SÉRIES NUMÉRIQUES

Démonstration

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. On appelle série de terme général x_n la suite des sommes partielles, définies par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Dans certains cas on peut faire commencer la somme à 1 au lieu de 0.

Définition

On dit que la série de terme général x_n est convergente respectivement divergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente respectivement divergente. Si elle est convergente, on appelle somme de la série la limite, notée sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Proposition

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries convergentes. Alors la série de terme général $x_n + y_n$ converge, et

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} y_k$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) alors la série de terme général λx_n est convergente, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

Proposition

Une série de terme général x_n est convergente si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, \left| \sum_{k=p}^{q} x_k \right| \leq \epsilon$$

Séries à terme positif

Proposition

Soient x_n, y_n les termes généraux de deux séries à termes positifs, tels que $x_n \leq y_n$ pour tout n. Si $\sum_n y_n$ converge alors $\sum_n x_n$ est convergente. Si $\sum_n x_n$ diverge, alors $\sum_n y_n$ diverge.

Corollaire

Soient $x_n > 0$ et $y_n > 0$ les termes généraux de deux séries. Si $x_n / y_n \to l \in \mathbb{R}_{>0}$, alors $\sum x_n$ converge si et seulement si $\sum y_n$ converge.

Proposition

Si $x_n \geq 0$ est le terme général d'une série dont les sommes partielles sont majorées par une constante $C > 0$, alors cette série est convergente.

Théorème

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}_{>0}$ une fonction décroissante pour $t \geq n_0$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge.

Démonstration

Comme f est décroissante, on a les inégalités suivantes pour tout n:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt \geq f(k+1)$$

En sommant, on voit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \geq \int_0^n f(t)dt \geq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Proposition

Soit x_n le terme général d'une série, $x_n > 0$.

- Si $\lim n^a x_n$ existe et est finie, pour $a > 1$, alors $\sum x_n$ converge.
- Si $\lim n^a x_n$ existe et est finie et non nulle, pour $a \leq 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

Critères de convergence

Proposition

Soit x_n le terme général d'une série à termes positifs.

- Supposons que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l < 1$. Alors $\sum_k x_k$ converge.
- Supposons que soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1$, soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1^+$. Alors $\sum_k x_k$ diverge.

Démonstration

Supposons que $\sqrt[n]{x_n} \to l < 1$. Alors $\log(x_n)/n \to L = \log(l) < 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\log(x_n)/n \leq L/2$, si bien que $x_n \leq \exp(nL/2) = \exp(L/2)^n$. Comme $\sum \exp(L/2)^n$ converge on voit que $\sum x_n$ converge.
Supposons maintenant que soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1$, soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1^+$. Alors pour n assez grand, $x_n \geq 1$, et donc $\sum x_n$ diverge.

Proposition

Soit x_n le terme général d'une série à termes positifs.

- Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$. Alors $\sum_k x_k$ converge.
- Supposons que soit $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1$, soit $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1^+$. Alors $\sum_k x_k$ diverge.

Démonstration

Supposons que $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq l + \epsilon < 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_{n_0+k} \leq x_{n_0}(l+\epsilon)^k$, d'où la convergence de $\sum x_n$ par comparaison avec la série géométrique $\sum (l+\epsilon)^k$.
Dans le second cas, on note que $x_{n+1}/x_n \geq 1$ pour n assez grand, donc (x_n) ne tend pas vers zéro et donc $\sum x_n$ diverge.

Séries absolument convergentes

Démonstration

La série $\sum x_n$ est absolument convergente si $\sum |x_n|$ converge.

Proposition

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration

Comme $\sum |x_n|$ converge elle vérifie le critère de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall q \geq p \geq n, \sum_{k=p}^{q} |x_k| \leq \epsilon$$

On en déduit que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall q \geq p \geq n, \left| \sum_{k=p}^{q} x_k \right| \leq \epsilon$$

et donc $\sum x_k$ satisfait le critère de Cauchy et donc converge.

Proposition

La somme de deux séries absolument convergentes est absolument convergente. Si $\sum x_n$ est absolument convergente, alors $\sum(\lambda x_n)$ est absolument convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{C}$.

