DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE TAYLOR

Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition

Soit I un intervalle, soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1, et soit $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

où

$$[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Démonstration

On note que

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

et on intègre entre a et b.

$\square$

Théorème

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivables. Alors pour tout $a, x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Démonstration

On va montrer cette formule par récurrence sur n. On vérifie d'abord la formule pour $n = 0$, qui s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \frac{f(a)}{1}(x-a)^0 + \int_a^x f'(t)dt$$

On admet maintenant la formule pour n, et on va la montrer pour $n+1$. On a donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt$$

On intègre par parties le terme intégral, en dérivant le terme $f^{n+1}(t)$ et en intégrant le terme $\frac{(x-t)^n}{n!}$, dont une primitive est $-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt$$

$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

On vérifie directement que

$$\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

Le résultat suit.

$\square$

Formule de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, et soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Démonstration

Comme on a déjà vu la formule avec reste intégral, il suffit de montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Mais on peut interpréter l'expression de gauche comme un barycentre des valeurs de $f^{(n+1)}(t)$ pour t dans $[a,b]$.

Mais

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}dt&=\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b\\&=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Il suit que

$$\int_a^b\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}m$$

où m est compris entre le minimum et le maximum des valeurs de f sur $[a,b]$. Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $m=f(c)$, pour un certain $c\in[a,b]$.

$\square$

Formule de Taylor-Young

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, et soit $a \in I$. On a alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration

Ceci suit directement du théorème de Taylor-Lagrange, puisque f est de classe C^{n+1}, donc $f^{(n+1)}$ est continue, et elle est donc bornée au voisinage de a.

Intégration de séries de Taylor

Théorème

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, admettant en a le développement en série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + O((x-a)^{n+1})$$

Soit F une primitive de f, c'est-à-dire que $F' = f$. Alors F admet la série de Taylor suivante en a :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + O((x-a)^{n+2}).$$

Démonstration

On peut écrire la série de Taylor de f sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + r_n(x)$$

et par définition du O il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x-a| \leq \alpha$, $|r_n(x)| \leq C(x-a)^{n+1}$.

En intégrant cette égalité, on obtient que

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + r_{n+1}(x)$$

avec

$$r_{n+1}(x) = \int_a^x r_n(t)dt$$

On a donc

$$|r_{n+1}(x)| \leq \left| \int_a^x C(t-a)^{n+1}dt \right| \leq \frac{C}{n+2}(x-a)^{n+2}$$

et le résultat suit.

$\square$