

# **STRAHLENOPTIK**

## **Reflektion**

Es gibt 2 Arten von Reflektionen:

- Diffuse Reflektion
- Gesetzmäßige Reflektion

## **Reflektions Gesetz bei gemäßigter Reflektion**

Der einfallende Strahl, das Lot und der reflektierte Strahl liegen in einer Ebene.

Der Einfallswinkel  $\alpha$  ist gleich dem Reflektionswinkel  $\alpha'$

$$\alpha = \alpha'$$

## **Das Lot**

Das Lot (oder Einfallslot) ist eine Hilfslinie, welche senkrecht zum Spiegel steht, in dem Punkt wo der einfallende Lichtstrahl auf den Spiegel trifft.

## **Reelles, Virtuelles Bild**

### ***Reelles Bild***

Wenn das Bild mittels eines Schirmes aufgefangen werden kann, dann ist das Bild reell.

### ***Virtuelles Bild***

Wenn das Bild nicht mittels eines Schirmes aufgefangen werden kann, dann ist das Bild virtuell.

## **Brechungsindex**

Die Lichtgeschwindigkeit ist in materiellen Medien kleiner als im Vakuum.

Die Lichtgeschwindigkeit ist eine der wenigen exakten Naturkonstanten.

$$\approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Der Brechungsindex  $n$  oder Brechzahl eines Mediums ist definiert als der Quotient aus der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  im Vakuum und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Medium.

### ***Definition***

$$n = \frac{\text{Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum}}{\text{Geschwindigkeit des Lichtes im Medium}}$$

$$n = \frac{c_0}{c}$$

### ***Zusammenhang zwischen den Brechzahlen und den Lichtgeschwindigkeiten***

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c_0}{c_2}}{\frac{c_0}{c_1}} = \frac{c_1}{c_2}$$

## **Brechungsgesetz**

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \text{konstant} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

$\alpha$ , Winkel im Medium 1 (Einfallsinkel)

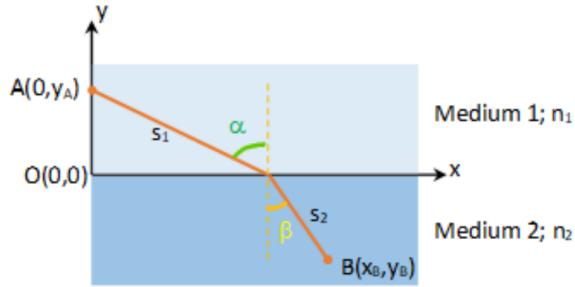
$\beta$ , Winkel im Medium 2 (Brechungswinkel)

## **Prinzip von Fermat**

Das Licht nimmt den Weg der am wenigsten Zeit beansprucht.

## **Brechungsgesetzes von Snellius**

### ***Herleitung***



Um von A nach B zu gelangen folgt der Strahl dem Prinzip von Fermat, er nimmt den Weg den die geringste Zeit beansprucht.

$$t_{gesamt} = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2}$$

Um die minimale Zeit zu bestimmen berechnen wir die Ableitung und stellen diese gleich null.

Laut Pythagoras gilt im Rechtwinkeligen Dreieck:

$$s_1 = \sqrt{x^2 + y_A^2}$$

$$s_2 = \sqrt{(x - x_B)^2 + y_A^2}$$

$$t'_{gesamt} = \left( \frac{\sqrt{x^2 + y_A^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}}{c_2} \right)'$$

Berechnung der Ableitungen

$$A = \sqrt{x^2 + y_A^2} \rightarrow A' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}}$$

$$B = \sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2} \rightarrow B' = \frac{-(x - x_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}}$$

$$C = c_1 \rightarrow C' = 0$$

$$D = c_2 \rightarrow D' = 0$$

$$t'_{gesamt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2} \cdot c_1} + \frac{-x + x_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2} \cdot c_2}$$

$$= \frac{\sin(\alpha)}{c_1} - \frac{\sin(\beta)}{c_2}$$

Ein minimum liegt vor wenn die Ableitung gleich 0 ist.

$$t'_{gesamt} = \frac{\sin(\alpha)}{c_1} - \frac{\sin(\beta)}{c_2} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Daraus folgt das Brechungsgesetz von Snellius

$$\Rightarrow n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

## Totalreflektion

### ***Bestimmung des Grenzwinkels***

Mit dem Brechungsgesetz:  $n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$

und  $\alpha = \alpha_G$  (*in Medium 1*)

und  $\beta = 90^\circ$  (*in Medium 2*)

