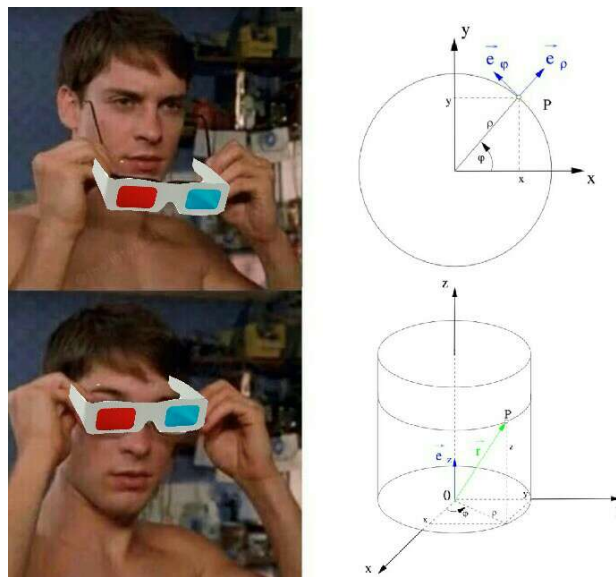


Notizen zur Vorlesung  
*Mathematik III für Studierende der Computing in Science, Geophysik/  
Ozeanographie, Meteorologie und Physik*

WiSe 2022/23

Version vom 2. Dezember 2022



Analysis, aber diesmal in 3D!

Grüßt euch, dies sind die Community MfP3-Notizen.

Sissi und ich erstellen sie als Nachbereitung der Vorlesung und sie dienen als eine schnelle Quelle von Definitionen und einfachen Beispielen (um sich einen Überblick zu verschaffen), wichtigen Bemerkungen aus den Übungen, sowohl als Klausurnotizen. Wir bewundern die informellen Notizen zum MfP1- und MfP2-Tutorium von Robin Löwenberg und Fabian Balzer und haben uns entschlossen mit dem gleichen Stil weiterzumachen, da es keine MfP3 und MfP4 Tutoriumnotizen mehr gibt. Die Templates wurden von Fabian erstellt und sind auf seiner Github-Seite verfügbar: <https://github.com/Fabian-Balzer/MfP2-Notizen>. Zusätzlich benutzen wir das Lehrwerk Mathematik von Tilo Arens und Robins ausführliche Notizen aus 2019 als Quellen von guten Beispielen. Das Buch können wir jedem empfehlen, der auch Giancoli mag und am besten an Beispielen lernt. Bei Anmerkungen oder Fragen schreibt uns einfach auf Whatsapp, Discord oder GitHub an.

Möge die Macht der endlosen zerbrochenen Kreiden mit euch sein :)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wiederholung</b>	<b>3</b>
1.1	Riemann-Integrale . . . . .	3
1.2	Topologie und Untermannigfaltigkeiten . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Fourier Reihen</b>	<b>7</b>
2.1	Fourier-Reihe . . . . .	7
2.2	Konvergenz der Fourier Reihe . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Einführung in die Gebietsintegrale</b>	<b>11</b>
3.1	Theoretisches Baukasten . . . . .	11
3.2	Lebesgue-Integral . . . . .	14
3.3	Volumina und Nullmengen . . . . .	18
3.4	Konvergenzsätze . . . . .	21
3.5	Parameterabhängige Integrale . . . . .	25
3.6	Exkurs: Wichtige Koordinatensysteme . . . . .	32

# 1 Riemann-Integrale und Untermannigfaltigkeiten

## 1.1 Riemann-Integrale

### Definition 1.1: Ober- und Unterintegral

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Das **Oberintegral** von  $f$  ist die Zahl

$$\int_a^{*b} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \geq f \right\}$$

Das **Unterintegral** von  $f$  ist die Zahl

$$\int_{*a}^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \leq f \right\}$$

### Definition 1.2: Riemann-integrierbare Funktion

Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Riemann-integrierbar**, wenn

$$\int_a^{*b} f(x) dx = \int_{*a}^b f(x) dx$$

Ebenso ist es in der Analysis nützlich den Begriff des uneigentlichen Integrals zu verstehen, wenn der Definitionsbereich unbeschränkt ist.

### Definition 1.3: Uneigentliches Integral

Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nicht unbedingt beschränkt, aber für jedes Teilintervall  $[\alpha, b] \in (a, b]$  integrierbar. Falls dann der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow a} \int_{\epsilon}^b f(x) dx$$

existiert, so nennen wir  $f$  über das Intervall  $(a, b]$  **uneigentlich integrierbar**.

### Beispiel 1.1: Uneigentliches Integral

Betrachten wir  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . Dieses Integral kann als uneigentliches Integral sinnvoll definiert werden:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Die Gamma-Funktion  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$  ist sehr nützlich, denn es gilt  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ , also ist die Funktion perfekt dazu geeignet, um die Fakultät zu berechnen:  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Zusätzlich gilt  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

## 1.2 Topologie und Untermannigfaltigkeiten

Gewisse topologische Begriffe sind auch im MfP3 sehr wichtig.

**Definition 1.4: Offene Kugel**

Die Teilmenge  $B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in X \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\} \subseteq X$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  mit Abstandsfunktion  $d$  heißt **offene Kugel** mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$  und Radius  $r$ .

**Definition 1.5: Inneres**

Für eine Teilmenge  $A \subseteq X$  nennen wir die Vereinigung aller offenen Teilmengen das **Innere**  $\mathring{A}$  von  $A$ , also  $\mathring{A} = \bigcup_{B \subseteq A} B$ .

**Definition 1.6: Abschluss**

Für eine Teilmenge  $A \subseteq X$  nennen wir den Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die  $A$  enthalten, den **Abschluss**  $\bar{A}$  von  $A$ , also  $\bar{A} = \bigcap_{B \supseteq A, B \text{ abgeschl.}} B$ .

**Definition 1.7: Rand**

Die Differenz aus diesen beiden Mengen ist dann der **Rand**  $\partial A$  von  $A$ , also  $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ .

**Definition 1.8: Kompaktheit**

Falls wir zu jeder offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $A \subseteq X$  eine endliche Teilüberdeckung, d.h. eine Einschränkung der Indexmenge  $I$  auf eine endliche Menge  $J \subseteq I$  finden, sodass  $(U_i)_{i \in J}$  immer noch eine offene Überdeckung von  $A$  ist, so nennen wir  $A \subseteq X$  **kompakt**.

**Folgerung 1.1: Kompakte Teilmengen sind abgeschlossen und beschränkt**

Jede kompakte Teilmenge  $A \subseteq X$  eines metr. Raumes ist abgeschlossen, vollständig und beschränkt.

**Definition 1.9: Separable Räume und Dichtigkeit**

Die Metrik  $(X, d)$  heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge in  $X$  gibt. Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt dicht in  $X$ , wenn  $\bar{Y} = X$ .

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in X \exists y \in Y : d(x, y) < \epsilon$$

Jetzt gehen wir über zu Untermannigfaltigkeiten und schließen die Wiederholung mit allgemeinen Mannigfaltigkeiten ab.

