## 概念

表示 函数 函数 函数函数的导数 与自变量之间的关系的方程.

1. 阶微分方程

$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

一般形式 必须出现 $y^{(n)}$

特殊 $y^{(n)} = f(x, y, \cdots, y^{(n-1)})$

### ① 解

(1) 满足微分方程

(2) 收敛 满足方程的函数

例 $y = y(x)$, 其在区间 $I$ 上连续且有直到 $n$ 阶导数, 且 $F(x, y, \cdots, y^{(n)}) \equiv 0$

(3) 通解: 含任意常数

个数 与 微分方程 阶数 相同

(4) 特解: 确定任意常数

① 初值条件 $x=x_0$ 时 $y=y_0$

$\rightarrow y|_{x=x_0} = y_0$

$y'|_{x=x_0} = y_0'$

$\cdots$

$y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$

② 边界条件 → 加定义域

③ 积分曲线 → 微分方程的图形.

例 $y' = f(x, y)$

$\int_{x_0}^{x} y' \cdot dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y) \cdot dx$

$y|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(x, y) \cdot dx$

$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y) \cdot dx$

$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y) \cdot dx$

当变量 $x_0$ 在区间 $I$ 内任取 $x$ 时, 上式 $y(x)$ 是 $f(x, y)$ 的连续解, 反之 $y(x)$ 是 $f(x, y)$ 的连续解 $\Rightarrow$ 积分曲线

### ② 可分离变量的方程

一阶微分的解法.

(1) $y' = f(x, y)$

令 $P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = 0$

则 $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$

(2) 必要有 $Q(x, y) = 1$

则 $y' = \frac{dy}{dx} = -P(x, y)$

例 $\frac{dy}{dx} = 2xy$

$\ln y = x^2 + C$

$y = e^{x^2 + C}$

$y = e^{x^2} \cdot e^{C}$

$y = C_1 e^{x^2}$

$y' = 2x \cdot y$

$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y$

$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \cdot dx$

$\ln y = x^2 + C$

$y = e^{x^2 + C}$

$y = e^{x^2} \cdot e^{C}$

$y = C_1 e^{x^2}$

(3) 变量分离 $f(x, y) = f(x) \cdot g(y)$

则 $y' = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$

$G(y) = F(x) + C$

隐式通解

$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x) \cdot dx$

$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$

$G(y) = F(x) + C_1$

$C_1 = G(y_0) - F(x_0)$

隐式通解

例 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$

$\int y^2 \cdot dy = \int dx$

$\frac{1}{3} y^3 = x + C$

$y = \sqrt[3]{3x + C}$

### ③ 齐次方程

(1) 对于一阶微分方程. $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$

则称 为齐次方程

对变量 $y$ 和 $x$ 的函数

$u = \frac{y}{x}$

则: $y = ux$ $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$

$\Rightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

再 $u = \frac{y}{x}$ 代回 $y$ 得解

(2) 可化为齐次的方程

$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f}$

$x = X + h$

$y = Y + k$

$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{dX + eY + dh + ek + f}$

$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ dh + ek + f = 0 \end{cases}$

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$,

则 $\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{dX + eY}$

令 $X = uY$, $y = kx + b$, 得通解

$\int_0^{+\infty} a^x \cdot dx$ ⊕ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

① 无限区间上(无穷积分) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

$\begin{cases} \text{存在/收敛} \\ \text{不存在/发散} \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$= \pi$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

正项级数. 每项 $u_n \geq 0$

则 $S_n$ 单增

要证明 级数 收敛

① 对数判别 $S_n$ 有界

$u_n \leq u_n \leq v_n$

$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$

若 $\lim v_n = 0$, 则

(1) $u_n > 0$, 则 $\sum u_n$ 收敛

(2) $u_n < 0$. $\begin{cases} u_n > 0 \text{ 则 } \sum u_n \text{ 收敛 (加负号)} \\ u_n < 0 \text{ 则 } (-u_n) \text{ 收敛 (加负号)} \end{cases}$

② $v_n < 0$ 加负号

正项级数

$\begin{cases} \text{① } \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho \\ \text{② } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \end{cases}$

(1) $0 \leq \rho < 1$ 收敛

(2) $\rho > 1$ 发散

(3) $\rho = 1$ 无法判断

用 ①

② 根值审敛法

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (是 $u_n$ 的正项)

$= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \cdots + (-1)^n u_n + \cdots$

$\therefore$ 莱布尼茨定理

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ ($u_n \geq 0$)

① $u_n \leq u_n$

② $n \to \infty$, $u_n \to 0$

则 $\sum (-1)^n u_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{1}{n})$

(2) 绝对收敛. 条件收敛

1) $\sum |u_n|$ 收敛 $\longrightarrow \sum u_n$ 收敛

2) $\sum |u_n|$ 不收敛 $\longrightarrow$ 条件收敛 (不收敛)

$\sum u_n$ 收敛

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$

绝对值 $\sum \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p > 1 & \text{绝对收敛} \\ p \leq 1 & \text{满足莱布尼茨定理 (条件)} \end{cases}$

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

$\sum u_n$ 收敛

$\sum |u_n|$ 收敛

$\therefore$ 绝对收敛

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$