

# **KREISBEWEGUNGEN**

## **Winkelgeschwindigkeit, Drehfrequenz**

### ***Definition***

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist der Quotient aus dem durchlaufenden Drehwinkel  $\Delta\varphi$  und dem dafür benötigten Zeitintervall  $\Delta t$ .

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$[\Delta\varphi] = rad$$

$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

### ***Anmerkung***

Durch die Definition des Bogenmaßes oder Radianen erhält man:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

## **Bahngeschwindigkeit**

### ***Herleitung***

Die Bahngeschwindigkeit  $v$  entspricht dem Quotienten aus dem zurückgelegten Bogenstück  $\Delta s$  und dem dafür benötigten Zeitintervall  $\Delta t$ .

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$$

### ***Definition***

Die Bahngeschwindigkeit  $v$  ist das Produkt aus Bahnradius  $r$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

$$v = r \cdot \omega$$

## **Periodendauer, Umlaufzeit**

Die Umlaufzeit oder Periodendauer ist die benötigte Zeit  $T$  für einen Umlauf.

$$T = \frac{t}{n}$$

$n$ , Anzahl an Umläufen

**Einheit**

$$[T] = s$$

## **Umdrehungsfrequenz, Drehzahl**

Die Umdrehungsfrequenz oder Drehzahl  $f$ , gibt die Anzahl an Umläufen pro Sekunde an.

$$f = \frac{1}{T}$$

**Einheit**

$$[f] = Hz$$

$Hz$ , Hertz

## **Zentripetalkraft**

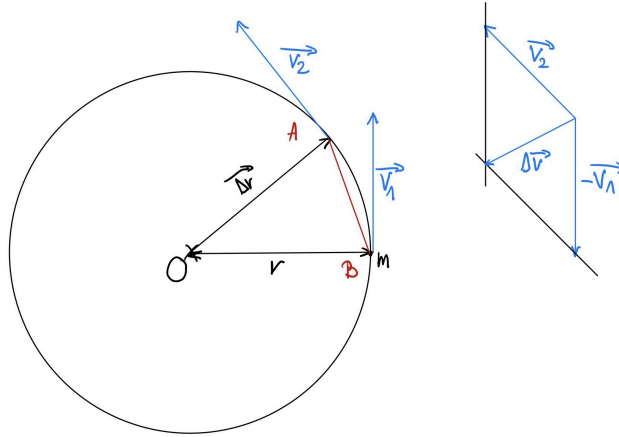
Die Zentripetalkraft ist die einzig wirkende Kraft, die den Körper auf der Kreisbahn hält. Sie wird bestimmt durch Anwenden des Grundgesetzes der Mechanik.

$$\vec{F}_r = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_r$$

**Herleitung**

In der Figur ist eine punktförmige Masse  $m$  die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  auf einer Kreisbahn bewegt mit Radius  $r$  und der

Positionsänderung  $\vec{\Delta r}$  in einem kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  um den Winkel  $\Delta \Theta$ .



Da die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zu jedem Zeitpunkt die Tangente zur Kreisbahn ist, ist die Resultierende aus  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  zum Kreiszentrum gerichtet. Es gilt:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\Delta v}$$

und:

$$v = v_1 = v_2$$

Die Richtung von  $\vec{\Delta v}$  ist radial und zum Kreiszentrum gerichtet. Sie entspricht die Winkelhalbierenden von  $\Delta \Theta$  im inneren des Kreises. Durch Ähnlichkeit beider Dreiecke kann Thales angewendet werden:

$$\frac{\|\vec{\Delta r}\|}{r} = \frac{\|\vec{\Delta v}\|}{v}$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{\Delta r}\| = \frac{r}{v} \cdot \|\vec{\Delta v}\| \quad (1)$$

Für Kleinwinkelnäherung:

$$\widehat{AB} = [AB]$$

Es gilt also:

$$\|\vec{\Delta r}\| \approx v \cdot \Delta t \quad (2)$$

(1) gleich (2):

$$\frac{r}{v} \cdot \|\Delta \vec{v}\| \approx v \cdot \Delta t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\|\Delta \vec{v}\|}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$$

mit der Definition der Beschleunigung:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Einsetzen:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

### *Anmerkung*

Die Zentripetalkraft ist immer zu dem Kreiszentrum hin gerichtet.

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Durch einsetzen der Formel der Bahngeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r} \mid v = \omega \cdot r$$

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Durch einsetzen der Formel der Winkelgeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r \mid \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_r = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$