Luxformel

Versioun 1 - Update: 69

CHEMIE

ALLGEMEINE-CHEMIE

Gehaltsangaben 3
Periodensystem der Elemente 5
Säure und Basen 7

ANORGANISCHE-CHEMIE

Chemisches Gleichgewicht 18
Redoxreaktionen 20

ORGANISCHE-CHEMIE

Aldehyde, Ketone 22
Alkane 26
Alkene 35
Alkohole 42
Carbonsäuren 48
Cycloalkane 53

TABELLEN

DH-Werte 55
Elemente und Namen 65
Molare Standard - und Verdampfungsenthalpien 75
Molare Standard - Bildungsenthalpien 76
Molare Standard Entropien 81
Numerische Prefixe 86
Redoxtabelle 91
Spezifische Verbrennungswärmen 97

DIVERS

Alphabet 99
Exotische Umwandlungen 102
Gaskonstanten 106
Luftdichte 109
Naturkonstanten 111
Präfixe 113
S.I. - Basisgrößen 116
Praktikum Theorie 117
Tonintervalle 118
Wasserdichte 119
Widerstands Ringe 125
Zahl Prefixe 129

ELEKTROTECHNIK

BAUTEILE

Elektrischer Widerstand 131
Halbleiterdiode 134
Kondensator im Wechselstromkreis 137
Kondensator 140
Transformator 143
Transistor 144
Widerstand im Wechselstromkreis 150

ELEKTRIZITAETSLEHRE

Elektrische Feld 152
Elektrische Stromkreis 156
Halbleiter 161
Magnetische Feld 165
Wechselstromtechnik 173

GRUNDLAGEN

Basisformeln 177

SCHALTUNGEN

Filterschaltungen 178
RC - Parallelschaltung 181
RC - Reihenschaltung 184
RL - Parallelschaltung 187
RLC - Parallelschaltung 190
RLC - Reihenschaltung 193

INFORMATIK

CLOUD

Cloud Computing 196

DATABASES

Data Warehouse 202

DEEP-LEARNING

Natural Language Processing 221

DIGITALTECHNIK

Codes 222
Grundlagen der Digitaltechnik 224
Grundlagen der Informationstheorie 230
Grundlagen der Informationstheorie 236
Mikroprozessorarchitektur 242
Minimierung und Schaltungsentwurf 247

Schaltnetze 252
Schaltwerke 258
Zahlensysteme der Informatik 262

JAVA

Java Array Lists 267
Java Basics 270
Java Problèmes Types 275

LATEX

LATEX Basics 283

MACHINE-LEARNING

Machine Learning 295

PYTHON

Python – Full Course 307

TABELLEN

Vorsilben 316
Zahlenbereiche der Binärzahlen 317

WEB-DEVELOPMENT

CSS 318
HTML 325

MATHE

ALGEBRE

Eléments d'arithmétique 332
Nombres Complexes 336
Puissances et règles de priorité 348

ANALYSE

Continuité 351
Dérivation 355
Développement en séries de Taylor 358
Équations différentielles 363
Fonctions de plusieurs variables 376
Intégrale de Riemann 396
Intégrales impropres 407
Intégration 414
Limites 420
Primitives 426
Séries numériques 435

CALCULUS

Analysis Basics 444
Axiom of Completeness 445
Continuity 449
Differntial Equations 453
Differentiation 454
Functions 462
Limits of functions 475
Sequences 480
Taylor expansion 490

DEMONSTRATIONS

Démonstrations des fonctions dérivées 491

FONCTIONS

Fonction exponentielle 500
Fonction logarithme népérien 512

GEOMETRIE

Conditions Mathématiques utiles 521
Géométrie dans l'espace 523
Théorème de Pythagore 533
Théorème de Thalès 534
Trigonomètrie dans un cercle 537
Trigonometrie dans un triangle rectangle 539
Trigonometrie 542
Vecteurs 544

LINEAR-ALGEBRA

Eigenvectors and Eigenvalues 551
Finite-Dimensional Vector Spaces 553
Invertibility and Isomorphic Vector Spaces 567
Linear Maps 573
Matrices and Linear Maps 578
Matrices 587
Null Spaces and Ranges 604
Systems of Linear Equations 610
Vector Spaces 620

LOGIC

Foundations of Set Theory 631

LOGIQUE

Démonstrations 638
Logique Élémentaire 640

MATHS-FOR-PHYSICISTS

Vectors 645

PROBABILITE

Probabilités 647

STATISTIQUES

Statistiques 654

TABLEAUX

Collection des Formules des Figures Géométriques 655
Collection des formules exponentielles 657
collection des formules trigonometriques 658
Tableau Fonctions-Dérivées 661
Tableau des primitives de fonctions 665

THEORIE-DES-NOMBRES

Ensembles des nombres 667

MESSTECHNIK

GRUNDLAGEN

Messtechnik 669

PHYSIK

ASTRONPHYSIK

Gravitation 674

GRUNDLAGEN

Grundlagen der Physik 680

KERNPHYSIK

Formelsammlung Radioaktivität 684
Radioaktivität 686

KLASSISCHE-MECHANIK

Arbeit, Energie, Leistung 694
Auftrieb 699
Druck 702
Formelsammlung Würfe 706
Grundlagen der Mechanik 709
Hook'sches Gesetz 712
Impuls 713
Kinematik 723

Kreisbewegungen 727
Reibung 731

OPTIK

Formelsammlung Strahlenoptik 735
Formelsammlung Wellenoptik 738
Strahlenoptik 739
Wellenoptik 756

PHYSIQUE-EXPERIMENTALE

Cinématique 767
Électrostatique 775

QUANTENPHYSIK

Formelsammlung Quantenmechanik 782
Quantenmechanik 784

RELATIVITAETSTHEORIE

Formelsammlung Relativitätstheorie 794
Relativitätstheorie 796

TABELLEN

Astronomische Daten 801
Sonnensystem 806

THERMODYNAMIK

Gasgesetze 807
Kalirometrie 809
Längenausdehnung 811
Temperatur 814
Thermodynamics 818
Volumenänderung 821

WELLENLEHRE

Arbeit, Energie, Leistung 823
Mechanische Wellen 827
Schwingungen 832
Stehende Wellen 840

TECHNOLOGIE

DIVERS

Energieeffizienz 844
Festigkeitslehre 846
Zahnradtriebe 852

ENERGIE-UND-UMWELT

Luftschadstoffe 854
Treibhauseffekt 860

ENERGIEWANDLER

Kernkraftwerke 863
Ottomotor 876
Stirlingmotor 878
Wärmepumpe 879

THERMODYNAMIK

Kreisprozesse 883

WERKSTOFFKUNDE

Werkstoff-eigenschaften 887

GEHALTSANGABEN

Stoffmengen

$$n(X) = \frac{m(X)}{M(X)}$$

$$n(X) = \frac{V(X)}{V_m}$$

$$n(X) = \frac{N(X)}{N_A}$$

Bemerkung

N_A ist die Avogadrokonstante, sie ist eine Naturkonstante.

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$$

Gehaltsangaben in Lösungen

Stoffmengenkonzentration

$$c(X) = \frac{n(X)}{V_{Lsg}}$$

Massenkonzentration

$$\beta(X) = \frac{m(X)}{V_{Lsg}}$$

Massenanteil

$$w(X) = \frac{m(X)}{m_{Lsg}}$$

Bemerkung

Lsg steht für Lösung.

Beziehungen zwischen den Größen

$$c\left(X\right) = \frac{n\left(X\right)}{V_{Lsg}} = \frac{m\left(X\right)}{M\left(X\right) \cdot V_{Lsg}} = \frac{\beta\left(X\right)}{M\left(X\right)}$$

$$\beta\left(X\right) = c\left(X\right) \cdot M\left(X\right)$$

$$c\left(X\right) = \frac{n\left(X\right)}{V_{Lsg}} = \frac{m\left(X\right)}{M\left(X\right) \cdot V_{Lsg}} = \frac{w\left(X\right) \cdot m_{Lsg}}{M\left(X\right) \cdot V_{Lsg}} = \frac{w\left(X\right) \cdot \rho_{Lsg}}{M\left(X\right)}$$

$$\beta\left(X\right) = \frac{m\left(X\right)}{V_{Lsg}} = \frac{w\left(X\right) \cdot m_{Lsg}}{V_{Lsg}} = w\left(X\right) \cdot \rho_{Lsg}$$

Verdünnen von Lösungen

$$c_1 \cdot V_1 = c_2 \cdot V_2$$

$$da,\ n_1 = n_2$$

PERIODENSYSTEM DER ELEMENTE

Periodensystem der Elemente																
	Gruppe															
Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1 H 1,0															
2	3 Li 6,9	4 Be 9,0											5 B 10,8	6 C 12,0	7 N 14,0	8 O 16,0
3	11 Na 23,0	12 Mg 24,3											13 Al 27,0	14 Si 28,1	15 P 31,0	16 S 32,1
4	19 K 39,1	20 Ca 40,1	21 Sc 45,0	22 Ti 47,9	23 V 50,9	24 Cr 52,0	25 Mn 54,9	26 Fe 55,8	27 Co 58,9	28 Ni 58,7	29 Cu 63,5	30 Zn 65,4	31 Ga 69,7	32 Ge 72,6	33 As 74,9	34 Se 79,0
5	37 Rb 85,5	38 Sr 87,6	39 Y 88,9	40 Zr 91,2	41 Nb 92,9	42 Mo 95,9	43 Tc 99	44 Ru 101,1	45 Rh 102,9	46 Pd 106,4	47 Ag 107,9	48 Cd 112,4	49 In 114,8	50 Sn 118,7	51 Sb 121,8	52 Te 127,6
6	55 Cs 132,9	56 Ba 137,3	57 – 71	72 Hf 178,5	73 Ta 180,9	74 W 183,8	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,1	79 Au 197,0	80 Hg 200,6	81 Tl 204,4	82 Pb 207,2	83 Bi 209,0	84 Po 209
7	87 Fr 223	88 Ra 226	89 – 103	104 Rf 261	105 Db 262	106 Sg 263	107 Bh 262	108 Hs 265	109 Mt 268	110 Ds 269	111 Rg 272	112 Cn 277	113 Nh	114 Fl	115 Mc	116 Lv
Lanthanoide			57 La 138,9	58 Ce 140,1	59 Pr 140,9	60 Nd 144,2	61 Pm 147	62 Sm 150,4	63 Eu 152,0	64 Gd 157,3	65 Tb 158,9	66 Dy 162,5	67 Ho 164,9	68 Er 167,3	69 Tm 168,9	70 Yb 173,0
Actinoide			89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No

	227	232	231	238	237	244	243	247	247	251	252	257	258	259

Legende

- Rot : Alkalimetalle
- Hellrot : Erdalkalimetalle
- Hellblau : Übergangsmetalle
- Grau : Metalle
- Braun : Halbmetalle
- Grün : Nichtmetalle
- Gelb : Halogene
- Lila : Edelgase
- Zahl über dem Atom : Ordnungszahl
- Zahl unter dem Atom : Atomgewicht

SÄURE UND BASEN

Säure und Basen nach Brønsted

Definition

Teilchen, die bei Reaktionen Protonen (H^+-Ionen) abgeben nennt man Säuren. Säuren sind Protonendonatoren. Teilchen die bei Reaktionen Protonen aufnehmen nennt man Basen. Basen sind Protonenakzeptoren.

Säure - Base - Reaktionen

Eine chemische Reaktionen bei der ein Proton von einer Säure auf eine Base übertragen wird bezeichnet man als Säure-Base-Reaktion oder Protolyse (Protonenübertragungsreaktion)

Korrespondierende Säure-Base-Paare

Eine Säure HA wird in einer Säure-Base-Reaktion zur Base A^-, die Base B wird dabei zur Säure HB^+. HA/A^- und HB^+/B bilden jeweils ein korrespondierendes Säure-Base-Paar.

$$HA + B \longrightarrow HB^+ + A^-$$

Ampholyte

Ampholyte sind Teilchen, die je nach Reaktionspartner entweder als Brønsted-Säure oder als Brønsted-Base reagieren können.

Autoprotolyse des Wassers

Den Protonenübergang zwischen zwei Wassermolekülen bezeichnet man als Autoprotolyse des Wassers. Es entstehen Oxoniumionen und Hydroxidionen.

Reaktionsgleichung

$$H_2O + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$$

$$K = \frac{c(\mathrm{H_{30}}^+)c(\mathrm{OH}^-)}{c^2(\mathrm{H_2O})}$$

$$K_W = \overbrace{K}^{konstant} \cdot \overbrace{c^2(\mathrm{H_2O})}^{konstant} = c(\mathrm{H_3O}^+) \cdot c(\mathrm{OH}^-)$$

Ionenprodukt des Wassers

Das Produkt $K_W = c(\mathrm{H_3O}^+) \cdot c(\mathrm{OH}^-)$ bezeichnet man als Ionenprodukt des Wassers. Der Wert von K_W ist abhängig von der Temperatur. Bei $25°C$ hat das Ionenprodukt einen Wert von $K_W = 1,00 \cdot 10^{14} \frac{mol^2}{L^2}$

Im reinen Wasser bei $25°C$ betragen die Ionenkonzentrationen

$$c(\mathrm{H_3O}^+) = c(\mathrm{OH}^-) = 10^{-7} \frac{mol}{L}$$

Wässrige Lösungen von Säuren und Basen

Auch in verdünnten wässrigen Lösungen gilt noch die Beziehung für das Ionenprodukt

$$K_W = c(\mathrm{H_3O}^+) \cdot c(\mathrm{OH}^-) = 10^{-14} \frac{mol^2}{L^2}$$

1. Säuren reagieren mit Wasser unter Bildung von Oxoniumionen

   $$\mathrm{HA} + \mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{H_3O}^+ + \mathrm{A}^-$$

   Nimmt $c(\mathrm{H_3O}^+)$ durch Zugabe einer Säure zu, so wird $c(\mathrm{OH}^-)$ kleiner bis das Produkt $c(\mathrm{H_3O}^+) \cdot c(\mathrm{OH}^-)$ wieder einen Wert von $10^{-14} \frac{mol^2}{L^2}$ erreicht (bei $25°C$) Jetzt ist $c(\mathrm{H_3O}^+)$ gröβer als $10^{-7} \frac{mol}{L}$ und $c(\mathrm{OH}^-)$ kleiner als $10^{-7} \frac{mol}{L}$

2. Basen reagieren mit Wasser unter Bildung von Hydroxidionen

   $$\mathrm{B}^- + \mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{HB} + \mathrm{OH}^-$$

   Nimmt $c(\mathrm{OH}^-)$ durch Zugabe einer Base zu, so wird $c(\mathrm{H_3O}^+)$ kleiner bis das Produkt $c(\mathrm{H_3O}^+) \cdot c(\mathrm{OH}^-)$ wieder einen Wert von $10^{-14} \frac{mol^2}{L^2}$ erreicht (bei $25°C$

) Jetzt ist $c(\mathrm{OH^-})$ größer als $10^{-7}\frac{mol}{L}$ und $c(\mathrm{H_3O^+})$ kleiner als $10^{-7}\frac{mol}{L}$

Jede wässrige Lösung enthält sowohl Oxoniumionen als auch Hydroxidionen, nur in wechselnden Verhältnissen.

1. neutrale Lösung: $c(\mathrm{H_3O^+}) = c(\mathrm{OH^-})$
2. saure Lösung: $c(\mathrm{H_3O^+}) > c(\mathrm{OH^-})$
3. alkalische Lösung: $c(\mathrm{H_3O^+}) < c(\mathrm{OH^-})$

In jedem Fall gilt:

$$c(\mathrm{H_3O^+}) \cdot c(\mathrm{OH^-}) = 10^{-14}\frac{mol^2}{L^2}$$

p<u>H - Wert</u>

Definition

Der pH-Wert ist ein Maß für die Stoffmengenkonzentration an Oxoniumionen in einer wässrigen Lösung.

$$p\mathrm{H} = -\log\left[c(\mathrm{H_3O^+})\right]$$

oder

$$c(\mathrm{H_3O^+}) = 10^{-p\mathrm{H}}$$

p<u>OH - Wert</u>

Bemerkung

In alkalischen Lösungen wird oft der pOH-Wert benutzt:

$$p\mathrm{OH} = -\log\left[c(\mathrm{OH^-})\right]$$

$$c(\mathrm{OH^-}) = 10^{-p\mathrm{OH}}$$

<u>Zusammenhang zwischen p</u>H <u>und p</u>OH

Der Zusammenhang zwischen pH und pOH kann aus dem Ionenprodukt des Wassers hergeleitet werden:

$$p\mathrm{H} + p\mathrm{OH} = pK_W$$

Bei $25°C$:

$$pK_W = -\log(K_W) = -\log(10^{-14}) = 14$$
$$p\mathrm{H} + p\mathrm{OH} = 14$$

Starke Säure

Starke Säuren sind in wässriger Lösung (fast) vollständig dissoziiert.

$$\mathrm{HA} + \mathrm{H_2O} \rightarrow \mathrm{H_3O^+}_{(\mathrm{aq})} + \mathrm{A^-}_{(\mathrm{aq})}$$

Für einprotonige Säuren:

$c(\mathrm{H_3O^+}) \simeq c_0(\mathrm{HA})$ und $c(\mathrm{HA}) \simeq 0$

Schwache Säure

Schwache Säuren sind in wässriger Lösung nur unvollständig dissoziiert. Die Dissoziation ist eine Gleichgewichtsreaktion.

$$\mathrm{HA} + \mathrm{H_2O} \longrightarrow \mathrm{H_3O^+}_{(\mathrm{aq})} + \mathrm{A^-}_{(\mathrm{aq})}$$

Für einprotonige Säuren:

$c(\mathrm{HA}) \simeq c_0(\mathrm{HA})$ und $c(\mathrm{H_3O^+}) << c_0(\mathrm{HA})$

(Sehr) starke einprotonige Säure

$$pK_S < 0$$

Das Gleichgewicht liegt stark auf der rechten Seite: die Protolyse verläuft (fast) vollständig. $c(\mathrm{H_3O^+}) \simeq c_0(\mathrm{HA})$.

Daraus folgt

$$pH = -\log\left[c(\mathrm{H_3O^+})\right]$$

$$c(\mathrm{H_3O^+}) \simeq c_0(\mathrm{HA})$$

p*H-*Wert einer Lösung einer starken Säure

$$pH = -\log\left[c_0(\mathrm{HA})\right]$$

(Sehr) starke einprotonige Base

$$pK_B < 0$$

$$\mathrm{B} + \mathrm{H_2O} \longrightarrow \mathrm{HB^+} + \mathrm{OH^-}$$

Das Gleichgewicht liegt stark auf der rechten Seite: die Protolyse verläuft (fast) vollständig. $c(\mathrm{OH^-}) \simeq c_0(B)$.

Daraus folgt

$$p\mathrm{OH} = -\log[c_0(\mathrm{B})]$$

Mit pH = 14 - pOH

$$p\mathrm{H} = 14 + \log[c_0(\mathrm{B})]$$

Schwache einprotonige Säure

$$(pK_S > 0)$$

$$\mathrm{HA} + \mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{H_3O^+} + \mathrm{A^-}$$

Die Dissoziation ist eine Gleichgewichtsreaktion:

$$K_S = \frac{c(\mathrm{H_3O^+}) \cdot c(\mathrm{A^-})}{c(\mathrm{HA})} \ (1)$$

Hypothesen

1. Das Gleichgewicht ist stark nach links verschoben; Die Konzentrationsänderung der Säure durch die Protolyse ist vernachlässigbar klein.

$$c(\mathrm{HA}) \simeq c_0(\mathrm{HA}) \ (2)$$

2. Die Oxonium-Ionen aus der Autoprotolyse des Wassers können vernachlässigt werden

$$c(\mathrm{A}^-) \simeq c(\mathrm{H_3O^+})\ (3)$$

$(2),\ (3) \rightarrow (1)$

$$K_S = \frac{c(\mathrm{H_3O^+}) \cdot \overbrace{c(\mathrm{A}^-)}^{\simeq c(\mathrm{H_3O^+})}}{\underbrace{c(\mathrm{HA})}_{\simeq c_0(\mathrm{HA})}}$$

$$\Leftrightarrow K_S \simeq \frac{c^2(\mathrm{H_3O^+})}{c_0(\mathrm{HA})}$$

$$\Leftrightarrow c(\mathrm{H_3O^+}) = \sqrt{K_S \cdot c_0(\mathrm{HA})}$$

$$\Leftrightarrow p\mathrm{H} = -\log\left\{[K_S \cdot c_0(\mathrm{HA})]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\Leftrightarrow p\mathrm{H} = -\frac{1}{2}\log\left[K_S \cdot c_0(\mathrm{HA})\right]$$

$$\Leftrightarrow p\mathrm{H} = -\frac{1}{2}\log(K_S) - \frac{1}{2}\log[c_0(\mathrm{HA})]$$

$$\Leftrightarrow p\mathrm{H} = \frac{1}{2}\{pK_S - \log\left[c_0\left(\mathrm{HA}\right)\right]\}$$

p*H - *Wert einer Lösung einer schwachen Säure

$$p\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left[pK_S - \log\left(c_0(\mathrm{HA})\right)\right]$$

<u>Schwache einprotonige Base</u>

Nach gleichen überlegungen wie bei der vorherigen Herleitung:

$$p\mathrm{OH} = \frac{1}{2}\left[pK_B - \log(c_0(B))\right]$$

oder:

$$pH = 14 - \frac{1}{2}[pK_B - \log(c_0(B))]$$

Säure und Base Reaktionen in wässrigen Salzlösungen

- Teilchen, die fast keinen oder wenigen Einfluss auf den Charakter einer Lösung haben sind zum Beispiel:
  - die Kationen von Alkalimetallen und Erdalkalimetallen:
    Na^+; K^+; Ca^{2+};...
  - die Anionen von starken und einprotonigen Säuren:
    Cl^-; Br^-; I^-; NO_3^-; ClO_4^-; SO_4^-
- Der Charaker der Lösung wird durch das Teilchen mit dem kleineren pK-Wert bestimmt.
- Bei Ampholyten bestimmt die Funktion mit dem niedrigen pK-Wert den Charaker des Teilchens.

Pufferlösungen

Pufferlösungen sind Lösungen deren pH-Wert sich bei Zugabe einer Säure oder Base nur sehr wenig verändert.

Pufferlösungen enthalten sowohl eine schwache Säure als auch eine schwache Base. Häufig verwendet man korrespondierende Säure-Base-Paare HA/A^-.

Die schwache Säure im Gemisch dient zum Abfangen von Hydroxidionen, die schwache Base dient zum Abfangen von Oxoniumionen.

Werden der Pufferlösung Oxoniumionen oder Hydroxidionen zugegeben, so sammeln sich diese nicht in der Lösung an (was einer starke Veränderung des pH-Werts bewirken würde), sondern sie werden durch Gleichge- wichtsverschiebung der Protolysereaktion der schwachen Säure/Base zum größten Teil aufgebraucht.

Henderson-Hasselbalch-Gleichung

Protolysereaktion der schwachen Säure HA mit Wasser:

$$\mathrm{HA} + \mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{A^-} + \mathrm{H_3O^+}$$

Die Säurekonstante der schwachen Säure beträgt:

$$K_S = \frac{c(\mathrm{H_3O^+}) \cdot c(\mathrm{A^-})}{c(\mathrm{HA})}$$

Daraus folgt:

$$c(\mathrm{H_3O^+}) = K_s \cdot \frac{c(\mathrm{HA})}{c(\mathrm{A^-})}$$

$$\Leftrightarrow -\log(c(\mathrm{H_3O^+})) = -log\left(K_s \cdot \frac{c(\mathrm{HA})}{c(\mathrm{A^-})}\right)$$

$$\Leftrightarrow p\mathrm{H} = -\log\left(K_S\right) \cdot -log\left(\frac{c(\mathrm{HA})}{c(\mathrm{A^-})}\right)$$

$$= pK_S - log\left(\frac{c(\mathrm{HA})}{c(\mathrm{A^-})}\right)$$

$$= pK_S + log\left(\frac{c(\mathrm{A^-})}{c(\mathrm{HA})}\right)$$

$p\mathrm{H} < p\mathrm{K_S}$	$c(\mathrm{HA}) > c(\mathrm{A^-})$	In der Lösung liegt überwiegend die korrespondierende Säure HA vor.
$p\mathrm{H} = p\mathrm{K_S}$	$c(\mathrm{HA}) = c(\mathrm{A^-})$	Der Stoff liegt jeweils zur Hälfte in Form der Säure und der korrespondierenden Base vor.

$p\mathrm{H} > p\mathrm{K_S}$	$c(\mathrm{HA}) < c(\mathrm{A^-})$	In der Lösung liegt überwiegend die korrespondierende Base $\mathrm{A^-}$ vor.

Henderson-Hasselbalch-Gleichung mit Soffmengen

$$p\mathrm{H} = pK_S + log\left(\frac{c(\mathrm{A^-})}{c(\mathrm{HA})}\right)$$

mit $c = \frac{n}{V_{Lösung}}$

$$= pK_S + log\left(\frac{\frac{n(\mathrm{A^-})}{V_{Lösung}}}{\frac{n(\mathrm{HA})}{V_{Lösung}}}\right)$$

$$= pK_S + log\left(\frac{n(\mathrm{A^-})}{n(\mathrm{HA})}\right)$$

Säure-Base-Titration

Wortschatz

1. Titration oder auch Maβanalyse

   Verfahren zum Ermitteln der Konzentration einer Lösung unbekannter Konzentration.

2. Probelösung

   Lösung deren Konzentration man ermitteln möchte.

3. Maβlösung

   Lösung bekannter Konzentration.

4. Äquivalenzpunkt

   m Äquivalenzpunkt haben die Säure und die Base im stöchiometrischen

Verhältnis miteinander reagiert. Das Reaktionsgemisch muss am Äquivalenzpunkt nicht zwingend neutral sein.

5. Berechnungen

   Aus dem Volumen an Maβlösung am Äquivalenzpunkt kann die Anfangskonzentration der Probelösung berechnet werden.

6. Titrationskurve

   Grafische Darstellung des pH-Werts in Abhängigkeit vom zugegebenen Volumen an Maβlösungen

7. Neutralpunkt

   Am Neutralpunkt ist das Reaktionsgemisch neutral; der pH-Wert beträgt 7.

Äquivalenzpunkt

Der Wendepunkt der Titrationskurve gibt den Äquivalenzpunkt der Titration an. Am Wendepunkt ändert der Graph sein Krümmungsverhalten, geht also zum Beispiel von einer Rechts-in eine Links-kurve über.

Der Wendepunkt liegt in der Mitte des pH-Sprungs. Er kann über die 3-Geraden-Methode oder über die Tangentenmethode grafisch ermittelt werden. Je nach Art der Probelösung oder Maβlösung kann die Lösung am Äquivalenzpunkt sauer, neutral oder alkalisch sein.

Halbäquivalenzpunkt

Bei der Titration einer schwachen Säure mit einer starken Base kann am Halbäquivalenzpunkt der pK_S-Wert der Säure ermittelt werden:

Am Halbäquivalenzpunkt haben genau die Hälfte aller Säuremoleküle, die zu Anfang in der Lösung waren, reagiert. Bei dieser Reaktion wurden sie in die korrespondierende Base umgewandelt.

$$n(\mathrm{HA}) = n(\mathrm{A}^-)$$

weil: $p\mathrm{H} = pK_S + \underbrace{\log\left(\frac{c(\mathrm{HA})}{c(\mathrm{A}^-)}\right)}_{\to 0}$

$$p\mathrm{H} = pK_S$$

Am Halbäquivalenzpunkt folgt also:

$$p\mathrm{H} = pK_S$$

$$c(\mathrm{HA}) = c(\mathrm{A}^-)$$

Schlussfolgerung

- Bei der Titration einer schwachen Säure mit einer starken Base ist der $p\mathrm{H}$-Wert am Halbäquivalenzpunkt gleich dem pK_S der Säure.
- Bei der Titration einer schwachen Base mit einer starken Säure ist der $p\mathrm{H}$-Wert am Halbäquivalenzpunkt gleich dem pK_S der korrespondierenden Säure.

CHEMISCHES GLEICHGEWICHT

Chemisches Gleichgewicht

Definition

Als chemisches Gleichgewicht bezeichnet man den stabilen Endzustand zu dem eine umkehrbare Reaktion tendiert. Im Gleichgewichtszustand liegen sowohl Produkte als auch Edukte der Reaktion, und zwar in einem genau festgelegten und konstanten Verhältnis vor.

Dynamisches Gleichgewicht

Definition

Das chemische Gleichgewicht ist ein dynamisches Gleichgewicht: Bei Erreichen des Gleichgewichtszustands hören die Hin- und Rückreaktion nicht auf; sie laufen lediglich mit gleicher Geschwindigkeit ab. Die Zusammensetzung des Reaktionsgemischs verändert sich nicht mehr.

Einfluss eines Katalysators auf den Gleichgewichtszustand

Ein Katalysator beschleunigt sowohl die Hinreaktion wie auch die Rückreaktion. Der Gleichgewichtszustand wird schneller erreicht, der Katalysator hat jedoch keinen Einfluss auf die Zusammensetzung des Systems im Gleichgewichtszustand.

Massenwirkungsgesetz nach Guldberg und Waage

Reaktion

$$aA + bB \leftrightharpoons cC + dD$$

Formel

$$K_c = \frac{k_{hin}}{k_{rück}} = \frac{c^c(C) \cdot c^d(D)}{c^a(A) \cdot c^b(B)}$$

Bemerkungen

Die Einheit der Gleichgewichtskonstante ist abhängig von den stöchiometrischen Koeffizienten, da:

$$[K_c] = \left(\frac{mol}{L}\right)^{c+d-a-b}$$

Sind an einem Gleichgewichtszustand feste oder flüssige Reinstoffe beteiligt (heterogenes Gleichgewicht) dann werden diese im Ausdruck des Massenwirkungsgesetzes nicht berücksichtigt.

Zwang

Definition

Der Zwang ist die Veränderung des Drucks, Temperatur oder Stoffmengenkonzentration einer Reaktion.

Prinzip von le Chatelier

Flucht vor dem Zwang. Ein Teil des dem System auf erlegten Zwangs wird durch Veränderung des Gleichgewichtszustands ausgeglichen. Der Gleichgewichtszustand wird so verschoben, dass dieAuswirkungen des Zwangs verkleinert werden.

REDOXREAKTIONEN

Oxidationszahl Regeln

$Elemente$	$0\ au\beta er$ ClONBrIF, $0\ für\ X_2$
$Einatomige\ Ionen$	$Ladungen$
$Wasserstoff$	$+I\ (Metallhydride - I)$
$Fluor$	$-I$
$Sauerstoff$	$-II\ (Periode\ - I)$
$Halogene\ (au\beta er\ Fluor)$	$-I\ (berechnen\ falls\ letztes\ Atom)$
$Mehratomige\ Ionen\ oder\ Moleküle$	$berechnen\ (\Sigma\ OxZ\ =\ Ladungen)$

Aufstellen

1. Oxidationszahlen festlegen

2. Atome mit verschiedenen Oxidationszahlen ausgleichen

3. Anzahl Elektronen hinzufügen ($n|\Delta Oz|$, auf der Seite wo Oz am größten)

4. Ladungen ausgleichen : in saurer Lösung mit H_3O^+ ($H^+_{(aq)}$), in alkalischer

Lösung mit OH^-

5. Sauerstoffatome mit H_2O ausgleichen

ALDEHYDE, KETONE

Carbonylverbindungen

Aldehyde und Ketone enthalten eine Carbonylgruppe. Man bezeichnet sie als Carbonylverbindungen.

Grundlagen

Aldehyde

Aldehyde enthalten eine Carbonylgruppe, an welche ein Wasserstoffatom gebunden ist.

- Die Carbonylgruppe befindet sich auf dem letzten C-Atom der Kohlenstoffkette: sie ist *endständig*.
- Die vereinfachte Schreibweise ist $R-CHO$.
- Die Namen der Aldehyde sind gekennzeichnet durch die Endung -al.
- Aldehyde deren Moleküle auβer der Carbonylgruppe keine weiteren funktionellen Gruppen enthalten bezeichnet man als Alkanale.

Ketone

Ketone enthalten eine Carbonylgruppe, an welche zwei Alkylreste gebunden sind.

- Die vereinfachte Schreibweise ist R_1-CO-R_2.
- Die Namen der Ketone sind gekennzeichnet durch die Endung –on.
- Ketone deren Moleküle außer der Carbonylgruppe keine weiteren funktionellen Gruppen enthalten bezeichnet man als Alkanone.

Physikalische Eigenschaften

Die Carbonylgruppe ist aufgrund der hohen Elektronegativität von Sauerstoff stark polar. Sie kann jedoch mit einer anderen Carbonylgruppe keine Wasserstoffbrückenbindungen bilden da sie kein $\Delta\oplus$ geladenes Wasserstoffatom enthält.

Die vorherrschenden zwischenmolekularen Kräfte in den Aldehyden und Ketonen sind Dipol- Dipol-Wechselwirkungen und van-der-Waals-Kräfte.

Siedepunkte

Die Siedepunkte der Alkanale und Alkanone sind höher als die der entsprechenden Alkane, jedoch niedriger als die der entsprechenden Alkanole.

Tabelle der zwischenmolekularen Kräfte

Name	Zwischenmolekulare Kräfte
Alkane	van-der-Waals-Kräfte

Alkene	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen
Alkanale	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen
Alkanole	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen; Wasserstoffbrückenbindungen
Alksäuren	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen; Wasserstoffbrückenbindungen; Dimerbildung

Löslichkeit

Carbonylgruppen können mit Wassermolekülen Wasserstoffbrückenbindungen bilden, da das Wassermolekül das hierzu benötgte H-Atom mit hoher positiver Ladungsdichte mitbringt.

Die erste Glieder der beiden homologen Reihen sind in Wasser gut löslich; mit steigender Größe der Alkylreste nimmt deren hydrophober Einfluss zu und die Löslichkeit nimmt ab.

Darstellung von Aldehyden

Aldehyde entstehen bei der sanften Oxidation von primären Alkoholen.

Darstellung von Ketonen

Ketone entstehen bei der sanften Oxidation von sekundären Alkoholen.

Silberspiegelprobe

Aldehyde werden durch Silberionen in alkalischer Lösung zu Carbonsäuren oxidiert. Bei der Reaktion entsteht metallisches Silber, welches sich als ”Silberspiegel” an den Gefäßwänden absetzen kann.

Ketone können nicht durch Silberionen zu Carbonsäuren oxidiert werden. Sie reagieren nicht in der Silberspiegel-Probe.

ALKANE

Kohlenwasserstoffe

Kohlenwasserstoffe sind Verbindungen, deren Moleküle nur aus Kohlenstoffatomen und Wasserstoffatomen bestehen.

Alkane

Alkane sind gesättigte Kohlenwasserstoffe. Die C-Atome in Alkanen sind nur durch Einfachbindungen untereinander verbunden.

Homologe Reihe der Alkane

Name	Summenformel	Halbstrukturformel	Skelettforme
Methan	CH_4	CH_4	-
Ethan	C_2H_6	$CH_3 - CH_3$	-
Propan	C_3H_8	$CH_3 - CH_2 - CH_3$	-
Butan	C_4H_{10}	$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_3$	-
Pentan	C_5H_{12}	$CH_3 - (CH_2)_3 - CH_3$	-
Hexan	C_6H_{14}	$CH_3 - (CH_2)_4 - CH_3$	-

Isomerie

Isomere sind unterschiedliche Moleküle welche die gleiche Summenformel besitzen. Sie können durch unterschiedliche Strukturformeln dargestellt werden.

Strukturisomerie

Isomere, die sich in der Abfolge der Bindungen im Molekül unterscheiden bezeichnet man als Strukturisomere oder Konstitutionsisomere.

Nomenklatur

Bemerkungen

Die Nomenklaturregeln der IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) ordnen jedem Alkan einen eindeutigen Namen zu.

Regeln

1. Die Hauptkette ist die längste Aneinanderreihung von C-Atomen im Molekül. Sie bestimmt den Stammnamen des Alkans.
2. Die Kohlenstoffatome der Hauptkette werden so durchnummeriert, dass die erste Verzweigung auf dem Kohlenstoffatom mit der kleinstmöglichen Zahl sitzt. Bei Gleichheit bestimmt der nächste Substituent die Richtung der Nummerierung.
3. Die Seitenketten auch Alkylgruppen genannt oder Substituenten werden benannt:

   Erklärung

   Substituenten sind Atome anderer Elemente

Seitenkette	Name

$-CH_3$	Methyl
$-CH_2-CH_3$	Ethyl
$-CH_2-CH_2-CH_3$	Propyl
Allgemein	
$-(CH_2)_n-CH_3$	Alkyl

Multiplikative Prefixe

Bei Mehrfachnennung wird die Anzahl durch Zahlworte angegeben.

Zahl	Numerisches Zahlwort
1	mono, hen
2	di, do
3	tri

4	tetra
5	penta
6	hexa
7	hepta
8	octa
9	nona
10	deca

Für weitere Namen siehe Zahl Prefixe.

4. Befinden sich mehrere Seitenketten in gleichwertigen Positionen, so erhält der alphabetisch zuerst genannte Substituent die kleinere Position.
5. Der Name des Moleküls ergibt sich aus den alphabetisch geordneten Namen der Seitenketten mit ihren jeweiligen Positionen und dem Stammnamen.

Physikalische Eigenschaften

Tabelle der zwischenmolekularen Kräfte

Name	Zwischenmolekulare Kräfte
Alkane	van-der-Waals-Kräfte
Alkene	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen
Alkanole	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen; Wasserstoffbrückenbindungen

Auswirkungen der zwischenmolekularen Kräfte auf die Stoffeigenschaften

1. Siedepunkt:

   Je größer die Kräfte zwischen den Teilchen des Stoffs umso mehr Energie wird benötigt, um die Teilchen zu trennen und umso höher ist der Siedepunkt.

2. Viskosität:

   Je größer die Kräfte zwischen den Teilchen des Stoffs umso schlechter können die Teilchen im flüssigen Zustand aneinander vorbei gleiten und umso höher ist die Viskosität.

3. Löslichkeit:

   Je stärker die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen des gelösten Stoffs und denen des Lösungsmittels umso besser werden die Teilchen in Lösung

stabilisiert.

Zwischenmolekulare Kräfte

- van-der-Waals Kräfte:

  Kräfte zwischen spontanen und influierten Dipolen

- Dipol-Dipol-Wechselwirkungen:

  Kräfte zwischen permanenten Dipolen

- Wasserstoffbrückenbindungen:

  Kräfte zwischen einem stark positivierten H-Atom und einem freien Elektronenpaar eines Atoms mit negativer Teilladung.

Alkanmoleküle sind unpolar. Zwischen Alkanmolekülen wirken lediglich van-der-Waals-Kräfte.

Siedepunkte

Die Siedepunkte der Alkane sind abhängig von der molaren Masse und von der Struktur des Moleküls:

- die Siedepunkte nehmen mit steigender molarer Masse zu,
- die Siedepunkte von kugelförmigen, also stark verzweigten Moleküle sind kleiner als die von unverzweigten Molekülen

Viskosität

Schlecht allgemeng Erklärung

Wenn die Moleküle kugelförmiger werden desto weniger van-der-Waals-Kräfte können entstehen. Das bedeutet also längere Hauptketten die so wenig wie möglich

verzweigt sind, also geeignet van-der-Waals-Kräfte auszuüben, sind dickflüssiger also hochviskoser als kugelförmigere Moleküle oder kurzkettige Alkane.

Löslichkeit

1. Zwischen den Wassermolekülen im Wasser wirken Wasserstoffbrückenbindungen (+Dipol-Dipol +vdW).
2. Zwischen den Alkanmolekülen im Alkan wirken van-der-Wals-Kräfte.

Die Moleküle dringen nicht in den Molekülverband der jeweils anderen Sorte ein, da zwischen jeweils gleichartigen Molekülen insgesamt stärkere Anziehungskräfte wirken als zwischen verschiedenen Molekülen. Beim Entmischen der Emulsion eines Alkans in Wasser nehmen die zwischenmolekularen Kräfte insgesamt zu; der Vorgang ist exotherm und läuft spontan ab.

Gleiches löst sich in Gleichem

Polare Stoffe sind in polaren Lösungsmitteln löslich. Unpolare Stoffe sind in unpolaren Lösungsmitteln löslich.

Reaktionen der Alkane

Alkane sind sehr reaktionsträge. Mit sehr reaktionsfreudigen Reaktionspartnern, vor allem mit Sauerstoff und Halogenen, können sie jedoch unter bestimmten Bedingungen stark reagieren.