**Definition 1.10: Immersion**

Ist  $\text{rg}(f) = m \forall \mathbf{p} \in U$ , d. h. die Abbildung hat den konstanten Rang der Dimension des Urbildraums, so sagen wir, dass  $f$  eine **Immersion** ist. Das Differential  $df : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist dann injektiv.

Die  $C^k(I, \mathbb{R})$  ist eine  $k$ -fach stetig differenzierbare Funktion.

**Definition 1.11:  $C^k$ -Diffeomorphismen**

$C^k$ -Abbildungen  $f : U \rightarrow V$ , die bijektiv sind und deren Umkehrabbildungen auch  $C^k$  sind, nennen wir  **$C^k$ -Diffeomorphismen**.

**Beispiel 1.2: Bekannter Diffeomorphismus**

Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = e^x$  ist mit  $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \ln(x)$  ein Diffeomorphismus, denn beide sind stetig differenzierbar, bijektiv und  $(f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}}) \wedge (f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}})$ . ✓

Eine wichtige Eigenschaft von Diffeomorphismen ist, dass sie homöomorph sind.

**Definition 1.12: Untermannigfaltigkeit**

Wir nennen eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  **$m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit**, falls für jeden der Punkte  $\mathbf{p} \in M$  die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Es gibt eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  von  $\mathbf{p}$ .
- Es gibt eine  $C^k$ -Immersion<sup>a</sup>  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  homöomorph auf  $V \cap M$  abbildet.

<sup>a</sup>also eine Abbildung von Rang  $m$

**Definition 1.13: Flächen und Hyperflächen**

Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  nennen wir **Flächen**.  
 $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  nennen wir **Hyperflächen**.

**Satz 1.2: Untermannigfaltigkeiten als Urbilder unter Abbildungen von konstantem Rang**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

- Ist  $f$  eine  $C^k$ -Abbildung,
- hat  $f$  konstanten Rang  $r$  und
- ist  $\mathbf{q} \in f(U)$ ,

so ist das Urbild<sup>a</sup> des Punktes  $\mathbf{q}$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  **$m=n-r$** , also

$$M := f^{-1}(\mathbf{q}) \subseteq U. \quad (1.1)$$

<sup>a</sup>also alle Punkte, die auf  $\mathbf{q}$  abgebildet werden

**Beispiel 1.3: Ein Beispiel von einer Untermannigfaltigkeit**

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f_1(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2 - x_3 \quad f_2(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2 - 3x_3$$

und die Menge

$$C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x) = f_2(x) = 0\}.$$

Wir behaupten nun, dass  $C$  eine eindimensionale  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Dazu betrachten wir die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

und stellen fest:

- $f$  ist  $\infty$ -oft differenzierbar
- Das Differential ist

$$\begin{aligned} df &= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 - 1 & -1 \\ 4x_1 + 3x_2 & 3x_1 - 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gau\ss}} \begin{pmatrix} 2x_1 & x_1 - 1 & -1 \\ -2x_1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{rg}(f) = \text{rg}(df) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

also ist  $f$  eine Abbildung von konstantem Rang..

Die Behauptung folgt dann wieder direkt aus dem Satz über Untermannigfaltigkeiten als Urbilder unter Abbildungen von konstantem Rang. Die Untermannigfaltigkeit hat demnach auch die behauptete Dimension  $3 - 2 = 1$ .

Und nun zum krönenden Abschluss die allgemeinen Mannigfaltigkeiten.

#### Definition 1.14: Allgemeine Mannigfaltigkeiten

Gegeben seien ein metrischer Raum  $M$ , eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $M$  mit offenen Mengen  $U_i \subseteq \mathbb{R}^m$  und Homöomorphismen

$$F_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i.$$

Man spricht dann von einer (abstrakten)  $m$ -dimensionalen  $C^k$ -Mannigfaltigkeit, wenn für je zwei offene Mengen  $V_1, V_2 \subseteq M$  mit Abbildungen  $F_1$  und  $F_2$  die Abbildung

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.

## 2 Fourier Reihen

Die Fourier-Reihe ist ein wichtiges Instrument in der Physik, das uns ermöglicht (quasi-)periodische Funktionen mit einer Summe von vielen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  zu approximieren.

### 2.1 Fourier-Reihe

#### Definition 2.1: Fourier-Koeffizient

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Die komplexe Zahl

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

heißt das  $k$ -te **Fourier-Koeffizient**.

#### Definition 2.2: Fourier-Reihe

Die Reihe

$$F(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$$

heißt die **Fourier-Reihe** von  $f$

#### Beispiel 2.1: Beispiel einer Fourier-Reihe

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{wenn } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Wir wollen nun die Fourier-Reihe zu der  $2\pi$ -periodischen  $f$  bestimmen, um die Funktion zu approximieren. Wir berechnen zuerst  $c_0$ .

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^0 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 e^0 dx = \frac{1}{2\pi} \pi - 0 = \frac{1}{2}$$

Nun berechnen wir  $c_1$ , um ein Gefühl zu entwickeln.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^{-ix} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 e^{-ix} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) - i \sin(x) dx = \frac{1}{2\pi} ([\sin(x)]_0^{\pi} + i[\cos(x)]_0^{\pi}) = \frac{1}{2\pi} (0 - 2i) = -\frac{i}{\pi} \end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir  $c_k$ .

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{ie^{-ikx}}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{i(\cos(kx) - i \sin(kx))}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{i}{\pi k} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe der Funktion  $f$  ist dann

$$F(f) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}e^{-ix} + \frac{i}{\pi}e^{ix} - \frac{i}{3\pi}e^{-3ix} + \frac{i}{3\pi}e^{3ix} - \frac{i}{5\pi}e^{-5ix} + \frac{i}{5\pi}e^{5ix} \dots$$

Dies könnte man noch umschreiben:

$$F(f) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \dots$$



Wie auf dem Bild zu sehen, approximieren wir mit jedem neuen Term die Funktion stückweise besser.

### Bemerkung 2.1: Wichtige Fourier-Integrale

Die folgenden Integrale sind sehr wichtig bei der Berechnung von Fourier-Reihen:

1.  $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = 0$ , für  $\forall k, l$
2.  $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = 0$  für  $k \neq l$
3.  $\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = 0$  für  $k \neq l$
4.  $\int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx = \pi$  für  $k \geq 1$
5.  $\int_0^{2\pi} \cos^2(kx) dx = \pi$  für  $k \geq 1$

**Wichtig!** Diese Beziehungen gelten nur für  $k, l \in \mathbb{N}$ .

### Bemerkung 2.2: Fourier für un- und gerade Funktionen

Es gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Wenn  $f$  reellwertig ist, dann ist  $c_{-k} = \overline{c_k}$  und  $F_n(f)$  auch reellwertig.



