IMPULS

Definition

Der Impuls p eines Körpers ist das Produkt aus seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit v.

Formel

$$p = m \cdot v$$

Vektoriell

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$$

Einheit

$$[p] = 1\frac{kg \cdot m}{s}$$

Stoßvorgänge Definitionen

1. ***Elastischer Stoß***

   Der Elastischer Stoß liegt vor, wenn sich die stoßenden Körper nach dem Stoß wieder trennen. Eine kurze Verbindung unter den Körpern existiert nur während des Stoßes

2. ***Unelastischer Stoß***

   Ein Unelastischer Stoß liegt vor, wenn die stoßemdem Körper beim Stoß verhaken oder verbinden und auch nach dem Zusammentreffen verbunden bleiben.

3. ***Zentraler Stoß***

   Ein Zentraler Stoß liegt vor, wenn sich die Schwerpunkte der stoßenden Körper entlang einer geraden Linie aufeinander zu bewegen.

Zentraler elastischer Stoß

Impulserhaltung

Beim zentralen elastischen Stoß ist der Gesamtimpuls vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß.

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p'}$$

Energieerhaltung

Beim zentralen elastischen Stoß ist die mechanische Energie E vor dem Stoß gleich der mechanischen Energie E' nach dem Stoß.

Geschwindigkeiten nach dem zentralen elastischen Stoß

Ein Körper der Masse m_1 stößt mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_1}$ gegen einen Körper der Masse m_2 welcher sich mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_2}$ bewegt.
Es sollen Formeln hergeleitet werden, welche es erlauben, die Geschwindigkeiten beider Körper mach dem Stoß ($\overrightarrow{v_1'}$ und $\overrightarrow{v_2'}$) in Abhängigkeit der Massen m_1 und m_2, sowie der Geschwindigkeiten $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ zu bestimmen. Wenn der Stoß eindimensional ablauft, so können die die Vektoren auf eine x-Achse projiziert werden, welche der Richtung der Bewegung der Körper entspricht.

Herleitung

Aus dem Impulserhaltungssatz ergibt sich entlang der x-Achse:

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} \ (1)$$

Energieerhaltungssatz:

$$E_{kin,1} + E_{kin,2} = E'_{kin,1} + E'_{kin,2} \ (2)$$

Mit der Definition des Impulses und der kinetischen Energie erhalten wir aus (1) und (2):

$$\begin{cases} m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x} & (3) \\ \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2x}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v'^2_{1x} + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v'^2_{2x} & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1\left(v_{1x}-v'_{1x}\right)=m_2\left(v'_{2x}-v_{2x}\right) \\ m_1\left(v_{1x}^2-v'^2_{1x}\right)=m_2\left(v'^2_{2x}-v_{2x}^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{1x}-v'_{1x}=\frac{m_2}{m_1}\left(v'_{2x}-v_{2x}\right) & (5) \\ m_1\left(v_{1x}-v'_{1x}\right)\left(v_{1x}+v'^{1x}\right)=m_2\left(v'_{2x}-v_{2x}\right)\left(v'_{2x}+v_{2x}\right) & (6) \end{cases}$$

(5) in (6):

$$m_1\cdot\frac{m_2}{m_1}\left(v'_{2x}-v_{2x}\right)\left(v_{1x}+v'_{1x}\right)=m_2\left(v'^{2x-v_{2x}}\right)\left(v'_{2x}+v_{2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow v_{1x}+v'_{1x}=v_{2x}+v'_{2x}\ \ (7)$$

(3) und (7):

$$\begin{cases} m_1\cdot v_{1x}+m_2\cdot v_{2x}=m_1\cdot v'_{1x}+m_2\cdot v'_{2x} \\ v_{1x}+v'_{1x}=v_{2x}+v'_{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1\cdot v_{1x}+m_2\cdot v_{2x}=m_1\cdot v'_{1x}+m_2\cdot v'_{2x} & (8) \\ m_2v_{1x}+m_2v'_{1x}=m_2v_{2x}+m_2v'_{2x} & (9) \end{cases}$$

