

KREISBEWEGUNGEN

Winkelgeschwindigkeit, Drehfrequenz

Definition

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist der Quotient aus dem durchlaufenden Drehwinkel $\Delta\varphi$ und dem dafür benötigten Zeitintervall Δt .

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$[\Delta\varphi] = \text{rad}$$

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Anmerkung

Durch die Definition des Bogenmaßes oder Radianen erhält man:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

Bahngeschwindigkeit

Herleitung

Die Bahngeschwindigkeit v entspricht dem Quotienten aus dem zurückgelegten Bogenstück Δs und dem dafür benötigten Zeitintervall Δt .

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$$

Definition

Die Bahngeschwindigkeit v ist das Produkt aus Bahnradius r und Winkelgeschwindigkeit ω .

$$v = r \cdot \omega$$

Periodendauer, Umlaufzeit

Die Umlaufzeit oder Periodendauer ist die benötigte Zeit T für einen Umlauf.

$$T = \frac{t}{n}$$

n , Anzahl an Umläufen

Einheit

$$[T] = s$$

Umdrehungsfrequenz, Drehzahl

Die Umdrehungsfrequenz oder Drehzahl f , gibt die Anzahl an Umläufen pro Sekunde an.

$$f = \frac{1}{T}$$

Einheit

$$[f] = Hz$$

Hz, Hertz

Zentripetalkraft

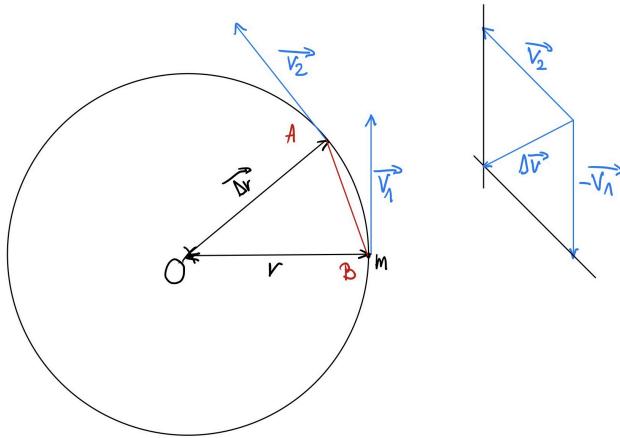
Die Zentripetalkraft ist die einzige wirkende Kraft, die den Körper auf der Kreisbahn hält. Sie wird bestimmt durch Anwenden des Grundgesetzes der Mechanik.

$$\vec{F}_r = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_r$$

Herleitung

In der Figur ist eine punktförmige Masse m die sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} auf einer Kreisbahn bewegt mit Radius r und der

Positionsänderung $\vec{\Delta r}$ in einem kleinen Zeitintervall Δt um den Winkel $\Delta\Theta$.



Da die Geschwindigkeit \vec{v} zu jedem Zeitpunkt die Tangente zur Kreisbahn ist, ist die Resultierende aus \vec{v}_1 und \vec{v}_2 zum Kreiszentrums gerichtet. Es gilt:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\Delta v}$$

und:

$$v = v_1 = v_2$$

Die Richtung von $\vec{\Delta v}$ ist radial und zum Kreiszentrums gerichtet. Sie entspricht die Winkelhalbierenden von $\Delta\Theta$ im inneren des Kreises. Durch Ähnlichkeit beider Dreiecke kann Thales angewendet werden:

$$\frac{\|\vec{\Delta r}\|}{r} = \frac{\|\vec{\Delta v}\|}{v}$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{\Delta r}\| = \frac{r}{v} \cdot \|\vec{\Delta v}\| \quad (1)$$

Für Kleinwinkelnäherung:

$$\widehat{AB} = [AB]$$

Es gilt also:

$$\|\vec{\Delta r}\| \approx v \cdot \Delta t \quad (2)$$

(1) gleich (2):

$$\frac{r}{v} \cdot \| \Delta \vec{v} \| \approx v \cdot \Delta t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\| \Delta \vec{v} \|}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$$

mit der Definition der Beschleunigung:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Einsetzen:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Anmerkung

Die Zentripetalkraft ist immer zu dem Kreiszentrum hin gerichtet.

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Durch einsetzen der Formel der Bahngeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r} \mid v = \omega \cdot r$$

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Durch einsetzen der Formel der Winkelgeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r \mid \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_r = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$