Ist  $f$  gerade (d.h.  $f(-x) = f(x)$ ), dann gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx)$$

Ist  $f$  ungerade (d.h.  $f(-x) = -f(x)$ ), dann gilt

$$F_n(f) = \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx)$$

Eine weitere Anwendung der Fourier-Reihe ist auch das Beweisen von Folgen

### Beispiel 2.2: Folgenbeweise mit Fourier

Wir sollen die Formel  $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$  beweisen indem wir die Fourier-Reihe der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f(x) = x^2$  im Intervall  $-\pi \leq x \leq \pi$  bestimmen.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^0 dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx} dx = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ -\frac{1}{k^2} & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$F_n(f) = \frac{\pi^2}{3} - 2 \cos(x) + \frac{1}{2} \pi \cos(2x) - \frac{2}{9} \cos(3x) + \dots$$

Nun setzen wir für  $x$  den Wert  $x = \pi$  ein und erhalten:

$$F_n(f(\pi)) = \frac{\pi^2}{3} + 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \dots$$

Wir wissen, dass  $f(\pi) = \pi^2$  und subtrahieren  $\frac{\pi^2}{3}$  von beiden Seiten

$$\frac{\pi^2}{3} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \dots$$

Nun teilen wir beide Seiten mit 2 und erhalten

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

## 2.2 Konvergenz der Fourier Reihe

### Definition 2.3: $L^2$ -Halbnorm

Sei  $V$  der Vektorraum der  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $f$  Riemann-integrierbar ist. Dann ist die Hermitesche Form

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{f(x)} dx, f \in V$$

die  **$L^2$ -Halbnorm** von  $f$ .

**Satz 2.3: Konvergenz der Fourier-Reihe im quadratischen Mittel**

Sei  $V$  der Vektorraum der  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , für die  $f$  integrierbar ist.

i) Für  $\forall f \in V$  gilt

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

ii) Die Fourier-Reihe von  $f \in V$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f$ , d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$ .

Es gibt tatsächlich keine  $2\pi$ -periodische Funktion im  $\mathcal{L}^2$ , dessen Fourier-Reihe nicht fast überall gegen  $f$  konvergieren würde.

## 3 Mehrdimensionale Integrale

### 3.1 Theoretisches Baukasten

Um uns mit mehrdimensionalen Integralen zu beschäftigen, müssen wir zuerst gewisse theoretische Begriffe einführen.

#### Definition 3.1: Charakteristische Funktion

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Die charakteristische Funktion *oder auch* **Indikatorfunktion** der Teilmenge  $A$  ist die Funktion

$$1_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

#### Definition 3.2: Quader

Ein **Quader**  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ist das Produkt  $I_1 \times \cdots \times I_n$  von  $n$  beschränkten, nicht-leeren Intervallen  $I_\mu \subseteq \mathbb{R}$ .

#### Beispiel 3.1: Quader in $\mathbb{R}^1$

Quader in  $\mathbb{R}^1$  sind also die Intervalle  $(a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b]$  und  $[a, b)$ .

#### Definition 3.3: Volumen eines Quaders

Das ( $n$ -dimensionale) Volumen eines solchen Quaders ist die nicht-negative reelle Zahl

$$v(Q) = v_n(Q) = \prod_{\mu=1}^n |I_\mu| = \prod_{\mu=1}^n (b_\mu - a_\mu)$$

#### Definition 3.4: Treppenfunktion

Eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Treppenfunktion auf  $\mathbb{R}^n$** , wenn es endlich viele paarweise **disjunkte** Quader gibt, sodass

1. die Funktion  $\varphi$  auf jedem Quader  $Q_k$  konstant ist,
2.  $\varphi(x) = 0$  für alle  $x$  außerhalb von Quadern.

Außerdem lassen sich Treppenfunktionen als endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen von disjunkten Quadern schreiben

$$\varphi = \sum_k c_k 1_{Q_k} \text{ mit } c_k \in \mathbb{C} \text{ und } Q_k \text{ ist ein Quader}$$

Wir kommen nun zu den sehr wichtigen Begriff der Hüllreihen.

**Definition 3.5: Hüllreihe**

Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Eine **Hüllreihe** zu  $f$  ist eine Reihe

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k} \text{ mit } c_k \in \mathbb{R}$$

wobei  $Q_k$  **offene** Quader im  $\mathbb{R}^n$  sind und für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|f(x)| \leq \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x)$$

Der **Inhalt** der Hüllreihe ist definiert als

$$I(\Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v(Q_k)$$

**Beispiel 3.2: Folge von Hüllreihen**

Seien  $a, k \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ k, & x = a \end{cases}$ . Wir sollen zu dieser

Funktion eine Folge von Hüllreihen,  $\Phi_n$ , konstruieren, die gegen Null konvergiert.

Wir wissen, dass  $\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ , aber auch, dass  $c_k = 0$  für jeden Quader außer für die, in denen sich  $a$  befindet (da ist  $c_k = k$ ). Wir können Hüllen als Intervale bilden und bekommen die Hüllreihe:

$$A_n = [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$$

Die Inhalte dieser Hüllreihe gehen gegen 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a + \frac{1}{n} - (a - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

Wir haben nun erfolgreich eine Folge von Hüllreihen konstruiert

$$\Phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

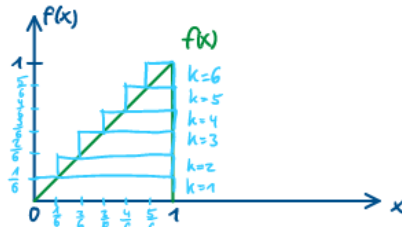
**muss noch verifiziert werden**

## Beispiel 3.3: Hüllreihe einer Funktion

Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dazu konstruieren wir eine Hüllreihe:



diese hat nun die Form:

$$\Phi_6(x) = \sum_{k=0}^{6-1} \frac{1}{6} \cdot 1_{[\frac{k}{6}, 1]}$$

Lassen wir eine beliebige Anzahl  $n$  an Quadern zu, gilt:

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} 1_{[\frac{k}{n}, 1]}$$

Der Inhalt ist dann:

$$\begin{aligned} I(\Phi_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \frac{1}{n} k = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 1}_{=n} - \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k}_{= \frac{n(n-1)}{2}} \quad \leftarrow \text{Gaußsche Summenformel} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt:

$$I(\Phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Also dem Flächeninhalt unter der Funktion  $f$ !

Definition 3.6:  $L^1$ -Halbnorm

Unter der  **$L^1$ -Halbnorm** von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  versteht man das Infimum

$$\|f\|_1 = \inf \{I(\Phi) \mid \Phi \text{ Hüllreihe zu } f\} = \int |f| dx$$

## Satz 3.1: Eigenschaften einer Halbnorm

Für die Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  und ein  $c \in \mathbb{C}$  gilt

1.  $\|c \cdot f\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$
2.  $|f_1| \leq |f_2| \implies \|f_1\|_1 \leq \|f_2\|_1$
3.  $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1$

## 3.2 Lebesgue-Integral

Mit den obigen theoretischen Werkzeugen können wir nun endlich das Lebesgue-Integral definieren.

### Definition 3.7: Lebesgue-Integral

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt **Lebesgue-integrierbar** über  $\mathbb{R}^n$ , wenn es eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_k$  gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$$

In diesem Fall schreiben wir das **Lebesgue-Integral**

$$\int f dx = \int f(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) dx \in \mathbb{C}$$

### Satz 3.2: Bedingte Gleichheit der Riemann und Lebesgue Integrale

Sei  $A = [a, b]$  ein kompaktes Intervall und  $f$  eine über  $A$  Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist  $f$  über  $A$  Lebesgue-integrierbar und das Lebesgue-Integral und das Riemann-Integral sind gleich.

