LIMITES

Limites

Cas 1 limite en $+\infty$

Si les nombres d'une fonction $f(x)$ deviennent plus en plus grand si on prend x qui se rapproche d'une infinité

$$f(x) \to +\infty$$

On dit que la limite de $f(x)$ est plus l'infini on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Cas 2 limite en $-\infty$

Si les nombres de $f(x)$ deviennent plus en plus petit si on prend x qui se rapproche d'une infinité

$$f(x) \to -\infty$$

On dit que la limite de $f(x)$ est moins l'infini on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Cas 3 limite en un point

Si les nombres de $f(x)$ se rapprochent en un point si on prend x qui rapproche une infinité

$$f(x) \to a$$

On dit que la limite de $f(x)$ est a on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

Limite à droite et a gauche

Une fonction f possède une limite en a si et seulement si f possède une limite a gauche et a droite de a et que les limites sont égales.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Les asymptotes

Asymptote horizontale

On note asymptote horizontale : A.H.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y = l$ en $+\infty$, si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

A.H. est sous forme:

$$A.H. \equiv y$$

nouveau signe: [≡]

On lit :l'asymptote horizontale a pour équation y

Asymptote verticale

On note asymptote verticale : A.V.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale (A.V.) d'équation $x = a$, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

A.V. est sous forme:

$$A.V. \equiv x$$

Asymptote Oblique

On note asymptote oblique : A.O.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (A.O.) d'équation $y = ax + b$, en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$),si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$respectivement$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$$

A.O. est sous forme:

$$A.O.\equiv ax+b$$

À retenir

On a jamais une A.H. et une A.O. pour une seul fonction.

Formules de Cauchy

La droite d'équation $y\ =\ ax\ +\ b$ est une A.O. à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si:

1. $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ avec\ a\ \in\mathbb{R}^*$
3. $\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]=b\ avec\ b\ \in\mathbb{R}$

Terme du plus haut dégrée

À l'infini, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n\text{ ,}avec\ a_n\neq0$$

Théorème du plus haut dégrée d'une fonction rationelle

Definition

Soit

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

une fraction rationelle avec

$$(a_n\neq0;\ b_m\neq0)$$

Alors la limite quand f(x) tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ est égale a la limite du rapport du termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Demonstration

$$\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n\overbrace{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)}^{\to1}}{b_mx^n\underbrace{\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\ldots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}\right)}_{\to1}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^n}$$

cqfd.

Limites des fonctions trigonométriques

Théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions définies sur l'intervalle ouvert I telles que:

$$h\left(x\right) \leq f(x) \leq g(x)$$

Si

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g\left(x\right) = l$$

avec

$$x \neq a \ \ (a\ réel\ ou\ infini)$$

donc

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = l$$

Remarque

Le théorème d'encadrement est aussi apellée théorème de sandwich ou des gendarmes.

Théorème de comparaison par minoration ou majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et soit a une borne de I ou un réel appartenant à I.

1. Si pour tout x de I, $f\left(x\right) \geqslant g\left(x\right)$ et si:

$$\lim_{x \to a} g\left(x\right) = +\infty \implies \lim_{x \to a} f\left(x\right) = +\infty$$

2. Si pour tout x de I, $f\left(x\right) \leqslant g\left(x\right)$ et si:

$$\lim_{x \to a} g\left(x\right) = -\infty \implies \lim_{x \to a} f\left(x\right) = -\infty$$

Théorème sur les limites

Limite d'une somme

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$et\ si\ g\ a\ pour\ limite$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$alors\ f\ +\ g\ a\ pour\ limite$	$l\ +\ l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < \ 0$	$l < \ 0$

si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $f \cdot g$ *a pour limite*	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-$
et si g a pour limite	$l' \neq 0$	$-\infty$ *ou* $+\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' >$
alors $\frac{f}{g}$ *a pour limite*	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-$

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	$l > 0$ *ou* $+\infty$	$l > 0$ *ou* $+\infty$	$l < 0$ *ou* $-\infty$
et si g a pour limite	0^+	0^-	0^+
alors $\frac{f}{g}$ *a pour limite*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Remarque

f.i. signifie forme indéterminée

Formes indéterminées

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

$$1^\infty$$