Wir erhalten also aus dem Brechungsgesetz

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_G) = n_2 \cdot 1$$

$$\sin(\alpha_G) = \frac{n_2}{n_1}$$

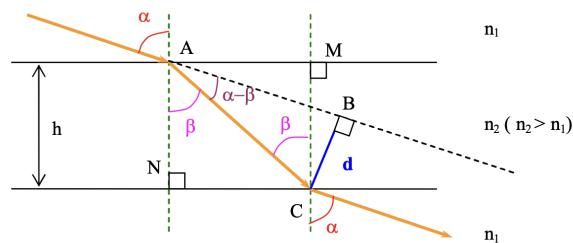
$$\alpha_G = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \beta_G$$

### ***Bemerkung***

Da die Sinusfunktion auf -1 bis 1 definiert ist, gibt es keinen Winkel den der Lichtstrahl einnehmen könnte; deshalb erhalten wir das Phänomen : *Totalreflektion*.

## Planparallele Platte

Fällt ein Lichtstrahl senkrecht auf eine planparallele Platte, so geht der Stahl ungebrochen hindurch. Fällt er schräg auf, so erfährt er beim Durchgang eine Parallelverschiebung.



### **Herleitung**

Wir wollen einen Ausdruck für die Parallelverschiebung  $d$  mit  $h$  und  $\alpha$  und den Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$ .

Im Dreieck  $ANC$  gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{AN}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{h}{\cos(\beta)}$$

Im Dreieck  $ABC$  gilt:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{d}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{d}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Suche nach einem Ausdruck für  $\beta$

Brechungsgesetz:

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \beta = \sin^{-1} \left[ \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin(\alpha) \right] \quad (1)$$

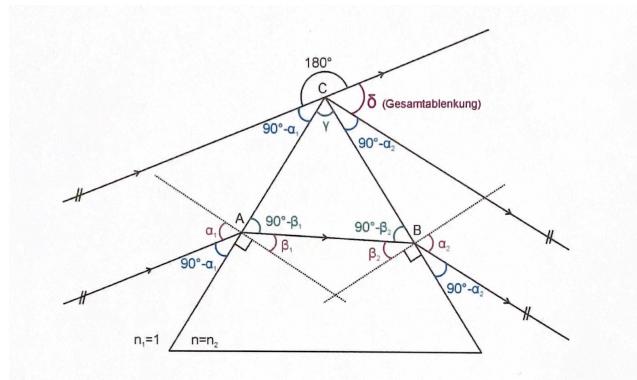
$$AC = AC$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{\cos(\beta)} = \frac{d}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (2)$$

(2) in (1) :

$$d = h \cdot \frac{\sin \left\{ \alpha - \sin^{-1} \left[ \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin(\alpha) \right] \right\}}{\cos \left\{ \sin^{-1} \left[ \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin(\alpha) \right] \right\}}$$

## Prisma



Im Dreieck  $ABC$ :

Die Summe der Internen Winkel beträgt  $180^\circ$ :

$$(90^\circ - \beta_1) + (90^\circ - \beta_2) + \gamma = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 180^\circ - \beta_1 - \beta_2 + \gamma = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow -\beta_1 - \beta_2 + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \beta_1 + \beta_2$$

Im Punkt C:

Der platte Winkel beträgt  $180^\circ$ :

$$\begin{aligned}(90^\circ - \alpha_1) + \gamma + (90^\circ - \alpha_2) + \delta &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow 180^\circ - \alpha_1 + \gamma - \alpha_2 + \delta &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow -\alpha_1 + \gamma - \alpha_2 + \delta &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta &= \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma\end{aligned}$$

## **Prismenwinkel, brechender Winkel**

### ***Definition***

Der brechende Winkel  $\gamma$  ist der Winkel zwischen der Eintrittsfläche und der Austrittsfläche des Lichtstrahls.

## **Ablenkungswinkel, Gesamtablenkung**

### ***Definition***

Der Ablenkungswinkel  $\delta$  ist der Winkel zwischen dem einfallenden und dem austretenden Lichtstrahl.