Verbrennung

- Vollständige Verbrennung

  Alkan + Sauerstoff $\longrightarrow$ Kohelstoffdioxid + Wasser

- Unvollständige Verbrennung

  Alkan + Sauerstoff $\longrightarrow$ Kohelstoff + Wasser

Der hier entstehende Kohlenstoff wird als Ruβ bezeichnet.

Bemerkung

Alkane neigen wegen ihrem hohen Sauerstoff verbrauch bei Verbrennungen zu unvollständigen Verbrennungen.

Dies ist durch eine gelb leuchtende Flamme, so wie Ruβentwicklung zu sehen.

Substitution

Eine Reaktion, bei der Atome oder Atomgruppen eines Moleküls durch andere Atome oder Atomgruppen ersetzt werden, bezeichnet man Substitution.

Mechanismus der radikalen Substitution

1. Startreaktion

   Durch homolytische Spaltung von Cl_2-Molekülen entstehen Chlorteilchen mit ungepaarten Auβenelektronen, sogenannte Chlorradikale. Die Radikale sind sehr reaktionsfreudig.

2. Kettenreaktion

   Beim Zusammentreffen mit einem Methanmolekül können die Chlorradikale eine C−H-Bindung homolytisch spalten und selbst zu H−Cl Molekülen reagieren. Es bleibt ein Methylradikal zurück. Dieses Methylradikal kann dann wieder mit Chlormolekülen zu Chlormethan und Chlorradikalen reagieren.

Die bei der Reaktion gebildeten Chlorradikale können wieder als Edukte für eine nächste, gleichartige Reaktion dienen. Es entsteht eine sich selbst unterhaltende radikalische Reaktionskette.

3. <u>Kettenabbruch</u>

Ein Kettenabbruch erfolgt, wenn die reaktionsfreudigen Radikale dem Reaktionsgemisch entzogen werden:

ALKENE

Grundlagen

Alkene sind ungesättigte Kohlenwasserstoffe. Das bedeutet einige Kohlenstoffatome sind durch Doppelbindungen verbunden.

Homologe Reihe der Alkene

Name	Halbstrukturformel	Summenformel
Ethen	$H_2C{=}CH_2$	C_2H_4
Propen	$H_2C{=}CH{-}CH_3$	C_3H_6
Buten	$H_2C{=}CH{-}CH_2{-}CH_3$ oder $H_3C{-}CH{=}CH{-}CH_3$	C_4H_8

Formel

Allgemein gilt für Alkene:

$$C_nH_{2n}$$

Definition

Alkene haben die allgemeine Summenformel C_nH_{2n}. Die Namen der Alkene haben die Endung -en.

Isomerie

Isomerie ist

Isomere sind unterschiedliche Moleküle welche die gleiche Summenformel besitzen. Sie können durch unterschiedliche Strukturformeln dargestellt werden.

Nomenklatur

Regeln

- Die längste Kette die, die Doppelbindung enthält wird gewählt
- Die Nummerierungsrichtung wird so gewählt, dass die Doppelbindungen die kleinsten Positionen erhalten.

Tabelle der zwischenmolekularen Kräfte

Name	Zwischenmolekulare Kräfte
Alkane	van-der-Waals-Kräfte
Alkene	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen
Alkanole	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen; Wasserstoffbrückenbindungen

Chemische Eigenschaften

Die Doppelbindung oder π-Bindung ist eine Schwachstelle für das Alkenmolekül. Dies bedeutet, dass das Alken Molekül dort angegriffen werden kann, dies macht das Molekül reaktionsfreudiger als Alkanmoleküle.

Verbrennung

- <u>Vollständige Verbrennung:</u>

  Hier Propen.

$$2\,C_3H_6 + 9\,O_2 \longrightarrow 6\,CO_2 + 6\,H_2O$$

- <u>Unvollständige Verbrennung:</u>

  Hier Buten.

$$C_4H_8 + 2\,O_2 \longrightarrow 4\,C + 4\,H_2O$$

Elektrophile Addition

Bei einer Additionsreaktion werden Atome oder Atomgruppen an die Doppelbindung eines ungesättigten Ausgangsstoffs angelagert. Es entsteht eine gesättigte Verbindung.

<u>Mechanismus der elektrophilen Addition eines Halogens an ein Alken</u>

Hier reagiert beispielsweise Ethen mit Brom zu 1,2-Dibromethan:

$$C_2H_4 + Br_2 \longrightarrow C_2H_4Br_2$$

1. Es erfolgt der elektrophile, also der elektronenfreundliche, Angriff des Brommoleküls auf die C=C Doppelbindung.

   - Beim Annähern des Br_2-Moleküls an die negativ geladene Doppelbindung werden die Elektronen im Molekül zum hinteren Bromatom zurückgedrängt. Das Brommolekül wird polarisiert. Es bilden sich Teilladungen δ^+ und δ^- .

   - Das δ^+ geladene Bromatom tritt in Wechselwirkung mit den π-Elektronen der Doppelbindung. Es entsteht ein π-Komplex.

- Die Bindung im Br_2-Molekül wird heterolytisch gespaltet und ein Bromidion Br^- freigesetzt. Das andere, positiv geladene Brom-Ion bildet mit den beiden C-Atomen σ-Bindungen und es entsteht ein cyclisches Bromoniumion genannt σ-Komplex.

2. Es erfolgt nun der nukleophile Angriff des Bromidions von der Rückseite des Bromoniumions aus.

Elektrophiler Angriff

Bei einer elektrophilen Reaktion (hier: Addition) erfolgt die erste Wechselwirkung im Mechanismus durch ein elektronenanziehendes Teilchen. Der Angriff erfolgt auf einen Bereich mit hoher negativer Ladungsdichte.

$+I$-Effekt

Alkylgruppen erhöhen die negative Ladungsdichte an dem Atom an dem sie gebunden sind; sie wirken elektronenschiebend.

$-I$-Effekt

Halogene oder Hydroxygruppen verringern die negative Ladungsdichte an dem Atom an dem sie gebunden sind; sie wirken elektronenziehend.

Induktiver Effekt

Der induktive Effekt bewirkt die Veränderung der Elektronendichte an benachbarten beziehungsweise weiter entfernt liegenden Atomen durch elektronenschiebende $+I$ oder elektronenziehende $-I$ Substituenten.

Auswirkungen

- Elektronenschiebende $+I$ Atome oder Atomgruppen an der Doppelbindung erhöhen die negative Ladungsdichte an der Doppelbindung und begünstigen einen elektrophilen Angriff. Die Reaktionsgeschwindigkeit der Additionsreaktion wird erhöht.

- Elektronenziehende $-I$ Atome oder Atomgruppen an der Doppelbindung verringern die negative Ladungsdichte an der Doppelbindung und behindern einen elektrophilen Angriff. Die Reaktionsgeschwindigkeit der Additionreaktion wird verringert.

Auswirkungen des induktiven Effekts auf die Art der Reaktionsprodukte

Bei der Addition von unsymmetrischen Molekülen an eine Doppelbindung hat der induktive Effekt nicht nur einen Einfluss auf die Reaktionsgeschwindigkeit, sondern ebenfalls auf die Art des gebildeten Produkts.

Hier als Beispiel: Reaktion von Chlorwasserstoff mit Propen

Reaktionsmechanismus der Addition eines Halogenwasserstoffs an ein Alken

Es erfolgt der elektrophile Angriff von HCl auf die Doppelbindung:

Beim elektrophilen Angriff des Wasserstoffatoms entsteht kein cyclisches Kation sondern die positive Ladung konzentriert sich auf eines der Kohlenstoffatome die an der Doppelbindung beteiligt waren. Es entsteht ein Carbokation. Je nachdem, an welches der beiden C-Atome der Doppelbindung sich das Wasserstoffatom bindet, können zwei verschiedene Carbokationen entstehen, die dann zu zwei verschiedenen Produkten weiterreagieren:

Allerdings sind die beiden Carbokationen A und B unterschiedlich gut stabilisiert und werden dadurch unterschiedlich schnell gebildet.

- Die positive Ladungsdichte des Carbokations A wird durch den elektronenschiebenden Effekt von einer Alkylgruppe, hier: Methylgruppe, verringert; die des Carbokations B durch zwei $+I$-Effekte.
- In Carbokation B ist die positive Ladung besser verteilt; es ist besser stabilisiert als Carbokation A.

Die Bildung des stabileren Carbokations B erfordert eine kleinere Aktivierungsenergie als die Bildung von A. Da sich das Carbokation B einfacher und schneller bildet als A entsteht auch bevorzugt das Reaktionsprodukt, das aus B hervorgeht: 2-Chlorpropan.

Schlussfolgerung

Es entsteht bevorzugt dasjenige Produkt, dessen Bildung über das besser stabilisierte Carbokation, auch genannt Carbeniumion, verläuft. Die Stabilität eines Carbokations steigt mit der Anzahl an Alkylgruppen die es trägt.

Stabilität von Carbokationen

Die Stabilität von Carbokationen wird durch die Atome oder Atomgruppen die es trägt beeinflusst

- $+I$-Atome oder Gruppen verringern die positive Ladung des Carbokations und erhöhen seine Stabilität.
- $-I$-Atome oder Gruppen erhöhen die positive Ladung des Carbokations zusätzlich. Sie verringern seine Stabilität.

Markownikow-Orientierung

Bei der Anlagerung von Halogenwasserstoffen an asymmetrische Alkene wird das Wasserstoffatom an das das wasserstoffreichere Kohlenstoffatom gebunden. Man sagt: *"Wer hat dem wird gegeben"*.

ALKOHOLE

Grundlagen

Alkohole sind Stoffe deren Moleküle eine Hydroxygruppe R−OH enthalten.

Als funktionelle Gruppe bezeichnet man die polare Hydroxygruppe. Sie hat groβe Auswirkungen auf physikalische und chemische Eigenschaften.

Trinkalkohol

Ethanol bezeichnet man als Trinkalkohol

Alkanole

Alkohole, in deren Molekülen keine andere funktionelle Gruppe auβer der Hydroxygruppe vorhanden ist bezeichnet man auch noch als Alkanole.

Homologe Reihe der Alkanole

Name	Summenformel	Halbstrukturformel
Methanol	CH_4O	CH_3-OH
Ethanol	C_2H_6O	CH_3-CH_2-OH
1-Propanol	C_3H_8O	$CH_3-CH_2-CH_2-OH$
1-Butanol	$C_4H_{10}O$	$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-OH$

1-Pentanol	$C_5H_{12}O$	$CH_3-(CH_2)_4-OH$
1-Hexanol	$C_6H_{14}O$	$CH_3-(CH_2)_5-OH$
1-Heptanol	$C_7H_{16}O$	$CH_3-(CH_2)_6-OH$

Formel

Allgemein gilt für Alkanole:

$$C_nH_{2n+1}OH$$

Isomere

Primäre Alkohole	Das C-Atom welches die OH-Gruppe trägt ist mit einem anderen C-Atom verbunden.	
Sekundäre Alkohole	Das C-Atom welches die OH-Gruppe trägt ist mit zwei anderen C-Atom verbunden.	
Tertiäre Alkohole	Das C-Atom welches die OH-Gruppe trägt ist mit drei anderen C-Atom verbunden.	

Nomenklatur

Die Nomenklatur der Alkanole folgt im Groβen und Ganzen den gleichen Regeln wie jene der Alkane. Die Hydroxygruppe wird durch die Endung -ol im Namen angegeben. Die wichtigsten Unterschiede zur Nomenklatur der Alkane / Alkene sind:

1. Die Hauptkette wird so gewählt, dass sie das Kohlenstoffatom das die Hydroxygruppe trägt enthält, auch wenn sie dann nicht mehr die längste Kohlenstoff-Kette im Molekül ist.
2. Die Hauptkette wird so durchnummeriert dass das Kohlenstoffatom, das die Hydroxygruppe trägt, die kleinst mögliche Zahl erhält, auch wenn eventuell vorhandene Alkylgruppen sonst niedrigere Positionen erhalten hätten.

Physikalische Eigenschaften

Die physikalischen Eigenschaften werden durch die Hydroxygruppe stark beeinflusst:

- Durch die polare Hydroxygruppe und den gewinkelten Aufbau sind die Alkanolmoleküle Dipole.
- Zwischen den Molekülen können sich Wasserstoffbrückenbindungen ausbilden.

Siedepunkte

Durch die Wasserstoffbrückenbindungen wirken zwischen Alkanolmolekülen insgesamt wesentlich stärkere zwischenmolekulare Kräfte als zwischen Alkanmolekülen.

1. In kurzkettigen Alkanolen stellen die Wasserstoffbrückenbindungen den größten Teil der zwischenmolekularen Kräfte. Ihr Siedepunkt ist wesentlich höher als jener der vergleichbaren Alkane, die keine Wasserstoffbrückenbindungen bilden können.

2. In langkettigen Alkanolen nimmt der Anteil der van-der-Waals-Kräfte an den gesamten zwischenmolekularen Kräften zu, so dass der Einfluss der Wasserstoffbrückenbindungen kleiner wird. Die Siedepunkte der Alkanole und der Alkane mit ähnlicher molarer Masse nähern sich an.

Löslichkeit

Die niedrigen Alkohole bis zu Propanol sind in allen Verhältnissen in Wasserlöslich. Ab dem Butanol nimmt die löslichkeit mit steigender Anzahl an C-Atomen ab.

- Ist die Kohlenstoffkette nur sehr klein, so hat sie nur einen geringen Einfluss auf das Lösungsverhalten. Das Lösungsverhalten wird durch die hydrophile Hydroxygruppe bestimmt. Kurzkettige Alkohole (Methanol, Ethanol, Propanol) sind in allen Verhältnissen in Wasser löslich.

- Ist die Kohlenstoffkette länger als 4 C-Atome, so überwiegen ihre hydrophoben Eigenschaften und der Alkohol ist unlöslich.

Verbrennung

Formel

Alkohole verbrennen mit Sauerstoff zu Kohlenstoffdioxid und Wasser.

Alkoholatbildung

Genau wie Wasser reagieren auch Alkohole mit Alkalimetallen unter Wasserstoffentwicklung. Genau wie Wasser enthalten auch Alkoholmoleküle ein $\delta\oplus$ polarisiertes Wasserstoffatom, welches für die Reaktion mit Alkalimetallen verantwortlich ist.

Formel

$$2\,\mathrm{R{-}OH} + 2\,\mathrm{Na} \longrightarrow 2\,\mathrm{R{-}O^-} + 2\,\mathrm{Na^+} + \mathrm{H_2}$$

Substitution

Eine Reaktion bei der ein Atom oder eine Atomgruppe eines Moleküls durch ein anderes Atom oder eine andere Atomgruppe ersetzt wird bezeichnet man als Substitution.

Darstellung von Alkoholen durch nukleophile Substitution

Hier

Bromethan reagiert in alkalischer Lo·sung unter Bildung von Ethanol:

$$\mathrm{C_2H_5{-}Br} + \mathrm{OH^-}_{(aq)} \rightleftharpoons \mathrm{C_2H_5{-}OH} + \mathrm{Br^-}$$

Nukleophiler Angriff

Die erste Etappe dieser Reaktion ist der Angriff des Hydroxidions auf eine Region mit positiver Ladungsdichte. Man bezeichnet dies als nukleophilen Angriff.

Mehrwertige Alkohole

Mehrwertige Alkohole besitzen zwei oder mehrere Hydroxygruppe in ihren Molekülen.

Je nach Anzahl der Hydroxygruppen bezeichnet man sie als Diole, Triole oder Polyole.

Durch die größere Anzahl an Hydroxygruppen bilden die mehrwertigen Alkohole auch mehr Wasserstoffbrücken aus. Es bestehen stärkere zwischenmolekularen Kräfte als zwischen einwertigen Alkanolen.

CARBONSÄUREN

Grundlagen

Carbonsäuren sind gekennzeichnet durch Anwesenheit einer Carboxygruppe R−COOH.

Nomenklatur

Zur Benennung wird das Suffix -säure an den Namen des entsprechenden Alkans angehängt, wobei das C-Atom der Carboxygruppe mitgezählt wird.

Homologe Reihe

Name	Summenformel	Halbstrukturformel
Methansäure Ameisensäure	CH_2O_2	H−COOH
Ethansäure Essigsäure	$C_2H_4O_2$	CH_3−COOH

Propansäure Propionsäure	$C_3H_6O_2$	CH_3-CH_2-COOH
Butansäure Buttersäure	$C_4H_8O_2$	$CH_3-(CH_2)_2-COOH$
Pentansäure	$C_5H_{10}O_2$	$CH_3-(CH_2)_3-COOH$
Hexansäure	$C_6H_{12}O_2$	$CH_3-(CH_2)_4-COOH$

Physikalische Eigenschaften

Zwischen den Carboxygruppen der Alkansäuren können Wasserstoffbrückenbindungen entstehen. Zwischen den Molekülen von Alkansäuren wirken starke zwischenmolekulare Kräfte.

Siedepunkte

Die Siedetemperaturen der Alkansäuren liegen noch einmal über denen der Alkanole mit ähnlicher molarer Masse

Die Carboxygruppe der Alkansäuren ist stark polar. Sie kann zudem jeweils zwei Wasserstoffbrücken- bindungen mit anderen Carboxygruppe ausbilden. Die Anziehungskräfte sind so stark dass jeweils zwei Alkansäuremoleküle eine Tendenz haben, sich zu Doppel- molekülen (Dimeren) zu verbinden.

Die Siedepunkte der Alkansäuren liegen noch über denen der entsprechenden Alkanole.

Zwischenmolekulare Kräfte

Name	Zwischenmolekulare Kräfte
Alkane	van-der-Waals-Kräfte
Alkene	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen
Alkanale	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen
Alkanole	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen; Wasserstoffbrückenbindungen

Alksäuren	van-der-Waals-Kräfte; Dipol-Dipol-Wechselwirkungen; Wasserstoffbrückenbindungen; Dimerbildung

Löslichkeit

Alkansäure	Löslichkeit bei 20° $\frac{g}{L}$
Methansäure	unbegrenzt
Ethansäure	unbegrenzt
Propansäure	unbegrenzt
Butansäure	unbegrenzt
Pentansäure	25
Hexansäure	8,9
Heptansäure	2,4

Octansäure	0,68

Die ersten 4 Glieder der homologen Reihe der Alkansäuren sind unbegrenzt in Wasser löslich. Die Löslichkeit nimmt ab der Pentansäure mit zunehmender Länge des Alkylrests ab. Ab der Ethansäure lösen sich die Alkansäuren in jedem Verhältnis in Benzin.

Die niederen Carbonsäuren sind durch die Bildung von Wasserstoffbrückenbindungen zwischen Carboxygruppen und Wassermolekülen sehr gut löslich.

Mit zunehmender Länge des Alkylrests steigt der Anteil der van-der-Waals-kräfte an den gesamten zwischenmolekularen Kräften. Die Löslichkeit nimmt mit steigender Größe des Alkylrests ab.

CYCLOALKANE

Definition

Cycloalkane sind ringförmige gesättigte Kohlenwasserstoffe.

Homologe Reihe

Name	Summenformel
Cyclopropan	C_3H_6
Cyclobutan	C_4H_8
Cyclopentan	C_5H_{10}
Cyclohexan	C_6H_{12}
Cycloheptan	C_7H_{14}
Cyclooctan	C_8H_{16}
Cyclononan	C_9H_{18}

Cyclodecan	$C_{10}H_{20}$

Schlussfolgerung

Cycloalkane haben eine allgemeine Summenformel

Formel

$$C_nH_{2n}$$

DH-WERTE

Molare Standard - Bildungsenthalpien

$Reinstoff$	$\Delta_f H^\circ (kJ \cdot mol^{-1})$
$H_{(g)}$	$+218$
$O_{(g)}$	$+249$
$N_{(g)}$	$+473$
$F_{(g)}$	$+79$
$Cl_{(g)}$	$+121$
$Br_{(g)}$	$+112$
$I_{(g)}$	$+107$
$HF_{(g)}$	-271
$HCl_{(g)}$	-92
$HBr_{(g)}$	-36
$H_2O_{(l)}$	-285
$H_2O_{(g)}$	-242
$NH_{3(g)}$	-46
$NH_{3(aq)}$	-80

$NO_{(g)}$	$+90$
$NO_{2(g)}$	$+33$
$N_2O_{4(g)}$	$+9$
$N_2O_{5(s)}$	-44
$N_2H_{4(g)}$	$+95$
$CO(NH_2)_{2(s)}$	-246
C (Diamant)	$+2$
$CO_{(g)}$	$+111$
$CO_{2(g)}$	-393
$CH_{4(g)}$	-75
$C_2H_{6(g)}$	-85
$CH_3OH_{(g)}$	-201
$C_2H_5OH_{(l)}$	-278
$SO_{2(g)}$	-297
$SOCl_{2(l)}$	-206
$Al_2O_{3(s)}$	-1676

$AgCl_{(s)}$	-127
$AgBr_{(s)}$	-100
$CuO_{(s)}$	-157
$CoCl_{2(s)}$	-313
$CoCl_2 \cdot 6\,H_2O_{(s)}$	-2115
$FeS_{(s)}$	-100
$Fe_2O_{3(s)}$	-824
$MgO_{(s)}$	-601
$NaCl_{(s)}$	-411
$OH^-{}_{(aq)}$	-230
$Na^+{}_{(aq)}$	-240
$K^+{}_{(aq)}$	-251
$Mg^{2+}{}_{(aq)}$	-467
$Ca^{2+}{}_{(aq)}$	-543
$Al^{3+}{}_{(aq)}$	-531
$Ag^+{}_{(aq)}$	$+106$

$NH_4{}^+{}_{(aq)}$	-132
$Cl^-{}_{(aq)}$	-167
$Br^-{}_{(aq)}$	-121
$NO_3{}^-{}_{(aq)}$	-207
$SO_4{}^{2-}{}_{(aq)}$	-909

Molare Schmelz - und Verdampfungsenthalpien

$Reinstoff$	$Schmelztemperatur(^\circ C)$	$molare\ Schmelzenthalpie\ in\ \left(kJ\ \cdot\ mol^{-1}\right)$	$Siedetemperatur\ in\ (^\circ C)$	$molare\ Ve$ in
$Natrium$	98	3	892	
$Magnesium$	650	9	1110	
$Aluminium$	660	10	2450	
$Silicium$	1 410	49	2680	
$Phosphor\ (wei\beta)$	44	1	280	
$Schwefel\ (rhomb.)$	119	$1,2$	444	
$Chlor$	-101	6	-35	
$Wasserstoff$	-259	$0,12$	-253	
$Wasser$	0	6	100	

$Schwefelwasserstoff$	-83	2	-62	
$Chlorwasserstoff$	-114	2	-85	
$Natriumchlorid$	801	28	1465	
$Magnesiumchlorid$	712	43	1418	

Spezifische Verbrennungswärmen

$Energieträger$	$spezifische\ Verbrennungswärme\ (MJ\ \cdot\ kg^{-1})$
$Benzin$	$43,5$
$Benzol$	$40,0$
$Braunkohlebriketts$	$20,1$
$Brenntorf$	$12,6$
$Erdöl$	$42,3$
$Ethanol$	$29,7$
$Fette$	$ca.\ 39$
$Heizöl$	$41,1$
$Holz$	$ca.\ 15$
$Holzkohle$	$26,0$
$Methanol$	$19,0$

Steinkohle	$29,3$
Traubenzucker	$215,6$

Molare Standard-Bildungsenthalpien

Reinstoff	S° $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
$H_{2(g)}$	$+131$
$O_{2(g)}$	$+205$
$N_{2(g)}$	$+192$
$F_{2(g)}$	$+203$
$Cl_{2(g)}$	$+223$
$Br_{2(g)}$	$+245$
$Br_{2(l)}$	$+245$
$BrCl_{(g)}$	$+240$
$HF_{(g)}$	$+174$
$HCl_{(g)}$	$+187$
$HCl_{(aq)}$	$+56$
$HBr_{(g)}$	$+199$

$HI_{(g)}$	+206
$H_2O_{(g)}$	+189
$NH_{3(g)}$	+193
$NH_{3(aq)}$	+111
$NO_{(g)}$	+211
$NO_{2(aq)}$	+240
$N_2O_{5(aq)}$	+113
C (Graphit)	+6
C (Diamant)	+2
$CO_{(g)}$	+198
$CO_{2(g)}$	+214
$CH_{4(g)}$	+186
$C_2H_5OH_{(g)}$	+283
$C_2H_5OH_{(l)}$	+161
$SO_{2(g)}$	+248
$SO_{3(g)}$	+257

$Mg_{(s)}$	$+33$
$Al_{(s)}$	$+28$
$Fe_{(s)}$	$+27$
$CuO_{(s)}$	$+43$
$MgO_{(s)}$	$+27$
$Al_2O_{3(s)}$	$+51$
$Fe_2O_{3(s)}$	$+87$
$PbS_{(s)}$	$+91$
$AgCl_{(s)}$	$+96$
$CoCl_{2(s)}$	$+109$
$CoCl_2 \cdot 6\,H_2O_{(s)}$	$+343$
$MgCl_{2(s)}$	$+90$
$NH_4Cl_{(s)}$	$+95$
$NH_4Cl_{(aq)}$	$+168$
$OH^-{}_{(aq)}$	-11
$NH_4{}^+{}_{(aq)}$	$+113$

$Ag^{+}{}_{(aq)}$	$+73$
$Pb^{2+}{}_{(aq)}$	$+10$
$Cl^{-}{}_{(aq)}$	$+57$
$Br^{-}{}_{(aq)}$	$+83$
$S^{2-}{}_{(s)}$	-15

Molare Standard-Bildungsenthalpien

$(kJ \cdot mol^{-1})$	$-H$	$-C$	$=C$	$\equiv C$	$-N$	$=N$	$\equiv N$	$-O$	$=O$
C	413	348	614	839	305	615	891	358	745
N	391	305	615	891	163	418	945	201	607
O	463	358	745*		201	607		147	498
F	567	431			278			193	
Cl	431	339			192			208	
Br	366	285						234	
I	298	218						234	
P	323	264						335	
S	367	272	536						
Si	318	285						451	

$^{*}\,in\ \mathrm{CO_2}\ :\ 802$

ELEMENTE UND NAMEN

Elemente und Namen

Element	*Name*
H	*Wasserstoff*
He	*Helium*
Li	*Lithium*
Be	*Berylium*
B	*Bor*
C	*Kohlenstoff*
N	*Stickstoff*
O	*Sauerstoff*
F	*Fluor*

Ne	*Neon*
Na	*Natrium*
Mg	*Magnesium*
Al	*Aluminium*
Si	*Silicium*
P	*Phosphor*
S	*Schwefel*
Cl	*Chlor*
Ar	*Argon*
K	*Kalium*
Ca	*Calcium*

Sc	*Scandium*
Ti	*Titan*
V	*Vanadium*
Cr	*Chrom*
Mn	*Mangan*
Fe	*Eisen*
Co	*Cobalt*
Ni	*Nickel*
Cu	*Kupfer*
Zn	*Zink*
Ga	*Gallium*

Ge	*Germanium*
As	*Arsen*
Se	*Selen*
Br	*Brom*
Kr	*Krypton*
Rb	*Rubidium*
Sr	*Strontium*
Y	*Yttrium*
Zr	*Zirconium*
Nb	*Niob*
Mo	*Molybdän*

Tc	*Technetium*
Ru	*Ruthenium*
Rh	*Rhodium*
Pd	*Palladium*
Ag	*Silber*
Cd	*Cadmium*
In	*Indium*
Sn	*Zinn*
Sb	*Antimon*
Te	*Tellur*
I	*Iod*
Xe	*Xenon*

Cs	*Caesium*
Ba	*Barium*
La	*Lanthan*
Ce	*Cer*
Pr	*Prasedyom*
Nd	*Neodym*
Pm	*Promethium*
Sm	*Samarium*
Eu	*Europium*
Gd	*Gadolinium*
Tb	*Terbium*

Dy	*Dysprosium*
Ho	*Holmium*
Er	*Erbium*
Tm	*Thulium*
Yb	*Ytterbium*
Lu	*Lutetium*
Th	*Thorium*
Pa	*Protractium*
U	*Uran*
Np	*Neptunium*
Pu	*Plutonium*
Am	*Americum*

Cm	*Curium*
Bk	*Berkelium*
Cf	*Californium*
Es	*Einsteinium*
Fm	*Fermium*
Md	*Mendelevium*
No	*Nobelium*
Lr	*Lawrencium*
Rf	*Rutherfordium*
Db	*Dubnium*
Sg	*Seaborgium*

Bh	*Bohrium*
Hs	*Hassium*
Mt	*Meitnerium*
Rg	*Darmstadtium*
Rg	*Roentgenium*
Cn	*Copernicium*
Nh	*Nihonium*
Fl	*Flerovium*
Mc	*Moscovium*
Lv	*Livermorium*
Ts	*Teness*

Og	*Oganesson*

MOLARE STANDARD - UND VERDAMPFUNGSENTHALPIEN

$Reinstoff$	$Schmelztemperatur(^{\circ}C)$	$molare\ Schmelzenthalpie\ in\ \left(kJ\ \cdot\ mol^{-1}\right)$	$Siedetemperatur\ in\ (^{\circ}C)$
$Natrium$	98	3	892
$Magnesium$	650	9	1110
$Aluminium$	660	10	2450
$Silicium$	1 410	49	2680
$Phosphor\ (wei\beta)$	44	1	280
$Schwefel\ (rhomb.)$	119	$1,2$	444
$Chlor$	-101	6	-35
$Wasserstoff$	-259	$0,12$	-253
$Wasser$	0	6	100
$Schwefelwasserstoff$	-83	2	-62
$Chlorwasserstoff$	-114	2	-85
$Natriumchlorid$	801	28	1465
$Magnesiumchlorid$	712	43	1418

MOLARE STANDARD - BILDUNGSENTHALPIEN

$Reinstoff$	$\Delta_f H^\circ (kJ \cdot mol^{-1})$
$H_{(g)}$	$+218$
$O_{(g)}$	$+249$
$N_{(g)}$	$+473$
$F_{(g)}$	$+79$
$Cl_{(g)}$	$+121$
$Br_{(g)}$	$+112$
$I_{(g)}$	$+107$
$HF_{(g)}$	-271
$HCl_{(g)}$	-92

$HBr_{(g)}$	-36
$H_2O_{(l)}$	-285
$H_2O_{(g)}$	-242
$NH_{3(g)}$	-46
$NH_{3(aq)}$	-80
$NO_{(g)}$	$+90$
$NO_{2(g)}$	$+33$
$N_2O_{4(g)}$	$+9$
$N_2O_{5(s)}$	-44
$N_2H_{4(g)}$	$+95$
$CO(NH_2)_{2(s)}$	-246

C (Diamant)	$+2$
$CO_{(g)}$	$+111$
$CO_{2(g)}$	-393
$CH_{4(g)}$	-75
$C_2H_{6(g)}$	-85
$CH_3OH_{(g)}$	-201
$C_2H_5OH_{(l)}$	-278
$SO_{2(g)}$	-297
$SOCl_{2(l)}$	-206
$Al_2O_{3(s)}$	-1676
$AgCl_{(s)}$	-127

$AgBr_{(s)}$	-100
$CuO_{(s)}$	-157
$CoCl_{2(s)}$	-313
$CoCl_2 \cdot 6\,H_2O_{(s)}$	-2115
$FeS_{(s)}$	-100
$Fe_2O_{3(s)}$	-824
$MgO_{(s)}$	-601
$NaCl_{(s)}$	-411
$OH^-{}_{(aq)}$	-230
$Na^+{}_{(aq)}$	-240
$K^+{}_{(aq)}$	-251

$Mg^{2+}{}_{(aq)}$	-467
$Ca^{2+}{}_{(aq)}$	-543
$Al^{3+}{}_{(aq)}$	-531
$Ag^{+}{}_{(aq)}$	$+106$
$NH_4{}^{+}{}_{(aq)}$	-132
$Cl^{-}{}_{(aq)}$	-167
$Br^{-}{}_{(aq)}$	-121
$NO_3{}^{-}{}_{(aq)}$	-207
$SO_4{}^{2-}{}_{(aq)}$	-909

MOLARE STANDARD ENTROPIEN

$Reinstoff$	$\Delta_f H^\circ (kJ \cdot mol^{-1})$
$H_{(g)}$	$+218$
$O_{(g)}$	$+249$
$N_{(g)}$	$+473$
$F_{(g)}$	$+79$
$Cl_{(g)}$	$+121$
$Br_{(g)}$	$+112$
$I_{(g)}$	$+107$
$HF_{(g)}$	-271
$HCl_{(g)}$	-92

$HBr_{(g)}$	-36
$H_2O_{(l)}$	-285
$H_2O_{(g)}$	-242
$NH_{3(g)}$	-46
$NH_{3(aq)}$	-80
$NO_{(g)}$	$+90$
$NO_{2(g)}$	$+33$
$N_2O_{4(g)}$	$+9$
$N_2O_{5(s)}$	-44
$N_2H_{4(g)}$	$+95$
$CO(NH_2)_{2(s)}$	-246

C (Diamant)	$+2$
$CO_{(g)}$	$+111$
$CO_{2(g)}$	-393
$CH_{4(g)}$	-75
$C_2H_{6(g)}$	-85
$CH_3OH_{(g)}$	-201
$C_2H_5OH_{(l)}$	-278
$SO_{2(g)}$	-297
$SOCl_{2(l)}$	-206
$Al_2O_{3(s)}$	-1676
$AgCl_{(s)}$	-127

$AgBr_{(s)}$	-100
$CuO_{(s)}$	-157
$CoCl_{2(s)}$	-313
$CoCl_2 \cdot 6\,H_2O_{(s)}$	-2115
$FeS_{(s)}$	-100
$Fe_2O_{3(s)}$	-824
$MgO_{(s)}$	-601
$NaCl_{(s)}$	-411
$OH^-{}_{(aq)}$	-230
$Na^+{}_{(aq)}$	-240
$K^+{}_{(aq)}$	-251

$Mg^{2+}{}_{(aq)}$	-467
$Ca^{2+}{}_{(aq)}$	-543
$Al^{3+}{}_{(aq)}$	-531
$Ag^{+}{}_{(aq)}$	$+106$
$NH_4{}^{+}{}_{(aq)}$	-132
$Cl^{-}{}_{(aq)}$	-167
$Br^{-}{}_{(aq)}$	-121
$NO_3{}^{-}{}_{(aq)}$	-207
$SO_4{}^{2-}{}_{(aq)}$	-909

NUMERISCHE PREFIXE

Zahl	Numerisches Zahlwort
1	mono, hen
2	di, do
3	tri
4	tetra
5	penta
6	hexa
7	hepta
8	octa
9	nona

10	deca
10	deca
11	undeca
20	icosa
30	triaconta
40	tetraconta
50	pentaconta
60	hexaconta
70	heptaconta
80	octoconta

90	nonaconta
100	hecta
101	henhecta
200	dicta
300	tricta
400	tetracta
500	pentacta
600	hexacta
700	heptacta
800	octacta

900	nonacta
1000	kilia
1001	henkilia
2000	dilia
3000	trilia
4000	tetralia
5000	pentalia
6000	hexalia
7000	heptalia
8000	octalia

9000	nonalia

REDOXTABELLE

Standartpotenziale bei 25°C

Red	$\rightleftharpoons$	$Ox + ne^-$	$E^\ominus/V$
$Li_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Li^+{}_{(aq)} + e^-$	$-3,02$
$K_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$K^+{}_{(aq)} + e^-$	$-2,92$
$Ba_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Ba^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$-2,90$
$Ca_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Ca^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$-2,76$
$Na_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Na^+{}_{(aq)} + e^-$	$-2,71$
$Mg_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Mg^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$-2,38$
$Al_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Al^{3+}{}_{(aq)} + 3\,e^-$	$-1,66$
$N_2H_{4(aq)} + 4\,OH^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$N_{2(g)} + 4\,H_2O_{(l)} + 4\,e^-$	$-1,16$
$SO_3{}^{2-}{}_{(aq)} + 2\,OH^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$SO^{2-}{}_{(aq)} + H_2O_{(l)} + 2\,e^-$	$-0,92$

$H_{2(g)} + 2\,OH^{-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$2\,H_2O_{(l)} + 2\,e^{-}$	$-0,83$
$Zn_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Zn^{2+} + 2\,e^{-}$	$-0,76$
$Fe_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Fe^{2+} + 2\,e^{-}$	$-0,41$
$Cd_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Cd^{2+} + 2\,e^{-}$	$-0,40$
$Pb_{(s)} + SO_4{}^{2-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$PbSO_{4(aq)} + 2\,e^{-}$	$-0,36$
$Ni^{2+}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Fe^{2+} + 2\,e^{-}$	$-0,23$
$H_2O_{2(aq)} + 2\,OH^{-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$O_{2(g)} + 2\,H_2O_{(l)} + 2\,e^{-}$	$-0,15$
$Ag_{(s)} + I^{-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$AgI_{(s)} + e^{-}$	$-0,15$
$Sn_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Sn^{2+} + 2\,e^{-}$	$-0,14$
$Pb_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Pb^{2+} + 2\,e^{-}$	$-0,13$
$Fe_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Fe^{3+} + 3\,e^{-}$	$-0,04$

$H_{2(g)} + 2\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$2\,H_3O^+{}_{(aq)} + 2\,e^-$	0
$Ag_{(s)} + Br^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$AgBr_{(s)} + e^-$	$0,07$
$H_2S_{(s)} + 2\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$S_{(s)} + 2\,H_3O^+{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$0,14$
$Cu^+{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Cu^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$0,16$
$H_2SO_{3(aq)} + 5\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$SO_4{}^{2-}{}_{(aq)} + 4\,H_3O^+{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$0,20$
$Ag_{(s)} + Cl^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$AgCl_{(s)} + e^-$	$0,22$
$2\,Hg_{(l)} + 2\,Cl^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Hg_2Cl_{2(s)} + 2\,e^-$	$0,27$
$2\,Ag_{(s)} + 2\,OH^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Ag_2O_{(s)} + H_2O_{(l)} + 2\,e^-$	$0,34$
$Cu_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Cu^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$0,34$
$4\,OH^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$O_{2(g)} + 2\,H_2O_{(l)} + 2\,e^-$	$0,40$
$Cl_{2(g)} + 4\,OH^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$2\,OCl^-{}_{(aq)} + 2\,H_2O_{(l)} + 2\,e^-$	$0,42$

$Cu_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Cu^{+}{}_{(aq)} + e^{-}$	$0,52$
$2\,I^{-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$I_{2(s)} + 2\,e^{-}$	$0,54$
$MnO_{2(s)} + 4\,OH^{-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$MnO_4{}^{-}{}_{(aq)} + 2\,H_2O_{(l)} + 3\,e^{-}$	$0,59$
$H_2O_{2(aq)} + 2\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$O_{2(aq)} + 2\,H_{30}{}^{+}{}_{(aq)} + 2\,e^{-}$	$0,68$
$Fe^{2+}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Fe^{3+} + e^{-}$	$0,77$
$Ag_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Ag^{+}{}_{(aq)} + e^{-}$	$0,80$
$2\,Hg_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$Hg_2{}^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^{-}$	$0,80$
$Hg_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$Hg^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^{-}$	$0,85$
$NO_{(g)} + 6\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$NO_3{}^{-}{}_{(aq)} + 4\,H_3O^{+}{}_{(aq)} + 3\,e^{-}$	$0,96$
$2\,Br^{-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Br_{2(aq)} + 2\,e^{-}$	$1,07$
$Pt_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Pt^{2+}{}_{(aq)} + 2\,e^{-}$	$1,20$

$I_{2(s)} + 18\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$2\,IO_3{}^-{}_{(aq)} + 12\,H_3O^+{}_{(aq)} + 10\,e^-$	$1,20$
$Mn^{2+}{}_{(aq)} + 6\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$MnO_{2(s)} + 4\,H_3O^+{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$1,21$
$6\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$O_{2(g)} + 4\,H_3O^+{}_{(aq)} + 4\,e^-$	$1,23$
$2\,Cr^{3+}{}_{(aq)} + 21\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$Cr_2O_7{}^{2-}{}_{(aq)} + 14\,H_{30}{}^+{}_{(aq)} + 6\,e^-$	$1,33$
$2\,Cl^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Cl_{2(g)} + 2\,e^-$	$1,36$
$Au_{(s)}$	$\rightleftharpoons$	$Au^{3+}{}_{(aq)} + 3\,e^-$	$1,42$
$Pb^{2+}{}_{(aq)} + 6\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$PbO_{2(s)} + 4\,H_3O^+{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$1,46$
$Mn^{2+}{}_{(aq)} + 12\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$MnO_4{}^-{}_{(aq)} + 8\,H_3O^+{}_{(aq)} + 5\,e^-$	$1,49$
$MnO_{2(s)} + 6\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$MnO_4{}^-{}_{(aq)} + 4\,H_3O^+{}_{(aq)} + 3\,e^-$	$1,68$
$PbSO_{4(s)} + 5\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$PbO_{2(s)} + HSO_4{}^-{}_{(aq)} + 3\,e^-$	$1,69$
$4\,H_2O_{(l)}$	$\rightleftharpoons$	$H_2O_{2(aq)} + 3\,H_3O^+{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$1,78$

