

# **FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES**

## **Normes sur $\mathbb{R}^n$**

On rappelle qu'on dispose sur  $\mathbb{R}^n$  de plusieurs normes différentes, en particulier :

- la norme  $L^1$ , définie pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- la norme euclidienne, définie pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

- la norme  $L^\infty$ , définie pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

## **Fonctions partielles**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $U \subset \mathbb{R}^p$ . Pour tout  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ , on peut définir la  $i$ -ème fonction partielle de  $f$  en  $a$  comme la fonction définie par

$$f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

Cette fonction est bien sûr définie pour les  $x$  tels que  $(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \in U$ .

## **Continuité**

### *Proposition*

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction continue. Alors les fonctions partielles de  $f$  sont continues en tout point de  $U$ .

### *Démonstration*

Soit  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$  fixé. Pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , on définit la  $i$ -ème fonction partielle de  $f$  en  $a$  par :

$$f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p).$$

On souhaite montrer que  $f_i$  est continue en  $x = a_i$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ , cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|x - a\| < \delta$$

alors

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x - a_i| < \delta$ , et considérons le point :

$$x^{(i)} = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p).$$

Alors  $\|x^{(i)} - a\| = |x - a_i| < \delta$ , donc :

$$\|f(x^{(i)}) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\|f_i(x) - f_i(a_i)\| = \|f(x^{(i)}) - f(a)\| < \varepsilon,$$

ce qui montre que  $f_i$  est continue en  $x = a_i$ .

□

### **Théorème**

Toute fonction linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre est continue.

### **Démonstration**

Quitte à choisir une base dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée, on peut se ramener au cas d'une application linéaire  $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . De plus, comme toutes

les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer la continuité pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

On note  $M = (m_{j,i})_{j=1,\dots,q; i=1,\dots,p}$  la matrice de  $u$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^q$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ , alors

$$u(x) = y = (y_1, \dots, y_q), \quad \text{avec } y_j = \sum_{i=1}^p m_{j,i} x_i \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, q\}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^p$ . On veut montrer la continuité de  $u$  en  $x$ . Soit  $\omega > 0$  et posons  $\varepsilon = \omega/(mp)$ , où

$$m = \sup\{|m_{j,i}| \mid j \in \{1, \dots, q\}, i \in \{1, \dots, p\}\}$$

Soit  $x' \in \mathbb{R}^p$  tel que  $\|x' - x\|_\infty < \varepsilon$ . Par définition de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  :

$$|x'_i - x_i| < \varepsilon.$$

On considère  $y = u(x)$  et  $y' = u(x')$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, q\}$ , on a :

$$\begin{aligned} |y'_j - y_j| &= \left| \sum_{i=1}^p m_{j,i} (x'_i - x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^p |m_{j,i}| \cdot |x'_i - x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^p m \cdot \|x' - x\|_\infty \\ &= mp\varepsilon \\ &= \omega \end{aligned}$$

Donc  $\|y' - y\|_\infty < \omega$ , ce qui prouve la continuité de  $u$  en  $x$ .

□

## Dérivée suivant un vecteur

### **Définition**

Soit  $x \in U$  et  $v \in \mathbb{R}^p$ . Si la limite suivante existe :

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

alors on dit que  $f$  admet en  $x$  une dérivée suivant le vecteur  $v$ , et on note cette dérivée  $\partial_v f(x)$ .

### **Définition**

La  $i$ -ème dérivée partielle de  $f$  en  $x \in U$ , pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{e_i} f.$$

On note parfois plus simplement  $\partial_i f$  pour  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . On peut remarquer que les dérivées partielles de  $f$  correspondent exactement aux dérivées des fonctions partielles.

### **Remarque**

Les règles de calcul usuelles pour les dérivées restent valables pour les dérivées par rapport à un vecteur et pour les dérivées partielles. On a par exemple :

$$\partial_v(fg) = f \cdot \partial_v g + (\partial_v f) \cdot g$$

en tout point, si  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ . La preuve est immédiate si on se ramène à la définition de  $\partial_v f$  comme dérivée en 0 de  $t \mapsto f(x + tv)$ .

