất – gọi là ô điều chỉnh).

Bước 4: Xây dựng phương án mới tốt hơn

- Bổ sung ô điều chỉnh đã tìm trên vào tập ô chọn cũ, khi đó có tập ô chọn mới m + n ô, phải xuất hiện một vòng duy nhất V_i gọi là vòng điều chỉnh.
- Đánh dấu chẵn lẻ cho các ô trong vòng điều chỉnh, ô điều chỉnh là ô lẻ.
- Tìm ô loại ra khỏi vòng điều chỉnh

  Lượng điều chỉnh q = min x_{ij} (các ô chẵn của V_i)

  Thay đổi phương án Vi: ô chẵn: x_{ij} - q; ô lẻ: x_{ij} + q. Khi đó một ô chẵn trở thành $x_{ij} = 0$ (ô loại).

→ Phương án mới gồm m + n -1 ô với giá cước mới là phương án xuất phát cho bước sau.

Lặp lại bước 2 cho đến khi thỏa mãn phương án tối ưu.

Thí dụ 3: Giải bài toán vận tải sau:

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3
	80	20	60
A_1	5	4	1
50			
A_2	3	2	6
40			
A_3	7	9	11
70			

Giải

$$\sum A_i = \sum B_j = 160$$

Bước 1: Tìm phương án xuất phát bằng phương pháp "min-cước"

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3	
	80	20	60	
A_1 50	5 8	4 8	1 0	$r_1 = -1$
			50	
A_2 40	3 0	2 0	6 -1	$r_2 = -7$
	20 (C)	20	x_{23} (L)	
A_3 70	7 0	9 3	11 0	$r_3 = -11$
	60 (L)		10 (C)	
	$s_1 = 4$	$s_2 = 5$	$s_3 = 0$	

Phương án có 5 = m + n -1 ô chọn và không có vòng

→ Phương án cơ bản không suy biến

→ Phương án xuất phát.

Bước 2: - Qui không ô chọn

- Tính giá ô loại như trong bảng trên.

Bước 3: Ô vi phạm là ô (2,3) do $C'_{23} = -1 < 0$ → Ô điều chỉnh

Bổ sung ô điều chỉnh vào các ô chọn → Có vòng V_1 → vòng điều chỉnh.

Lượng điều chỉnh: q = min (ô chẵn) = 10

Phương án mới:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ijcu} \notin V_1 \\ x_{ijcu} + q; ij - L \in V_1 \\ x_{ijcu} - q; ij - C \in V_1 \end{cases}$$

Bước 4: Phương án mới

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3	
	80	20	60	
A_1 50	8 7	8 7	0	$r_1 = -1$
			50	
A_2 40	0	0	-1 0	$r_2 = 0$
	10	20	10	
A_3 70	0	3 3	0	$r_3 = 0$
	70		0	
	$s_1 = 0$	$s_2 = 0$	$s_3 = 1$	

Phương án mới có m + n -1 ô, không vòng.

Trở lại bước 2 (Qui không ô chọn. Tính các ô loại)

Ta có: Các ô loại có $C'_{ij} \geq 0$

$\rightarrow$ Phương án tối ưu

Phương án tối ưu $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 10 & 20 & 10 \\ 70 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x^*) = 670$

3.4 Các dạng đặc biệt của bài toán vận tải

3.4.1. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát $\sum a_i \neq \sum b_j$

a) $\sum a_i > \sum b_j \Rightarrow$ Dạng $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$ (1)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \ (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$$

Nhận xét: Có những điểm phát còn lại hàng thừa, các điểm thu nhận đủ hàng.

Khắc phục để giải: Thêm 1 cột nhận hàng giả b_{n+1} với nhu cầu $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ với mọi giá cước cho cột là $C_{i,n+1} = 0$. Khi đó bài toán trở thành cân bằng thu phát → Giải như bình thường.

b) $\sum a_i < \sum b_j \Rightarrow$ Dạng $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$ (1)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \ (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$$

Nhận xét: Các điểm phát hết hàng, có điểm thu không nhận đủ hàng

Khắc phục để giải: Thêm 1 hàng phát hàng giả a_{m+1} với lượng hàng $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$ với mọi giá cước là $C_{m+1,j} = 0$. Khi đó bài toán trở thành cân bằng thu phát → Giải như bình thường.

Thí dụ 4: Giải bài toán vận tải sau: (Phát > Thu)

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3
	20	40	60
A_1	3	4	1
80			
A_2	4	2	3
30			
A_3	1	5	6
50			

Giải

Ta có: $\sum a_i = 160$; $\sum b_j = 120. \Rightarrow \sum a_i - \sum b_j = 40$

Thêm cột với $B_4 = 40$ và $C_{i4} = 0$

Giải bài toán bình thường dùng phương pháp min-cước để tìm phương án xuất phát

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3	B_4	
	20	40	60	40	
A_1 80	3 2	4 -1	1 0	0 0	$r_1 = 0$
		X_{12} L	60	20 C	
A_2 30	4 6	2 0	3 5	0 3	$r_2 = 3$
		30			
A_3 50	1 0	5 0	6 5	0 0	$r_3 = 0$
	20	10 C		20 L	
	$s_1 = -1$	$s_2 = -5$	$s_3 = -1$	$s_4 = 0$	

Có phương án cơ bản (m + n -1 = 6), không tạo thành vòng → Phương án cơ bản không suy biến.

