Es sollen die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_1\, dx_2 \quad \text{und} \quad \int_0^1\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_2\, dx_1$$

berechnet werden. Darf der Satz von Fubini angewandt werden?

Problemanalyse und Strategie: Man muss nur eines der iterierten Integrale berechnen, da sich der Wert des anderen durch eine Symmetrieüberlegung ergibt. Wir bestimmen zunächst den Wert des inneren Integrals durch partielle Integration. Das äußere Integral kann dann direkt berechnet werden.

Lösung: Wir betrachten zunächst nur das innere Integral für ein festes $x_2 \in (0, 1)$. Mit partieller Integration, wobei wir als Stammfunktion $x_1 - x_2$ und als Ableitung $(x_1 + x_2)^{-3}$ wählen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_1 &= \left[-\frac{1}{2}\frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^2}\right]_{x_1=0}^1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x_1 + x_2)^2}\, dx_1.\end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^1 \frac{1}{(x_1 + x_2)^2}\, dx_1 = \left[-\frac{1}{x_1 + x_2}\right]_{x_1=0}^1,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_1 &= \left[\frac{-x_1}{(x_1 + x_2)^2}\right]_{x_1=0}^1 \\ &= \frac{-1}{(1 + x_2)^2}.\end{aligned}$$

Den Wert des iterierten Integrals zu bestimmen, ist jetzt nicht mehr schwer,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_1\, dx_2 &= \int_0^1 \frac{-1}{(1 + x_2)^2}\, dx_2 \\ &= \left[\frac{1}{1 + x_2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Um den Wert des zweiten Integrals zu bestimmen, nutzen wir die Symmetrie aus. Es ist

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_2\, dx_1 = -\int_0^1\int_0^1 \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_2\, dx_1.$$

Nun benennen wir die Integrationsvariablen um und schreiben y_1 für x_2 sowie y_2 für x_1. Es ergibt sich

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_2\, dx_1 = -\int_0^1\int_0^1 \frac{y_1 - y_2}{(y_2 + y_1)^3}\, dy_1\, dy_2.$$

Rechts steht nun aber genau das iterierte Integral, dass wir eben berechnet haben. Also folgt

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}\, dx_2\, dx_1 = \frac{1}{2}.$$

In beiden Fällen existiert hier das iterierte Integral, aber der Wert hängt von der Integrationsreihenfolge ab.

Kommentar Im Fall dieses Beispiels kann der Satz von Fubini nicht angewandt werden. Die Singularität der Funktion

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},$$

für $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$ ist so stark, dass f keine integrierbare Funktion auf dem Quadrat $(0, 1) \times (0, 1)$ ist. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind hier verletzt.