KREISBEWEGUNGEN

Winkelgeschwindigkeit, Drehfrequenz

Definition

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist der Quotient aus dem durchlaufenden Drehwinkel $\Delta\varphi$ und dem dafür benötigten Zeitintervall Δt.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$[\Delta\varphi] = rad$$

$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

Anmerkung

Durch die Definition des Bogenmaßes oder Radianten erhält man:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

Bahngeschwindigkeit

Herleitung

Die Bahngeschwindigkeit v entspricht dem Quotienten aus dem zurückgelegten Bogenstück Δs und dem dafür benötigten Zeitintervall Δt.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$$

Definition

Die Bahngeschwindigkeit v ist das Produkt aus Bahnradius r und Winkelgeschwindigkeit ω.

$$v = r \cdot \omega$$

Periodendauer, Umlaufzeit

Die Umlaufzeit oder Periodendauer ist die benötigte Zeit T für einen Umlauf.

$$T = \frac{t}{n}$$

$$n,\ Anzahl\ an\ Umläufen$$

Einheit

$$[T] = s$$

Umdrehungsfrequenz, Drehzahl

Die Umdrehungsfrequenz oder Drehzahl f, gibt die Anzahl an Umläufen pro Sekunde an.

$$f = \frac{1}{T}$$

Einheit

$$[f] = Hz$$

$$Hz,\ Hertz$$

Zentripetalkraft

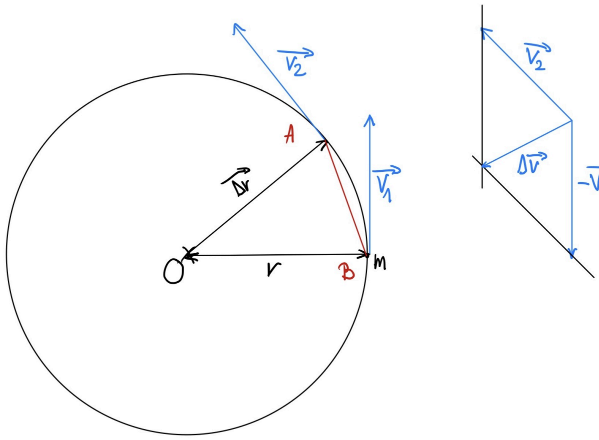
Die Zentripetalkraft ist die einzig wirkende Kraft, die den Körper auf der Kreisbahn hält. Sie wird bestimmt durch Anwenden des Grundgesetzes der Mechanik.

$$\overrightarrow{F_r} = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

Herleitung

In der Figur ist eine punktförmige Masse m die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ auf einer Kreisbahn bewegt mit Radius r und der

Positionsänderung $\overrightarrow{\Delta r}$ in einem kleinen Zeitintervall Δt um den Winkel $\Delta\Theta$.



Da die Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ zu jedem Zeitpunkt die Tangente zur Kreisbahn ist, ist die Resultierende aus $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ zum Kreiszentrum gerichtet. Es gilt:

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{\Delta v}$$

und:

$$v = v_1 = v_2$$

Die Richtung von $\Delta\overrightarrow{v}$ ist radial und zum Kreiszentrum gerichtet. Sie entspricht die Winkelhalbierenden von $\Delta\Theta$ im inneren des Kreises. Durch Ähnlichkeit beider Dreiecke kann Thales angewendet werden:

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{r}\|}{r} = \frac{\|\ \Delta\overrightarrow{v}\ \|}{v}$$

$$\Leftrightarrow \|\Delta\overrightarrow{r}\| = \frac{r}{v} \cdot \|\ \Delta\overrightarrow{v}\| \quad (1)$$

Für Kleinwinkelnäherung:

$$\widehat{AB} = [AB]$$

Es gilt also:

$$\|\Delta\overrightarrow{r}\| \approx v \cdot \Delta t \ (2)$$

(1) gleich (2):

$$\frac{r}{v} \cdot \parallel \Delta\overrightarrow{v} \parallel \approx v \cdot \Delta t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\parallel \Delta\overrightarrow{v} \parallel}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$$

mit der Definition der Beschleunigung:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

Einsetzen:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Anmerkung

Die Zentripetalkraft ist immer zu dem Kreiszentrum hin gerichtet.

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Durch einsetzen der Formel der Bahngeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r} \mid v = \omega \cdot r$$

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Durch einsetzen der Formel der Winkelgeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r | \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_r = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$