Der folgende zwei Sätze sind sehr wichtig in der Theorie der Gebietsintegrale. Im Skript stehen der kleine und große Satz von Fubini, wir schreiben hier aber die allgemeine Version aus T. Arens, also guckt euch auch das Skript nochmal an.

### Satz 3.3: Kleiner Satz von Beppo Levi

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und sei  $(\varphi_k)$  eine monoton wachsende oder fallende Folge von Treppenfunktionen, so dass

1.  $(\varphi_k)$  punktweise gegen  $f$  konvergiert
2. die Folge  $(\int \varphi_k dx)$  der Integrale der Treppenfunktionen beschränkt ist. Dann ist  $f$  integrierbar und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$$

### Satz 3.4: Satz von Fubini

Sind  $I \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $J \subseteq \mathbb{R}^q$  (möglicherweise unbeschränkte) Quader sowie  $f \in L(Q)$  eine auf dem Quader  $Q = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$  integrierbare (oder mindestens stetig beschränkte) Funktion, so gibt es Funktionen  $g \in L(I)$  und  $h \in L(J)$  mit

$$g(x) = \int_J f(x, y) dy \text{ für fast alle } x \in I$$

$$h(y) = \int_I f(x, y) dx \text{ für fast alle } y \in J$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_R f(x, y) d(x, y) &= \int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_I g(x) dx \\ &= \int_J \int_I f(x, y) dx dy = \int_J h(y) dy\end{aligned}$$

**Wichtig!** Um den Satz von Fubini anwenden zu können, muss folgendes erwähnt werden:

- $Q$  ist kompakt oder offen und beschränkt und
- $f$  ist stetig.

### Beispiel 3.4: Kompakte Kreisscheibe

Gegeben ist die kompakte Kreisscheibe:

$$K = \overline{B_r(0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

Wir wollen nun das Integral

$$\int_K 1 d(x, y)$$

berechnen. Dazu stellen wir fest:

1.  $K$  ist kompakt
2.  $f(x, y) = 1$  ist stetig und beschränkt
3. Die Menge  $K_y$  lautet:

$$\begin{aligned}K_y &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in K\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \sqrt{r^2 - y^2}\} = [-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]\end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass  $K_y \neq \emptyset$  für  $y \in [-r, r]$ . Somit erhalten wir:

$$F(y) = \begin{cases} \int_{K_y} 1 dx & \text{für } y \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1)$$

und damit nach dem Satz von Fubini:

$$\int_K 1 d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} F(y) dy = \int_{[-1, 1]} \left[ \int_{[-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]} 1 dx \right] dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} 1 dx \right] dy = \pi r^2$$

Eine nützliche Integrationsregel  $\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}(a^2 \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + x\sqrt{a^2 - x^2}) + c$ .

### Beispiel 3.5: Anwendung vom Satz von Fubini

Wir wollen auch für eine kompliziertere Funktion, aber noch stets definiert auf einem Rechteck, die iterierten Integrale berechnen. Dazu betrachten wir  $R = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$  und die Funktion  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \sin(x_1 + 2x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in R$$

gegeben ist.

Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x_1 + 2x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ -\frac{1}{2} \cos(x_1 + 2x_2) \right]_{x_2=0}^{\pi/2} dx_1 \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} \cos(x_1) - \frac{1}{2} \cos(x_1 + \pi) \right) dx_1 \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x_1) \, dx_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nun vertauschen wir die Reihenfolge,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x_1 + 2x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \int_0^{\pi/2} [-\cos(x_1 + 2x_2)]_{x_1=0}^{\pi/2} dx_2 \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( \cos(2x_2) - \cos\left(2x_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right) dx_2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sin(2x_2) - \frac{1}{2} \sin\left(2x_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin(\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$



### Beispiel 3.6: Fubini ist nicht immer anwendbar

Es sollen die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 dx_2 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1$$

berechnet werden. Darf der Satz von Fubini angewandt werden?

**Problemanalyse und Strategie:** Man muss nur eines der iterierten Integrale berechnen, da sich der Wert des anderen durch eine Symmetrieüberlegung ergibt. Wir bestimmen zunächst den Wert des inneren Integrals durch partielle Integration. Das äußere Integral kann dann direkt berechnet werden.

**Lösung:** Wir betrachten zunächst nur das innere Integral für ein festes  $x_2 \in (0, 1)$ . Mit partieller Integration, wobei wir als Stammfunktion  $x_1 - x_2$  und als Ableitung  $(x_1 + x_2)^{-3}$  wählen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 &= \left[ -\frac{1}{2} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^2} \right]_{x_1=0}^1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} dx_1. \end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^1 \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} dx_1 = \left[ -\frac{1}{x_1 + x_2} \right]_{x_1=0}^1,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 &= \left[ \frac{-x_1}{(x_1 + x_2)^2} \right]_{x_1=0}^1 \\ &= \frac{-1}{(1 + x_2)^2}. \end{aligned}$$

Den Wert des iterierten Integrals zu bestimmen, ist jetzt nicht mehr schwer,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \frac{-1}{(1 + x_2)^2} dx_2 \\ &= \left[ \frac{1}{1 + x_2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Um den Wert des zweiten Integrals zu bestimmen, nutzen wir die Symmetrie aus. Es ist

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1 = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1.$$

Nun benennen wir die Integrationsvariablen um und schreiben  $y_1$  für  $x_2$  sowie  $y_2$  für  $x_1$ . Es ergibt sich

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1 = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{y_1 - y_2}{(y_2 + y_1)^3} dy_1 dy_2.$$

Rechts steht nun aber genau das iterierte Integral, dass wir eben berechnet haben. Also folgt

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1 = \frac{1}{2}.$$

In beiden Fällen existiert hier das iterierte Integral, aber der Wert hängt von der Integrationsreihenfolge ab.

**Kommentar** Im Fall dieses Beispiels kann der Satz von Fubini nicht angewandt werden. Die Singularität der Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  ist so stark, dass  $f$  keine integrierbare Funktion auf dem Quadrat  $(0, 1) \times (0, 1)$  ist. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind hier verletzt. ◀

### 3.3 Volumina und Nullmengen

Wir beginnen dieses wichtige Thema mit sehr theoretischen Konzepten, die uns dann ermöglichen die Maßtheorie zu verstehen. So manche Begriffe werden in der Funktionalanalysis in MfP4 nochmal vorkommen.

#### Definition 3.8: Grundmenge und $\sigma$ -Algebra

Eine **Grundmenge** (auch Universum),  $\Omega$ , bezeichnet in der Mathematik eine Menge aus allen in einem bestimmten Zusammenhang betrachteten Objekten.

Eine Menge  $\mathcal{A}$  von Teilmengen einer Grundmenge  $\Omega$  heißt  **$\sigma$ -Algebra**, wenn

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Für jede Menge  $A \in \mathcal{A}$  gilt  $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- Abzählbare Vereinigungen von Mengen  $A_i \in \mathcal{A}$  sind wieder in  $\mathcal{A}$

#### Beispiel 3.7: Kleinste und größte $\sigma$ -Algebra

Für jede beliebige Menge  $\Omega$  ist  $\{\emptyset, \Omega\}$  die kleinste und die Potenzmenge  $P(\Omega)$  die größtmögliche  $\sigma$ -Algebra mit  $\Omega$  als Grundmenge.

