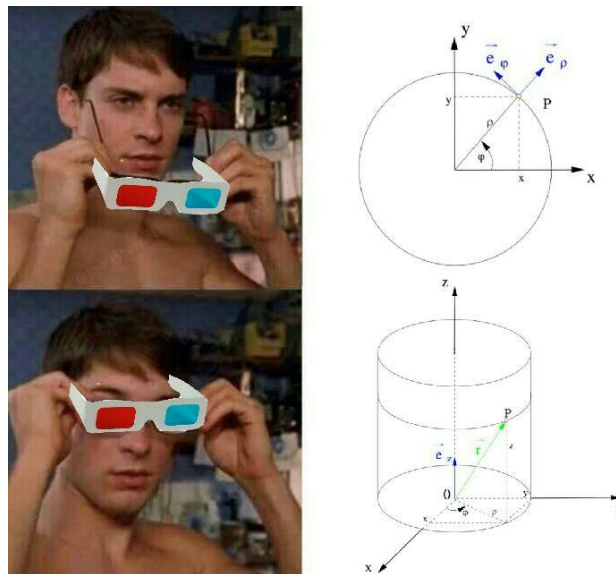


Notizen zur Vorlesung
*Mathematik III für Studierende der Computing in Science, Geophysik/
Ozeanographie, Meteorologie und Physik*
WiSe 2022/23
Version vom 4. Januar 2023



Analysis, aber diesmal in 3D!

Grüßt euch, dies sind die Community MfP3-Notizen.

Sissi und ich erstellen sie als Nachbereitung der Vorlesung und sie dienen als eine schnelle Quelle von Definitionen und einfachen Beispielen (um sich einen Überblick zu verschaffen), wichtigen Bemerkungen aus den Übungen, sowohl als Klausurnotizen. Wir bewundern die informellen Notizen zum MfP1- und MfP2-Tutorium von Robin Löwenberg und Fabian Balzer und haben uns entschlossen mit dem gleichen Stil weiterzumachen, da es keine MfP3 und MfP4 Tutoriumnotizen mehr gibt. Die Templates wurden von Fabian erstellt und sind auf seiner [GitHub](#)-Seite verfügbar. Zusätzlich benutzen wir das Lehrwerk Mathematik von Tilo Arens und Robins ausführliche Notizen aus 2019 als Quellen von guten Beispielen. Das Buch können wir jedem empfehlen, der auch Giancoli mag und am besten an Beispielen lernt. Bei Anmerkungen oder Fragen schreibt uns einfach auf Discord, Matrix/Element oder [GitHub](#) an.

Möge die Macht der endlosen zerbrochenen Kreiden mit euch sein :)

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung	3
1.1	Riemann-Integrale	3
1.2	Topologie und Untermannigfaltigkeiten	3
2	Fourier Reihen	8
2.1	Fourier-Reihe	8
2.2	Konvergenz der Fourier Reihe	10
3	Einführung in die Gebietsintegrale	12
3.1	Theoretisches Baukasten	12
3.2	Lebesgue-Integral	16
3.3	Volumina und Nullmengen	20
3.4	Konvergenzsätze	23
3.5	Parameterabhängige Integrale	27
3.6	Exkurs: Wichtige Koordinatensysteme	33
4	Einführung in die Tensorprodukte	36
4.1	Mathematisches Tensorprodukt	36
5	Höhere Analysis	41
5.1	Integration über Mannigfaltigkeiten	41
5.2	Differentialformen	43
5.3	Wichtige Integralsätze der Vektoranalysis	47

1 Riemann-Integrale und Untermannigfaltigkeiten

1.1 Riemann-Integrale

Definition 1.1: Ober- und Unterintegral

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Das **Oberintegral** von f ist die Zahl

$$\int_a^{*b} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \geq f \right\}$$

Das **Unterintegral** von f ist die Zahl

$$\int_{*a}^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \leq f \right\}$$

Definition 1.2: Riemann-integrierbare Funktion

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn

$$\int_a^{*b} f(x) dx = \int_{*a}^b f(x) dx$$

Ebenso ist es in der Analysis nützlich den Begriff des uneigentlichen Integrals zu verstehen, wenn der Definitionsbereich unbeschränkt ist.

Definition 1.3: Uneigentliches Integral

Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nicht unbedingt beschränkt, aber für jedes Teilintervall $[\alpha, b] \in (a, b]$ integrierbar. Falls dann der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow a} \int_{\epsilon}^b f(x) dx$$

existiert, so nennen wir f über das Intervall $(a, b]$ **uneigentlich integrierbar**.

Beispiel 1.1: Uneigentliches Integral

Betrachten wir $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Dieses Integral kann als uneigentliches Integral sinnvoll definiert werden:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Die Gamma-Funktion $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ ist sehr nützlich, denn es gilt $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, also ist die Funktion perfekt dazu geeignet, um die Fakultät zu berechnen: $\Gamma(n) = (n-1)!$. Zusätzlich gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.2 Topologie und Untermannigfaltigkeiten

Gewisse topologische Begriffe sind auch im MfP3 sehr wichtig.

Definition 1.4: Offene Kugel

Die Teilmenge $B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in X \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\} \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) mit Abstandsfunktion d heißt **offene Kugel** mit Mittelpunkt \mathbf{x} und Radius r .

Definition 1.5: Inneres

Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ nennen wir die Vereinigung aller offenen Teilmengen das **Innere** \mathring{A} von A , also $\mathring{A} = \bigcup_{B \subseteq A} B$.

Definition 1.6: Abschluss

Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ nennen wir den Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten, den **Abschluss** \bar{A} von A , also $\bar{A} = \bigcap_{B \supseteq A, B \text{ abgeschl.}} B$.

Definition 1.7: Rand

Die Differenz aus diesen beiden Mengen ist dann der **Rand** ∂A von A , also $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Definition 1.8: Kompaktheit

Falls wir zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $A \subseteq X$ eine endliche Teilüberdeckung, d.h. eine Einschränkung der Indexmenge I auf eine endliche Menge $J \subseteq I$ finden, sodass $(U_i)_{i \in J}$ immer noch eine offene Überdeckung von A ist, so nennen wir $A \subseteq X$ **kompakt**.

Folgerung 1.1: Kompakte Teilmengen sind abgeschlossen und beschränkt

Jede kompakte Teilmenge $A \subseteq X$ eines metr. Raumes ist abgeschlossen, vollständig und beschränkt.

Definition 1.9: Separable Räume und Dichtigkeit

Die Metrik (X, d) heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt dicht in X , wenn $\bar{Y} = X$.

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in X \exists y \in Y : d(x, y) < \epsilon$$

Jetzt gehen wir über zu Untermannigfaltigkeiten und schließen die Wiederholung mit allgemeinen Mannigfaltigkeiten ab.

Definition 1.10: Immersion

Ist $\text{rg}(f) = m \forall \mathbf{p} \in U$, d. h. die Abbildung hat den konstanten Rang der Dimension des Urbildraums, so sagen wir, dass f eine **Immersion** ist. Das Differential $df : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann injektiv.

Die $C^k(I, \mathbb{R})$ ist eine k -fach stetig differenzierbare Funktion.

Definition 1.11: C^k -Diffeomorphismen

C^k -Abbildungen $f : U \rightarrow V$, die bijektiv sind und deren Umkehrabbildungen auch C^k sind, nennen wir **C^k -Diffeomorphismen**.

Beispiel 1.2: Bekannter Diffeomorphismus

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $f(x) = e^x$ ist mit $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln(x)$ ein Diffeomorphismus, denn beide sind stetig differenzierbar, bijektiv und $(f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}}) \wedge (f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}})$. ✓

Eine wichtige Eigenschaft von Diffeomorphismen ist, dass sie homöomorph sind.

Definition 1.12: Untermannigfaltigkeit

Wir nennen eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine **m -dimensionale Untermannigfaltigkeit**, falls für jeden der Punkte $p \in M$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von p .
- Es gibt eine C^k -Immersion^a $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, die eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ homöomorph auf $V \cap M$ abbildet.

^aalso eine Abbildung von Rang m

Definition 1.13: Flächen und Hyperflächen

Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n nennen wir **Flächen**.
 $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n nennen wir **Hyperflächen**.

Definition 1.14: Lokale Parametrisierung

Eine solche Abbildung (also $F : U \xrightarrow{\sim} F(U) \subseteq M$) nennen wir eine **lokale Parametrisierung** oder auch **Karte** der Umgebung $F(U) \subseteq M$ des Punktes p .

Beispiel 1.3: Karte eines Funktionsgraphen

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^k -Funktion mit $k \geq 1$. Dann ist $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = (x, f(x))$ eine Immersion, denn

$$dF_x = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \partial_1 f(x) & \dots & \partial_n f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(dF_x) = n$$

hat konstanten Rang n . Das Bild von F ist der Graph Γ_f von f .

Es gibt offensichtlich eine Umkehrfunktion $F^{-1} : \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ $(x, f(x)) \mapsto x$. Sowohl F als auch F^{-1} sind per Definition von f stetig, sodass F ein waschechter Homöomorphismus ist.

Satz 1.2: Untermannigfaltigkeiten als Urbilder unter Abbildungen von konstantem Rang

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Ist f eine C^k -Abbildung,
- hat f konstanten Rang r und
- ist $\mathbf{q} \in f(U)$,

so ist das Urbild^a des Punktes \mathbf{q} eine C^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n der Dimension $\mathbf{m=n-r}$, also

$$M := f^{-1}(\mathbf{q}) \subseteq U. \quad (1.1)$$

^aalso alle Punkte, die auf \mathbf{q} abgebildet werden

Beispiel 1.4: Ein Beispiel von einer Untermannigfaltigkeit

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f_1(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2 - x_3 \quad f_2(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2 - 3x_3$$

und die Menge

$$C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x) = f_2(x) = 0\}.$$

Wir behaupten nun, dass C eine eindimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist. Dazu betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

und stellen fest:

- f ist ∞ -oft differenzierbar
- Das Differential ist

$$\begin{aligned} df &= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 - 1 & -1 \\ 4x_1 + 3x_2 & 3x_1 - 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gau\ss}} \begin{pmatrix} 2x_1 & x_1 - 1 & -1 \\ -2x_1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{rg}(f) = \text{rg}(df) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

also ist f eine Abbildung von konstantem Rang..

Die Behauptung folgt dann wieder direkt aus dem Satz über Untermannigfaltigkeiten als Urbilder unter Abbildungen von konstantem Rang. Die Untermannigfaltigkeit hat demnach auch die behauptete Dimension $3 - 2 = 1$.

Definition 1.15: Tangentialvektoren und Tangentialraum

Für eine C^1 -Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nennen wir für einen Punkt $\mathbf{p} \in M$ gelegte Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ **Tangentialvektoren**, wenn

- es $\epsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ gibt, welche
 - durch den Punkt \mathbf{p} verläuft, also $\gamma(0) = \mathbf{p}$ und
 - für die $\mathbf{v} = \gamma'(0)$ gilt.