## **Différentielle**

### **Définition**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ , avec  $U \subset \mathbb{R}^p$ . Soit  $x \in U$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $x$ , de différentielle une application linéaire  $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , s'il existe une fonction  $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ , continue et nulle en  $x$ , telle que pour tout  $y \in U$ ,

$$f(y) = f(x) + u(y - x) + \|y - x\|\varepsilon(y).$$

On note  $d_x f$ , ou parfois  $df(x)$ , la différentielle de  $f$  en  $x$ . On dit que  $f$  est différentiable sur  $U$  si elle est différentiable en tout point de  $U$ .

### **Remarque**

Une autre manière d'écrire la définition de la différentielle est sous la forme :

$$f(x + h) = f(x) + d_x f(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

### **Démonstration**

Si  $u$  et  $v$  sont deux différentielles de  $f$  en  $x$ , on doit avoir pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$  assez petit : \[

$$f(x + h) = f(x) + u(h) + \|h\|\epsilon(h)$$

et

$$f(x + h) = f(x) + v(h) + \|h\|\epsilon'(h),$$

donc

$$v(h) - u(h) = \|h\|(\epsilon'(h) - \epsilon(h)),$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} (\epsilon'(h) - \epsilon(h)) = 0$ . Comme  $u$  et  $v$  sont linéaires par hypothèse, il suit que  $v - u = 0$  et donc que  $u = v$ .

□

### **Propositions**

La différentielle a les propriétés suivantes.

- Si  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  sont deux fonctions différentiables, alors  $f + g$  est différentiable, de différentielle  $d(f + g) = df + dg$ .
- Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est différentiable et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f$  est différentiable, de différentielle  $d(\lambda f) = \lambda df$ .
- Si  $f = (f_1, \dots, f_q)$ , alors  $f$  est différentiable si et seulement si les  $f_i$  sont toutes différentiables, et on a  $df = (df_1, \dots, df_q)$ .

### ***Théorème***

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction différentiable en  $x \in U$ . Alors toutes les dérivées partielles de  $f$  en  $x$  existent, et si  $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ , alors

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

## **Jacobienne**

### ***Définition***

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction différentiable en  $x \in U$ . Sa matrice jacobienne en  $x$  est la matrice, notée  $J_f(x)$ , de l'application linéaire  $d_x f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^q$ .

### ***Proposition***

Si  $f = (f_1, \dots, f_p)$ , alors on peut écrire  $J_f(x)$  sous la forme :

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_p f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \cdots & \partial_p f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_q & \partial_2 f_q & \cdots & \partial_p f_q \end{pmatrix}.$$

### ***Définition***

Si  $p = q$  et si  $f$  est différentiable en  $x \in U$ , on appelle jacobien de  $f$  le déterminant de sa matrice jacobienne. On le note :

$$D(f_1, \dots, f_p)/D(x_1, \dots, x_p) = \det(J_f(x)).$$

## Fonctions de classe $C^1$

### *Théorème*

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction qui admet en chaque point des dérivées partielles, et dont les dérivées partielles sont continues en  $x \in U$ . Alors  $f$  est différentiable en  $x$ .

### *Démonstration*

Soit  $h \in \mathbb{R}^p$  choisi assez petit pour que la boule de centre  $x$  et de rayon  $\|h\|_2$  soit contenue dans  $U$ . On introduit une suite de points qui permet de passer de  $x$  à  $x + h$  comme suit :

$$\begin{aligned} x_0 &= x, & x_1 &= x_0 + h_1 e_1, \\ x_2 &= x_1 + h_2 e_2, \dots, \\ x_p &= x_{p-1} + h_p e_p = x + h. \end{aligned}$$

On a alors pour tout  $i$  entre 0 et  $p - 1$  :