$2\,S_2O_4{}^{2-}{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$S_2O_8{}^{2-}{}_{(aq)} + 2\,e^-$	$2,00$
$2\,F^-{}_{(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$F_{2(g)} + 2\,e^-$	$2,87$

SPEZIFISCHE VERBRENNUNGSWÄRMEN

$Energieträger$	$spezifische\ Verbrennungswärme\ (MJ\ \cdot\ kg^{-1})$
$Benzin$	$43,5$
$Benzol$	$40,0$
$Braunkohlebriketts$	$20,1$
$Brenntorf$	$12,6$
$Erdöl$	$42,3$
$Ethanol$	$29,7$
$Fette$	$ca.\ 39$
$Heizöl$	$41,1$
$Holz$	$ca.\ 15$

Holzkohle	$26,0$
Methanol	$19,0$
Steinkohle	$29,3$
Traubenzucker	$215,6$

ALPHABET

Buschtaf	-	Numm
A	α	alpha
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota

Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	o	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau

Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

EXOTISCHE UMWANDLUNGEN

Umwandlungen

Beschleunigung		
Name	Einheit	S.I.-Beschreibung
Galileo	$1Gal$	$1 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2}$
Distanz		
Name	Einheit	S.I.-Beschreibung
Ångstrom	$1\mathring{A}$	$10^{-10}m$
Feet	$1ft$	$3,048 \cdot 10^{-2}m$
Inch	$1in$	$2,54 \cdot 10^{-3}m$
Seemeile	$1sm$	$1,852 \cdot 10^{3}m$

Yard	$1yd$	$9,144 \cdot 10^{-2}m$
Druck		
Name	Einheit	S.I.-Beschreibung
Atmosphäre	$1atm$	$1,013\ 25 \cdot 10^{5}Pa$
Bar	$1bar$	$10^{5}Pa$
Millimeter Quecksilber	$1mm$Hg	$133,3224Pa$
Torricelli	$1torr$	$\frac{1}{760}atm = 133,3224Pa$
Energie		
Name	Einheit	S.I.-Beschreibung
Elektronvolt	$1eV$	$1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}J$

Kalorien	$1cal$	$4,184 \cdot 10^3 J$
Geschwindigkeit		
Name	Einheit	S.I.-Beschreibung
Knoten	$1kn$	$\frac{463m}{900s} \simeq 0,514 \frac{m}{s}$
Masse		
Name	Einheit	S.I.-Beschreibung
Atomare Masseneinheit	$1u$	$1,660\ 539\ 066\ 605\ 0 \cdot 10^{-27} kg$
Tonne	$1t$	$1 \cdot 10^3 kg$
Pfund	$1lb$	$4,5359237 \cdot 10^{-1} kg$
Winkel		

Name	Einheit	S.I.-Beschreibung
Winkelsekunden	$1''$	$\frac{\pi}{648\,000}\ rad \simeq 0,48 \cdot 10^{-5}\ rad$

GASKONSTANTE R

Gaskonstanten für verschiedene Gase

$Gaskonstante\ R$	
Gas	$\frac{J}{kg \cdot K}$
$Ammoniak$	481
$Argon$	208
$Butan$	137
$Chlor$	115
$Chlorwasserstoff$	226
$Distickstoffmonoxid$	188
$Ethan$	273
$Ethen$	294

Ethin	316
Frigen 12	67
Frigen 22	96
Helium	2 078
Kohlenstoffdioxid	188
Kohlenstoffmonoxid	297
Krypton	99
Luft	287
Methan	518
Methylchlorid	161
Neon	412

Ozon	173
Phosgen	82
Propan	185
Propylen (Propen)	194
Sauerstoff	260
Schwefeldioxid	127
Schwefelwasserstoff	241
Stickstoff	297
Stickstoffoxid	277
Wasserstoff	4 127
Xenon	63

LUFTDICHTE

Luftdichte ϱ in Abhängigkeit von Druck und Temperatur

$Luftdichte\ \varrho\ in\ Abhängigkeit\ von\ Druck\ und\ Temperatur\ \frac{kg}{m^3}$								
$t\,(^\circ C)$	$\rho\,(hPa)$							
	960	970	980	990	1000	1010	$p_n = 1013$	1020
0	$1,224$	$1,237$	$1,250$	$1,263$	$1,275$	$1,288$	$1,283$	$1,301$
2	$1,216$	$1,228$	$1,240$	$1,253$	$1,266$	$1,279$	$1,283$	$1,291$
4	$1,207$	$1,219$	$1,232$	$1,244$	$1,257$	$1,270$	$1,274$	$1,282$
6	$1,198$	$1,211$	$1,223$	$1,236$	$1,248$	$1,260$	$1,265$	$1,273$
8	$1,190$	$1,202$	$1,214$	$1,227$	$1,239$	$1,252$	$1,256$	$1,264$
10	$1,181$	$1,193$	$1,206$	$1,218$	$1,230$	$1,243$	$1,247$	$1,255$
12	$1,173$	$1,185$	$1,197$	$1,210$	$1,222$	$1,234$	$1,238$	$1,246$
14	$1,165$	$1,177$	$1,189$	$1,201$	$1,213$	$1,225$	$1,229$	$1,238$

16	1,157	1,169	1,181	1,193	1,205	1,217	1,221	1,229
18	1,149	1,161	1,173	1,185	1,200	1,209	1,212	1,221
20	1,141	1,153	1,165	1,177	1,188	1,200	1,204	1,212
22	1,133	1,145	1,157	1,169	1,180	1,192	1,196	1,204
24	1,126	1,137	1,149	1,161	1,172	1,184	1,188	1,196
26	1,118	1,130	1,141	1,153	1,165	1,176	1,180	1,188
28	1,111	1,122	1,134	1,145	1,157	1,168	1,172	1,180
30	1,103	1,115	1,126	1,138	1,149	1,161	1,164	1,172
32	1,096	1,107	1,119	1,130	1,142	1,153	1,157	1,165
34	1,085	1,1098	1,110	1,122	1,135	1,147	1,151	1,159

NATURKONSTANTEN

Naturkonstanten

Name	Symbol	Wert
Avogadro-Konstante	N_A	$6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$8,854\ 187\ 812\ 813\ \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
Elementarladung	e	$1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19} C$
Gaskonstante	R	$8,314\ 462\ 618\ 153\ 24 \frac{J}{Kmol}$
Gravitationskonstante	G	$6,674\ 301\ 5 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$299\ 792\ 458 \frac{m}{s}$
magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
Planck Konstante	h	$6,626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34} J \cdot s$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9,109\ 383\ 701\ 5 \cdot 10^{-31} kg$

Ruhemasse des Protons	m_p	$1,672\ 621\ 923\ 69 \cdot 10^{-27} kg$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1,674\ 927\ 498\ 04 \cdot 10^{-27} kg$
Ruhemasse des Alphateilchens	m_e	$6,644\ 657\ 335\ 7 \cdot 10^{-27} kg$

PRÄFIXE

Präfixe

Symbol	Name	10^x	Zahlworte
Q	quetta	10^{20}	Quintillion
R	ronna	10^{27}	Quadrilliarde
Y	yotta	10^{24}	Quadrillion
Z	zetta	10^{21}	Trilliarde
E	exa	10^{18}	Trillion
P	peta	10^{15}	Billiarde
T	tera	10^{12}	Billion
G	giga	10^{9}	Milliarde

M	mega	10^6	Million
k	kilo	10^3	Tausend
-	-	10^0	Eins
d	deci	10^{-2}	Hundertstel
m	milli	10^{-3}	Tausendstel
μ	micro	10^{-6}	Millionstel
n	nano	10^{-9}	Milliardstel
p	pico	10^{-12}	Billionstel
f	femto	10^{-15}	Billiardstel
a	atto	10^{-18}	Trillionstel

z	zepto	10^{-21}	Trilliardstel
y	yocto	10^{-24}	Quadrillionstel
r	ronto	10^{-27}	Quadrilliardstel
q	quecto	10^{-30}	Quintillionstel

S.I. - BASISGRÖSSEN

Basisgrößen

Basisgröße		Basiseinheit		
Name	Symbol	Name	Symbol	Definition
$Zeit$	t	$Sekunde$	s	Die Sekunde ist definiert durch den festen für die Strahlungsfrequenz des Caesium-A $1s = \frac{9\ 192\ 631\ 770}{\Delta v_{Cs}}$
$Länge$	l	$Meter$	m	Das Meter ist die Länge der Strecke, die L Vakuum während der Dauer von $1m = \frac{9\ 192\ 631\ 770}{299\ 792\ 458}\ \frac{c}{\Delta v_{Cs}}$ Sekunden d
$Masse$	m	$Kilogramm$	kg	Das Kilogramm ist definiert durch den fest Zahlenwert für die Planck-Konstante, wob und die Sekunde durch die Konstanten der Lichtgeschwindigkeit und der Strahlungsfr Caesium-Atoms definiert sind. Man erhält $1kg = \frac{h}{6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}}\ \frac{s}{m^2}$
$elektrische\ Stromstärke$	I	$Ampere$	A	Das Ampere ist definiert durch den festen Z die Elementarladung e, wobei die Sekunde definiert wurde: $1A = \frac{1}{9\ 192\ 631\ 770 \cdot 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}}$
$Temperatur$	T	$Kelvin$	K	Das Kelvin ist definiert durch den festen Z die Boltzmann-Konstante k_B, wobei das K und Meter schon definiert sind daraus ergi $1K = \frac{1{,}380\ 649 \cdot 10^{-23}}{6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34} \cdot 9\ 192\ 631\ 770}$
$Stoffmenge$	n	Mol	mol	Die Stoffmenge enthält genau $6,022\ 140$ spezifizierte elementare Einzelteile somit e $1\ mol = \frac{6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}}{N_A}$
$Lichtstärke$	l	$Candela$	cd	Das Candela ist definiert durch den festen für das photometrische Strahlungsäquivale $683\ cd$, wobei das Kilogramm, der Mete definiert sind mit dieser Definition ergibt s $K = 683\ \frac{cd\ sr\ s^3}{kg\ m^2}$

Bemerkung:

Siehe auch: Naturkonstanten

PRAKTIKUM THEORIE

Formeln

$$relativer\ Fehler\ =\ \frac{absoluter\ Fehler}{Messwert}$$

$$Abweichung\ =\ |Messung\ -\ Messungsmittelwert|$$

Für zwei Messungen gilt:

$$Mittelwert\ =\ \frac{Messung1\ +\ Messung2}{2}$$

$$Standardabweichung\ =\ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(c_i - c_m\right)^2}{n-1}}$$

TONINTERVALLE

Intervalle	Anzahl an Halbtonintervallen	Frequenzverhältnis
Prime	0	1:1
kleine Sekunde	1	16:15
groβe Sekunde	2	9:8
kleine Terz	3	6:5
groβe Terz	4	5:4
Quarte	5	4:3
Tritonus	6	7:5
Quinte	7	3:2
kleine Sexte, erhöhte Quint	8	8:5
Sexte	9	8:5
kleine Septime	10	9:5
groβe Septime	11	15:8
Oktave	12	2:1

WASSERDICHTE

Dichte des Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur

$Dichte\ des\ Wasser\ in\ Abhängigkeit\ von\ der\ Temperatur$	
$(bei\ \rho_n = 1\,013,25hPa)$	
$t\,(^\circ C)$	$\varrho\left(\frac{g}{cm^3}\right)$
0	$0,999\,840$
1	$0,999\,899$
2	$0,999\,940$
3	$0,999\,964$
4	$0,999\,972$
5	$0,999\,964$

6	$0,999\ 940$
7	$0,999\ 902$
8	$0,999\ 849$
9	$0,999\ 781$
10	$0,999\ 700$
11	$0,999\ 605$
12	$0,999\ 498$
13	$0,999\ 378$
14	$0,999\ 245$
15	$0,999\ 101$
16	$0,998\ 944$

17	0,998 776
18	0,998 597
19	0,998 407
20	0,998 206
21	0,997 944
22	0,997 772
23	0,997 540
24	0,997 299
25	0,997 047
26	0,996 786
27	0,996 516

28	$0,996\ 236$
29	$0,995\ 984$
30	$0,995\ 650$
31	$0,995\ 344$
32	$0,995\ 030$
33	$0,994\ 705$
34	$0,994\ 373$
35	$0,994\ 036$
36	$0,993\ 686$
37	$0,993\ 331$
38	$0,992\ 968$

39	0,992 598
40	0,992 22
41	0,991 83
42	0,991 44
43	0,991 04
44	0,990 63
45	0,990 22
46	0,989 80
47	0,989 37
48	0,988 93
49	0,988 49

50	0,988 04
55	0,985 69
60	0,983 20
65	0,980 55
70	0,977 76
75	0,974 84
80	0,971 79
85	0,968 61
90	0,965 30
95	0,961 89
100	0,958 35

WIDERSTANDS RINGE

Toleranzstreifen

Farbe		A	B	C	Multiplikator	Toleranz	Te
Silber		-	-	-	$\times 10^{-2}$	$\pm 10\%$	-
Gold		-	-	-	$\times 10^{-1}$	$\pm 5\%$	-
Schwarz		-	0	0	$\times 10^{0}$	*	± 2
Braun		1	1	1	$\times 10^{1}$	$\pm 1\%$	± 1
Rot		2	2	2	$\times 10^{2}$	$\pm 2\%$	± 5
Orange		3	3	3	$\times 10^{3}$	*	± 2
Gelb		4	4	4	$\times 10^{4}$	*	± 2
Grün		5	5	5	$\times 10^{5}$	$\pm 0,5\%$	-

Blau		6	6	6	$\times 10^6$	$\pm 0,2\%$	± 1
Violett		7	7	7	$\times 10^7$	$\pm 0,1\%$	± 5
Grau		8	8	8	$\times 10^8$	*	± 1
Weiβ		9	9	9	$\times 10^9$	*	-

Bemerkung

* ohne Toleranzstreifen: $\pm 20\%$

Anzahl der Ringe	4	1.Ring	A
		2.Ring	B
		3.Ring	Multiplikator
		4.Ring	Toleranz

Anzahl der Ringe	5	1.Ring	A

		2.Ring	B
		3.Ring	C
		4.Ring	Multiplikator
		5.Ring	Toleranz

Anzahl der Ringe	5	1.Ring	A
		2.Ring	B
		3.Ring	Multiplikator
		4.Ring	Toleranz
	**	5.Ring	Temperaturkoeffizient

Anzahl der Ringe	6	1.Ring	A

		2.Ring	B
		3.Ring	C
		4.Ring	Multiplikator
		5.Ring	Toleranz
	**	6.Ring	Temperaturkoeffizient

Bemerkung

** Ring ist breiter als die anderen

Der Toleranzring steht in einem etwas größeren Abstand zu den anderen Ringen. Der erste Ring steht näher am Rand des Widerstands als der Toleranzring.

ZAHL PREFIXE

Zahl Prefixe

Griechischer Prefix	Lateinischer Prefix	Zahl
meden-, ouden-	nulli-	0
mono-	uni-, sol-	1
di-, bi-, dy-, dyo-	du-	2
tri-	tri-	3
tetra-	quadri-, quadru-	4
penta-	quinque-	5
hexa-	sexa-	6
hepta-	septa-, septi-	7

octa-	octo-	8
ennea-	novem-	9
deca-	decem-, dec-	10

ELEKTRISCHE WIDERSTAND

Elektrische Widerstand

Definition

Die Bewegungen der Elektronen in einem Leiter werden durch dauernde Zusammenstöße mit den Atomkernen des Leitermaterials gehemmt. Mit dem „elektrischen Widerstand“ wird das Bestreben eines Materials bezeichnet, den elektrischen Stromfluss zu bremsen. Je größer der elektrische Widerstand R umso schlechter leitet ein Material.

Einheit

$$[R] = \Omega$$

$$\Omega,\ Ohm$$

Schaltsymbol

Ohmmeter

Zum Messen des elektrischen Widerstands benutzt man einen: *Ohmmeter*

Elektrische Leitwert

Definition

Der elektrische Leitwert G, gibt an wie gut ein Strom durch ein Leitermaterial fließen kann.

Der elektrische Leitwert G ist der Kehrwert des elektrischen Widerstands R.

Formel

$$G = \frac{1}{R}$$

Einheit

$$[G] = \frac{1}{\Omega}$$

$$[G] = S$$

$$S,\ Siemens$$

Ohm'sches Gesetz

Definition

Der Strom I in einem Bauteil ist proportional zur angelegten Spannung U und umgekehrt proportional zum Widerstand R des Bauteils.

Proportionalitäten

$$I \sim U$$

und

$$I \sim \frac{1}{R}$$

wobei

$$\frac{U}{I} = konstant = R$$

Formeln

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R,\ Widerstand$$

$$U,\ Spannung$$

$$I,\ Stromstärke$$

und

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$$

$$G,\ Leitwert$$

HALBLEITERDIODE

Aufbau

Die Halbleiterdiode besteht aus zwei fest miteinander verbundenen Halbleiterkristallschichten, einer P-Schicht und einer N-Schicht.

Schaltzeichen

Das Dreieck im Schaltzeichen symbolisiert den P-Kristall und der Strich den N-Kristall. Der P-Kristallanschluss wird als Anode und der N- Kristallanschluss wird als Katode bezeichnet. Die Richtung des Pfeils zeigt die Durchlassrichtung der Diode an.

Wirkungsweise

Die Halbleiterdiode lässt den Strom in einer Richtung durch und sperrt ihn in der anderen Richtung die sogenannte Ventilwirkung.

Erklärung

- Liegt der positive Pol einer Spannungsquelle an der Anode und der negative Pol an der Katode, so wird der PN-Übergang niederohmig. Es fließt ein Strom. Der PN-Übergang ist in Durchlassrichtung gepolt.
- Liegt der negative Pol einer Spannungsquelle an der Anode und der positive Pol an der Katode, so wird der PN-Übergang hochohmig. Es fließt kein Strom. Der PN-Übergang ist in Sperrrichtung gepolt.

Diodenkennlinie

Die Kennlinie beschreibt die Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung an einer Diode. Der Verlauf der Kennlinie ist im Sperrbereich und Durchlassbereich sehr unterschiedlich. Im Durchlassbereich tragen die Achsen die Bezeichnungen U_F und I_F. Der Index F kommt aus dem Englischen für forward direction. Im Sperrbereich wird der Index R für reverse direction verwendet.

Kennlinienauswertung

- In Durchlassrichtung beginnt die Diode den Strom zu leiten, wenn die äußere Spannung den Wert der Diffusionsspannung am PN-Übergang erreicht hat. Diese Spannung wird als Schleusenspannung U_S, auch Schwellspannung oder Durchlassspannung genannt.

Siliziumdiode

$$U_S = 0,6V \ldots 0,8V$$

Germanium

$$U_S = 0,3V \ldots 0,4V$$

- Der Durchlassstrom darf den Wert I_{FMax} nicht überschreiten, da die Diode sonst zerstört werden kann.
- Die Si-Diode hat eine steilere Durchlasskennlinie als die Ge-Diode. Bei der Si-Diode tritt nach Überschreiten der Schleusenspannung schlagartig ein großer Stromfluss ein. Bei der Ge-Diode erfolgt der Übergang vom kleinen zum großen Stromfluss allmählich.
- In Sperrrichtung fließt fast kein Strom. Ab einer bestimmten Sperrspannung der Spitzensperrspannung U_{RMax} kommt es zu Durchbrüchen, welche normalerweise die Diode zerstören.
- Si-Dioden haben ein besseres Sperrverhalten als Ge-Dioden.

Idealisierte Kennlinie

KONDENSATOR IM WECHSELSTROMKREIS

Das Verhalten eines Kondensators an sinusförmigen Wechselspannungen unterscheidet sich nun wesentlich vom Verhalten an Gleichspannung:

1. Da ein Wechselstrom ständig seine Richtung ändert, die Elektronen sich also hin und her bewegen, ist ein Kondensator für Wechselströme nicht mehr sperrend, sondern besitzt einen bestimmten Wechselstromwiderstand.
2. Der Kondensator wird im Wechselstromkreis ständig aufgeladen und wieder entladen, es fließt deshalb auch ständig ein Wechselstrom durch den Kondensator.

Phasenverschiebung von dem Strom

Formel

$$i_C(t) = \hat{i_C} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Herleitung

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$mit\ q = C \cdot u_C(t)$$

$$\Leftrightarrow i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$mit\ u_C(t) = \hat{u_C} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow i_C(t) = C \cdot \hat{u_C} \cdot \frac{d[\sin(\omega t)]}{dt}$$

$$\Leftrightarrow i_C(t) = \omega \cdot C \cdot \hat{u_C} \cdot \cos(\omega t)$$

$$mit\ i_C = \omega \cdot C \cdot u_C\ und\ \cos(\omega t) = \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow i_C(t) = \hat{i_C} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \varphi_{i,u} = 90^\circ$$

Bei einem idealen Kondensator an sinusförmiger Wechselspannung eilt der Strom gegenüber der Spannung um 90° voraus.

Kapazitiver Blindleitwert

Formel

$$B_C = \omega \cdot C$$

Einheit

$$[B_C] = \frac{A}{V} = S$$

$$S,\ Siemens$$

Kapazitiver Blindwiderstand

Formel

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Einheit

$$[X_C] = \Omega$$

Ohmsches Gesetz

Formel

$$X_C = \frac{U_C}{I_C}$$

Leistungskurve

Kapazitive Blindleistung

Formel

$$Q_C = U_C \cdot I_C$$

Einheit

$$[Q_C] = Var$$

$$Var,\ Volt - Ampère - reaktiv$$

Bemerkung

Die Blindleistung wird Blindleistung genannt da ihr Mittelwert Null ist. Beispiel: Ein blinder Passagier ist nicht da oder vorgesehen so wie die Leistung hier.

KONDENSATOR

Kondensatoren sind Speicher, die elektrische Ladungen und somit elektrische Energie speichern können. Sie werden auch Ladungsspeicher genannt.

Aufbau

Kondensatoren sind prinzipiell aus zwei elektrischen Leitern aufgebaut, zwischen denen sich ein Isolator, auch noch Dielektrikum genannt, befindet. Wird Luft als Isolator benutzt, so spricht man von einem Luftkondensator. Der einfachste Aufbau ist ein sogenannter Plattenkondensator.

Kapazität

Formel

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$Q,\ Ladungsmenge$$

Einheit

$$[C] = \frac{As}{V}$$

$$[C] = F$$

$$F,\ Farad$$

Formel

$$C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

$$C_0,\ Kapazität\ eines\ Luftkondesators$$

$$\epsilon_0,\ elektrische\ Feldkonstante$$

Konstante

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

ϵ_0 ist eine Naturkonstante.

Formel

$$C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Das Produkt $\epsilon_r \cdot \epsilon_0$ wird als Dielektrizitätskonstante ϵ bezeichnet.

$$[\epsilon] \rightarrow \ keine\ Einheit$$

Parallelschaltung

$$C_{ges} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$C_{ges},\ Gesamtkapazität$$

Reihenschaltung

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

$$C_{ges},\ Gesamtkapazität$$

Lade-und Entladevorgang

Formel

$$\tau = R \cdot C$$

Einheit

$$[\tau] = s$$

Ein Kondensator ist voll geladen oder entladen nach praktisch $5 \cdot \tau$.

$$t = 5 \cdot \tau$$

Laden

$$i_C = \frac{U_0 - u_C}{R}$$

$$i_C,\ Ladestrom$$

$$u_C\left(t\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

$$e,\ Eulerkonstante$$

$$e \simeq 2,71828$$

$$u_C(t),\ Momentanwert\ der\ Kondensatorspannung$$

$$i_C\left(t\right) = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$I_0,\ Anfangsstromstärke$$

<u>Entladen</u>

$$u_C\left(t\right) = U_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$u_C(t),\ Momentanwert\ der\ Kondensatorspannung$$

$$i_C\left(t\right) = -I_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

$$I_0,\ Anfangsstromstärke$$

<u>Energie</u>

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U_C$$

$$Q,\ gespeicherte\ Ladungsmenge$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2$$

$$U_C,\ Kondensatorspannung$$

TRANSFORMATOR

Aufbau

Ein Transformator besteht aus zwei Wickelungen, die isoliert auf einem gemeinsamen Eisenkern sitzen.

Formeln

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

$$N_1, Windungen\ der\ Primärspule$$

$$N_2, Windungen\ der\ Sekundarspule$$

$$U_1, Spannung\ der\ Primärspule$$

$$U_2, Spannung\ der\ Sekundarspule$$

$$R_1, Widerstand\ der\ Primärspule$$

$$R_2, Widerstand\ der\ Sekundarspule$$

$$\ddot{u}, Übersetzungsverhältnis$$

TRANSISTOR

Aufbau

Der NPN-Transistor besteht aus zwei N-leitenden Zonen, zwischen denen sich eine schmale P- leitende Zone befindet. Die drei Schichten und ihre zugehörigen Anschlüsse werden bei den bipolaren Transistoren als Emitter E, Basis B und Kollektor C bezeichnet. Der Emitter liefert die Ladungsträger. Der Kollektor sammelt die Ladungsträger wieder ein. Die Basis ist die Steuerelektrode. Im Prinzip ist der Aufbau des Transistors ähnlich wie zwei gegensinnig geschaltete Dioden. Ein Transistor kann aber nicht aus zwei getrennten Dioden aufgebaut werden, da die Basis nur einige μm dick sein darf.

Schaltzeichen

Hier abgebildet sind das Schaltzeichen eines Transistors sowie alle Ströme und Spannungen.

Funktionsweise

Im NPN-Transistor befinden sich zwei PN-Übergänge. Es entstehen also zwei Sperrschichten in welchen sich keine freien Ladungsträger befinden. Ist die Basis-Emitter-Spannung $U_{BE} = 0V$ oder kleiner als die Schleusenspannung $U_S \simeq 0,7V$ der Basis-Emitter-Strecke, so sperrt der Transistor und es fließt kein Strom $I_B = 0$, $I_C = 0$. Wird die Basis-Emitter-Spannung UBE größer als die Schleusenspannung $U_S \simeq 0,7V$ der Basis- Emitter-Strecke, so beginnt der Transistor zu leiten. Es fließt ein großer Strom I_C vom Kollektor zum Emitter und ein sehr kleiner Strom I_B. Die Emitterzone ist beim Bipolartransistor stark dotiert, die Kollektorzone etwas weniger. Die außerordentlich dünne Basisschicht enthält nur eine geringe Anzahl Fremdatome. Fließt ein Basisstrom I_B, überfluten vom Emitter her viele Elektronen die dünne Basisschicht. Da diese Schicht nur schwach dotiert ist, können nur wenige Elektronen mit Löchern rekombinieren. Es fließt nur ein schwacher Basisstrom. Die meisten Ladungsträger gelangen durch das starke elektrische Feld der Basis-Kollektor-Sperrschicht zum Kollektor, wodurch ein hoher Kollektorstrom entsteht. Er kann um den Faktor 10 bis 500 mal größer sein als der Basisstrom.

Mit einem kleinen Basisstrom I_B kann somit ein großer Kollektorstrom I_C gesteuert werden. Dies erklärt die Verstärkungswirkung des Transistors. Um den kleinen Basisstrom I_B in einen großen Kollektorstrom I_C zu verstärken, muss natürlich eine externe Energiequelle zur Verfügung stehen, die den größeren Kollektorstrom auch liefern kann. Diese externe Energiequelle ist die Versorgungsspannung U_B, hier eine Batterie der Transistorschaltung. Der Emitterstrom I_E ist die Summe aus Kollektorstrom I_C und Basisstrom I_B.

Formel

$$I_E = I_C + I_B$$

wobei:

$$I_B \ll I_C$$

also fast vernachlässigbar

Fazit

Ein kleiner Basisstrom steuert einen großen Kollektorstrom.

Bestimmung der Kennlinien

Wie bei einer Diode lassen sich auch bei einem Transistor Kennlinien messtechnisch mit der folgenden Versuchsschaltung aufnehmen:

Eingangskennlinie

Der Zusammenhang zwischen dem Basisstrom I_B und der Basis-Emitterspannung U_{BE} wird als Eingangskennlinie eines Transistors bezeichnet. Weil es sich hierbei um einen PN-Übergang handelt ist die Kennlinie identisch mit einer Diodenkennlinie.

Die Eingangskennlinie hat den Verlauf einer in Durchlassrichtung betriebenen Diode. Für Siliziumtransistoren ergibt sich eine Schleusenspannung von ungefähr $0{,}65V$. Erst nach Überschreiten der Schleusenspannung kann ein Basisstrom fließen.

Stromsteuerkennlinie, Stromverstärkungskennlinie

Die Stromsteuerkennlinie gibt den Zusammenhang zwischen Kollektorstrom I_C und Basisstrom I_B an.

Gleichstromverstärkung

Das Verhältnis zwischen Kollektorstrom I_C und Basisstrom I_B wird als Gleichstromverstärkung B bezeichnet.

Formel

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

Ausgangskennlinien

Die Ausgangskennlinie gibt den Zusammenhang zwischen I_C und U_{CE} bei einem konstanten Basisstrom I_B an. Weil dieser Zusammenhang für jeden Basisstrom ändert, gibt es für jeden Basisstrom eine eigene Kennlinie. Man erhält somit ein Ausgangskennlinienfeld.

Grenzwerte

Jeder Transistor hat natürlich auch Grenzwerte die nicht überschritten werden dürfen, ansonsten wird der Transistor zerstört.

- maximaler Kollektorstrom I_{Cmax}
- maximaler Basisstrom I_{Bmax}
- maximale Kollektor-Emitter-Spannung U_{CEmax}
- maximale Verlustleistung P_{Vmax}, dies hängt von der Kühlung des Transistors ab mit:

$$P_V = U_{CE} \cdot I_C + U_{BE} \cdot I_B$$

Vierquadranten-Kennlinienfeld

Werden die 3 Kennlinien zu einem so genannten Vierquadranten-Kennlinienfeld zusammengefügt, so erkennt man die Verstärkungswirkung. Legt man eine konstante Betriebsspannung U_{CE} von zum Beispiel $U_{CE} = 5V$, an den Transistor und verändert die Eingangsspannung U_{BE} zwischen $0{,}6V$ und $0{,}8V$, so ergeben sich verschiedene Basisströme I_B. Für jeden Basisstrom I_B erhält man einen verstärkten Kollektorstrom I_C und einen entsprechenden Arbeitspunkt A auf einer Ausgangskennlinie.

WIDERSTAND IM WECHSELSTROMKREIS

Die Gesetze der Gleichstromtechnik gelten auch im Wechselstromkreis

Wirkwiderstand

Ohmsche Widerstände werden auch noch Wirkwiderstände genannt.

Spannung, Strom, Leistung

Wird ein ohmscher Widerstand R an eine sinusförmige Wechselspannung gelegt, so fließt in ihm ein sinusförmiger Wechselstrom. Strom und Spannung liegen dabei in Phase, das heißt beim Nulldurchgang der Spannungskurve hat auch die Stromkurve ihren Nulldurchgang.

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$$

Herleitung Leistung

Die vom Widerstand aufgenommene Wirkleistung kann in jedem Augenblick durch berechnet werden.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$mit\ \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2\omega t)]$$

Siehe Collection des Formules Trigonométriques.

$$p(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2}[1 - \cos(2\omega t)] = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}[1 - \cos(2\omega t)]$$

$$\Leftrightarrow p(t) = U \cdot I \cdot [1 - \cos(2\omega t)]$$

Wirkleistung

Die Leistung ist zu jedem Zeitpunkt positiv, das heiβt der Leistungsfluss verläuft stets vom Generator zum Widerstand. Die Leistungskurve stellt dabei eine Sinuskurve mit der doppelten Grundfrequenz dar.

Definition

Eine Wirkleistung ist eine Leistung, die zwischen $p_{min} = 0$ und $p_{min} = \hat{u} \cdot \hat{i}$ hin und her schwingt.

ELEKTRISCHE FELD

Elektrische Ladungen

Definition:

Ein elektrisches Feld ist ein Raum auf dem auf elektrische Ladungen Kräfte wirken.

Theorie:

Es gibt positive und negative elektrische Ladungen. Gleichartige elektrische Ladungen stoβen sich ab, ungleiche Ladungen ziehen sich an.

Die kleinste elektrische Ladung, die als Elementarladung e bezeichnet wird, ist die Ladung eines Elektrons (kleinste negative Ladung) beziehungsweise die Ladung eines Protons (kleinste positive Ladung)

Eine beliebige elektrische Ladung (Ladungsmenge) Q setz sich aus einem ganzzahlingen Vielfachen N der Elementarladung $\pm e$ zusammen. Die elektrische Ladung Q ist somit quanisiert (in kleinste Pakete gequantelt also (zerlegt)).

Der Wert der Elementarladung ist eine Naturkonstante.

Ladung eines Elektrons : $-1,602 \cdot 10^{-19} C$

Ladung eines Protons : $1,602 \cdot 10^{-19} C$

Formel:

$$Q = N \cdot e$$

Einheit:

$$[Q] = As = C$$

$$As, AmpereSekunden$$

$$C, Coulomb$$

Ladungserhaltungssatz

Der Ladungserhaltungssatz sagt aus, dass in einem abgeschlossenen System die Summe an positiven und negativen Ladungen konstant bleibt.

Gesetz von Coulomb

Formel:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$$\epsilon_0,\ Dielektrizitätskonstantedes Vakuums$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Bemerkung:

Dieses Gesetz ist ähnlich des Gravitationsgesetzes.

Homogenes - oder Inhomogenesfeld

Man spricht von einem homogenen Feld wenn die Feldlinien parallel verlaufen, andernfalls ist es inhomogen.

Elektische Feldstärke

Bedingungen:

1. Die Kraft F auf eine Ladung ist zu der elektrischen Feldstärke proportional.
2. Die Kraft F auf die Ladung ist zu der Ladungsmenge proportional.

Definition:

Die elektrische Feldstärke E ist ein Maβ für die Kraft die in einem bestimmten Feldpunkt auf eine I dort befindliche Ladung ausgeübt wird. Je größer die Feldliniendichte, desto größer die Feldstärke.

Formel:

$$F = Q \cdot E$$

Einheit:

$$[E] = \frac{V}{m}$$

$$E,\ elektrische\ Feldstärke$$

Formel:

$$E = \frac{U}{d}$$

Elektische Influenz

Definition:

Unter Einfluss eines elektrischen Feldes kommt es in einem Leiter zu einer Ladungstrennung.

Theorie:

Bringt man einen Leiter in ein elektrisches Feld, so kommt es in dem Leiter zu einer Verschiebung der Ladungen durch Influenz.

Elektrische Polaristation

Definition:

Unter Polarisation versteht man die Ladungsverschiebung in einem Isolierstoff unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes.

Theorie:

Bringt man einen Isolierstoff in ein elektrisches Feld, so werden die Elektronen von den Protonen entfernt ohne sich zu trennen. Die Moleküle richten sich durch die

Kraft des Feldes aus.

Dielektrikum

Ein polarisierter Isolierstoff wird Dielektrikum genannt.

ELEKTRISCHE STROMKREIS

Spannungsquellen

Definition

Als Spannungsquelle wird ein aktiver Zweipol bezeichnet, der zwischen seinen Anschlusspunkten eine elektrische Spannung liefert.

Elektrische Spannung

Definition

Als Spannung U bezeichnet man die Fähigkeit einer elektrischen Quelle, in einem Stromkreis einen Strom I aufrechtzuerhalten.

Elektrischer Strom

Definition

Die elektrische Stromstärke I, Symbol , ist ein Maß für die elektrische Ladung Q, die pro Sekunde durch einen Leiterquerschnitt hindurchfließt.

Elektrischer Leiter

Definition

Ein elektrischer Leiter ist ein Stoff oder Körper der den elektrischen Strom durchlässt.

Isolator

Definition

Ein Isolator ist ein Stoff oder Körper der den elektrischen Strom nicht oder nur extrem schlecht durchlässt.

Elektrische Ladung

Definition

Die elektrische Ladung Q ist die Anzahl der elementar Ladungen q_e.

Stromkreis-Bedingung

Ein Strom kann nur fließen wenn der Stromkreis geschlossen ist.

Wirkungen des elektrischen Stroms

- Wärmewirkung

  Fließt ein Strom I durch einen Leiter so erwärmt sich dieser.

- Magnetwirkung

  Fließt ein Strom I durch einen Leiter so bildet sich ein magnet Feld.

- Lichtwirkung

  Unter bestimmten Bedingungen kann das Fließen eines elektrischen Stroms Licht hervorrufen.

- Chemiewirkung

  Der elektrische Strom I kann eine chemische Wirkung auf verschiedene Stoffe bewirken.

Ohm'sche Gesetz

Definition

Ein elektrischer Leiter folgt dem ohm'schen Gesetz wenn die am Leiter anliegende elektrische Spannung U direkt proportional ist zur elektrischen Stromstärke I, die durch den Leiter fließt:

Formel

$$R = \frac{U}{I} = konstant$$

$$R,\ Widerstand$$

Einheit

$$[R] = \Omega$$

Elektrischer Widerstand

Definition

Der elektrische Widerstand R eines Leiters ist der Quotient zwischen der elektrischen Spannung U am Leiter und der Stromstärke I, die durch den Leiter fließt:

$$R = \frac{U}{I}$$

oder

$$U = R \cdot I$$

Einheit

$$[R] = \frac{V}{A}$$

$$[R] = \Omega$$

$$R,\ Ohm$$

Leiterwiderstand

Definition

Ein Leiter aus einem leitfähigem Material der Länge l und des Querschnitts A, wirkt bei ansetzen eines Stroms als geringer Widerstand.

Dieses Phänomen wird als Leiterwiderstand bezeichnet.

Proportionalitäten

$$R \sim l$$

$$R \sim \rho$$

$$R \sim \frac{1}{A}$$

Formel

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

$$R,\ Widerstand$$

$$\rho,\ spezifischer\ Widerstand$$

$$A,\ Querschnitt$$

Einheiten

$$[\rho] = \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$$

$$[l] = m$$

$$[A] = mm^2$$

Widerstand-Temperatur-Gesetz

Man kann experimentell nachweisen, dass sich der Widerstand annähernd linear mit der Temperatur erhöht. Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

- Die Änderung des elektrischen Widerstandes $\Delta R = R - R_0$ ist direkt proportional zur Temperaturänderung $\Delta\theta = \theta - \theta_0$: $\Delta R \sim \Delta\theta$
- Die Änderung des elektrischen Widerstandes ΔR ist proportional zum Anfangswiderstand R_0: $\Delta R \sim R_0$

Diese zwei Proportionalitäten können zu einer zusammengefasst werden:

$$\Delta R \sim R_0 \cdot \Delta\theta$$

Durch Einführung der Proportionalitätskonstante α, welche als Temperaturkoeffizient bezeichnet, erhalten wir:

$$\Delta R = \alpha \cdot R_0 \cdot \Delta\theta$$
$$\Leftrightarrow R - R_0 = \alpha \cdot R_0 \cdot \Delta\theta$$
$$\Leftrightarrow R = R_0 + \alpha \cdot R_0 \cdot \Delta\theta$$
$$\Leftrightarrow R = R_0 \left(1 + \alpha \cdot \Delta\theta\right)$$
$$\Leftrightarrow R = R_0 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\theta - \theta_0)\right]$$

Formel

$$R = R_0 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\theta - \theta_0)\right]$$

HALBLEITER

Begriffserklärung

Der Begriff Halbleiter bezieht sich auf den spezifischen Widerstand reiner Materialien. Ein Halbleiter leitet den Strom besser als ein Isolator, aber schlechter als ein metallischer Leiter.

Zur Gruppe der Halbleiter gehören die Elemente Silizium Si und Germanium Ge, aber auch die Verbindungen wie Gallium-Arsenid GaAs, Indium-Phosphid InP.
Für die Herstellung von Halbleiterbauelementen wird hauptsächlich Silizium Si verwendet.

Leitungsvorgänge

- Beträgt die Temperatur $T = 0K$ so befinden sich die Atome im Ruhezustand und die Valenzelektronen sind fest im Kristallaufbau gebunden. Für einen Strom stehen also keine Ladungsträger zur Verfügung. Der Halbleiter verhält sich wie ein Isolator und sein elektrischer Widerstand ist unendlich groβ.