Die Menge aller Tangentialvektoren an die Untermannigfaltigkeit M im Punkt \mathbf{p} nennen wir **Tangentialraum** in \mathbf{p} .

Wir schreiben auch $T_{\mathbf{p}}M$.

Satz 1.3: Eigenschaften des Tangentialraums

Für den Tangentialraum $T_{\mathbf{p}}M$ an einer UMF M im Punkt \mathbf{p} gilt:

- $T_{\mathbf{p}}M$ ist ein Vektorraum mit $\dim(T_{\mathbf{p}}M) = m = \dim M$.
- Falls wir mit $F : U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung von M haben, sodass $F(\mathbf{u}) = \mathbf{p}$ ist ($\mathbf{u} \in U$), dann bilden die Vektoren $\partial_1 F(\mathbf{u}), \dots, \partial_m F(\mathbf{u})$ eine Basis des Tangentialraums.

Den Tangentialraum können wir uns für einen Punkt \mathbf{p} an einer Kugel M als Ebene vorstellen, die an diesen Punkt angelegt wird.

Und nun zum krönenden Abschluss die allgemeinen Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.16: Allgemeine Mannigfaltigkeiten

Gegeben seien ein metrischer Raum M , eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M mit offenen Mengen $U_i \subseteq \mathbb{R}^m$ und Homöomorphismen

$$F_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i.$$

Man spricht dann von einer (abstrakten) m -dimensionalen C^k -Mannigfaltigkeit, wenn für je zwei offene Mengen $V_1, V_2 \subseteq M$ mit Abbildungen F_1 und F_2 die Abbildung

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ein C^k -Diffeomorphismus ist.

2 Fourier Reihen

Die Fourier-Reihe ist ein wichtiges Instrument in der Physik, das uns ermöglicht (quasi-)periodische Funktionen mit einer Summe von vielen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ zu approximieren.

2.1 Fourier-Reihe

Definition 2.1: Fourier-Koeffizient

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion. Die komplexe Zahl

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

heißt das k -te **Fourier-Koeffizient**.

Definition 2.2: Fourier-Reihe

Die Reihe

$$F(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$$

heißt die **Fourier-Reihe** von f

Beispiel 2.1: Beispiel einer Fourier-Reihe

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{wenn } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Wir wollen nun die Fourier-Reihe zu der 2π -periodischen f bestimmen, um die Funktion zu approximieren. Wir berechnen zuerst c_0 .

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^0 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 e^0 dx = \frac{1}{2\pi} \pi - 0 = \frac{1}{2}$$

Nun berechnen wir c_1 , um ein Gefühl zu entwickeln.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^{-ix} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 e^{-ix} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) - i \sin(x) dx = \frac{1}{2\pi} ([\sin(x)]_0^{\pi} + i[\cos(x)]_0^{\pi}) = \frac{1}{2\pi} (0 - 2i) = -\frac{i}{\pi} \end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir c_k .

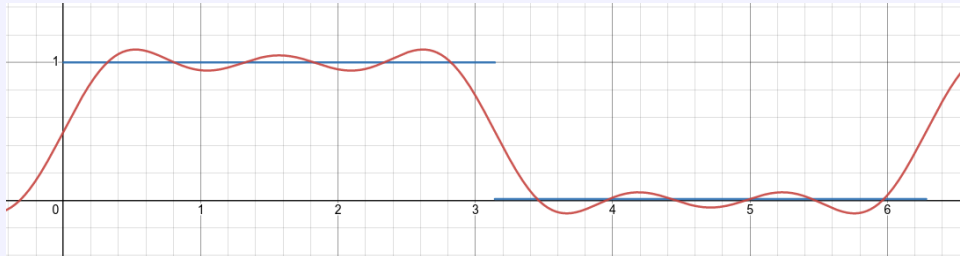
$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{ie^{-ikx}}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{i(\cos(kx) - i \sin(kx))}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{i}{\pi k} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe der Funktion f ist dann

$$F(f) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}e^{-ix} + \frac{i}{\pi}e^{ix} - \frac{i}{3\pi}e^{-3ix} + \frac{i}{3\pi}e^{3ix} - \frac{i}{5\pi}e^{-5ix} + \frac{i}{5\pi}e^{5ix} \dots$$

Dies könnte man noch umschreiben:

$$F(f) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \dots$$



Wie auf dem Bild zu sehen, approximieren wir mit jedem neuen Term die Funktion stückweise besser.

Bemerkung 2.1: Wichtige Fourier-Integrale

Die folgenden Integrale sind sehr wichtig bei der Berechnung von Fourier-Reihen:

1. $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = 0$, für $\forall k, l$
2. $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = 0$ für $k \neq l$
3. $\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = 0$ für $k \neq l$
4. $\int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx = \pi$ für $k \geq 1$
5. $\int_0^{2\pi} \cos^2(kx) dx = \pi$ für $k \geq 1$

Wichtig! Diese Beziehungen gelten nur für $k, l \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.2: Fourier für un- und gerade Funktionen

Es gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Wenn f reellwertig ist, dann ist $c_{-k} = \overline{c_k}$ und $F_n(f)$ auch reellwertig.

Ist f gerade (d.h. $f(-x) = f(x)$), dann gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx)$$

Ist f ungerade (d.h. $f(-x) = -f(x)$), dann gilt

$$F_n(f) = \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx)$$

Eine weitere Anwendung der Fourier-Reihe ist auch das Beweisen von Folgen

Beispiel 2.2: Folgenbeweise mit Fourier

Wir sollen die Formel $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ beweisen indem wir die Fourier-Reihe der 2π -periodischen Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ bestimmen.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^0 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx} dx = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ -\frac{1}{k^2} & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$F_n(f) = \frac{\pi^2}{3} - 2 \cos(x) + \frac{1}{2} \pi \cos(2x) - \frac{2}{9} \cos(3x) + \dots$$

Nun setzen wir für x den Wert $x = \pi$ ein und erhalten:

$$F_n(f(\pi)) = \frac{\pi^2}{3} + 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \dots$$

Wir wissen, dass $f(\pi) = \pi^2$ und subtrahieren $\frac{\pi^2}{3}$ von beiden Seiten

$$\frac{\pi^2}{3} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \dots$$

Nun teilen wir beide Seiten mit 2 und erhalten

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

2.2 Konvergenz der Fourier Reihe

Definition 2.3: L^2 -Halbnorm

Sei V der Vektorraum der 2π -periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei f Riemann-integrierbar ist. Dann ist die Hermitesche Form

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{f(x)} dx, f \in V$$

die **L^2 -Halbnorm** von f .

Satz 2.3: Konvergenz der Fourier-Reihe im quadratischen Mittel

Sei V der Vektorraum der 2π -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, für die f integrierbar ist.

i) Für $\forall f \in V$ gilt

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

ii) Die Fourier-Reihe von $f \in V$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$.

Es gibt tatsächlich keine 2π -periodische Funktion im \mathcal{L}^2 , dessen Fourier-Reihe nicht fast überall gegen f konvergieren würde.

3 Mehrdimensionale Integrale

3.1 Theoretisches Baukasten

Um uns mit mehrdimensionalen Integralen zu beschäftigen, müssen wir zuerst gewisse theoretische Begriffe einführen.

Definition 3.1: Charakteristische Funktion

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die charakteristische Funktion *oder auch* **Indikatorfunktion** der Teilmenge A ist die Funktion

$$1_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Definition 3.2: Quader

Ein **Quader** $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das Produkt $I_1 \times \cdots \times I_n$ von n beschränkten, nicht-leeren Intervallen $I_\mu \subseteq \mathbb{R}$.

Beispiel 3.1: Quader in \mathbb{R}^1

Quader in \mathbb{R}^1 sind also die Intervalle (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$ und $[a, b)$.

Definition 3.3: Volumen eines Quaders

Das (n -dimensionale) Volumen eines solchen Quaders ist die nicht-negative reelle Zahl

$$v(Q) = v_n(Q) = \prod_{\mu=1}^n |I_\mu| = \prod_{\mu=1}^n (b_\mu - a_\mu)$$

Definition 3.4: Treppenfunktion

Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Treppenfunktion auf \mathbb{R}^n** , wenn es endlich viele paarweise **disjunkte** Quader gibt, sodass

1. die Funktion φ auf jedem Quader Q_k konstant ist,
2. $\varphi(x) = 0$ für alle x außerhalb von Quadern.

Außerdem lassen sich Treppenfunktionen als endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen von disjunkten Quadern schreiben

$$\varphi = \sum_k c_k 1_{Q_k} \text{ mit } c_k \in \mathbb{C} \text{ und } Q_k \text{ ist ein Quader}$$

Wir kommen nun zu den sehr wichtigen Begriff der Hüllreihen.

Definition 3.5: Hüllreihe

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Eine **Hüllreihe** zu f ist eine Reihe

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k} \text{ mit } c_k \in \mathbb{R}$$

wobei Q_k **offene** Quader im \mathbb{R}^n sind und für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(x)| \leq \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x)$$

Der **Inhalt** der Hüllreihe ist definiert als

$$I(\Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v(Q_k)$$

Beispiel 3.2: Folge von Hüllreihen

Seien $a, k \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ c, & x = a \end{cases}$. Wir sollen zu dieser Funktion eine Folge von Hüllreihen, Φ_n , konstruieren, die gegen Null konvergiert.