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_i) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_i + th_{i+1} e_{i+1}) dt \\ &= \int_0^1 h_{i+1} (\partial_{i+1} f)(x_i + th_{i+1} e_{i+1}) dt. \end{aligned}$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, les  $\partial_i f$  sont continus en  $x$ , donc pour tout  $i$  entre 1 et  $p$ ,

$$\exists \alpha_i > 0, \forall y \in U, \|y - x\|_2 \leq \alpha_i \Rightarrow \|\partial_i f(y) - \partial_i f(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Posons  $\alpha = \inf_i \alpha_i$ . Si  $\|h\|_2 \leq \alpha$ , tous les  $x_i$  sont dans la boule de centre  $x$  et de rayon  $\alpha$ , et on a donc pour tout  $i$  entre 0 et  $p - 1$  :

$$\begin{aligned}
f(x_{i+1}) - f(x_i) - h_{i+1}(\partial_{i+1}f)(x) &= h_{i+1} \int_0^1 ((\partial_{i+1}f)(x_i + th_{i+1}e_{i+1}) - (\partial_{i+1}f)(x)) dt \\
&\leq |h_{i+1}| \int_0^1 \|(\partial_{i+1}f)(x_i + th_{i+1}e_{i+1}) - (\partial_{i+1}f)(x)\|_2 dt \\
&\leq |h_{i+1}| \cdot \frac{\varepsilon}{p}
\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on obtient que

$$\|f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^p h_i(\partial_i f)(x)\|_2 \leq \varepsilon \|h\|_2,$$

ce qui montre que  $f$  est différentiable en  $x$ .

□

### **Définition**

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est de classe  $C^1$  si elle admet en tout point des dérivées partielles, et si ses dérivées partielles sont continues.

## **Différentielle des fonctions composées**

### ***Théorème de la différentielle de la composée***

Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction différentiable, avec  $U \subset \mathbb{R}^p$ , et soit  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^r$  différentiable, avec  $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^q$ . Alors la composée  $g \circ f$  est différentiable, et sa différentielle est donnée par

$$d_x(g \circ f) = (d_{f(x)}g) \circ d_x f.$$

### ***Démonstration***

Soit  $x \in U$ . Comme  $g$  est différentiable en  $f(x)$ , on peut écrire pour  $z \in V$  :

$$g(z) - g(f(x)) - (d_{f(x)}g)(z - f(x)) = \|z - f(x)\| \epsilon(z),$$

avec  $\lim_{f(x)} \epsilon = 0$ .

On applique ceci avec  $z = f(y)$  pour  $y \in U$ , on obtient que

$$g(f(y)) - g(f(x)) - (d_{f(x)}g)(f(y) - f(x)) = \|f(y) - f(x)\|\epsilon'(y),$$

Maintenant on sait que  $f$  est aussi différentiable en  $x$ , si bien que

$$f(y) - f(x) - (d_x f)(y - x) = \|y - x\|\epsilon''(y),$$

avec  $\lim_x \epsilon'' = 0$ .

En utilisant la dernière relation dans l'avant-dernière, on trouve que

$$g(f(y)) - g(f(x)) - (d_{f(x)}g)((d_x f)(y - x)) = \|y - x\|\epsilon'''(y),$$

avec  $\lim_x \epsilon''' = 0$ . Ceci établit que  $g \circ f$  est différentiable, de différentielle en  $x$  la fonction linéaire

$$d_x(g \circ f) = (d_{f(x)}g) \circ d_x f$$

□

### ***Corollaire***

Sous les hypothèses du théorème 6.1, les matrices jacobienes de  $f, g$  et  $g \circ f$  vérifient :

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$$

## **Accroissements finis**

### ***Théorème des accroissements finis***

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable, avec  $U \subset \mathbb{R}^p$  ouvert. Soit  $x \in U$  et soit  $h \in \mathbb{R}^p$  telle que  $[x, x + h] \subset U$ . Alors il existe  $h^1, h^2, \dots, h^p \in [0, h]$  tels que

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(x + h^i)$$

### **Démonstration**

On voit d'après le théorème différentielle de la composée que

$$\frac{d}{dt}f(x + th) = d_{x+th}f(h)$$

Il suit que

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(x + th) dt \\ &= \sum_{i=1}^p \int_0^1 h_i \partial_i f(x + th) dt \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à chacune des intégrales, on obtient des valeurs  $t_i \in [0, 1]$  telles que

$$\partial_i f(x + t_i h) = \int_0^1 \partial_i f(x + th) dt$$

et le résultat suit en posant  $h^i = t_i h$ .

