

INTÉGRALES IMPROPRES

Fonction non bornées sur un intervalle borné

Définition

Soit a, b tels que $[a, b[\subset I$. Supposons que f est intégrable sur tous les intervalles de la forme $[a, x]$, pour $x \in [a, b[$. Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre de f entre a et b est convergente, et on note

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale impropre de f entre a et b est divergente.

Définition

Si $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent toutes deux, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge, et on note

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ diverge.

Fonctions sur un intervalle non borné

Définition

Soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tous les intervalles de la forme $[a, x]$ pour $x > 0$. Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty f(t) dt$$

est convergente, et on note

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Définition

Si $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ et $\int_c^\infty f(t) dt$ convergent toutes deux, on dit que l'intégrale de f sur \mathbb{R} converge, et on note

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt = \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^\infty f(t) dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale de f sur \mathbb{R} diverge.

Exemples importants

Théorème

L'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha < 1$ et divergente pour $\alpha \geq 1$.

Démonstration

Il suffit de prendre une primitive de $t^{-\alpha}$. Pour $\alpha \neq 1$ cette primitive est $t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, qui tend vers 0 quand $t \rightarrow 0^+$ pour $\alpha < 1$, et vers $-\infty$ quand $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$ la primitive est $\log(t)$, qui tend vers $-\infty$ quand $t \rightarrow 0^+$.

On peut bien sûr remplacer dans cet énoncé la borne supérieure d'intégration 1 par n'importe quel nombre dans $]0, \infty[$. De même on peut étudier la convergence de l'intégrale en a de $1/(t-a)^\alpha$, le résultat est le même.

On a une situation complémentaire pour la convergence de l'intégrale sur $[0, \infty[$.

□

Théorème

L'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$.

Démonstration

Comme pour le théorème précédent, il suffit de considérer une primitive de $t \rightarrow t^{-\alpha}$.

□

Critères de convergence pour les fonctions positives

Théorème

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, intégrable sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$. Alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est bornée.

Démonstration

Comme f est à valeurs positives, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante, donc elle admet une limite en b si et seulement si elle est bornée.

□

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux fonctions intégrables sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$. Supposons que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$. Alors :

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge, il en est de même pour f , et de plus

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

- si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, il en est de même pour g .

Démonstration

On a pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$$

Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est bornée, donc il en est de même pour f et donc $\int_a^b f(t)dt$ converge. On a pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$$

et en passant à la limite $x \rightarrow b^-$ on obtient l'inégalité entre les intégrales de a à b .

Le second énoncé est la contraposée du premier, et lui est donc équivalent.

On a un résultat analogue pour les intervalles de la forme $]a, b]$, avec a fini ou $a = -\infty$.

On peut donner tout de suite une application pour les fonctions de la forme $\log(t)/t^\alpha$.

Théorème

Soit $\alpha > 0$. Alors :

- $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- $\int_1^\infty \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Pour le premier point, la question de la convergence se pose seulement en 0.

Supposons d'abord que $\alpha < 1$, et soit $\beta \in]\alpha, 1[$. On a vu plus haut que comme $\beta < 1$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$ converge. De plus, $\lim_{t \rightarrow 0} \log(t)t^{\beta-\alpha} = 0$. On en déduit qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq M$, $\frac{|\log(t)|}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\beta} \times |\log(t)t^{\beta-\alpha}| \leq \frac{1}{t^\beta}$. Le théorème 3.2 assure alors que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente.

De même, si $\alpha > 1$, on prend $\beta \in]1, \alpha[$. On a vu que $\int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$ diverge, et $\lim_{t \rightarrow 0} \log(t)t^{\beta-\alpha} = \infty$. On en déduit par le même raisonnement que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ est divergente.

Pour $\alpha = 1$, on fait une intégration par partie : pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\int_x^1 \frac{\log(t)}{t} dt = [\log(t)^2]_x^1 - \int_x^1 \frac{\log(t)}{t} dt$$

si bien que

$$\int_x \frac{\log(t)}{t} dt = \frac{1}{2} [\log(t)^2]_x^1 = -\frac{\log(x)^2}{2}$$

Il suit que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t} dt$ diverge.

□

Absolue convergence

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$.

Supposons que $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente. Alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Démonstration

Pour tout $t \in [a, b[$, on pose

$$f_+(t) = \max(f(t), 0), \quad f_-(t) = \max(-f(t), 0)$$

On note que f_+ et f_- sont à valeurs positives, que $f = f_+ - f_-$ et que $|f| = f_+ + f_-$. Comme $\int_a^b |f(t)| dt$ converge et que $f_+ \leq |f|$, $\int_a^b f_+(t) dt$ converge, et de même pour f_- . Comme $f = f_+ - f_-$, on montre alors en se ramenant à la définition de la convergence (par la limite quand $x \rightarrow b$ de l'intégrale entre a et x) que $\int_a^b f(t) dt$ converge.

□

Définition

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Équivalences

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux fonctions à valeurs positives, intégrable sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$, telles que $f \sim g$ en b . Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Démonstration

Par définition de l'équivalence en b , appliquée pour $\epsilon = 1/2$, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $t \geq c$ on a

$$\frac{f(t)}{2} \leq g(t) \leq \frac{3f(t)}{2}$$

Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Alors $\int_a^b 3f(t)/2dt$ converge et, d'après le théorème 3.2, l'intégrale de g sur $[c, b[$ converge, donc l'intégrale de g sur $[a, b[$ converge.

La réciproque se montre de la même manière.

□