#### Definition 3.9: Maß

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Eine Funktion  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  heißt ein **Maß** auf  $\mathcal{A}$ , wenn

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- $\sigma$ -Additivität, also  $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

Außerdem wird das Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  **Maßraum** genannt.

#### Beispiel 3.8: Borelsche $\sigma$ -Algebra

Die **borelsche  $\sigma$ -Algebra** ist eine  $\sigma$ -Algebra, die alle Mengen enthält, denen man naiverweise ein Volumen oder eine Wahrscheinlichkeit zuordnen will, schließt aber Negativresultate aus.

Bezüglich der borelschen  $\sigma$ -Algebra sind alle stetigen Funktionen immer messbar.

#### Definition 3.10: $\sigma$ -Kompaktheit

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt  **$\sigma$ -kompakt**, wenn sie eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist.

Nun kommt eine sehr wichtige Definition.

#### Definition 3.11: Lebesgue-Messbarkeit

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , falls die konstante Funktion über  $A$  integrierbar ist.

$$v(A) = v_n(A) = \int_A 1 dx$$

**Definition 3.12: Figur und Ausschöpfung**

Eine Vereinigung endlich vieler Quader  $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$  der Form  $A = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_s$  heißt **Figur**.

Eine **Ausschöpfung** von  $A$  ist eine aufsteigende Folge von Teilmengen  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A$ .

**Beispiel 3.9: Volumen von Kegeln**

WIP

Und nun eins der wichtigsten Definitionen im MfP3.

**Definition 3.13: Nullmenge**

Eine Teilmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt Lebesgue-Nullmenge, wenn sie eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- $N$  ist messbar mit  $v_n(N) = 0$ .
- Für die charakteristische Funktion gilt  $\|1_N\|_1 = 0$ .

**Beispiel 3.10: Nullmengen**

Überlegen Sie sich einige Beispiele für Nullmengen im  $\mathbb{R}^2$  und im  $\mathbb{R}^3$ .

**Antwort 1** In jedem Fall sind isolierte Punkte und abzählbare Vereinigungen von isolierten Punkten wie im eindimensionalen Nullmengen. Das bedeutet etwa, dass  $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{R}^3$  Nullmengen sind.

Der Rand eines Quaders, im zweidimensionalen also der Rand eines Rechtecks, ist ebenfalls eine Nullmenge. Dasselbe gilt für abzählbare Vereinigungen solcher Ränder.

Als letztes Beispiel im  $\mathbb{R}^2$  sei der Graph einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genannt.

**Definition 3.14: Fast überall**

Sei  $E(x)$  eine Eigenschaft, sodass wir für  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  wissen, ob die Eigenschaft  $E(x)$  erfüllt ist. Wir sagen, dass  $E(x)$  **fast überall** gilt, wenn die Menge aller Punkte, wo  $E(x)$  nicht gilt, eine Nullmenge ist.

**Beispiel 3.11: Fast überall konstante Funktion**

Sei  $f(x) = \begin{cases} 42 & \text{wenn } x \neq \infty \\ \infty & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$ . Die Funktion  $f(x)$  ist fast überall konstant, außer in einer Nullmenge (also in der Unendlichkeit).

Es ist auch nützlich sich zu merken, dass wenn  $\|f\|_1 = 0$ , dann  $N = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}$  eine Nullmenge ist.

**Satz 3.5: Modifikationssatz**

Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  zwei Funktionen, die fast überall gleich sind. Wenn  $f$  integrierbar ist, dann ist auch  $g$  integrierbar und es gilt  $\int f = \int g$ .

**Lemma 3.6: Geometrische Charakterisierung von Nullmengen**

Ist  $N$  eine Nullmenge, so gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine messbare offene Menge  $U$  mit  $N \subseteq U$  und  $v(U) < \epsilon$ .

Eine Menge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  abzählbar viele Quader  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  gibt, sodass

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \epsilon$$

Eine nützliche, aber nicht so wichtige Eigenschaft ist, dass wenn  $f$  integrierbar ist, dann auch  $f(x - a)$  integrierbar ist, wenn  $a$  in der Definitionsmenge ist.

### 3.4 Konvergenzsätze

Zuerst wollen wir uns an die punktweise und gleichmäßige Konvergenz aus MfP2 erinnern.

#### Definition 3.15: Gleichmäßige Konvergenz

Sind  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Abbildungen.

Wir sagen, dass  $f$  genau dann **gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion  $f$  **konvergiert**, wenn es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gibt, sodass

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon \quad \forall n \geq N \wedge \forall x \in X.$$

#### Definition 3.16: Punktweise Konvergenz

Eine Folge  $(f_n)$  von Abbildungen **konvergiert punktweise** gegen eine Abbildung  $f$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in X$ .

#### Beispiel 3.12: Gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sqrt{|x|^2 + \frac{1}{n^2}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Konvergiert diese Folge gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, sagen wir  $f(x) = |x|$ ? In weiser Voraussicht und um die weitere Rechnung plausibel zu machen, schauen wir uns zunächst die folgende Ungleichung an:

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Damit können wir nun recht schnell nachprüfen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in D_f \forall n \geq N :$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{|x|^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| \leq \left| |x| + \frac{1}{n} - |x| \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

Das Kriterium ist also erfüllt und die Funktion damit gleichmäßig konvergent (und daher auch automatisch punktweise konvergent), da wir die  $x$ -Abhängigkeit in der Abschätzung losgeworden sind.

Ebenso ein Beispiel, um uns auf die Quotientenvektorräume aus MfP2 zu erinnern.

#### Beispiel 3.13: Quotientenvektorraum

Sei  $V = \mathbb{R}^4$  und  $U = \text{span}\{(1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, -1, 0)^T\} \subseteq V$  ein Untervektorraum. Wir

sollen zeigen, dass im Quotientenvektorraum  $U/V$  gilt

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \text{ und } \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \neq \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Dabei bezeichnet  $[v]$  die Äquivalenzklasse von  $v$  von  $V/U$ .

Ein Quotientenvektorraum besteht aus allen Vektoren  $a, b \in V$  für die gilt  $a + b \in U$ .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können nun den Vektor  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit den Basisvektoren von  $U$  darstellen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn wir  $a = 4$  und  $b = 1$  setzen, dann wird das Ungleichungssystem gelöst. Also stimmt die erste Äquivalenzklasse. Nun gucken wir uns das für die anderen zwei Vektoren an

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und wir merken schon, dass es keine  $a$  und  $b$  gibt, sodass das Gleichungssystem gelöst werden kann, daher gehören die letzten zwei Vektoren nicht zu der Äquivalenzklasse.

Nun kommen wir zu sehr wichtigen Sätzen.

### Theorem 3.7: Satz von Riesz-Fischer

Vorausgesetzt  $f_k$  ist eine  $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge integrierbarer Funktionen, dann

- existiert  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  mit  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$  und
- $(f_k)$  konvergiert punktweise gegen  $f$ .

Somit ist  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  ein Banachraum. Die **Vertauschbarkeit** von Integral und Limes folgt grob aus der Konvergenz bzgl. der  $\mathcal{L}^1$ -Halbnorm.