### **Théorème**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction différentiable dont la différentielle est nulle, avec  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^p$ . Alors  $f$  est constante.

### **Démonstration**

On considère d'abord le cas  $q = 1$ . Soit  $x \in U$ , et soit  $\Omega = f^{-1}(f(x))$ . Comme  $f$  est différentiable, elle est continue, donc  $\Omega$  est fermé. Mais le théorème précédent indique que  $\Omega$  est ouvert. Comme  $U$  est connexe, il suit que  $\Omega = U$  et donc  $U$  est constante.

Le cas général suit du cas  $q = 1$  en considérant les fonctions coordonnées de  $f$ .

## **Dérivées partielles d'ordre supérieur**

## Définition

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ , avec  $U \subset \mathbb{R}^p$ , et soit  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, \dots, p\}$ . La dérivée partielle d'ordre  $n$  par rapport à  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  est définie récurrentement par

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left( \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}} f \right)$$

## Remarque

On note parfois simplement

$$\partial_{i_1, \dots, i_l}^n f$$

## Théorème

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction telle que les dérivées partielles  $\partial_i \partial_j f$  et  $\partial_j \partial_i f$  existent et sont continues. Alors on a en tout point

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$

## Démonstration

On note d'abord qu'il suffit de montrer cette égalité lorsque  $q = 1$ , puisque le cas général suit alors. On va donc supposer que c'est le cas.

Soit  $x \in U$ , et soit  $h_i, h_j$  tels que la boule de centre  $x$  et de rayon  $\max(|h_i|, |h_j|)$  soit contenue dans  $U$ . On note  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

On a

$$\begin{aligned} & f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x) \\ &= (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_i e_i)) + (f(x + h_i e_i) - f(x)) \\ &= (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) + (f(x + h_j e_j) - f(x)) \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions, on voit que :

$$(f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x))$$

$$= (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_i e_i)) - (f(x + h_j e_j) - f(x))$$

On va écrire chacun des deux côtés de cette égalité comme une double intégrale.

On note que

$$\begin{aligned} f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j) &= \int_{s=0}^{h_i} \partial_i f(x + s e_i + h_j e_j) ds \\ f(x + h_i e_i) - f(x) &= \int_{s=0}^{h_i} \partial_i f(x + s e_i) ds \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x)) \\ = \int_{s=0}^{h_i} (\partial_i f(x + s e_i + h_j e_j) - \partial_i f(x + s e_i)) ds \\ = \int_{s=0}^{h_i} \int_{t=0}^{h_j} \partial_j \partial_i f(x + s e_i + t e_j) dt ds \end{aligned}$$

Quand  $h_i, h_j \rightarrow 0$ , cette expression est équivalente à

$$(f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x)) \sim h_i h_j \partial_j \partial_i f(x)$$

De même en échangeant le rôle de  $x_i$  et  $x_j$  on voit que

$$\begin{aligned} (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_i e_i)) - (f(x + h_j e_j) - f(x)) \\ = \int_{t=0}^{h_j} \int_{s=0}^{h_i} \partial_i \partial_j f(x + s e_i + t e_j) ds dt \end{aligned}$$

qui est équivalente quand  $h_i, h_j \rightarrow 0$ , à

$$(f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x)) \sim h_i h_j \partial_i \partial_j f(x)$$

Comme les deux expressions sont égales, on obtient le résultat.

□

## Difféomorphismes de classe $C^k$

*Définition*

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est de classe  $C^k$  (pour  $k \in \mathbb{N}$ ) si toutes les dérivées  $k$ -ièmes de  $f$  existent et sont continues.