- Erhöht sich die Temperatur $T > 0K$, so werden aufgrund der Wärmeschwingungen Elektronen von ihren Atomrümpfen losgelöst und damit beweglich. Man bezeichnet sie dann als freie Elektronen. Verlässt ein Elektron eine Paarbindung, so fehlt an dieser Stelle eine negative Ladung und es entsteht eine Elektronenlücke, auch Defektelektron oder Loch genannt. Da dieses Loch eine fehlende negative Ladung in einer Gitterbindung ist, kann es als positiv geladenes Teilchen angesehen werden.

  Mit zunehmender Temperatur entstehen jeweils paarweise Elektronen und Löcher. Dieser Prozess wird als Paarerzeugung bezeichnet. Trifft ein freies Elektron bei seiner Bewegung auf ein Loch, so kann es in das Loch hineinfallen.

Danach ist es wieder gebunden und kann nicht mehr zur Leitung des Stromes beitragen. Dieses Hineinfallen in ein Loch wird als Rekombination bezeichnet.

- Legt man bei $T > 0K$ eine elektrische Spannung an einen Si-Kristall, so kann man einen Stromfluss feststellen. Dieser besteht aus zwei Teilen:
    - dem Elektronenstrom vom Minuspol der Spannungsquelle zum Pluspol
    - dem Löcherstrom vom Pluspol der Spannungsquelle zum Minuspol der nur im Si-Kristall erfolgt

Störstellenleitung

Werden dem reinen vierwertigen Silizium geringe Mengen von 3 oder 5 wertigen Fremdatomen zugesetzt, so erhält man auβer der Eigenleitung auch die sogenannte Störstellenleitung. Die Fremdatome werden dabei auf die regulären Gitterplätze des Siliziumkristalls eingebaut. Dieses Einbauen von Fremdatomen bezeichnet man als Dotieren.

Die Dotierung ist ein komplexer Prozess und wird mit spezialisierten Verfahren durchgeführt wie: Diffusion, Implantation.

N-Halbleiter

Wenn man einen reinen Si-Kristall gezielt mit 5-wertigen Atomen wie: P, As, Sb dotiert oder verunreinigt, dann erhält man N-Silizium. Diese Atome sind Elemente der fünften. Hauptgruppe und werden als Donatoren bezeichnet.

Das eingebaute Fremdatom hat 5 Valenzelektronen. Zur Bindung an die benachbarten Si-Atome werden aber nur 4 von diesen 5 Valenzelektronen benötigt. Das fünfte Elektron ist nur schwach an das Fremdatom gebunden. Das nicht benötigte Elektron kann mit geringem Energieaufwand abgetrennt werden. Dann wird es zum freien Elektron und kann zum Ladungstransport herangezogen werden.

P-Halbleiter

Wenn man einen reinen Si-Kristall gezielt mit 3-wertigen Atomen wie: B, Al, Ga, In dotiert, dann erhält man P-Silizium. Diese Atome sind Elemente der dritten Hauptgruppe und werden als Akzeptoren bezeichnet.

Das eingebaute Fremdatom hat 3 Valenzelektronen. Es kann sich daher an 3 Si-Atome binden. Eine Bindung an einem Si-Atom bleibt offen. Diese offene Bindung stellt ein Loch oder Defektelektron dar. Dieses Loch kann mit geringem Energieaufwand von einem Elektron eines benachbarten Atoms besetzt werden. Dadurch entsteht eine Bewegung des Loches, die Löcherbewegung, die der Elektronenbewegung entgegengesetzt ist.

PN-Übergang

Der Grenzbereich zwischen einer P-leitenden Zone und einer N-leitenden Zone wird PN- Übergang genannt.

MAGNETISCHE FELD

Das magnetische Feld

In der Umgebung eines Magneten (Ursache) wird der Raum, der als magnetisches Feld bezeichnet wird, zum Träger physikalischer Eigenschaften. Dieser besondere Raumzustand macht sich dadurch bemerkbar, dass eine Kraftwirkung auf ferromagnetische Stoffe ausgeübt wird.

Magnetische Feldlinien

Magnetische Feldlinien, sind gedachte Linien und dienen der Veranschaulichung von magnetischen Feldern.

Eigenschaften

1. Die magnetischen Feldlinien enden nicht an den Polen, sondern durchsetzen auch den Magneten. Magnetische Feldlinien sind in sich geschlossen; sie haben weder Anfang noch Ende.
2. Magnetische Feldlinien treten immer senkrecht aus der Magnetoberfläche aus oder ein.
3. Die Magnetischen Feldlinien verlaufen auβerhalb des Magneten vom Nordpol zum Südpol und innerhalb des Magneten vom Südpol zum Nordpol (Festlegung).
4. Magnetische Feldlinien schneiden sich nicht.

Homogene, inhomogene magnetische Felder

Homogene Feldlinien sind parallel wobei inhomogene Feldlinien nicht parallel sind.

Elektromagnetismus

Um einen stromdurchflossenen Leiter bildet sich ein Magnetfeld aus. Ursache für das magnetische Feld ist der Strom. Die Richtung des Feldes ist abhängig von der Stromrichtung.

Stromrichtungsschreibweise

Wir benötigen eine standard Schreibweise die es erlaubt die Richtung des Stroms sowie die des magnet Feldes zu beschreiben:

1. • bedeutet der Strom flieβt aus dem Leiter wo der Punkt sich befindet heraus.
2. × bedeutet der Strom flieβt in den Leiter wo das Kreuz sich befindet heraus.

Korkenzieherregel, Schraubenzieherregel, Rechtsschraubenregel

Man dreht die Rechtsschraube in Richtung des Stromes. Die Drehrichtung der Schraube entspricht der Richtung der magnetischen Feldlinien

Magnetfeld einer Leiterschleife,

Das Magnetfeld des hinlaufenden Stroms und des rück- laufenden Stroms addieren sich im Inneren der Leiterschleife zu einem Gesamtfeld, dies nennt man Feldverstärkung.

Magnetfeld einer Spule

Um die magnetische Wirkung einer einzelnen Leiterschleife zu steigern, werden mehrere Leiterschleifen in Reihe geschaltet. Man erhält so eine Spule. Die einzelnen Leiterschleifen werden als Windungen bezeichnet.

Die Magnetfelder der einzelnen Windungen überlagern sich zu einem Gesamtmagnetfeld. Es entsteht ein Magnetfeld, das dem eines Stabmagneten gleicht. Die Polarität des Magnetfeldes ist von der Stromrichtung abhängig.

Magnetische Flussdichte

Definition

Die magnetische Flussdichte B ist ein Maß für die Stärke des magnetischen Feldes in einem bestimmten Punkt.

Einheit

$$[B] = \frac{Vs}{m^2}$$

$$[B] = T$$

$$T,\ Tesla$$

Magnetische Fluss

Definition

Der magnetische Fluss Φ ist die gesamt Zahl der Feldlinien pro Fläche A.

Formel

Da für ein homogenes Feld ist die magnetische Flussdichte B konstant ist und Feldlinien die Fläche senkrecht schneiden gilt:

$$\Phi = B \cdot A$$

Einheit

$$[\Phi] = Vs$$

$$[\Phi] = Wb$$

$$Wb,\ Weber\ \rightarrow\ veraltet$$

Elektrische Durchflutung

$$\Theta = I \cdot N$$

$$N,\ Windungszahl$$

Magnetische Feldstärke

Der Quotient aus der elektrischen Durchflutung Θ und der mittleren Feldlinienlänge I_m wird als magnetische Feldstärke H bezeichnet.

$$H = \frac{\Theta}{l_m}$$

$$[H] = \frac{A}{m}$$

Bemerkung

Die mittlere Feldlinienlänge hängt vom Feldlinienweg ab. Bei der Ringspule entspricht dies dem Mittelwert zwischen dem inneren und äußeren Umfang des Kerns. Im Allgemeinen ist der Feldlinienweg von Spulen und somit die mittlere Feldlinienlänge nicht bekannt.

Zusammenhang zwischen B und H

Das Verhältnis von Flussdichte B und magnetischer Feldstärke H ist konstant und wird als magnetische Feldkonstante μ_0 bezeichnet. Im Vakuum (und näherungsweise für Luft) gilt:

$$\mu_0 \simeq 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Formel

$$B = \mu_0 \cdot H$$

Die magnetische Feldkonstante μ_0 ist jedoch abhängig von dem verwendeten Stoff in der Mitte der Spule durch Eisen wird diese Verstärkt. Die Erklärung ist die Ausrichtung der im Eisen vorhandenen Elementarmagnete die die magnetischen

Flussdichte um einen Faktor Verstärken. Dieser Faktor ist die elektrische Permeabilitätszahl μ_r

Formel

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$$

$$\mu_r,\ Permeabilitätszahl$$

$$\mu,\ Permeabilität$$

Ferromagnetische, paramagnetische, diamagnetische Stoffe

Ferromagnetische Stoffe

$$\mu_r \gg 1$$

Paramagnetische Stoffe

$$\mu_r > 1$$

Diamagnetische Stoffe

$$\mu_r < 1$$

Motorprinzip

Auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld wirkt eine Kraft F senkrecht zum Magnetfeld. Elektrische Energie wird in mechanische Energie umgewandelt durch die Lorentzkraft.

Formel

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot z$$

$$l,\ wirksame\ Leiterlänge$$

$$z,\ Anzahl\ der\ Leiter$$

Linke Hand-Regel

Hält man die linke Hand so, dass die Feldlinien senkrecht auf die innere Handfläche auftreffen und die ausgestreckten Finger in Stromrichtung zeigen, dann zeigt der abgespreizte Daumen in Richtung der Ablenkkraft des Leiters.

Generatorprinzip

In einem senkrecht zu den Feldlinien bewegtem Leiter im Magnetfeld wird eine Spannung induziert. Mechanische Energie wird in elektrische Energie umgewandelt. Durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld wirkt eine Lorentzkraft auf die freien Ladungsträger im Leiter, die zu einer räumlichen Trennung zwischen negativen und positiven Ladungen führt. Zwischen den Leiterenden ist eine Spannung entstanden.

Formel

$$u_i = B \cdot v_n \cdot l \cdot z$$

$$u_i,\ induzierte\ Spannung$$

$$v_n,\ Geschwindigkeit\ senkrecht\ der\ Feldlinien$$

$$l,\ wirksame\ Leiterlänge$$

$$z,\ Anzahl\ der\ Leiter$$

Rechte Hand-Regel

Hält man die rechte Hand so, dass die Feldlinien senkrecht auf die innere Handfläche auftreffen und der abgespreizte Daumen in Bewegungsrichtung zeigt, so fließt der Induktionsstrom in Richtung der ausgestreckten Finger.

Lent'sche Regel

Der durch eine Induktionsspannung $u_i$hervorgerufene Strom I ist stets so gerichtet, dass er der Entstehungsursache entgegenwirkt. Die Wirkung wirkt der Ursache entgegen.

Bemerkung

Die Lenzsche Regel ist eine andere Formulierung des Energieerhaltungssatzes.

Induktionsgesetz

Formel

$$u_i = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$N,\ Anzahl\ an\ Windungen$$

Siehe auch die Herleitung des Induktionsgesetzes

Selbstinduktion, induktive Spannung

Die magnetische Flussänderung $\Delta\Phi$, die durch eine Stromänderung Δi verursacht wird, induziert in der Spule eine Spannung. Da die Flussänderung nicht durch ein äußeres magnetisches Feld, sondern durch die Stromänderung in der Spule selbst verursacht wird, nennt man die induzierte Spannung Selbstinduktionsspannung.

Selbstinduktionsgesetz

Die Selbstinduktionsspannung u_L hängt von der Stromänderungsgeschwindigkeit $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ und vom Aufbau der Spule. ab. Der Einfluss des Spulenaufbaus wird durch eine Spulenkonstante, der sogenannten Induktivität L, berücksichtigt.

Formel

$$u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Einheit

$$[L] = H$$

$$H,\ Henry$$

Bemerkung

Wird die angelegte Spannung vergrößert, so steigt der Strom durch die Spule an. Dieser Stromanstieg hat nach der Lenzschen Regel eine Selbstinduktionsspannung (Wirkung) zur Folge, die so gerichtet ist, dass sie dem Stromanstieg (Ursache) entgegenwirkt.

WECHSELSTROMTECHNIK

Bedingungen einer Wechselgröße

1. Wecheslgrößen sind periodisch

2. Wechselgrößen haben einen linearen oder arithmetischen Mittelwert gleich Null.

Erzeugung

In der Praxis werden Wechselspannungen durch Drehung einer Leiterschleife oder Spule in einem Magnetfeld erzeugt. Durch die Drehbewegung des Leiters oder einer Spule werden über das Induktionsgesetz sinusförmige Spannungen erzeugt.

Arten der Wechselgrößen

1. Sinusspannung

2. Dreieckspannung

3. Rechteckspannung

4. Sägezahnspannung

Liniendiagramm einer Wechselspannung

Anmerkung

Dieses Kapitel ist ähnlich dem Kapitel Schwingungen.

Drehwinkel

Der Drehwinkel α gibt die Lage der Leiterschleifer oder Spule im Magnetfeld an.

α wird in DEG oder RAD gemessen.

Momentanwert, Augenblickswert

Dies ist der Wert der Wechselspannung zu einem bestimmten Zeitpunkt t $u(t)$

Einheit

$$[u(t)] = V$$

Scheitelwert, Amplitude

Die Amplitude $\hat{u}$ ist der maximale Betrag der Spannung.

Einheit

$$[\hat{u}] = V$$

Periodendauer

Die Periodendauer T ist die Zeit, die die Spannung zum Durchlaufen einer ganzen Schwingung braucht.

Einheit

$$[T] = s$$

Frequenz

Die Frequenz gibt die Anzahl der Perioden pro Sekunde an.

$$f = \frac{1}{T}$$

Einheit

$$[f] = Hz$$

Kreisfrequenz

Die Kreisfrequenz gibt die Anzahl der Perioden pro Sekunde an.

$$in\ Radiant:\ RAD$$
$$\omega = 2\pi f$$
$$in\ Grad:\ DEG$$
$$\omega = 360^\circ f$$

Einheit

$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

$$oder$$

$$[\omega] = \frac{deg}{s}$$

Phasenverschiebung

Wechselgrößen sind dann phasenverschoben, wenn sie ihre Nulldurchgang beziehungsweise Scheitelwert zu unterschiedlichen Zeitpunkten haben.

$$[\varphi_0] = rad$$

$$oder$$

$$[\varphi_0] = deg$$

Sinusspannungsformel

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Effektivwert

Der sogenannte Effektivwert (wirksamer Wert) einer Wechselspannung ist der Spannungswert, der in einem ohmschen Widerstand die gleiche Wärmemenge umsetzt wie eine gleich große Gleichspannung.

Formeln

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

RMS

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) \cdot \mathrm{d}t}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) \cdot \mathrm{d}t}$$

Das Verhältnis aus Scheitelwert und Effektivwert nennt man Scheitelfaktor.

$$Scheitelfaktor \; = \; \sqrt{2}$$

BASISFORMELN

Leistung

$$P = R \cdot I^2$$

$$P = U \cdot I$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Spannung

$$U = R \cdot I$$

$$U = \frac{P}{I}$$

$$U = \sqrt{P \cdot R}$$

Stromstärke

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

$$I = \frac{P}{U}$$

$$I = \frac{U}{R}$$

Widerstand

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{P}{I^2}$$

$$R = \frac{U^2}{P}$$

FILTERSCHALTUNGEN

Definition

Filterschaltungen sind Schaltungen, die in Abhängigkeit der Frequenz bestimmte Spannungen sperren.

Tiefpass

Tiefpässe sperren hohe Frequenzen und lassen niedrige Frequenzen passieren.

Zusammenhang Eingang - und Ausgangsspannung

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{X_C}{Z}$$

$$= \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot f \cdot C \cdot R)^2}}$$

Grenzfrequenz

Herleitung

Bei Grenzfrequenz gilt:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2X_C^2 = R^2 + X_C^2$$

$$\Leftrightarrow X_C = R$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{2\pi \cdot f_g \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Formel

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Der Hochpass sowie Tiefpass haben die gleiche Formel für die Grenzfrequenz

Hochpass

Hochpässe lassen hohe Frequenzen passieren und sperren niedrige Frequenzen.

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{Z}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C \cdot R}\right)^2}}$$

Grenzfrequenz

Herleitung

Bei Grenzfrequenz gilt:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 = R^2 + X_C^2$$

$$\Leftrightarrow X_C = R$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{2\pi \cdot f_g \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Formel

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Bemerkung

Der Hochpass sowie Tiefpass haben die gleiche Formel für die Grenzfrequenz

RC - PARALLELSCHALTUNG

Schaltung

1. Am Wirkwiderstand R und an der Kapazität C liegt die gleiche Spannung U an.
2. Durch R fließt der Strom I_R. Er liegt mit U in Phase.
3. Durch X_C fließt der Strom I_C. Er eilt U um 90° voraus.
4. Deshalb müssen auch die Ströme I_R und I_C um 90° phasenverschoben sein.

Strom

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{I_C}{I}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{I_R}{I}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{I_C}{I_R}$$

Leitwert

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{B_C}{Y}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{G}{Y}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{B_C}{G}$$

Leistung

Leistungsdreieck

$$S = \sqrt{P^2 + Q_C^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{Q_C}{S}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q_C}{P}$$

RC - REIHENSCHALTUNG

Schaltung

1. Durch den Wirkwiderstand R und die Kapazität C fließt der gleiche Strom I.
2. An R fällt die Spannung U_R ab. Sie liegt mit dem Strom I in Phase.
3. An X_C fällt die Spannung U_C ab. Sie eilt dem Strom I um 90° nach.
4. Deshalb müssen auch die Spannungen U_R und U_C um 90° phasenverschoben sein.

Spannung

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{U_C}{U}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{U_R}{U}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{U_C}{U_R}$$

Widerstand

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{X_C}{Z}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{X_C}{R}$$

Leistung

Leistungsdreieck

$$S = \sqrt{P + Q_C^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{Q_C}{S}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q_C}{P}$$

RL - PARALLELSCHALTUNG

Schaltung

1. Am Wirkwiderstand R und an der Induktivität L liegt die gleiche Spannung U. an.
2. Durch R fließt der Strom I_R. Er liegt mit U in Phase.
3. Durch X_L fließt der Strom I_L. Er eilt U um 90° nach.
4. Deshalb müssen auch die Ströme I_R und I_L um 90° phasenverschoben sein.

Stromverhalten, Spannungsverhalten

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2$$

$$\Leftrightarrow I^2 = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{I_L}{I}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{I_R}{I}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{I_L}{I_R}$$

Leitwertverhalten

Bestimmung über Ohmsches Gesetz

$$G = \frac{I_R}{U} = \frac{1}{R}$$

$$B_L = \frac{I_L}{U} = \frac{1}{X_L}$$

$$Y = \frac{1}{U} = \frac{1}{Z}$$

Bestimmung über geometrische Addition

$$Y^2 = G^2 + B_L^2$$

$$\Leftrightarrow Y = \sqrt{G^2 + B_L^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{G}{Y}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{B_L}{Y}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{B_L}{G}$$

Leistungsverhalten

$$P = U \cdot I_R$$

$$Q_L = U \cdot I_L$$

$$S = U \cdot I$$

$$S^2 = P^2 + Q_L^2$$

$$\Leftrightarrow S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{P}{S}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{Q_L}{S}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q_L}{P}$$

RLC - PARALLELSCHALTUNG

Schaltung

1. Bei einer RLC-Reihenschaltung wird die Spannung I als Bezugsgröβe gewählt.
2. Der Strom I_R liegt mit der Spannung U in Phase.
3. Der Strom I_L eilt dem Strom I um $90°$ nach.
4. Der Strom I_C eilt dem Strom I um $90°$ voraus.
5. Die Phasenverschiebung zwischen I_C und I_L beträgt $180°$, das heiβt, die beiden Spannungen sind entgegengesetzt gerichtet.

Strom

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{I_L - I_C}{I}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{I_R}{I}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{I_L - I_C}{I_R}$$

Leitwert

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{B_L - B_C}{Y}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{G}{Y}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{B_L - B_C}{G}$$

Leistung

$$S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{Q_L - Q_C}{S}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q_L - Q_C}{P}$$

RLC - REIHENSCHALTUNG

Schaltung

1. Bei einer RLC-Reihenschaltung wird der Strom I als Bezugsgröβe gewählt.
2. Die Spannung U_R liegt mit dem Strom I in Phase.
3. Die Spannung U_L eilt dem Strom I um $90°$ vor.
4. Die Spannung U_C eilt dem Strom I um $90°$ nach.
5. Die Phasenverschiebung zwischen U_L und U_C beträgt $180°$, das heiβt, die beiden Spannungen sind entgegengesetzt gerichtet.

Spannung

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{U_L - U_C}{U}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{U_R}{U}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{U_L - U_C}{U_C}$$

Widerstand

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{Z}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Leistung

$$S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{Q_L - Q_C}{S}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q_L - Q_C}{P}$$

CLOUD COMPUTING

NIST Definition

Cloud computing is a model for enabling ubiquitous, convenient, and on-demand network access to a shared pool of configurable computing resources—such as networks, servers, storage, applications, and services— that can be rapidly provisioned and released with minimal management effort or service provider interaction. This model shifts IT from a capital- intensive investment to a flexible, service-oriented approach.

Characteristics of the Cloud

- On-demand self-service

  Consumers can independently provision computing resources such as virtual machines, storage, or network capacity whenever needed. Provisioning is automated and does not require direct interaction with the cloud provider, enabling faster deployment and experimentation.

- Broad network access

  Cloud services are available over the network and accessed through standard protocols. This promotes use across heterogeneous client platforms, including mobile devices, laptops, workstations, and thin clients, supporting modern distributed and remote work environments.

- Resource pooling

  The provider pools computing resources to serve multiple consumers using a multi-tenant model. Physical and virtual resources are dynamically assigned and reassigned according to demand. Customers generally do not know the exact

physical location of resources, but may specify location at a regional or data-center level. Pooled resources include CPU, memory, storage, and network bandwidth.

- Rapid elasticity

  Capabilities can be elastically scaled up or down, often automatically, in response to workload demand. To consumers, available resources may appear unlimited, allowing applications to handle sudden spikes in traffic without manual intervention.

- Measured service

  Cloud systems automatically monitor, control, and optimize resource usage through metering mechanisms. Usage is measured at an appropriate level (e.g., storage used, compute hours, network traffic), enabling pay-per-use, chargeback, or showback models with transparency for both provider and consumer.

As-a-Service Models

As-a-Service refers to delivering IT capabilities as managed services over the cloud. Instead of owning and maintaining infrastructure or software, organizations consume services provided and operated by third parties. The three primary service models differ in how responsibility is shared between provider and consumer: Infrastructure as a Service (IaaS), Platform as a Service (PaaS), and Software as a Service (SaaS).

Platform as a Service (PaaS)

PaaS provides a complete development and deployment environment in the cloud, abstracting infrastructure concerns such as servers, operating systems, and middleware.

Development teams can build, test, deploy, and scale applications without managing the underlying infrastructure, allowing them to focus on code, application logic, and innovation.

PaaS often acts as an internal platform offering APIs, development tools, managed databases, CI/CD pipelines, documentation, and support services, forming a key pillar of digital and organizational transformation.

Infrastructure as a Service (IaaS)

- IaaS delivers virtualized computing resources that replace traditional on-premises hardware.
- The cloud provider manages physical infrastructure such as servers, storage, networking, and data centers.
- Organizations retain control over operating systems, middleware, applications, and configurations.
- Resources are managed through APIs or web-based dashboards, enabling automation and infrastructure-as-code practices.
- IaaS is the most flexible cloud service model and is well suited for workloads requiring customization, migration of legacy systems, or granular control over infrastructure.

Software as a Service (SaaS)

SaaS delivers fully functional applications over the internet, eliminating the need to install, manage, or maintain software locally.

The provider is responsible for updates, patches, security, and availability, while customers focus solely on usage.

SaaS applications typically use a multi-tenant architecture to isolate customer data and are commonly offered through subscription or usage-based pricing models.

Private Cloud

A private cloud provides cloud services exclusively to a single organization, either on-premises or hosted by a third party.

It is often chosen by organizations that cannot use public clouds due to:

- Strict security policies
- Regulatory or compliance requirements
- Data sovereignty or latency constraints

Private Cloud Aspects

- Security

  Data and applications remain within the organization's control, making private clouds suitable for sensitive or regulated workloads.

- Control and customization

  Infrastructure can be tailored to specific enterprise standards, performance requirements, and security policies.

- Cost considerations

  While operational costs may be lower long-term, private clouds require significant upfront capital investment and ongoing maintenance.

- Scalability limitations

  Scaling resources requires planning and procurement, making elasticity more limited than in public clouds.

Public Cloud

A public cloud is owned and operated by a third-party provider and delivers shared computing resources to multiple customers over the internet. Resources are provisioned automatically through self-service portals and APIs, enabling rapid deployment and global scalability.

Public Cloud Aspects

- Scalability and elasticity

  Near-unlimited resources allow organizations to scale workloads dynamically based on demand.

- Cost efficiency

  Low upfront costs and pay-as-you-go pricing reduce capital expenditure.

- Shared responsibility

  Providers manage infrastructure security, while customers remain responsible for data, applications, and access control.

Hybrid Cloud

A hybrid cloud combines private and public cloud environments, allowing workloads and data to move between them as business needs change.

This model supports flexibility, cost optimization, regulatory compliance, and gradual cloud migration while maintaining a unified operational model.

6 Rs of Cloud Migration

- Rehosting

  Also known as lift-and-shift, this approach migrates applications with minimal or no code changes. It is fast but does not fully leverage cloud-native

capabilities.

- Replatforming

  Introduces limited optimizations to better utilize cloud services while keeping the core architecture unchanged.

- Repurchasing

  Replaces existing applications with cloud-native SaaS alternatives, often improving efficiency but increasing vendor dependency.

- Refactoring / Re-architecting

  Redesigns applications to be cloud-native, often using microservices, containers, and managed services. This approach delivers the greatest long-term benefits but requires significant time and expertise.

- Retiring

  Decommissions applications that no longer provide business value, reducing complexity and operational costs.

- Retaining

  Keeps certain workloads on existing infrastructure due to security, compliance, latency, or cost considerations, commonly used during long-term hybrid cloud strategies.

DATA WAREHOUSE

Schema

A schema defines the structure of data, including fields or columns, constraints, and the relationships between them. It serves as a blueprint for organizing data, outlining how information is arranged and connected within a system. In the context of databases or data models, a schema establishes the rules and format for storing and accessing data.

Data Type

A data type specifies the nature of data, such as simple types like number, string, date, or float, and complex types like array, struct, or map. It defines the kind of values that can be stored in a field, determining how data is processed and interpreted. Data types are fundamental for ensuring data integrity and enabling appropriate operations on stored information.

Metadata

Metadata provides additional information about data, including descriptions, functional fields, and authorship details. It includes technical information such as when data was created, last modified, and the context in which it exists. Metadata acts as a dictionary or guide, offering crucial details that help users understand and manage the primary data effectively.

Data formats

- Structured

  Highly organized and fits into a predefined model or schema. It typically includes data in tables with rows and columns, such as relational databases.

Structured data is easily queryable and suitable for analysis using SQL or other structured query languages.

- Semi-structured

  Contains some structure but doesn't conform to a rigid schema. It might contain tags, metadata, or other markers that provide some level of organization. Examples include JSON, XML, and NoSQL databases. Although it doesn't adhere to a strict schema, it has some level of self-describing structure.

- Unstructured

  Lacks a predefined data model or organization. It is raw and doesn't fit neatly into databases or spreadsheets. Examples include text documents, images, videos, social media posts, emails, and audio files. Analyzing unstructured data often involves techniques like natural language processing or machine learning.

Data Warehouse

Definition

A data warehouse is a centralized repository that stores large volumes of structured and integrated data from multiple sources. It is designed to support business intelligence, reporting, and data analysis by providing a consolidated view of organizational data.

Bottom-Up Approach to Building a Data Warehouse

The Bottom-up approach is a method for constructing a data warehouse that starts with individual, department-specific data marts and integrates them into a comprehensive enterprise-wide data warehouse.

Definition

The Bottom-up approach begins by identifying and developing small, targeted data marts that serve the immediate needs of specific business units or departments. These data marts are built incrementally and can be integrated later into a larger, more comprehensive Enterprise Data Warehouse or EDW.

Instructions

1. Start Small

   Begin by analyzing the data requirements of individual business units or departments.

2. Develop Targeted Marts:

   Create Data Marts that are specific to a single area of the organization. This allows for quick delivery of insights and "quick wins" for specific teams.

3. Implement Incrementally:

   Build and deploy these data marts one at a time, focusing on immediate needs.

4. Integrate Over Time:

   As more data marts are created, they can be gradually integrated to form a larger, more holistic data warehouse. This approach allows for faster implementation and is more agile, as changes can be made to individual marts without disrupting the entire system.

Top-Down Approach to Building a Data Warehouse

The Top-down approach is a strategic methodology for building a data warehouse that starts with a comprehensive, enterprise-wide view and then develops smaller, integrated components.

Definition

The Top-down approach begins with a strategic and comprehensive methodology that considers the entire organization's data requirements. It involves building a centralized Enterprise Data Warehouse or EDW first, which then serves as the foundation for developing various data marts for different departments.

Instructions

1. Strategic Planning:

   Begin with a strategic plan that considers the data needs of the entire organization.

2. Build the Core:

   Design and build a centralized Enterprise Data Warehouse or EDW that provides a holistic view of the company's data.

3. Develop Marts:

   Create data marts from the central EDW to serve the specific needs of different departments.

4. Ensure Consistency:

   This approach ensures data consistency across the organization by centralizing the data model and integration processes. While it provides a comprehensive view, it can be more rigid and time-consuming to implement.

Build approach FEELT TABELL
Operation Data Store or ODS

Designed to integrate and consolidate data from various operational systems in near real-time. ODS focuses on transactional data and serves as an interim repository for data before it gets loaded into the data warehouse.

Enterprise Data Warehouse or EDW:

A comprehensive and centralized repository that integrates data from various sources across an entire organization. It serves as the single source of truth for business intelligence and decision-making.

Data Mart

A smaller, more department- specific subset of an Enterprise Data Warehouse. It's designed to serve the needs of a particular business unit, department, or user group. Data marts are optimized for specific business functions or departments, allowing for faster query performance and analysis.

Preparation of a data warehouse

- Data Integration

  Process of bringing together data from multiple sources and transforming it into a single, consistent format.

- Data Modeling

  Design the structure of the data warehouse. This includes defining the entities, attributes, and relationships between the entities.

- Data Loading

  Identify and correct errors and inconsistencies in the data. This is an important step in the data warehousing process, as it ensures that the data is accurate and reliable.

Storage and analysis of a data warehouse

- Data Loading

  Populate the data warehouse with data from the source systems. This can be done on a batch or real-time basis.

- Metadata

  Describe the structure of the data warehouse, the data types, and the relationships between the entities.

- Data Access and Reporting

  Data access and reporting tools allow users to query the data warehouse and generate reports. These tools are typically used by business analysts, data scientists, and other decision-makers.

Fact table

A Fact table in a data warehousing data model consists of one or more numeric facts of importance for a business.

Remark

Facts must be consistent with the granularity.

Types of facts

- Additive

  Can be summed up through all of the dimensions in the fact table.

- Semi-Additive

  Can be summed up for some of the dimensions in the fact table, but not the others.

- Non-Additive

  Cannot be summed up for any of the dimensions present in the fact table.

Features of a fact table

The level of detail available in a given fact table as well as to the level of detail provided by a star schema.

It is usually given as the number of records per key within the table. In short, the grain of the fact table is the grain of the star schema.

In a Data Warehouse, dimensions represents all points of interest for business and an entry point for fact tables.

And once in your model and can be reused multiple times with different fact tables.

Consider a model containing multiple fact tables, representing different data marts. Now look for a dimension that is common to these facts tables.

Factless table captures the many-to-many relationship between dimensions but contains no numeric or text facts.

They are often used to record events or coverage information.

Normalisation

Normalization is a process in database design that organizes data into separate tables to minimize redundancy and improve data integrity.

The purpose of normalization is to ensures that each piece of data is stored in only one place, reducing the risk of inconsistencies.

Denormalisation

Denormalization involves combining related data from multiple tables into a single table to improve query performance.

The purpose of denormalization is to speeds up queries by reducing the need for joins.

Star schema

Star schema is a data warehouse schema where there is only one “fact table” and many denormalized dimension tables.

Fact table contains primary keys from all the dimension tables and other numeric columns columns of additive, numeric facts.

Grain of a star schema

In Data warehousing, grain refers to the level of detail available in a given fact table as well as to the level of detail provided by a star schema.

It is usually given as the number of records per key within the table. In general, the grain of the fact table is the grain of the star schema.

Snowflake schema

Snowflake schema contain normalized dimension tables in a tree like structure with many nesting levels.

Snowflake schema is easier to maintain but queries require more joins because of nested levels.

Data Warehouse Processing Architecture

- The scalability of the solution should be demonstrated by the ability to process a huge volume of data and stream it to different destinations, at high speed, in various formats. The data stream should be processed and presented in the required format, at the right time and location, with the minimum impact to the existing infrastructure.

- The architecture should be extensible; new functionality can be implemented in an existing service without regression or alteration. Newer technologies, such as artificial intelligence, can be implemented in an existing service by extending the service's APIs.
- Data security is a critical aspect of the data governance strategy. Data security controls at the source include establishing data access controls and data encryption. Data security controls at the perimeter include data security policies and monitoring access to the data.
- It should be simple and straightforward, and users should be able to work with the data in an efficient and effective manner.

Data Lake

A data lake is a central repository that stores large volumes of raw and unprocessed data from various sources. It typically uses a flat architecture, storing data in its native format, such as CSV, JSON, or Parquet.

Data lakes offer scalability and flexibility, allowing organizations to collect and store vast amounts of data for future processing and analysis.

Data Lake use cases

- Data exploration and analytics

  Data scientists and analysts can explore and analyze diverse datasets within the data lake. This supports ad-hoc queries, data discovery, and the extraction of valuable insights.

- Big Data processing

  Well-suited for processing big data workloads, including large-scale batch processing and parallel data processing. This is essential for applications in

industries like finance, healthcare, and e-commerce.

- Machine Learning and AI

  Provide a rich source of data for training machine learning models and implementing artificial intelligence applications. The diverse and voluminous data in the lake can be used to improve model accuracy and robustness.

- Log and Event data

  Store logs, events, and other streaming data. This is crucial for monitoring system performance, tracking user activities, and troubleshooting issues.

- IoT Storage

  Internet of Things or IoT devices generate vast amounts of data. Data lakes are ideal for storing and analyzing this data to gain insights into device behavior, predict maintenance needs, and optimize operations.

Datalakehouse

Datalakehouse, also known as a unified analytics platform, is an evolution of the datalake concept.

It combines the strengths of a datalake with the capabilities of a data warehouse.

A datalakehouse provides a unified and structured view of data by introducing schema enforcement and indexing on top of the raw data stored in the datalake.

It enables organizations to perform both batch and real-time analytics on the same platform, offering a more streamlined and efficient data processing and analysis experience.

Data LakeHouse use cases

- Analyze data near of real-time

Can accommodate streaming data alongside batch processing. This is beneficial for applications such as fraud detection, IoT analytics, and monitoring.

- Unified analytics

  Allow organizations to perform unified analytics by integrating structured and unstructured data in a single platform. This supports comprehensive business intelligence and analytics, providing a holistic view of the data.

- Operation Analytics

  Can support operational analytics by integrating data from sensors, machines, and production systems. This facilitates real-time monitoring, predictive maintenance, and process optimization.

- Advanced analytics and ML

  Enable organizations to apply advanced analytics and machine learning algorithms to their data. The unified architecture simplifies data preparation and model training by leveraging both structured and unstructured data.

- 360 degree view

  can consolidate data from various touchpoints, providing a 360-degree view. This supports personalized marketing, customer service, and experience optimization.

Data Lake features

- ACID Transactions

  Delta Lake provides ACID (Atomicity, Consistency, Isolation, and Durability) transactions, which ensures that data updates are always consistent and

complete. This makes it well-suited for critical workloads where data integrity is paramount.

- Scalable Metadata

  Delta Lake's metadata is designed to scale to petabyte-scale tables with billions of partitions and files. It uses a tiered storage approach to efficiently store and manage metadata across multiple levels.

- Time Travel

  Delta Lake enables time travel, allowing users to query and analyze historical versions of data as they evolve over time. This is particularly useful for auditing purposes, identifying data lineage, and performing rollbacks.

- Unified Batch or Streaming

  Delta Lake supports both batch and streaming workloads, providing a unified table format for both types of data processing. This eliminates the need to manage separate tables for batch and streaming data, simplifying data management and processing.

- Schema Evolution or Enforcement

  Delta Lake supports schema evolution, allowing users to add or modify table schema without disrupting existing data. It also provides schema enforcement, ensuring that data always adheres to the defined schema.

- Audit History

  Delta Lake maintains a detailed audit history of all data changes, providing a comprehensive record of data lineage and modifications. This is valuable for auditing purposes and identifying data quality issues.

Data Visualisation

Data visualization is the representation of information and data using charts, graphs, maps, and other visual tools.

These visualizations allow us to easily understand any patterns, trends, or outliers in a data set. Data visualization also presents data to the general public or specific audiences without technical knowledge in an accessible manner.

- Storytelling

  People are drawn to colors and patterns in clothing, arts and culture, architecture, and more. Data is no different—colors and patterns allow us to visualize the story within the data.

- Accessibility

  Information is shared in an accessible, easy-to-understand manner for a variety of audiences.

- Visualize relationships

  It's easier to spot the relationships and patterns within a data set when the information is presented in a graph or chart.

- Exploration

  More accessible data means more opportunities to explore, collaborate, and inform actionable decisions.

Data transformations

- Filtering

  Selecting a subset of rows or columns based on specified criteria.

- Sorting

Arranging data in a specific order, often based on one or more columns.

- Aggregation

  Combining multiple rows into a single summary row, usually involves mathematical operations like sum, average, count, etc.

- Joining

  Combining data from multiple sources based on a common key or attribute. • Mapping: Replacing values in a column with corresponding values from a lookup table.

- Derivation

  Creating new columns or calculations based on existing data.

- Normalization

  Ensuring data consistency by organizing it into a standardized format, often involves breaking down data into smaller, more manageable tables.

- Cleaning

  Handling missing or incorrect data, dealing with duplicates, and ensuring data quality.

- Validation

  Checking data integrity and accuracy to ensure it meets predefined standards.

- Data Type Conversion

  Converting data from one type to another, such as changing a string to a date or a number.

- Splitting

  Breaking down a column into multiple columns, usually when dealing with composite data.

- Concatenation

  Combining data from multiple columns into a single column.

- Duplication Removal

  Eliminating duplicate records from the dataset.

- Pivoting or Unpivoting

  Transforming data from a wide format to a long format (or vice versa)

- Standardization

  Ensuring consistency in units, formats, or naming conventions across the dataset.

- Enrichment

  Adding additional information to the data from external sources.

- Masking or Anonymization

  Protecting sensitive information by replacing, encrypting, or anonymizing certain data.

- Splitting by Business Logic

  Dividing data into subsets based on business rules or criteria.

Aggregations

Aggregations in the context of databases and data analysis involve the grouping and summarization of data. Here is a list of common aggregation functions used in SQL and other data analysis tools:

- Count:

  Counts the number of rows in a result set

- Min:

  Finds the minimum value in a column

- Max:

  Finds the maximum value in a column

- Sum:

  Calculates the sum of values in a numeric column

- Avg:

  Computes the average value of a numeric column

- Count Distinct:

  Count without duplicate values from a result set

Slowly Changing Dimension

In the context of data warehousing and database design, Slowly Changing Dimensions (SCD) refer to the way in which historical data is managed when there are changes to the dimension attributes over time.

There are several types of Slowly Changing Dimensions, commonly denoted as SCD Type 1, SCD Type 2, and SCD Type 3.

SCD Type 1

In SCD Type 1, when a change occurs, the existing dimension record is simply updated with the new data. There is no tracking of historical values, so only the current information is retained.

SCD Type 2

In SCD Type 2, a new record is added to the dimension table for each change. The original record is marked as inactive, and the new record contains the updated information. This way, a history of changes is preserved.

SCD Type 3

In SCD Type 3, a limited amount of historical data is maintained. Instead of creating a new record for each change, only certain attributes are updated, and additional columns are added to the table to capture this limited history.

SCD Type 4

SCD Type 4 is a hybrid approach that combines elements of both SCD Type 1 and SCD Type 2. It typically involves creating a separate table to store historical changes while maintaining a current record in the main dimension table.

ELT

ELT is a variation of the Extract, Transform, Load (ETL), a data integration process in which transformation takes place on an intermediate server before it is loaded into the target. In contrast, ELT allows raw data to be loaded directly into the target and transformed there.

