CONTINUITÉ

Continuité sur un intervalle

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un nombre qui appartient à I

.

1. La fonction f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. La fonction f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout nombre de I.

Dérivabilité et continuité

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre qui appartient à I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction g définie sur $I \smallsetminus \{a\}$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a pour limite le nombre réel $f'(a)$ lorsque x tend vers a.

$$\forall x \neq a :$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\Leftrightarrow g(x) \cdot (x - a) = f(x) - f(a)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot (x - a) + f(a)$$

On obtient donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\underbrace{\underbrace{g(x)}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\to 0}}_{\to 0} + f(a)\right)$$

f est donc continue en a

cqfd

Attention

La réciproque du Théorème est fausse. Une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a.

Démonstration

Démonstration par un contre exemple.
La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 et sa représentation graphique admet une tangente verticale au point $(0;0)$. Mais la fonction racine carrée est continue en 0, car:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$$

cqfd

Fonctions continues et résolution d'équations

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et si k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un nombre réel c de $[a;b]$ tel que

$$f(c) = k$$

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [a; b]$

1. L'image de l'intervalle I par f est l'intervalle $J = [f(a); f(b)]$
2. Pour tout nombre réel k de $[f(a); f(b)]$, l'équation

$$f(x) = k$$

a une solution et une seule dans l'intervalle $[a; b]$

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ et $f\,(a) \cdot f\,(b) < 0$, alors l'équation $f\,(x) = 0$ a une solution et une seule dans I.

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

1. L'image $f(I)$ d'un intervalle I par f est un intervalle J.
2. Pour tout nombre réel k de J, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans I.

Résumé

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$Si\ I =$	$f\ est\ strictement\ croissante\ sur\ I$	$f\ est\ strictement\ décrois$

	$f(I)\ est\ l'intervalle$	$f(I)\ est\ l'interva$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b]$	$]\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right);f\left(b\right)]$	$[f\left(b\right);\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$
$[a;b[$	$[f\left(a\right);\lim\limits_{x\to b} f\left(x\right)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f\left(x\right);f\left(a\right)$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right);\lim\limits_{x\to b} f\left(x\right)[$	$]\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right);\lim\limits_{x\to b} f\ ($