Wir wissen, dass $\Phi_{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$, aber auch, dass $c_k = 0$ für jeden Quader außer für die, in denen sich a befindet (da ist $c_k = c$). Wir können Hüllreihen auf Intervallen für $k, n \in \mathbb{N}$ bilden

$$A_{n,k} = \left[a - \frac{1}{k \cdot 2^n}, a + \frac{1}{k \cdot 2^n} \right]$$

$$\Phi_{(n)}(x) = 1_{A_{n,k}}(x)$$

Betrachtet nun

$$I(\Phi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v(Q_k) = 1 \cdot v(A_n)$$

Wir wissen, dass der Volumen des Intervalls

$$A_n = a + \frac{1}{k \cdot 2^n} - \left(a - \frac{1}{k \cdot 2^n} \right) = \frac{2}{k \cdot 2^n}$$

$$\Rightarrow I(\Phi_n) = \frac{2}{k \cdot 2^n}$$

Die Inhalte dieser Hüllreihe gehen gegen 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a + \frac{1}{k \cdot 2^n} - \left(a - \frac{1}{k \cdot 2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{k \cdot 2^n} = 0$$

Wir haben nun erfolgreich eine Folge von Hüllreihen konstruiert

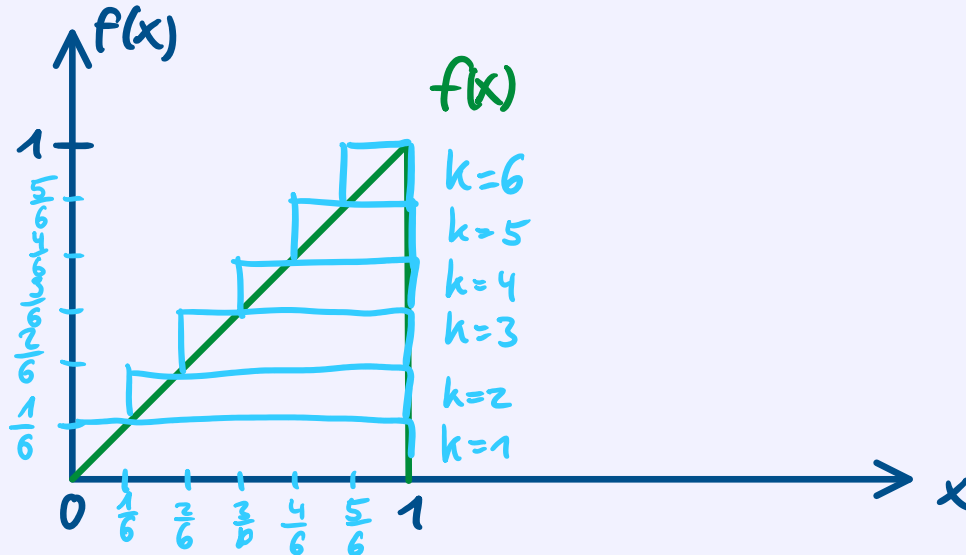
$$\Phi_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_{n,k}} \right)_n \quad \text{für } A_{n,k} = \left[a - \frac{1}{k \cdot 2^n}, a + \frac{1}{k \cdot 2^n} \right]$$

Beispiel 3.3: Hüllreihe einer Funktion

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dazu konstruieren wir eine Hüllreihe:



diese hat nun die Form

$$\Phi_6(x) = \sum_{k=0}^{6-1} \frac{1}{6} \cdot 1_{[\frac{1}{6}k, 1]}$$

Lassen wir eine beliebige Anzahl n an Quadern zu, gilt:

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} 1_{[\frac{1}{n}k, 1]}$$

Der Inhalt ist dann

$$\begin{aligned} I(\Phi_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \frac{1}{n} k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= 1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt:

$$I(\Phi_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Also dem Flächeninhalt unter der Funktion f !

Definition 3.6: L^1 -Halbnorm

Unter der **L^1 -Halbnorm** von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versteht man das Infimum

$$\|f\|_1 = \inf\{I(\Phi) \mid \Phi \text{ Hüllreihe zu } f\} = \int |f| dx$$

Satz 3.1: Eigenschaften einer Halbnorm

Für die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und ein $c \in \mathbb{C}$ gilt

1. $\|c \cdot f\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$
2. $|f_1| \leq |f_2| \implies \|f_1\|_1 \leq \|f_2\|_1$
3. $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1$

3.2 Lebesgue-Integral

Mit den obigen theoretischen Werkzeugen können wir nun endlich das Lebesgue-Integral definieren.

Definition 3.7: Lebesgue-Integral

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt **Lebesgue-integrierbar** über \mathbb{R}^n , wenn es eine Folge von Treppenfunktionen φ_k gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$$

In diesem Fall schreiben wir das **Lebesgue-Integral**

$$\int f dx = \int f(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) dx \in \mathbb{C}$$

Satz 3.2: Bedingte Gleichheit der Riemann und Lebesgue Integrale

Sei $A = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und f eine über A Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f über A Lebesgue-integrierbar und das Lebesgue-Integral und das Riemann-Integral sind gleich.

Der folgende zwei Sätze sind sehr wichtig in der Theorie der Gebietsintegrale. Im Skript stehen der kleinere und größere Satz von Fubini, wir schreiben hier aber die allgemeine Version aus T. Arens, also guckt euch auch das Skript nochmal an.

Satz 3.3: Kleiner Satz von Beppo Levi

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und sei (φ_k) eine monoton wachsende oder fallende Folge von Treppenfunktionen, so dass

1. (φ_k) punktweise gegen f konvergiert
2. die Folge $(\int \varphi_k dx)$ der Integrale der Treppenfunktionen beschränkt ist. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$$

Satz 3.4: Satz von Fubini

Sind $I \subseteq \mathbb{R}^p$ und $J \subseteq \mathbb{R}^q$ (möglicherweise unbeschränkte) Quader sowie $f \in L(Q)$ eine auf dem Quader $Q = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ integrierbare (oder mindestens stetig beschränkte) Funktion, so gibt es Funktionen $g \in L(I)$ und $h \in L(J)$ mit

$$g(x) = \int_J f(x, y) dy \text{ für fast alle } x \in I$$

$$h(y) = \int_I f(x, y) dx \text{ für fast alle } y \in J$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_R f(x, y) d(x, y) &= \int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_I g(x) dx \\ &= \int_J \int_I f(x, y) dx dy = \int_J h(y) dy\end{aligned}$$

Wichtig! Um den Satz von Fubini anwenden zu können, muss folgendes erwähnt werden:

- Q ist kompakt oder offen und beschränkt und
- f ist stetig.

Beispiel 3.4: Kompakte Kreisscheibe

Gegeben ist die kompakte Kreisscheibe:

$$K = \overline{B_r(0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

Wir wollen nun das Integral

$$\int_K 1 d(x, y)$$

berechnen. Dazu stellen wir fest:

1. K ist kompakt
2. $f(x, y) = 1$ ist stetig und beschränkt
3. Die Menge K_y lautet:

$$\begin{aligned}K_y &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in K\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \sqrt{r^2 - y^2}\} = [-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]\end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass $K_y \neq \emptyset$ für $y \in [-r, r]$. Somit erhalten wir:

$$F(y) = \begin{cases} \int_{K_y} 1 dx & \text{für } y \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1)$$

und damit nach dem Satz von Fubini:

$$\int_K 1 d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} F(y) dy = \int_{[-1, 1]} \left[\int_{[-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]} 1 dx \right] dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} 1 dx \right] dy = \pi r^2$$

Eine nützliche Integrationsregel $\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}(a^2 \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + x\sqrt{a^2 - x^2}) + c$.

Beispiel 3.5: Anwendung vom Satz von Fubini

Wir wollen auch für eine kompliziertere Funktion, aber noch stets definiert auf einem Rechteck, die iterierten Integrale berechnen. Dazu betrachten wir $R = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$ und die Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \sin(x_1 + 2x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in R$$

gegeben ist.

Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x_1 + 2x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} \cos(x_1 + 2x_2) \right]_{x_2=0}^{\frac{\pi}{2}} dx_1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos(x_1) - \frac{1}{2} \cos(x_1 + \pi) \right) dx_1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x_1) dx_1 = 1 \end{aligned}$$

Nun vertauschen wir die Reihenfolge,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x_1 + 2x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos(x_1 + 2x_2) \right]_{x_1=0}^{\frac{\pi}{2}} dx_2 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2x_2) - \cos(2x_2 + \frac{\pi}{2})) dx_2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x_2) - \frac{1}{2} \sin(2x_2 + \frac{\pi}{2}) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\pi) - \sin(\frac{3\pi}{2}) - \sin(0) + \sin(\frac{\pi}{2})) = 1 \end{aligned}$$

Beispiel 3.6: Fubini ist nicht immer anwendbar

Es sollen die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 dx_2 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1$$

berechnet werden. Darf der Satz von Fubini angewandt werden?

Problemanalyse und Strategie: Man muss nur eines der iterierten Integrale berechnen, da sich der Wert des anderen durch eine Symmetrieüberlegung ergibt. Wir bestimmen zunächst den Wert des inneren Integrals durch partielle Integration. Das äußere Integral kann dann direkt berechnet werden.

Lösung: Wir betrachten zunächst nur das innere Integral für ein festes $x_2 \in (0, 1)$. Mit partieller Integration, wobei wir als Stammfunktion $x_1 - x_2$ und als Ableitung $(x_1 + x_2)^{-3}$ wählen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 &= \left[-\frac{1}{2} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^2} \right]_{x_1=0}^1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} dx_1. \end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^1 \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} dx_1 = \left[-\frac{1}{x_1 + x_2} \right]_{x_1=0}^1,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 &= \left[\frac{-x_1}{(x_1 + x_2)^2} \right]_{x_1=0}^1 \\ &= \frac{-1}{(1 + x_2)^2}. \end{aligned}$$

Den Wert des iterierten Integrals zu bestimmen, ist jetzt nicht mehr schwer,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \frac{-1}{(1 + x_2)^2} dx_2 \\ &= \left[\frac{1}{1 + x_2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Um den Wert des zweiten Integrals zu bestimmen, nutzen wir die Symmetrie aus. Es ist

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1 = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1.$$

Nun benennen wir die Integrationsvariablen um und schreiben y_1 für x_2 sowie y_2 für x_1 . Es ergibt sich

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1 = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{y_1 - y_2}{(y_2 + y_1)^3} dy_1 dy_2.$$

Rechts steht nun aber genau das iterierte Integral, dass wir eben berechnet haben. Also folgt

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2 dx_1 = \frac{1}{2}.$$

In beiden Fällen existiert hier das iterierte Integral, aber der Wert hängt von der Integrationsreihenfolge ab.

Kommentar Im Fall dieses Beispiels kann der Satz von Fubini nicht angewandt werden. Die Singularität der Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ ist so stark, dass f keine integrierbare Funktion auf dem Quadrat $(0, 1) \times (0, 1)$ ist. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind hier verletzt.

3.3 Volumina und Nullmengen

Wir beginnen dieses wichtige Thema mit sehr theoretischen Konzepten, die uns dann ermöglichen die Maßtheorie zu verstehen. So manche Begriffe werden in der Funktionalanalysis in MfP4 nochmal vorkommen.

Definition 3.8: Grundmenge und σ -Algebra

Eine **Grundmenge** (auch Universum), Ω , bezeichnet in der Mathematik eine Menge aus allen in einem bestimmten Zusammenhang betrachteten Objekten.

Eine Menge \mathcal{A} von Teilmengen einer Grundmenge Ω heißt **σ -Algebra**, wenn

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Für jede Menge $A \in \mathcal{A}$ gilt $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- Abzählbare Vereinigungen von Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ sind wieder in \mathcal{A}

Beispiel 3.7: Kleinste und größte σ -Algebra

Für jede beliebige Menge Ω ist $\{\emptyset, \Omega\}$ die kleinste und die Potenzmenge $P(\Omega)$ die größtmögliche σ -Algebra mit Ω als Grundmenge.

Definition 3.9: Maß

Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein **Maß** auf \mathcal{A} , wenn

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- σ -Additivität, also $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Außerdem wird das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ **Maßraum** genannt.

Beispiel 3.8: Borelsche σ -Algebra

Die **borelsche σ -Algebra** ist eine σ -Algebra, die alle Mengen enthält, denen man naiverweise ein Volumen oder eine Wahrscheinlichkeit zuordnen will, schließt aber Negativresultate aus.