### ***Propositions***

- Les fonctions de classe  $C^k$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}^q$ , où  $U \subset \mathbb{R}^p$ , forment un espace vectoriel.
- La composée de deux fonctions de classe  $C^k$  est une fonction de classe  $C^k$ .
- La notion de difféomorphisme ajoute à la notion de fonction de classe  $C^k$  l'existence d'un inverse de même régularité. On note que l'espace de départ et d'arrivée doivent avoir la même dimension.

### ***Définition***

Une fonction  $f : U \rightarrow V$ , où  $U, V$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^p$ , est un difféomorphisme si elle est de classe  $C^1$ , bijective, et admet un inverse lui-même de classe  $C^1$ . On dit que  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$  si  $f$  est un difféomorphisme,  $f$  est de classe  $C^k$ , et  $f^{-1}$  est de classe  $C^k$ .

### ***Définition***

On note qu'une fonction de classe  $C^k$  qui est une bijection n'est pas toujours un difféomorphisme de classe  $C^k$ . Par exemple, la fonction  $t \mapsto t^3$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , mais son inverse n'est pas dérivable en 0.

## **Théorème d'inversion locale**

### ***Théorème d'inversion locale***

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction de classe  $C^1$ , avec  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $x_0 \in U$  tel que  $d_{x_0} f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $U$  et un voisinage  $W$  de  $f(x_0)$  dans  $\mathbb{R}^p$  tel que la restriction de  $f$  à  $V$  est un

difféomorphisme de  $V$  sur  $W$ . Si  $f$  est de classe  $C^k$ , sa restriction à  $V$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

### **Démonstration**

On va d'abord montrer l'existence d'un inverse. On note qu'il suffit de montrer le résultat si  $d_0 f = \text{Id}$ , puisque le cas général s'en déduit en considérant  $(d_0 f)^{-1} \circ f$ .

Comme  $f$  est continue,  $df$  est continue, et il existe donc  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in B(0, r)$  (la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $r$ ),  $\|\text{Id} - df\| \leq 1/2$ .

Soit  $y \in B(0, r/2)$ . On définit une fonction  $\phi_y : B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^p$  par

$$\phi_y(x) = x - f(x) + y$$

On note que  $\|d\phi_y\| \leq 1/2$ , il suit que  $\phi_y(B(0, r)) \subset B(y, r/2) \subset B(0, r)$ . On peut donc appliquer à  $\phi_y$  le théorème du point fixe, qui montre qu'il existe un unique  $x \in B(0, r)$  tel que  $\phi_y(x) = x$ .

Ainsi on a

$$x - f(x) + y = x$$

si bien que  $f(x) = y$ .

Réciproquement, tout élément  $x \in B(0, r)$  tel que  $f(x) = y$  correspond à un point fixe de  $\phi_y$ , si bien que  $y$  a un unique antécédent  $x$  dans  $B(0, r)$ . On peut donc en déduire que  $f$  définit une bijection entre  $V = B(0, r) \cap f^{-1}(B(0, r/2))$ . Comme  $f$  est continue, cet ensemble  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^p$ .

On va maintenant montrer que  $f^{-1}$  est différentiable, de différentielle  $d_y f^{-1} = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}$ . Soit  $y \in B(0, r/2)$ , et soit  $h$  tel que  $y, y+h \in B(0, r/2)$ .

Posons  $x = f^{-1}(y)$ , et  $k = f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)$ . On a alors

$$f(x+k) - f(x) = (y+h) - y = h$$

Comme  $f$  est différentiable, on a

$$h = d_x f(k) + o(k)$$

ce qui se traduit par

$$k = (d_x f)^{-1}(h) + o(h)$$

et donc  $f^{-1}$  est différentiable, de différentielle  $d_y f^{-1} = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}$

Finalement, l'application  $y \mapsto d_y f^{-1}$  est continue d'après la formule qui détermine  $d_y f^{-1}$ , et  $f^{-1}$  est donc  $C^1$ . Cette même formule montre que si  $f$  est  $C^k$ , alors  $f^{-1}$  aussi.

