GRAVITATION

Keplersche Gesetze

1. Keplersche Gesetz:

   Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersche Gesetz:

   Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Keplersche Gesetz:

   Der Quadrat der Umlaufzeit T eines Planeten ist proportional zum Kubus der groβen Bahnhalbachse a der Umlaufbahn.

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = konstant$$

Newtons Gravitationsgesetz

Zwei punktförmige Kärper A und B der Massen m_A und m_B, die sich in der Entfernung r voneinander befinden, ziehen sich gegenseitig an. Die vektorielle schreibweise der Anziehungskraft ist:

$$\overrightarrow{F_{A\,auf\,B}} = -\overrightarrow{F_{B\,auf\,A}} = -G \cdot \frac{m_A m_B}{r^2}$$

$$\overrightarrow{F_{A\,auf\,B}},\ Kraft\ von\ A\ auf\ B$$

$$\overrightarrow{F_{B\,auf\,A}},\ Kraft\ von\ B\ auf\ A$$

$$G,\ ist\ die\ Gravitationskonstante$$

$$G = 6,67390 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Siehe: Naturkonstanten.

Herleitung

Es wird vereinfachend angenommen:

- Planeten bewegen sich auf Kreisbahnen
- Auf diesen Kreisbahnen bewegen sich die Planeten mit gleich bleibender Geschwindigkeit

Ein Planet der Masse m bewege sich mit der Bahngeschwindigkeit v auf einem Kreis um die Sonne mit der Masse M. Auf ihn wirkt die Sonne mit der Zentripetalkraft:

$$\begin{aligned} F_z &= m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \\ &= \frac{4\pi^2}{C \cdot r^3} \cdot m \cdot r \\ &= \frac{4\pi^2}{C} \cdot \frac{m}{r^2} \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt:
Die Gravitationskraft ist direkt proportional zur Masse m des Planeten und indirekt proportional zum Quadrat seines Abstandes von der Sonne r.

Es folgt:

$$F_1 \sim \frac{m}{r^2} \ (1)$$

und

$$F_2 \sim \frac{M}{r^2}\ (1)$$

Nach dem Wechselwirkungsprinzip übt aber auch der umlaufende Körper auf den Zentralkörper eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kraft F_2 aus. Somit gilt: $Fi = F2$ und die beiden Proportionalitäten lassen sich vereinen zu:

$$F \sim \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Unter Einführung einer Proportionalitätskonstante k ergibt sich:

$$F = k\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Die Proportionalitätskonstante k ist jedoch in diesem Fall die Gravitationskonstante G.

Es folgt:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Formel

Beträge:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Vektoriell:

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \overrightarrow{r_0}$$

Gravitationsfeld

Definition

Ein Gravitationsfeld ist eine Region des Raums, wo eine Masse in einer Gravitationskraft unterliegt.

Bahngeschwindigkeit eines Satelliten

Herleitung

Es gilt:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_{Grav}} = m \cdot \overrightarrow{a} = m \cdot \overrightarrow{a_{zp}}$$

Da nur eine Kraft am Satelliten angreift und diese Kraftrichtung bekannt ist, kann das Gesetz in skalarer Form geschrieben werden.

$$F_{Grav} = m \cdot a_{zp}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot \frac{M}{r} = v^2$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Der Satellit bewegt sich in Höhe h über dem Boden eines Himmelskörpers. Mit einbeziehung deren Radiuses R erhalten wir: $r = R + h$

Einsetzen:

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}}$$

Formel

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}}$$

Periodendauer eines Satelliten

Herleitung

Da die Bahngeschwindigkeit v der Quotient aus Kreisumfang und Umlaufzeit T entspricht.

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \frac{r \cdot \sqrt{r}}{\sqrt{G \cdot M}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{G \cdot M}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot M}}$$

Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot M}}$$

Geostationäre Satellit

Ein geostationärer Satellit ist ein künstlicher Erdsatellit der sich auf einer Kreisbahn über dem Äquator befindet. Die Höhe des Satelliten über dem Äquator wird so gewählt, dass der Satellit der Erddrehung folgt. Dies ist dann der Fall, wenn die Umlaufzeit des Satelliten und die Umlaufdauer der Erde gleich groß sind.

Es gilt dann:

$$T = 23h + 56min + 4,0989s = 86\ 164,098\ 9s$$

Man nennt diese Periodendauer siedrischer Tag.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{G \cdot M}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}}$$

$$R + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}} - R$$