

# **SCHWINGUNGEN**

## ***Definition***

Eine mechanische Schwingung ist die periodische Bewegung eines Körpers um seine Ruhelage.

## **Rücktreibende Kraft**

Schwingungen werden durch eine stets zur Ruhelage hin wirkende Kraft verursacht. Diese Kraft wird als rücktreibende Kraft bezeichnet.

## **Schwingungsdauer**

Die Periodendauer oder Schwingungsdauer  $T$  ist die zeitliche Dauer einer vollständigen Schwingung.

$$T = \frac{t}{n}$$

## ***Einheit***

$$[T] = 1s$$

## **Frequenz**

Die Frequenz  $f$  gibt an, wie oft ein Körper in einer Sekunde hin und her schwingt.

$$f = \frac{1}{T}$$

## ***Einheit***

$$[f] = 1Hz$$

## **Elongation**

Die Elongation oder momentane Auslenkung  $y(t)$  gibt an, wie weit der schwingende Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt von seiner Ruhelage entfernt ist.

$$y(t) = y_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

**Einheit**

$$[y(t)] = m$$

## **Amplitude**

Die Amplitude  $y_{max}$  ist der größte Abstand des schwingenden Körpers von der Ruhelage.

**Einheit**

$$[y_{max}] = m$$

## **Harmonische Schwingung**

Eine Schwingung bei der die Elongation  $y$  in Abhängigkeit der Zeit  $t$  eine Sinuskurve ergibt, bezeichnet man als Harmonische Schwingung oder Sinusschwingung.

**Rücktreibende Kraft:**

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{y}$$

## **Phasenwinkel**

Der Winkel  $\varphi$ , den der Radiusvektor zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  mit der positiven x-Achse einschließt heißt Phasenwinkel oder Phase der Schwingung. Die Phase kennzeichnet den augenblicklichen Schwingungszustand.

$$\varphi_0 = \omega t$$

### ***Einheit***

$$[\varphi_0] = rad$$

### **y(t) - t - Gesetz**

Eine lineare Schwingung, die mit der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung übereinstimmt heißt harmonische Schwingung oder Sinusschwingung.

$$y(t) = y_{max} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

### **Kreisfrequenz**

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

### ***Einheit***

$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

### **Auslenkung y, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a**

$$y(t) = y_{max} \sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = v(t)$$

$$v(t) = y_{max} \omega \cos(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = a(t)$$

$$a(t) = -\omega^2 y_{max} \sin(\omega t)$$

### **Richtgröße**

Die Richtgröße entspricht der Federkonstante des Hooke'schen Gesetzes.

## ***Einheit***

$$[D] = \frac{N}{m}$$

## ***Formeln***

$$D = m\omega^2$$

$$D = \frac{m \cdot g}{l}$$

## **Phasendifferenz**

### ***Definition***

Die Phasendifferenz zweier Schwingungen gleicher Frequenz ist der Phasenwinkel  $\Delta\varphi$ , um den beide Schwingungen verschoben sind.  $\Delta\varphi$  entspricht der Zeitdifferenz:  $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$

## **Fadenpendel**

### ***Herleitung***

Bei einem Fadenpendel ist die rücktreibende Kraft  $\vec{F}_r$  tangential zum Kreisbogen und zur Elongation  $y$ , die in endgegengerichte. Sie ist gleich der Resultierenden aus der Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  des anhängenden Körpers und der in Richtung des Fadens wirkende Spannkraft  $\vec{F}_x$ :

$$\vec{F}_r = \vec{F}_G + \vec{F}_x$$

Projektion auf  $(Ox)$ :

$$F_r = -F_G \cdot \sin(\alpha)$$

Mit  $y = l \cdot \alpha$  ( $\alpha$  in Bogenmaß) wird die vorherige Gleichung zu:

$$\frac{F_r}{y} = -\frac{F_G}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$

Bei Kleinwinkelnäherung:  $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$

$$F_r = -\frac{F_G}{l} \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y$$

Mit:  $D = \frac{m \cdot g}{l}$

$$F_r = -D \cdot y$$

Für kleine Winkel  $\alpha$  ist die rücktreibende Kraft  $F_r$ , der Elongation  $y$  proportional, sodass die Schwingung des Fadenpendels harmonisch ist. Mit der Formel für die Dauer einer harmonischen Schwingung folgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

### ***Gültigkeitsbedingungen***

Die gefundene Formel gilt nur:

1. für kleine Auslenkungen.
2. wenn die Masse des Fadens gegenüber des Pendelkörpers vernachlässigt werden kann.
3. wenn die Pendelmasse als punktförmig angenommen wird.

### ***Formel***

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

## **Federpendel**

### ***Herleitung***

Durch Anhängen des schwingenden Körpers mit der Masse  $m$  wird die Feder um die Strecke  $s_0$  verlängert. Nach dem Hooke'schen Gesetz ist die Verlängerung  $\vec{s}_0$  innerhalb der Elastizitätsgrenzen der Schraubenfeder direkt proportional zur Federkraft

$$\vec{F}_{F,0} : \vec{F}_{F,0} = -D \cdot \vec{s}_0$$

, wobei  $D$  die Federkonstante der Schraubenfeder ist.

Projektion auf  $(Oy)$  :

$$F_{R,0,y} = -D \cdot s_0 (1)$$

An dem schwingenden Körper wirken seine Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  und die Federkraft  $\vec{F}_F$ . In der Ruhelage gilt Kräftegleichgewicht und somit:

$$\vec{F}_G + \vec{F}_{F,0} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{F,0} = -\vec{F}_G$$

Projektion auf  $(Oy)$  :

$$F_{F,0,y} = -F_G (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir:

$$F_G = D \cdot s_0 (3)$$

Wird die Feder ausgelenkt, herrscht kein Kräftegleichgewicht und die Resultierende der beiden wirkenden Kräfte ist gleich der rücktreibenden Kraft

$$\vec{F}_r : \vec{F}_r = \vec{F}_F + \vec{F}_G$$

Projektion auf  $(Oy)$  :

$$F_{F,y} = -F_F \text{ und } F_{G,y} = -F_G$$

Die Feder wurde dann insgesamt um  $y + s_0$  gedehnt. Es gilt:

$$F_F = -D \cdot (s_0 + y) \quad (4)$$

Somit erhalten wir:  $F_{r,y} = -F_F + F_G$

Mit (3) und (4):

$$F_{r,y} = -D \cdot y$$

Für die rücktreibende Kraft  $F_r$  beim Fadenpendel gilt ebenfalls ein lineares Kraftgesetz.

### ***Gültigkeitsbedingungen***

Die Gefundene Formel gilt nur wenn:

1. die Periodendauer unabhängig von der Amplitude  $y_{max}$  der Schwingung ist.
2. die Periodendauer direkt proportional zu der Quadratwurzel aus Masse  $m$  des Pendelkörpers ist.

(bei gleicher Federkonstante)

$$T \sim m$$

3. die Periodendauer indirekt proportional zu der Quadratwurzel aus der Federkonstante  $D$  der Feder ist.

(bei gleicher Masse)

$$T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$$

### ***Formel***

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

## **Energie eines harmonischen Oszillators**

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2 \sin^2(\omega t)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2 \cos^2(\omega t)$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2$$

## **Überlagerungen von Schwingungen**

### ***Frequenz der Schwebung***

$$f_s = |f_1 - f_2|$$

### ***Frequenz des Schwebungstons***

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$