TRIGONOMETRIE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Vocabulaire

Soit ABC un trianle rectangle en C:

- le segment $[AB]$ est l'hypotènuse du triangle ABC.
- le segment $[AC]$ est le cotée adjacent de l'angle $C\hat{A}B$.
- le segment $[CB]$ est le cotée opposé de l'angle $C\hat{A}B$.

Démonstration

Fonctions trigonomètriques

Définition

Soit ABC un triangle rectangle en C, et soit $\hat{\alpha}$ l'angle en A de ce triangle. On définit les fonctions trigonomètriques suivant de cet angle:

1. Le sinus de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\sin(\hat{\alpha}) = \frac{opposé}{hypothènuse}$$

2. Le cosinus de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{adjacent}{hypothènuse}$$

3. La sécante de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\sec(\hat{\alpha}) = \frac{hypothènuse}{adjacent}$$

4. Le cosécante de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\csc(\hat{\alpha}) = \frac{hypoth\grave{e}nuse}{oppos\acute{e}}$$

5. La tangente de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\tan(\hat{\alpha}) = \frac{oppos\acute{e}}{adjacent}$$

6. La cotangente de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\cot(\hat{\alpha}) = \frac{adjacent}{oppos\acute{e}}$$

Conséquences

1. La mesure d'un angle est en degrés, mais le cosinus, le sinus et la tangente n'ont pas d'unité. Ce sont des rapports de longueurs.

2. Les rapports ne dépendent pas des longueurs choisisses, mais uniquement de la mesure de l'angle.

3. Dans un triangle rectangle le côté plus long est toujours l'hypoténuse on a donc:

$$0 \leqslant \sin(\hat{\alpha}) \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \cos(\hat{\alpha}) \leqslant 1$$

   mais

$$0 < \tan(\hat{\alpha})$$

Formule fondamentale de la trigonométrie

Définition

Pour toute mesure α d'un angle aigu, on a:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Démonstration

Soit ABC un triangle rectangle en C avec $\hat{\alpha} = A\hat{B}C$.

1. Exprimer $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ dans ce triangle:

   $\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB}$ et $\cos(\alpha) = \frac{AC}{AB}$

2. En déduire $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \\ &= \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} \\ &= \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}\end{aligned}$$

   D'apres le théorème de Phythagore

$$\begin{aligned}&= \frac{AB^2}{AB^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque

$\cos^2(\alpha) = (\cos(\alpha))^2$ et designe le carré des $\cos(\alpha)$ idem pour $\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$.

Cette écriture évite des parentheses.