

# **NOMBRES COMPLEXES**

## **Cardan**

Cette méthode permet d'obtenir des formules, appelées formules de Cardan, donnant en fonction de  $p$  et  $q$  les solutions de l'équation :

$$x^3 + pz + q = 0$$

Conditions d'existence:

$$4p^3 + 27q^2 \geq 0$$

*Formule de Cardan*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

## **Définition du nombre complexe**

*Définition*

On définit le nombre complexes  $i$  tel que:

$$i^2 = -1$$

## **Définition de l'ensemble des nombres complexes**

*Théorème*

Il existe un ensemble, noté  $\mathbb{C}$ , d'éléments appelés nombres complexes, tel que:

1.  $\mathbb{C}$  contient l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels.
2.  $\mathbb{C}$  contient un élément  $i$  tel que:  $i^2 = -1$
3.  $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de  $\mathbb{R}$ .

4. Chaque élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  s'écrit de manière unique sous la forme:

$$z = a + bi \text{ (avec } a, b \in \mathbb{R})$$

**Remarque:**

Une relation d'ordre n'existe pas sur  $\mathbb{C}$ . On ne peut donc pas des nombres complexes, ni parler de nombres complexes positifs ni négatifs puisque on ne peut pas les comparer à 0.

**Définitions:**

1. L'écriture  $z = a + bi$  est appelée la forme algébrique du nombre complexe

$z$

2. Soit  $z = a + bi$

Le nombre réel  $a$  est appelé la partie réelle du nombre complexe  $z$

Le nombre réel  $b$  est appelé la partie imaginaire du nombre complexe  $z$

3. Si  $z = a$ , alors  $z$  est un nombre réel

Si  $z = bi$ , alors  $z$  est un imaginaire pur

**Conséquences**

1.  $a = \operatorname{Re}(z); b = \operatorname{Im}(z) : z = a + bi = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$

2.  $z$  est un réel  $\Leftrightarrow z = a \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$

3.  $z$  est un imaginaire pur  $\Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

## **Égalité dans $\mathbb{C}$**

**Définition:**

Si  $z = a + bi$  et  $z' = a' + b'i$ , alors:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

## **Conjugué**

Le conjugué d'un nombre complexe représente géométriquement la symétrie par rapport au axes des abscisses.

## **Nombres complexes conjugués**

*Définition:*

Soit  $z = a + bi$ . On appelle nombre complexe conjugué de  $z$  le nombre complexe  $\bar{z} = a - bi$

*Remarques:*

$$1. \quad \bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow \overline{(a + bi)} = \overline{(a - bi)} = z$$

2. Relation fondamentale

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

*Factorisation de deux carrés:*

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

## **Opérations sur les nombres conjugués**

*Théorème*

$$z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

*Définition*

Soit  $z = a + bi$  et  $|z| = a - bi$ :

$$z = |z| \Leftrightarrow a + bi = a - bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

Il suit donc que  $z$  est un nombre réel.

cqfd.

### ***Théorème***

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

### ***Démonstration***

Soit  $z = a + bi$  et  $z' = a' + b'i$

$$\begin{aligned} & \overline{z + z'} \\ &= \overline{(a + bi) + (a' + b'i)} \\ &= \overline{(a + a') + (b + b')i} \\ &= (a + a') - (b + b') \\ &= a + a' - bi - b'i \\ &= (a - bi) + (a' - b'i) \\ &= \bar{z} + \bar{z'} \end{aligned}$$

cqfd.

### ***Théorème***

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

### ***Démonstration***

Soit  $z = a + bi$  et  $z' = a' + b'i$

D'une part:

$$\begin{aligned}
& \overline{z \cdot z'} \\
&= \overline{(a + bi)(a' + b'i)} \\
&= \overline{aa' + ab'i + a'bi - bb'} \\
&= (aa' - bb') - (ab' + a'b)i
\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
& \bar{z} \cdot \bar{z'} \\
&= \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(a' + b'i)} \\
&= (a - bi) \cdot (a' - b'i) \\
&= aa' - ab'i - a'bi - bb' \\
&= (aa' - bb') - (ab' + a'b)i
\end{aligned}$$

Donc,

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

cqfd.