Bezüglich der borelschen σ -Algebra sind alle stetigen Funktionen immer messbar.

Definition 3.10: σ -Kompaktheit

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **σ -kompakt**, wenn sie eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist.

Nun kommt eine sehr wichtige Definition.

Definition 3.11: Lebesgue-Messbarkeit

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, falls die konstante Funktion über A integrierbar ist.

$$v(A) = v_n(A) = \int_A 1 dx$$

Definition 3.12: Figur und Ausschöpfung

Eine Vereinigung endlich vieler Quader $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $A = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_s$ heißt **Figur**.

Eine **Ausschöpfung** von A ist eine aufsteigende Folge von Teilmengen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A$.

Beispiel 3.9: Volumina von Kegeln

Wir sollen das Volumen des Kegels

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n | y \in [0, h], x \in (1 - \frac{y}{h})B\}$$

mit kompakter Basis (das ist die Fläche des Kegels ganz unten) $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und Höhe $h > 0$ bestimmen. Da wir in 3D arbeiten ist unser $n = 3$.

$$v_n(K) = \int_0^h v_{n-1}((1 - \frac{y}{h})B) dy$$

An dieser Stelle ist es wichtig die **Streckungsformel** zu kennen

$$\int_{\mathbb{R}^n} (s_1 x_1, \dots, s_n x_n) dx = s_1^{-1} s_2^{-1} \dots s_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

$$v_n(K) = \int_0^h v_{n-1}(B) (1 - \frac{y}{h})^{n-1} dy = B \int_0^h (1 - \frac{y}{h})^2 dy = \frac{B \cdot h}{3}$$

Und nun eins der wichtigsten Definitionen im MfP3.

Definition 3.13: Nullmenge

Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-Nullmenge, wenn sie eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- N ist messbar mit $v_n(N) = 0$.
- Für die charakteristische Funktion gilt $\|1_N\|_1 = 0$.

Beispiel 3.10: Nullmengen

Überlegen Sie sich einige Beispiele für Nullmengen im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3 .

In jedem Fall sind isolierte Punkte und abzählbare Vereinigungen von isolierten Punkten wie im eindimensionalen Nullmengen. Das bedeutet etwa, dass $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{R}^3$ Nullmengen sind.

Der Rand eines Quaders, im zweidimensionalen also der Rand eines Rechtecks, ist ebenfalls eine Nullmenge. Dasselbe gilt für abzählbare Vereinigungen solcher Ränder.

Als letztes Beispiel im \mathbb{R}^2 sei der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genannt.

Definition 3.14: Fast überall

Sei $E(x)$ eine Eigenschaft, sodass wir für $\forall x \in \mathbb{R}^n$ wissen, ob die Eigenschaft $E(x)$ erfüllt ist. Wir sagen, dass $E(x)$ **fast überall** gilt, wenn die Menge aller Punkte, wo $E(x)$ nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Beispiel 3.11: Fast überall konstante Funktion

Sei $f(x) = \begin{cases} 42 & \text{wenn } x \neq \infty \\ \infty & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$. Die Funktion $f(x)$ ist fast überall konstant, außer in einer Nullmenge (also in der Unendlichkeit).

Es ist auch nützlich sich zu merken, dass wenn $\|f\|_1 = 0$, dann $N = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist.

Satz 3.5: Modifikationssatz

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die fast überall gleich sind. Wenn f integrierbar ist, dann ist auch g integrierbar und es gilt $\int f = \int g$.

Lemma 3.6: Geometrische Charakterisierung von Nullmengen

Ist N eine Nullmenge, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine messbare offene Menge U mit $N \subseteq U$ und $v(U) < \epsilon$.

Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ abzählbar viele Quader Q_1, Q_2, \dots, Q_n gibt, sodass

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \epsilon$$

Eine nützliche, aber nicht so wichtige Eigenschaft ist, dass wenn f integrierbar ist, dann auch $f(x - a)$ integrierbar ist, wenn a in der Definitionsmenge ist.

3.4 Konvergenzsätze

Zuerst wollen wir uns an die punktweise und gleichmäßige Konvergenz aus MfP2 erinnern.

Definition 3.15: Gleichmäßige Konvergenz

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen.

Wir sagen, dass f genau dann **gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion f **konvergiert**, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon \quad \forall n \geq N \wedge \forall x \in X.$$

Definition 3.16: Punktweise Konvergenz

Eine Folge (f_n) von Abbildungen **konvergiert punktweise** gegen eine Abbildung f , falls $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in X$.

Beispiel 3.12: Gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sqrt{|x|^2 + \frac{1}{n^2}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Konvergiert diese Folge gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, sagen wir $f(x) = |x|$? In weiser Voraussicht und um die weitere Rechnung plausibel zu machen, schauen wir uns zunächst die folgende Ungleichung an:

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Damit können wir nun recht schnell nachprüfen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in D_f \forall n \geq N :$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{|x|^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| \leq \left| |x| + \frac{1}{n} - |x| \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

Das Kriterium ist also erfüllt und die Funktion damit gleichmäßig konvergent (und daher auch automatisch punktweise konvergent), da wir die x -Abhängigkeit in der Abschätzung losgeworden sind.

Ebenso ein Beispiel, um uns auf die Quotientenvektorräume aus MfP2 zu erinnern.

Beispiel 3.13: Quotientenvektorraum

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $U = \text{span}\{(1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, -1, 0)^T\} \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir

sollen zeigen, dass im Quotientenvektorraum U/V gilt

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \text{ und } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \neq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Dabei bezeichnet $[v]$ die Äquivalenzklasse von v von V/U .

Ein Quotientenvektorraum besteht aus allen Vektoren $a, b \in V$ für die gilt $a + b \in U$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können nun den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Basisvektoren von U darstellen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn wir $a = 4$ und $b = 1$ setzen, dann wird das Ungleichungssystem gelöst. Also stimmt die erste Äquivalenzklasse. Nun gucken wir uns das für die anderen zwei Vektoren an

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und wir merken schon, dass es keine a und b gibt, sodass das Gleichungssystem gelöst werden kann, daher gehören die letzten zwei Vektoren nicht zu der Äquivalenzklasse.

Nun kommen wir zu sehr wichtigen Sätzen.

Theorem 3.7: Satz von Riesz-Fischer

Vorausgesetzt f_k ist eine \mathcal{L}^1 -Cauchy-Folge integrierbarer Funktionen, dann

- existiert $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ mit $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$ und
- (f_k) konvergiert punktweise gegen f .

Somit ist $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum. Die **Vertauschbarkeit** von Integral und Limes folgt grob aus der Konvergenz bzgl. der \mathcal{L}^1 -Halbnorm.

Beachtet, dass der \mathcal{L}^1 - Grenzwert nicht eindeutig ist, aber es kann sein, dass sich die Grenzwerte nur auf eine Nullmenge unterscheiden.

Satz 3.8: Satz von Beppo-Levi von der monotonen Konvergenz

Voraussetzungen:

- $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist monoton wachsende/fallende Folge integrierbarer Funktionen
- f_k konvergiere punktweise gegen $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$
- Die Folge $\int f_k dx$ der Integrale ist beschränkt.

Dann folgt, dass f integrierbar ist und dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx = \int f dx$

Satz 3.9: Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz

Voraussetzungen:

- $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist eine Folge integrierbaren Funktionen
- f_k konvergiert fast überall punktweise gegen eine Funktion f
- Es gibt eine integrierbare Majorante F mit $|f_k| \leq F$ für $\forall k$.

Dann folgt, dass f integrierbar ist und dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx = \int f dx$

Beispiel 3.14: Satz von integrierbaren Majoranten angewandt

Wir betrachten die Funktion

$$\delta_n(x) = \begin{cases} xn^2 & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - xn^2 & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionenfolge ist unbeschränkt wie wir gesehen haben, da

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \delta_n(x) = n$$

Es gibt also keine integrierbare Majorante und somit ist nicht sichergestellt, dass Integral und Limes vertauschen zu können. Tatsächlich gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1 \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 0$$

Beispiel 3.15: Und noch ein Beispiel

Wir betrachten das Integral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x} dx$$

Die Funktionenfolge, die wir dafür untersuchen müssen, ist

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x}$$

Aus MfP1 wissen wir, dass

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ wächst monoton, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

wir gehen nun schrittweise vor:

1. $f_n(x)$ ist eine Folge integrierbarer Funktionen, denn

- $f_n(x)$ ist steig und daher lokal-integrierbar über die σ -kompakte Menge $(0, \infty)$.
- $f_n(x)$ hat die über $(0, \infty)$ integrierbare Majorante

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x} \right| < e^x e^{-2x} = e^{-x}$$

denn

$$\int_0^\infty e^{-x} = 1$$

- $f_n(x)$ ist damit auch über $(0, \infty)$ integrierbar.

2. $f_n(x)$ konvergiert fast überall punktweise

Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x} \\ &= e^{-2x} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= e^{-2x} \cdot e^x = e^{-x} \end{aligned}$$

Die Grenzfunktion ist also $f(x) = e^{-x}$.

3. $f_n(x)$ hat eine integrierbare Majorante

Die haben wir mit $f(x) = e^{-x}$ schon gefunden.

Nun können wir den Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz anwenden und Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-2x} dx = \int_0^\infty e^{-x} = 1$$

3.5 Parameterabhängige Integrale

Die Vertauschbarkeit von Integral und Limes führt zu weiteren, sehr praktischen Sätzen.

Satz 3.10: Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Voraussetzungen:

- f ist differenzierbar auf dem kompakten Intervall $[x_0, x]$.
- Die Ableitung von f ist beschränkt.

Daraus folgt, dass f' Lebesgue-integrierbar ist über $[x_0, x]$ und dass

$$f(x) - f(x_0) = \int_{[x_0, x]} f'(t) dt$$

.

Satz 3.11: Stetigkeitssatz

Voraussetzungen:

- Sei X ein metrischer Raum und $T \subseteq \mathbb{R}^p$
- $f : X \times T \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ ist für feste x über T integrierbar
- Für feste t ist die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig
- Es gibt eine integrierbare Majorante $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $|f(x, t)| \leq \Phi(t)$ für $\forall (x, t) \in X \times T$.

Daraus folgt, dass $F(x) = \int_T f(x, t) dt$ auf X stetig ist.

Satz 3.12: Differentiationssatz

Voraussetzungen:

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T \subseteq \mathbb{R}^p$
- $f : X \times T \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ ist für feste x über T integrierbar
- Für feste t ist die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig diff'bar
- Es gibt eine integrierbare Majorante $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v_\mu}(x, t) \right| \leq \Phi(t) \text{ für } \forall (x, t) \in X \times T \text{ für } \mu = 1, \dots, n$$

Daraus folgt, dass

- $F(x) = \int_T f(x, t) dt$ ist stetig diff'bar,
- $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x_p} f(x, t)$ ist für jedes x integrierbar und
- es gilt $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_T f(x, t) dt = \int_T \frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x, t) dt$.

