ELÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE

Multiples d'un entier naturel

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots\}$$

Définition

Soit a un entier naturel. Un multiple de a est un entier naturel de la forme $a \cdot n$, où n est un entier. L'ensemble des multiples de a est noté : $a \cdot \mathbb{N}$.

Pair

Tout entier pair est de la forme $2 \cdot n$, où n est un entier.

Impair

Tout entier impair est de la forme $2n + 1$ ou $2n - 1$, où n est un entier

Diviseurs d'un entier naturel

Définition

Soit a et b deux entiers naturels. On dit que b est un diviseur de a ou encore que b divise a (on écrit $b \mid a$) si et seulement si a est un multiple de b.

Définition

L'ensemble des diviseurs d'un entier naturel a est noté $\text{Div}(a)$.

Caractères de divisibilité

1. Un entier naturel est divisible par 2 si et seulement si il se termine par 0,2,4,6 ou 8

2. Un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
3. Un entier naturel est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
4. Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si il se termine par 0 ou par 5.
5. Un entier naturel est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 et par 3.
6. Soit N un entier naturel, u son dernier chiffre et n l'entier obtenu en biffant u dans N. (Par exemple, si $N = 364$, alors $u = 4$ et $n = 36$). Alors N est divisible par 7 si et seulement si $n - 2u$ est divisible par 7.
7. Un entier naturel est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par les 3 derniers chiffres est divisible par 8.
8. Un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9
9. Un entier naturel est divisible par 10 si et seulement si il se termine par 0.
10. Un entier naturel est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.
11. Un entier naturel est divisible par 25 si et seulement si il se termine par 00, par 25, par 50 ou par 75.
12. Un entier naturel est divisible par 100 ssi il se termine par 00.

Nombres premiers et factorisation première

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs <u>1 et lui-même</u> et qui est plus grand que 1.

Remarque

1. 1 n'est pas un nombre premier car $Div(1) = 1$. (1 a un seul diviseur.)
2. 0 n'est pas un nombre premier car $Div(0) = \mathbb{N}$. (0 a une infinité de diviseurs.)
3. 2 est le seul nombre premier pair.
4. Il y a une infinité de nombres premiers.

Définition

Les entiers > 2 qui ne sont pas premiers sont dits composés.

Crible d'Eratosthène

Crible d'Eratosthène est une méthode permettant de trouver assez vite tous les nombres premiers jusqu'à un entier naturel M donné.

On écrit la liste de tous les entiers de 2 jusqu'à M.

1. On garde $p_1 = 2$ et on élimine tous les autres multiples de 2
2. On garde $p_2 = 3$ qui est le premier élément non éliminé après 2 et on élimine tous les autre multiples de 3.
3. On garde $p_3 = 5$ qui est le premier élément non éliminé après 3 et on élimine tous les autre multiples de 5.
4. On répète le procédé aussi longtemps que $p_k \leqslant \sqrt{M}$.

Les nombres non éliminés sont les nombres premiers $\leqslant M$

Factorisation première

Si l'on décompose un entier naturel $n \geqslant 2$ en autant de facteurs entiers diffèrent de 1 que possible, alors tous ces facteurs seront des nombres premiers. On obtient ainsi la factorisation première (f.p.) ou décomposition en facteurs premiers de n.

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel $\geqslant 2$ admet une factorisation première unique.