INTÉGRALE DE RIEMANN

Fonctions en escalier

Définition

Une subdivision de $[a,b]$ est une famille finie $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ de points de $[a,b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Le nombre $\delta(\sigma) = \max_{i\in\{0,1,\cdots,n-1\}}(x_{i+1} - x_i)$ est appelé pas de la subdivision.

Définition

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ de [a,b] telle que f est constante sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. On dira alors que la subdivision σ est adaptée à f.

Intégrale des fonction en escalier

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, et pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ soit m_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Alors la somme

$$I(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

ne dépend pas du choix de la subdivision σ.

Démonstration

Si σ et σ' sont deux subdivisions de I adaptées à f, on peut construire une troisième subdivision σ'' obtenue en prenant tous les points de σ et de σ'. Comme la somme $I(f)$ ne change pas lorsqu'on ajoute des points où f est constante, on en déduit que $I(f)$ ne dépend pas de la subdivision.

$\square$

Définition

On dira que $I(f,\sigma)$ est l'intégrale de la fonction en escalier f sur l'intervalle I, et on notera, pour n'importe quelle subdivision adaptée σ :

$$I(f,\sigma) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Remarque

Si f est positive, son intégrale sur I est l'aire du domaine compris sous son graphe et au-dessus de l'axe Ox.

Propriété de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition

Soient f et g des fonctions en escalier sur un intervalle $I = [a,b]$, avec $a < b$. Alors :

1. $f+g$ est encore une fonction en escalier, et

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est une fonction en escalier, et

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

3. Si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

4. Pour tout $c \in]a,b[$,

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

5. Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Démonstration

On prend une subdivision σ qui est adaptée à la fois à f et à g, soit $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ et on note f_i et g_i les valeurs respectives de f et de g sur $]x_i, x_{i+1}[$. Pour le premier point on voit que $f+g$ est en escalier (et σ est adaptée à $f+g$) et par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(f_i+g_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f_i + \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)g_i$$

$$= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

Pour 3. , on prend à nouveau une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ adaptée à la fois à f et à g, et on note encore f_i et g_i les valeurs respectives de f et de g sur $]x_i, x_{i+1}[$. On remarque que $f_i \geq g_i$ pour tout i, si bien que

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f_i$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)g_i$$

$$= \int_a^b g(t)dt.$$

Le point 4. suit de la définition de l'intégrale, en prenant une subdivision adaptée à f pour laquelle c est un point de subdivision.

Enfin le point 5. suit aussi de la définition de l'intégrale, puisque changer la valeur d'une fonction en escalier en un point ne change pas son intégrale.

$\square$

Définition de l'intégrale au sens de Riemann

Définition

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si $I_m(f) = I_M(f)$. Dans ce cas, on note:

$$\int_a^b f(t)dt = I_m(f).$$

On utilisera la caractérisation suivante des fonctions intégrables.

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in e(f)$ et $h \in E(f)$ telles que:

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon.$$

Démonstration

Supposons d'abord que f est intégrable, et soit $I = \int_a^b f(t)dt$. Choisissons $\varepsilon > 0$. On sait que:

$$\sup_{g \in e(f)} \int_a^b g(t)dt = I,$$

et on en déduit qu'il existe une fonction $g \in e(f)$ telle que

$$I - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon/2.$$

De même, il existe $h \in E(f)$ telle que:

$$\int_a^b h(t)dt - I \leq \varepsilon/2.$$

On voit alors en ajoutant les deux inégalités que

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon.$$

Supposons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in e(f)$ et $h \in E(f)$ telles que:

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon.$$

On remarque que si $\bar{g} \in e(f)$, alors:

$$\int_a^b \bar{g}(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt,$$

car pour tout $t \in [a, b]$ on a $\bar{g}(t) \leq f(t) \leq h(t)$. On en déduit que:

$$\int_a^b g(t)dt \leq \sup_{\bar{g} \in E(f)} \int_a^b \bar{g}(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt.$$

Le même argument appliqué à h montre que:

$$\int_a^b g(t)dt \leq \inf_{h \in E(f)} \int_a^b h(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt.$$

Ainsi, comme

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \epsilon$$

on voit que:

$$\inf_{h\in E(f)}\int_a^b h(t)dt - \sup_{\bar{g}\in E(f)}\int_a^b \bar{g}(t)dt \leq \epsilon$$

Comme ceci s'applique pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que:

$$\inf_{h\in E(f)}\int_a^b h(t)dt = \sup_{\bar{g}\in E(f)}\int_a^b \bar{g}(t)dt$$

et donc f est intégrable.