Beispiel 3.16: Fourier-Transformation

Die **Fourier-Transformierte** ist definiert durch:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$$

wobei f eine integrierbare Funktion ist. Wir überprüfen $\hat{f}(x)$ zunächst auf Stetigkeit:

1. $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ ist für feste x über \mathbb{R} integrierbar?
Ja, denn $|f| = |e^{-ixt}f(t)|$ ist eine integrierbare Majorante.
2. Für feste t ist $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ stetig?
Ja klar! $f(t)$ ist fest und e^z ist immer stetig.
3. Gibt es eine integrierbare Majorante?
Ja, nämlich $\Phi(t) = |f(t)|$.

Somit ist \hat{f} tatsächlich stetig. Wir setzen nun $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt$.
Zunächst formen wir den Exponenten etwas um:

$$-\frac{t^2}{2} - ixt = -\frac{1}{2}(t + ix)^2 - \frac{x^2}{2}$$

So erhalten wir das Integral:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt$$

Nun können wir den Differentiationssatz anwenden. Dazu schränken wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Definitionsbereich von x auf das offene Intervall $(-a, a)$ ein.

$$F_a(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt \quad x \in (-a, a) \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Ist $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$ integrierbar?
Wir finden die integrierbare Majorante $|e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}| = |e^{-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}x^2 - ixt}| = e^{\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}t^2} = \Phi(t)$
2. Ist $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$ stetig differenzierbar?
ja klar! Es gilt $\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} = -i(t+ix)e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$
3. Gibt es eine integrierbare Majorante von $\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}$?
 $|\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}| \leq (|t| + a)e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{\frac{1}{2}a^2}$

Wir können nun den Differentiationssatz anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{dF_a}{dx} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} i e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} \Big|_{-b}^b = 0 \end{aligned}$$

Bisher haben wir uns nur auf das Intervall $x \in (-a, a)$ eingeschränkt. Wir können aber problemlos schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\partial F_a}{\partial x} = \lim_{a \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Somit ist $F(x) = F(0) = \text{const.}$ und wir können rechnen:

$$F(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi} \quad (\text{Gauß-Integral})$$

Jetzt können wir die Fourier-Transformierte ausrechnen:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Also sind $\hat{f}(x)$ und $f(t)$ die gleichen Funktionen! Dies ist eine ganz wichtige Feststellung, die z.B. bei der Unschärferelation der Quantenmechanik wichtig wird.

Aus all diesen Sätzen kommt nun der Höhepunkt der Integrationstheorie. Die folgenden zwei Sätze sind von enormer Bedeutung in der Physik, also merkt sie euch.

Satz 3.13: Satz von Tonelli

Vorausgesetzt $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{C}$ ist fast überall stetig oder lokal integrierbar. Dann gilt die folgende Äquivalenz

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| dx \right) dy \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dy \right) dx \text{ existiert} \\ \iff f \text{ ist über } \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \text{ integrierbar}$$

Satz 3.14: Transformationssatz

Seien $B, D \in \mathbb{R}^n$ offen und $\psi : B \rightarrow D$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann über D integrierbar, wenn $f(\psi(x)) \cdot |\det(d\psi)|$ über B integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_D f(x) dx = \int_B f(\psi(y)) \cdot |\det(d\psi(y))| dy$$

Zur Erinnerung die Definition der allgemeinen linearen Gruppe:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

Außerdem nicht vergessen, dass der Betrag der Determinante einer Matrix das gerichtete Volumen eines Parallelepipeds darstellt.

Beispiel 3.17: Präsenzaufgabe 1 aus dem Übungsblatt 7

Wir mussten, für $a, b > 0$, den Flächeninhalt einer Ellipse mit dem Transformationssatz bestimmen.

$$E = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

Da die Kugel als $B_1(0) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ definiert ist, ist es sinnvoll die Abbildung $\psi(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ zu wählen (dies ist auch ein [Diffeomorphismus](#)).

$$d\psi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$$\det(d\psi(x, y)) = \frac{1}{ab}$$

Wir wissen, dass $v(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} 1 dx = \pi$ also können wir die Gleichung aufstellen:

$$\int_{B_1(0)} 1 dx = \int_E \frac{1}{ab} \cdot 1 dy$$

$$\int_{B_1(0)} 1 dx = \frac{1}{ab} \int_E 1 dy$$

$$\int_E 1 dy = ab\pi$$

Beispiel 3.18: Bestimmung eines uneigentlichen 3D-Integrals

Der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

soll mithilfe einer Transformation auf Polarkoordinaten bestimmt werden.

Problemanalyse und Strategie: Die Funktion e^{-x^2} ist zwar integrierbar, es ist jedoch nicht möglich, ihre Stammfunktion durch die uns bekannten Funktionen in einer expliziten Formel auszudrücken. Mittels einer Darstellung durch ein Gebietsintegral und der Verwendung von Polarkoordinaten kann aber der Wert des oben angegebenen Integrals bestimmt werden.

Lösung: Die Grundidee ist das Quadrat des Integrals zu betrachten. Dieses lässt sich als ein iteriertes Integral und damit als ein Gebietsintegral über den \mathbb{R}^2 schreiben,

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y). \end{aligned}$$

Es bietet sich nun an, diese Gebietsintegral über eine Transformation auf Polarkoordinaten zu berechnen. Dazu setzen wir

$$B = \{(r, \varphi) \mid r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi)\}$$

und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \int_B r e^{-r^2} d(r, \varphi).$$

Durch die Transformation ist der zusätzliche Faktor r ins Spiel gekommen. Er bewirkt, dass wir das Integral nun leicht als iteriertes Integral bestimmen können,

$$\begin{aligned} \int_B r e^{-r^2} d(r, \varphi) &= \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Kommentar Dies ist nur eine von vielen Möglichkeiten zur Bestimmung des Werts dieses Integrals. Anwendung findet das Integral in der Wahrscheinlichkeitstheorie im Zusammenhang mit der Normalverteilung (siehe Abschn. 39.3).

Beispiel 3.19: Transformationssatz im Einsatz

Das Integral

$$\int_D \sqrt{x_1} x_2 dx$$

mit

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0, \sqrt{x_1} < x_2 < 2\sqrt{x_1}, \frac{1}{x_1} < x_2 < \frac{2}{x_1}\}$$

soll berechnet werden. Das Gebiet D ist auf dem Bild zu sehen.

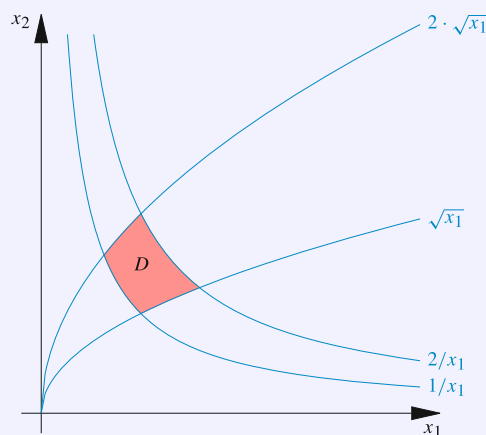


Abb. 25.18 Das Gebiet D aus dem Beispiel wird durch die vier Kurven $x_2 = \sqrt{x_1}$, $x_2 = 2\sqrt{x_1}$, $x_2 = 1/x_1$ und $x_2 = 2/x_1$ begrenzt

Um eine geeignete Transformation zu finden, betrachten wir die Bedingungen in der Definition von D genauer. Sie lassen sich umschreiben zu

$$1 < \frac{x_2}{\sqrt{x_1}} < 2 \text{ und } 1 < x_1 x_2 < 2$$

Es liegt daher nahe, als neue Koordinaten $u_1 = x_1 x_2$ und $u_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1}}$ zu wählen. Umgekehrt hat man dann

$$x = \psi(u) = \begin{pmatrix} u_1^{\frac{2}{3}} & u_2^{-\frac{2}{3}} \\ u_1^{\frac{1}{3}} & u_2^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, \quad 1 < u_1, u_2 < 2.$$

Da man die Darstellung von u durch x und umgekehrt äquivalent in einander umformen kann, ist diese Transformation bijektiv. Als Funktionaldeterminante ergibt sich

$$\det \psi'(u) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u_1^{-\frac{1}{3}} u_2^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3} u_1^{\frac{2}{3}} u_2^{-\frac{5}{3}} \\ \frac{1}{3} u_1^{-\frac{2}{3}} u_2^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u_1^{\frac{1}{3}} u_2^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} u_2^{-1} + \frac{2}{9} u_2^{-1} = \frac{2}{3 u_2}$$

Die Determinante ist daher stets positiv. Wir können nun die Transformationsformel anwenden und erhalten mit $B = (1, 2) \times (1, 2)$.

$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{x_1} x_2 dx &= \int_B u_1^{\frac{1}{3}} u_2^{-\frac{1}{3}} u_1^{\frac{1}{3}} u_2^{\frac{2}{3}} \frac{2}{3 u_2} du \\ &= \frac{2}{3} \int_1^2 \int_1^2 u_1^{\frac{2}{3}} u_2^{-\frac{2}{3}} du_1 du_2 \\ &= \frac{2}{5} (\sqrt[3]{32} - 1) \int_1^2 u_2^{-\frac{2}{3}} du_2 = \frac{6}{5} (\sqrt[3]{32} - 1) (\sqrt[3]{2} - 1) \\ &= \frac{6}{5} (5 - \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{2}) \end{aligned}$$

3.6 Exkurs: Wichtige Koordinatensysteme

Dieses Thema ist euch allen schon aus der Physik 2 bekannt und könnt es überspringen, aber guck euch die Beispiele zur Erinnerung vor der Klausur nochmal an.