Beachtet, dass der  $\mathcal{L}^1$ - Grenzwert nicht eindeutig ist, aber es kann sein, dass sich die Grenzwerte nur auf eine Nullmenge unterscheiden.

**Satz 3.8: Satz von Beppo-Levi von der monotonen Konvergenz**

Voraussetzungen:

- $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ist monoton wachsende/fallende Folge integrierbarer Funktionen
- $f_k$  konvergiere punktweise gegen  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$
- Die Folge  $\int f_k dx$  der Integrale ist beschränkt.

Dann folgt, dass  $f$  integrierbar ist und dass  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$

**Satz 3.9: Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz**

Voraussetzungen:

- $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist eine Folge integrierbaren Funktionen
- $f_k$  konvergiert fast überall punktweise gegen eine Funktion  $f$
- Es gibt eine integrierbare Majorante  $F$  mit  $|f_k| \leq F$  für  $\forall k$ .

Dann folgt, dass  $f$  integrierbar ist und dass  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$

**Beispiel 3.14: Satz von integrierbaren Majoranten angewandt**

Wir betrachten die Funktion

$$\delta_n(x) = \begin{cases} xn^2 & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - xn^2 & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionenfolge ist unbeschränkt wie wir gesehen haben, da

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \delta_n(x) = n$$

Es gibt also keine integrierbare Majorante und somit ist nicht sichergestellt, dass Integral und Limes vertauschen zu können. Tatsächlich gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1 \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 0$$

## Beispiel 3.15: Und noch ein Beispiel

Wir betrachten das Integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x} dx$$

Die Funktionenfolge, die wir dafür untersuchen müssen, ist:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x}$$

Aus Mathe 1 wissen wir, dass:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ wächst monoton, } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

Wir gehen nun schrittweise vor:

1.)  $f_n(x)$  ist eine Folge integrierbarer Funktionen, denn:

- $f_n(x)$  ist stetig und daher lokal-integrierbar über die  $\sigma$ -kompakte Menge  $(0, \infty)$ . (Bem. 1.4.10)
- $f_n(x)$  hat die über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante

$$\left| \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{< e^x} \underbrace{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}_{\leq 1} e^{-2x} \right| < e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x}$$

denn:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

- Nach Korollar 1.4.11 ist  $f_n(x)$  damit auch über  $(0, \infty)$  integrierbar

2.)  $f_n(x)$  konvergiert fast überall punktweise:

- Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x} &= e^{-2x} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{= e^x} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right)}_{\substack{= \cos\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n}\right) = \cos(0) = 1 \\ \text{Folgenkriterium, cos ist stetig}}} \\ &= e^{-2x} \cdot e^x = e^{-x} \end{aligned}$$

- Die Grenzfunktion ist also  $f(x) = e^{-x}$

3.)  $f_n(x)$  hat eine integrierbare Majorante.

- Die haben wir mit  $f(x) = e^{-x}$  schon gefunden.

Nun können wir den Satz von Lebesgue von der majorierten Konvergenz anwenden und Integral und Limites vertauschen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$



### 3.5 Parameterabhängige Integrale

Die Vertauschbarkeit von Integral und Limes führt zu weiteren, sehr praktischen Sätzen.

#### Satz 3.10: Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Voraussetzungen:

- $f$  ist differenzierbar auf dem kompakten Intervall  $[x_0, x]$ .
- Die Ableitung von  $f$  ist beschränkt.

Daraus folgt, dass  $f'$  Lebesgue-integrierbar ist über  $[x_0, x]$  und dass

$$f(x) - f(x_0) = \int_{[x_0, x]} f'(t) dt$$

.

#### Satz 3.11: Stetigkeitssatz

Voraussetzungen:

- Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq \mathbb{R}^p$
- $f : X \times T \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  ist für feste  $x$  über  $T$  integrierbar
- Für feste  $t$  ist die Funktion  $x \mapsto f(x, t)$  stetig
- Es gibt eine integrierbare Majorante  $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $|f(x, t)| \leq \Phi(t)$  für  $\forall (x, t) \in X \times T$ .

Daraus folgt, dass  $F(x) = \int_T f(x, t) dt$  ist auf  $X$  stetig.

#### Satz 3.12: Differentiationssatz

Voraussetzungen:

- Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $T \subseteq \mathbb{R}^p$
- $f : X \times T \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  ist für feste  $x$  über  $T$  integrierbar
- Für feste  $t$  ist die Funktion  $x \mapsto f(x, t)$  stetig diff'bar
- Es gibt eine integrierbare Majorante  $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v_\mu}(x, t) \right| \leq \Phi(t) \text{ für } \forall (x, t) \in X \times T \text{ für } \mu = 1, \dots, n$$

Daraus folgt, dass

- $F(x) = \int_T f(x, t) dt$  ist stetig diff'bar,
- $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x_p} f(x, t)$  ist für jedes  $x$  integrierbar und
- es gilt  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_T f(x, t) dt = \int_T \frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x, t) dt$ .

## Beispiel 3.16: Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte ist definiert durch:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$$

wobei  $f$  eine integrierbare Funktion ist.

Wir überprüfen  $\hat{f}(x)$  zunächst auf Stetigkeit:

1.)  $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$  ist für feste  $x$  über  $\mathbb{R}$  integrierbar?

→ Ja, denn  $|f| = |e^{-ixt} f(t)|$  ist eine integrierbare Majorante (auf der  $\sigma$ -kompakten Menge  $\mathbb{R}$ , 1.4.11)

2.) Für feste  $t$  ist  $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$  stetig?

→ Ja klar! ( $f(t)$  ist fest,  $\exp(z)$  ist stetig)

3.) Es gibt eine integrierbare Majorante?

→ Ja, nämlich  $\Phi(t) = |f(t)|$

Somit ist  $\hat{f}$  tatsächlich stetig.

Wir setzen nun:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt$$

Zunächst formen wir den Exponenten etwas um:

$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{2} - ixt &= -\frac{1}{2}(t^2 + 2ix) = -\frac{1}{2}(t^2 + 2ix - x^2 + x^2) \\ &= -\frac{1}{2}(t+ix)^2 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

So erhalten wir das Integral:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt$$

Nun können wir den Differentiationssatz anwenden. Dazu schränken wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Definitionsbereich von  $x$  auf das offene Intervall  $(-a, a)$  ein.

$$F_a(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt \quad x \in (-a, a) \quad a \in \mathbb{R}$$

1.) Ist  $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$  integrierbar?

Wir finden die integrierbare Majorante:

$$|e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}| = |e^{-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}x^2 - ixt}| = e^{\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}t^2} =: \Phi(t)$$

(Das Gauß-Integral ist integrierbar (Beispiel 1.5.16))

2.) Ist  $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$  stetig differenzierbar?

Ja klar! Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} = -i(t+ix) e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$$

3.) Gibt es eine integrierbare Majorante von  $\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$ ?

Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} \right| &= |(t+ix) e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}| \\ &= |(t+ix)| |e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{\frac{1}{2}x^2} e^{-ixt}| \leq (|t|+|x|) |e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{\frac{1}{2}x^2}| \\ &\stackrel{x \in (-a, a)}{\leq} (|t|+a) e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{\frac{1}{2}a^2} \end{aligned}$$

Diese ist integrierbar auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (|t|+a) e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{\frac{1}{2}a^2} dt &= e^{\frac{1}{2}a^2} \left[ \int_{-\infty}^0 (-(t)+a) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \int_0^{\infty} (t+a) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}a^2} \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{\rightarrow \text{Gauß-Integral}} + 2 \int_0^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^b t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} (-e^{-\frac{1}{2}t^2}) \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{(-e^{-\frac{1}{2}b^2})}_{\rightarrow 0} + 1 = 1 \end{aligned}$$

Wir können nun den Differentiationssatz anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a}{\partial x} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt = \int_{\mathbb{R}} -i e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} (t+ix) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} i e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} \Big|_{-b}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{i e^{-\frac{1}{2}b^2}}_{\rightarrow 0} e^{\frac{1}{2}x^2 - ib} - \underbrace{e^{-\frac{1}{2}b^2}}_{\rightarrow 0} e^{\frac{1}{2}x^2 + ib} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bisher haben wir uns nur auf das Intervall  $x \in (-a, a)$  eingeschränkt. Wir können aber problemlos schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\partial F_a}{\partial x} = \lim_{a \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Somit ist  $F(x) = \text{const.} = F(0)$  und wir können rechnen:

$$F(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi} \quad (\text{Gauß-Integral})$$

Jetzt können wir die Fourier-Transformierte ausrechnen:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Also sind  $\hat{f}(x)$  und  $f(t)$  die gleichen Funktionen! Dies ist eine ganz wichtige Feststellung, die z.B. bei der Unschärferelation der Quantenmechanik wichtig wird.

Aus all diesen Sätzen kommt nun der Höhepunkt der Integrationstheorie. Die folgenden zwei Sätze sind von enormer Bedeutung in der Physik, also merkt sie euch.

### Satz 3.13: Satz von Tonelli

Vorausgesetzt  $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{C}$  ist fast überall stetig oder lokal integrierbar. Dann gilt die folgende Äquivalenz

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| dx \right) dy \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dy \right) dx \quad \text{existiert}$$

$$\iff f \text{ ist über } \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \text{ integrierbar}$$

### Satz 3.14: Transformationssatz

Voraussetzung:

- $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen
- $T : U \rightarrow V$  ist ein Diffeomorphismus

Daraus folgen

- die Äquivalenz  $f : V \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  integrierbar  $\iff f \circ T \cdot |\det(dT)|$  integrierbar
- $\int_U f(T(x)) |\det(dT)| dx = \int_V f(y) dy$

Zur Erinnerung die Definition der allgemeinen linearen Gruppe:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

Außerdem nicht vergessen, dass der Betrag der Determinante einer Matrix das gerichtete Volumen eines Parallelepipeds darstellt.

### Definition 3.17: Affine Transformationen

Voraussetzung:

- $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T(x) = Ax + b$  mit  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$
- $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  ist über  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  integrierbar

Daraus folgen

- $dT = A \Rightarrow \det(dT) = \det(A) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f \circ T$  ist über  $T^{-1}(K)$  integrierbar
- Es gilt  $\int_{T^{-1}(K)} f(T(x)) dx = \frac{1}{|\det(A)|} \int_K f(y) dy$ .

### Beispiel 3.17: Präsenzaufgabe 1 aus dem Blatt 6

WIP

### Beispiel 3.18: Bestimmung eines uneigentlichen Integrals

Der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

soll mithilfe einer Transformation auf Polarkoordinaten bestimmt werden.

**Problemanalyse und Strategie:** Die Funktion  $e^{-x^2}$  ist zwar integrierbar, es ist jedoch nicht möglich, ihre Stammfunktion durch die uns bekannten Funktionen in einer expliziten Formel auszudrücken. Mittels einer Darstellung durch ein Gebietsintegral und der Verwendung von Polarkoordinaten kann aber der Wert des oben angegebenen Integrals bestimmt werden.

**Lösung:** Die Grundidee ist das Quadrat des Integrals zu betrachten. Dieses lässt sich als ein iteriertes Integral und damit als ein Gebietsintegral über den  $\mathbb{R}^2$  schreiben,

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y). \end{aligned}$$

Es bietet sich nun an, dieses Gebietsintegral über eine Transformation auf Polarkoordinaten zu berechnen. Dazu setzen wir

$$B = \{(r, \varphi) \mid r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi)\}$$

und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \int_B r e^{-r^2} d(r, \varphi).$$

Durch die Transformation ist der zusätzliche Faktor  $r$  ins Spiel gekommen. Er bewirkt, dass wir das Integral nun leicht als iteriertes Integral bestimmen können,

$$\begin{aligned} \int_B r e^{-r^2} d(r, \varphi) &= \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**Kommentar** Dies ist nur eine von vielen Möglichkeiten zur Bestimmung des Werts dieses Integrals. Anwendung findet das Integral in der Wahrscheinlichkeitstheorie im Zusammenhang mit der Normalverteilung (siehe Abschn. 39.3). ◀

### Beispiel 3.19: Transformationssatz im Einsatz

**Beispiel** Das Integral

$$\int_D \sqrt{x_1} x_2 dx$$

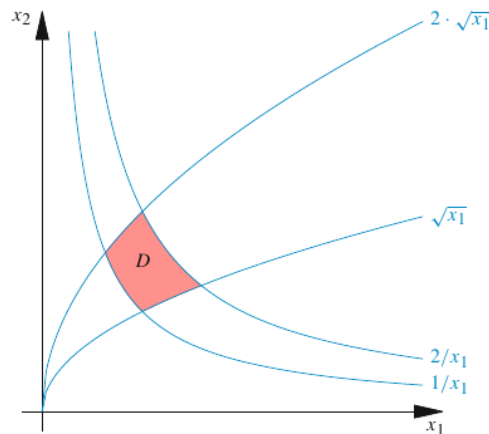
mit

$$D = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0, \sqrt{x_1} < x_2 < 2\sqrt{x_1}, \frac{1}{x_1} < x_2 < \frac{2}{x_1} \right\}.$$

soll berechnet werden. Das Gebiet  $D$  ist in der Abb. 25.18 dargestellt.

Um eine geeignete Transformation zu finden, betrachten wir die Bedingungen in der Definition von  $D$  genauer. Sie lassen sich umschreiben zu

$$1 < \frac{x_2}{\sqrt{x_1}} < 2 \quad \text{und} \quad 1 < x_1 x_2 < 2.$$



**Abb. 25.18** Das Gebiet  $D$  aus dem Beispiel wird durch die vier Kurven  $x_2 = \sqrt{x_1}$ ,  $x_2 = 2\sqrt{x_1}$ ,  $x_2 = 1/x_1$  und  $x_2 = 2/x_1$  begrenzt

Es liegt daher nahe, als neue Koordinaten  $u_1 = x_1 x_2$  und  $u_2 = x_2/\sqrt{x_1}$  zu wählen. Umgekehrt hat man dann

$$\mathbf{x} = \psi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1^{2/3} u_2^{-2/3} \\ u_1^{1/3} u_2^{2/3} \end{pmatrix}, \quad 1 < u_1, u_2 < 2.$$

Da man die Darstellung von  $\mathbf{u}$  durch  $\mathbf{x}$  und umgekehrt äquivalent in einander umformen kann, ist diese Transformation bijektiv. Als Funktionaldeterminante ergibt sich

$$\begin{aligned} \det \psi'(\mathbf{u}) &= \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u_1^{-1/3} u_2^{-2/3} & -\frac{2}{3} u_1^{2/3} u_2^{-5/3} \\ \frac{1}{3} u_1^{-2/3} u_2^{2/3} & \frac{2}{3} u_1^{1/3} u_2^{-1/3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{9} u_2^{-1} + \frac{2}{9} u_2^{-1} = \frac{2}{3 u_2}. \end{aligned}$$

Die Determinante ist daher stets positiv.