With an ELT approach, a data extraction tool is used to obtain data from a source or sources, and the extracted data is stored in a staging area or database. Any required business rules and data integrity checks can be run on the data in the staging area

before it is loaded into the data warehouse. All data transformations occur in the data warehouse after the data is loaded.

ELT Process

- A more recent technology made possible by high-speed, cloud-based servers:

  ELT is a relatively new technology made possible because of modern, cloud-based server technologies. Cloud-based data warehouses offer near-endless storage capabilities and scalable processing power. For example, platforms like Amazon Redshift and Google Big Query make ELT pipelines possible because of their incredible processing capabilities.

- Ingest anything and everything as the data becomes available:

  ELT paired with a data lake lets you immediately ingest an ever-expanding pool of raw data as it becomes available. There's no requirement to transform the data into a special format before saving it in the data lake.

ELT Process

- Transforms only the data you need:

  ELT transforms only the data required for a particular analysis. Although it can slow down the process of analyzing the data, it offers more flexibility because you can transform the data in different ways on the fly to produce different types of metrics, forecasts, and reports. Conversely, with ETL, the entire ETL pipeline and the structure of the data in the OLAP warehouse may require modification if the previously decided upon structure doesn't allow for a new type of analysis.

- ELT has more specific use cases than ETL:

It's important to note that the tools and systems of ELT are still evolving, so they're not as reliable as ETL paired with an OLAP database. Although it takes more effort to set up, ETL provides more accurate insights when dealing with massive pools of data. Also, ELT developers who know how to use ELT technology are generally more difficult to find than ETL developers.

NATURAL LANGUAGE PROCESSING

Natural Language Processing, NLP

Definition

Natural Language Processing is a subfield of artificial intelligence that focuses on the interaction between computers and human languages. The goal of NLP is to enable computers to understand, interpret, and generate human language in a way that is both meaningful and useful.

CODES

Code

Definition

Der Code ist eine Vorschrift für die Zuordnung der Zeichen eines Zeichenvorrats zu denjenigen eines anderen Zeichenvorrats.

Ein Code ist eine eindeutige Zuordnung zwischen zwei Wortmengen. $(f : A_1^m \rightarrow A_2^n)$

Eigenschaften eines Code

Ein Code kann folgende Eigenschaften besitzen:

- Stellenzahl:

  Binäre Codes (als Bildmenge) werden als Bitkombinationen realisiert. Die Stellenzahl n des Codes entspricht der Anzahl von Bits, die für die Kodierung vorgesehen ist. Die Zahl n definiert damit die Informationsbreite des Codes.

- Bewertbarkeit:

  Die Bewertbarkeit gibt an, ob jede Stelle eine feste Wertigkeithat.

- Gewicht:

  Als Gewicht g eines Codewortes wird die Anzahl der Stellen mit dem Wert "1" bezeichnet

Hamming-Code

Definition

Der Hamming-Code ist ein linearer fehlerkorrigierender Blockcode, der in der digitalen Signalverarbeitung und der Nachrichtentechnik zur gesicherten Datenübertragung oder Datenspeicherung verwendet wird.

Hamming-Distanz

Unter dem Hamming-Abstand eines Codes versteht man das Minimum aller Abstände zwischen verschiedenen Wörtern innerhalb des Codes.

GRUNDLAGEN DER DIGITALTECHNIK

Information

Definition

Information ist der Vorgang Wissen zu übertragen.

Wissen

Definition

Wissen sind gespeicherte Daten.

Daten

Definition

Daten sind räumliche oder zeitliche Folgen von physikalischen Signalen oder Folgen von Bits. Daten können, oder auch nicht, Informationen enthalten, die ihnen eine Bedeutung verleihen.

Information lässt sich mittels Daten transportieren und speichern. Wo die Bedeutung klar ist, werden die Begriffe Daten und Information häufig synonym verwendet.

Ebenen des Verstehens

Um etwas zu verstehen zu können wird folgende Taktik angewendet.

- Syntax: Grammatik, Ortographie

  Die Syntax gibt an wie Daten angeschrieben werden müssen.

- Semantik: Bedeutung, Sinn

  Die Semantik gibt an was die Bedeutung der Daten ist.

- Pragmatik

Die Pragmatik gibt an was durch die Vermittlung der Daten nun geschehen soll.

Informationstragende Einheiten

1. Bit

   Die kleinst mögliche Einheit der Information ist das Bit. Bei einem Bit sind nur 2 Zustände möglich.Diese sind 0 und 1.

2. Byte

   8 Bits bilden ein Byte.

3. Wort

   16 Bits bilden ein Wort.

4. Doppelwort, zwei Wörter

   32 Bits oder 2 Bytes bilden zwei Wörter oder auch ein Doppelwort.

Bemerkung

Siehe Vorsilben, für eine Tabelle der Binären-Vorsilben.

Diese Binären-Vorsilben wurden im Jahre 1998 von der IEC (International Electronical Commission) festgelegt, da vorher die dezimalen Vorsilben benutzt wurden um Binäremengen zu beschreiben was einen Fehler mit sich brachte.

Quantisieren

Die physikalische Welt besteht aus analogen Signalen oder Werten. Da die analogen Signale und Werte kontinuierlich und extrem präzise sind, setzt dies eine Quantisierung voraus.

Die analogen Signale und Werte werden also unterteilt in brauchbare und leicht zu

verarbeitbare Größen.

Eine Quantisierung kann in Wertebereich und im Zeitbereich stattfinden.

ADU, Analog Digital Umsetzer

Die Quantisierung findet mit einem sogenannten ADU statt.

Eine ADU hat eine angegebene Präzision diese wird in Bits gemessen. Diese Präzision wird als Wortlänge bezeichnet.

Hieraus ergibt sich der Wertebereich der Digitalisierung.

Auflösung eines ADU's

Sei x die Wortlänge eines bestimmten ADU's, also:

$$x - Bit - ADU$$

Die Anzahl an Bits gibt die Anzahl von möglichen Werten pro Einheit an, in einer Zweier Potenz.

Es gilt: 2^x - Anzahl an Werten oder Stufenhöhe für den ADU.

Linearität des ADU's

Die Linearität einer Messung eines ADU's gibt an wie gleich die Messungen von einander sind. Eine perfekte lineare Messung ist gewollt, sprich äquidistante Stufenhöhen. Das heißt die Messungen sind alle gleich Groß, keine ist größer oder kleiner als eine andere.

Genauigkeit eines ADU's

Die Genauigkeit eines ADU's setzt sich aus der Stufenhöhe und dem Linearitätsfehler zusammen.

Abtastrate eines ADU's

Die Abtastrate eines ADU's gibt an wie oft pro Zeiteinheit eine Messung durchgeführt wird.

Kenngrößen des Signals

Das Signal wird durch Periodendauer und Frequenz definiert.

Kenngrößen der Abtastung

Die Abtastung wird durch die Abtastpunkte und die Fensterdauer definiert.

Abtastfrequenz, Tastfrequenz, Nyquist-Frequenz

Aus der definition der Abtastfrequenz ergibt sich:

Formel

$$f_{tast} = \frac{N}{T}$$

wobei:

$$N,\ Anzahl\ der\ Abtastpunkte$$
$$T,\ Fensterdauer$$

Abtastintervall, Tastintervall

Aus der definition der Abtastintervall ergibt sich:

Formel

$$t_{tast} = \frac{T}{N}$$

wobei:

$$N,\ Anzahl\ der\ Abtastpunkte$$
$$T,\ Fensterdauer$$

Aliasing, Aliasing-Effekt

Aliasing ist ein Fehler der auftreten kann, bei dem ein Signal nicht eindeutig wieder rekonstruiert werden kann. Das geschieht wenn im abzutastendem Signal ein Signal vorkommt, das höher ist als die halbe Abtastfrequenz.

Shannon Theorem

Ein Signal kann aus seinen Abtastwerten nur dann eindeutig rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz mehr als doppelt so groß ist als die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

Vermeidung von Aliasing

Der Aliasing-Effekt kann vermieden werden durch:

- Erhöhung der Abtastfrequenz über das Doppelte der im Signal vorkommenden Frequenzen.
- Analoge Tiefpass-Filterung des Signals vor der Abtastung.

Maximale Quantisierungsfehler

Der maximale Quantisierungsfehler F_{Qmax} ergibt sich aus der Intervallgröße des analogen Signals, sowie dem Wertebereich des digitalen Signals und technisch bedingten Ansprechschwellen.

Unsicherheit im Quantisierungsfehler

Die Unsicherheit eines Quantisierungsfehler gibt an wie groß der Fehler einer Quantisierung ist.

Die Unsicherheit wird oft mit dem Buchstaben δ, angeben.

Formeln

Sei das analoge Signal in den Grenzen $S_{min} < S_{max}$ gegeben. Das digitale Signal verfüge über N Werte, dann ergibt sich die

- Intervallbreite

$$\Delta S_i = \frac{S_{max} - S_{min}}{N - 1}$$

- Maximalerquantisierungsfehler ohne Unsicherheit

$$F_{Qmax} = \pm\frac{1}{2} \cdot \Delta S_i$$

- Maximalerquantisierungsfehler mit Unsicherheit

$$F_{Qmax} = F'_{Qmax} \pm \frac{1}{2} \cdot \delta$$

Informaionsverarbeitungsprozess

Hier ist ein Schema des Informaionsverarbeitungsprozesses.

Selbstbezüglichkeit

Die Selbstbezüglichkeit ist die Eigenschaft eines Systems, sich auf die Art und Weise zu steuern wie es betrieben wird.

Datenverarbeitung

Alle Daten können mittels Zahlen repräsentiert werden.

GRUNDLAGEN DER INFORMATIONS-THEORIE

Information

Definition

Information ist eine räumliche oder zeitliche Abfolge physikalischer Signale, die mit bestimmten Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten auftritt. Sie lässt sich als Folge von Bits, meistens in 0 und 1 angegeben, darstellen und kann unter drei hermeneutischen Ebenen betrachtet werden:

- Syntax: die formale Struktur und Darstellung
- Semantik: die Bedeutung der Information
- Pragmatik: die Wirkung oder der Nutzen im Kontext

Informationsgehalt

Der Informationsgehalt I eines Ereignisses mit Eintrittswahrscheinlichkeit p ist definiert als:

$$I = -\log_2 p \quad [\text{Bit}]$$

Diese logarithmische Maßzahl erfüllt drei wesentliche Eigenschaften:

1. Additivität:

   Bei unabhängigen Ereignissen addieren sich die Informationsgehalte

2. Stetigkeit:

   Kleine Änderungen in p führen zu kleinen Änderungen in I

3. Normierung:

Ein Bit entspricht der Information eines gleichwahrscheinlichen Ja/Nein-Entscheids

Entropie

Definition

Die Entropie H einer diskreten Quelle Q wird definiert als der Erwartungswert des Informationsgehalts ihrer Zeichen:

$$H(Q) = \sum_{s \in Q} p(s) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p(s)} \right)$$

Wobei: $p(s)$ die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Symbols s. Die Basis 2 des Logarithmus gibt die Einheit "Bit" pro Zeichen. Für $p(s) = 0$ wird der Beitrag als 0 definiert.

Bedeutung der Entropie

Die Entropie quantifiziert die mittlere Unsicherheit über die nächste Nachricht einer Quelle. Sie ist maximal, wenn alle Zeichen gleichwahrscheinlich sind, und minimal (null), wenn ein Zeichen sicher eintritt.

Kompressionsprinzip

Die Entropie stellt eine fundamentale untere Schranke für die verlustlose Kompression dar: Kein Code kann im Mittel weniger als H Bit pro Zeichen benötigen. Effiziente Kompressionsverfahren weisen häufigen Zeichen kurze Codewörter und seltenen Zeichen längere Codewörter zu.

Shannon-Fano Kodierung

Die Shannon-Fano-Kodierung ist ein verlustloser Kompressionsalgorithmus. Das Ziel der Shannon-Fano-Kodierung ist die Zuordnung von optimalen Präfixcodes zu

Symbolen basierend auf ihren Auftrittswahrscheinlichkeiten. Häufig auftretende Symbole erhalten kurze Codes, seltene Symbole längere Codes.

Huffman-Kodierung

Die Huffman-Kodierung ist ein verlustloser Kompressionsalgorithmus. Das Ziel der Huffman-Kodierung ist die Zuordnung von optimalen Präfixcodes zu Symbolen basierend auf ihren Auftrittswahrscheinlichkeiten. Häufige Symbole erhalten kurze Bitfolgen, seltene Symbole längere Bitfolgen, wodurch die durchschnittliche Codelänge minimiert wird.

Optimalität des Huffman-Verfahren

Theorem

Der Huffman-Algorithmus erzeugt einen optimalen Präfixcode, das heißt einen Code mit minimaler durchschnittlicher Codewortlänge.

Beweis

Für zwei Symbole erzeugt der Huffman-Algorithmus zwei Codewörter der Länge 1 (z.B. '0' und '1'). Dies ist offensichtlich optimal, da kürzere Codewörter nicht möglich sind.

Annahme: Der Huffman-Algorithmus erzeugt für jedes Alphabet mit k Symbolen ($k \leq n$) einen optimalen Präfixcode.

Seien a_x und a_y die beiden Symbole mit den kleinsten Wahrscheinlichkeiten. Der Huffman-Algorithmus kombiniert diese zu einem neuen Symbol z mit $p_z = p_x + p_y$. Wir erhalten ein reduziertes Alphabet mit n Symbolen.

Nach Induktionsvoraussetzung erzeugt der Huffman-Algorithmus für das reduzierte Alphabet mit n Symbolen einen optimalen Präfixcode C'.

Aus C' konstruieren wir C, indem wir das Codewort für z durch zwei Codewörter ersetzen:

$$c_x = c_z \parallel 0 \quad \text{und} \quad c_y = c_z \parallel 1$$

Die durchschnittliche Länge ändert sich um:

$$L(C) = L(C') + p_x + p_y$$

Lemma 1

In jedem optimalen Präfixcode für das ursprüngliche Alphabet haben die beiden Symbole mit kleinsten Wahrscheinlichkeiten Codewörter maximaler Länge, und diese können so modifiziert werden, dass sie Geschwisterknoten im Codebaum sind.

Lemma 2

Wenn wir in C^* die beiden Symbole mit kleinsten Wahrscheinlichkeiten zu einem Symbol zusammenfassen, erhalten wir einen Code $C^{*'}$ für das reduzierte Alphabet mit:

$$L(C^{*'}) = L(C^*) - p_x - p_y$$

Da C' optimal für das reduzierte Alphabet ist:

$$L(C') \leq L(C^{*'}) = L(C^*) - p_x - p_y$$

Daraus folgt:

$$L(C) = L(C') + p_x + p_y \leq L(C^*)$$

Also kann C^* nicht besser sein als C.

Da der Huffman-Algorithmus einen Code erzeugt, der mindestens so gut ist wie jeder andere Präfixcode, ist er optimal.

$\square$

Struktureigenschaft optimaler Codes

Lemma

Es gibt einen optimalen Präfixcode, in dem die beiden Symbole mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten s_{n-1} und s_n denselben Vaterknoten haben und die längsten Codewörter besitzen.

Beweis

Sei T ein optimaler Codebaum für Q. In T gibt es mindestens zwei Blätter auf der tiefsten Ebene. Seien s_i und s_j zwei Blätter auf der tiefsten Ebene, die denselben Vaterknoten haben. Wir vertauschen s_n mit s_j und erhalten einen neuen Baum T'.

$$\begin{aligned} Z(T') - Z(T) &= p(s_n)k(s_j) + p(s_j)k(s_n) - p(s_j)k(s_j) - p(s_n)k(s_n) \\ &= (p(s_n) - p(s_j))(k(s_j) - k(s_n)) \end{aligned}$$

Da $p(s_n) \leq p(s_j)$ (weil s_n die kleinste Wahrscheinlichkeit hat), gilt $p(s_n) - p(s_j) \leq 0$. Da s_j auf der tiefsten Ebene liegt und s_n irgendein Blatt ist, gilt $k(s_j) \geq k(s_n)$, also $k(s_j) - k(s_n) \geq 0$

Somit:

$$(p(s_n) - p(s_j))(k(s_j) - k(s_n)) \leq 0$$

$Z(T') \leq Z(T)$, also ist T' mindestens so gut wie T. Durch iterative Anwendung können wir s_{n-1} und s_n an die tiefste Stelle mit gemeinsamem Vater bringen.

$\square$

Optimale Codeverfahren

- <u>Shannon-Fano-Codierung:</u>

  Top-down-Verfahren mit schrittweiser Teilung der Wahrscheinlichkeiten

- <u>Huffman-Codierung:</u>

Bottom-up-Verfahren durch wiederholtes Zusammenfassen der unwahrscheinlichsten Symbole

Der Huffman-Code erzeugt immer einen optimalen präfixfreien Code und erreicht eine mittlere Codewortlänge L, die die Entropiegrenze erfüllt: $H \leq L < H + 1$.

Quellencodierungssatz, Shannons erster Hauptsatz

Der Quellencodierungssatz besagt, dass eine Quelle mit Entropie H verlustlos mit durchschnittlich H Bits pro Zeichen kodiert werden kann, wenn Blockkodierung verwendet wird.

Effizienz und Quellenkodierungssatz

Die Effizienz eines Codes T ist definiert als $\mathrm{EFF}(T) = H(Q)/Z(T)$. Ein Code heißt ideal bei $\mathrm{EFF}(T) = 1$ und kompakt oder optimal, wenn keine andere Präfixcodierung eine kürzere mittlere Länge $Z(T)$ erreicht. Der fundamentale Quellenkodierungssatz von Shannon besagt, dass durch Blockcodierung (Kodierung mehrerer Zeichen zusammen) die Effizienz beliebig nahe an 1 gebracht werden kann: $\lim_{r\to\infty} \mathrm{EFF}(T^r) = 1$.

Grundlagen der Informationstheorie

Information

Definition

Information ist eine räumliche oder zeitliche Abfolge physikalischer Signale, die mit bestimmten Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten auftritt. Sie lässt sich als Folge von Bits, meistens in 0 und 1 angegeben, darstellen und kann unter drei hermeneutischen Ebenen betrachtet werden:

- **Syntax:** die formale Struktur und Darstellung
- **Semantik:** die Bedeutung der Information
- **Pragmatik:** die Wirkung oder der Nutzen im Kontext

Informationsgehalt

Der Informationsgehalt I eines Ereignisses mit Eintrittswahrscheinlichkeit p ist definiert als:

$$I = -\log_2 p \quad [\text{Bit}]$$

Diese logarithmische Maßzahl erfüllt drei wesentliche Eigenschaften:

1. **Additivität:**

   Bei unabhängigen Ereignissen addieren sich die Informationsgehalte

2. **Stetigkeit:**

   Kleine Änderungen in p führen zu kleinen Änderungen in I

3. **Normierung:**

   Ein Bit entspricht der Information eines gleichwahrscheinlichen Ja/Nein-Entscheids

Beispiel: Informationsgehalt berechnen ▼

Entropie

Definition

Die Entropie H einer diskreten Quelle Q wird definiert als der Erwartungswert des Informationsgehalts ihrer Zeichen:

$$H(Q) = \sum_{s \in Q} p(s) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p(s)} \right)$$

Wobei: $p(s)$ die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Symbols s. Die Basis 2 des Logarithmus gibt die Einheit "Bit" pro Zeichen. Für $p(s) = 0$ wird der Beitrag als 0 definiert.

Bedeutung der Entropie

Die Entropie quantifiziert die mittlere Unsicherheit über die nächste Nachricht einer Quelle. Sie ist maximal, wenn alle Zeichen gleichwahrscheinlich sind, und minimal (null), wenn ein Zeichen sicher eintritt.

Beispiel: Entropie berechnen ▼

Kompressionsprinzip

Die Entropie stellt eine fundamentale untere Schranke für die verlustlose Kompression dar: Kein Code kann im Mittel weniger als H Bit pro Zeichen benötigen. Effiziente Kompressionsverfahren weisen häufigen Zeichen kurze Codewörter und seltenen Zeichen längere Codewörter zu.

Shannon-Fano Kodierung

Die Shannon-Fano-Kodierung ist ein verlustloser Kompressionsalgorithmus. Das Ziel der Shannon-Fano-Kodierung ist die Zuordnung von optimalen Präfixcodes zu Symbolen basierend auf ihren Auftrittswahrscheinlichkeiten. Häufig auftretende Symbole erhalten kurze Codes, seltene Symbole längere Codes.

Beispiel: Shannon-Fano-Kodierung

Gegeben seien Symbole mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Symbol	Wahrscheinlichkeit	Code
A	0.4	00
B	0.3	01
C	0.2	10
D	0.1	11

Die durchschnittliche Codewortlänge beträgt: $0.4 \times 2 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 2 = 2.0$ Bit/Symbol

Huffman-Kodierung

Die Huffman-Kodierung ist ein verlustloser Kompressionsalgorithmus. Das Ziel der Huffman-Kodierung ist die Zuordnung von optimalen Präfixcodes zu Symbolen basierend auf ihren Auftrittswahrscheinlichkeiten. Häufige Symbole erhalten kurze Bitfolgen, seltene Symbole längere Bitfolgen, wodurch die durchschnittliche Codelänge minimiert wird.

Optimalität des Huffman-Verfahren

Theorem

Der Huffman-Algorithmus erzeugt einen optimalen Präfixcode, das heißt einen Code mit minimaler durchschnittlicher Codewortlänge.

Beweis

Für zwei Symbole erzeugt der Huffman-Algorithmus zwei Codewörter der Länge 1 (z.B. '0' und '1'). Dies ist offensichtlich optimal, da kürzere Codewörter nicht möglich sind.
Annahme: Der Huffman-Algorithmus erzeugt für jedes Alphabet mit k Symbolen ($k \leq n$) einen optimalen Präfixcode.
Seien a_x und a_y die beiden Symbole mit den kleinsten Wahrscheinlichkeiten. Der Huffman-Algorithmus kombiniert diese zu einem neuen Symbol z mit $p_z = p_x + p_y$. Wir erhalten ein reduziertes Alphabet mit n Symbolen.
Nach Induktionsvoraussetzung erzeugt der Huffman-Algorithmus für das reduzierte Alphabet mit n Symbolen einen optimalen Präfixcode C'.
Aus C' konstruieren wir C, indem wir das Codewort für z durch zwei Codewörter ersetzen:

$$c_x = c_z \parallel 0 \quad \text{und} \quad c_y = c_z \parallel 1$$

Die durchschnittliche Länge ändert sich um:

$$L(C) = L(C') + p_x + p_y$$

Lemma 1

In jedem optimalen Präfixcode für das ursprüngliche Alphabet haben die beiden Symbole mit kleinsten Wahrscheinlichkeiten Codewörter maximaler Länge, und diese können so modifiziert werden, dass sie Geschwisterknoten im Codebaum sind.

Lemma 2

Wenn wir in C^* die beiden Symbole mit kleinsten Wahrscheinlichkeiten zu einem Symbol zusammenfassen, erhalten wir einen Code $C^{*'}$ für das reduzierte Alphabet mit:

$$L(C^{*'}) = L(C^*) - p_x - p_y$$

Da C' optimal für das reduzierte Alphabet ist:

$$L(C') \leq L(C^{*'}) = L(C^*) - p_x - p_y$$

Daraus folgt:

$$L(C) = L(C') + p_x + p_y \leq L(C^*)$$

Also kann C^* nicht besser sein als C.
Da der Huffman-Algorithmus einen Code erzeugt, der mindestens so gut ist wie jeder andere Präfixcode, ist er optimal.

$\square$

Struktureigenschaft optimaler Codes

Lemma

Es gibt einen optimalen Präfixcode, in dem die beiden Symbole mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten s_{n-1} und s_n denselben Vaterknoten haben und die längsten Codewörter besitzen.

Beweis

Sei T ein optimaler Codebaum für Q. In T gibt es mindestens zwei Blätter auf der tiefsten Ebene. Seien s_i und s_j zwei Blätter auf der tiefsten Ebene, die denselben Vaterknoten haben. Wir vertauschen s_n mit s_j und erhalten einen neuen Baum T'.

$$\begin{aligned} Z(T') - Z(T) &= p(s_n)k(s_j) + p(s_j)k(s_n) - p(s_j)k(s_j) - p(s_n)k(s_n) \\ &= (p(s_n) - p(s_j))(k(s_j) - k(s_n)) \end{aligned}$$

Da $p(s_n) \leq p(s_j)$ (weil s_n die kleinste Wahrscheinlichkeit hat), gilt $p(s_n) - p(s_j) \leq 0$. Da s_j auf der tiefsten Ebene liegt und s_n irgendein Blatt ist, gilt $k(s_j) \geq k(s_n)$, also $k(s_j) - k(s_n) \geq 0$
Somit:

$$(p(s_n) - p(s_j))(k(s_j) - k(s_n)) \leq 0$$

$Z(T') \leq Z(T)$, also ist T' mindestens so gut wie T. Durch iterative Anwendung können wir s_{n-1} und s_n an die tiefste Stelle mit gemeinsamem Vater bringen.

□

Optimale Codeverfahren

- **Shannon-Fano-Codierung:**

  Top-down-Verfahren mit schrittweiser Teilung der Wahrscheinlichkeiten

- **Huffman-Codierung:**

  Bottom-up-Verfahren durch wiederholtes Zusammenfassen der unwahrscheinlichsten Symbole

Der Huffman-Code erzeugt immer einen optimalen präfixfreien Code und erreicht eine mittlere Codewortlänge L, die die Entropiegrenze erfüllt: $H \leq L < H + 1$.

Quellencodierungssatz, Shannons erster Hauptsatz

Der Quellencodierungssatz besagt, dass eine Quelle mit Entropie H verlustlos mit durchschnittlich H Bits pro Zeichen kodiert werden kann, wenn Blockkodierung verwendet wird.

Effizienz und Quellenkodierungssatz

Die Effizienz eines Codes T ist definiert als $\mathrm{EFF}(T) = H(Q)/Z(T)$. Ein Code heißt ideal bei $\mathrm{EFF}(T) = 1$ und kompakt oder optimal, wenn keine andere Präfixcodierung eine kürzere mittlere Länge $Z(T)$ erreicht. Der fundamentale Quellenkodierungssatz von Shannon besagt, dass durch Blockcodierung (Kodierung mehrerer Zeichen zusammen) die Effizienz beliebig nahe an 1 gebracht werden kann: $\lim_{r\to\infty} \mathrm{EFF}(T^r) = 1$.

← Vorheriges Thema

Nächstes Thema →

MIKROPROZESSORARCHITEKTUR

Schaltwerke in der Mikroprozessorarchitektur

Schaltwerke werden zur Realisierung von Grundoperationen in Prozessoren eingesetzt. Im Gegensatz zu Schaltnetzen besitzen Schaltwerke einen internen Zustand, was sie für sequentielle Operationen besonders geeignet macht.

Steuerwerk und Operationswerk

Die Trennung zwischen Steuerwerk oder Control Unit, und Operationswerk, Data Path genannt, ist ein fundamentales Designprinzip in der Prozessorarchitektur. Diese Aufteilung ermöglicht eine klare Trennung von Kontrollfluss und Datenverarbeitung.

Operationswerk, Data Path

Führt arithmetische und logische Operationen aus es besteht aus ALU, Registerbank und Datenpfaden und operiert unter direkter Anweisung des Steuerwerks. Das Operationswerk ist für die Ausführung der eigentlichen Berechnungen zuständig und empfängt Steuersignale vom Steuerwerk.

Steuerwerk, Control Unit

Koordiniert die Ausführung von Befehlen und Interpretiert Befehle und generiert Steuersignale. Kann hartverdrahtet oder mikroprogrammiert sein. Das Steuerwerk muss die Abarbeitung der Befehle bewältigen und verwendet dazu Mikroprogramme.

Aufbau eines Steuerwerks

Das Steuerwerk verwendet einen ROM, Read-Only Memory genannt, in dem Mikrobefehle gespeichert sind. Es verarbeitet Statussignale vom Operationswerk

und generiert darauf basierend Steuersignale sowie die Folgeadresse für den nächsten Mikrobefehl.

Erweiterter Aufbau eines Steuerwerks

Moderne Steuerwerke enthalten oft einen Befehlszähler oder Program Counter, der automatisch hochzählt, sowie Mechanismen zur Manipulation des Folgebefehls; Sprunganweisungen für Schleifen.

Mikroprogrammierung

Mikroprogrammierung ist eine Abstraktionsebene unterhalb des Maschinenbefehlsniveaus. Jeder Maschinenbefehl wird durch eine Folge von Mikrobefehlen implementiert. Diese Technik ermöglicht eine flexiblere Steuerung der Hardware.

Aufbau eines Mikrobefehls:

- Steueranteil: Steuersignale für das Operationswerk
- Folgeadresse: Nächster auszuführender Mikrobefehl
- Bedingungsfeld: Bestimmt Sprungverhalten

Wobei: 00: kein Sprung, 01: bedingter Sprung, 10: unbedingter Sprung

Universelle Rechenmaschine

Ein Computer ist eine universelle Rechenmaschine, da er durch Programme beliebige Algorithmen ausführen kann. Diese Fähigkeit basiert auf dem Von-Neumann-Architekturmodell.

Von-Neumann-Architektur

Die universelle Rechenmaschine basiert auf dem Von-Neumann-Architekturmodell, das folgende Kernprinzipien definiert:

- Einheitlicher Speicher: Programme und Daten werden im gleichen Speicher abgelegt
- Sequenzielle Abarbeitung: Befehle werden nacheinander ausgeführt
- Zentrale Verarbeitungseinheit: CPU bestehend aus ALU und Steuerwerk

Prinzipieller Aufbau eines Computers

Ein Computer besteht aus folgenden Hauptkomponenten:

- Zentraleinheit: CPU - Central Processing Unit
- Rechenwerk: ALU - Arithmetic Logic Unit
- Steuerwerk: CU - Control Unit
- Speicherwerk: Memory
- Eingabe-Ausgabewerk: I/O Unit - Input/Output Unit
- Bussystem zur Verbindung aller Komponenten

Datenspeicher in der CPU

Die CPU enthält verschiedene Register für die temporäre Datenspeicherung:

- Befehlsregister (Program Counter, PC) - Speichert die Adresse des nächsten auszuführenden Befehls
- Ergebnisregister (Akkumulator) - Speichert das Ergebnis von Berechnungen
- Allgemeine Register (GPR) - General Purpose Register für verschiedene Zwecke

Aufarbeitung eines Befehls

1. FETCH:

Der nächste Befehl wird mittels PC vom Hauptspeicher über den Datenbus in das Befehlsregister eingelesen. PC wird inkrementiert.

2. DECODE:

   Das Bitmuster des Befehls wird im Instruktionsdecoder der CU interpretiert. Je nach Befehl werden benötigte Operanden aus dem Hauptspeicher angefordert.

3. EXECUTE:

   ALU wird mit Berechnung beauftragt. Operanden stehen in Registern bereit.

4. WRITE:

   Ergebnis der Operation, falls es sich um einen arithmetisch und logischen Befehl handelt, wird an die richtige Stelle im Hauptspeicher zurückgeschrieben. Bei Sprungbefehlen der PC entsprechend angepasst.

Übersetzungsebenen von Programmen

Programme durchlaufen mehrere Übersetzungsebenen, bevor sie auf der Hardware ausgeführt werden:

- Hochsprachenprogramme (z.B. C++, Java) werden mittels Compiler übersetzt
- Compiler werden in Assembler geschrieben
- Assemblersprache wird in Maschinencode übersetzt
- Maschinenprogramme werden durch Mikroprogramme implementiert

Datentransfer im Computer

Der Datentransfer zwischen den Komponenten erfolgt über verschiedene Busse:

- Datenbus: Überträgt Daten zwischen CPU, Speicher und Peripherie
- Adressbus: Überträgt Speicheradressen

- Steuerbus: Überträgt Steuersignale für die Koordination

MINIMIERUNG UND SCHALTUNGSENTWURF

Vorgehensweise

Die Vorgehensweise besteht aus einer allgemeinen Ausführung von vier Schritten:

1. Problemanalyse:

   Identifikation der Eingabe- und Ausgabevariablen.

2. Wahrheitstabelle:

   Systematische Erfassung aller Einkombinationen und Ausgabekombinationen.

3. Boolesche Funktion:

   Ableitung der Schaltfunktion aus der Wahrheitstabelle.

4. Technische Realisierung:

   Umsetzung der Funktion in eine physikalische Schaltung mit Logikgattern.

Normalformen boolescher Funktionen

Wortschatz

- Literal: Variable oder ihre Negation.
- Minterm: Vollständige Konjunktion aller Literale also die UND-Verknüpfung.

$$\prod_{i=0}^{n-1} \sim x_i$$

  wobei $\sim x_i$ für x_i oder $\overline{x_i}$ steht

- Maxterm: Vollständige Disjunktion aller Literale also die ODER-Verknüpfung.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sim x_i$$

wobei $\sim x_i$ für x_i oder $\overline{x_i}$ steht

- Disjunktive Normalform oder DNF: besteht aus der Disjunktion von Mintermen.
- Konjunktive Normalform oder KNF: besteht aus der Konjunktion von Maxtermen.

Ausgezeichnete Normalformen

Ausgezeichnete Normalformen sind kanonische Formen:

- Ausgezeichnete, DNF oder ADNF: Vollständige Summe aller Minterme
- Ausgezeichnete, KNF oder AKNF: Vollständiges Produkt aller Maxterme

Minimale Normalformen

Minimale Normalformen sind optimierte Darstellungen:

- MDNF: Kürzeste mögliche DNF
- MKNF: Kürzeste mögliche KNF

Strategische Auswahl

Die Wahl der Normalform hängt von der Verteilung der Funktionswerte ab:

- Bei vielen 0en ist die AKNF effizienter
- Bei vielen 1en ist die ADNF vorteilhafter
- Don't-Care-Terme ermöglichen zusätzliche Optimierungsmöglichkeiten

Verallgemeinerung von De Morgan

Theorem

Sei $(\mathscr{L}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathscr{L}$. Dann gelten:

$$\neg(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) = \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \cdots \vee \neg a_n$$

$$\neg(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n) = \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \cdots \wedge \neg a_n$$

In kompakter Schreibweise:

$$\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n} \neg a_i \quad \text{und} \quad \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} \neg a_i$$

Beweis

Wir beweisen die erste Gleichung mittels vollständiger Induktion über n. Der Beweis der zweiten Gleichung verläuft analog.

Für $n = 2$ erhalten wir die klassischen De Morgan'schen Gesetze:

$$\neg(a_1 \wedge a_2) = \neg a_1 \vee \neg a_2$$

Dies ist ein Axiom beziehungsweise eine grundlegende Eigenschaft jeder Booleschen Algebra.

Die Behauptung gelte für ein $n = k \geq 2$, das heißt:

$$\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{k} a_i\right) = \bigvee_{i=1}^{k} \neg a_i$$

Wir betrachten den Ausdruck für $k + 1$ Elemente:

$$\begin{aligned}
\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} a_i\right) &= \neg\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{k} a_i\right) \wedge a_{k+1}\right) \\
&= \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{k} a_i\right) \vee \neg a_{k+1} \\
&= \left(\bigvee_{i=1}^{k} \neg a_i\right) \vee \neg a_{k+1} \\
&= \bigvee_{i=1}^{k+1} \neg a_i
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Gleichung für alle $n \geq 2$ bewiesen.

Der Beweis der zweiten Gleichung erfolgt durch duale Argumentation oder durch Anwendung der ersten Gleichung auf die negierten Elemente.

$\square$

Erzeugung der Normalformen

Jede vorgegebene boolesche Funktion (Wertetabelle, Algebraische Funktion, Schaltbild) kann eindeutig durch eine ADN oder eine AKN dargestellt werden.

Karnaugh-Veitch-Diagramme, KV-Diagramme

KV-Diagramme bieten eine visuelle Methode zur Minimierung für 3 bis 4 Variable. Die Nachbarschaftsbeziehung im Diagramm entspricht der logischen Nachbarschaft im Wahrheitsfeld.

Quine-McCluskey-Algorithmus

Dieses systematische Verfahren ist für beliebig viele Variablen geeignet und algorithmisch implementierbar. Der Algorithmus ist wie folgt:

1. Codierung

   Minterme werden als Binärzahlen dargestellt

2. Gruppierung

   Terme werden nach Anzahl der Einsen sortiert

3. Verschmelzung

   Benachbarte Terme werden kombiniert wobei die Differenz genau ein Bit ist

4. Primimplikanten-Identifikation

   Nicht kombinierbare Terme werden als Primimplikanten markiert

5. <u>Essenzielle Auswahl</u>

   Primimplikanten, die eindeutige 1en abdecken, werden ausgewählt

6. <u>Minimale Überdeckung</u>

   Restliche Abdeckung mit minimaler Anzahl an Primimplikanten

SCHALTNETZE

Serielle Gatterschaltung, UND-Verknüpfung

Die serielle Schaltung realisiert die logische Konjunktion: $Y = A \wedge B$. Der Stromkreis ist nur geschlossen, wenn beide Schalter A und B aktiviert sind. Diese Grundform findet sich in Sicherheitsschaltungen, wo zwei unabhängige Bestätigungen benötigt werden.

Parallele Gatterschaltung, ODER-Verknüpfung

Die parallele Schaltung realisiert die logische Disjunktion: $Y = A \vee B$. Hier reicht die Aktivierung eines beliebigen Schalters aus, um den Stromkreis zu schließen.

Physikalische Realisierung der Transistoren

Transistoren sind die fundamentalen Bauelemente der Digitaltechnik. Als Halbleiterbauelemente können sie durch Anlegen einer Steuerspannung zwischen Basis und Emitter den Stromfluss zwischen Kollektor und Emitter schalten.

Funktionsweise von Transistoren

Bei einem NPN-Transistor fließt ein Basisstrom, der einen größeren Kollektorstrom ermöglicht. Diese Stromverstärkung ermöglicht die Kaskadierung von Logikgattern.

Die Miniaturisierung führte zu integrierten Schaltkreisen, ICs genannt, mit milliardenfacher Transistordichte.

Mehr über Transistoren ist hier zu finden.

Inverter, NOT-Gatter

Realisiert die Negation: $Y = \overline{A}$. Ein High-Pegel am Eingang schaltet den Transistor durch, sodass der Ausgang auf Low gezogen wird. Bei Low-Eingang sperrt der Transistor, der Ausgang wird über den Pull-Up-Widerstand high.

AND-Gatter

Kombiniert mehrere Transistoren in Serie: Nur wenn alle Eingänge high sind, können alle Transistoren leiten und der Ausgang wird low (bei NAND) oder high, bei AND mit nachgeschaltetem Inverter.

OR-Gatter

Transistoren parallel geschaltet: Ein einziger high-Eingang reicht aus, um den Ausgangszustand zu ändern. Die ODER-Funktion wird oft durch NOR mit nachgeschaltetem Inverter realisiert.

Schaltsymbole

Inzwischen hat sich (bei uns) die IEC (International Electronical Commission) Norm durchgesetzt. Die Schaltsymbole sehen wie folgt aus:

Dekodierer

Wandelt einen binären Code in eine Aktivierung einer bestimmten Ausgangsleitung um. Ein n-zu-2^n-Dekodierer hat n Eingänge und 2^n Ausgänge. Anwendungen: Speicher-Adressdecodierung, 7-Segment-Ansteuerung, Steuerlogik.

Multiplexer, MUX

Wählt eines von mehreren Eingangssignalen basierend auf einem Steuercode aus. Funktionell ein schaltbarer Weichensteller. Ein 2:1-MUX realisiert: $Y = (\overline{S} \cdot D_0) + (S \cdot D_1)$. Anwendungen: Datenauswahl, parallele-zu-seriell-Wandlung, Logikimplementierung.

Komparator

Vergleicht zwei Binärzahlen bitweise unter Berücksichtigung von Übertragsinformation. Der mehrstufige Aufbau ermöglicht den Vergleich beliebig langer Zahlen. Die Übertragsfunktion lautet:

$$U_{i+1} = A_i \cdot \overline{B_i} + U_i \cdot (A_i + \overline{B_i})$$

Diese Logik entscheidet, ob bis zur aktuellen Stelle A größer als B ist.

Addierwerke

Es gibt zwei Addierwerke:

- <u>Halbaddierer</u>

  Addiert zwei Bits ohne Übertragseingang: Summe = $A \oplus B$, Übertrag = $A \cdot B$

- <u>Volladdierer</u>

  Addiert zwei Bits mit Übertragseingang: Summe = $A \oplus B \oplus C_{in}$, Übertrag = $A \cdot B + C_{in} \cdot (A \oplus B)$

Bemerkung

Durch kaskadierte Volladdierer entstehen n-Bit-Addierwerke für arithmetische Operationen in Prozessoren.