(8) – (9):

$$m_1v_{1x}-m_2v_{1x}+m_2v_{2x}-m_2v'_{1x}=m_1v'_{1x}-m_2v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{1x}\left(m_1+m_2\right)=m_1v_{1x}-m_2v_{1x}+2m_2v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{1x}=\frac{m_1v_{1x}+m_2\left(2v_{2x}-v_{1x}\right)}{m_1+m_2}\ \ (10)$$

(10) in (7):

$$v'_{2x}=v_{1x}+v'_{1x}-v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x}=v_{1x}+\frac{m_1v_{1x}-m_2v_{1x}+2m_2v_{2x}}{m_1+m_2}-v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x}=\frac{m_1v_{1x}+m_2v_{1x}+m_1v_{1x}-m_2v_{1x}+2m_2v_{2x}-m_1v_{2x}-m_2v_{2x}}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x}=\frac{m_2v_{2x}+2m_1v_{1x}-m_1v_{2x}}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x}=\frac{m_2v_{2x}+m_1(2v_{1x}-v_{2x})}{m_1+m_2}$$

Geschwindigkeiten der Körper nach dem zentralen elastischen Stoß:

$$v'_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2(2v_{2x} - v_{1x})}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{2x} = \frac{m_2 v_{2x} + m_1(2v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}$$

Zentraler unelastischer Stoß

Impulserhaltung

Beim zentralen elastischen Stoß ist der Gesamtimpuls vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß.

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p'}$$

Energieveränderung

Beim zentralen elastischen Stoß ist die mechanische Energie E vor dem Stoß größer als die mechanische Energie E' nach dem Stoß. Beim Verhaken der Körper geht mechanische Energie durch Verformungsarbeit verloren.

Herleitung der Energieveränderung

Die Änderung oder Abnahme der kinetischen Energie ΔE_{kin} beim unelastischen Stoß entspricht der Differenz zwischen gesamter kinetischer Energie nach dem Stoß und gesamter kinetischer Energie vor dem Stoß. Sie entspricht dem Betrag der Zunahme der thermischen Energie der Körper:

$$\Delta E_{kin} = E'_{kin} + E_{kin}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{kin} = E'_{kin1} + E'_{kin2} - E_{kin1} - E_{kin2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\overrightarrow{v'}^2 - \frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1}^2 - \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = (m_1 + m_2)\frac{\left(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2 + \overrightarrow{v_2}\right)^2}{(m_1 + m_2)^2} - m_1\overrightarrow{v_1}^2 - m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{\left(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2 + \overrightarrow{v_2}\right)^2}{m_1 + m_2} - m_1\overrightarrow{v_1}^2 - m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 + m_2^2\overrightarrow{v_2}^2 + 2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2} - m_1\overrightarrow{v_1}^2 - m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 + m_2^2\overrightarrow{v_2}^2 + 2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} - (m_1 + m_2)m_1\overrightarrow{v_1}^2 - (m_1 + m_2)m_2\overrightarrow{v_2}^2}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 + m_2^2\overrightarrow{v_2}^2 + 2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} - m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 - m_1m_2\overrightarrow{v_1}^2 - m_1m_2\overrightarrow{v_2}^2 - m_2^2\overrightarrow{v_2}^2}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} - m_1m_2\overrightarrow{v_1}^2 - m_1m_2\overrightarrow{v_2}^2}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{-\left(-2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} + m_1m_2\overrightarrow{v_1}^2 + m_1m_2\overrightarrow{v_2}^2\right)}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{-m_1m_2\left(\overrightarrow{v_1}^2 + \overrightarrow{v_2}^2 - 2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}\right)}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{kin} = \frac{1}{2}\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}\right)^2$$

Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p'}$$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v'} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$$

Spezialfall: $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_1}$ ***und*** $m_1 = m_2$

Beide Körper besitzen die gleiche Masse m und stoßen mit gleicher jedoch entgegengesetzter Geschwindigkeit aufeinander.

$$\vec{v'} = \frac{m\vec{v_1} + m\vec{v_2}}{m+m} = \frac{m\vec{v_1} - m\vec{v_1}}{2m} = \vec{0}$$

Die gesamte kinetische Energie, die vor dem Stoß vorhanden war, hat sich somit während des Stoßes in thermische Energie umgewandelt.

Impulserhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Impulse p vor dem Stoß gleich der Summe der Impulse p' nach dem Stoß. Der Gesamtimpuls bleibt erhalten.

$$\sum \vec{p} = \sum \vec{p'}$$

Zentraler elastischer Stoß gegen einen ruhenden Körper

Impulserhaltungssatz

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}'$$

$$\Leftrightarrow m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' \ (1)$$

Energieerhaltungssatz

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1\vec{v_1^2} + 0 = \frac{1}{2}m_1\vec{v_1^2}' + \frac{1}{2}m_2\vec{v_2^2}' \ (2)$$

Herleitung der Geschwindigkeiten

Wir erhalten ein System mit 2 Gleichungen und 2 unbekannten : $\vec{v_1}'$ und $\vec{v_2}'$.

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' \ (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v_1^2} + 0 = \frac{1}{2}m_1\vec{v_1^2}' + \frac{1}{2}m_2\vec{v_2^2}' \ (2)$$

(1) wird nach $\vec{v_1}'$ umgestellt und in (2) eingesetzt.

Substitutionsmethode:

$$\overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_1} - \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{v_2}' \ (*)$$

und

$$m_1 \cdot \left(\overrightarrow{v_1} - \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{v_2}'\right)^2 + m_2\overrightarrow{v_2}^{2\prime} = m_1\overrightarrow{v_1}^2$$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{v_1}^2 + m_1\frac{m_2^2}{m_1^2}\overrightarrow{v_2}^{2'} - 2m_1\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}' + m_2\overrightarrow{v_2}^{2'} = m_1\overrightarrow{v_1}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_2^2}{m_1}\overrightarrow{v_2}^{2\prime} - 2m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}' + m_2\overrightarrow{v_2}^{\prime 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}^{\prime 2}\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) - 2m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}' = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}'\left[\overrightarrow{v_2}'\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) - 2m_2\overrightarrow{v_1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = 0 \ oder \ \overrightarrow{v_2}'\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) - 2m_2\overrightarrow{v_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_2\overrightarrow{v_1}}{\frac{m_2^2}{m_1} + m_2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_2}{m_2\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)}\overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2}{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_1}$$

Um $\overrightarrow{v_1}'$ zu bestimmen wird die soeben gefundene Gleichung $(*)$ eingesetzt:

$$\overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_1} - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_1} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} \cdot \overrightarrow{v_1} - \frac{2m_2}{m_1+m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1+m_2-2m_2}{m_1+m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

Wir erhalten also:

$$\overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{v_1}$$

und

$$\overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

Spezialfälle der Stoßvorgänge

1. ***Spezialfall:*** $m_1 = m_2$

   Der stoßende und ruhende Körper besitzen die gleiche Masse m. In diesem Fall vereinfachen sich die Formeln zu:

   $$\overrightarrow{v_1}' = \frac{m-m}{m+m} \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$$

   und

   $$\overrightarrow{v_2}' = \frac{2m}{m+m} \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1}$$

2. ***Spezialfall:*** $m_1 > m_2$

   Die Masse des stoßenden Körpers ist größer als die Masse des ruhenden Körpers. In diesem Fall gilt:

   $$\frac{2m_1}{m_1+m_2} > 0$$

   und

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} > 0$$

Daher kann man schlussfolgern, dass sich beide Körper nach dem Stoß in die Richtung des stoßenden Körpers bewegen.

3. ***Spezialfall:*** $m_1 < m_2$

   Die Masse des stoßenden Körpers ist kleiner als die Masse des ruhenden Körpers. In diesem Fall gilt:

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} < 0$$

   und

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} < 0$$

   Daher kann man schlussfolgern, dass der stoßende Körper sich nach dem Stoß in Richtung des ursprünglich stoßenden bewegt.

4. ***Spezialfall:*** $m_2 >> m_1$

   Die Masse des ruhenden Körpers ist viel größer als die Masse des stoßenden Körpers. In den Formeln kann dann m_1 vernachlässigt werden und man findet:

$$\overrightarrow{v_2}' = \frac{2 \cdot 0}{m_2} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \overrightarrow{0}$$

   und

$$\overrightarrow{v_1}' = \frac{0 - m_2}{0 + m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = -\overrightarrow{v_1}$$

   In diesem Fall wird der erste Körper beim Stoß reflektiert; der zweite bleibt in Ruhe.