Exercices

Luxformel

L'intégrale au sens de Riemann

6.1. Fonctions d'intégrale nulle

1. Donner un exemple d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ intégrable, non identiquement nulle mais d'intégrale nulle.
2. Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est continue et non identiquement nulle, alors son intégrale est strictement positive.

6.2. Valeurs particulières et intégrales

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $]0, 1[$.
2. Montrer que si $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, alors f a un point fixe sur $]0, 1[$.

6.3. Une fonction intégrable non continue

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sin(1/t)$ si $t > 0$ et par $f(0) = 0$.

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Montrer que pour tout $a \in]0, 1]$, f est intégrable sur $[a, 1]$.
3. En déduire que f est intégrable sur $[0, 1]$.

6.4. Produits de fonctions

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ intégrable, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que
$$m \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \int_a^b f(t)dt.$$
2. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c) \int_a^b f(t)dt.$$

6.5. Intégrale de t^2 comme somme de Riemann

1. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n > 0$ entier,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer

$$\int_0^1 t^2 dt$$

en la considérant comme une limite de sommes de Riemann.

6.6. Sommes de Riemann

Calculer les limites des suites dont le terme général est donné ci-dessous, en les considérant comme des sommes de Riemann.

1. $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1+2}{n} + \cdots + \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.
2. $w_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$.
3. $u_n = \frac{n^3+n^2+n+\cdots+n^{n+2}}{n^4}$.
4. $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(k\pi/n)$.

6.7. Limites et sommes de Riemann

Calculer les limites des suites de terme général :

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
2. $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
3. $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
4. $d_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$
5. $e_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$