NOMBRES COMPLEXES

Cardan

Cette méthode permet d'obtenir des formules, appelées formules de Cardan, donnant en fonction de p et q les solutions de l'équation :

$$x^3 + pz + q = 0$$

Conditions d'existence:

$$4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$$

Formule de Cardan

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Définition du nombre complexe

Définition

On défini le nombre complexes i tel que:

$$i^2 = -1$$

Définition de l'ensemble des nombres complexes

Théorème

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tel que:

1. $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres réels.
2. $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que: $i^2 = 1$
3. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de $\mathbb{C}$.

4. Chaque élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme:

   $z = a\ +\ bi\ \ (avec\, a,\ b \in \mathbb{R})$

Remarque:

Une relation d'ordre n'existe pas sur $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas des nombres complexes, ni parler de nombres complexes positifs ni négatifs puisque on ne peut pas les comparer à 0.

Définitions:

1. L'écriture $z = a\ +\ bi$ est appelée la <u>forme algébrique</u> du nombre complexe z

2. Soit $z = a\ +\ bi$

   Le nombre réel a est appelé la <u>partie réelle</u> du nombre complexe z

   Le nombre réel b est appelé la <u>partie imaginaire</u> du nombre complexe z

3. Si $z = a$, alors z est un <u>nombre réel</u>

   Si $z = b$, alors z est un <u>imaginaire pur</u>

Conséquences

1. $a = Re(z); b = Im(z) : z = a + bi = Re(z) + Im(z)i$

2. z est un réel $\Leftrightarrow\ z = a \Leftrightarrow Im(z) = 0$

3. z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow\ z = bi \Leftrightarrow Re(z) = 0$

<u>Égalité dans</u> $\mathbb{C}$

Définition:

Si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} Re\left(z\right) = Re\left(z'\right) \\ Im\left(z\right) = Im\left(z'\right) \end{cases}$$

Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe représente géométriquement la symmetrie par rapport au axes des abscisses.

Nombres complexes conjuguées

Définition:

Soit $z = a + bi$. On appelle nombre complexe conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$

Remarques:

1. $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow \overline{\overline{(a + bi)}} = \overline{(a - bi)} = z$

2. Relation fondamentale

   $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Factorisation de deux carrées:

$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$

Opérations sur les nombres conjugués

Théorème

$$z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Définition

Soit $z = a + bi$ et $|z| = a - bi$:

$$z = |z| \Leftrightarrow a + bi = a - bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Im(z) = 0$$

Il suit donc que z est un nombre réel.

cqfd.

Théorème

$$\overline{z \ + \ z'} = \ \overline{z} \ + \overline{z'}$$

Démonstration

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

$$\overline{z \ + \ z'}$$

$$= \overline{(a + bi) + (a' + b'i)}$$

$$= \overline{(a + a') + (b + b')i}$$

$$= \left(a + a'\right) - \left(b + b'\right)$$

$$= \ a + a' - bi - b'i$$

$$= (a - bi) + \left(a' - b'i\right)$$

$$= \overline{z} \ + \ \overline{z'}$$

cqfd.

Théorème

$$\overline{z \ \cdot \ z'} = \overline{z} \ \cdot \ \overline{z'}$$

Démonstration

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

D'une part:

$$\overline{z \cdot z'}$$
$$= \overline{(a+bi)(a'+b'i)}$$
$$= \overline{aa' + ab'i + a'bi - bb'}$$
$$= \left(aa' - bb'\right) - \left(ab' + a'b\right)i$$

D'autre part:

$$\bar{z} \cdot \overline{z'}$$
$$= \overline{(a+bi)} \cdot \overline{(a'+b'i)}$$
$$= (a-bi) \cdot \left(a' - b'i\right)$$
$$= aa' - ab'i - a'bi - bb'$$
$$= \left(aa' - bb'\right) - \left(ab' + a'b\right)i$$

Donc,

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$$

cqfd.

Module

Definition

Soit $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormé du plan et soit M le point d'affixe $z = a + bi$.

On appelle le module complexes $z = a + bi$ la norme de vecteur $\overrightarrow{OM}$

donc,

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$$

Propriété

Soit $z = a + bi$, alors le module de z, noté $|z|$ est donné par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque

$$|z|^2 = \bar{z}z$$

Argument

Soit $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormal direct du plan et soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit $M(z)$ et soit θ une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$

On appelle argument de z, le nombre

$$\arg(z) = \theta \ + \ k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z) = \theta \; mod(2\pi)$$

Remarque

Vu la définition, $z = 0$ n'a pas d'argument

Forme trigonométrique

Théorème

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme suivante, dite forme trigonométrique:

$$z = r\left(cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right)$$

$$où \; r = |z| > 0 \; et \; \theta = \arg(z) \; mod\left(2\pi\right)$$

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\cos\left(\theta\right) = \frac{côté \; adjacent}{hypoténuse} = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow a = r \cdot \cos\left(\theta\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{cote\ oppose}{hypoténuse} = \frac{b}{r}$$
$$\Rightarrow b = r \cdot \sin(\theta)$$

donc,

$$z = a + bi$$
$$= r\cos(\theta) + r[\sin(\theta)]i$$
$$= r\cos(\theta) + i\sin(\theta),\ avec\, r = |z|\ et\ \theta = \arg(z)$$