<u>Race Conditions</u>

Durch unterschiedliche Signallaufzeiten in verschiedenen Pfaden einer Schaltung können kurzzeitige Fehlzustände, Glitches genannt, auftreten. Diese Race Conditions entstehen, wenn Signale asynchron durch die Logik propagieren.

<u>Gegenmaßnahmen Race Conditions</u>

Um Race Conditions zu vermeiden können folgende Gegenmaßnahmen unternommen werden:

- Synchronisation durch Taktung
- Hazard-Abdeckung in booleschen Funktionen

- Pipelinierung kritischer Pfade
- Verwendung von synchronen Schaltwerken

SCHALTWERKE

Grundidee der Schaltwerke

Schaltwerke unterscheiden sich von Schaltnetzen durch Rückkopplungen. Während Schaltnetze nur kombinatorische Logik abbilden, besitzen Schaltwerke einen internen Zustand, der über die Zeit erhalten bleiben kann. Mit Serielle Verarbeitung werden Informationen nacheinander verarbeitet, nicht parallel.

Schaltwerke bilden die Grundlage für sequenzielle Logik und sind essenziell für Speicher, Zähler und Steuerwerke.

Zustandsgraphen

Ein Zustandsgraph ist ein gerichteter Graph mit:

- Knoten: Repräsentieren Zustände des Systems.
- Kanten: Zeigen Zustandsübergänge an, ausgelöst durch Eingaben.

Race Conditions

Race Conditions entstehen, wenn mehrere Signale gleichzeitig umschalten und der Endzustand undefiniert wird. Dies kann zu metastabilen Zuständen führen, die das Systemverhalten unvorhersehbar machen.

Vermeidung von Race Conditions

Durch Einführung zusätzlicher Zustände und eines Taktsignals können Race Conditions vermieden werden. Der Takt synchronisiert alle Zustandsübergänge, sodass sich nur ein Signal pro Taktperiode ändert. Änderung des Hamming-Abstand 1.

Diese Methode führt zu synchronen Schaltwerken, die deterministisches Verhalten garantieren.

Taktsignale, Clock und Flankensteuerung

Das Taktsignal oder auch Clock genannt steuert den Zeitpunkt von Zustandsänderungen:

- Steigende Flanke: $(0 \to 1)$ positive Flanke
- Fallende Flanke: $(1 \to 0)$ negative Flanke

Flankensteuerung ist robuster als Pegelsteuerung, da sie nur auf kurze Übergangszeitfenster reagiert.

Flipflops

Flipflops sind bistabile Multivibratoren, die einen Bit-Zustand speichern.

Bemerkung

Die Erfindung geht auf Eccles und Jordan im Jahre 1918 zurück.

SR-Flipflop, Set Reset-Flipflop

Das SR-Flipflop besitzt zwei Eingänge: S setzt den Ausgang Q auf 1, R setzt ihn auf 0. Der Zustand S=R=1 ist meist verboten, da er zu einem undefinierten Verhalten führen kann. Die charakteristische Gleichung lautet: $Q' = S + \overline{R} \cdot Q$.

D-Flipflop, Delay-Flipflop

Das D-Flipflop vereinfacht die Handhabung, indem es nur einen Dateneingang D besitzt. Bei der aktiven Taktflanke wird der Wert von D übernommen und am Ausgang Q gespeichert. Es umgeht das Problem des verbotenen Zustands des SR-Flipflops.

JK-Flipflop, Jump Kill-Flipflop

Das JK-Flipflop ist eine Weiterentwicklung, die die Vorteile von SR- und T-Flipflops kombiniert. J verhält sich wie S, K wie R. Der entscheidende Vorteil liegt im Verhalten bei J=K=1: In diesem Fall toggelt der Ausgang Q bei jedem Takt, das

heißt, es wechselt in den jeweils anderen Zustand. Damit ist der bei SR-Flipflops problematische Eingangszustand hier sinnvoll genutzt.

T-Flipflop, Toggle-Flipflop

Ein T-Flipflop kehrt seinen Zustand immer dann um, wenn der T-Eingang aktiv ist T=1 und eine aktive Taktflanke auftritt. Es kann einfach aus einem JK-Flipflop realisiert werden, indem J und K miteinander verbunden werden also J=K=T.

Taktflankengesteuertes SR-Flipflop

Diese Variante reagiert nur, wenn das Taktsignal C aktiv ist. Es zeigt das Phänomen der Laufzeitverzögerung, oder auch Propagation Delay genannt, zwischen der Eingangsänderung und der sichtbaren Reaktion am Ausgang.

Anwendungen von Flipflops

Diese sind:

- Zähler:

  Durch das Hintereinanderschalten oder Kaskadieren von Flipflops entstehen Zähler. Jede Zählerstufe teilt die Frequenz des ankommenden Taktsignals durch zwei. Ein 4-Bit-Zähler, realisiert mit T-Flipflops oder JK-Flipflops im Toggle-Modus, kann somit von 0 (binär 0000) bis 15 (binär 1111) zählen. Zähler sind unverzichtbar in nahezu jedem digitalen System, z.B. für Adressierung, Takttteilung oder Zeitmessung.

- Schieberegister:

  In einem Schieberegister sind Flipflops in Reihe geschaltet. Bei jedem Taktimpuls wird der Wert eines Flipflops in das nächste weitergeschoben. Ein Linksshift entspricht einer Multiplikation der gespeicherten Binärzahl mit 2, ein Rechtsshift einer Division durch 2 Ganzzahldivision. Schieberegister werden für

die Umwandlung zwischen parallelen und seriellen Datenformaten, zur Erzeugung von Pseudozufallsfolgen und in vielen Kommunikationsprotokollen eingesetzt.

- Serieller Addierer

  Ein serieller Addierer führt die Addition zweier Binärzahlen Bit für Bit durch, beginnend mit dem niederwertigsten Bit genauer das least significant Bit, LSB gennat. Er verwendet einen Volladdierer, der die beiden Eingabebits und ein Übertragsbit, Carry-In, addiert und ein Summenbit sowie ein neues Übertragsbit, Carry-Out, erzeugt. Dieses Carry-Out wird in einem Flipflop zwischengespeichert und dient im nächsten Taktzyklus als Carry-In für die Addition der nächsten höherwertigen Bits. Dieses Verhalten lässt sich hervorragend durch einen Mealy-Automaten modellieren, bei dem der Zustand dem aktuellen Übertragsbit entspricht und die Ausgabe, Summenbit genannt, sowohl vom Zustand als auch von der aktuellen Eingabe abhängt.

ZAHLENSYSTEME DER INFORMATIK

- Natürliche Zahl:

  Die Darstellung einer natürlichen Zahl z, mit einer dazugehörigen Basis B, wird durch folgende Summe definiert.

$$z = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot B^i$$

  wobei:

$$z = z_n \cdot z_{n-1} \cdot \ldots z_1 \cdot z_0 \ \ (z_i \in \{0, \ldots, B-1\})$$

- Gebrochene Zahl:

  Die Darstellung einer gebrochene Zahl z, mit einer dazugehörigen Basis B, wird durch folgende Summe definiert.

$$z = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot B^i$$

Relevante Zahlensysteme

Es gibt einige häufig benutzte Zahlensysteme in der Informatik, die hier nach aufsteigender Basis geordnet sind:

- Binärsystem, Dualsystem

$$B = 2$$

- Oktalsystem

$$B = 8$$

- Dezimalsystem

$$B = 10$$

- Hexadezimalsystem

$$B = 16$$

Das jedoch allerwichtigste Zahlensystem in der Informatik ist das Binärsystem.

Basiswechsel

Ein Basiswechsel ist das Wechseln der Basis einer Zahl.

Dezimalzahlen in Binärzahlen: Algorithmus

Um Dezimalzahlen in Binärzahlen umzuwandeln braucht es einem Algorithmus der wie folgt vorgeht:

1. Die Zahl wird durch die Basis 2 geteilt.
2. Der Rest wird gespeichert, entweder 0 oder 1.
3. Dieser Prozess wird mit dem Resultat aus Schritt 1 solange wiederholt bis der Rest 1 ist.
4. Die Binärzahl ist nun die Zusammensetzung der Reste zu einer Zahl von der letzten Division bis zur ersten.

Besteht eine Zahl auch noch oder nur aus einem gebrochenen Anteil, muss ein anderer Algorithmus verwendet werden.

1. Der gebrochener Anteil der Zahl wird mit die Basis 2 multipliziert.
2. Das Resultat wird umgeschrieben in die Form ganzzahliger Anteil des Resultates addiert mit dem gebrochenen Anteil des Resultates.
3. Dieser Prozess wird mit dem gebrochenen Anteil des Resultats aus Schritt 1 solange wiederholt bis sich eine Wiederholung zeigt oder das Resultat 0,0 + 0 ergibt.

4. Die Binärzahl ist nun die Zusammensetzung der ganzzahligen Anteile der Resultate zu einer Zahl; von der letzten Multiplikation bis zur ersten.

Allgemein

Dieser Algorithmus ausgeschrieben ergibt:

- Für den ganzzahligen Anteil:

$$
\begin{aligned}
Z \;/\; B &= S_1 & R\ C_0 \\
S_1 \;/\; B &= S_2 & R\ C_1 \\
S_2 \;/\; B &= S_3 & R\ C_2 \\
S_3 \;/\; B &= S_4 & R\ C_3 \\
&\ldots \\
S_{n-2} \;/\; B &= S_{n-1} & R\ C_{n-2} \\
S_{n-1} \;/\; B &= 0 & R\ C_{n-1}
\end{aligned}
$$

Wobei:

$$Z,\ Zu\ umwandelnde\ Zahl$$

$$S,\ Resultat$$

$$B,\ Basis\ in\ die\ umgewandelt\ wird$$

$$C,\ Rest\ der\ Division$$

- Für den gebrochenen Anteil:

$$Z \cdot B = S_1 + C_{-1}$$

$$S_1 \cdot B = S_2 + C_{-2}$$

$$S_2 \cdot B = S_3 + C_{-3}$$

$$\ldots$$

$$S_{m-2} \cdot B = S_{m-1} + C_{-(m-1)}$$

$$S_{m-1} \cdot B = S_m + C_{-m}$$

Wobei:

$$Z,\ Zu\ umwandelnde\ Zahl$$

$$S,\ Resultat$$

$$B,\ Basis\ in\ die\ umgewandelt\ wird$$

$$C,\ Rest\ der\ Division$$

Zweierkomplement

Das Zweierkomplement wird wie folgt berechnet:

1. Als erstes werden die Bits der gegebene Binärzahl invertiert.

   Aus 1 wird 0 und aus 0 wird 1.

2. Dem Resultat wird 1 hinzuaddiert.

   Ein möglicher Überlauf wird verworfen.

Negative Binärzahlen

Das Zweierkomplement kann in verschieden Systemen als negative Binärzahl angesehen werden.

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

Bei der Subtraktion wird das Zweierkomplement der Zahl addiert.

Addition, Multiplikation und Division haben analoge Vorgänge zu den

Dezimalzahlen.

Zahlenbereiche für ganze Binärzahlen

Siehe: Zahlenbereiche der Binärzahlen Tabelle

JAVA ARRAY LISTS

Import Array List

```
import java.util.ArrayList;
```

Array List

```
ArrayList< String> alList1 = new ArrayList<>();
ArrayList< Integer> alList2 = new ArrayList<>();
ArrayList< Double> alList2 = new ArrayList<>();
ArrayList< someObject> alList2 = new ArrayList<>();
```

add

```
alList1.add("String");
alList2.add(wholeNumber);
alList3.add(decimalNumber);
ObjectName p = new ObjectName("someObject");
    alList4.add(p);
```

Remplacer un élément d'une liste par un autre

```
alList1.set(index, "newItem");
```

Supprimer un élément d'une liste

```
allList1.remove(index);
```

Supprimer tous les éléments d'une liste

```
allList1.clear();
```

Méthodes importantes

```
//retourner la taille d'une liste
int nbOfElementsInTheList = allList1.size();

//supprimer le dernier élément d'une liste
allList1.remove(allList1.size() - 1);

//vérifier si une liste contient un certain élément
if (allList1.contains(item)) {
       System.out.println("The list contains item.");
    }

//retourner un élément
String elementAtPositionN = allList1.get(N);

//retourne la position de un élément
//retourne -1 si l'élément ne se trouve pas dans la liste
int indexOfItem = allList1.indexOf("item");

//vérifier si une liste est vide
if (allList1.isEmpty()) {
       System.out.println("The list is empty.");
    }
```

JList

```
int index = < nomDeLaJList>.getSelectedIndex();
```

JAVA BASICS

Générer un nombre aléatoire entier

```
int randomNumber = (int)(Math.random() * (max-min+1)) + min;
```

Générer un nombre aléatoire réel

```
double randomNumber = Math.random() * (max - min) + min;
```

Comparer deux chaînes de caractères

```
String test = "comparedString";
    if (test.equals(comparedString)) {
        return true;
    }else{
        return false;
    }
```

Buttons

```
//Désactiver un bouton :
        myButton.setEnabled(false);
//Activer un bouton :
        myButton.setEnabled(true);
//Rendre un bouton invisible :
        myButton.setVisible(false);
//Rendre un bouton visible :
        myButton.setVisible(true);
```

```
//Modifier le texte afficher sur un bouton :
        myButton.setText("Do something");
```

Label

```
//Afficher une chaîne de caractères dans un libellé :
        myLabel1.setText("Your name is " + name + ".");
//Afficher un nombre (entier ou réel) dans un libellé :
        myLabel2.setText(String.valueOf(number));
```

Text Field

```
//Placer le contenu d'un champ de texte dans une variable :
        String var1 = myTextField1.getText();
//Lorsque le champ de texte contient un nombre entier :
        int var2 = Integer.valueOf(myTextField2.getText());
//Lorsque le champ de texte contient un nombre réel :
        double var3 = Double.valueOf(myTextField3.getText());
```

Vérifier qu'aucun des champs de texte n'est pas vide

```
if (!myTextField1.getText().equals("") && !myTextField2.getText().equ
    !myTextField3.getText().equals("")) {
        String var1 = myTextField1.getText();
        int var2 = Integer.valueOf(myTextField2.getText());
        double var3 = Double.valueOf(myTextField3.getText());
}
```

Progress bar

```
// number de 0 à 100;
    myProgressBar.setValue(Integer.valueOf(number));
```

Request focus

```
textField.requestFocus();
```

Trier une liste de nombres en ordre croissant

```
public void sort(){

//on place à la position i l'élément le plus petit parmi les éléments
//à partir de on place à la position i l'élément le plus petit parmi
//éléments à partir de la position la position i
     for(int i=0; i < alNumbers.size()-1; i++){

//la variable posMin contiendra la position de l'élément le plus peti
          int posMin = i;
          for(int j=i+1; j < alNumbers.size(); j++){
               if(alNumbers.get(j) < alNumbers.get(posMin)){
          }    }    posMin = j;

//on échange les éléments aux position i et posMin si l'élément le
//plus petit n'est pas déjà à la position i
          if(i != posMin){
               Integer temp = alNumbers.get(posMin);
               alNumbers.set(posMin, alNumbers.get(i));
               alNumbers.set(i, temp);
          }
    }
}
```

Trier une liste de nombres en ordre décroissant

```
public void sort(){

//on place à la position i l'élément le plus petit parmi les éléments
//à partir de on place à la position i l'élément le plus petit parmi
//éléments à partir de la position la position i
     for(int i=0; i < alNumbers.size()-1; i++){

//la variable posMin contiendra la position de l'élément le plus peti
          int posMin = i;
          for(int j=i+1; j < alNumbers.size(); j++){
               if(alNames.get(j).getNumber().compareTo(alNumbers.get(
          }    }    posMin = j;

//on échange les éléments aux position i et posMin si l'élément le
//plus petit n'est pas déjà à la position i
          if(i != posMin){
               Integer temp = alNumbers.get(posMin);
               alNumbers.set(posMin, alNumbers.get(i));
               alNumbers.set(i, temp);
          }
    }
}
```

Mouse Events

```
//Retournent les coordonnées x ou y du point auquel se trouvait
//le curseur de la souris lorsque l'événement a été déclenché.
mouseButton = evt.getX();
mouseButton = evt.geY();
//
Retourne le point où se trouvait le curseur de
```

```
//la souris lorsque l'événement a été déclenché.
mouseButton = evt.getButton();
//Cette méthode ne fonctionne pas pour l'événement mouseDragged!
mouseButton = evt.getPoint();
```

Import Timer

```
import javax.swing.Timer;
```

Initialiser le Timer

```
// 1 = période de la répétition en millisecondes
timer = new Timer(1, myButton.getActionListeners()[0]);
```

Timer

```
//démarrer le timer
timer.start();
//arrêter le timer
timer.stop();
//définir un délai pour le timer
timer.setDelay(delaySlider.getValue());
```

JAVA PROBLÈMES TYPES

Calculer le PGCD

Remarque

PGCD est une abréviation pour: Plus grand commun diviseur, en anglais: Greatest common divisor ou GCD.

```
public int calculateGcd(int pA, int pB) {
    int gcd = 0;
    int min;
    if (pA < pB) {
        min = pA;
        gcd = pB;  //pour le cas où a=0 -> gcd=b
    } else {
        min = pB;
        gcd = pA;  //pour le cas où b=0 -> gcd=a
    }

    for (int i = 1; i <= min; i++) {
        if (pA % i == 0 && pB % i == 0) {
            gcd = i;
        }
     }
    return gcd;
 }
```

Algorithme d'Euclide par soustractions

```
public int calculateGcdEuclidSubtraction() {
    int gA = a;
    int gB = b;
    if (gA == 0) {
        return gB;
```

```
    }

    while (gB != 0) {
        if (gA > gB) {
            gA = gA - gB;
        } else {
             gB = gB - gA;
        }
    }
    return gA;
}
```

Algorithme d'Euclide par divisions

```
public int calculateGcdEuclidDivision() {
    int gA = a;
    int gB = b;
    int t = 0;

    while (gB != 0) {
        t  = gB;
        gB = gA % gB;
        gA = t;
    }

    return gA;
}
```

isPrime()

```
public boolean isPrime(int pNumber) {
    int count = 0;
    for (int i = 1; i <= pNumber; i++) {
        if (pNumber % i == 0) {
```

```
            count++;
        }
    }
        return (count == 2);
}
```

Radpide

```
public boolean isPrime() {
    int i = 2;
    while ((i < number) && (number % i != 0)) {
        i = i + 1;
    }
    return i == number;
}
```

Plus radpide

```
public boolean isPrime() {
    int n = Math.abs(number);
    int i = 2;
    while (i <= Math.sqrt(n) && n % i != 0) {
        i++;
    }
    return n == 2 || n % i != 0 && n > 1;
}
```

Génération d'une suite de nombres aléatoires entiers

```
public void printRandomNumbers(int pN, int pMin, int pMax){
```

```
    for (int i = 1; i <= pN; i++) {
        int currentNumber = (int)(Math.random() * (pMax - pMin +1)) -
        System.out.print(currentNumber+"  ");
        if(i%20==0) {
            System.out.println();
        }
    }
    System.out.println();
}
```

```
public class NombresAleatoire {

    private ArrayList< Double> alNumbers = new ArrayList<>();

    public void randomFill(int pN, double pMin, double pMax) {
        alNumbers.clear();
        double currentNumber;
        for (int i = 0; i < pN; i++) {
            currentNumber = Math.random() * (pMax - pMin) + pMin;
            alNumbers.add(currentNumber);
        }
    }

    public void print() {
          for (int i = 0; i < alNumbers.size(); i++) {
            System.out.print(alNumbers.get(i)+"  ");
        if((i+1)%5==0) System.out.println();
          }
          System.out.println();
    }

}
```

Trouver un élément dans une liste

```java
public int findLast(String pNeedle) {
    int result = -1;
    for (int i = 0; i < alMyList.size(); i++) {
        if (alMyList.get(i).getAttribute().equals(pNeedle)) {
            result = i;
        }
    }
    return result;
}
```

```java
public int findFirst(String pNeedle) {
    int result = -1;
    for (int i = alMyList.size() - 1; i >= 0; i--) {
        if (alMyList.get(i).getAttribute().equals(pNeedle)) {
            result = i;
        }
    }
    return result;
}
```

```java
 public int findFirst(String pNeedle) {
    int result = -1;
    for (int i = 0; i < alMyList.size(); i++) {
        if (alMyList.get(i).getAttribute().equals(pNeedle) && result
            result = i;
        }
    }
    return result;
}
```

```
public int findFirst(String pNeedle) {
    int result = -1;
    int i = 0;
    while (i < alMyList.size() && result == -1) {
        if (alMyList.get(i).getAttribute().equals(pNeedle)) {
            result = i;
        }
        i++;
    }
    return result;
}
```

Trouver le maximum dans une liste

```
public int getMax() {
    if (alListOfNumbers.size() > 0) {
        int max = alListOfNumbers.get(0);
          int current;

            for (int i = 1; i < alListOfNumbers.size(); i++) {
                current = alListOfNumbers.get(i);
                if (max < current) {
                    max = current;
                }
            }

        return max;
    } else {
        return -1;
    }
}
```

```
public int getMin() {
    if (alListOfNumbers.size() > 0) {
        int min = alListOfNumbers.get(0);
          int current;

            for (int i = 1; i < alListOfNumbers.size(); i++) {
                current = alListOfNumbers.get(i);
                if (min > alListOfNumbers.size current) {
                    min = current;
                }
            }

        return max;
    } else {
        return -1;
    }
}
```

Calculer la somme des nombres d'une Liste

```
public int getSum() {
    int sum = 0;
    for (int i = 0; i < alListOfNumbers.size(); i++) {
        sum = sum + alListOfNumbers.get(i);
    }
    return sum;
}
```

```
public double getAverage() {
    if (alMarks.size()==0)
    //La méthode retourne 0 si la liste est vide
       return 0;
```

```
    else
        return (double) getSum() / allListOfNumbers.size();
}
```

LATEX BASICS

LaTeX is a markup language used to create scientific documentation.

Document Structure

```
% Basic document structure
\documentclass{article} % Defines document type
\usepackage{amsmath}    % For advanced math features
\usepackage{graphicx}   % For including images

\title{Document Title}
\author{Author Name}
\date{\today}

\begin{document}
\maketitle

\section{Introduction}
This is the introduction.

\subsection{Subsection}
This is a subsection.

\end{document}
```

Text Formatting

```
% Text formatting commands
\textbf{Bold Text}      % Bold formatting
\textit{Italic Text}    % Italic formatting
\underline{Underlined}  % Underlined text
\emph{Emphasized}      % Emphasized text (usually italic)

% Special text environments
```

```
\begin{verbatim}
Verbatim text exactly as typed
\end{verbatim}
```

Lists

```
% Bullet point list
\begin{itemize}
  \item First item
  \item Second item
  \item Third item
\end{itemize}

% Numbered list
\begin{enumerate}
  \item First item
  \item Second item
  \item Third item
\end{enumerate}

% Description list
\begin{description}
  \item[Term] Description of term
  \item[Another] Another description
\end{description}
```

Comment

```
% This is a comment
```

Basic Notation

```
%Brackets
( )
[ ]
%addition sign
+
%substration sign
-
%multiplication sign
\times
\cdot
%division signs
/
:
% make a fraction
\frac{numerator}{denominator}
% inverse sign
^{-1}
%plus minus sign
\pm
%minus plus sign
\mp
%square root
\sqrt{}
%cube root
\sqrt[3]{}
%nth root
\sqrt[n]{}
%percent
\%
```

Number sets

For futher explanation visit : Mathématiques ensembles des nombres.

```
% ensemble des entiers naturels
\mathbb{N}
```

```
% ensemble des entiers relatifs
\mathbb{Z}
% ensemble des décimaux
\mathbb{D}
% ensemble des rationnels
\mathbb{Q}
% ensemble des réels
\mathbb{R}
% ensemble des complexes
\mathbb{C}
% ensemble des quaternions
\mathbb{H}
% ensemble des octonions
\mathbb{O}
% ensemble des sédénions
\mathbb{S}
% ensemble des pathions
\mathbb{P}
% ensemble des chingons
\mathbb{X}
% ensemble des routons
\mathbb{U}
% ensemble des voudrons
\mathbb{V}
```

Quantifiers

```
% forall
\forall
%it exists
\exists
%does not exist
\nexists
```

Set construction

```
% Empty set
\varnothing
```

Set operations

```
%intersection
\cap
%union
\cup
%difference
\setminus
```

Figures and Tables

```
% Figure environment
\begin{figure}[h]
  \centering
  \includegraphics[width=0.5\textwidth]{image.png}
  \caption{Figure caption}
  \label{fig:example}
\end{figure}

% Table environment
\begin{table}[h]
  \centering
  \caption{Table caption}
  \begin{tabular}{|c|c|c|}
    \hline
    Header 1 & Header 2 & Header 3 \\
    \hline
    Data 1 & Data 2 & Data 3 \\
    \hline
  \end{tabular}
```

```
  \label{tab:example}
\end{table}
```

Mathematical Environments

```
% Numbered equation
\begin{equation}
  E = mc^2
  \label{eq:emc}
\end{equation}

% Aligned equations
\begin{align}
  a &= b + c \\
  d &= e + f + g \\
  h &= i + j
\end{align}

% Inline math: $E = mc^2$
% Display math: \[ E = mc^2 \]
```

References and Citations

```
% Cross-references
See Figure~\ref{fig:example} and Table~\ref{tab:example}.
Equation~\ref{eq:emc} shows the mass-energy equivalence.

% Citations
This was proven by Einstein~\cite{einstein1905}.

% Bibliography (in preamble)
\usepackage{natbib}
\bibliographystyle{plain}
```

```
% Bibliography entries
\begin{thebibliography}{9}
\bibitem{einstein1905}
  A. Einstein,
  \emph{On the Electrodynamics of Moving Bodies},
  Annalen der Physik, 1905.
\end{thebibliography}
```

Useful Packages

```
% Essential packages
\usepackage{amsmath}      % Advanced math typesetting
\usepackage{graphicx}     % Including graphics
\usepackage{hyperref}     % Hyperlinks and PDF metadata
\usepackage{geometry}     % Page layout control
\usepackage{url}          % URL typesetting

% Additional useful packages
\usepackage{amsfonts}     % Additional math fonts
\usepackage{amssymb}      % Math symbols
\usepackage{xcolor}       % Color support
\usepackage{listings}     % Code listings
\usepackage{tabularx}     % Extended table features
```

Footnotes and Margin Notes

```
% Footnotes
This is some text with a footnote\footnote{This is the footnote text.

% Margin notes
This text has a margin note\marginpar{Note in the margin}.
```

Footnotes and Margin Notes

```
% Logical symbols
\forall         % Universal quantifier
\exists, \exist % Existential quantifier
\in, \isin      % Element of
\notin          % Not element of
\complement     % Complement

% Set operations
\subset         % Subset
\emptyset, \empty % Empty set
\mid            % Such that or divides

% Logical operators
\land           % Logical AND
\lor            % Logical OR
\neg, \not      % Logical NOT

% Arrows and implications
\mapsto         % Maps to
\to             % Right arrow
\gets           % Left arrow
\leftrightarrow % Left-right arrow
\implies        % Implies
\iff            % If and only if
\therefore      % Therefore
\because        % Because

% Set notation examples
\{x \mid x < \tfrac{1}{2}\}
\set{x \mid x < 5}
```

LaTeX Mathematical Symbols Cheat Sheet

```
% LaTeX Mathematical Symbols Reference
```

```latex
% Common symbols and their LaTeX commands

% Quantifiers
∀   \forall        % For all
∃   \exists        % There exists
∄   \nexists       % There does not exist

% Set Theory
∈   \in            % Element of
∉   \notin         % Not element of
∅   \emptyset      % Empty set
∅   \varnothing    % Alternative empty set
⊂   \subset        % Subset
∁   \complement    % Complement

% Logic Operators
∧   \land          % Logical and
∨   \lor           % Logical or
¬   \neg           % Logical not
¬   \not           % Alternative not

% Arrows and Implications
→   \to            % Right arrow
⇒   \implies       % Implies
←   \gets          % Left arrow
↔   \leftrightarrow % Left-right arrow
⇔   \iff           % If and only if
↦   \mapsto        % Maps to

% Set Notation Examples
\[ \{x \mid x < \tfrac{1}{2}\} \]          % Set with mid bar
\set{x \mid x < \tfrac{1}{2}}             % Alternative set notation
\{x \mid x < 5\}                          % Simple set
\set{x \leq 5}                            % Alternative simple set
```

LaTeX Dirac Bra-Ket Notation

```latex
% Dirac Bra-Ket Notation for Quantum Mechanics
% Requires \usepackage{braket} in preamble

% Basic Bra-Ket Notation
(|          \bra{\phi}              % Bra vector
|)          \ket{\psi}              % Ket vector
( | )       \braket{\phi | \psi}    % Bra-ket inner product

% Scaled Bra-Ket Notation
( |     \Bra{\phi}                  % Scaled bra vector
| )     \Ket{\psi}                  % Scaled ket vector

% Matrix Elements and Expectation Values
( \phi | A | \psi )                  % Matrix element
\bra{\phi} A \ket{\psi}             % Alternative matrix element
\braket{\phi | A | \psi}            % Expectation value notation

% Complex Bra-Ket Example
( \phi | \frac{\partial^2}{\partial t^2} | \psi )   % Operator betwee
\Braket{ \phi | \frac{\partial^2}{\partial t^2} | \psi } % Scaled ver

% Note: The braket package provides proper spacing and scaling
% for quantum mechanical notation in LaTeX
```

LaTeX Relation Symbols

```latex
% LaTeX Relation Symbols and Operators
% Mathematical relation symbols and their LaTeX commands

% Equality and Equivalence
=           % Equals
\equiv      % Equivalent
\fallingdotseq % Falling dots equal
\eqcirc     % Equal with circle
\eqcolon    % Equal colon (or \minuscolon)
\eqqcolon   % Equal colon colon (or \equalscolon)
```

```latex
\eqsim      % Equal similar
\Eguiv      % Equivalent (typo corrected: should be \equiv)

% Inequality Relations
<           % Less than
>           % Greater than
\ll         % Much less than
\gg         % Much greater than
\lessapprox % Less approximately
\lesseqgtr  % Less equal greater
\lesseqgtr % Less equal equal greater
\lessgtr    % Less greater
\lesssim    % Less similar
\ggg        % Much much greater than
\gggtr      % Much greater than (alternative)

% Subset and Superset Relations
\subset     % Subset (or \sub)
\subseteq   % Subset or equal (or \sube)
\Subset     % Double subset
\supset     % Superset
\supseteq   % Superset or equal (or \supe)
\Supset     % Double superset
\sqsubset   % Square subset
\sqsupset   % Square superset

% Order Relations
\prec       % Precedes
\precapprox % Precedes approximately
\preccurlyeq % Precedes curly equal
\preceq     % Precedes or equal
\precsim    % Precedes similar
\succ       % Succeeds
\succapprox % Succeeds approximately
\succcurlyeq % Succeeds curly equal
\succeq     % Succeeds or equal
\succsim    % Succeeds similar

% Other Relations
\approx     % Approximately equal
\thickapprox % Thick approximately equal
```

```latex
\parallel   % Parallel
\perp       % Perpendicular
\pitchfork  % Pitchfork
\models     % Models
\vDash      % Double vertical bar equals
\Vdash      % Double vertical bar dash
\vdash      % Vertical bar dash
\asymp      % Asymptotically equal
\bowtie     % Bowtie
\Join       % Join
```

MACHINE LEARNING

Algorithm

Definition

An algorithm is a step-by-step set of instructions or rules used to solve a problem or perform a task.

Machine Learning

Definition

Machine learning is a subset of artificial intelligence that enables computers to learn and make decisions from data without being explicitly programmed.

Labeled Data

Definition

Labeled data is data that has been tagged or annotated with the correct output or classification.

Unlabeled Data

Definition

Unlabeled data is data that has not been tagged or annotated with the correct output or classification.

Machine Learning Types

- Supervised Learning

  Using labeled data to train algorithms.

- Unsupervised Learning

  Using unlabeled data to discover structures or groupings.

- Reinforcement Learning

  Learning by interaction with an environment, based on rewards.

Clustering

Definition

Clustering is the process of grouping similar data points together based on their features. This method is a method of supervised learning.

Classification

Definition

Classification is the process of assigning data points to predefined categories. This method is a method of supervised learning.

Regression

Definition

Regression is the process of predicting continuous values from input data. This method is a method of unsupervised learning.

Reinforcement Learning

Definition

Reinforcement learning is a method of machine learning where an agent learns to make decisions by interacting with an environment and receiving rewards or penalties.

Clustering Algorithms

- K-Means

A clustering algorithm that partitions data into K distinct clusters based on feature similarity.

- Mean Shift

  A clustering algorithm that iteratively shifts data points towards the mode of the data distribution.

- K-Medoids

  A clustering algorithm that partitions data into K distinct clusters based on feature similarity, using actual data points as cluster centers.

Regression Algorithms

- Decision Tree

  A supervised learning algorithm that splits data into branches to make predictions.

- Linear Regression

  A supervised learning algorithm that models the relationship between a dependent variable and one or more independent variables.

- Logistic Regression

  A supervised learning algorithm used for binary classification problems.

Classification Algorithms

- Naive Bayes

  A supervised learning algorithm based on Bayes' theorem, assuming independence between features.

- SVM

A supervised learning algorithm that finds the optimal hyperplane to separate data points into different classes.

- K-Nearest Neighbors

  A supervised learning algorithm that classifies data points based on the majority class of their k nearest neighbors.

Simple linear regression

Simple linear regression is a statistical method that models the relationship between a dependent variable and a single independent variable by fitting a linear equation to observed data. The equation of simple linear regression is typically represented as:

$$y = mx + b$$

Multiple linear regression

Multiple linear regression is a statistical technique that models the relationship between a dependent variable and two or more independent variables by fitting a linear equation to observed data. The equation of multiple linear regression is typically represented as:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$$

There also exists a matrix representation of the multiple linear regression equation:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

Logistic regression

Definition

Logistic regression is a statistical method used for binary classification problems. It models the probability of a binary outcome based on one or more independent variables.

Sigmoid Function

The logistic regression model uses the sigmoid function to map any real value into a probability between 0 and 1:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Correlation matrix

Definition

A correlation matrix is a table showing correlation coefficients between variables. Each cell in the table shows the correlation between two variables.

Evaluation metrics of Machine Learning

- Clustering

  Common metrics include silhouette score and Calinski-Harabasz index.

- Classification

  Common metrics include accuracy, precision, recall, and F1-score.

- Regression

  Common metrics include Mean Squared Error or MSE, Root Mean Squared Error or RMSE, and R-squared.

Clustering

Definition

Clustering is the task of grouping a set of objects in such a way that objects in the same group, called a cluster, are more similar to each other than to those in other groups.

Dimensionality reduction

Definition

Dimensionality reduction is the process of reducing the number of random variables under consideration by obtaining a set of principal variables.

Dimensionality Reduction Algorithms

- Principle Component Analysis, PCA

  A dimensionality reduction technique that transforms data into a new coordinate system, where the first component captures the maximum variance in the data.

- Feature Selection

  A dimensionality reduction technique that selects a subset of the original features based on their relevance to the target variable.

- Linear Discriminant Analysis, LDA

  A dimensionality reduction technique that projects data onto a new coordinate system, maximizing the separation between classes.

K-means clustering

- Cluster

  Collection of data points grouped together based on similarity. It represents a subset of the dataset that shares common characteristics.

- Centroid:

The representative point of a cluster is called a centroid. It is the center of the samples that belong to the cluster and works as a prototype of the cluster. Finding the appropriate centroids that partition samples in a good manner is the goal of the K-means algorithm.

Definition

K-means clustering is an unsupervised machine learning algorithm that partitions a dataset into k distinct, non-overlapping clusters based on the similarity of data points. It uses unlabeled data to identify patterns.

K-Means Algorithm

1. Select the number of clusters k and randomly initialize k centroids.
2. Assign each data point to the nearest centroid, forming k clusters.
3. Update the centroids by calculating the mean of all data points in each cluster.
4. Repeat steps 2 and 3 until convergence.

Remark

K-Means uses Euclidean distance d to measure the similarity between data points and centroids.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

K-Means Optimisation with elbow method

The elbow method is a heuristic used to determine the optimal number of clusters k in K-Means clustering. It involves plotting the sum of squared errors or SSE against the number of clusters and identifying the elbow point where the rate of decrease sharply changes.

$$\text{WCCS } = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in C_i} ||x - \mu_i||^2$$

K-nearest neighbors, KNN

Definition

K-nearest neighbors is a non-parametric method used for classification and regression. In both cases, the input consists of the k closest training examples in the feature space. It uses labeled data to identify patterns.

K Nearest Neighbors Application

To classify a new data point into one of the two existing categories, we use the KNN algorithm. Based on the spatial proximity of points, KNN assigns to the new point the category that contain the most of nearest neighbours .

K Nearest Neighbors Algorithm

1. Choose the number of neighbors k.
2. Calculate the distance between the new data point and all training data points.
3. Identify the k nearest neighbors based on the calculated distances.
4. For classification, assign the most common class among the k neighbors to the new data point. For regression, calculate the mean value of the k neighbors and assign it to the new data point.

Remark

The most commonly used algorithms for KNN use the following distance metrics:

- Euclidean Distance: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Manhattan Distance: $d = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$
- Minkowski Distance: $d = (|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p)^{1/p}$
- Cosine similarity: $\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}||}$

Elements of a Confusion Matrix

- True Positive, TP

  The number of instances where the model correctly predicted the positive class.

- False Positive, FP

  The number of instances where the model incorrectly predicted the positive class

- True Negative, TN

  The number of instances where the model correctly predicted the negative class.

- False Negative, FN

  The number of instances where the model incorrectly predicted the negative class.

Confusion Matrix

Definition

A confusion matrix is a table used to evaluate the performance of a classification model. It shows the counts of correct and incorrect predictions for each class.

		Actual Values	
		Positive (1)	Negative (0)
Predicted Values	Positive (1)	TP	FP
	Negative (0)	FN	TN

Classification metrics

- Accuracy

  The proportion of true results, both true positives and true negatives, among the total number of cases examined.

$$\text{Accuracy} = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

- Precision

  The proportion of true positive results in the predicted positive cases.

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP}$$

- Recall, Sensitivity

  The proportion of true positive results in the actual positive cases.

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN}$$

- F1-Score

  The harmonic mean of precision and recall, providing a single metric that balances both concerns.

$$\text{F1-Score} = 2 \cdot \frac{\text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}}$$

or expressed in only classification terms:

$$\text{F1-Score} = 2 \cdot \frac{\text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{TP}{TP+FP} \cdot \frac{TP}{TP+FN}}{\frac{TP}{TP+FP} + \frac{TP}{TP+FN}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{TP}{TP+FP} \cdot \frac{TP}{TP+FN}}{\frac{TP}{TP+FP} \cdot \frac{TP+FN}{TP+FN} + \frac{TP}{TP+FN} \cdot \frac{TP+FP}{TP+FP}}$$

$$= 2 \cdot \frac{TP^2}{TP^2 + TP \cdot FP + TP \cdot FN + FP \cdot FN}$$

$$= \frac{2 \cdot TP^2}{2 \cdot TP^2 + TP \cdot FP + TP \cdot FN + FP \cdot FN}$$

Regression metrics

- Mean Squared Error, MSE

  The average of the squared differences between the predicted values and the actual values.

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- Mean Absolute Error, MAE

  The average of the absolute differences between the predicted values and the actual values.

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|$$

- Root Mean Squared Error, RMSE

  The square root of the mean squared error.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}$$

- <u>R Square, R2</u>

  The proportion of the variance in the dependent variable that is predictable from the independent variables.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

PYTHON — COMPLETE COURSE

This course starts at the very beginning and progresses through intermediate and advanced topics. Each module has examples and exercises linked from this page.

Course Outline

1. Introduction & Setup
2. Basics: Syntax, Variables, Types
3. Control Flow: Conditionals & Loops
4. Data Structures: Lists, Tuples, Sets, Dicts
5. Functions, Scope & Lambdas
6. Modules & Packages
7. Object-Oriented Programming
8. File I/O & Exceptions
9. Standard Library & pip
10. Testing, Debugging & Logging
11. Advanced Topics
12. Projects & Guided Exercises

Resources

- Examples: `Informatik/Python/examples/`
- Exercises: `Informatik/Python/exercises/`

Quick Start Example

```python
def greet(name: str) -> str:
    return f"Hello, {name}!"

if __name__ == "__main__":
    print(greet("world"))
```

Introduction to Python

Python is a versatile, high-level programming language known for its simplicity and readability. It is widely used in web development, data analysis, artificial intelligence, scientific computing, and more.

