INTÉGRALES IMPROPRES

Fonction non bornées sur un intervalle borné

Définition

Soit a, b tels que $[a, b[\subset I$. Supposons que f est integrable sur tous les intervalles de la forme $[a, x]$, pour $x \in [a, b[$. Si la limite

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

existe et est finie, on dit que l'integrale impropre de f entre a et b est convergente, et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'integrale impropre de f entre a et b est divergente.

Définition

Si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent toutes deux, on dit que l'integrale de f sur $]a, b[$ converge, et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'integrale de f sur $]a, b[$ diverge.

Fonctions sur un intervalle non borné

Définition

Soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction integrable sur tous les intervalles de la forme $[a, x]$ pour $x > 0$. Si

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)dt$$

existe et est finie, on dit que l'integrale impropre

$$\int_a^\infty f(t)dt$$

est convergente, et on note

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'integrale est divergente.

Définition

Si $\int_{-\infty}^c f(t)dt$ et $\int_c^\infty f(t)dt$ convergent toutes deux, on dit que l'integrale de f sur $\mathbb{R}$ converge, et on note

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'integrale de f sur $\mathbb{R}$ diverge.

Exemples importants

Théorème

L'integrale impropre

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha < 1$ et divergente pour $\alpha \geq 1$.

Démonstration

Il suffit de prendre une primitive de $t^{-\alpha}$. Pour $\alpha \neq 1$ cette primitive est $t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, qui tend vers 0 quand $t \to 0^+$ pour $\alpha < 1$, et vers $-\infty$ quand $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$ la primitive est $\log(t)$, qui tend vers $-\infty$ quand $t \to 0^+$.
On peut bien s\^ur remplacer dans cet enonce la borne superieure d'integration 1 par n'importe quel nombre dans $]0, \infty[$. De meme on peut etudier la convergence de l'integrale en a de $1/(t-a)^\alpha$, le resultat est le meme.
On a une situation complementaire pour la convergence de l'integrale sur $[0, \infty[$
.

$\square$

Théorème

L'integrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$.

Démonstration

Comme pour le théorème précédent, il suffit de considerer une primitive de $t \to t^{-\alpha}$.

$\square$

Critères de convergence pour les fonctions positives

Théorème

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$, integrable sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$. Alors l'integrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est bornée.

Démonstration

Comme f est à valeurs positives, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante, donc elle admet une limite en b si et seulement si elle est bornée.

$\square$

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux fonctions intégrables sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$. Supposons que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$. Alors :

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge, il en est de meme pour f, et de plus

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

- si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, il en est de meme pour g.

Démonstration

On a pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$$

Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors la fonction $x \to \int_a^x g(t)dt$ est bornée, donc il est en de même pour f et donc $\int_a^b f(t)dt$ converge. On a pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$$

et en passant a la limite $x \to b^-$ on obtient l'inegalite entre les integrales de a a b.

Le second enonce est la contraposee du premier, et lui est donc equivalent.

On a un resultat analogue pour les intervalles de la forme $]a,b]$, avec a fini ou $a = -\infty$.

On peut donner tout de suite une application pour les fonctions de la forme $\log(t)/t^\alpha$.

Théorème

Soit $\alpha > 0$. Alors :

- $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- $\int_1^\infty \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Pour le premier point, la question de la convergence se pose seulement en 0. Supposons d'abord que $\alpha < 1$, et soit $\beta \in]\alpha, 1[$. On a vu plus haut que comme $\beta < 1$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$ converge. De plus, $\lim_{t\to 0} \log(t) t^{\beta-\alpha} = 0$. On en déduit qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq M$, $\frac{|\log(t)|}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\beta} \times |\log(t) t^{\beta-\alpha}| \leq \frac{1}{t^\beta}$. Le théorème 3.2 assure alors que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente.

De meme, si $\alpha > 1$, on prend $\beta \in]1, \alpha[$. On a vu que $\int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$ diverge, et $\lim_{t\to 0} \log(t) t^{\beta-\alpha} = \infty$. On en déduit par le même raisonnement que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ est divergente.

Pour $\alpha = 1$, on fait une integration par partie : pour tout $x \in]0,1[$,

$$\int_x^1 \frac{\log(t)}{t} dt = [\log(t)^2]_x^1 - \int_x^1 \frac{\log(t)}{t} dt$$

si bien que

$$\int_x \frac{\log(t)}{t} dt = \frac{1}{2}[\log(t)^2]_x^1 = -\frac{\log(x)^2}{2}$$

Il suit que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t} dt$ diverge.

□

Absolue convergence

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable sur tout intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$. Supposons que $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente. Alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, et

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Démonstration

Pour tout $t \in [a, b[$, on pose

$$f_+(t) = \max(f(t), 0)\ ,\ \ f_-(t) = \max(-f(t), 0)$$

On note que f_+ et f_- sont a valeurs positives, que $f = f_+ - f_-$ et que $|f| = f_+ + f_-$. Comme $\int_a^b |f(t)|dt$ converge et que $f_+ \leq |f|$, $\int_a^b f_+(t)dt$ converge, et de meme pour f_-. Comme $f = f_+ - f_-$, on montre alors en se ramenant a la definition de la convergence (par la limite quand $x \to b$ de l'integrale entre a et x) que $\int_a^b f(t)dt$ converge.

□

Définition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Équivalences

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux fonctions a valeurs positives, integrable sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$, telles que $f \sim g$ en b. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Démonstration

Par definition de l'equivalence en b, appliquée pour $\epsilon = 1/2$, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $t \geq c$ on a

$$\frac{f(t)}{2} \leq g(t) \leq \frac{3f(t)}{2}$$

Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Alors $\int_a^b 3f(t)/2dt$ converge et, d'apres le théorème 3.2, l'integrale de g sur $[c, b[$ converge, donc l'integrale de g sur $[a, b[$ converge.

La réciproque se montre de la même manière.

$\square$