$\square$

Intégrabilité des fonctions continues

Théorème

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $x, y \in [a, b]$, si $|y - x| \leq \alpha$, alors $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a < b$, elle est donc uniformément continue. Soit $\omega > 0$. On applique l'uniforme continuité de f avec la valeur $\omega' = \frac{\omega}{|b-a|}$, on trouve qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que :

$\forall x, y \in [a, b]$

$$|y - x| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \omega' = \frac{\omega}{|b - a|}$$

On prend maintenant une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout i, $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$, et on définit des fonctions $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :

Pour $t \in [x_i, x_{i+1}[$

$$g(t) = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f, \quad h(t) = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Par construction, $g \leq f \leq h$. On voit alors que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} f - \min_{[x_i, x_{i+1}]} f < \frac{\omega}{|b-a|}$$

et il suit par la définition des fonctions en escalier que:

$$\int_a^b h(t)\, dt - \int_a^b g(t)\, dt < \frac{\omega}{|b-a|} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \omega$$

Ainsi f est intégrable.

□

Corollaire

Toute fonction continue par morceaux est intégrable.

Démonstration

Si une fonction est continue par morceaux sur $[a, b]$, elle est intégrable sur chacun des intervalles où elle est continue, et donc intégrable sur $[a, b]$ d'après la définition de l'intégrabilité.

□

<u>Principales propriétés</u>

Propositions

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables, avec $a < b$. Alors :

- $f + g$ est encore intégrable, et

$$\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$$

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, θf est intégrable, et

$$\int_a^b (\theta f)(t)\, dt = \theta \int_a^b f(t)\, dt$$

- Si $f = g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

- Pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

- Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Proposition

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables, donc bornées. Alors la fonction produit fg est intégrable.

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable, $a < b$. Supposons qu'il existe des réels m, M tels que pour tout $t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M$. Alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

Démonstration

On note que la fonction constante égale à m est une fonction en escalier qui minore f, elle est donc dans $e(f)$ et donc, par définition de l'intégrale de f, son intégrale est plus petite que celle de f. On a donc:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt$$

De même, la fonction constante égale à M est une fonction en escalier qui majore f, elle est donc dans $E(f)$, et on a:

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$$

D'où:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

$\square$

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $a < b$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

Démonstration

Soient $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$. D'après la proposition précédente :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq M$$

Soient x_m et x_M des points de $[a,b]$ tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point c entre a et b tel que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

d'où le résultat.

$\square$

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable, $a < b$. Alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, et

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Démonstration

Soient $f^-(t) = \max(0, -f(t))$, $f^+(t) = \max(0, f(t))$. Alors f^- et f^+ sont à valeurs positives, $f = f^+ - f^-$, et $|f| = f^+ + f^-$. On dit que f^- et f^+ sont les parties négative et positive de f.

Choisissons $\omega > 0$. Soient g et h des fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $g \leq f \leq h$ et que

$$\int_a^b h(t)\, dt - \int_a^b g(t)\, dt < \omega$$

Soient g^- et g^+ les parties négative et positive de g, et de même pour h. Alors g^-, g^+, h^-, h^+ sont des fonctions en escalier positives telles que

$$g^+ \leq f^+ \leq h^+, \quad h^- \leq f^- \leq g^-$$

De plus on a:

$$\int_a^b (h^+ - g^+)(t)\, dt \leq \int_a^b (h - g)(t)\, dt < \omega$$

et de même

$$\int_a^b (g^- - h^-)(t)\, dt < \omega$$

Donc f^- et f^+ sont intégrables sur $[a, b]$, et il en est donc de même de $|f| = f^- + f^+$. Comme $-|f| \leq f \leq |f|$, on a en intégrant :

$$-\int_a^b |f(t)|\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

d'où

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

□

Sommes de Riemann

Définition

Soit $a < b$. Une subdivision pointée de $[a, b]$ est un couple (ε, t), où:

$$\varepsilon = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$$

est une subdivision de $[a, b]$, et $t = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Définition

La somme de Riemann de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ associée à la subdivision pointée (ε, t) est :

$$S(f, (\varepsilon, t)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

On utilise souvent des subdivisions régulières de $[a,b]$, c'est-à-dire que

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

De même, on utilise souvent l'un des trois choix naturels possibles:

- soit $t_i = x_i$
- soit $t_i = x_{i+1}$
- soit $t_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Pour le premier choix par exemple, on obtient:

$$S(f,(\omega,t)) = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\right)$$

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ou continue par morceaux, avec $a < b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta > 0$ tel que si (ω,t) est une subdivision pointée de $[a,b]$ dont tous les intervalles sont de longueur au plus θ, alors

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - S(f,(\omega,t)) \right| < \varepsilon$$

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est intégrable sur $[a,b]$. De plus, les sommes de Riemann

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\right)$$

et

$$\overline{S}_n = \frac{b-a}{n}\left(f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right) + f(b)\right)$$

convergent vers $\int_a^b f(t)\,dt$ quand $n \to \infty$.

Démonstration

On suppose f croissante et on note g_n et h_n les fonctions définies par:

$$g_n(t) = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right), \quad h_n(t) = f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

lorsque $t \in \left[a + i\frac{b-a}{n},\, a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right[$

Ce sont des fonctions en escalier et, comme f est croissante, on a $g_n \leq f \leq h_n$. On note que:

$$\int_a^b (h_n - g_n)(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\left(f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) = 0$$

et on en déduit que f est intégrable et que son intégrale est la limite des suites de terme général S_n et $\overline{S}_n$.

$\square$