Der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

soll mithilfe einer Transformation auf Polarkoordinaten bestimmt werden.

Problemanalyse und Strategie: Die Funktion e^{-x^2} ist zwar integrierbar, es ist jedoch nicht möglich, ihre Stammfunktion durch die uns bekannten Funktionen in einer expliziten Formel auszudrücken. Mittels einer Darstellung durch ein Gebietsintegral und der Verwendung von Polarkoordinaten kann aber der Wert des oben angegebenen Integrals bestimmt werden.

Lösung: Die Grundidee ist das Quadrat des Integrals zu betrachten. Dieses lässt sich als ein iteriertes Integral und damit als ein Gebietsintegral über den $\mathbb{R}^2$ schreiben,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y).\end{aligned}$$

Es bietet sich nun an, diese Gebietsintegral über eine Transformation auf Polarkoordinaten zu berechnen. Dazu setzen wir

$$B = \{(r,\varphi) \,|\, r > 0, \varphi \in (-\pi,\pi)\}$$

und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_B r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}(r,\varphi).$$

Durch die Transformation ist der zusätzliche Faktor r ins Spiel gekommen. Er bewirkt, dass wir das Integral nun leicht als iteriertes Integral bestimmen können,

$$\begin{aligned}\int_B r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}(r,\varphi) &= \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Kommentar Dies ist nur eine von vielen Möglichkeiten zur Bestimmung des Werts dieses Integrals. Anwendung findet das Integral in der Wahrscheinlichkeitstheorie im Zusammenhang mit der Normalverteilung (siehe Abschn. 39.3).