LIMITES

Limites

Cas 1 limite en $+\infty$

Si les nombres d'une fonction $f(x)$ deviennent plus en plus grand si on prend x qui se rapproche d'une infinité

$$f(x) \to +\infty$$

On dit que la limite de $f(x)$ est plus l'infini on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Cas 2 limite en $-\infty$

Si les nombres de $f(x)$ deviennent plus en plus petit si on prend x qui se rapproche d'une infinité

$$f(x) \to -\infty$$

On dit que la limite de $f(x)$ est moins l'infini on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Cas 3 limite en un point

Si les nombres de $f(x)$ se rapprochent en un point si on prend x qui rapproche une infinité

$$f(x) \to a$$

On dit que la limite de $f(x)$ est a on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) = a$$

Limite à droite et a gauche

Une fonction f possède une limite en a si et seulement si f possède une limite a gauche et a droite de a et que les limites sont égales.

$$\lim_{x \to a^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f\left(x\right)$$

Les asymptotes

Asymptote horizontale

On note asymptote horizontale : A.H.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y = l$ en $+\infty$, si

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = l$$

A.H. est sous forme:

$$A.H. \ \equiv \ y$$

nouveau signe: [≡]

On lit :l'asymptote horizontale a pour équation y

Asymptote verticale

On note asymptote verticale : A.V.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale (A.V.) d'équation $x = a$, si

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = \infty$$

A.V. est sous forme:

$$A.V. \ \equiv \ x$$

Asymptote Oblique

On note asymptote oblique : A.O.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (A.O.) d'équation $y = ax + b$, en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$),si

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f\left(x\right) - \left(ax + b\right)\right] = 0$$

$$respectivement$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

A.O. est sous forme:

$$A.O. \equiv ax + b$$

À retenir

On a jamais une A.H. et une A.O. pour une seul fonction.

Formules de Cauchy

La droite d'équation $y = ax + b$ est une A.O. à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si:

1. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \; avec \; a \in \mathbb{R}^*$
3. $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b \; avec \; b \in \mathbb{R}$

Terme du plus haut dégrée

À l'infini, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n \; , avec \; a_n \neq 0$$

Théorème du plus haut dégrée d'une fonction rationelle

Definition

Soit

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

une fraction rationelle avec

$$(a_n \neq 0; \; b_m \neq 0)$$

Alors la limite quand f(x) tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ est égale a la limite du rapport du termes

du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Demonstration

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n \overbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}^{\to 1}}{b_m x^n \underbrace{\left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \ldots + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}\right)}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^n}$$

cqfd.

Limites des fonctions trigonométriques

Théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions définies sur l'intervalle ouvert I telles que:

$$h\left(x\right)\le f(x)\le g(x)$$

Si

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}g\left(x\right)=l$$

avec

$$x\neq a\ \ (a\,réel\ ou\ infini)$$

donc

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=l$$

Remarque

Le théorème d'encadrement est aussi apellée théorème de sandwich ou des gendarmes.

Théorème de comparaison par minoration ou majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et soit a une borne de I ou un réel appartenant à I.

1. Si pour tout x de I, $f\left(x\right)\geqslant g\left(x\right)$ et si:

$$\lim_{x\to a}g\left(x\right)=+\infty\implies\lim_{x\to a}f\left(x\right)=+\infty$$

2. Si pour tout x de I, $f\left(x\right)\leqslant g\left(x\right)$ et si:

$$\lim_{x\to a}g\left(x\right)=-\infty\implies\lim_{x\to a}f\left(x\right)=-\infty$$

Théorème sur les limites

Limite d'une somme

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$et\ si\ g\ a\ pour\ limite$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$alors\ f\ +\ g\,a\ pour\ limite$	$l\ +\ l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	l	$l>0$	$l>0$	$l<\ 0$	$l<\ 0$

$si\ g\ a\ pour\ limite$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$alors\ f\ \cdot\ g\ a\ pour\ limite$	$l\ \cdot\ l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un quotient

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$et\ si\ g\ a\ pour\ limite$	$l' \neq 0$	$-\infty\ ou\ +\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' >$
$alors\ \frac{f}{g}\ a\ pour\ limite$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un quotient

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	$l > 0\ ou\ +\infty$	$l > 0\ ou\ +\infty$	$l < 0\ ou\ -\infty$
$et\ si\ g\ a\ pour\ limite$	0^+	0^-	0^+
$alors\ \frac{f}{g}\ a\ pour\ limite$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Remarque

f.i. signifie forme indéterminée

Formes indéterminées

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

$$1^\infty$$