## **Module**

### ***Definition***

Soit  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  un repère orthonormé du plan et soit  $M$  le point d'affixe  $z = a + bi$ .

On appelle le module complexes  $z = a + bi$  la norme de vecteur  $\overrightarrow{OM}$  donc,

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$$

### ***Propriété***

Soit  $z = a + bi$ , alors le module de  $z$ , noté  $|z|$  est donné par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Remarque**

$$|z|^2 = \bar{z}z$$

## **Argument**

Soit  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  un repère orthonormal direct du plan et soit  $z \in \mathbb{C}^*$  et soit  $M(z)$  et soit  $\theta$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$

On appelle argument de  $z$ , le nombre

$$\arg(z) = \theta + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z) = \theta \bmod(2\pi)$$

**Remarque**

Vu la définition,  $z = 0$  n'a pas d'argument

## **Forme trigonométrique**

**Théorème**

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme suivante, dite forme trigonométrique:

$$z = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

$$\text{où } r = |z| > 0 \text{ et } \theta = \arg(z) \bmod(2\pi)$$

**Démonstration**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ , alors

$$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow a = r \cdot \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{\text{cote oppose}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow b = r \cdot \sin(\theta)$$

donc,

$$z = a + bi$$

$$= r \cos(\theta) + r [\sin(\theta)]i$$

$$= r \cos(\theta) + i \sin(\theta), \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)$$

### **Remarque**

Forme abrégée de la forme trigonométrique est  $z = r \cdot cis(\theta)$

## **Égalité des deux nombre complexes trigonométrique**

Soit  $z = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$  et  $z' = r' [\cos(\theta') + i \sin(\theta')]$

$$z = z'$$

$$\Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' \text{ mod } (2\pi)$$

## **Modules et argument d'un produit**

### ***Théorèmes***

Quels que soient les nombres complexes non nuls  $z$  et  $z'$

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

### ***Démonstration 1***

Pour tout  $z \in \mathbb{C} : |z|^2 = zz'$

$$|z \cdot z'|^2 = (z \cdot z') \cdot \overline{(z \cdot z')}$$

$$= z \cdot \bar{z} \cdot z' \cdot \bar{z}'$$

$$= |z|^2 + |z'|^2$$

Comme  $|z \cdot z'|$  et  $|z| \cdot |z'|$  sont des nombres réels positifs, on a que:

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

cqfd

### ***Démonstration 2***

Soit  $z = r [\cos (\theta) + i \sin (\theta)]$ , avec  $r = |z|$  et  $\theta = \arg (z)$

$z' = r' [\cos (\theta') + i \sin (\theta')]$ , avec  $r' = |z'|$  et  $\theta' = \arg (z')$

alors,

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= r [\cos (\theta) + i \sin (\theta)] \cdot r' [\cos (\theta') + i \sin (\theta')] \\ &= r \cdot r' [\cos (\theta) \cos (\theta') + i \cos (\theta) \sin (\theta') + i \sin (\theta) \cos (\theta') + i^2 \sin (\theta) \sin (\theta')] \\ &= r \cdot r' \{ [\cos (\theta) \cos (\theta') - \sin (\theta) \sin (\theta')] + i [\sin (\theta') \cos (\theta) + \cos (\theta') \sin (\theta)] \} \\ &= r \cdot r' [\cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta')] \end{aligned}$$

Comme  $r \cdot r' = |z| \cdot |z'| > 0$  et que  $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$  on a:

$$\arg (z \cdot z') = \theta + \theta' = \arg (z) + \arg (z')$$

cqfd

## **Module et argument d'un quotient**

### ***Théorème***

Quels que soient les nombres complexes non nuls  $z$  et  $z'$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg \left( \frac{z}{z'} \right) = \arg (z) - \arg (z')$$

