THÉORÈME DE THALÈS

Théorème

Considérons deux droites d_1 et d_2 sécantes en A coupées par deux parallèles (BC) et (DE).

Si les droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Démonstration

Considérons la première configuration.

1. $1^{ière}$ égalité: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

    - Considérons le triangle ADE et notons h_1 la hauteur issue de E du triangle ADE

        - $\mathscr{A}_{ADE} = \frac{AD \cdot h_1}{2}$
        - $\mathscr{A}_{ABE} = \frac{AB \cdot h_1}{2}$
        - $\frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ABE}} = \frac{\frac{AD \cdot h_1}{2}}{\frac{AB \cdot h_1}{2}} = \frac{AD}{AB}$

    - Notons h_2 la hauteur issue de D du triangle ADE

        - $\mathscr{A}_{ADE} = \frac{AE \cdot h_2}{2}$
        - $\mathscr{A}_{ADC} = \frac{AC \cdot h_2}{2}$
        - $\frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ADC}} = \frac{\frac{AE \cdot h_2}{2}}{\frac{AC \cdot h_2}{2}} = \frac{AD}{AB}$

    - Considérons les triangles DEB et DEC

      Notons que les triangles DEB et DEC ont une même base $[DE]$. De plus, puisque les droites (DE) et (BC) sont parallèles, ils ont la même hauteur h relative à cette base.

On peut conclure que les deux triangles ont la même aire:

$$\underbrace{\mathscr{A}_D EB}_{\frac{1}{2}\cdot DE\cdot h} = \underbrace{\mathscr{A}_D EC}_{\frac{1}{2}\cdot DE\cdot h}$$

- Comme $\mathscr{A}_{ABE} = \mathscr{A}_{DEC}$, on a:

$$\frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ABE}} = \frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ADC}} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

2. $2^{ière}$ égalité: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

   Soit F le point d'intersection de la parallèle à la droite (AC) passant par le point D et de la droite (BC).

   Considérons le quadrilatère $DECF$.

   - Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Donc $DECF$ est un parallélogramme.
   - Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longuer.

     Donc $FC = DE$ et $DF = EC$.

   On peut maintenant appliquer la $1^{ière}$ égalité démontrée précédemment à la figure formée par les droites (DA) et (FC) et les droites parallèles (DF) et (AC)

Remarque

Le théorème de Thalès permet de calculer une ou plusieurs longuers manquants dans une de ces configurations.

<u>Réciproque de théorème de Thalès</u>

Théorème

Considérons deux droites (BC) et (CD) sécantes en A.

Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ et si les points ADE et les points A; E; C sont alignés dans le même ordre, alors les droites $(DE) \parallel (BC)$ sont parallèles.

Contraposée de théorème de Thalès

Théorème

Considérons deux droites (BD) et (CE) sécantes en A.

Si $\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$, alors les droites (BC) et (DC) ne sont pas parallèles.