Core Concepts

1. Syntax and Variables

Python uses indentation to define blocks of code. Variables are dynamically typed, meaning you don't need to declare their type explicitly.

```
# Example: Variables and Printing
name = "Alice"
age = 25
print(f"Name: {name}, Age: {age}")
```

2. Control Flow

Python supports conditional statements and loops to control the flow of execution.

```
# Example: If-Else and Loops
number = 10
if number > 0:
    print("Positive number")
else:
    print("Non-positive number")

for i in range(5):
    print(i)
```

3. Data Structures

Python provides built-in data structures like lists, tuples, sets, and dictionaries to store and manipulate data.

```
# Example: Lists and Dictionaries
fruits = ["apple", "banana", "cherry"]
prices = {"apple": 1.2, "banana": 0.5, "cherry": 2.5}
```

```
print(fruits)
print(prices["apple"])
```

4. Functions

Functions in Python are defined using the def keyword. They help in organizing code into reusable blocks.

```
# Example: Functions
def add(a, b):
    return a + b

result = add(3, 5)
print(result)
```

5. Object-Oriented Programming (OOP)

Python supports OOP principles like classes and inheritance.

```
# Example: Classes and Objects
class Person:
    def __init__(self, name, age):
        self.name = name
        self.age = age

    def greet(self):
        return f"Hi, I'm {self.name} and I'm {self.age} years old."

person = Person("Alice", 25)
print(person.greet())
```

6. File Handling

Python makes it easy to work with files using built-in functions.

```
# Example: Reading and Writing Files
with open("example.txt", "w") as file:
    file.write("Hello, World!")

with open("example.txt", "r") as file:
    content = file.read()
    print(content)
```

7. Error Handling

Python uses try and except blocks to handle exceptions gracefully.

```
# Example: Exception Handling
try:
    result = 10 / 0
except ZeroDivisionError as e:
    print(f"Error: {e}")
```

8. Modules and Libraries

Python has a rich ecosystem of modules and libraries. You can import built-in modules or install third-party libraries using pip.

```
# Example: Using Modules
```

```python
import math

print(math.sqrt(16))
```

9. Advanced Topics

Python also supports advanced features like decorators, generators, and context managers.

```python
# Example: Generators
def fibonacci(n):
    a, b = 0, 1
    for _ in range(n):
        yield a
        a, b = b, a + b

for num in fibonacci(5):
    print(num)
```

10. Decorators

Decorators are a powerful feature in Python that allow you to modify the behavior of a function or class. They are often used for logging, enforcing access control, instrumentation, and more.

```python
# Example: Using a Decorator
def decorator(func):
    def wrapper():
        print("Before the function call")
        func()
        print("After the function call")
    return wrapper
```

```
@decorator
def say_hello():
    print("Hello!")

say_hello()
```

11. Context Managers

Context managers are used to manage resources, such as files or network connections, ensuring they are properly cleaned up after use. The with statement is commonly used for this purpose.

```
# Example: Using a Context Manager
with open("example.txt", "w") as file:
    file.write("Hello, World!")

# The file is automatically closed after the block
```

12. Generators

Generators are a special type of iterator in Python that allow you to yield values one at a time, making them memory-efficient for large datasets.

```
# Example: Generator Function
def countdown(n):
    while n > 0:
        yield n
        n -= 1

for number in countdown(5):
    print(number)
```

13. Regular Expressions

Regular expressions (regex) are a powerful tool for pattern matching and text processing. Python provides the re module for working with regex.

```
# Example: Using Regular Expressions
import re

pattern = r"\b[A-Za-z]+\b"
text = "Python is amazing!"

matches = re.findall(pattern, text)
print(matches)
```

14. Working with APIs

Python makes it easy to interact with APIs using libraries like requests. You can send HTTP requests and handle responses efficiently.

```
# Example: Fetching Data from an API
import requests

response = requests.get("https://api.github.com")
if response.status_code == 200:
    print(response.json())
```

15. Working with Databases

Python provides libraries like sqlite3 for working with databases. You can execute SQL queries to interact with the database.

```
# Example: SQLite Database
import sqlite3

connection = sqlite3.connect("example.db")
cursor = connection.cursor()

cursor.execute("CREATE TABLE IF NOT EXISTS users (id INTEGER, name TE
cursor.execute("INSERT INTO users (id, name) VALUES (?, ?)", (1, "Ali

connection.commit()
connection.close()
```

16. Concurrency and Parallelism

Python supports concurrency and parallelism using modules like threading and multiprocessing. These are useful for running tasks simultaneously.

```
# Example: Using Threads
import threading

def print_numbers():
    for i in range(5):
        print(i)

thread = threading.Thread(target=print_numbers)
thread.start()
thread.join()
```

17. Data Visualization

Python has powerful libraries like matplotlib and seaborn for creating visualizations.

```python
# Example: Plotting with Matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt

x = [1, 2, 3, 4, 5]
y = [1, 4, 9, 16, 25]

plt.plot(x, y)
plt.title("Line Graph")
plt.show()
```

VORSILBEN DER INFORMATIK

Vorsilben

Zeichen	Name	Zehner-Potenz	Name	Zweier-Potenz
k	Kilobyte	10^3	Kibibyte	2^{10}
M	Megabyte	10^6	Mebibyte	2^{20}
G	Gigabyte	10^9	Gibibyte	2^{30}
T	Terabyte	10^{12}	Tebibyte	2^{40}
P	Petabyte	10^{15}	Pebibyte	2^{50}
E	Exabyte	10^{18}	Exbibyte	2^{60}
Z	Zettabyte	10^{21}	Zebibyte	2^{70}
Y	Yottabyte	10^{24}	Yobibyte	2^{80}

ZAHLENBEREICHE DER BINÄRZAHLEN

Zahlenbereiche der Binärzahlen Tabelle

Bits	Unsigned Integer		Signed Integer
	kleinste Ganzzahl	Größte Ganzzahl	kleinste Ganzzahl
8	0	255	-128
16	0	65535	-32768
32	0	4294967295	-2147483648
64	0	18446744073709551615	-9223372036854775808

CSS

CSS, stands for Cascading Style Sheets. It is used to style websites written in .html files.

Comment

```
/* this is a comment */
```

Styling HTML using CSS selectors

```
p{
  color: blue;
}
.className{
  color: red;
}
#idName{
  color: green;
}
h1{
  color: aquamarine;
}
/*If an element is in some other element*/
#idName p{
  color: blue;
}
.className h1{
  color: red;
}
/*If an element is specifically in some other element*/
#idName > p{
   color: blue;
}
.className > h1{
  color: red;
```

```
}
```

Text Edit

```
p{
  /*changes Text color form current Text color*/
  color: blue;
  /*changes Text color form current Text color in hex code*/
  color: #ffffff;
  /*changes font size in pixels*/
  font-size: 20px;
  /*changes font size in em*/
  font-size: 20em;
  /*changes font size in rem*/
  font-size: 20rem;
  /*underlining text*/
  text-decoration: underline;
  text-decoration: line-through;
  /*changing the letter spacing in pixels*/
  letter-spacing: 2px;
  /*changing the font style to italic, bold...*/
  font-style: italic; font-style: bold;
  /*changing the line height in pixels*/
  line-height: 16px;
  /*changing the text to all uppercase, lowercase, capitalized...*/
  text-transform: uppercase; text-transform: lowercase;
  text-transform: capitalized;
  /*add word spacing*/
  word-spacing: 10px;
}
```

Box Model

The CSS box model describes the rectangular boxes that are generated for elements in the document tree and consists of: content, padding, border and margin.

```
.box{
  width: 200px; /* content width */
  padding: 10px; /* inside space */
  border: 2px solid #333; /* border */
  margin: 20px; /* outside space */
  box-sizing: border-box; /* include padding and border in width */
}
```

Layout, display

Use display to control element layout: block, inline, inline-block, none.

```
.hidden{ display: none; }
```

Flexbox

Flexbox makes it easy to align items in one dimension (row or column).

```
.flex-container{
  display: flex; /* establishes flex context */
  flex-direction: row; /* row or column */
  justify-content: center; /* main-axis alignment */
  align-items: center; /* cross-axis alignment */
  gap: 10px; /* space between items */
}
.flex-item{
  flex: 1; /* grow/shrink */
  min-width: 100px;
}
```

CSS Grid

Grid provides a two-dimensional layout system for rows and columns.

```
.grid-container{
  display: grid;
  grid-template-columns: 1fr 2fr 1fr; /* column sizes */
  grid-gap: 10px; /* space between cells */
}
.grid-item{
  padding: 10px;
  border: 1px solid #ccc;
}
```

Backgrounds and Borders

```
body{
  background-color: #fafafa;
  background-image: linear-gradient(45deg, #fff, #eee);
  background-size: cover;  background-repeat: no-repeat;
}
.rounded{
  border-radius: 8px;
/* rounded corners */
  border: 2px dashed #0077cc;
}
```

Transitions and Animations

Transitions allow smooth changes between property values. Keyframe animations define more complex sequences.

```
.button{
  background: #0077cc;
  color: #fff;
  padding: 8px 12px;
  transition: background 0.3s ease, transform 0.2s ease;
}
.button:hover{
  background: #005fa3;
  transform: translateY(-2px);
}

@keyframes fadeIn{
  from{ opacity: 0; }
  to{ opacity: 1; }
}
.fade{
  animation: fadeIn 0.6s ease both;
}
```

Responsive Design and Media Queries

Use media queries to apply styles for different viewport sizes.

```
/* Mobile first */
.container{ width: 100%; }

@media (min-width: 768px){
  .container{ width: 750px; }
}

@media (min-width: 1024px){
  .container{ width: 960px; }
}
```

CSS Variables, Custom Properties

Define reusable values with custom properties.

```
:root{
  --primary: #0077cc;
  --accent: #ffcc00;
  --radius: 6px;
}
.card{
  background: var(--primary);
  border-radius: var(--radius);
  color: white;
}
```

Specificity and Cascade

Specificity determines which rule wins. Order matters (later rules override earlier ones when specificity is equal).

```
/* specificity: element < class < id */
p{
  color: black;
}
.important p{
  color: red;
}
#main p{
  color: green;
}
```

Pseudo-classes and Pseudo-elements

Use pseudo-classes like :hover, :focus and pseudo-elements like ::before, ::after.

```
a:hover{ text-decoration: underline; }
input:focus{ outline: 2px solid #0077cc; }
.item::before{
  content: "● ";
  color: var(--accent);
}
```

HTML

HTML, stands for HyperText Markup Language. We use it to mark up different content in our website in order for the browser to understand and render the website; or even to be successfully found on search engines. It is used to create websites. The most recent version of HTML is HTML 5.

HTML is not a programming language it is a markup language.

Front page

A file containing the code for your frontpage must be named: index.html, otherwise the server will not recognize this as the landing page and will not display the website.

Comment

```
<!-- This is a comment -->
```

Boilerplate code

Boilerplate code refers to the default code necessary to generate something. In this case it is the minimum amount of code to generate a website.

```
<!-- Sets the document type as HTML 5 -->
<!DOCTYPE html>
<!-- Sets the language type as english -->
<html lang="en">
<!-- The head tag has useful information invisible to the user -->
<head>
    <!-- Meta tag sets the character set as UTF-8 -->
    <meta charset="UTF-8">
```

```
    <meta http-equiv="X-UA-Compatible" content="IE=edge">
    <!-- Makes the website responsive, meaning it resizes to fit cert
    <meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=
    <!-- The title tag can be seen at the top of a tab -->
    <title>Document</title>
</head>
<!-- Body tag houses the actual content the user sees on the website
<body>
<!-- closes body tag -->
</body>
<!-- closes HTML tag -->
</html>
```

Link CSS files

```
<!-- link tag -->
<!-- href or hyper reference needs the file path of the stylesheet in
<!-- rel refers to the type of document linked -->
        <link rel="stylesheet" href="stylesheet.css" />
```

Website structure tags

Is written in the body tag. Improves the SEO of a website or Search Engine Optimization, meaning a website is now easier found be web crawlers form search engines.

```
<!-- Content sectioning -->
    <header></header>
    <section></section>
    <nav></nav>
    <footer></footer>
    <address></address>
    <aside></aside>
```

```
    <main></main>
    <section></section>
    <article></article>
<!-- Text content -->
    <blockquote></blockquote>
    <div></div>
    <figure></figure>
    <menu></menu>
<!-- Ordered list -->
    <ol></ol>
<!-- Unordered list -->
    <ul></ul>
<!-- List item -->
    <li></li>
```

For more information visit the Mozilla developer page.

Text content

```
<!-- Different headers -->
<!-- There can only ever been one h1 tag -->
    <h1></h1>
<!-- Every other tag can be used multiple times -->
    <h2></h2>
    <h3></h3>
    <h4></h4>
    <h5></h5>
    <h6></h6>
<!-- Paragraph tag -->
    <p></p>
<!-- Underline text -->
    <u></u>
<!-- Italicize text -->
    <i></i>
<!-- put text in quotes -->
    <q></q>
<!-- break tag breaks up a line of text -->
    <br>
```

```
<!-- horizontal rule draws a line across the canvas-->
    <hr>
```

Links

```
<!-- anchor tag means a link -->
<!-- href or hyper reference houses the link which may include -->
<!-- file paths to a sub page or a external web link, or URL -->
    <a href="https://luxformel.info/index.html" >link text</a>
<!-- between the tag is the text to click on -->
    <a href="" target="">link text</a>
<!-- target attribute is optional -->
<!-- _blank opens the link in a new tab -->
    <a href="rootfolder/index.html" target="_blank">link text</a>
```

Images

Images enrich content and must include an alt attribute for accessibility.

```
  <!-- Basic image tag -->
  <img src="/img/example.jpg" alt="Description of image"/>
  <!-- Responsive image with srcset -->
  <img src="/img/example-small.jpg"
       srcset="/img/example-small.jpg 480w, /img/example.jpg 1024w"
       sizes="(max-width: 600px) 480px, 1024px"
       alt="Example responsive image"/>
```

Tables

Use tables for tabular data. Add a caption and use header cells where appropriate.

```html
<table>
  <caption>Monthly sales (EUR)</caption>
  <thead>
    <tr><th>Month</th><th>Sales</th></tr>
  </thead>
  <tbody>
    <tr><td>January</td><td>1.200</td></tr>
    <tr><td>February</td><td>1.450</td></tr>
  </tbody>
</table>
```

Forms

Forms collect user input. Always pair inputs with <label> for usability.

```html
<form action="/subscribe" method="post">
  <label for="email">Email:</label>
  <input type="email" id="email" name="email" required/>
  <label for="plan">Plan:</label>
  <select id="plan" name="plan">
    <option value="free">Free</option>
    <option value="pro">Pro</option>
  </select>
  <button type="submit">Subscribe</button>
</form>
```

Media: Audio & Video

Use native tags to embed audio and video with controls and fallback content.

```html
<audio controls>
  <source src="/media/song.mp3" type="audio/mpeg">
  Your browser does not support audio.
```

```
</audio>

<video controls width="640">
  <source src="/media/video.mp4" type="video/mp4">
  <p>Fallback: download the video <a href="/media/video.mp4">here</
</video>
```

Meta tags & SEO

Meta tags help with search engines and social sharing. Put them in the <head>.

```
<meta name="description" content="Short description for search resu
<meta name="robots" content="index, follow" />
<meta property="og:title" content="Page title for social" />
```

Accessibility

Accessible sites reach more users. Use semantic elements, alt, proper labels and ARIA when necessary.

- Provide meaningful alt text for images.
- Use <label> with form controls.
- Ensure sufficient color contrast in CSS (see `/css/main.css`).

Complete example

Small example combining several elements into a simple page:

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="en">
<head>
  <meta charset="utf-8"/>
```

