INTÉGRATION

Notation

Définition

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre qui exprime l'aire, en unités d'aire notée: u.a., du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note:

$$\int_a^b f\,(x)dx = A(\mathscr{D})$$

Remarques

1. Dans la notation $\int_a^b f\,(x)dx$
   - a et b sont les bornes de l 'intégrale
   - la variable x est dite « muette », autrement dit, elle n'intervient pas dans le résultat et on peut noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

2. $\int_a^b f(x)dx$ se lit «somme de a à b de $f(x)dx$» ou «intégrale de a à b de $f(x)dx$»

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. La fonction Φ définie sur $[a;b]$ par

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$.

Primitives d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit Φ une primitive de f sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme:

$$F(x) = \Phi + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$

Conséquences

1. Calcul de l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur $[a; b]$

   Nous savons que la fonction Φ définie par

   $$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   est une primitive de f sur $[a; b]$.

   On peut calculer l'intégrale $\int_b^a f(t)dt$, si on connaît une primitive quelconque F de f.

   En effet, il existe une constante C telle que pour tout $x \in [a; b] : F(x) = \Phi(x) + C$

   Ansi:

$$F(a) = \Phi(a) + C$$
$$\Leftrightarrow F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$$
$$\Leftrightarrow F(a) = 0 + C$$
$$\Leftrightarrow F(a) = C$$

De plus:

$$F(a) = \Phi(b) + C$$
$$\Leftrightarrow \Phi(b) = F(b) - C$$
$$\Leftrightarrow \Phi(b) = F(b) - F(a)$$

Donc:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

2. Primitive avec condition initiale

   Si f admet des primitives sur I, alors pour tout nombre x_0 de I et tout nombre y_0, il existe une primitive et une seule F de f qui vérifie la condition initiale $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Calculs de primitives

Tableau

Voici le tableau des primitives de fonctions.

Théorème

Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I et si k est un nombre réel, alors

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I
2. kF est une primitive de kf sur I.

Intégrale d'une fonction continue

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et a et b deux réels quelconques de I.

L'intégrale de f entre a et b est le nombre :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient $a, b \in I$:

1. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
2. $$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Relation de Chasles

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Théorème de positivité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$:

1. Si f est positive sur I, alors:

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

2. Si f est négative sur I, alors:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$$

Théorème d'ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$. Si $f \leqslant g$ sur I, alors:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et $a, b \in I$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration

$\forall x \in I$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\Leftrightarrow u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

donc

$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b [(u(x)v(x))' - u'(x)v(x)]dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b [u(x)v(x)]'dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Calcul d'aires

Définition:

f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$. On appelle intégrale de f sur $[a; b]$ l'opposé de l'aire, en unités d'aire notée : u.a., du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note:

$$\int_a^b f(x)dx = -A(\mathscr{D})$$

Théorème

Si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[a; b]$, alors du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a; b]$ est donnée par:

$$A(\mathscr{D}) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$