### ***Démonstration 1***



$$\begin{aligned}
\left| \frac{z}{z'} \right|^2 &= \frac{z}{z'} \cdot \overline{\left( \frac{z}{z'} \right)} \\
&= \frac{z}{z'} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \\
&= \frac{z \cdot \bar{z}}{z' \cdot \bar{z}'} \\
&= \frac{|z|^2}{|z'|^2} \\
&= \left( \frac{|z|}{|z'|} \right)^2
\end{aligned}$$

Comme  $\left| \frac{z}{z'} \right|$  et  $\frac{|z|}{|z'|}$  sont des nombres réels positifs, on a que

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

### ***Démonstration 2***

Posons  $u = \frac{z}{z'} \Leftrightarrow u \cdot z' = z$

Par suite:

$$\begin{aligned}
\arg(u \cdot z') &= \arg(z) \\
\Leftrightarrow \arg(u) + \arg(z') &= \arg(z) \\
\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') &= \arg(z) \\
\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &= \arg(z) - \arg(z')
\end{aligned}$$

### ***Conséquences***

$$\begin{aligned}
|z^n| &= |z|^n \\
\arg(z^n) &= n \cdot \arg(z)
\end{aligned}$$

## **Notation polaire**

On appelle module du nombre complexe  $z$  le module du vecteur image  $\overrightarrow{OM}$  associé à  $z$ . On appelle argument du nombre complexe  $z$  l'angle polaire du vecteur image  $\overrightarrow{OM}$  associé à  $z$  (à  $2k\pi$  près) (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$\begin{cases} r = |z| = OM \text{ avec } r \geq 0 \\ \theta = \arg(z) = (Ox, OM) + 2k\pi \end{cases}$$

On note alors le nombre complexe  $z$  sous la forme polaire

$$z = [r; \theta]$$

## **Notation exponentielle**

### ***Définition***

Le complexe du module 1 dont un argument est  $\theta$  est noté  $e^{i\theta}$  avec:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

### ***Théorème***

Tout nombre complexe  $z$  non nul de module  $r$  et d'argument  $\theta$  s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :  $z = re^{i\theta}$  avec  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z) \bmod(2\pi)$

### ***Démonstration***

$z$ , non nul, a pour forme trigonométrique  $z = r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$  avec  $r = |z|$ .

Comme  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ ,  $z$  s'écrit donc sous la forme  $z = re^{i\theta}$

## **Formules d'Euler**

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

## ***Généralisation***

Pour un nombre complexe quelconque, dont le module est différent de l'unité, le cosinus et sinus de l'argument s'obtiennent comme suit

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) + i \sin(\theta) = \frac{z}{r} \\ \bar{z} = re^{-i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \frac{\bar{z}}{r} \end{cases}$$

On obtient alors,

$$\cos(\theta) = \frac{z + \bar{z}}{2r}$$

$$\sin(\theta) = \frac{z - \bar{z}}{2ir}$$

## **Polynôme trigonométrique**

### ***Définition***

Un polynôme trigonométrique est un polynôme dont chaque terme est un produit de fonctions sinus et cosinus d'angles quelconques.

## **Linéarisation**

### ***Définition***

Chercher à linéariser revient à remplacer les produits des fonctions sinus et cosinus par des sommes (pondérées par des coefficients réels ou complexes) de fonctions sinus et cosinus dont les angles ont, eux aussi, été modifiés

## **Formules de Moivre**

### ***Théorème***

Soit un nombre complexe de module unité  $z = e^{i\theta}$

L'élévation à la puissance  $n$  donne:

$$z^n = (e^{i\theta})^n$$

$$z^n = [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n$$

Or

$$z^n = e^{in\theta}$$

$$z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

D'où la formule de Moivre:

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n$$

### ***Remarque***

Cette relation reste valable lorsque l'exposant  $n$  est négatif.