ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et soit $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit encore $f \in C^0(I)$. L'équation

$$F(x, y, Dy, \cdots, D^n y) = f \quad (*)$$

est appelée équation différentielle ordinaire d'ordre n. Une solution de (*) est une fonction $y \in C^n(I)$ telle que (*) soit satisfaite en tout point $x \in I$.

Définition

Une équation différentielle est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est alors l'équation différentielle :

$$y' = a(x)y(*)$$

Proposition

Soit $a : I \to \mathbb{R}$, et soit A une primitive de a. Les solutions de l'équation (*) sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \exp(A(x))$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Démonstration

Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \lambda \exp(A(x))$, on a alors pour tout $x \in I$

$$\phi'(x) = \lambda A'(x) \exp(A(x)) = \lambda a(x) \exp(A(x)) = a(x)\phi(x)$$

si bien que ϕ est solution de $(*)$.

Réciproquement, soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une solution de $(*)$, et soit $J \subset I$ un intervalle où ϕ ne s'annule pas. On a alors pour tout $x \in J$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = a(x)$$

et donc

$$\log(|\phi(x)|)' = a(x)$$

et on obtient en intégrant que

$$\log|\phi(x)| = A(x) + C$$

où C est une constante réelle. On en déduit qu'on a bien sur J

$$\phi(x) = \lambda \exp(A(x))$$

Il suit en particulier que ϕ ne peut pas s'annuler sur l'adhérence de J, si bien que $J = I$, et ϕ a donc la forme cherchée sur tout I.

$\square$

Corollaire

Si $a(x)$ est égale à une constante $a \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle homogène

$$y' = ay$$

sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda \exp(ax)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution générale de l'équation

Lemma

Soit y_0 une solution particulière de (6). Une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est solution de (6) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (7).

Démonstration

Posons $z = y - y_0$. Alors

$$\begin{aligned} y' - ay - b &= (y_0 + z)' - a(y_0 + z) - b \\ &= (y_0' - ay_0 - b) + (z' - az) \\ &= z' - az \end{aligned}$$

et le résultat suit.

$\square$

Variation de la constante

Théorème

On suppose a, b continues. Soit A une primitive de a. Alors les solutions de (6) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda(x) \exp(A(x))$$

où λ est une primitive de $x \mapsto b(x) \exp(-A(x))$.

Problème de Cauchy

Théorème du problème de Cauchy

Soit $x_0 \in I$, soient $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Il existe une unique solution ϕ de (8) telle que $\phi(x_0) = y_0$ et que $\phi'(x_0) = y_1$.

Théorème

Soit a, b continues sur I, soit $x_0 \in I$, et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution ϕ de (6) sur I telle que $\phi(x_0) = y_0$.

Équation de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^n$$

où $n > 1$ est entier et α, β sont continues.

Solution

Pour résoudre ces équations, on divise par y^n et on pose $z = 1/y^{n-1}$. On obtient l'équation équivalente :

$$-\frac{1}{n-1}z' = \alpha(x)z + \beta(x)$$

qui est une équation linéaire du premier ordre.

Équation de Riccati

C'est l'équation de la forme

$$y' = \alpha(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x)$$

Solution

On peut la résoudre dès lors qu'on connaît une solution particulière y_1. En effet on peut alors poser $y = z + y_1$, et on obtient l'équation suivante sur z:

$$z' = \alpha(x)z^2 + (2\alpha(x)y_1(x) + \beta(x))z$$

C'est une équation de Bernoulli, dont on a vu une méthode de résolution.

Solutions de l'équation homogène

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (9) forme un espace vectoriel.

