PRIMITIVES

Définition et propriétés principales

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Une primitive de f est une fonction de la forme

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt + C$$

où $c \in [a, b]$ et C est une constante.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors toute primitive de f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration

Comme f est intégrable, elle est bornée, et il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq M$. Soit F une primitive de f. Si $x, y \in [a, b]$ alors

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M|y - x|$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, si on pose $\alpha = \epsilon / M$, on voit que si $|y - x| \leq \alpha$, alors $|F(y) - F(x)| \leq \epsilon$, et F est donc uniformément continue.

$\square$

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors toute primitive F de f est dérivable sur $[a, b]$, de dérivée égale à f.

Démonstration

Soit $c \in [a, b]$, on va montrer que F est dérivable en c de dérivée $f(c)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{x \to c, x \neq c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

Prenons par exemple $x > c$. Comme f est continue, il existe $y_x \in [c, x]$ tel que

$$\int_c^x f(t)dt = (x - c)f(y_x)$$

Lorsque $x \to c, y_x \to c$, et comme f est continue, $f(y_x) \to f(c)$. On en déduit que

$$\lim_{x \to c, x \neq c} \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)dt = f(c)$$

ce qui est le résultat annoncé.

□

Corollaires

Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

- il existe des primitives de f sur I
- si $a \in I$, la fonction

  $$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

  est l'unique primitive de f qui s'annule en a
- si F est n'importe quelle primitive de f sur I, on a pour tout $a, x \in I$

  $$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Démonstration

Pour le premier point, il suffit de remarquer que pour tout élément $a \in I$, la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I. Cette primitive s'annule en a. Si F est une autre primitive de f qui s'annule aussi en a, on doit avoir $(F - F_a)'(t) = 0$ pour tout $t \in I$, si bien que $F - F_a$ est constante sur I, et la valeur de cette constante doit être nulle puisque $(F - F_a)(a) = 0 - 0 = 0$. Finalement, le troisième point suit du fait que la différence entre deux primitives de f est une fonction dont la dérivée est nulle, et deux primitives de f diffèrent donc par une constante.

□

Intégration par parties

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Démonstration

On sait que $(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant, on voit que

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (u(t)v(t))'dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt$$

et le résultat s'en déduit.

$\square$

Changement de variables

Théorèmes

- oient I et J deux intervalles non réduits à un point, et soit $\phi : J \to I$ une fonction de classe C^1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient $a, b \in J$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- Si maintenant $\phi : J \to I$ est une bijection, et si $a', b' \in I$, alors

$$\int_{a'}^{b'} f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a')}^{\phi^{-1}(b')} (f \circ \phi)(t)\phi'(t)dt$$

Démonstration

Le second point est simplement une reformulation du premier dans le cas particulier où ϕ est une bijection. Quant au premier point, il suit simplement du fait que $(F \circ \phi)' = \phi'(F' \circ \phi)$, appliqué lorsque F est une primitive de f.

Dans la pratique, on se passe souvent de la fonction ϕ, et on note simplement $x = \phi(t)$, où ϕ est la fonction de changement de variable. On a alors formellement $dx = \phi'(t)dt$.

Intégration des développements limités

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et soit $a, b \in I$. On a alors la formule exacte suivante :

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots \\ + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt \end{aligned}$$

Démonstration

On fait la preuve par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la formule s'écrit simplement

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

et on a vu plus haut que c'est bien le cas car f est une primitive de f'.

On suppose maintenant le résultat vrai pour n, et on le montre pour $n+1$ par une intégration par parties sur le dernier terme, qui montre bien que :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n(n-1)!} f^{(n)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

□

Corollaire

Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, on a

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (b-a)^{n-1}\epsilon(b)$$

avec $\lim_{t\to a} \epsilon(t) = 0$.

Démonstration

On a vu dans le chapitre précédent que comme la fonction $t \mapsto \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)$ est continue, il existe un $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = (b-a)\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c)$$

Le résultat s'en déduit.