## **Minimalablenkung in einem Prisma**

### ***Formel der Ablenkung***

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

### ***Herleitung***

Um die Minimalablenkung  $\delta_{min}$  zu bestimmen muss bei Ableitung einer Funktion in der  $\delta$  vorhanden ist aufgestellt werden, und die gleich Null stellen:

Berechnung des Brechungsgesetzes an der Eintrittsfläche

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\beta_1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \sin^{-1} \left[ \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(\beta_1) \right]$$

Berechnung des Brechungsgesetzes an der Austrittsfläche

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\beta_1)$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \sin^{-1} \left[ \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(\beta_2) \right]$$

$$\text{mit } \gamma = \beta_1 + \beta_2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \sin^{-1} \left[ \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(\gamma - \beta_1) \right]$$

Für die Ablenkung  $\delta$  gilt also:

$$\delta = \sin^{-1} \left[ \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(\beta_1) \right] + \sin^{-1} \left[ \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(\gamma - \beta_1) \right] - \gamma$$

Für Minimalablenkung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\beta_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \cos(\beta_1)}{\sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \cdot \sin^2(\beta_1)}} + \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \cos(\gamma - \beta_1) \cdot (-1)}{\sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \cdot \sin^2(\gamma - \beta_1)}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\cos(\beta_1)}{\sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \cdot \sin^2(\beta_1)}} &= \frac{\cos(\gamma - \beta_1)}{\sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \cdot \sin^2(\gamma - \beta_1)}} \end{aligned}$$

Dies gilt nur wenn:

$$\cos(\beta_1) = \cos(\gamma - \beta_1)$$

und

$$\sin^2(\beta_1) = \sin^2(\gamma - \beta_1)$$

Die Gleichungen sind nur wahr wenn:

$$\beta_1 = \gamma - \beta_1$$

$\delta$  ist minimal wenn:

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{2}$$

Des weiteren gilt:

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \frac{\gamma}{2}$$

Das heißt der Strahlengang verläuft symmetrisch durch das Prisma.

## Fraunhoferformel

### **Herleitung**

$$\delta_{min} = 2 \cdot \alpha_1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\delta_{min} + \gamma}{2}$$

und

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2$$

Bei Minimalablenkung gilt:

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \frac{\gamma}{2}$$

Setzt man diese Gleichungen in das Brechungsgesetz ein, so ergibt dies:

$$\sin(\alpha_1) = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\delta_{min} + \gamma}{2}\right) = n \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min} + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

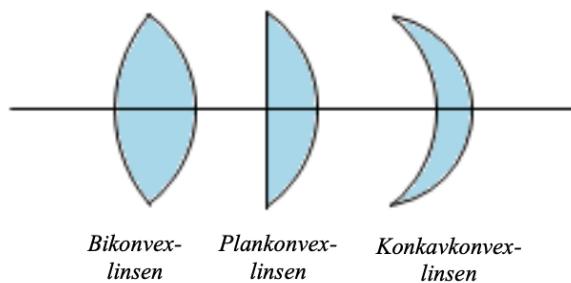
# Linsen

Eine Linse ist ein rotationssymmetrischer Körper der meist aus Glas oder Kunststoff hergestellt ist. Das optische Medium ist von zwei Kugelflächen begrenzt. Es ergeben sich zwei verschiedene Linsenarten.

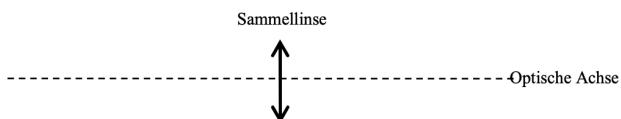
## Sammellinse, Konvexlinse

Es gibt:

1. Bikonvexlinsen
2. Plankonvexlinsen
3. Konkavkonvexlinsen



## Skizzierung

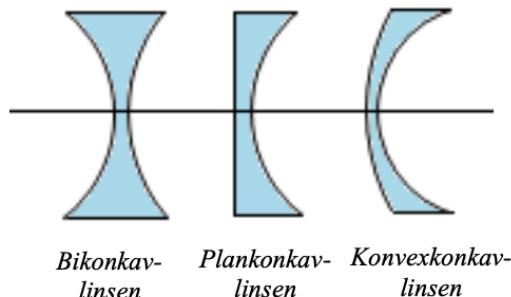


## Zerstreuungslinse, Konkavlinsen

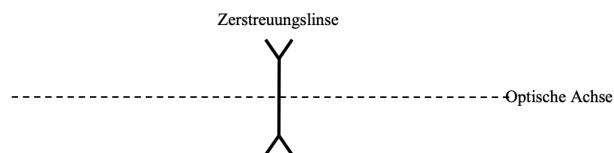
Die Zerstreuungslinse, Konkavlinse ist in der Mitte dünner als am Rand.