Für das **Polarkoordinatensystem** gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = r \cos(\varphi)$$

$$x_2 = r \sin(\varphi)$$

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Definition 3.17: Integration mit Polarkoordinaten

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in L(D)$ und B die Beschreibung von D durch Polarkoordinaten, so gilt

$$\int_D f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_B f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r d(r, \varphi)$$

Beispiel 3.20: Integration mit Polarkoordinaten

Berechnen wir das Integral

$$\int_D x(x^2 + y) d(x, y)$$

mit $D = \{x \in \mathbb{R}^2 | x > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Wir wollen dies mit Polarkoordinaten ausrechnen. Wir drücken D aus durch

$$D = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T \in \mathbb{R}^2 | -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 1 < r < 2\}$$

Das Gebiet B aus dem Transformationssatz ist also genau das Rechteck

$$B = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 | -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 1 < r < 2\}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_D x(x^2 + y) d(x, y) &= \int_B (r^3 \cos^3(\varphi) + r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) r d(r, \varphi) \\ &= \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^4 \cos^3(\varphi) + r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) d\varphi dr \\ &= \int_1^2 \left[\frac{r^4}{3} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) + \frac{2r^4}{3} \sin(\varphi) + \frac{r^3}{2} \sin^2(\varphi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_1^2 \frac{4}{3} r^4 dr = \left[\frac{4}{15} r^5 \right]_1^2 = \frac{124}{15} \end{aligned}$$

Für das **Zylinderkoordinatensystem** gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = \rho \cos(\varphi)$$

$$x_2 = \rho \sin(\varphi)$$

$$x_3 = z$$

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Definition 3.18: Integration mit Zylinderkoordinaten

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $f \in L(D)$ und B die Beschreibung von D durch Polarkoordinaten, so gilt

$$\int_D f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) = \int_B f(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), z) \rho d(\rho, \varphi, z)$$

Beispiel 3.21: Integration mit Zylinderkoordinaten

Bestimmen wir nochmal das Volumen eines Kegels, aber diesmal mit Zylinderkoordinaten.

$$K = \{(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), z)^T \mid 0 < z < h, 0 < \rho < R(1 - \frac{z}{h}), -\pi < \varphi < \pi\}$$

Die Menge der Tupel (ρ, φ, z) , die einen Punkt in K in Zylinderkoordinaten darstellen, nennen wir B . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} v_n(K) &= \int_K 1 dx = \int_B \rho d(\rho, \varphi, z) \\ &= \int_0^h \int_0^{R(1-\frac{z}{h})} \int_{-\pi}^{\pi} \rho d\varphi d\rho dz \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{R^2}{2} (1 - \frac{z}{h})^2 dz = \pi R^2 \left[-\frac{h}{3} (1 - \frac{z}{h})^3 \right]_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 h \end{aligned}$$

Zum guten Letzt gelten für das **Kugelkoordinatensystem** die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$$

$$x_2 = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$$

$$x_3 = z \cos(\theta)$$

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Definition 3.19: Integration mit Kugelkoordinaten

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $f \in L(D)$ und B die Beschreibung von D durch Polarkoordinaten, so gilt

$$\int_D f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) = \int_B f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) r^2 \sin(\theta) d(r, \varphi, \theta)$$

Beispiel 3.22: Integration mit Kugelkoordinaten

Bestimmen wir das Volumen einer Kugel.

$$\begin{aligned} K &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \\ &= \{r(\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta))^T \in \mathbb{R}^3 \mid (r, \varphi, \theta)^T \in B\} \end{aligned}$$

mit dem Quader

$$B = (0, R) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$$

Das Volumen der Kugel ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} v_n(K) &= \int_K 1 dx = \int_B r^2 \sin(\theta) d(r, \varphi, \theta) \\ &= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^R r^2 (\cos(0) - \cos(\pi)) dr \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

4 Tensorprodukt

Das Tensorprodukt verknüpft auf charakteristische Weise zwei Vektorräume miteinander. Die Definitionen mögen sehr trocken wirken, also wäre meine Empfehlung sich zuerst die Beispiele anzugucken und dann die Theorie anpacken.

4.1 Mathematisches Tensorprodukt

Definition 4.1: Tensorprodukt

Zunächst erweitern wir den Begriff der Bilinearform. Statt

$$\alpha : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$$

gilt nun:

$$\alpha : V \times W \rightarrow X$$

wobei X ein Vektorraum ist.

Das **Tensorprodukt** kann man sich einfach als eine neue Verknüpfung zwischen Vektorräumen vorstellen. Sie ist definiert über die universelle Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\kappa} & V \otimes W \\ & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \phi_\alpha \\ & & X \end{array}$$

wobei $V \otimes W$ der Tensorproduktraum ist. Diese Definition hat folgende Vorteile:

1. Jeder bilinearen Abbildung α kann genau eine Lineare Abbildung Φ_α zugeordnet werden.
2. Der Tensorproduktraum ist bis auf Isomorphie eindeutig. Seien nämlich zwei Räume $V \otimes W$ und $V \tilde{\otimes} W$ gegeben, dann gilt für $X = V \otimes W$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & V \otimes W & \\ & \nearrow \kappa & & \downarrow \phi_{\tilde{\kappa}} & \\ V \times W & \xrightarrow{\tilde{\kappa}} & V \tilde{\otimes} W & \downarrow \phi_{\kappa} & \\ & \searrow \kappa & & V \otimes W & \end{array}$$

und damit

$$\Phi_\kappa \circ \Phi_{\tilde{\kappa}} = Id_{V \tilde{\otimes} W} \quad \Phi_{\tilde{\kappa}} \circ \Phi_\kappa = Id_{V \otimes W}$$

Die Abbildungen $\Phi_\kappa, \Phi_{\tilde{\kappa}}$ sind also gegenseitige Umkehrabbildungen und damit Bijektiv!

3. Das Tensorprodukt existiert! Seien dazu V und W Vektorräume mit den Basen b_i

und b_j und:

$$\mathcal{V}(V \times W) = \{T : V \times W \rightarrow \mathbb{K}, T \neq 0\}$$

Eine Basis von $\mathcal{V}(V \times W)$ ist dann gegeben durch:

$$\delta_{(b_i, b_j)}(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v = b_i \text{ und } w = b_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

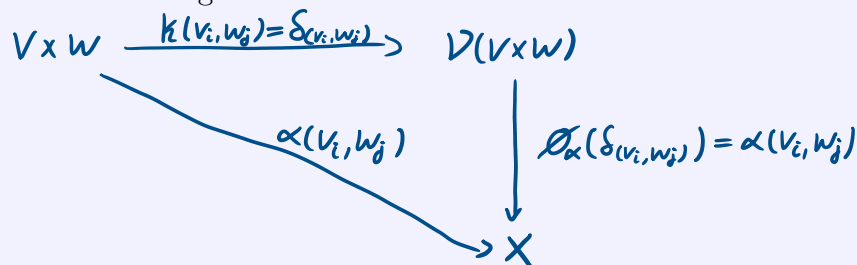
Wir schreiben nun:

$$\alpha(V, W) = \alpha\left(\sum_i \lambda_i b^i, \sum_j \mu_j b^j\right) = \sum_{i,j} T_{ij} \alpha(b^i, b^j)$$

$$\kappa(V, W) = \kappa\left(\sum_i \lambda_i b^i, \sum_j \mu_j b^j\right) = \sum_{i,j} T_{ij} \delta_{(b^i, b^j)}$$

$$\Phi_\alpha(T) = \Phi_\alpha\left(\sum_{i,j} T_{ij} \delta_{(b^i, b^j)}\right) = \sum_{i,j} T_{ij} \alpha(b^i, b^j)$$

Bildlich passiert also folgendes:



Diese Definitionen erfüllen alle benötigten Eigenschaften. Allgemeiner schreibt man:

$$\kappa(b^i, b^j) = b^i \otimes b^j$$

Regeln 4.1: Eigenschaften des Tensorprodukts

1. Für endlichdimensionale Vektorräume gilt

$$\dim_{\mathbb{K}} V \otimes W = \dim_{\mathbb{K}} V \cdot \dim_{\mathbb{K}} W$$

2. Sind V, W Hilberträume, lässt sich das Skalarprodukt erweitern:

$$\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle = \langle v, v' \rangle \cdot \langle w, w' \rangle \quad \forall v, v' \in V \quad w, w' \in W$$

3. Es sei

$$\alpha : V \rightarrow V' \quad \beta : W \rightarrow W' \quad \alpha \otimes \beta : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$$

dann gilt:

$$(\alpha \otimes \beta)(V \otimes W) = \alpha(V) \otimes \beta(W)$$

4. Das Tensorprodukt ist bilinear:

$$(\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2) \otimes \Psi = \lambda_1 \Phi_1 \otimes \Psi + \lambda_2 \Phi_2 \otimes \Psi$$

$$\Phi \otimes (\lambda_1 \Psi_1 + \lambda_2 \Psi_2) = \lambda_1 \Phi \otimes \Psi_1 + \lambda_2 \Phi \otimes \Psi_2$$

5. Elemente der Form

$$V \otimes W = \kappa(V, W)$$

heißen Tensorprodukte oder reine Tensoren. Es gibt aber auch Elemente, die die Eigenschaft nicht erfüllen, wie zum Beispiel:

$$b^1 \otimes b^1 + b^2 \otimes b^2$$

Definition 4.2: Transformation von Tensoren

Wir betrachten die Vektorräume V, V' mit Basen e_i und e'_i sowie W, W' mit Basen f_i, f'_i . Für lineare Abbildungen Φ und Ψ gilt:

$$\Phi(e_i) = \sum_k a_i^k e'_k \quad \Psi(f_i) = \sum_l a_e^l e'_l$$

und daraus folgt:

$$(\Phi \otimes \Psi)(x^{ij} e_i \otimes f_j) = x^{ij} a_i^k b_j^l e'_k \otimes f'_l$$

obere Indizes werden kovariant transformiert

$$x^{ij} \mapsto x^{ij} a_i^k b_j^l$$

Definition 4.3: k -fache äußere Produkt

Das **k -fache äußere Produkt (Dachprodukt)** eines \mathbb{K} -Vektorraums V ist ein Vektorraum $\Lambda^k(V)$, zusammen mit einer k -multilinearen alternierenden Abbildung $\wedge : V \times \cdots \times V \rightarrow \Lambda^k V$, so dass es für jede k -lineare alternierende Abbildung $\alpha : V^k \rightarrow W$ genau eine lineare Abbildung $\Phi_\alpha : \Lambda^k V \rightarrow W$ gibt, so dass das Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} & & \Lambda^k V \\ & \nearrow \wedge & \downarrow \text{!} \\ V^k & & \\ & \searrow \alpha & \downarrow \Phi_\alpha \\ & & W \end{array}$$

kommutiert.

Besonders die letzte Definition ist sehr wichtig für spätere Kapitel.

Beispiel 4.1: Einfaches Tensorprodukt von math3ma.com

Seien $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und $W \subseteq \mathbb{R}^2$ und wir suchen uns zwei Vektoren aus.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wie können wir aus diesen zwei Vektoren einen neuen erstellen?

1. mit der Direkten Summe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^2) = \dim(\mathbb{R}^3) + \dim(\mathbb{R}^2) = 5$$

2. mit dem Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2) = \dim(\mathbb{R}^3) \cdot \dim(\mathbb{R}^2) = 6$$

Das Tensorprodukt ist wie eine erwachsene Version der Multiplikation. Die Basisvektoren von unseren Tensorprodukt sind auch Tensorprodukte der Basisvektoren der jeweiligen Vektorräumen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = 4(e_1 \otimes e_1) + 5(e_1 \otimes e_2) + 8(e_2 \otimes e_1) + 10(e_2 \otimes e_2) + 12(e_3 \otimes e_1) + 15(e_3 \otimes e_2)$$

Guckt euch gerne noch die Website an, weil math3ma Tensoren super erklärt.

