逆变换法

- 定义

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geqslant y\}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

- **定理** 设随机变量U服从$(0,1)$上的均匀分布，则$X = F^{-1}(U)$的分布函数为$F(x)$.
- 产生来自$F(x)$的随机数的步骤
  1. 由$U(0,1)$抽取u
  2. 计算$x = F^{-1}(u)$

逆变换法举例(连续型)

例1 生成密度函数为$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$的随机数.

- 分布函数$F_(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- 抽样公式$Y = F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$

逆变换法举例(连续型)

例2 设$X_1, \ldots, X_n$是来自$F(x)$的一个样本, $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$, 要产生$Y_1$的随机数.

- $F_{Y_1}(y) = 1 - [1 - F(y)]^n \triangleq G(y)$
- $Y_1 = G^{-1}(U) = F^{-1}(1 - (1 - U)^{1/n})$
- 譬如, 若$F(x) = x, 0 \leqslant x \leqslant 1$, 则$Y_1 = 1 - U^{1/n}$

逆变换法举例(连续型)

例3 设连续型随机变量X的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} c_i, & x_i \leqslant x < x_{i+1}, i = 0, \dots, n-1 \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

其中$c_i > 0, a = x_0 < \dots < x_n = b, \int_a^b p(x)dx = 1$.

- 令$p_i = \int_a^{x_i} p(x)dx$, 对任一$x$, 令$i = \max\{j : x_j \leqslant x\}$, 有

$$F(x) = p_i + c_i(x - x_i)$$

- 由$F(X) = U$解出

$$X = x_i + (U - p_i)/c_i$$

- 步骤
  1. 产生$U(0,1)$随机数u
  2. 确定i, 使$p_i \leqslant u < p_{i+1}$
  3. 计算$x = x_i + (u - x_i)/c_i$

逆变换法举例(离散型)

例4 设离散型随机变量X的概率分布为$P(X=x_i)=p_i$, $x_1<x_2<\ldots$, 分布函数为$F(x)=\sum\limits_{x_i\leq x} p_i$.

- 产生来自离散型随机数的步骤
  1. 由$U(0,1)$抽取u
  2. 令$x=\begin{cases} x_i, & F(x_{i-1})<u\leq F(x_i)(i=2,3,\ldots), \\ x_1, & u\leq F(x_1) \end{cases}$
  3. 则$x\sim F(x)$.

逆变换法举例(离散型)

例4续 利用逆变换法产生离散型随机变量X可以不必求出X的分布函数. 具体方法如下:

1. 由p_k把单位长度的区间[0,1]依次分为长度为$p_1, p_2, \ldots$的小区间
2. 生成$u \sim U(0,1)$, 若$u \in$长度为p_k的小区间, 令$x = x_k$.
3. 则$x \sim F(x)$.