Es gibt:

1. Bikonkavlinsen
2. Plankonkavlinsen
3. Konvexkonkavlinsen



### ***Skizzierung***



## **Hauptstrahlen bei Linsen**

### ***Brennpunkt***

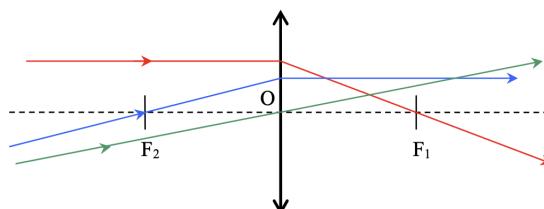
Ein Lichtbündel, welches parallel zur optischen Achse verläuft, wird nach dem Durchgang durch eine Sammellinse in einem Punkt gebündelt. Dieser Punkt wird Brennpunkt genannt.

Symmetrisch zum Mittelpunkt der Linse befindet sich der zweite Brennpunkt.

### ***Brennweite***

Die Distanz zwischen dem Mittelpunkt der Linse und dem Brennpunkt ist die Brennweite und wird mit dem Buchstaben  $f$  angeschrieben.

## **Sammellinse**



Brennpunkte:

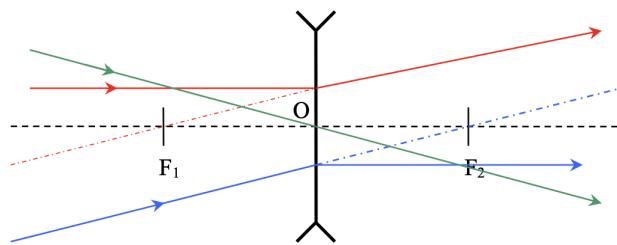
$F_1$  und  $F_2$

Brennweite:

$$OF_1 = OF_2 = f$$

1. Ein Lichtstrahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, verläuft nach der Brechung durch den Brennpunkt  $F_1$ . Ein Achsenparallelstrahl wird zum Brennpunktstrahl gebrochen.
2. Ein Lichtstrahl, der durch den Brennpunkt  $F_2$  verläuft, verläuft nach der Brechung parallel zur optischen Achse weiter. Ein Brennpunktstrahl wird zum Achsenparallelstrahl gebrochen.
3. Ein Lichtstrahl, der durch den Mittelpunkt  $O$  verläuft, verläuft in gerader Linie weiter. Ein Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen.

## Zerstreuungslinse



Brennpunkte:

$$F_1 \text{ und } F_2$$

Brennweite:

$$OF_1 = OF_2 = f$$

1. Ein Lichtstrahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, scheint nach der Brechung aus dem Brennpunkt  $F_1$  zu kommen. Ein Achsenparallelstrahl wird zum Brennpunktstrahl gebrochen.
2. Ein Lichtstrahl, der durch den Brennpunkt  $F_2$  verlaufen müsste, verläuft nach der Brechung parallel zur optischen Achse weiter. Ein

Brennpunktstrahl wird zum Achsenparallelstrahl gebrochen.

3. Ein Lichtstrahl, der durch den Mittelpunkt  $O$  verläuft, verläuft in gerader Linie weiter. Ein Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen.

## Bildentstehung an Linsen

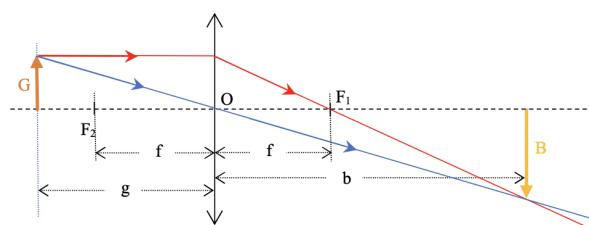
### 1. *reelle Bilder*

Die Strahlen konvergieren hinter der Linse, somit können diese Bilder auf einem Schirm aufgefangen werden.

### 2. *virtuelle Bilder*

Die Strahlen divergieren hinter der Linse, somit können diese Bilder durch unser Auge erkannt werden, jedoch nicht auf einem Schirm sichtbar gemacht werden.

Ob reelle oder virtuelle Bilder entstehen, hängt von der Position des Gegenstandes zur Linse ab.



