VECTEURS

Vecteur

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

Vocabulaire

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, alors:

1. $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur d'origine A et d'extrémité B

2. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur du segment $[AB]$

   On note:

$$\underbrace{\| \overrightarrow{AB} \|}_{norme\ de\ \overrightarrow{AB}} = AB$$

3. La direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB)

4. Le sens du vecteur est celui de A vers B

Remarque

Le mot *norme* est parfois subistué par: amplitude, longueur, magnitude, module, scalaire

Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur, tel que

$\overrightarrow{a} = \binom{a_1}{a_2}$ dans une base (e_1, e_2), alors $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Algébriquement

$$\|\overrightarrow{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{\left(\lambda^2 a_1^2\right) + \left(\lambda^2 a_2^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{\lambda^2 \left(a_1^2 + a_2^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \begin{cases} \lambda \left\|\overrightarrow{a}\right\| & si\ \lambda > 0 \ \Rightarrow \ \left\|\overrightarrow{a}\right\| = |\lambda| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \\ -\lambda \left\|\overrightarrow{a}\right\| & si\ \lambda < 0 \end{cases}$$

Vecteur nul

Définition

Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, est un vecteur dont la norme est nulle $\| \overrightarrow{0} \| = 0$ et sa direction et son sens ne sont pas définis.

De plus, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$$

Égalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont égaux si ils ont la même norme, le même direction et le même sens.

Représentant d'un vecteur

Definition

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur représentant de $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est une translation de $\overrightarrow{v}$.

Vecteurs opposé

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont opposés si ils ont la même norme et le même direction, mais ils sont de sens opposés.

On note:

$$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$$

Remarque

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan, la translation, notée $t\overrightarrow{u}$, est l'application du plan lui-même qui associe à tout point M tel que $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{u}$. Le point M' appelé image de M par $t\overrightarrow{u}$.

Composantes d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur défini par: $\overrightarrow{u}(u_x, u_y, u_z)$, le vecteur a comme composantes:

$$\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

Produit scalaire

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul le produit scalaire est nul et la propriété est vraie puisque, par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Si les deux vecteurs sont non nuls, leurs normes sont non nulles donc :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0$$

On obtient donc que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

cqfd.

Propriété

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel k:

- $\left(k \cdot \overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = k\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$
- $\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. Le carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ est le réel positif ou nul:

$$\left(\overrightarrow{u}\right)^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

Démonstration

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{u}\|\cdot\underbrace{\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\right)}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$$

cqfd.

Théorème

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Démonstration

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\left(\overrightarrow{u}\right)^2+2\cdot\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{v}\right)^2$$

$$=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\cdot\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)+\|\overrightarrow{v}\|^2$$

Par conséquent:

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\cdot\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)+\|\overrightarrow{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

cqfd.

Vecteur dans l'espace vectoriel

Un vecteur peut s'exprimer de manière unique dans une base de l'espace vectoriel.

$\overrightarrow{v}$ s'écrit alors comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

$$\exists a_1,\ a_2\in\mathbb{R}\mid\overrightarrow{v}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$$

a_1 et a_2 sont alors les composantes de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$

Produit vectoriel

Définition

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, on définit le produit vectoriel de $\overrightarrow{a}$ par $\overrightarrow{b}$ comme le vecteur:

$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

tel que

1. $$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 0$$

   et

   $$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

2. $$\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$$

3. $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ forme un système de coordonnées direct

Propriétés

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

Distributivité

Distributivité par rapport à l'addition vectoriel:

- $$\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$$
- $$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$$

Asymmétrie

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$$

Multiplication d'un scalaire

$$\lambda\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(\lambda\overrightarrow{a}\right) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$$

Produit vectoriel nul

Le produit vectoriel est nul si et seulement si:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}\, ou\, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}\, ou\, \sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0$$

Pour: $\sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0$

$$\sin(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \equiv 0\,[\pi]$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} \mid \varphi = 0 + k \cdot \pi$$