Beispiel 4.2: Tensorprodukte in der Quantenmechanik

Der Spinzustand $|\chi\rangle$ lebt in Spinraum H_s und der Ortszustand $|\psi\rangle$ im Ortsraum H_r . Der Gesamtzustand lebt im Tensorproduktraum

$$|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \in H_r \otimes H_s$$

Auch Vielteilchenzustände sind Tensorprodukte von Einteilchenzuständen.

Beispiel 4.3: Nützliche Tensorwerkzeuge aus den Präsenzaufgaben

1. Jedes Element von $V \otimes W$ lässt sich schreiben als

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \quad \text{mit } v_1, v_2 \in V \text{ und } w_1, w_2 \in W$$

2. Ein **reiner Tensor** hat immer die Form

$$a \otimes b \quad a \in V \text{ und } b \in W$$

3. Wie finden wir ein Element von $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$, dass nicht als ein reiner Tensor dargestellt werden kann?

Am besten wir stellen uns eine Matrix auf und versuchen dann so eine zu finden, deren Rang mindestens 2 ist

$$\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$$

Und tatsächlich haben wir hier schon so eine Matrix gefunden und unser Tensor ist

$$e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$$

4. Zeige, dass $x \in V \otimes V$ ungleich Null ist:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

5. Sei $y \in \Lambda^2 V$. Zeige, dass $y = 0$:

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist vorerst die Definition des **2D-Dachproduktes** wichtig.

$$a \wedge b = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$y = 9 - 9 = 0$$

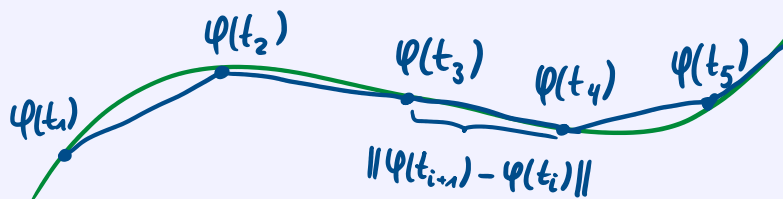
5 Höhere Analysis

5.1 Integration über Mannigfaltigkeiten

Haben Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kleinere Dimension $k < n$, dann verschwindet das Lebesgue-Maß. Allerdings kann man auch diesen Objekten sowas wie einen Flächeninhalt zuordnen. Voraussetzung dafür ist stets die Parametrisierbarkeit der Oberfläche, wir betrachten also Mannigfaltigkeiten. Der Trick ist, dass man die Oberfläche A durch eine Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow A$ auf eine Menge $\varphi^{-1}(A)$ zurückführt, deren Lebesgue-Maß nicht verschwindet.

Definition 5.1: Differenzierbare Kurven

Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \varphi(t)$ eine Kurve.



Die Länge der Kurve zwischen zwei Werten $t_1 < t_n$ kann approximiert werden durch

$$v_1(\varphi) = \sum_{i=1}^{n-1} \|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\|$$

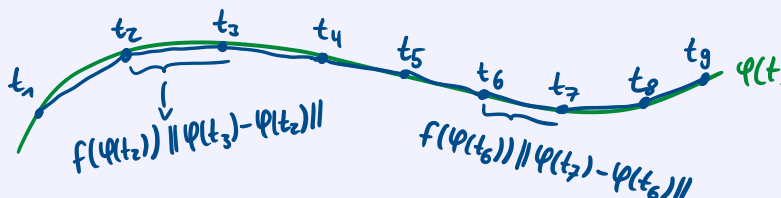
Schreibt man dies um, wählt gleich große Intervalle Δt und bildet den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$, erhält man:

$$v_1(\varphi) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\varphi(t_i + \Delta t) - \varphi(t_i)}{\Delta t} \right\| \Delta t \rightarrow \int_{t_1}^{t_n} \|\varphi'(t)\| dt$$

Dies lässt sich auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. wir haben also schonmal eine Formel gefunden, mit der wir die Fläche von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten ausrechnen können:

$$\int_M dS(x) = \int_{t_a}^{t_b} \|\varphi'(t)\| dt = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \dots + \varphi_n'(t)^2} dt$$

Um also eine Funktion $f(x)$ entlang eines Weges $\varphi(t)$ zu integrieren, muss jedes Teilstück mit einem Funktionswert gewichtet werden:



Daraus folgt das **Linienintegral**:

$$\int_M f(x) dS(x) \approx \sum_{i=1}^n f(\varphi(t_i)) \frac{\|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\|}{\Delta t} \Delta t = \int_{t_1}^{t_n} f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$$

Für allgemeine Mannigfaltigkeiten gilt die Formel:

$$\int_M f(x) dS(x) = \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} dt$$

wobei

$$g(t) = \det((\langle \partial_j \varphi(t), \partial_l \varphi(t) \rangle)_{1 \leq j, l \leq k})$$

die **Gramsche Determinante** ist.

Für eindimensionale Mannigfaltigkeiten gilt die nützliche Formel $g(t) = \langle \partial \varphi(t), \partial \varphi(t) \rangle = \|\varphi'(t)\|^2$.

Definition 5.2: Gramsche Determinante

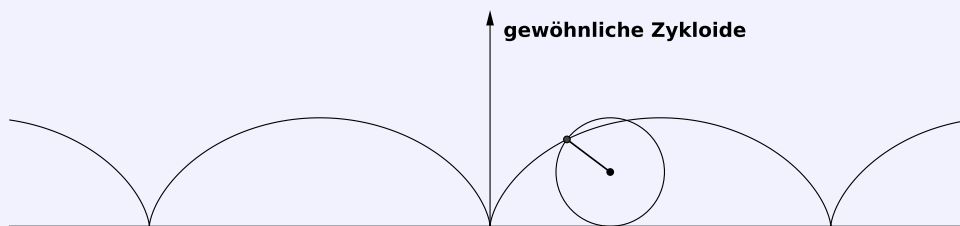
Die **Gramsche Determinante** ist die Determinante des Maßensors

$$g_{ij}(t) = \langle \partial_i \varphi(t), \partial_j \varphi(t) \rangle \quad (1 \leq i, j \leq k)$$

wobei φ eine Karte (also eine homöomorphe Immersion) einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist.

Beispiel 5.1: Länge der Zykloide

Wir sollen die Länge $v_1(C)$ der Zykloide $C = \{(t - \sin(t), 1 - \cos(t)) | t \in [0, 2\pi]\}$ berechnen. Die Zykloide ist die Bahn, die ein bestimmter Kreispunkt beim Abrollen des Einheitskreises auf der x-Achse beschreibt.



$$\int_C 1 dS(x) = \int_{\text{Parametrisierung}} 1 \cdot \varphi(t) \sqrt{g(t)} dt = \int_{\varphi} \sqrt{g(t)} dt$$

$$v_1(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g(t)} dt$$

Für die Parametrisierung wählen wir einfach $\varphi(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. Dann müssen wir $g(t) = \|\varphi'(t)\|^2$ berechnen.

$$\varphi'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$$

$$\begin{aligned} \|\varphi'(t)\| &= \sqrt{\langle \varphi', \varphi' \rangle} = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

Nun können wir die Länge ausrechnen:

$$v_1(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = 4 \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8$$

5.2 Differentialformen

Differentialformen bieten einen sehr abstrakten, aber auch sehr mächtigen Formalismus, um auf Mannigfaltigkeiten zu rechnen. Ich versuche hier die Idee anhand von Einsformen, auch Pfaffsche Formen genannt, klarzumachen, die für eindimensionale Mannigfaltigkeiten gelten und dann den Formalismus auf beliebige k -dimensionale Mannigfaltigkeiten zu erweitern.

Definition 5.3: Einsform

Die **Einsform** oder Pfaffsche Form ist eine Funktion von einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Sie ordnet jedem $x \in U$ eine lineare Abbildung zu.

Sei $n = 1$, dann gilt:

$$\omega_f : U \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad x \mapsto S_x(dx) = f'(x) \cdot dx$$

Der Wert x wird also auf eine Gerade mit der Steigung $f'(x)$ abgebildet, oder allgemein

$$\omega = k \cdot dx$$

Sei $n = 2$

$$\omega_f : U \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad x \mapsto \langle \text{grad} f(x), dx \rangle$$

Die allgemeine Einsform schreibt man also einfach als

$$\omega = a_1 \cdot dx_1 + a_2 \cdot dx_2$$

Für $n = k$ erhalten wir also die Einsform $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$

Das Integral einer Einsform $\omega = a \cdot dx$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\int_I \omega = \int_I a \cdot dx$$

Definition 5.4: k -Formen

Eine **k -Form** ist eine Differentialform der Gestalt:

$$\omega = a_1 \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k + c$$

wobei c maximal eine $(k-1)$ -Form ist und \wedge das Dachprodukt.

Definition 5.5: Integration über Mannigfaltigkeiten mit Differentialformen

Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ω eine k -Form auf U . Sei φ eine Karte von M . Dann gilt:

$$\int_M \omega = \int_{\varphi^{-1}(M)} \varphi^* \omega$$

$\varphi^* \omega$ ist der sogenannte Pullback oder auch Rücktransport. Er lautet:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ \Rightarrow \varphi^* \omega &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (f_{j_1 \dots j_k} \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_k} \end{aligned}$$

Definition 5.6: Vektorielle Flächenelement

Das **vektorielle Flächenelement** wird definiert durch:

$$d\vec{S} = (dS_1, \dots, dS_n)^T$$

$$\Rightarrow dS_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

diese Komponente wird ausgelassen

Satz 5.1: Integration über Hyperflächen

Sei M eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n mit dem Einheits-Normalen-Feld $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $f = (f_1, \dots, f_n)$ ein stetiges Vektorfeld. Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq M$ gilt:

$$\int_K \langle f, d\vec{S} \rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

Definition 5.7: Ableitung von Differentialformen

Sei ω eine k -Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Sind die Koeffizientenfunktionen $f_{j_1 \dots j_k}$ differenzierbar, dann definiert man die Ableitung einer Differentialform durch:

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

$$d\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{j_1 \dots j_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

Definition 5.8: Geschlossen- und Exaktheit

$$d\omega = 0 \quad \Rightarrow \omega \text{ ist geschlossen}$$

$$\exists \eta : d\eta = \omega \quad \Rightarrow \omega \text{ ist exakt}$$

Außerdem ist jede auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare exakte k -Form geschlossen.

Lemma 5.2: Lemma von Poincaré

Jede auf einer **sternförmigen** (d.h. es gibt ein Punkt $x_0 \in U$, sodass für jeden Punkt $x \in U$, die Verbindungsstrecke $\overline{xx_0} \in U$) offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ geschlossene k -Form ist exakt.