Es gilt:

$F_1$  und  $F_2$  Brennpunkte

$G$ , Gegenstandsgröße

$B$ , Bildgröße

$g$ , Gegenstandsweite

$b$ , Bildweite

$f$ , Brennweite

# Bildkonstruktion Sammellinsen

Es gelten folgende Vorzeichenregeln:

## 1. *Brennweite*

Sammellinse:  $f > 0$

Zerstreuungslinse:  $f < 0$

## 2. *Gegenstand*

reeller Gegenstand:  $g > 0$  und  $G > 0$

virtueller Gegenstand:  $g < 0$  und  $G < 0$

## 3. *Bild*

reeller Bild:  $b > 0$  und  $B > 0$

virtueller Bild:  $b < 0$  und  $B < 0$

Gegenstandsweite $g$	Bildweite $b$	Bildeigenschaften
$+\infty$	$f$	verkleinert, umgekehrt, reell
$+\infty > g > 2f$	$f < b < 2f$	verkleinert, umgekehrt, reell
$2f$	$2f$	gleich groß, umgekehrt, reell
$2f > g > f$	$2f > b > \infty$	vergrößert, umgekehrt, reell
$f$	$+\infty$	sehr groß, umgekehrt, reell
$f > g > 0$	$-\infty < b < 0$	vergrößert, aufrecht, virtuell
$g \rightarrow 0$	$b \rightarrow 0$	gleich groß, aufrecht, virtuell

# Bildkonstruktion Zerstreuungslinsen

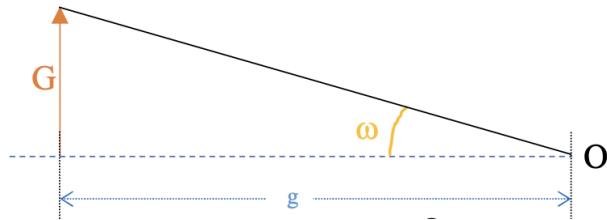
## 1. *Bild*

verkleinert; aufrecht, gerade; virtuell

Gegenstandweite	Bildweite
$+∞ > g > 0$	$-f < b < 0$

## Sehwinkel

Der Sehwinkel ist der Winkel unter dem ein Beobachter einen Gegenstand sieht. Er wird mit  $\omega$  bezeichnet.



Wir erhalten:

$$\frac{G}{g} = \tan(\omega)$$

Bei kleinen Winkeln erhalten wir durch Kleinwinkelnäherung (wenn  $\omega$  in *rad*):

$$\omega = \frac{B}{b} = \frac{G}{g}$$

## *Einheit*

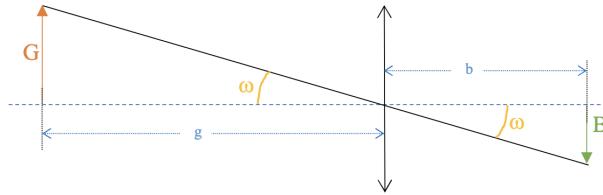
Der Sehwinkel kann in *rad* oder in Sekunden *s* und Minuten *min* angegeben werden.

$$1^\circ = 60' (\text{min})$$

$$1^\circ = 3600'' (\text{s})$$

## Abbildungsmaßstab

## ***Herleitung***



Da ähnliche Dreiecke:

$$\tan(\omega) = \frac{G}{g} = \frac{B}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

## ***Abbildungsmaßstab***

$$\Gamma = \left| \frac{B}{G} \right|$$

Der Abbildungsmaßstab gibt uns an, wie viel Mal das Bild größer als der Gegenstand ist und ist immer positiv.

## **Dioptrie**

Oft wird nicht die Brennweite einer Linse angegeben, sondern ihre Brechkraft  $D$  in Dioptrien.

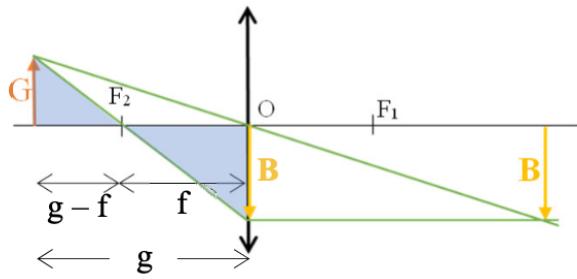
## ***Formel***

$$D = \frac{1}{f}$$

## ***Einheit***

$$[D] = \frac{1}{m} = 1 \text{ dpt}$$

## **Abbildungsgleichung**



### Herleitung

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{g-f} = \frac{b}{f}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{G} = \frac{f}{g-f} = \frac{b}{g}$$

$$\Leftrightarrow f \cdot g = b(g-f)$$

$$\Leftrightarrow f \cdot g = bg - bf$$

$$\Leftrightarrow fg + bf = bg$$

$$\Leftrightarrow f(b+g) = bg$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{bg}{(b+g)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{b}{bg} + \frac{g}{bg}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$