Wir können nun die Transformationsformel anwenden und erhalten mit  $B = (1, 2) \times (1, 2)$

$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{x_1} x_2 \, d\mathbf{x} &= \int_B u_1^{1/3} u_2^{-1/3} u_1^{1/3} u_2^{2/3} \frac{2}{3 u_2} \, d\mathbf{u} \\ &= \frac{2}{3} \int_1^2 \int_1^2 u_1^{2/3} u_2^{-2/3} \, du_1 \, du_2 \\ &= \frac{2}{5} (\sqrt[3]{32} - 1) \int_1^2 u_2^{-2/3} \, du_2 \\ &= \frac{6}{5} (\sqrt[3]{32} - 1) (\sqrt[3]{2} - 1) \\ &= \frac{6}{5} (5 - \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{2}). \end{aligned}$$

### 3.6 Exkurs: Wichtige Koordinatensysteme

Dieses Thema ist euch allen schon aus der Physik 2 bekannt und könnt es überspringen, aber guck euch die Beispiele zur Erinnerung vor der Klausur nochmal an.

Für das **Polarkoordinatensystem** gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = r \cos(\varphi)$$

$$x_2 = r \sin(\varphi)$$

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

#### Definition 3.18: Integration mit Polarkoordinaten

Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f \in L(D)$  und  $B$  die Beschreibung von  $D$  durch Polarkoordinaten, so gilt

$$\int_D f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_B f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r d(r, \varphi)$$

#### Beispiel 3.20: Integration mit Polarkoordinaten

**Beispiel** Wir greifen noch einmal das Beispiel von S. 928 auf und berechnen das Integral

$$\int_D x_1 (x_1^2 + x_2) d\mathbf{x}$$

mit

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}.$$

Diesmal sollen jedoch Polarkoordinaten verwendet werden. Wir drücken  $D$  aus durch

$$D = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 1 < r < 2\}.$$

Das Gebiet  $B$  aus der Transformationsformel ist also genau das Rechteck

$$B = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 1 < r < 2\}.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int_D x_1 (x_1^2 + x_2) d\mathbf{x} \\ &= \int_B (r^3 \cos^3 \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi) r d(r, \varphi) \\ &= \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^4 \cos^3 \varphi + r^3 \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi dr \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{r^4}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2r^4}{3} \sin \varphi + \frac{r^3}{2} \sin^2 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_1^2 \frac{4}{3} r^4 dr = \left[ \frac{4}{15} r^5 \right]_1^2 = \frac{128-4}{15} = \frac{124}{15} \end{aligned}$$



Für das **Zylinderkoordinatensystem** gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = \rho \cos(\varphi)$$

$$x_2 = \rho \sin(\varphi)$$

$$x_3 = z$$

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

### Definition 3.19: Integration mit Zylinderkoordinaten

Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $f \in L(D)$  und  $B$  die Beschreibung von  $D$  durch Polarkoordinaten, so gilt

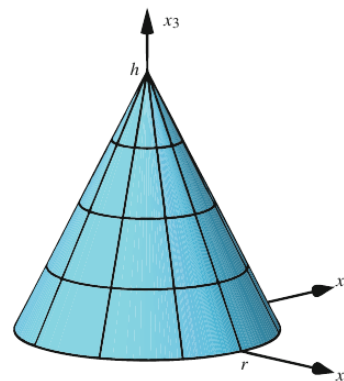
$$\int_D f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) = \int_B f(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), z) \rho d(\rho, \varphi, z)$$

### Beispiel 3.21: Integration mit Zylinderkoordinaten

Als eine einfache Anwendung dieser Integrationsformel erhält man die wohlbekannten Formeln zur Bestimmung des Volumens von Kegeln.

**Anwendungsbeispiel** Wir bestimmen das Volumen eines Kegels  $K$ , dessen Grundfläche ein Kreis mit Radius  $R$  ist und der die Höhe  $h$  besitzt, siehe Abb. 25.24. Wir werden die Menge der Punkte im Innern des Kegels durch Zylinderkoordinaten beschreiben. Dabei wählt man die  $x_3$ -Achse als Verbindungsgerade der Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkt der Grundfläche. Der maximale Abstand eines Punktes des Kegels von der  $x_3$ -Achse nimmt dann linear ab vom Wert  $R$  am Boden bis zu 0 an der Spitze. Es folgt also


$$K = \left\{ (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)^T \mid 0 < z < h, \right. \\ \left. 0 < \rho < R \left(1 - \frac{z}{h}\right), -\pi < \varphi < \pi \right\}.$$



**Abb. 25.24** Ein Kegel ist ein geometrischer Körper, der sich gut durch Zylinderkoordinaten beschreiben lässt

Die Menge der Tripel  $(\rho, \varphi, z)$ , die einen Punkt in  $K$  in Zylinderkoordinaten darstellen, nennen wir  $B$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_K 1 \, d\mathbf{x} = \int_B \rho \, d(\rho, \varphi, z) \\ &= \int_0^h \int_0^{R(1-z/h)} \int_{-\pi}^{\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\ &= \pi R^2 \left[ -\frac{h}{3} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h. \end{aligned}$$

Es ergibt sich genau der bekannte Ausdruck *ein Drittel mal Grundfläche mal Höhe*. 

Zum guten Letzt gelten für das **Kugelkoordinatensystem** die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$$

$$x_2 = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$$

$$x_3 = r \cos(\theta)$$

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

### Definition 3.20: Integration mit Kugelkoordinaten

Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $f \in L(D)$  und  $B$  die Beschreibung von  $D$  durch Polarkoordinaten, so gilt

$$\int_D f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) = \int_B f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) r^2 \sin(\theta) d(r, \varphi, \theta)$$

**Beispiel 3.22: Integration mit Kugelkoordinaten**

**Beispiel** Die Bestimmung des Volumens einer Kugel mit Radius  $R$  ist eine typische Anwendung der Kugelkoordinaten. Dazu beschreiben wir die Kugel durch

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\} \\ &= \{r (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (r, \varphi, \vartheta)^T \in B\} \end{aligned}$$

mit dem Quader

$$B = (0, R) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi).$$

Das Volumen der Kugel ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_K 1 \, d\mathbf{x} = \int_B r^2 \sin \vartheta \, d(r, \varphi, \vartheta) \\ &= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R r^2 (\cos 0 - \cos \pi) \, dr \\ &= 4\pi \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$