□

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en a le développement limité

$$\begin{aligned}f(t) = a_0 + a_1(t-a) + a_2(t-a)^2 + \cdots \\ +a_n(t-a)^n + (t-a)^n\epsilon(t)\end{aligned}$$

avec $\lim_{t\to a} \epsilon(t) = 0$. Alors toute primitive F de f admet en a le développement limité :

$$F(t) = F(a) + a_0(t-a) + a_1\frac{(t-a)^2}{2} + a_2\frac{(t-a)^3}{3} + \cdots$$

$$+a_n\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}+(t-a)^{n+1}\epsilon(t)$$

avec $\lim_{t\to a}\epsilon(t)=0$.

Définition

Une fraction rationnelle est une fonction de la forme

$$f(t)=\frac{P(t)}{Q(t)},$$

où P et Q sont des polynômes. f est alors définie en-dehors des zéros de Q, qu'on appelle pôles de f.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Théorème de division euclidienne pour les polynômes

Soit $A,B\in\mathbb{R}[X]$. Il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathbb{R}[X]^2$, avec $\deg(R)<\deg(B)$, tel que $A=BQ+R$.

Théorème de décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $B\in\mathbb{C}[X]$ unitaire. Il existe des familles

- $(a_1,a_2,\cdots,a_p)\in\mathbb{C}^p$
- $(n_1,n_2,\cdots,n_p)\in(\mathbb{N}_{>0})^p$

telles que

$$B=\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{n_i}$$

avec les a_i deux à deux distincts. De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.

Théorème de décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $B\in\mathbb{R}[X]$ unitaire. Il existe des familles

- $(a_1,a_2,\cdots,a_p)\in\mathbb{R}^p$
- $(n_1,n_2,\cdots,n_p)\in(\mathbb{N}_{>0})^p$
- $(b_1,b_2,\cdots,b_q)\in\mathbb{R}^q$
- $(c_1,c_2,\cdots,c_q)\in(\mathbb{R}_{>0})^q$

- $(m_1, m_2, \cdots, m_q) \in (\mathbb{N}_{>0})^q$

telles que

$$B = \left(\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{n_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{q}((X-b_j)^2+c_j^2)^{m_j}\right)$$

avec les a_i deux à deux distincts et les (b_j, c_j) deux à deux distincts. De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.

Théorème de Bezout

Soient $B_1, B_2 \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes sans élément irréductible commun, et soit $A \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(A) < \deg(B_1) + \deg(B_2)$. Il existe alors un unique couple $(A_1, A_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ avec $\deg(A_1) < \deg(B_1)$ et $\deg(A_2) < \deg(B_2)$ tel que $A = A_1B_2 + A_2B_1$.

Théorème

Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg(A) < \deg(B)$. Écrivons la décomposition de B en éléments irréductibles, sous la forme :

$$B = \left(\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{n_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{q}((X-b_j)^2+c_j^2)^{m_j}\right)$$

avec les n_i et les m_j strictement positifs et les facteurs deux à deux disjoints.
Il existe des familles

- $(d_{1,1}, d_{1,2}, \ldots, d_{1,n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}, (d_{2,1}, d_{2,2}, \ldots, d_{2,n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}, \ldots, (d_{p,1}, d_{p,2}, \ldots, d_{p,n_p}) \in \mathbb{R}^{n_p}$
- $(e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{1,m_1}) \in \mathbb{R}^{m_1}, (e_{2,1}, e_{2,2}, \ldots, e_{2,m_2}) \in \mathbb{R}^{m_2}, \ldots, (e_{q,1}, e_{q,2}, \ldots, e_{q,m_q}) \in \mathbb{R}^{m_q}$,
- $(f_{1,1}, f_{1,2}, \ldots, f_{1,m_1}) \in (\mathbb{R}_{>0})^{m_1}, (f_{2,1}, f_{2,2}, \ldots, f_{2,m_2}) \in (\mathbb{R}_{>0})^{m_2}, \ldots,$
- $(f_{q,1}, f_{q,2}, \ldots, f_{q,m_q}) \in (\mathbb{R}_{>0})^{m_q}$,

telles que

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n_i}\frac{d_{i,k}}{(X-a_i)^k}\right) + \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{m_j}\frac{e_{j,l}X+f_{j,l}}{((X-b_j)^2+c_j^2)^l}\right)$$

De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.

Démonstration

Pour montrer ce théorème, plusieurs étapes sont nécessaires, toutes assez simples.

