筛选抽样

- 目的: 从$p(x)$抽样
- $p(x) = c \cdot h(x) \cdot g(x)$, 其中$h(x)$是一个密度函数且易于抽样, $0 < g(x) \leqslant 1$
- 抽样步骤
  1. 由$U(0,1)$抽取u, 由$h(y)$抽取y
  2. 如果$u \leqslant g(y)$, 则$x = y$, 停止
  3. 如果$u > g(y)$, 回到(1)

筛选抽样

- 事实上

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P(Y \le z | U \le g(Y)) \\ &= \frac{P(Y \le z, U \le g(Y))}{P(U \le g(Y))} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{z} g(y)h(y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)h(y)dy} \end{aligned}$$

$h(x)$的选取

- 若存在$M(x)$，满足$p(x) \leqslant M(x)$，且$c = \int M(x)dx < \infty$.
  令$h(x) = M(x)/c$，则$p(x) = c \cdot h(x) \cdot p(x)/M(x)$.
  若$h(x)$易于抽样，则
  1. 由$U(0,1)$抽取u，由$h(y)$抽取y
  2. 如果$u \leqslant p(y)/M(y)$，则$x = y$，停止
  3. 如果$u > p(y)/M(y)$，回到(1)
- 特别，若$X \sim p(x), -\infty < a \leqslant x \leqslant b < \infty$，并
  设$M = \sup p(x)$存在，则可取$h(x) = 1/(b-a)$，
  $c = M(b-a)$，$g(x) = p(x)/M$，
  1. 由$U(0,1)$独立抽取u_1，u_2
  2. 计算$y = a + u_2(b-a)$
  3. 如果$u_1 \leqslant g(y) = p(a + u_2(b-a))/M$，则$x = y$，停止
  4. 如果$u_1 > g(y)$，回到(1)

筛选法举例

设

$$X \sim p(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

- 注意到

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \leq M(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & 0 < x \leqslant 1 \\ e^{-x}/\Gamma(\alpha), & x > 1 \end{cases}$$

$$c = \int_0^\infty M(x)dx = (1/\alpha + 1/e)/\Gamma(\alpha) < \infty$$

- 取

$$h(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}/(1/\alpha + 1/e), & 0 < x \leqslant 1 \\ e^{-x}/(1/\alpha + 1/e), & x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ x^{\alpha-1}, & x > 1 \end{cases}$$

1. 由$U(0,1)$抽取u
2. 由$h(y)$抽取y(逆变换)
3. 当$y \in (0,1]$时，如果$u \leqslant e^{-y}$，则$x = y$，否则转(1)
4. 当$y > 1$时，如果$u < y^{\alpha-1}$，则$x = y$，否则转(1)