□

### **Définition**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  et  $k > 0$ . Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  est  $k$ -lipschitzienne si pour tout  $x, y \in \Omega$  on a  $\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$ .

### **Théorème du point fixe**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  fermé, et soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  une fonction  $k$ -lipschitzienne, avec  $k < 1$ . Alors  $f$  admet un unique point fixe dans  $\Omega$ .

### **Démonstration**

Soit  $x_0 \in \Omega$ . On définit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence, par  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Comme  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|f(x_1) - f(x_0)\| \\ &\leq k\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \|x_3 - x_2\| &= \|f(x_2) - f(x_1)\| \\ &\leq k\|x_2 - x_1\| \\ &\leq k^2\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

et par un argument de récurrence simple, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

On va montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. On note pour ça que pour  $p \geq q$ , on a

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &= \left\| \sum_{l=q}^{p-1} (x_{l+1} - x_l) \right\| \\ &\leq \sum_{l=q}^{p-1} \|x_{l+1} - x_l\| \\ &\leq \sum_{l=q}^{p-1} k^l \|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^q \|x_1 - x_0\| \frac{1 - k^{p-q}}{1 - k} \\ &\leq \frac{k^q \|x_1 - x_0\|}{1 - k} \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ , il suit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, et elle admet donc une limite  $x_\infty$ . Comme  $\Omega$  est fermé,  $x_\infty \in \Omega$ .

On note maintenant que comme  $f$  est continue,

$$f(x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty,$$

donc  $x_\infty$  est bien un point fixe de  $f$ .

Enfin, si  $f$  admet un autre point fixe  $y_\infty$ , on a

$$\|y_\infty - x_\infty\| = \|f(y_\infty) - f(x_\infty)\| \leq k \|y_\infty - x_\infty\|$$

donc  $\|y_\infty - x_\infty\| = 0$ , et donc  $y_\infty = x_\infty$

□

## Théorème des fonctions implicites

## Théorème des fonctions implicites

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^k$ , avec  $0 \in U \subset \mathbb{R}^{p+1}$ , et supposons que  $\partial_{p+1}f \neq 0$  en 0. Il existe alors un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^p$  et une application  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x' = (x_1, \dots, x_p) \in V$ ,  $f(x', \phi(x')) = 0$ . De plus  $\phi$  est de classe  $C^k$ .

### Démonstration

On définit une fonction  $F : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$  en posant pour  $x = (x', x_{p+1})$  (avec  $x' \in \mathbb{R}^p$ ):

$$F(x', x_{p+1}) = (x', f(x', x_{p+1}))$$

On va montrer que la différentielle de  $F$  en 0,  $d_0F : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$ , est inversible.

On peut en effet calculer la matrice jacobienne de  $F$  en 0, elle a la forme suivante:

$$J_F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_1 f(0) & \partial_2 f(0) & \partial_3 f(0) & \cdots & \partial_p f(0) & \partial_{p+1} f(0) \end{pmatrix}$$

Comme  $\partial_{p+1}f(0) \neq 0$ , le déterminant de la matrice jacobienne est  $\partial_{p+1}f(0)$ , qui est non nul par hypothèse, et  $d_0F$  est un isomorphisme.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale, qui montre qu'il existe des voisinages  $U$  et  $W$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{p+1}$  et une fonction  $G : W \rightarrow U$  de classe  $C^k$  tels que  $G$  est l'inverse de la restriction  $F|_U$  de  $F$  à  $U$ . Ainsi pour tout élément  $z$  de  $W$  on a  $G(z) \in U$  et  $F(G(z)) = z$ .