Definition 5.9: Alternierende k -Form

Eine alternierende k -Form auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine multilineare Abbildung:

$$\omega : V^k \rightarrow \mathbb{K}$$

die verschwindet, sobald wenigstens zwei Argumente gleich sind:

$$\exists i \neq j : v_i = v_j \Rightarrow v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j = 0$$

Der Raum aller k -Formen nennt man $\Lambda^k V^*$. Man setzt:

$$\Lambda^0 V^* = \mathbb{K} \quad \Lambda^1 V^* = V^*$$

Es gilt:

- $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$
- $\dim \Lambda^k V^* = \binom{\dim(V)}{k}$

Beispiel 5.2: Lineare Unabhängigkeit von Differentialformen

Gegeben ist der Vektorraum V mit der kanonischen 4D-Basis. Sind die Vektoren

$$x_1 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_4 + v_2 \wedge v_1 \wedge v_3$$

$$x_2 = v_2 \wedge v_4 \wedge v_3 - v_1 \wedge v_4 \wedge v_3$$

$$x_3 = v_2 \wedge v_1 \wedge v_4$$

linear unabhängig?

Dies können wir so überprüfen, indem wir die Indizes der Größe nach ordnen.

$$x_1 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_4 - v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

$$x_2 = v_1 \wedge v_3 \wedge v_4 - v_2 \wedge v_3 \wedge v_4$$

$$x_3 = -v_1 \wedge v_2 \wedge v_4$$

Wir merken schon sofort, dass $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ nur wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$, also sind die Vektoren linear unabhängig.

Beispiel 5.3: Rechnung mit dem Dachprodukt

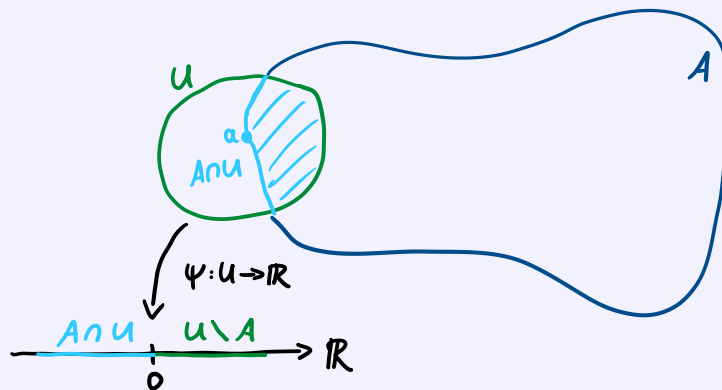
Sei V der Vektorraum mit einer Basis $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ des V^* gegeben. Berechne $((\varphi_1 - \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4))(v_1 - v_3, v_2 + v_4)$.

$$\begin{aligned} &= \det \begin{pmatrix} (\varphi_1 - \varphi_3)(v_1 - v_3) & (\varphi_1 - \varphi_3)(v_2 + v_4) \\ ((\varphi_2 + \varphi_4)(v_1 - v_3) & (\varphi_2 + \varphi_4)(v_2 + v_4)) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) - \varphi_3(v_1) - \varphi_1(v_3) + \varphi_3(v_3) & \varphi_1(v_2) - \varphi_3(v_2) - \varphi_3(v_4) + \varphi_1(v_4) \\ \varphi_2(v_1) - \varphi_2(v_3) + \varphi_4(v_1) - \varphi_4(v_3) & \varphi_2(v_2) + \varphi_4(v_2) + \varphi_2(v_4) + \varphi_4(v_4) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \end{aligned}$$

Definition 5.10: Glatter Rand

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann sagen wir, dass A einen glatten Rand hat, wenn $\forall a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert und eine stetig differenzierbare Funktion $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

- $A \cap U = \{x \in U \mid \Psi(x) \leq 0\}$
- $\text{grad}\Psi(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$

**Beispiel 5.4: Kugel**

Wir betrachten die Menge $\overline{B_R(0)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$. Außerdem betrachten wir die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - R$.

Sie ist stetig diff'bar und es gilt

$$\mathbb{R}^3 \cap \overline{B_R(0)} = \{\Psi(x, y, z) \leq 0\}$$

Außerdem finden wir immer Umgebungen U von Randpunkten, sodass $(0, 0, 0) \notin U$ und daher gilt:

$$\text{grad}\Psi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$$

Also hat $\overline{B_R(0)}$ einen glatten Rand.

Definition 5.11: Einheits-Normalenfeld

Wir betrachten ein Kompaktum A mit glattem Rand ∂A . Dann gilt für $\forall a \in \partial A, \exists \nu(a) \in \mathbb{R}^n$:

1. $\nu(a)$ steht senkrecht auf dem Tangentialraum $T_a(\partial A)$ der $(n - 1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit ∂A .
2. Der Vektor $\nu(a)$ ist ein Einheitsvektor $\|\nu(a)\| = 1$.
3. $\exists \epsilon > 0 : a + t\nu(a) \notin A \quad \forall t \in (0, \epsilon)$.

5.3 Wichtige Integralsätze der Vektoranalysis

Das meiste hier sollte euch schon aus der Physik 2 bekannt sein. Wir starten mit der Wiederholung von drei wichtigen Begriffen.

Definition 5.12: Rotation

Mithilfe des Vektorproduktes können wir nun durch $\text{rot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine weitere Abbildung für Vektorfelder $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren:

$$\text{rot} \mathbf{F} := \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

wobei wir $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$ als Abkürzung gewählt haben.

Beispiel 5.5: Rotation

Für die oben schon betrachtete, auf \mathbb{R}^3 erweiterte Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\text{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_y 0 - \partial_z x \\ \partial_z (-y) - \partial_x 0 \\ \partial_x x - \partial_y (-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Unabhängig davon, wo wir uns befinden, rotiert das Feld um die z -Achse entgegen^a des Uhrzeigersinnes.

^aalso mathematisch positiv

Definition 5.13: Divergenz

Wir nennen ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion partiell differenzierbar ist.

Die Abbildung $\text{div} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\mathbf{x}) \rightarrow \text{div}(F(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \partial_i F_i(\mathbf{x})$ nennen wir **Divergenz** von F .

Beispiel 5.6: Anschauung zur Divergenz

- Betrachte $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, so ist $\text{div} F = \partial_x(-y) + \partial_y(x) = 0$.
- Betrachte $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so ist $\text{div} F = 2$.

Die Divergenz im Punkt \mathbf{x} sagt uns, wie stark die Vektoren des Vektorfelds dort *auseinanderdriften*.

Definition 5.14: Gradient

Den $n \times 1$ -Vektor $\text{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}$, der zeilenweise die partiellen Ableitungen von f enthält, nennen wir **Gradienten** von f .

Beispiel 5.7: Gradient einer Funktion

Für die obige Funktion $g = xy^2 \cos(x)$ ist

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \cos(x) - xy^2 \sin(x) \\ 2xy \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Jetzt geht es mit der Vektoranalysis weiter.

Satz 5.3: Satz von Gauß

Sei A ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂A , $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, so gilt:

$$\int_A \operatorname{div} F(x) d^n x = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

Alternativ sei $\omega = \langle F, d\vec{s} \rangle$, dann gilt:

$$\begin{aligned} d\omega &= (\operatorname{div} F) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ \int_A \operatorname{div} F d^n x &= \int_A d\omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{s} \rangle = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle dS(x) \end{aligned}$$

Satz 5.4: Satz von Stokes

Sei $M \subseteq U$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit durch ein Einheitsnormalenfeld $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientiert ist. $A \subseteq M$ ist kompakt mit glattem Rand ∂A und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_{\partial A} \langle F, d\vec{s} \rangle = \int_A \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

Alternativ sei $d\omega = \langle \operatorname{rot} F, d\vec{s} \rangle$ und $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ ein positiv umlaufte Randweg (eine Parametrisierung), dann gilt:

$$\int_A \langle \operatorname{rot} F(x), d\vec{s} \rangle = \int_A d\omega = \int_{\partial_M A} \omega = \int_{[a, b]} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt$$

Beispiel 5.8: Anwendung des Satzes von Gauß

Berechne $\int \int_{\partial A} F \cdot d\vec{S}$ von $F = (3x + z^{77}, y^2 - \sin(x^2 z), xz + ye^{x^5})$, wobei ∂A die Oberfläche eines Würfels mit den Dimensionen $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$ und $0 \leq z \leq 2$ ist.

Die Berechnung dieses Integrals wäre sehr mühesam, aber zum Glück ist

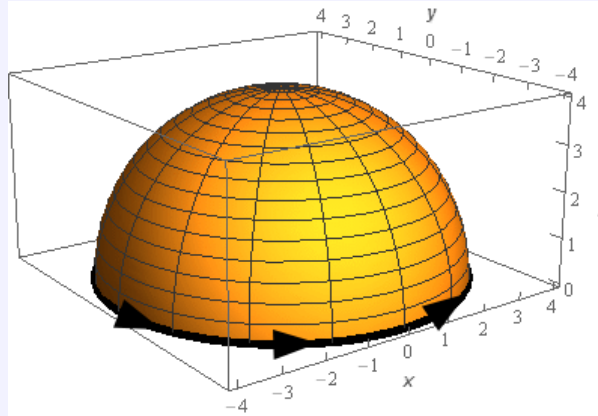
$$\operatorname{div} F = 3 + 2y + x$$

Wenden wir nun den Satz von Gauß an:

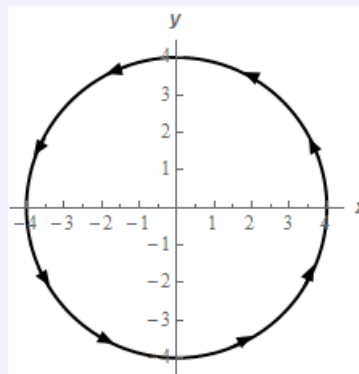
$$\begin{aligned} \int_{\partial A} F d\vec{S} &= \int \int \int_A \operatorname{div} F dV \\ &= \int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (3 + 2y + x) dz = 39 \end{aligned}$$

Beispiel 5.9: Anwendung des Satzes von Stokes

Benutze den Satz von Stokes um $\int \int_S \operatorname{rot} F \cdot d\vec{S}$ von $F = y\vec{i} - x\vec{j} + yx^3\vec{k}$ zu berechnen, wobei S die Spähre mit Radius 4 im Ursprung mit $z \geq 0$ ist.



Wir müssen nun eine parametrisierende Kurve finden. Es eignet sich der Weg am Rande der Kugel auf der Ebene $z = 0$.



$$\vec{r}(t) = (4 \cos(t), 4 \sin(t), 0) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Wir wenden nun den Satz von Stokes an.

$$\int \int_S \operatorname{rot} F \cdot d\vec{S} = \int F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$F(\vec{r}(t)) = (y, -x, yx^3) = (4 \sin(t), -4 \cos(t), 256 \sin(t) \cos^3(t))$$

$$\vec{r}'(t) = (-4 \sin(t), 4 \cos(t), 0)$$

$$F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -16 \sin^2(t) - 16 \cos^2(t) = -16$$

$$\int \int_S \operatorname{rot} F \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} -16 dt = -32\pi$$