DÉRIVATION

Nombre dérivée

Definition

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I tel que $a \in I$.

On dit que f est dérivable si et seulement si le taux d' accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers un nombre réel L lorsque x tend vers a.

Ce nombre L est appelé nombre dérivé et noté $f'(x) = L$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tangente

Definition

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et f est dérivable en a. $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f.

La droite qui passe par le point $A\,(a; f(a))$ et de pente $f'(a)$ est appelée tangente t_A à $\mathscr{C}_f$ au point A.

Théorème

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a et t_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.

Alors t_A a pour équation :

$$t_A : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Fonctions dérivées

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est dérivable sur I, si elle est dérivable en tout nombre $a \in I$. Alors la fonction:

$$f': x \longmapsto f'(x)$$

est appelée la fonction dérivée de f.

Dérivées des fonctions

Voici les démonstrations des fonctions dérivées.

Ces dérivées sont aussi résument dans ce tableau.

Sense de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

Extremums d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- $f(a)$ est le minimum de f sur I si $\forall x \in I : f(x) \geqslant f(a)$
- $f(a)$ est le maximum de f sur I si $\forall x \in I : f(x) \leqslant f(a)$

On dit que f admet un extremum sur I si f admet un minimum ou un maximum sur I.

Extremums locales

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$

- f admet un minimum local en c, s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[\subset I$ et contenant c tel que $\forall x \in]a;b[$: $f(x) \geqslant f(c)$
- f admet un maximum local en c, s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[\subset I$ et contenant c tel que $\forall x \in]a;b[$: $f(x) \leqslant f(c)$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $c \in I$. Si f admet un extremum locale en c, alors $f'(c) = 0$. Cela signifie que la tangente à la courbe au point de coordonnées $(c; f(c))$ est horizontale.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse.