FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y = f(x)$. La réciproque de cette fonction est la relation qui fait correspondre à chaque y obtenu par f, le ou les x dont y est l'image.

Remarques

- La réciproque d'une fonction est une relation, mais n'est pas toujours une fonction comme chaque antécédent admet au plus une seul image.
- Les courbes d'une fonction f et de sa réciproque sont toujours symétriques par rapport à la première bissectrices des axes du repère orthonormé.

Propriété

Soit f une fonction telle que sa réciproque soit également une fonction notée g.

Alors $\forall x \in D_g$:

$$f \circ g(x) = x$$

et $\forall x \in D_f$:

$$g \circ f(x) = x$$

Fonction réciproque

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie par:

$$\ln :]0; +\infty[\ \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = \ln(x)$$

où $\ln(x)$ est le nombre dont l'exponentielle est x.

Propriété

1. par définition

   $\forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$

3. $\ln(e) = 1$

4. $\ln(1) = 0$

Théorème

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$$

Démonstration

Si $\ln(a) = b$, alors $e^b = e^{\ln(a)} = a$
Réciproquement, si $a = e^b$, alors $\ln(a) = \ln(e^b) = b$.

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration

Considérons deux nombres strictement positifs u et v tels que $u < v$, soit encore $e^{\ln(u)} < e^{\ln(v)}$. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc nécessairement, $\ln(u) < \ln(v)$: La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Propriété

$\forall a, b \in]0; +\infty[$

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

et

$$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$$

Théorème

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Comme la fontion exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\Leftrightarrow e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$$

$$\Leftrightarrow ab = e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)}$$

$$\Leftrightarrow ab = e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)}$$

$$\Leftrightarrow ab = a \cdot b$$

Théorème

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$$

Démonstration

On sait que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* :$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \ (1)$$

- Pour $x = \frac{a}{b}$ et $y = b$, (1) s'écrit:

$$\ln(\frac{a}{b} \cdot b) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(a) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \ (2)$$

- Pour $a = 1$, (2) s'écrit:

$$\ln(\frac{1}{b}) = \ln(1) - \ln(b) = -\ln(b)$$

Théorème

Pour tout entier $p > 1$ et tous réels $a_1 > 0, a_2 > 0$, ... , $a_p > 0$

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p)$$

Démonstration

Montrons par récurrence que la formule est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$

$$\mathscr{P}(p) : \ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p)$$

- <u>Initialisation:</u> $\mathscr{P}(1)$ est vraie

  En effet, $\ln(a_1) = \ln(a_1)$

- <u>Hérédité:</u> Supposons que l'on ait $\mathscr{P}(p)$

  Alors on aurait,

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p \cdot a_{p+1})$$

$$= \ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) + \ln(a_{p+1})$$

$$= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots \ln(a_p) + \ln(a_{p+1})$$

par l'hypothèse de récurrence

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie

- <u>Conclusion:</u> Pour tout entier $p \geqslant 1$ et tous réel $a_1 > 0, a_2 > 0$, ... , $a_p > 0$:

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p)$$

Théorème

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall p \in \mathbb{Z}$

$$\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$$

Démonstration

On sait que:

Pour tout entier $p \geqslant 1$ et tous réels $a_1 > 0, a_2 > 0$, ... , $a_p > 0$:

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p) \ (1)$$

- si $p \geqslant 1$: Lorsque $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a$, alors (1) permet de conclure que

$$\ln(a^p) = p \ln(a) \ (2)$$

- $p \leqslant -1$:

$$\ln(a^p) = \ln(\frac{1}{a^{-p}})$$

$$= -\ln(a^{-p})$$

$$= -(-p \ln(a))$$

par (2), car $-p \geqslant 1$

$$= p \ln(a)$$

- si $p = 0$: $\ln(a^p) = \ln(1) = 0$ et $p \ln(a) = 0$.

  D'où le résultat.

Théorème

$\forall a > 0$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstration

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a})$$
$$\Leftrightarrow \ln(a) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a})$$
$$\Leftrightarrow \ln(a) = 2\ln(\sqrt{a})$$
$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Limites

Théorème

1. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
2. $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Théorème

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$$

Démonstration

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$$
$$= (\ln)'(1)$$

$$= 1$$

Dérivée

Théorème

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

Nous devons démontrer que:

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}$$

Posons:

$$y = \ln(a) \Leftrightarrow x = e^y$$

et

$$b = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^b$$

Si $x \to a$, alors $y \to \ln(a) = b$, car ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

On a donc:

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{e^y - e^b}$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{y-b}{e^y - e^b}}$$

$$= \frac{1}{(\exp)'(b)}$$

$$= \frac{1}{e^b}$$

$$= \frac{1}{a}$$

Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

Conséquence

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction f définie par:

$$f(x) = \ln[u(x)]$$

est dérivable sur I et $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \frac{u^(x)}{u(x)}$$

Croissance comparée de $\ln(x)$ et x^n

Théorème

1. $\lim_{x \to +\infty} = \frac{\ln(x)}{x} = 0$
2. $\lim_{x \to 0^+} = x \ln(x) = 0$

Démonstration

1. Posons $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

   Si $x \to +\infty$, alors $y \to +\infty$

   Donc:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{y}{e^y}}_{\to +\infty}}$$

$$= 0$$

2. Posons $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

   Si $x \to 0^+$, alors $y \to -\infty$

   Donc:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{y \to -\infty} e^y \cdot y$$

$$= \lim_{y \to -\infty} y e^y$$

$$= 0$$

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

Remarques

1. On dit qu'à l'infini et en 0 x l'emporte sur $\ln(x)$.
2. Vu que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, $\mathscr{C}_{\ln}$ n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

Théorème

$\forall n \in \mathbb{N}$*:

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} x^n \ln(x) = +\infty$
3. $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

Remarque

On dit qu'à l'infini et en 0, n'importe quelle puissance de x l'emporte sur $\ln(x)$.