

VECTEURS

Vecteur

Définition

Un vecteur \vec{u} est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

Vocabulaire

Soit un vecteur \vec{u} tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors:

1. \overrightarrow{AB} est le vecteur d'origine A et d'extrémité B
2. La norme du vecteur \overrightarrow{AB} est la longueur du segment $[AB]$

On note:

$$\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|}_{\text{norme de } \overrightarrow{AB}} = AB$$

3. La direction du vecteur \overrightarrow{AB} est celle de la droite (AB)
4. Le sens du vecteur est celui de A vers B

Remarque

Le mot *norme* est parfois substitué par: amplitude, longueur, magnitude, module, scalaire

Norme d'un vecteur

Définition

Soit \vec{a} un vecteur, tel que

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dans une base (e_1, e_2) , alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Algébriquement

$$\begin{aligned}\|\vec{b}\| &= \left\| \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} \\ \Leftrightarrow \|\vec{b}\| &= \sqrt{(\lambda^2 a_1^2) + (\lambda^2 a_2^2)} \\ \Leftrightarrow \|\vec{b}\| &= \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2)} \\ \Leftrightarrow \|\vec{b}\| &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \Leftrightarrow \|\vec{b}\| &= \begin{cases} \lambda \|\vec{a}\| & \text{si } \lambda > 0 \Rightarrow \|\vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{b}\| \\ -\lambda \|\vec{a}\| & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Vecteur nul

Définition

Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est un vecteur dont la norme est nulle $\|\vec{0}\| = 0$ et sa direction et son sens ne sont pas définis.

De plus, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Égalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont égaux si ils ont la même norme, le même direction et le même sens.

Représentant d'un vecteur

Definition

Soit deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} . \vec{u} est un vecteur représentant de \vec{v} si et seulement si \vec{u} est une translation de \vec{v} .

Vecteurs opposé

Définition

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont opposés si ils ont la même norme et le même direction, mais ils sont de sens opposés.

On note:

$$\vec{u} = -\vec{v}$$

Remarque

Si \vec{u} est un vecteur du plan, la translation, notée $t\vec{u}$, est l'application du plan lui-même qui associe à tout point M tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le point M' appelé image de M par $t\vec{u}$.

Composantes d'un vecteur

Soit \vec{u} un vecteur défini par: $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$, le vecteur a comme composantes:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

Produit scalaire

Définition

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan. On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Propriété

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul le produit scalaire est nul et la propriété est vraie puisque, par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Si les deux vecteurs sont non nuls, leurs normes sont non nulles donc :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= 0\end{aligned}$$

On obtient donc que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

cqfd.

Propriété

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et tout réel k :

- $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Propriété

Soit \vec{u} un vecteur du plan. Le carré scalaire de \vec{u} est le réel positif ou nul:

$$(\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Démonstration

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \underbrace{\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

cqfd.

Théorème

Pour tous vecteurs \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2} \cdot (\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u})^2 + 2 \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v})^2 \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2 \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2 \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2} \cdot (\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2) \end{aligned}$$

cqfd.

Vecteur dans l'espace vectoriel

Un vecteur peut s'exprimer de manière unique dans une base de l'espace vectoriel.

\overrightarrow{v} s'écrit alors comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

$$\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{v} = a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2}$$

a_1 et a_2 sont alors les composantes de \vec{v} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2)

Produit vectoriel

Définition

Soient deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , on définit le produit vectoriel de \vec{a} par \vec{b} comme le vecteur:

$$\vec{i} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$$

tel que

$$1. \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

et

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2. \quad \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme un système de coordonnées direct

Propriétés

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 , $\lambda \in \mathbb{R}$

Distributivité

Distributivité par rapport à l'addition vectoriel:

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Asymétrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Multiplication d'un scalaire

$$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

Produit vectoriel nul

Le produit vectoriel est nul si et seulement si:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{a} &= \vec{0} \text{ ou } \vec{b} = \vec{0} \text{ ou } \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0\end{aligned}$$

Pour: $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

$$\sin(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \equiv 0 [\pi]$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} \mid \varphi = 0 + k \cdot \pi$$