Tiến hành tối ưu hóa bằng phuong pháp “Qui không giá cước ô chọn”

Có ô vi phạm ô (1, 2)

Thêm vào tập ô chọn lúc đó có vòng như bảng trên

Lượng điều chỉnh q = 10

Phương án mới

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3	B_4	
	20	40	60	40	
A_1	2	-1	0	0	r_1 =0
80	2	0	0	0	
		10	60	10	
A_2	6	0	5	3	r_2 = -1
30	5	0	4	2	
		30			
A_3	0	0	5	0	r_3 = 0
50	0	1	5	0	
	20			10	
	s_1 = 0	s_2 = 1	s_3 =0	s_4 = 0	

Phương án mới có m + n -1 ô, không vòng.

Trở lại bước 2 (Qui không ô chọn. Tính các ô loại)

Ta có: Các ô loại có $C'_{ij} \geq 0$ → Phương án là tối ưu

Phương án tối ưu $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 60 \\ 0 & 30 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x^*) = 180$

Thí dụ 5: Giải bài toán vận tải sau: (Phát < Thu)

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3
	80	30	60
A_1 50	5	4	1
A_2 40	3	2	6
A_3 70	7	9	11

Giải

Có $\sum a_i$ = 160; $\sum b_j$ =170 $\Rightarrow \sum b_j - \sum a_i$ = 10

Thêm hàng với A_4 = 10 và C_{4j} = 0

Giải bài toán bình thường dùng phương pháp min-cước đề tìm phương án xuất phát (ưu tiên cho bảng cũ trước).

Thu / Phát	B_1	B_2	B_3	
	80	30	60	
A_1 50	5 4	4 3	1 0	$r_1 = -1$
			50	
A_2 40	3 0	2 0	6 3	$r_1 = -3$
	10	30		
A_3 70	7 0	9 3	11 4	$r_1 = -7$
	70			
A_4 10	0	0 1	0	$r_1 = 0$
		0	10	
	$s_1 = 0$	$s_1 = 1$	$s_1 = 0$	

Phương án có 5 ô, do đó thêm 1 ô (chọn ô (4,2) sao cho không tạo thành vòng)

Có phương án cơ bản (m + n -1 = 6), không tạo thành vòng → Phương án cơ bản không suy biến.

Qui không ô chọn.

Ta có: Các ô loại có $C'_{ij} \geq 0$

→ Phương án tối ưu

Phương án tối ưu $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 10 & 30 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x^*) = 630$

3.4.2. Bài toán vận tải có ô cấm

Thực tế có một số tuyến đường A_i đến B_j có thể có sự cố (gẫy cầu, cấm đường) và không thể vận chuyển theo tuyến này được.

Gọi ô (i, j) ứng với ô cấm

Do đó gán cước ô cấm bằng 1 số M (số dương cực lớn) $C_{ij} = M$

Sau đó giải bình thường
Tìm phương án ban đầu theo phương pháp min-cước.

3.4.3. Bài toán vận tải tìm max $f(x)$

Tương tự bài toán cũ chỉ có hàm mục tiêu $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$ (1) với hệ ràng buộc như cũ.

Cách giải:

Cách 1: Đặt $g(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -c_{ij}x_{ij} \to \min$

Giải bình thường $x^*_{g(x)}$ cũng là phương án tối ưu của $f(x)$

Nhưng $f_{\max} = -g_{\min}$

Cách 2: vẫn để nguyên bài toán $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$ thay đổi tìm phương án xuất phát bằng phương pháp max-cước (ưu tiên phân phối cho ô có chi phí lớn)

Dùng phương pháp qui không giá cước ô chọn r_i, s_j và điều kiện tối ưu là $C'_{ij} < 0$ với mọi ô loại.

Các qui trình làm tương tự.

Thí dụ 6: Một phân xưởng có 5 công nhân trong đó có 2 nữ, 3 nam, có 5 máy thổi bóng đèn với 3 loại: loại I – 1 cái, loại II – 2 cái, loại III – 2 cái. Mỗi công nhân điều khiển một máy với năng suất như trong bảng. Bố trí lao động hợp lý để năng suất lao động là max

Công nhân \ Máy	I	II	III
	1	2	2
Nữ	10	8	7
2			
Nam	8	9	11
3			

Giải. Đây là bài toán vận tải tìm max, cân bằng thu phát

$$\sum A_i = \sum B_j = 160$$

Cách 1: Max-cước

Công nhân \ Máy	I	II	III	
	1	2	2	
Nữ 2	10 0 1	8 0 1	7 -3	$r_1 = 0$
Nam 3	8 -2	9 0 1	11 0 2	$r_2 = -1$
	$s_1 = -10$	$s_2 = -8$	$s_3 = -10$	

Phương án có 4 = m + n -1, không tạo thành vòng → Phương án cơ bản không suy biến.

Qui không ô chọn. Ta có: Các ô loại có $C'_{ij} < 0$ → Phương án đang xét là tối ưu.

Năng suất cao nhất $f_{\max} = 49$, $x^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$