Démonstration

On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{C}$. Il suffit pour cela de remarquer que :

- la fonction nulle est solution
- si y_1 et y_2 sont deux solutions, alors $y_1 + y_2$ est une solution
- si y est une solution et $\lambda \in \mathbb{R}$ respectivement $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λy est encore solution

Wronskien

Définition

Soient y_1, y_2 deux solutions sur I de l'équation homogène (9). Leur Wronskien est la fonction définie sur I par le déterminant suivant :

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Proposition

Soient y_1, y_2 deux solutions sur I de l'équation homogène (9), soit $x_0 \in I$. On a alors pour tout $x \in I$:

$$W_{y_1,y_2}(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) W_{y_1,y_2}(x_0)$$

Démonstration

On remarque que

$$\begin{aligned} W'_{y_1,y_2}(x) &= \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x) & -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -p(x)y_1'(x) & -p(x)y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= -p(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= -p(x) W_{y_1,y_2}(x) \end{aligned}$$

On peut maintenant intégrer cette équation différentielle linéaire du premier ordre, et on obtient le résultat.

$\square$

Corollaire

Le Wronskien de y_1 et y_2 est soit identiquement nul, soit partout non nul.

Système fondamental de solutions

Définition

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (9). Elles forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène (9) si et seulement si $W_{y_1,y_2} \neq 0$ sur I.

Proposition

Supposons que y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène (9). Alors toute solution de cette équation peut s'écrire sous la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes.

Démonstration

Comme le Wronskien est partout non-nul, on peut résoudre pour tout $x \in I$ l'équation linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

On peut ré-écrire cette relation sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = c_1(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Pour montrer que c_1 et c_2 sont constantes, on va dériver cette équation, on obtient que

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = c_1'(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$
$$+ c_1(x) \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_1''(x) \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} y_2'(x) \\ y_2''(x) \end{pmatrix}$$

Comme y, y_1 et y_2 sont des solutions de (9), on a :

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ -p(x)y'(x) - q(x)y(x) \end{pmatrix} = c_1'(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$
$$+ c_1(x) \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ -p(x)y_1' - q(x)y_1(x) \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} y_2'(x) \\ -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{pmatrix}$$

Mais il suit de la définition de c_1 et c_2 que

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ -p(x)y'(x) - q(x)y(x) \end{pmatrix} = c_1(x) \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ -p(x)y_1' - q(x)y_1(x) \end{pmatrix}$$
$$+c_2(x) \begin{pmatrix} y_2'(x) \\ -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$c_1'(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = 0$$

Or on sait par l'hypothèse sur le Wronskien que

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

pour tout $x \in I$, et il suit que $c_1'(x) = c_2'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Les fonctions c_1 et c_2 sont donc constantes, ce qui prouve le résultat.

□

Remarque

Supposons qu'on connaisse une solution, disons y_1, de l'équation homogène (9). On peut alors trouver une seconde solution de la manière suivante. On cherche une solution y sous la forme $y = vy_1$, et on constate que (9) se traduit par une équation différentielle du premier ordre sur v'. Si on peut résoudre cette équation différentielle, on peut trouver v' puis ensuite intégrer pour obtenir v. Les fonctions y_1 et vy_1 forment alors un système fondamental de solutions de (9).

Lemma

Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre (8). Alors les solutions de (8) sont exactement les fonctions de la forme $y = y_0 + z$, où z est une solution de l'équation homogène (9).

Variation des constantes

Proposition

Soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène (9). Pour tout $x \in I$, on note $c_1(x)$ et $c_2(x)$ les nombres tels que

$$\begin{cases} c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = 0 \\ c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) = r(x) \end{cases}$$

qui existent et sont uniques puisque le Wronskien est non nul. Alors pour tout $x_0 \in I$ la fonction suivante est solution de (8):

$$y_0(x) = \left(\int_{x_0}^{x} c_1(t)dt\right) y_1(x) + \left(\int_{x_0}^{x} c_2(t)dt\right) y_2(x)$$

Démonstration

Posons pour simplifier les notations

$$C_1(x) = \int_{x_0}^{x} c_1(t)dt, \quad C_2(x) = \int_{x_0}^{x} c_2(t)dt$$

Ainsi,

$$y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} y_0''(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \\ &= r(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} y_0''(x) + p(x)y_0'(x) + q(x)y_0(x) &= r(x) + C_1(x)(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) \\ &+C_2(x)(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)) \\ &= r(x) \end{aligned}$$

ce qui montre bien que y_0 est solution de l'équation avec second membre (8).

