

# DÉMONSTRATIONS DES FONCTIONS DÉRIVÉES

## Dérivée de la fonction constante

### *Théorème*

La fonction constante  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  et par  $f(x) = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) est dérivable sur  $D_{f'}$  et

$$f'(x) = 0$$

### *Démonstration*

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et la fonction constante  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  et par  $f(x) = k$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{k - k}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction affine

### *Théorème*

La fonction affine  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  par  $f(x) = mx + p$ , avec  $m, p \in \mathbb{R}$  est dérivable sur  $D_f = \mathbb{R}$  et:

$$f'(x) = m$$

### *Démonstration*

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et la fonction affine  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  par  $f(x) = mx + p$ , avec  $m, p \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx + p - (ma + p)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx + p - ma - p}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx - ma}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{m(x - a)}{x - a} \\
&= a
\end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction carré

### *Théorème*

La fonction carré  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = 2x.$$

### *Démonstration*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a.$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction inverse

### *Théorème*

La fonction inverse  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $D_f$  et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

### *Démonstration*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a - x}{ax(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( -\frac{1}{ax} \right) = -\frac{1}{a^2}.$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction racine carrée

### *Théorème*

La fonction racine carrée  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

### *Démonstration*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction sinus

### *Théorème*

La fonction sinus  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \cos(x).$$

### Démonstration

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h} \\&= \underbrace{\sin(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_0 + \underbrace{\cos(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}}_1 \\&= \cos(a).\end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction cosinus

### *Théorème*

La fonction cosinus  $f$  définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = -\sin(x).$$

### Démonstration

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} \\&= \underbrace{\cos(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_0 - \underbrace{\sin(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}}_1 \\&= -\sin(a).\end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction tangente

### *Théorème*

La fonction tangente  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$  par  $f(x) = \tan(x)$  est dérivable sur son domaine et

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(a+h) - \tan(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)} - \frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{h}. \end{aligned}$$

Regroupons en un seul quotient:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h)\cos(a) - \sin(a)\cos(a+h)}{h \cos(a+h)\cos(a)}.$$

Or, par l'identité trigonométrique:

$$\sin(a+h)\cos(a) - \sin(a)\cos(a+h) = \sin(h).$$

D'où

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos(a+h)\cos(a)} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2(a)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(a)}. \end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction exponentielle

### *Théorème*

La fonction  $f(x) = e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = e^x.$$

### **Démonstration**

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^a(e^h - 1)}{h} = e^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

cqfd.

## **Dérivée de la fonction exponentielle de base $a$**

### ***Théorème***

Pour  $a > 0$ , la fonction  $f(x) = a^x$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = a^x \ln(a).$$

### **Démonstration**

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{a+h} - a^a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^a(a^h - 1)}{h} \\ &= a^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^a \ln(a). \end{aligned}$$

cqfd.

## **Dérivée de la fonction logarithme népérien**

### ***Théorème***

La fonction  $f(x) = \ln(x)$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

### **Démonstration**

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{a} \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{h}{a})}{\frac{h}{a}}}_{\rightarrow 1} \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de la fonction logarithme en base a

### *Théorème*

La fonction  $f(x) = \log_a(x)$ , définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour  $a > 0, a \neq 1$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

### *Démonstration*

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(a+h) - \log_a(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\ln(a+h)}{\ln(a)} - \frac{\ln(a)}{\ln(a)} \right) \\
&= \frac{1}{\ln(a)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h} \\
&= \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{a} \\
&= \frac{1}{a \ln(a)}.
\end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de sinus hyperboliques

### *Théorème*

La fonction  $f(x) = \sinh(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \cosh(x).$$

### *Démonstration*

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(a + h) - \sinh(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(a) \cosh(h) + \cosh(a) \sinh(h) - \sinh(a)}{h} \\ &= \underbrace{\sinh(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(h) - 1}{h}}_0 + \underbrace{\cosh(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(h)}{h}}_1 \\ &= \cosh(a). \end{aligned}$$

cqfd.

## Dérivée de cosinus hyperboliques

### *Théorème*

La fonction  $f(x) = \cosh(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \sinh(x).$$

### *Démonstration*

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(a + h) - \cosh(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(a) \cosh(h) + \sinh(a) \sinh(h) - \cosh(a)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cosh(a) \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(h) - 1}{h}}_0 + \sinh(a) \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(h)}{h}}_1 \\
&= \sinh(a).
\end{aligned}$$

cqfd.

### **Théorème**

La fonction  $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

### **Démonstration**

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tanh(a+h) - \tanh(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sinh(a+h)}{\cosh(a+h)} - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(a+h) \cosh(a) - \sinh(a) \cosh(a+h)}{h \cosh(a+h) \cosh(a)}.
\end{aligned}$$

Or, par les formules d'addition :

$$\sinh(a+h) \cosh(a) - \sinh(a) \cosh(a+h) = \sinh(h).$$

D'où

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(h)}{h} \frac{1}{\cosh(a+h) \cosh(a)} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{\cosh^2(a)} \\
&= \frac{1}{\cosh^2(a)}.
\end{aligned}$$

cqfd.