On décompose d'abord $B = B_1 B_2$, où B_1 est le produit des éléments irréductibles de degré 1 et B_2 le produit des éléments irréductibles de degré 2.

On peut alors appliquer le théorème 6.6, et écrire $A = A_2 B_1 + A_1 B_2$, où $\deg(A_1) < \deg(B_1)$ et $\deg(A_2) < \deg(B_2)$. On en déduit que

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}$$

où dans les deux fractions le dénominateur est de degré plus grand que le numérateur.

Pour la première fraction, on écrit

$$B_1 = (X - a_1)^{n_1} \left(\prod_{i=2}^{p} (X - a_i)^{n_i} \right)$$

et on applique à nouveau le théorème de Bezout pour obtenir que

$$A_1 = A_{12}(X - a_1)^{n_1} + A_{11} \left(\prod_{i=2}^{p} (X - a_i)^{n_i} \right)$$

avec $\deg(A_{12}) < \sum_{i=2}^{p} n_i$ et $\deg(A_{11}) < n_1$.

Ainsi,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_{11}}{(X - a_1)^{n_1}} + \frac{A_{12}}{\prod_{i=2}^{p} (X - a_i)^{n_i}}$$

et $\deg(A_{11}) < n_1$. On peut donc écrire

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{n_1} d_{1,k} (X - a_1)^{n_1 - k}$$

et on obtient finalement que

$$\frac{A_{11}}{(X - a_1)^{n_1}} = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{d_{1,k}}{(X - a_1)^k}$$

En répétant le même argument avec a_2, a_3, et jusqu'à a_p, on obtient finalement que

$$\frac{A_1}{B_1} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{d_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right)$$

Pour ce qui est du second terme, on note que

$$B_2 = \prod_{j=1}^{q} ((X - b_j)^2 + c_j^2)^{m_j},$$

et on applique à nouveau le théorème de Bezout pour les polynômes pour obtenir que

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_{21}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}} + \frac{A_{22}}{\prod_{j=2}^q ((X-b_j)^2+c_j^2)^{m_j}}$$

avec $\deg(A_{21}) < 2m_1$ et $\deg(A_{22}) < 2\sum_{j=2}^q m_j$.

On considère d'abord le premier terme. On applique le théorème de Bezout pour les polynômes, qui indique qu'on peut écrire

$$A_{21} = A'((X-b_1)^2+c_1^2) + (e_{1,m_1}X + f_{1,m_1})$$

En divisant, on en déduit que

$$\frac{A_{21}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}} = \frac{A'}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1-1}} + \frac{e_{1,m_1}X+f_{1,m_1}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}}$$

avec $\deg(A') < 2m_1 - 2$.

On applique alors $m_1 - 1$ fois le même argument basé sur le théorème de Bézout aux autres termes, et on obtient que :

$$\frac{A_{21}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}} = \sum_{l=1}^{m_1} \frac{e_{1,l}X+f_{1,l}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^l}$$

En répétant le même argument pour les autres éléments irréductibles de B_2, on voit finalement que

$$\frac{A_2}{B_2} = \sum_{j=1}^q \left(\sum_{l=1}^{m_j} \frac{e_{j,l}X+f_{j,l}}{((X-b_j)^2+c_j^2)^l} \right)$$

En ajoutant la décomposition obtenue pour A_1/B_1, on conclut la preuve du théorème

$\square$

Décomposition en éléments irréductibles dans $\mathbb{C}$

Théorème

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$, avec $\deg(A) < \deg(B)$. Écrivons la décomposition de B en éléments irréductibles, sous la forme :

$$B = \prod_{i=1}^p (X-a_i)^{n_i},$$

avec n_i strictement positifs et les a_i deux à deux distincts. Il existe des familles $(d_{1,1}, d_{1,2}, \ldots, d_{1,n_1}) \in \mathbb{C}^{n_1}, (d_{2,1}, d_{2,2}, \ldots, d_{2,n_2}) \in \mathbb{C}^{n_2}, \ldots, (d_{p,1}, d_{p,2}, \ldots, d_{p,n_p}) \in \mathbb{C}^{n_p}$, telles que

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{d_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right).$$

De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.