# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

## Règles de calcul

***Définition***

À tout couple des points $(A; B)$ de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dans un plan qui convient $A$ et $B$, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme $A$ en $B$. Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.

***Définition***

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que $ABCD$ est un parallélogramme éventuellement aplati.

Dans ce cas, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont représentants d'un même vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Pour tout point $E$ de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{v}$, il existe un unique point $F$ tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{v}$.

## Relation de Chasles

***Définition***

Pour tous points $A, B, C$ de l'espace

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

***Propriété***

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nul et soient $k$ et $l$ deux nombres réels. On a:

1. $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$

3. $(k+l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$

4. $k(l\overrightarrow{u}) = (kl)\overrightarrow{u}$

# Vecteurs colinéaires, parallélisme, alignement

***Définition***

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si, les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles donc s'ils ont la même pente.

***Remarque***

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

***Théorème***

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel $k$ tel que:

$$\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$$

  En effet, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont alors la même direction.

- Soient $A, B, C$ trois points distincts de l'espace $A, B, C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc qu'il existe un nombre réel $k$ tel que:

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$$

# Centre de gravité

***Définition***

On appelle centre de gravité un triangle $ABC$ le point $G$ tel que:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

***Propriété***

Soient un triangle $ABC$, $A'$, $B'$ et $C'$ les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et $G$ le centre de gravité, alors:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

# Plans de l'espace, vecteurs coplanaires

***Règle***

Par trois points $A$, $B$ et $C$, non alignés, passe un plan et un seul.

Ce plan est noté $(ABC)$. On dit que trois points non alignes déterminent un plan.

***Conséquences***

- Une droite $d$ et un point extérieur à $d$ déterminent un plan.
- Deux droites sécantes déterminent un plan.

***Règle***

Si $A$ et $B$ sont deux points distincts d'un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points de la droite $(AB)$ appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

***Théorème***

$A$, $B$ et $C$ sont trois points non alignés de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan $(ABC)$. Un point $M$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe des nombres réels $x$ et $y$ tels que:

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

***Démonstration***

Dans le plan $\mathscr{P}$, comme les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan $\mathscr{P}$. Donc pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{AM}$ se décompose en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ainsi il existe des nombres réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

Réciproquement, on considère le point $N$ du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. Alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ et $M = N$. Le point $M$ appartient au plan $\mathscr{P}$.

***Vocabulaire***

En générale, un plan est défini par un point $A$ et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On parle alors du plan $\mathscr{P}(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ et on dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs de ce plan.

***Propriété***

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèls.

***Définition***

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires signifie que pour un point $O$ quelconque de l'espace, les points $O$, $A$, $B$ et $C$ définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont dans le même plan.

***Théorème ****

$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels $a$ et $b$ tels que:

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

***Démonstration***

Pour un point $O$ quelconque de l'espace, $A$, $B$, $C$ sont définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan $(OAB)$. Par définition $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires signifie que $C$ appartient au plan $(OAB)$. D'après le théorème *, il existe des nombres $a$ et $b$ tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$

***Conséquences***

1. Dire que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
2. Dire que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
3. Dire que les plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

# Repère dans l'espace

***Définition***

Un repère de l'espace noté $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ est formé d'un point $O$ et d'un triplet $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires. Le triplet $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ est appelé base de vecteurs de l'espace

***Théorème***

$(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace. Pour tout point $M$ de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels $(x;y;z)$ tels que:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

***Démonstration***

Soit $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ une base de l'espace, $O$ est un point de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan défini par $O$ et les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Soit $M'$ le point d'intersection de la droite passant par $M$ de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$ et le plan $\mathscr{P}$. Comme $M' \in \mathscr{P}$ il existe deux nombres réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires, donc il existe un nombre réel $z$ tel que $\overrightarrow{MM'} = z \cdot \overrightarrow{k}$. D'où,

$$ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM^{\prime} + \overrightarrow{MM} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k} $$

On admet l'unicité de celle écriture.

***Vocabulaire***

$(x;y;z)$ sont des coordonnées de $M$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$. $x$ est l'abscisse, $y$ est l'ordonnée et $z$ la cote de $M$ dans ce repère.

$(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ est un repère. Au vecteur $\overrightarrow{u}$ associons $M$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. Par définition, les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées $(x;y;z)$ de $M$. Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit de manière unique:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xi} + \overrightarrow{yj} + \overrightarrow{zk}$$

# Paramétrage d'une droite

***Théorème***

La droite $d$ passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que:

$$(S) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

***Démonstration***

$$M \in d(A; \overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} | \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} | \begin{cases} x - x_0 & = t \cdot a \\ y - y_0 & = t \cdot b \\ z - z_0 & = t \cdot c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} | \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}$$

Le système $(S)$ est appelé représentation paramétrique de la droite $d(A; \overrightarrow{u})$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ t est le paramètre.

À chaque valuer de $t$, on associe un et un seul point $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Réciproquement, à chaque point $M$ de $d$ correspond un seul nombre $t$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$

***Conséquences***

Lorsqu'une représentation paramétrique d'une droite $d$ est écrite sous la forme $(S)$, alors on peut affirmer que $d$ passe par $A(x_0; y_0; z_0)$ et que $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ est un vecteur directeur de $d$.

# <u>Position relative, intersection de deux droites</u>

***Théorie***

Soient $d$ la droite passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deux droites de l'espace de représentation paramétriques respectives:

$$d : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

et

$$d : \begin{cases} x' = x'_0 + s \cdot a' \\ y' = y'_0 + s \cdot b' \\ z' = z'_0 + s \cdot c' \end{cases} \quad , s \in \mathbb{R}$$

Ces deux droites $d$ et $d'$ peuvent être:

- <u>strictement parallèles:</u> $d \cap d' = \emptyset$. ($d$ et $d'$ sont coplanaires)
- <u>confondues:</u> $d = d'$
- <u>sécantes:</u> $d \cap d' = \{I\}$ (deux droites sécantes sont coplanaires, elles appartiennent à un même plan)
- <u>non coplanaires:</u> $d \cap d' = \emptyset$ (on dit aussi que $d$ et $d'$ sont gauches)

***Conclusions***

| $d$ *et* $d'$ *sont* ... | *Comment le montrer* |
|---|---|
| strictement parallèles ou coplanaires | $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires $A \in d$, mais $A \notin d'$ (ou $A' \in d'$, mais $A' \notin d$; ou $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{u}$ non colinéaires) |
| confondues | $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires $A \notin d'$ (ou $A' \in d'$ et $A' \in d$: ou $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{u}$ sont coplanaires) |
| sécantes | il existe un unique couple $(s;t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(S)$: $\begin{cases} x_0 + at = x'_0 + s \cdot a's \\ y_0 + bt = y'_0 + s \cdot b's \\ z_0 + ct = z'_0 + s \cdot c's \end{cases}$ |
| non coplanaires | $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires il n'existe pas de couple $(s;t) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie $(S)$ |

# Produit scalaire dans l'espace

***Définition***

Dans l'espace une unité de longuer étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}[\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2]$$

Deux vectuers de l'espace sont nécessairement coplanaires. En effet, quels que soient les trois points $A, B, C$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les points $A, B, C$.

L'unité de longuer dans le plan étant celle choisie dans l'espace, la définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de l'espace coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan $\mathscr{P}$.

Il en résulte que les expression du produit scalaire établies dans le plan sont encore valables dans l'espace.

- Si $\alpha$ est la mesure de l'angle géométrique associé à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\alpha)$$

Conséquences: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \| \overrightarrow{AB} \|^2 = AB^2$ (1)