En particulier pour  $z = (z', 0)$ , avec  $z' \in \mathbb{R}^p$ , si  $G(z', 0) = (x', x_{p+1})$  alors on voit que  $F(x', x_{p+1}) = (z', 0)$  si bien que  $x' = z'$  et  $f(x', x_{p+1}) = 0$ , et donc

$f(z', x_{p+1}) = 0$ . On peut donc écrire:  $G(z', 0) = (z', \phi(z'))$ , et on voit alors que  $f(z', \phi(z')) = 0$  pour tout  $z' \in W \cap \mathbb{R}^p$ .

Comme  $G$  est de classe  $C^k$ , il en est de même pour  $\phi$ .

□

## Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

### *Définitions*

Soit  $U \subset \mathbb{R}^p$ , et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in U$ . On dit que  $f$  admet en  $x_0$ :

- un maximum, si

$$\forall x \in U, f(x) \leq f(x_0)$$

- un minimum, si

$$\forall x \in U, f(x) \geq f(x_0)$$

- un extremum, si  $f$  admet en  $x_0$  un maximum ou un minimum.

### *Définition*

Dans les mêmes conditions, on dit que  $f$  admet en  $x_0$  un maximum local (resp. un minimum local, un extremum local) s'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $U$  tel que la restriction de  $f$  à  $V$  admet en  $x_0$  un maximum respectivement un minimum, un extremum.

### *Théorème de la formule de Taylor à l'ordre 2*

Soit  $U \subset \mathbb{R}^p$  ouvert, et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Pour tout  $x \in U$  et tout  $h \in \mathbb{R}^p$  tel que  $[x, x + h] \subset U$ , il existe  $t \in [0, 1]$  tel que :

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p h_i h_j \partial_{ij}^2 f(x + th)$$

ou bien

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p h_i h_j \partial_{ij}^2 f(x) + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ .

### **Démonstration**

La première formule suit de l'application de la formule de Taylor usuelle pour les fonctions d'une variable à la fonction  $t \mapsto f(x + th)$ . La seconde formule suit de la première.

□

## **Matrice Hessienne**

### **Définition**

La matrice hessienne de  $f$  en  $x$ , ou simplement hessienne de  $f$  en  $x$ , est la matrice  $p \times p$  définie par :

$$Hf(x) = (\partial_{i,j}^2 f(x))_{i,j=1,\dots,p}$$

### **Proposition**

Supposons que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  et admet un extremum local en  $x$ . Alors  $d_x f = 0$ .

### **Démonstration**

On considère la fonction  $g : t \mapsto f(x + t\delta)$ , où  $\delta = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_p f(x))$ . On remarque que, en  $t = 0$ , on a

$$g'(0) = d_x f(\delta) = \|\delta\|^2 > 0$$

si bien que  $x$  ne peut pas être un minimum local ou un maximum local.

□

### **Théorème**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , et soit  $x \in U$  un point tel que  $d_x f = 0$  et la matrice  $Hf(x)$  est définie négative. Alors  $f$  admet en  $x$  un maximum local. Si  $Hf(x)$  est définie positive, alors  $f$  admet en  $x$  un minimum local. Si  $Hf(x)$  a des valeurs propres positives et d'autres négatives, alors  $x$  n'est pas un extremum local.

### **Démonstration**

Dans les trois cas c'est une conséquence directe de la formule de Taylor à l'ordre 2 ci-dessus, puisque le signe de  $f$  au voisinage de  $x$  est déterminé par son hessien.

□

### **Théorème**

Soit  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ouvert, et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Soit  $x \in U$  tel que  $d_x f = 0$ . Alors :

- Si  $\det(Hf(x)) > 0$ , alors  $f$  admet en  $x$  un extremum local, qui est un maximum local si  $\text{Tr}(Hf(x)) < 0$  et un minimum local si  $\text{Tr}(Hf(x)) > 0$ .
- Si  $\det(Hf(x)) < 0$ , alors  $f$  admet en  $x$  un point critique qui n'est pas un extremum local.

### **Démonstration**

C'est une conséquence du théorème précédent, car une matrice  $2 \times 2$  est définie positive si et seulement si son déterminant et sa trace sont strictement positifs, et définie négative si et seulement si son déterminant est strictement positif et sa trace strictement négative.

□