□

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Lemma

- Supposons que s est solution du polynôme caractéristique (12). Alors la fonction $x \mapsto e^{sx}$ est solution de (11)
- Si s est solution double de (12), alors la fonction $x \mapsto xe^{sx}$ est aussi solution de l'équation homogène (11)

Démonstrations

- Pour le premier point, on note simplement que si $y(x) = e^{sx}$ alors

  $$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = (as^2 + bs + c)e^{sx}$$

  et le résultat suit.

- Pour le second point, on calcule de même que si $y(x) = xe^{sx}$ alors \]

  $$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = (a(s^2x + 2s) + b(sx + 1) + cx)e^{sx}$$

$$= ((as^2 + bs + c)x + (2as + b))e^{sx}$$

Or comme s est solution double de (12), on a $2as + b = 0$, si bien que $y(x) = xe^{sx}$ est encore solution de l'équation homogène.

$\square$

Théorème

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- si $\Delta = 0$, alors l'équation (12) a une unique solution s double. Dans ce cas, les solutions de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{sx}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- sinon, l'équation (12) a deux solutions distinctes s_1 et s_2, et les solutions de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda_1 e^{s_1 x} + \lambda_2 e^{s_2 x}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Cas des équations à coefficients réels

Lemmes

- Supposons que $s \in \mathbb{R}$ est solution du polynôme caractéristique (12). Alors la fonction $x \mapsto e^{sx}$ est solution de (11).
- Si s est solution double de (12), alors la fonction $x \mapsto xe^{sx}$ est aussi solution de l'équation homogène (11).
- Si (12) n'a pas de racine réelle, alors il a deux racines complexes conjuguées de la forme $r \pm i\omega$. Dans ce cas, les fonctions $x \mapsto e^{rx} \cos(\omega x)$

et $x \mapsto e^{rx}\sin(\omega x)$ sont solutions de l'équation homogène (11).

Théorème

On suppose ici $a, b, c \in \mathbb{R}$, et on pose encore $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- si $\Delta = 0$, alors l'équation (12) a une unique solution s double. Dans ce cas, les solutions de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

  $$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{sx}$$

  avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- si $\Delta > 0$, l'équation (12) a deux solutions réelles distinctes s_1 et s_2, et les solutions réelles de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

  $$y(x) = \lambda_1 e^{s_1 x} + \lambda_2 e^{s_2 x}$$

  avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

- si $\Delta < 0$, l'équation (12) a deux solutions complexes conjuguées s_1 et $s_2 = \tau \pm i\omega$, et les solutions réelles de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

  $$y(x) = \lambda e^{\tau x}\cos(\omega x) + \mu e^{\tau x}\sin(\omega x)$$

  avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur

Proposition

Les solutions de l'équation homogène associée à (15) forment un espace vectoriel de dimension n.

Théorème du problème de Cauchy

Pour tout $x_0 \in I$ et tout $(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\in \mathbb{C}^n$) il existe une unique solution de (15) telle que pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, $y^{(i)}(x_0) = y_i$.

Définition

Soient $y_1, y_2, \cdots, y_n$ des solutions de (16) sur l'intervalle I. Le Wronskien du système $(y_1, \cdots, y_n)$ est la fonction définie par

$$W_{y_1,\cdots,y_n}(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit $W_{y_1,\cdots,y_n}(x) = 0$ pour tout $x \in I$, soit $W_{y_1,\cdots,y_n}(x)$ ne s'annule en aucun point de I.

Définition

Le n-uplet $(y_1, \cdots, y_n)$ de solutions de (16) forme un système fondamental de solutions si et seulement si $W_{y_1,\cdots,y_n}(x) \neq 0$ pour un $x \in I$.

Propositions

- Soit $(y_1, \cdots, y_n)$ un système fondamental de solutions de (16). Alors toute solution y de (16) sur I s'écrit sous la forme

  $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

  avec $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ (resp. $\in \mathbb{C}$).

- L'équation (16) admet un système fondamental de solution.