Remarque

Forme abrégée de la forme trigonométrique est $z = r \cdot cis(\theta)$

Égalité des deux nombre complexes trigonométrique

Soit $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ et $z' = r'[\cos(\theta') + i\sin(\theta')]$

$$z = z'$$
$$\Leftrightarrow r = r'\ et\ \ \theta = \theta'\ mod\,(2\pi)$$

Modules et argument d'un produit

Théorèmes

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z'

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$
$$\arg\left(z \cdot z'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right)$$

Démonstration 1

Pour tout $z \in \mathbb{C} : |z|^2 = zz'$

$$\left|z \cdot z'\right|^2 = \left(z \cdot z'\right) \cdot \overline{\left(z \cdot z'\right)}$$
$$= z \cdot \cdot \bar{z} \cdot z' \cdot \bar{z}'$$
$$= |z|^2 + \left|z'\right|^2$$

Comme $|z \cdot z'|$ et $|z| \cdot |z'|$ sont des nombres réels positifs, on a que:

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

cqfd

Démonstration 2

Soit $z = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

$z' = r'\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right]$, avec $r' = |z'|$ et $\theta' = \arg(z')$

alors,

$$z \cdot z' = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right] \cdot r'\left[\cos\left(\theta'\right) + i\sin\left(\theta'\right)\right]$$

$$= r \cdot r'\left[\cos(\theta)\cos\left(\theta'\right) + i\cos(\theta)\sin\left(\theta'\right) + i\sin(\theta)\cos\left(\theta'\right) + i^2\sin(\theta)\sin\left(\theta'\right)\right]$$

$$= r \cdot r'\left\{\left[\cos(\theta)\cos\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\sin\left(\theta'\right)\right] + i\left[\sin\left(\theta'\right)\cos(\theta) + \cos\left(\theta'\right)\sin(\theta)\right]\right\}$$

$$= r \cdot r'\left[\cos\left(\theta + \theta'\right) + i\sin\left(\theta + \theta'\right)\right]$$

Comme $r \cdot r' = |z| \cdot |z'| > 0$ et que $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ on a:

$$\arg\left(z \cdot z'\right) = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg\left(z'\right)$$

cqfd

Module et argument d'un quotient

Théorème

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z'

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right)$$

Démonstration 1

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'} \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$$

$$= \frac{z}{z'} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

$$= \frac{z \cdot \bar{z}}{z' \cdot \bar{z'}}$$

$$= \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

$$= \left(\frac{|z|}{|z'|}\right)^2$$

Comme $\left|\frac{z}{z'}\right|$ et $\frac{|z|}{|z'|}$ sont des nombres réels positifs, on a que

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Démonstration 2

Posons $u = \frac{z}{z'} \ \Leftrightarrow \ u \cdot z' = z$

Par suite:

$$\arg\left(u \cdot z'\right) = \arg(z)$$

$$\Leftrightarrow \arg(u) + \arg\left(z'\right) = \arg(z)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg\left(z'\right) = \arg(z)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right)$$

Conséquences

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$$

Notation polaire

On appelle module du nombre complexe z le module du vecteur image $\overrightarrow{OM}$ associé à z. On appelle argument du nombre complexe z l'angle polaire du vecteur image $\overrightarrow{OM}$ associé à z (à $2k\pi$ près) (avec $k \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{cases} r = |z| = OM\; avec\; r \geqslant 0 \\ \theta = \arg(z) = (Ox,\ OM) + 2k\pi \end{cases}$$

On note alors le nombre complexe z sous la forme polaire

$$z = [r; \theta]$$

Notation exponentielle

Définition

Le complexe du module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Théorème

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle : $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\; mod\,(2\pi)$

Démonstration

z, non nul, a pour forme trigonométrique $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ avec $r = |z|$. Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, z s'écrit donc sous la forme $z = re^{i\theta}$

Formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Généralisation

Pour un nombre complexe quelconque, dont le module est différent de l'unité, le cosinus et sinus de l'argument s'obtiennent comme suit

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \frac{z}{r} \\ \bar{z} = re^{-i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \frac{\bar{z}}{r} \end{cases}$$

On obtient alors,

$$\cos(\theta) = \frac{z + \bar{z}}{2r}$$

$$\sin(\theta) = \frac{z - \bar{z}}{2ir}$$

Polynôme trigonométrique

Définition

Un polynôme trigonométrique est un polynôme dont chaque terme est un produit de fonctions sinus et cosinus d'angles quelconques.

Linéarisation

Définition

Chercher à linéariser revient à remplacer les produits des fonctions sinus et cosinus par des sommes (pondérées par des coefficients réels ou complexes) de fonctions sinus et cosinus dont les angles ont, eux aussi, été modifiés

Formules de Moivre

Théorème

Soit un nombre complexe de module unité $z = e^{i\theta}$

L'élévation à la puissance n donne:

$$z^n = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$z^n = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n$$

Or

$$z^n = e^{in\theta}$$

$$z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

D'où la formule de moivre:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n$$

Remarque

Cette relation reste valable lorsque l'exposant n est négatif.