SCHWINGUNGEN

Definition

Eine mechanische Schwingung ist die periodische Bewegung eines Körpers um seine Ruhelage.

Rücktreibende Kraft

Schwingungen werden durch eine stets zur Ruhelage hin wirkende Kraft verursacht. Diese Kraft wird als rücktreibende Kraft bezeichnet.

Schwingungsdauer

Die Periodendauer oder Schwingungsdauer T ist die zeitliche Dauer einer vollständigen Schwingung.

$$T = \frac{t}{n}$$

Einheit

$$[T] = 1s$$

Frequenz

Die Frequenz f gibt an, wie oft ein Körper in einer Sekunde hin und her schwingt.

$$f = \frac{1}{T}$$

Einheit

$$[f] = 1Hz$$

Elongation

Die Elongation oder momentane Auslenkung $y(t)$ gibt an, wie weit der schwingende Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt von seiner Ruhelage entfernt ist.

$$y\,(t) = y_{max} \cdot sin\,(\omega t + \varphi_0)$$

Einheit

$$[y\,(t)] = m$$

Amplitude

Die Amplitude y_{max} ist der größte Abstand des schwingenden Körpers von der Ruhelage.

Einheit

$$[y_{max}] = m$$

Harmonische Schwingung

Eine Schwingung bei der die Elongation y in Abhängigkeit der Zeit t eine Sinuskurve ergibt, bezeichnet man als Harmonische Schwingung oder Sinusschwingung.

Rücktreibende Kraft:

$$\overrightarrow{F} = -D \cdot \overrightarrow{y}$$

Phasenwinkel

Der Winkel φ, den der Radiusvektor zu einem bestimmten Zeitpunkt t mit der positiven x-Achse einschließt heißt Phasenwinkel oder Phase der Schwingung. Die Phase kennzeichnet den augenblicklichen Schwingungszustand.

$$\varphi_0 = \omega t$$

Einheit

$$[\varphi_0] = rad$$

$y(t)$ - t - Gesetz

Eine lineare Schwingung, die mit der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung übereinstimmt heißt harmonische Schwingung oder Sinusschwingung.

$$y\left(t\right) = y_{max}\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Einheit

$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

Auslenkung y, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a

$$y\left(t\right) = y_{max}\sin\left(\omega t\right)$$

$$\frac{d}{dt}y\left(t\right) \ = \ v(t)$$

$$v\left(t\right) = y_{max}\omega\cos\left(\omega t\right)$$

$$\frac{d}{dt}v\left(t\right) = a\left(t\right)$$

$$a\left(t\right) = -\omega^2 y_{max}\sin\left(\omega t\right)$$

Richtgröße

Die Richtgröße entspricht der Federkonstante des Hooke'schen Gesetzes.

Einheit

$$[D] = \frac{N}{m}$$

Formeln

$$D = m\omega^2$$
$$D = \frac{m \cdot g}{l}$$

Phasendifferenz

Definition

Die Phasendifferenz zweier Schwingungen gleicher Frequenz ist der Phasenwinkel $\Delta\varphi$, um den beide Schwingungen verschoben sind. $\Delta\varphi$ entspricht der Zeitdifferenz: $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$

Fadenpendel

Herleitung

Bei einem Fadenpendel ist die rücktreibende Kraft $\overrightarrow{F_r}$ tangential zum Kreisbogen und zur Elongation y, die in endgegengerichte. Sie ist gleich der Resultierenden aus der Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ des anhängenden Körpers und der in Richtung des Fadens wirkende Spannkraft $\overrightarrow{F_x}$:

$$\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_x}$$

Projektion auf (Ox):

$$F_r = -F_G \cdot \sin(\alpha)$$

Mit $y = l \cdot \alpha$ (α in Bogenmaβ) wird die vorherige Gleichung zu:

$$\frac{F_r}{y} = -\frac{F_G}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$

Bei Kleinwinkelnäherung: $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$

$$F_r = -\frac{F_G}{l} \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y$$

Mit: $D = \frac{m \cdot g}{l}$

$$F_r = -D \cdot y$$

Für kleine Winkel α ist die rücktreibende Kraft F_r, der Elongation y proportional, sodass die Schwingung des Fadenpendels harmonisch ist. Mit der Formel für die Dauer einer harmonischen Schwingung folgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Gültigkeitsbedingungen

Die gefundene Formel gilt nur:

1. für kleine Auslenkungen.
2. wenn die Masse des Fadens gegenüber des Pendelkörpers vernachlässigt werden kann.
3. wenn die Pendelmasse als punktförmig angenommen wird.

Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Federpendel

Herleitung

Durch Anhängen des schwingenden Körpers mit der Masse m wird die Feder um die Strecke s_0 verlängert. Nach dem Hooke'schen Gesetz ist die Verlängerung $\overrightarrow{s_0}$ innerhalb der Elastizitätsgrenzen der Schraubenfeder direkt proportional zur Federkraft

$$\overrightarrow{F_{F,0}} \; : \; \overrightarrow{F_{F,0}} = -D \cdot \overrightarrow{s_0}$$

, wobei D die Federkonstante der Schraubenfeder ist.

Projektion auf (Oy) :

$$F_{R,0,y} = -D \cdot s_0 (1)$$

An dem schwingenden Körper wirken seine Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ und die Federkraft $\overrightarrow{F_F}$. In der Ruhelage gilt Kräftegleichgewicht und somit:

$$\overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_{F,0}} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_{F,0}} = -\overrightarrow{F_G}$$

Projektion auf (Oy) :

$$F_{F,0,y} = -F_G \; (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir:

$$F_G = D \cdot s_0 \; (3)$$

Wird die Feder ausgelenkt, herrscht kein Kräftegleichgewicht und die Resultierende der beiden wirkenden Kräfte ist gleich der rücktreibenden Kraft

$$\overrightarrow{F_r} \; : \; \overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_F} + \overrightarrow{F_G}$$

Projektion auf (Oy) :

$F_{F,y} = -F_F$ und $F_{G,y} = -F_G$

Die Feder wurde dann insgesamt um $y + s_0$ gedehnt. Es gilt:

$$F_F = -D \cdot (s_0 + y) \ (4)$$

Somit erhalten wir: $F_{r,y} = -F_F + F_G$

Mit (3) und (4):

$$F_{r,y} = -D \cdot y$$

Für die rücktreibende Kraft F_r beim Fadenpendel gilt ebenfalls ein lineares Kraftgesetz.

Gültigkeitsbedingungen

Die Gefundene Formel gilt nur wenn:

1. die Periodendauer unabhängig von der Amplitude y_{max} der Schwingung ist.
2. die Periodendauer direkt proportional zu der Quadratwurzel aus Masse m des Pendelkörpers ist.
   (bei gleicher Federkonstante)
   $$T \sim m$$
3. die Periodendauer indirekt proportional zu der Quadratwurzel aus der Federkonstante D der Feder ist.
   (bei gleicher Masse)
   $$T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Energie eines harmonischen Oszillators

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2 \sin^2(\omega t)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2 \cos^2(\omega t)$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2$$

Überlagerungen von Schwingungen

Frequenz der Schwebung

$$f_s = |f_1 - f_2|$$

Frequenz des Schwebungstons

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$