Théorème

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries absolument convergentes. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

Alors la série $\sum z_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{m=0}^{\infty} z_m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} y_l \right)$$

Démonstration

Montrons d'abord que $\sum z_n$ est absolument convergente. On note que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m \geq n} |z_m| \leq \sum_{m \geq n} \left| \sum_{k+l=m} x_k y_l \right|$$

$$\leq \sum_{k+l \geq n} |x_k| \cdot |y_l|$$

On remarque que si $k+l \geq n$ alors k ou l est plus grand que p, qu'on définit comme la partie entière de $n/2$. Ainsi

$$\sum_{m\geq n} |z_m| \leq \sum_{k\geq p \text{ ou } l\geq p} |x_k| \cdot |y_l|$$

$$\leq \left(\sum_{k\geq p} |x_k|\right)\left(\sum_{l} |y_l|\right) + \left(\sum_{k} |x_k|\right)\left(\sum_{l\geq p} |y_l|\right)$$

Mais

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k\geq p} |x_k|\right) = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k\geq p} |y_k|\right) = 0$$

le résultat suit.

Pour déterminer la somme des z_n, on note que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} y_l\right) - \sum_{m=0}^{n} z_m\right| = \left|\sum_{\substack{k\leq n, l\leq n\\ k+l>n}} x_k y_l\right|$$

Supposons que $n \geq 2p$. Si $k+l > n$ alors soit $k > p$, soit $l > p$. On a donc :

$$\left|\sum_{\substack{k\leq n, l\leq n\\ k+l>n}} x_k y_l\right| \leq \sum_{\substack{k\leq n, l\leq n\\ k+l>n}} |x_k| \cdot |y_l|$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|\right)\left(\sum_{l=p+1}^{\infty} |y_l|\right) + \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} |x_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} |y_l|\right)$$

Mais quand $p \to \infty$,

$$\sum_{l=p+1}^{\infty} |y_l| \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p+1}^{\infty} |x_k| \to 0$$

et le résultat suit.

$\square$

Démonstration

Soit $\sum x_n$ une série. On dit que la série $\sum y_n$ est un rearrangement de $\sum x_n$ s'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, y_n = x_{\sigma(n)}$.

Proposition

Supposons que $\sum x_n$ est absolument convergente et que $\sum y_n$ est un rearrangement de $\sum x_n$. Alors $\sum y_n$ converge, et $\sum y_n = \sum x_n$.

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$, et soit n_0 tel que $\sum_{n \geq n_0} |x_n| \leq \epsilon$. On note $m_0 = \max_{n \leq n_0} \sigma(n)$. On a alors pour $m \geq m_0$:

$$\left| \sum_{k=0}^{m} y_k - \sum_{l=0}^{n_0} x_l \right| = \left| \sum_{k=0}^{m} x_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{n_0} x_l \right|$$

Mais $\{0, 1, \cdots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \cdots, \sigma(m)\}$ puisque $m \geq m_0$, et on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{m} y_k - \sum_{l=0}^{n_0} x_l \right| &= \left| \sum_{\substack{l \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(m)\} \\ l > n_0}} x_l \right| \\
&\leq \sum_{\substack{l \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(m)\} \\ l > n_0}} |x_l| \\
&\leq \sum_{l > n_0} |x_l| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Comme $\sum x_l$ est absolument convergente, on en déduit le résultat.

$\square$

Séries semi-convergentes

Définition

Une série est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Théorème du Critère d'Abel

Soient (a_n) et (x_n) deux suites, telles que :

- (a_n) est décroissante et tend vers 0
- (x_n) est le terme général d'une série dont les sommes partielles $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ sont bornées en valeur absolue par une constante $C > 0$

Alors la série $\sum a_n x_n$ est convergente.

Démonstration

On va utiliser la "transformation d'Abel" et le critère de Cauchy. Soit $p < q$, on a :

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k x_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k (X_k - X_{k-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k X_k - \sum_{l=p}^{q-1} a_{l+1} X_l\right|$$

$$= \left|\sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) X_k + a_q X_q - a_{p+1} X_p\right|$$

$$\leq \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) |X_k| + |a_q X_q| + |a_{p+1} X_p|$$

$$\leq C \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) + |a_q X_q| + |a_{p+1} X_p|$$

$$\leq C a_{p+1} + |a_q X_q| + |a_{p+1} X_p|$$

Comme chacun des termes dans la dernière expression tend vers 0 quand p et q tendent vers l'infini, on peut conclure par le critère de Cauchy.

$\square$

Proposition

Soit (a_n) une suite qui décroît vers 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.