```
    <meta name="viewport" content="width=device-width,initial-scale=1
    <meta name="description" content="Tiny example page"/>
    <title>Example</title>
  </head>
  <body>
    <header><h1>Welcome</h1></header>
    <main>
      <section>
        <h2>Picture</h2>
        <img src="/img/example.jpg" alt="Landscape"/>
      </section>
      <section>
        <h2>Subscribe</h2>
        <form><label>Email<input type="email"/></label></form>
      </section>
    </main>
    <footer>© Luxformel</footer>
  </body>
  </html>
```

ELÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE

Multiples d'un entier naturel

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots\}$$

Définition

Soit a un entier naturel. Un multiple de a est un entier naturel de la forme $a \cdot n$, où n est un entier. L'ensemble des multiples de a est noté : $a \cdot \mathbb{N}$.

Pair

Tout entier pair est de la forme $2 \cdot n$, où n est un entier.

Impair

Tout entier impair est de la forme $2n + 1$ ou $2n - 1$, où n est un entier

Diviseurs d'un entier naturel

Définition

Soit a et b deux entiers naturels. On dit que b est un diviseur de a ou encore que b divise a (on écrit $b \mid a$) si et seulement si a est un multiple de b.

Définition

L'ensemble des diviseurs d'un entier naturel a est noté Div(a).

Caractères de divisibilité

1. Un entier naturel est divisible par 2 si et seulement si il se termine par 0,2,4,6 ou 8
2. Un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

3. Un entier naturel est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

4. Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si il se termine par 0 ou par 5.

5. Un entier naturel est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 et par 3.

6. Soit N un entier naturel, u son dernier chiffre et n l'entier obtenu en biffant u dans N. (Par exemple, si $N = 364$, alors $u = 4$ et $n = 36$). Alors N est divisible par 7 si et seulement si $n - 2u$ est divisible par 7.

7. Un entier naturel est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par les 3 derniers chiffres est divisible par 8.

8. Un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9

9. Un entier naturel est divisible par 10 si et seulement si il se termine par 0.

10. Un entier naturel est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.

11. Un entier naturel est divisible par 25 si et seulement si il se termine par 00, par 25, par 50 ou par 75.

12. Un entier naturel est divisible par 100 ssi il se termine par 00.

Nombres premiers et factorisation première

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs 1 et lui-même et qui est plus grand que 1.

Remarque

1. 1 n'est pas un nombre premier car $Div(1) = 1$. (1 a un seul diviseur.)
2. 0 n'est pas un nombre premier car $Div(0) = \mathbb{N}$. (0 a une infinité de diviseurs.)
3. 2 est le seul nombre premier pair.
4. Il y a une infinité de nombres premiers.

Définition

Les entiers > 2 qui ne sont pas premiers sont dits composés.

Crible d'Eratosthène

Crible d'Eratosthène est une méthode permettant de trouver assez vite tous les nombres premiers jusqu'à un entier naturel M donné.

On écrit la liste de tous les entiers de 2 jusqu'à M.

1. On garde $p_1 = 2$ et on élimine tous les autres multiples de 2
2. On garde $p_2 = 3$ qui est le premier élément non éliminé après 2 et on élimine tous les autre multiples de 3.
3. On garde $p_3 = 5$ qui est le premier élément non éliminé après 3 et on élimine tous les autre multiples de 5.
4. On répète le procédé aussi longtemps que $p_k \leqslant \sqrt{M}$.

Les nombres non éliminés sont les nombres premiers $\leqslant M$

Factorisation première

Si l'on décompose un entier naturel $n \geqslant 2$ en autant de facteurs entiers diffèrent de 1 que possible, alors tous ces facteurs seront des nombres premiers. On obtient ainsi la factorisation première (f.p.) ou décomposition en facteurs premiers de n.

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel $\geqslant 2$ admet une factorisation première unique.

NOMBRES COMPLEXES

Cardan

Cette méthode permet d'obtenir des formules, appelées formules de Cardan, donnant en fonction de p et q les solutions de l'équation :

$$x^3 + pz + q = 0$$

Conditions d'existence:

$$4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$$

Formule de Cardan

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Définition du nombre complexe

Définition

On défini le nombre complexes i tel que:

$$i^2 = -1$$

Définition de l'ensemble des nombres complexes

Théorème

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tel que:

1. $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres réels.
2. $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que: $i^2 = 1$
3. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de $\mathbb{C}$.

4. Chaque élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme:

   $z = a + bi \ (avec\, a,\ b \in \mathbb{R})$

Remarque:

Une relation d'ordre n'existe pas sur $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas des nombres complexes, ni parler de nombres complexes positifs ni négatifs puisque on ne peut pas les comparer à 0.

Définitions:

1. L'écriture $z = a + bi$ est appelée la <u>forme algébrique</u> du nombre complexe z

2. Soit $z = a + bi$

   Le nombre réel a est appelé la <u>partie réelle</u> du nombre complexe z

   Le nombre réel b est appelé la <u>partie imaginaire</u> du nombre complexe z

3. Si $z = a$, alors z est un <u>nombre réel</u>

   Si $z = b$, alors z est un <u>imaginaire pur</u>

Conséquences

1. $a = Re(z); b = Im(z) : z = a + bi = Re(z) + Im(z)i$

2. z est un réel $\Leftrightarrow\ z = a \Leftrightarrow Im(z) = 0$

3. z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow\ z = bi \Leftrightarrow Re(z) = 0$

<u>Égalité dans</u> $\mathbb{C}$

Définition:

Si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Re\,(z) = Re\,(z') \\ Im\,(z) = Im\,(z') \end{cases}$$

Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe représente géométriquement la symmetrie par rapport au axes des abscisses.

Nombres complexes conjuguées

Définition:

Soit $z = a + bi$. On appelle nombre complexe conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$

Remarques:

1. $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow \overline{\overline{(a+bi)}} = \overline{(a-bi)} = z$
2. Relation fondamentale

   $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

Factorisation de deux carrées:

$a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$

Opérations sur les nombres conjugués

Théorème

$$z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Définition

Soit $z = a + bi$ et $|z| = a - bi$:

$$z = |z| \Leftrightarrow a + bi = a - bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Im(z) = 0$$

Il suit donc que z est un nombre réel.

cqfd.

Théorème

$$\overline{z\ +\ z'} =\ \overline{z}\ + \overline{z'}$$

Démonstration

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

$$\overline{z\ +\ z'}$$
$$= \overline{(a + bi) + (a' + b'i)}$$
$$= \overline{(a + a') + (b + b')i}$$
$$= \left(a + a'\right) - \left(b + b'\right)$$
$$=\ a + a' - bi - b'i$$
$$= (a - bi) + \left(a' - b'i\right)$$
$$= \overline{z}\ +\ \overline{z'}$$

cqfd.

Théorème

$$\overline{z\ \cdot\ z'} = \overline{z}\ \cdot\ \overline{z'}$$

Démonstration

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

D'une part:

$$\overline{z\ \cdot\ z'}$$
$$= \overline{(a + bi)\,(a' + b'i)}$$

$$= \overline{aa' + ab'i + a'bi - bb'}$$
$$= \big(aa' - bb'\big) - \big(ab' + a'b\big)i$$

D'autre part:

$$\overline{z} \cdot \overline{z'}$$
$$= \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(a' + b'i)}$$
$$= (a - bi) \cdot \big(a' - b'i\big)$$
$$= aa' - ab'i - a'bi - bb'$$
$$= \big(aa' - bb'\big) - \big(ab' + a'b\big)i$$

Donc,

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$$

cqfd.

<u>Module</u>

Definition

Soit $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormé du plan et soit M le point d'affixe $z = a + bi$.

On appelle le module complexes $z = a + bi$ la norme de vecteur $\overrightarrow{OM}$

donc,

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$$

Propriété

Soit $z = a + bi$, alors le module de z, noté $|z|$ est donné par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque

$$|z|^2 = \overline{z}z$$

Argument

Soit $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormal direct du plan et soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit $M(z)$ et soit θ une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$

On appelle argument de z, le nombre

$$\arg(z) = \theta \ + \ k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z) = \theta \ mod(2\pi)$$

Remarque

Vu la définition, $z = 0$ n'a pas d'argument

Forme trigonométrique

Théorème

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme suivante, dite forme trigonométrique:

$$z = r\left(cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right)$$

$$où\ r = |z| > 0\ et\ \theta = \arg(z)\ mod\left(2\pi\right)$$

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\cos(\theta) = \frac{côté\ adjacent}{hypoténuse} = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow a = r \cdot \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{cote\ oppose}{hypoténuse} = \frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow b = r \cdot \sin(\theta)$$

donc,

$$z = a + bi$$

$$= r\cos(\theta) + r[\sin(\theta)]i$$

$$= r\cos(\theta) + i\sin(\theta),\ avec\ r = |z|\ et\ \theta = \arg(z)$$

Remarque

Forme abrégée de la forme trigonométrique est $z = r \cdot cis(\theta)$

Égalité des deux nombre complexes trigonométrique

Soit $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ et $z' = r'[\cos(\theta') + i\sin(\theta')]$

$$z = z'$$

$$\Leftrightarrow r = r'\ et\ \ \theta = \theta'\ mod\,(2\pi)$$

Modules et argument d'un produit

Théorèmes

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z'

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

Démonstration 1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z|^2 = zz'$

$$|z \cdot z'|^2 = (z \cdot z') \cdot \overline{(z \cdot z')}$$

$$= z \cdot \cdot \bar{z} \cdot z' \cdot \bar{z}'$$

$$= |z|^2 + |z'|^2$$

Comme $|z \cdot z'|$ et $|z| \cdot |z'|$ sont des nombres réels positifs, on a que:

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

cqfd

Démonstration 2

Soit $z = r\left[\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right]$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg\left(z\right)$

$z' = r'\left[\cos\left(\theta'\right) + i\sin\left(\theta'\right)\right]$, avec $r' = |z'|$ et $\theta' = \arg\left(z'\right)$

alors,

$$z \cdot z' = r\left[\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right] \cdot r'\left[\cos\left(\theta'\right) + i\sin\left(\theta'\right)\right]$$

$$= r \cdot r'\left[\cos\left(\theta\right)\cos\left(\theta'\right) + i\cos\left(\theta\right)\sin\left(\theta'\right) + i\sin\left(\theta\right)\cos\left(\theta'\right) + i^2\sin\left(\theta\right)\sin\left(\theta'\right)\right]$$

$$= r \cdot r'\left\{\left[\cos\left(\theta\right)\cos\left(\theta'\right) - \sin\left(\theta\right)\sin\left(\theta'\right)\right] + i\left[\sin\left(\theta'\right)\cos\left(\theta\right) + \cos\left(\theta'\right)\sin\left(\theta\right)\right]\right\}$$

$$= r \cdot r'\left[\cos\left(\theta + \theta'\right) + i\sin\left(\theta + \theta'\right)\right]$$

Comme $r \cdot r' = |z| \cdot |z'| > 0$ et que $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ on a:

$$\arg\left(z \cdot z'\right) = \theta + \theta' = \arg\left(z\right) + \arg\left(z'\right)$$

cqfd

Module et argument d'un quotient

Théorème

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z'

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z\right) - \arg\left(z'\right)$$

Démonstration 1

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'} \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$$

$$= \frac{z}{z'} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$= \frac{z \cdot \bar{z}}{z' \cdot \bar{z'}}$$

$$= \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

$$= \left(\frac{|z|}{|z'|}\right)^2$$

Comme $\left|\frac{z}{z'}\right|$ et $\frac{|z|}{|z'|}$ sont des nombres réels positifs, on a que

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Démonstration 2

Posons $u = \frac{z}{z'} \;\Leftrightarrow\; u \cdot z' = z$

Par suite:

$$\arg\left(u \cdot z'\right) = \arg\left(z\right)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(u\right) + \arg\left(z'\right) = \arg\left(z\right)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg\left(z'\right) = \arg\left(z\right)$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z\right) - \arg\left(z'\right)$$

Conséquences

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg\left(z^n\right) = n \cdot \arg\left(z\right)$$

<u>Notation polaire</u>

On appelle module du nombre complexe z le module du vecteur image $\overrightarrow{OM}$ associé à z. On appelle argument du nombre complexe z l'angle polaire du vecteur image $\overrightarrow{OM}$ associé à z (à $2k\pi$ près) (avec $k \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{cases} r = |z| = OM \; avec \; r \geqslant 0 \\ \theta = \arg\left(z\right) = \left(Ox,\; OM\right) + 2k\pi \end{cases}$$

On note alors le nombre complexe z sous la forme polaire

$$z = [r; \theta]$$

Notation exponentielle

Définition

Le complexe du module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Théorème

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle : $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ mod\,(2\pi)$

Démonstration

z, non nul, a pour forme trigonométrique $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ avec $r = |z|$. Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, z s'écrit donc sous la forme $z = re^{i\theta}$

Formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Généralisation

Pour un nombre complexe quelconque, dont le module est différent de l'unité, le cosinus et sinus de l'argument s'obtiennent comme suit

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \frac{z}{r} \\ \bar{z} = re^{-i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \frac{\bar{z}}{r} \end{cases}$$

On obtient alors,

$$\cos(\theta) = \frac{z + \bar{z}}{2r}$$

$$\sin(\theta) = \frac{z - \bar{z}}{2ir}$$

Polynôme trigonométrique

Définition

Un polynôme trigonométrique est un polynôme dont chaque terme est un produit de fonctions sinus et cosinus d'angles quelconques.

Linéarisation

Définition

Chercher à linéariser revient à remplacer les produits des fonctions sinus et cosinus par des sommes (pondérées par des coefficients réels ou complexes) de fonctions sinus et cosinus dont les angles ont, eux aussi, été modifiés

Formules de Moivre

Théorème

Soit un nombre complexe de module unité $z = e^{i\theta}$

L'élévation à la puissance n donne:

$$z^n = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$z^n = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n$$

Or

$$z^n = e^{in\theta}$$

$$z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

D'où la formule de moivre:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n$$

Remarque

Cette relation reste valable lorsque l'exposant n est négatif.

PUISSANCES ET RÈGLES DE PRIORITÉ

Puissances d'exposant positif

Définition

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul. Le nombre a, à la puissance n (ou exposant n) est défini par :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n\ facteurs}$$

Remarque

Par définition on dit que: $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

Important

0^0, n'existe pas et n'est pas défini

Vocabulaire

a^n se lit a exposant n ou a puissance n

a est la base

n est l'exposant

Cas particuliers

a^2 se lit a au carré

a^3 se lit a au cube

Règle de calcul

Pour calculer le produit de puissances de même base, on garde la base et on additionne les exposants:

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p},\ avec\ a \neq 0$$

Règle de calcul

Pour calculer la puissance d'une puissance, on garde la base et on multiplie les exposants :

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p},\ avec\ a \neq 0$$

Règle de calcul

Pour calculer la puissance d'un produit, on élève chaque facteur de ce produit à cette puissance :

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,\ avec\ a \neq 0\ et\ b \neq 0$$

Règle de calcul

Pour calculer la puissance d'un quotient, on élève le numérateur et le dénominateur à cette puissance :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ avec\ a \neq 0\ et\ b \neq 0$$

Règle de calcul

Pour calculer le quotient de puissance de même base, on garde la base et on soustrait l'exposant du numérateur à celui du dénominateur :

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p},\ avec\ a \neq 0$$

Puissances à exposant négatifs

Définition

Soit a un nombre non nuls et n un nombre.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Règle de priorité

En l'absence de parenthèses, on calcule les puissances avant d'effectuer les autres opérations de calcul.

Parathese Exposant Multiplication Division Addition Soustraction. On dit: (PEMDAS)

Notation scientifique

Définition

Un nombre positif est écrit en notation scientifique quand il est écrit sous la forme de

$$a \cdot 10^n,\ avec\ 0 < a < 10$$

n est un nombre entier relatif

Exemple

$$3,6 \cdot 10^6 = 3\ 600\ 000$$

CONTINUITÉ

Continuité sur un intervalle

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un nombre qui appartient à I.

1. La fonction f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. La fonction f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout nombre de I.

Dérivabilité et continuité

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre qui appartient à I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction g définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a pour limite le nombre réel $f'(a)$ lorsque x tend vers a.

$$\forall x \neq a :$$
$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$\Leftrightarrow g(x) \cdot (x - a) = f(x) - f(a)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot (x - a) + f(a)$$

On obtient donc

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\underbrace{\underbrace{g(x)}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\to 0}}_{\to 0} + f(a) \right)$$

f est donc continue en a

cqfd

Attention

La réciproque du Théorème est fausse. Une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a.

Démonstration

Démonstration par un contre exemple.

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 et sa représentation graphique admet une tangente verticale au point $(0;0)$. Mais la fonction racine carrée est continue en 0, car:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

cqfd

Fonctions continues et résolution d'équations

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et si k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un nombre réel c de $[a;b]$ tel que

$$f(c) = k$$

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [a; b]$

1. L'image de l'intervalle I par f est l'intervalle $J = [f(a); f(b)]$
2. Pour tout nombre réel k de $[f(a); f(b)]$, l'équation

$$f(x) = k$$

a une solution et une seule dans l'intervalle $[a; b]$

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans I.

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

1. L'image $f(I)$ d'un intervalle I par f est un intervalle J.
2. Pour tout nombre réel k de J, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans I.

Résumé

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$Si\ I =$	$f\ est\ strictement\ croissante\ sur\ I$	$f\ est\ strictement\ décroissante$
	$f(I)\ est\ l'intervalle$	$f(I)\ est\ l'intervalle$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$

$]a;b]$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim\limits_{x\to a} f(x)[$
$[a;b[$	$[f(a); \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x); f(a)]$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x); \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x); \lim\limits_{x\to b} f(x)[$

DÉRIVATION

Nombre dérivée

Definition

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I tel que $a \in I$.

On dit que f est dérivable si et seulement si le taux d' accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers un nombre réel L lorsque x tend vers a.

Ce nombre L est appelé nombre dérivé et noté $f'(x) = L$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tangente

Definition

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et f est dérivable en a. $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f.

La droite qui passe par le point $A\,(a; f(a))$ et de pente $f'(a)$ est appelée tangente t_A à $\mathscr{C}_f$ au point A.

Théorème

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a et t_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.

Alors t_A a pour équation :

$$t_A : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Fonctions dérivées

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est dérivable sur I, si elle est dérivable en tout nombre $a \in I$. Alors la fonction:

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

est appelée la fonction dérivée de f.

Dérivées des fonctions

Voici les démonstrations des fonctions dérivées.

Ces dérivées sont aussi résument dans ce tableau.

Sense de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

Extremums d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- $f(a)$ est le minimum de f sur I si $\forall x \in I : f(x) \geqslant f(a)$
- $f(a)$ est le maximum de f sur I si $\forall x \in I : f(x) \leqslant f(a)$

On dit que f admet un extremum sur I si f admet un minimum ou un maximum sur I.

Extremums locales

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$

- f admet un minimum local en c, s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[\subset I$ et contenant c tel que $\forall x \in]a;b[$: $f(x) \geqslant f(c)$
- f admet un maximum local en c, s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[\subset I$ et contenant c tel que $\forall x \in]a;b[$: $f(x) \leqslant f(c)$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $c \in I$. Si f admet un extremum locale en c, alors $f'(c) = 0$. Cela signifie que la tangente à la courbe au point de coordonnées $(c; f(c))$ est horizontale.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE TAYLOR

Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition

Soit I un intervalle, soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1, et soit $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

où

$$[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Démonstration

On note que

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

et on intègre entre a et b.

$\square$

Théorème

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivables. Alors pour tout $a, x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Démonstration

On va montrer cette formule par récurrence sur n. On vérifie d'abord la formule pour $n = 0$, qui s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \frac{f(a)}{1}(x-a)^0 + \int_a^x f'(t)dt$$

On admet maintenant la formule pour n, et on va la montrer pour $n+1$. On a donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt$$

On intègre par parties le terme intégral, en dérivant le terme $f^{n+1}(t)$ et en intégrant le terme $\frac{(x-t)^n}{n!}$, dont une primitive est $-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt$$

$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

On vérifie directement que

$$\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

Le résultat suit.

□

Formule de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, et soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Démonstration

Comme on a déjà vu la formule avec reste intégral, il suffit de montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Mais on peut interpréter l'expression de gauche comme un barycentre des valeurs de $f^{(n+1)}(t)$ pour t dans $[a, b]$.

Mais

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Il suit que

$$\int_a^b \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} m$$

où m est compris entre le minimum et le maximum des valeurs de f sur $[a, b]$.

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $m = f(c)$, pour un certain $c \in [a, b]$.

$\square$

Formule de Taylor-Young

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, et soit $a \in I$. On a alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration

Ceci suit directement du théorème de Taylor-Lagrange, puisque f est de classe C^{n+1}, donc $f^{(n+1)}$ est continue, et elle est donc bornée au voisinage de a.

Intégration de séries de Taylor

Théorème

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, admettant en a le développement en série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + O((x-a)^{n+1})$$

Soit F une primitive de f, c'est-à-dire que $F' = f$. Alors F admet la série de Taylor suivante en a :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + O((x-a)^{n+2}).$$

Démonstration

On peut écrire la série de Taylor de f sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + r_n(x)$$

et par définition du O il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x-a| \leq \alpha$, $|r_n(x)| \leq C(x-a)^{n+1}$.

En intégrant cette égalité, on obtient que

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + r_{n+1}(x)$$

avec

$$r_{n+1}(x) = \int_a^x r_n(t)dt$$

On a donc

$$|r_{n+1}(x)| \leq \left| \int_a^x C(t-a)^{n+1}dt \right| \leq \frac{C}{n+2}(x-a)^{n+2}$$

et le résultat suit.

$\square$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et soit $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit encore $f \in C^0(I)$. L'équation

$$F(x, y, Dy, \cdots, D^n y) = f \quad (*)$$

est appelée équation différentielle ordinaire d'ordre n. Une solution de (*) est une fonction $y \in C^n(I)$ telle que (*) soit satisfaite en tout point $x \in I$.

Définition

Une équation différentielle est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est alors l'équation différentielle :

$$y' = a(x)y (*)$$

Proposition

Soit $a : I \to \mathbb{R}$, et soit A une primitive de a. Les solutions de l'équation (*) sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \exp(A(x))$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Démonstration

Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \lambda \exp(A(x))$, on a alors pour tout $x \in I$

$$\phi'(x) = \lambda A'(x) \exp(A(x)) = \lambda a(x) \exp(A(x)) = a(x)\phi(x)$$

si bien que ϕ est solution de $(*)$.

Réciproquement, soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une solution de $(*)$, et soit $J \subset I$ un intervalle où ϕ ne s'annule pas. On a alors pour tout $x \in J$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = a(x)$$

et donc

$$\log(|\phi(x)|)' = a(x)$$

et on obtient en intégrant que

$$\log|\phi(x)| = A(x) + C$$

où C est une constante réelle. On en déduit qu'on a bien sur J

$$\phi(x) = \lambda \exp(A(x))$$

Il suit en particulier que ϕ ne peut pas s'annuler sur l'adhérence de J, si bien que $J = I$, et ϕ a donc la forme cherchée sur tout I.

$\square$

Corollaire

Si $a(x)$ est égale à une constante $a \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle homogène

$$y' = ay$$

sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda \exp(ax)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution générale de l'équation

Lemma

Soit y_0 une solution particulière de (6). Une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est solution de (6) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (7).

Démonstration

Posons $z = y - y_0$. Alors

$$\begin{aligned} y' - ay - b &= (y_0 + z)' - a(y_0 + z) - b \\ &= (y_0' - ay_0 - b) + (z' - az) \\ &= z' - az \end{aligned}$$

et le résultat suit.

□

Variation de la constante

Théorème

On suppose a, b continues. Soit A une primitive de a. Alors les solutions de (6) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda(x) \exp(A(x))$$

où λ est une primitive de $x \mapsto b(x) \exp(-A(x))$.

Problème de Cauchy

Théorème du problème de Cauchy

Soit $x_0 \in I$, soient $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Il existe une unique solution ϕ de (8) telle que $\phi(x_0) = y_0$ et que $\phi'(x_0) = y_1$.

Théorème

Soit a, b continues sur I, soit $x_0 \in I$, et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution ϕ de (6) sur I telle que $\phi(x_0) = y_0$.

Équation de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^n$$

où $n > 1$ est entier et α, β sont continues.

Solution

Pour résoudre ces équations, on divise par y^n et on pose $z = 1/y^{n-1}$. On obtient l'équation équivalente :

$$-\frac{1}{n-1}z' = \alpha(x)z + \beta(x)$$

qui est une équation linéaire du premier ordre.

Équation de Riccati

C'est l'équation de la forme

$$y' = \alpha(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x)$$

Solution

On peut la résoudre dès lors qu'on connaît une solution particulière y_1. En effet on peut alors poser $y = z + y_1$, et on obtient l'équation suivante sur z:

$$z' = \alpha(x)z^2 + (2\alpha(x)y_1(x) + \beta(x))z$$

C'est une équation de Bernoulli, dont on a vu une méthode de résolution.

Solutions de l'équation homogène

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (9) forme un espace vectoriel.

Démonstration

On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{C}$. Il suffit pour cela de remarquer que :

- la fonction nulle est solution
- si y_1 et y_2 sont deux solutions, alors $y_1 + y_2$ est une solution
- si y est une solution et $\lambda \in \mathbb{R}$ respectivement $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λy est encore solution

Wronskien

Définition

Soient y_1, y_2 deux solutions sur I de l'équation homogène (9). Leur Wronskien est la fonction définie sur I par le déterminant suivant :

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Proposition

Soient y_1, y_2 deux solutions sur I de l'équation homogène (9), soit $x_0 \in I$. On a alors pour tout $x \in I$:

$$W_{y_1,y_2}(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) W_{y_1,y_2}(x_0)$$

Démonstration

On remarque que

$$W'_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x) & -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -p(x)y_1'(x) & -p(x)y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$= -p(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$= -p(x)W_{y_1,y_2}(x)$$

On peut maintenant intégrer cette équation différentielle linéaire du premier ordre, et on obtient le résultat.

□

Corollaire

Le Wronskien de y_1 et y_2 est soit identiquement nul, soit partout non nul.

Système fondamental de solutions

Définition

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (9). Elles forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène (9) si et seulement si $W_{y_1,y_2} \neq 0$ sur I.

Proposition

Supposons que y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène (9). Alors toute solution de cette équation peut s'écrire sous la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes.

Démonstration

Comme le Wronskien est partout non-nul, on peut résoudre pour tout $x \in I$ l'équation linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

On peut ré-écrire cette relation sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = c_1(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Pour montrer que c_1 et c_2 sont constantes, on va dériver cette équation, on obtient que

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = c_1'(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$
$$+c_1(x) \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_1''(x) \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} y_2'(x) \\ y_2''(x) \end{pmatrix}$$

Comme y, y_1 et y_2 sont des solutions de (9), on a :

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ -p(x)y'(x) - q(x)y(x) \end{pmatrix} = c_1'(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$
$$+c_1(x) \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ -p(x)y_1' - q(x)y_1(x) \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} y_2'(x) \\ -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{pmatrix}$$

Mais il suit de la définition de c_1 et c_2 que

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ -p(x)y'(x) - q(x)y(x) \end{pmatrix} = c_1(x) \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ -p(x)y_1' - q(x)y_1(x) \end{pmatrix}$$
$$+c_2(x) \begin{pmatrix} y_2'(x) \\ -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x) \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$c_1'(x)\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + c_2'(x)\begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = 0$$

Or on sait par l'hypothèse sur le Wronskien que

$$\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

pour tout $x \in I$, et il suit que $c_1'(x) = c_2'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Les fonctions c_1 et c_2 sont donc constantes, ce qui prouve le résultat.

$\square$

Remarque

Supposons qu'on connaisse une solution, disons y_1, de l'équation homogène (9). On peut alors trouver une seconde solution de la manière suivante. On cherche une solution y sous la forme $y = vy_1$, et on constate que (9) se traduit par une équation différentielle du premier ordre sur v'. Si on peut résoudre cette équation différentielle, on peut trouver v' puis ensuite intégrer pour obtenir v. Les fonctions y_1 et vy_1 forment alors un système fondamental de solutions de (9).

Lemma

Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre (8). Alors les solutions de (8) sont exactement les fonctions de la forme $y = y_0 + z$, où z est une solution de l'équation homogène (9).

Variation des constantes

Proposition

Soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène (9). Pour tout $x \in I$, on note $c_1(x)$ et $c_2(x)$ les nombres tels que

$$\begin{cases} c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = 0 \\ c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) = r(x) \end{cases}$$

qui existent et sont uniques puisque le Wronskien est non nul. Alors pour tout $x_0 \in I$ la fonction suivante est solution de (8):

$$y_0(x) = \left(\int_{x_0}^{x} c_1(t)dt\right)y_1(x) + \left(\int_{x_0}^{x} c_2(t)dt\right)y_2(x)$$

Démonstration

Posons pour simplifier les notations

$$C_1(x) = \int_{x_0}^{x} c_1(t)dt, \quad C_2(x) = \int_{x_0}^{x} c_2(t)dt$$

Ainsi,

$$y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} y_0''(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \\ &= r(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} y_0''(x) + p(x)y_0'(x) + q(x)y_0(x) &= r(x) + C_1(x)(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) \\ &+ C_2(x)(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)) \\ &= r(x) \end{aligned}$$

ce qui montre bien que y_0 est solution de l'équation avec second membre (8).

$\square$

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Lemma

- Supposons que s est solution du polynôme caractéristique (12). Alors la fonction $x \mapsto e^{sx}$ est solution de (11)
- Si s est solution double de (12), alors la fonction $x \mapsto xe^{sx}$ est aussi solution de l'équation homogène (11)

Démonstrations

- Pour le premier point, on note simplement que si $y(x) = e^{sx}$ alors

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = (as^2 + bs + c)e^{sx}$$

  et le résultat suit.

- Pour le second point, on calcule de même que si $y(x) = xe^{sx}$ alors \]

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= (a(s^2x + 2s) + b(sx + 1) + cx)e^{sx} \\ &= ((as^2 + bs + c)x + (2as + b))e^{sx} \end{aligned}$$

  Or comme s est solution double de (12), on a $2as + b = 0$, si bien que $y(x) = xe^{sx}$ est encore solution de l'équation homogène.

$\square$

Théorème

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- si $\Delta = 0$, alors l'équation (12) a une unique solution s double. Dans ce cas, les solutions de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{sx}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- sinon, l'équation (12) a deux solutions distinctes s_1 et s_2, et les solutions de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda_1 e^{s_1 x} + \lambda_2 e^{s_2 x}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Cas des équations à coefficients réels

Lemmes

- Supposons que $s \in \mathbb{R}$ est solution du polynôme caractéristique (12). Alors la fonction $x \mapsto e^{sx}$ est solution de (11).
- Si s est solution double de (12), alors la fonction $x \mapsto xe^{sx}$ est aussi solution de l'équation homogène (11).
- Si (12) n'a pas de racine réelle, alors il a deux racines complexes conjuguées de la forme $r \pm i\omega$. Dans ce cas, les fonctions $x \mapsto e^{rx}\cos(\omega x)$ et $x \mapsto e^{rx}\sin(\omega x)$ sont solutions de l'équation homogène (11).

Théorème

On suppose ici $a, b, c \in \mathbb{R}$, et on pose encore $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- si $\Delta = 0$, alors l'équation (12) a une unique solution s double. Dans ce cas, les solutions de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{sx}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- si $\Delta > 0$, l'équation (12) a deux solutions réelles distinctes s_1 et s_2, et les solutions réelles de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda_1 e^{s_1 x} + \lambda_2 e^{s_2 x}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

- si $\Delta < 0$, l'équation (12) a deux solutions complexes conjuguées s_1 et $s_2 = \tau \pm i\omega$, et les solutions réelles de l'équation homogène (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda e^{\tau x} \cos(\omega x) + \mu e^{\tau x} \sin(\omega x)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur

Proposition

Les solutions de l'équation homogène associée à (15) forment un espace vectoriel de dimension n.

Théorème du problème de Cauchy

Pour tout $x_0 \in I$ et tout $(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\in \mathbb{C}^n$) il existe une unique solution de (15) telle que pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, y^{(i)}(x_0) = y_i$.

Définition

Soient $y_1, y_2, \cdots, y_n$ des solutions de (16) sur l'intervalle I. Le Wronskien du système $(y_1, \cdots, y_n)$ est la fonction définie par

$$W_{y_1,\cdots,y_n}(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit $W_{y_1,\cdots,y_n}(x) = 0$ pour tout $x \in I$, soit $W_{y_1,\cdots,y_n}(x)$ ne s'annule en aucun point de I.

Définition

Le n-uplet $(y_1, \cdots, y_n)$ de solutions de (16) forme un système fondamental de solutions si et seulement si $W_{y_1,\cdots,y_n}(x) \neq 0$ pour un $x \in I$.

Propositions

- Soit $(y_1, \cdots, y_n)$ un système fondamental de solutions de (16). Alors toute solution y de (16) sur I s'écrit sous la forme

  $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

  avec $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ (resp. $\in \mathbb{C}$).

- L'équation (16) admet un système fondamental de solution.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Normes sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle qu'on dispose sur $\mathbb{R}^n$ de plusieurs normes différentes, en particulier :

- la norme L^1, définie pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- la norme euclidienne, définie pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

- la norme L^∞, définie pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Fonctions partielle

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$, $U \subset \mathbb{R}^p$. Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$, on peut définir la i-ème fonction partielle de f en a comme la fonction définie par

$$f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_p)$$

Cette fonction est bien sûr définie pour les x tels que $(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_p) \in U$.

Continuité

Proposition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue. Alors les fonctions partielles de f sont continues en tout point de U.

Démonstration

Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$ fixé. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on définit la i-ème fonction partielle de f en a par :

$$f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_p).$$

On souhaite montrer que f_i est continue en $x = a_i$. Comme f est continue en a, cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|x - a\| < \delta$$

alors

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a_i| < \delta$, et considérons le point :

$$x^{(i)} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_p).$$

Alors $\|x^{(i)} - a\| = |x - a_i| < \delta$, donc :

$$\|f(x^{(i)}) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\|f_i(x) - f_i(a_i)\| = \|f(x^{(i)}) - f(a)\| < \varepsilon,$$

ce qui montre que f_i est continue en $x = a_i$.

$\square$

Théorème

Toute fonction linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre est continue.

Démonstration

Quitte à choisir une base dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée, on peut se ramener au cas d'une application linéaire $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. De plus, comme toutes les

normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer la continuité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On note $M = (m_{j,i})_{j=1,\ldots,q;\, i=1,\ldots,p}$ la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$. Si $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, alors

$$u(x) = y = (y_1, \ldots, y_q), \quad \text{avec } y_j = \sum_{i=1}^{p} m_{j,i} x_i \quad \text{pour tout } j \in \{1, \ldots, q\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. On veut montrer la continuité de u en x. Soit $\omega > 0$ et posons $\varepsilon = \omega/(mp)$, où

$$m = \sup\{|m_{j,i}| \mid j \in \{1, \ldots, q\},\ i \in \{1, \ldots, p\}\}$$

Soit $x' \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|x' - x\|_\infty < \varepsilon$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$:

$$|x'_i - x_i| < \varepsilon.$$

On considère $y = u(x)$ et $y' = u(x')$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$, on a :

$$\begin{aligned}
|y'_j - y_j| &= \left| \sum_{i=1}^{p} m_{j,i}(x'_i - x_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} |m_{j,i}| \cdot |x'_i - x_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} m \cdot \|x' - x\|_\infty \\
&= mp\varepsilon \\
&= \omega
\end{aligned}$$

Donc $\|y' - y\|_\infty < \omega$, ce qui prouve la continuité de u en x.

$\square$

Dérivée suivant un vecteur

Définition

Soit $x \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$. Si la limite suivante existe :

$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

alors on dit que f admet en x une dérivée suivant le vecteur v, et on note cette dérivée $\partial_v f(x)$.

Définition

La i-ème dérivée partielle de f en $x \in U$, pour $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{e_i} f.$$

On note parfois plus simplement $\partial_i f$ pour $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. On peut remarquer que les dérivées partielles de f correspondent exactement aux dérivées des fonctions partielles.

Remarque

Les règles de calcul usuelles pour les dérivées restent valables pour les dérivées par rapport à un vecteur et pour les dérivées partielles. On a par exemple :

$$\partial_v(fg) = f \cdot \partial_v g + (\partial_v f) \cdot g$$

en tout point, si $f, g : U \to \mathbb{R}^q$. La preuve est immédiate si on se ramène à la définition de $\partial_v f$ comme dérivée en 0 de $t \mapsto f(x+tv)$.

<u>Différentielle</u>

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$, avec $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $x \in U$. On dit que f est différentiable en x, de différentielle une application linéaire $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, s'il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^q$, continue et nulle en x, telle que pour tout $y \in U$,

$$f(y) = f(x) + u(y-x) + \|y-x\|\varepsilon(y).$$

On note $d_x f$, ou parfois $df(x)$, la différentielle de f en x. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Remarque

Une autre manière d'écrire la définition de la différentielle est sous la forme :

$$f(x+h) = f(x) + d_x f(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Démonstration

Si u et v sont deux différentielles de f en x, on doit avoir pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ assez petit :

\[

$$f(x+h) = f(x) + u(h) + \|h\|\epsilon(h)$$

et

$$f(x+h) = f(x) + v(h) + \|h\|\epsilon'(h),$$

donc

$$v(h) - u(h) = \|h\|(\epsilon'(h) - \epsilon(h)),$$

avec $\lim_{h \to 0}(\epsilon'(h) - \epsilon(h)) = 0$. Comme u et v sont linéaires par hypothèse, il suit que $v - u = 0$ et donc que $u = v$.

$\square$

Propositions

La différentielle a les propriétés suivantes.

- Si $f, g : U \to \mathbb{R}^q$ sont deux fonctions différentiables, alors $f + g$ est différentiable, de différentielle $d(f+g) = df + dg$.

- Si $f : U \to \mathbb{R}^q$ est différentiable et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est différentiable, de différentielle $d(\lambda f) = \lambda df$.
- Si $f = (f_1, \cdots, f_q)$, alors f est différentiable si et seulement si les f_i sont toutes différentiables, et on a $df = (df_1, \cdots, df_q)$.

Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable en $x \in U$. Alors toutes les dérivées partielles de f en x existent, et si $h = (h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, alors

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

<u>Jacobienne</u>

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable en $x \in U$. Sa matrice jacobienne en x est la matrice, notée $J_f(x)$, de l'application linéaire $d_x f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$.

Proposition

Si $f = (f_1, \cdots, f_p)$, alors on peut écrire $J_f(x)$ sous la forme :

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_p f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \cdots & \partial_p f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_q & \partial_2 f_q & \cdots & \partial_p f_q \end{pmatrix}.$$

Définition

Si $p = q$ et si f est différentiable en $x \in U$, on appelle jacobien de f le déterminant de sa matrice jacobienne. On le note :

$$D(f_1, \cdots, f_p)/D(x_1, \cdots, x_p) = \det(J_f(x)).$$

Fonctions de classe C^1

Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction qui admet en chaque point des dérivées partielles, et dont les dérivées partielles sont continues en $x \in U$. Alors f est différentiable en x.

Démonstration

Soit $h \in \mathbb{R}^p$ choisi assez petit pour que la boule de centre x et de rayon $\|h\|_2$ soit contenue dans U. On introduit une suite de points qui permet de passer de x à $x+h$ comme suit :

$$x_0 = x, \quad x_1 = x_0 + h_1 e_1,$$
$$x_2 = x_1 + h_2 e_2, \cdots,$$
$$x_p = x_{p-1} + h_p e_p = x + h.$$

On a alors pour tout i entre 0 et $p-1$:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_i + t h_{i+1} e_{i+1}) dt$$
$$= \int_0^1 h_{i+1} (\partial_{i+1} f)(x_i + t h_{i+1} e_{i+1}) dt.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, les $\partial_i f$ sont continus en x, donc pour tout i entre 1 et p,

$$\exists \alpha_i > 0,\ \forall y \in U,\ \|y - x\|_2 \leq \alpha_i \Rightarrow \|\partial_i f(y) - \partial_i f(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Posons $\alpha = \inf_i \alpha_i$. Si $\|h\|_2 \leq \alpha$, tous les x_i sont dans la boule de centre x et de rayon α, et on a donc pour tout i entre 0 et $p-1$:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) - h_{i+1}(\partial_{i+1} f)(x) = h_{i+1} \int_0^1 ((\partial_{i+1} f)(x_i + t h_{i+1} e_{i+1}) - (\partial_{i+1} f)(x)) dt$$
$$\leq |h_{i+1}| \int_0^1 \|(\partial_{i+1} f)(x_i + t h_{i+1} e_{i+1}) - (\partial_{i+1} f)(x)\|_2 dt$$
$$\leq |h_{i+1}| \cdot \frac{\varepsilon}{p}$$

En sommant ces inégalités, on obtient que

$$\|f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{p} h_i(\partial_i f)(x)\|_2 \leq \varepsilon \|h\|_2,$$

ce qui montre que f est différentiable en x.

$\square$

Définition

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^q$ est de classe C^1 si elle admet en tout point des dérivées partielles, et si ses dérivées partielles sont continues.

Différentielle des fonctions composées

Théorème de la différentielle de la composée

Soient $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable, avec $U \subset \mathbb{R}^p$, et soit $g : V \to \mathbb{R}^r$ différentiable, avec $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^q$. Alors la composée $g \circ f$ est différentiable, et sa différentielle est donnée par

$$d_x(g \circ f) = (d_{f(x)}g) \circ d_x f.$$

Démonstration

Soit $x \in U$. Comme g est différentiable en $f(x)$, on peut écrire pour $z \in V$:

$$g(z) - g(f(x)) - (d_{f(x)}g)(z - f(x)) = \|z - f(x)\|\epsilon(z),$$

avec $\lim_{f(x)} \epsilon = 0$.

On applique ceci avec $z = f(y)$ pour $y \in U$, on obtient que

$$g(f(y)) - g(f(x)) - (d_{f(x)}g)(f(y) - f(x)) = \|f(y) - f(x)\|\epsilon'(y),$$

Maintenant on sait que f est aussi différentiable en x, si bien que

$$f(y) - f(x) - (d_x f)(y - x) = \|y - x\|\epsilon''(y),$$

avec $\lim_x \epsilon'' = 0$.

En utilisant la dernière relation dans l'avant-dernière, on trouve que

$$g(f(y)) - g(f(x)) - (d_{f(x)}g)((d_x f)(y-x)) = \|y-x\|\epsilon'''(y),$$

avec $\lim_x \epsilon''' = 0$. Ceci établit que $g \circ f$ est différentiable, de différentielle en x la fonction linéaire

$$d_x(g \circ f) = (d_{f(x)}g) \circ d_x f$$

$\square$

Corollaire

Sous les hypothèses du théorème 6.1, les matrices jacobiennes de f, g et $g \circ f$ vérifient :

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$$

<u>Accroissements finis</u>

Théorème des accroissements finis

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable, avec $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert. Soit $x \in U$ et soit $h \in \mathbb{R}^p$ telle que $[x, x+h] \subset U$. Alors il existe $h^1, h^2, \cdots, h^p \in [0, h]$ tels que

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(x + h^i)$$

Démonstration

On voit d'après le théorème différentielle de la composée que

$$\frac{d}{dt} f(x+th) = d_{x+th} f(h)$$

Il suit que

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(x+th) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int_0^1 h_i \partial_i f(x+th) dt$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à chacune des intégrales, on obtient des valeurs $t_i \in [0,1]$ telles que

$$\partial_i f(x+t_i h) = \int_0^1 \partial_i f(x+th) dt$$

et le résultat suit en posant $h^i = t_i h$.

Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable dont la différentielle est nulle, avec U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^p$. Alors f est constante.

Démonstration

On considère d'abord le cas $q = 1$. Soit $x \in U$, et soit $\Omega = f^{-1}(f(x))$. Comme f est différentiable, elle est continue, donc Ω est fermé. Mais le théorème précédent indique que Ω est ouvert. Comme U est connexe, il suit que $\Omega = U$ et donc U est constante.
Le cas général suit du cas $q = 1$ en considérant les fonctions coordonnées de f.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$, avec $U \subset \mathbb{R}^p$, et soit $i_1, i_2, \cdots, i_n \in \{1, \cdots, p\}$. La dérivée partielle d'ordre n par rapport à $x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$ est définie récurrentement par

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}} f \right)$$

Remarque

On note parfois simplement

$$\partial^n_{i_1, \cdots, i_l} f$$

Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction telle que les dérivées partielles $\partial_i \partial_j f$ et $\partial_j \partial_i f$ existent et sont continues. Alors on a en tout point

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$

Démonstration

On note d'abord qu'il suffit de montrer cette égalité lorsque $q = 1$, puisque le cas général suit alors. On va donc supposer que c'est le cas.

Soit $x \in U$, et soit h_i, h_j tels que la boule de centre x et de rayon $\max(|h_i|, |h_j|)$ soit contenue dans U. On note $(e_1, \cdots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On a

$$\begin{aligned} & f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x) \\ = & (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_i e_i)) + (f(x + h_i e_i) - f(x)) \\ = & (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) + (f(x + h_j e_j) - f(x)) \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions, on voit que :

$$\begin{aligned} & (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x)) \\ = & (f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_i e_i)) - (f(x + h_j e_j) - f(x)) \end{aligned}$$

On va écrire chacun des deux côtés de cette égalité comme une double intégrale.

On note que

$$f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j) = \int_{s=0}^{h_i} \partial_i f(x + s e_i + h_j e_j) ds$$

$$f(x + h_i e_i) - f(x) = \int_{s=0}^{h_i} \partial_i f(x + s e_i) ds$$

donc

$$(f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x))$$

$$= \int_{s=0}^{h_i} (\partial_i f(x + se_i + h_j e_j) - \partial_i f(x + se_i)) ds$$

$$= \int_{s=0}^{h_i} \int_{t=0}^{h_j} \partial_j \partial_i f(x + se_i + te_j) dt\, ds$$

Quand $h_i, h_j \to 0$, cette expression est équivalente à

$$(f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x)) \sim h_i h_j \partial_j \partial_i f(x)$$

De même en échangeant le rôle de x_i et x_j on voit que

$$(f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_i e_i)) - (f(x + h_j e_j) - f(x))$$

$$= \int_{t=0}^{h_j} \int_{s=0}^{h_i} \partial_i \partial_j f(x + se_i + te_j) ds\, dt$$

qui est équivalente quand $h_i, h_j \to 0$, à

$$(f(x + h_i e_i + h_j e_j) - f(x + h_j e_j)) - (f(x + h_i e_i) - f(x)) \sim h_i h_j \partial_i \partial_j f(x)$$

Comme les deux expressions sont égales, on obtient le résultat.

□

Difféomorphismes de classe C^k

Définition

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^q$ est de classe C^k (pour $k \in \mathbb{N}$) si toutes les dérivées k-ièmes de f existent et sont continues.

Propositions

- Les fonctions de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^q$, où $U \subset \mathbb{R}^p$, forment un espace vectoriel.
- La composée de deux fonctions de classe C^k est une fonction de classe C^k.
- La notion de difféomorphisme ajoute à la notion de fonction de classe C^k l'existence d'un inverse de même régularité. On note que l'espace de départ et d'arrivée doivent avoir la même dimension.

Définition

Une fonction $f : U \to V$, où U, V sont des ouverts de $\mathbb{R}^p$, est un difféomorphisme si elle est de classe C^1, bijective, et admet un inverse lui-même de classe C^1. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^k si f est un difféomorphisme, f est de classe C^k, et f^{-1} est de classe C^k.

Définition

On note qu'une fonction de classe C^k qui est une bijection n'est pas toujours un difféomorphisme de classe C^k. Par exemple, la fonction $t \mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞, mais son inverse n'est pas dérivable en 0.

Théorème d'inversion locale

Théorème d'inversion locale

Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $x_0 \in U$ tel que $d_{x_0} f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage V de x_0 dans U et un voisinage W de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que la restriction de f à V est un difféomorphisme de V sur W. Si f est de classe C^k, sa restriction à V est un difféomorphisme de classe C^k.

Démonstration

On va d'abord montrer l'existence d'un inverse. On note qu'il suffit de montrer le résultat si $d_0 f = \mathrm{Id}$, puisque le cas général s'en déduit en considérant $(d_0 f)^{-1} \circ f$.
Comme f est continue, df est continue, et il existe donc $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(0, r)$ (la boule ouverte de centre 0 et de rayon r), $\|\mathrm{Id} - df\| \leq 1/2$.
Soit $y \in B(0, r/2)$. On définit une fonction $\phi_y : B(0, r) \to \mathbb{R}^p$ par

$$\phi_y(x) = x - f(x) + y$$

On note que $\|d\phi_y\| \leq 1/2$, il suit que $\phi_y(B(0,r)) \subset B(y,r/2) \subset B(0,r)$. On peut donc appliquer à ϕ_y le théorème du point fixe, qui montre qu'il existe un unique $x \in B(0,r)$ tel que $\phi_y(x) = x$.

Ainsi on a

$$x - f(x) + y = x$$

si bien que $f(x) = y$.

Réciproquement, tout élément $x \in B(0,r)$ tel que $f(x) = y$ correspond à un point fixe de ϕ_y, si bien que y a un unique antécédent x dans $B(0,r)$. On peut donc en déduire que f définit une bijection entre $V = B(0,r) \cap f^{-1}(B(0,r/2))$. Comme f est continue, cet ensemble V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$.

On va maintenant montrer que f^{-1} est différentiable, de différentielle $d_y f^{-1} = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}$. Soit $y \in B(0,r/2)$, et soit h tel que $y, y+h \in B(0,r/2)$. Posons $x = f^{-1}(y)$, et $k = f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)$. On a alors

$$f(x+k) - f(x) = (y+h) - y = h$$

Comme f est différentiable, on a

$$h = d_x f(k) + o(k)$$

ce qui se traduit par

$$k = (d_x f)^{-1}(h) + o(h)$$

et donc f^{-1} est différentiable, de différentielle $d_y f^{-1} = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}$

Finalement, l'application $y \mapsto d_y f^{-1}$ est continue d'après la formule qui détermine $d_y f^{-1}$, et f^{-1} est donc C^1. Cette même formule montre que si f est C^k, alors f^{-1} aussi.

$\square$

Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ et $k > 0$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ est k-lipschitzienne si pour tout $x, y \in \Omega$ on a $\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$.

Théorème du point fixe

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ fermé, et soit $f : \Omega \to \Omega$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k < 1$. Alors f admet un unique point fixe dans Ω.

Démonstration

Soit $x_0 \in \Omega$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, par $x_{n+1} = f(x_n)$. Comme f est k-lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned}\|x_2 - x_1\| &= \|f(x_1) - f(x_0)\| \\ &\leq k\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\|x_3 - x_2\| &= \|f(x_2) - f(x_1)\| \\ &\leq k\|x_2 - x_1\| \\ &\leq k^2\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

et par un argument de récurrence simple, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|$$

On va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On note pour ça que pour $p \geq q$, on a

$$\begin{aligned}\|x_p - x_q\| &= \left\|\sum_{l=q}^{p-1}(x_{l+1} - x_l)\right\| \\ &\leq \sum_{l=q}^{p-1}\|x_{l+1} - x_l\| \\ &\leq \sum_{l=q}^{p-1}k^l\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

$$\leq k^q \|x_1 - x_0\| \frac{1-k^{p-q}}{1-k}$$

$$\leq \frac{k^q \|x_1 - x_0\|}{1-k}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$, il suit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et elle admet donc une limite x_∞. Comme Ω est fermé, $x_\infty \in \Omega$.

On note maintenant que comme f est continue,

$$f(x_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty,$$

donc x_∞ est bien un point fixe de f.

Enfin, si f admet un autre point fixe y_∞, on a

$$\|y_\infty - x_\infty\| = \|f(y_\infty) - f(x_\infty)\| \leq k\|y_\infty - x_\infty\|$$

donc $\|y_\infty - x_\infty\| = 0$, et donc $y_\infty = x_\infty$

$\square$

Théorème des fonctions implicites

Théorème des fonctions implicites

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k, avec $0 \in U \subset \mathbb{R}^{p+1}$, et supposons que $\partial_{p+1} f \neq 0$ en 0. Il existe alors un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une application $\phi : V \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x' = (x_1, \cdots, x_p) \in V$, $f(x', \phi(x')) = 0$. De plus ϕ est de classe C^k.

Démonstration

On définit une fonction $F : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^{p+1}$ en posant pour $x = (x', x_{p+1})$ (avec $x' \in \mathbb{R}^p$):

$$F(x', x_{p+1}) = (x', f(x', x_{p+1}))$$

On va montrer que la différentielle de F en 0, $d_0F : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^{p+1}$, est inversible. On peut en effet calculer la matrice jacobienne de F en 0, elle a la forme suivante:

$$J_F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_1 f(0) & \partial_2 f(0) & \partial_3 f(0) & \cdots & \partial_p f(0) & \partial_{p+1} f(0) \end{pmatrix}$$

Comme $\partial_{p+1} f(0) \neq 0$, le déterminant de la matrice jacobienne est $\partial_{p+1} f(0)$, qui est non nul par hypothèse, et d_0F est un isomorphisme.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale, qui montre qu'il existe des voisinages U et W de 0 dans $\mathbb{R}^{p+1}$ et une fonction $G : W \to U$ de classe C^k tels que G est l'inverse de la restriction $F|_U$ de F à U. Ainsi pour tout élément z de W on a $G(z) \in U$ et $F(G(z)) = z$.

En particulier pour $z = (z', 0)$, avec $z' \in \mathbb{R}^p$, si $G(z', 0) = (x', x_{p+1})$ alors on voit que $F(x', x_{p+1}) = (z', 0)$ si bien que $x' = z'$ et $f(x', x_{p+1}) = 0$, et donc $f(z', x_{p+1}) = 0$. On peut donc écrire: $G(z', 0) = (z', \phi(z'))$, et on voit alors que $f(z', \phi(z')) = 0$ pour tout $z' \in W \cap \mathbb{R}^p$.

Comme G est de classe C^k, il en est de même pour ϕ.

$\square$

Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Définitions

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in U$. On dit que f admet en x_0 :

- un maximum, si

$$\forall x \in U, f(x) \leq f(x_0)$$

- un minimum, si

$$\forall x \in U, f(x) \geq f(x_0)$$

- un extremum, si f admet en x_0 un maximum ou un minimum.

Définition

Dans les mêmes conditions, on dit que f admet en x_0 un maximum local (resp. un minimum local, un extremum local) s'il existe un voisinage V de x_0 dans U tel que la restriction de f à V admet en x_0 un maximum respectivement un minimum, un extremum.

Théorème de la formule de Taylor à l'ordre 2

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour tout $x \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $[x, x+h] \subset U$, il existe $t \in [0,1]$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} h_i h_j \partial_{ij}^2 f(x+th)$$

ou bien

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} h_i h_j \partial_{ij}^2 f(x) + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Démonstration

La première formule suit de l'application de la formule de Taylor usuelle pour les fonctions d'une variable à la fonction $t \mapsto f(x+th)$. La seconde formule suit de la première.

$\square$

<u>Matrice Hessienne</u>

Définition

La matrice hessienne de f en x, ou simplement hessienne de f en x, est la matrice $p \times p$ définie par :

$$Hf(x) = (\partial^2_{i,j} f(x))_{i,j=1,\cdots,p}$$

Proposition

Supposons que $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et admet un extremum local en x. Alors $d_x f = 0$.

Démonstration

On considère la fonction $g : t \mapsto f(x + t\delta)$, où $\delta = (\partial_1 f(x), \cdots, \partial_p f(x))$. On remarque que, en $t = 0$, on a

$$g'(0) = d_x f(\delta) = \|\delta\|^2 > 0$$

si bien que x ne peut pas être un minimum local ou un maximum local.

$\square$

Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et soit $x \in U$ un point tel que $d_x f = 0$ et la matrice $Hf(x)$ est définie négative. Alors f admet en x un maximum local. Si $Hf(x)$ est définie positive, alors f admet en x un minimum local. Si $Hf(x)$ a des valeurs propres positives et d'autres négatives, alors x n'est pas un extremum local.

Démonstration

Dans les trois cas c'est une conséquence directe de la formule de Taylor à l'ordre 2 ci-dessus, puisque le signe de f au voisinage de x est déterminé par son hessien.

$\square$

Théorème

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $x \in U$ tel que $d_x f = 0$. Alors :

- Si $\det(Hf(x)) > 0$, alors f admet en x un extremum local, qui est un maximum local si $\mathrm{Tr}(Hf(x)) < 0$ et un minimum local si $\mathrm{Tr}(Hf(x)) > 0$.
- Si $\det(Hf(x)) < 0$, alors f admet en x un point critique qui n'est pas un extremum local.

Démonstration

C'est une conséquence du théorème précédent, car une matrice 2×2 est définie positive si et seulement si son déterminant et sa trace sont strictement positifs, et définie négative si et seulement si son déterminant est strictement positif et sa trace strictement négative.

$\square$

INTÉGRALE DE RIEMANN

Fonctions en escalier

Définition

Une subdivision de $[a,b]$ est une famille finie $\sigma=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ de points de $[a,b]$ telle que $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Le nombre $\delta(\sigma)=\max_{i\in\{0,1,\cdots,n-1\}}(x_{i+1}-x_i)$ est appelé pas de la subdivision.

Définition

Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ de [a,b] telle que f est constante sur les intervalles $]x_i,x_{i+1}[$ pour tout $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$. On dira alors que la subdivision σ est adaptée à f.

Intégrale des fonction en escalier

Proposition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction en escalier, soit $\sigma=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, et pour tout $i\in\{0,\ldots,n-1\}$ soit m_i la valeur de f sur $]x_i,x_{i+1}[$. Alors la somme

$$I(f,\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i(x_{i+1}-x_i)$$

ne dépend pas du choix de la subdivision σ.

Démonstration

Si σ et σ' sont deux subdivisions de I adaptées à f, on peut construire une troisième subdivision σ'' obtenue en prenant tous les points de σ et de σ'. Comme la somme $I(f)$ ne change pas lorsqu'on ajoute des points où f est constante, on en déduit que $I(f)$ ne dépend pas de la subdivision.

$\square$

Définition

On dira que $I(f,\sigma)$ est l'intégrale de la fonction en escalier f sur l'intervalle I, et on notera, pour n'importe quelle subdivision adaptée σ :

$$I(f,\sigma) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Remarque

Si f est positive, son intégrale sur I est l'aire du domaine compris sous son graphe et au-dessus de l'axe Ox.

Propriété de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition

Soient f et g des fonctions en escalier sur un intervalle $I = [a,b]$, avec $a < b$. Alors :

1. $f+g$ est encore une fonction en escalier, et

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est une fonction en escalier, et

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

3. Si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

4. Pour tout $c \in]a,b[$,

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

5. Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Démonstration

On prend une subdivision σ qui est adaptée à la fois à f et à g, soit $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ et on note f_i et g_i les valeurs respectives de f et de g sur $]x_i, x_{i+1}[$. Pour le premier point

on voit que $f+g$ est en escalier (et σ est adaptée à $f+g$) et par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(f_i+g_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f_i + \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)g_i\\ &= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.\end{aligned}$$

Pour 3. , on prend à nouveau une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ adaptée à la fois à f et à g, et on note encore f_i et g_i les valeurs respectives de f et de g sur $]x_i, x_{i+1}[$. On remarque que $f_i \geq g_i$ pour tout i, si bien que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f_i\\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)g_i\\ &= \int_a^b g(t)dt.\end{aligned}$$

Le point 4. suit de la définition de l'intégrale, en prenant une subdivision adaptée à f pour laquelle c est un point de subdivision.

Enfin le point 5. suit aussi de la définition de l'intégrale, puisque changer la valeur d'une fonction en escalier en un point ne change pas son intégrale.

□

Définition de l'intégrale au sens de Riemann

Définition

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si $I_m(f) = I_M(f)$. Dans ce cas, on note:

$$\int_a^b f(t)dt = I_m(f).$$

On utilisera la caractérisation suivante des fonctions intégrables.

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in e(f)$ et $h \in E(f)$ telles que:

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon.$$

Démonstration

Supposons d'abord que f est intégrable, et soit $I = \int_a^b f(t)dt$. Choisissons $\varepsilon > 0$. On sait que:

$$\sup_{g \in e(f)} \int_a^b g(t)dt = I,$$

et on en déduit qu'il existe une fonction $g \in e(f)$ telle que

$$I - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon/2.$$

De même, il existe $h \in E(f)$ telle que:

$$\int_a^b h(t)dt - I \leq \varepsilon/2.$$

On voit alors en ajoutant les deux inégalités que

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon.$$

Supposons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in e(f)$ et $h \in E(f)$ telles que:

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon.$$

On remarque que si $\bar{g} \in e(f)$, alors:

$$\int_a^b \bar{g}(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt,$$

car pour tout $t \in [a, b]$ on a $\bar{g}(t) \leq f(t) \leq h(t)$. On en déduit que:

$$\int_a^b g(t)dt \leq \sup_{\bar{g} \in E(f)} \int_a^b \bar{g}(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt.$$

Le même argument appliqué à h montre que:

$$\int_a^b g(t)dt \leq \inf_{h \in E(f)} \int_a^b h(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt.$$

Ainsi, comme

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \epsilon$$

on voit que:

$$\inf_{h \in E(f)} \int_a^b h(t)dt - \sup_{\bar{g} \in E(f)} \int_a^b \bar{g}(t)dt \leq \epsilon$$

Comme ceci s'applique pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que:

$$\inf_{h \in E(f)} \int_a^b h(t)dt = \sup_{\bar{g} \in E(f)} \int_a^b \bar{g}(t)dt$$

et donc f est intégrable.

$\square$

Intégrabilité des fonctions continues

Théorème

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $x, y \in [a, b]$, si $|y - x| \leq \alpha$, alors $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a < b$, elle est donc uniformément continue. Soit $\omega > 0$. On applique l'uniforme continuité de f avec la valeur $\omega' = \frac{\omega}{|b-a|}$, on trouve qu'il existe

$\varepsilon > 0$ telle que :

$\forall x, y \in [a, b]$

$$|y - x| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \omega' = \frac{\omega}{|b - a|}$$

On prend maintenant une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout i, $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$, et on définit des fonctions $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :

Pour $t \in [x_i, x_{i+1}[$

$$g(t) = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f, \quad h(t) = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Par construction, $g \leq f \leq h$. On voit alors que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} f - \min_{[x_i, x_{i+1}]} f < \frac{\omega}{|b - a|}$$

et il suit par la définition des fonctions en escalier que:

$$\int_a^b h(t)\, dt - \int_a^b g(t)\, dt < \frac{\omega}{|b - a|} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \omega$$

Ainsi f est intégrable.

$\square$

Corollaire

Toute fonction continue par morceaux est intégrable.

Démonstration

Si une fonction est continue par morceaux sur $[a, b]$, elle est intégrable sur chacun des intervalles où elle est continue, et donc intégrable sur $[a, b]$ d'après la définition de l'intégrabilité.

$\square$

Principales propriétés

Propositions

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables, avec $a < b$. Alors :

- $f + g$ est encore intégrable, et

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, θf est intégrable, et

$$\int_a^b (\theta f)(t)\,dt = \theta \int_a^b f(t)\,dt$$

- Si $f = g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

- Pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

- Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Proposition

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables, donc bornées. Alors la fonction produit fg est intégrable.

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable, $a < b$. Supposons qu'il existe des réels m, M tels que pour tout $t \in [a, b]$, $m \leq f(t) \leq M$. Alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

Démonstration

On note que la fonction constante égale à m est une fonction en escalier qui minore f, elle est donc dans $e(f)$ et donc, par définition de l'intégrale de f, son intégrale est plus petite que celle de f. On a donc:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt$$

De même, la fonction constante égale à M est une fonction en escalier qui majore f, elle est donc dans $E(f)$, et on a:

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$$

D'où:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

$\square$

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $a < b$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Démonstration

Soient $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$. D'après la proposition précédente :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

Soient x_m et x_M des points de $[a,b]$ tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point c entre a et b tel que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

d'où le résultat.

$\square$

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable, $a < b$. Alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, et

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Démonstration

Soient $f^-(t) = \max(0, -f(t))$, $f^+(t) = \max(0, f(t))$. Alors f^- et f^+ sont à valeurs positives, $f = f^+ - f^-$, et $|f| = f^+ + f^-$. On dit que f^- et f^+ sont les parties négative et positive de f.

Choisissons $\omega > 0$. Soient g et h des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $g \leq f \leq h$ et que

$$\int_a^b h(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt < \omega$$

Soient g^- et g^+ les parties négative et positive de g, et de même pour h. Alors g^-, g^+, h^-, h^+ sont des fonctions en escalier positives telles que

$$g^+ \leq f^+ \leq h^+, \quad h^- \leq f^- \leq g^-$$

De plus on a:

$$\int_a^b (h^+ - g^+)(t)\,dt \leq \int_a^b (h - g)(t)\,dt < \omega$$

et de même

$$\int_a^b (g^- - h^-)(t)\,dt < \omega$$

Donc f^- et f^+ sont intégrables sur $[a, b]$, et il en est donc de même de $|f| = f^- + f^+$. Comme $-|f| \leq f \leq |f|$, on a en intégrant :

$$-\int_a^b |f(t)|\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

d'où

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

$\square$

<u>Sommes de Riemann</u>

Définition

Soit $a < b$. Une subdivision pointée de $[a, b]$ est un couple (ε, t), où:

$$\varepsilon = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$$

est une subdivision de $[a, b]$, et $t = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Définition

La somme de Riemann de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ associée à la subdivision pointée (ε, t) est :

$$S(f, (\varepsilon, t)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

On utilise souvent des subdivisions régulières de $[a, b]$, c'est-à-dire que

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = b.$$

De même, on utilise souvent l'un des trois choix naturels possibles:

- soit $t_i = x_i$
- soit $t_i = x_{i+1}$
- soit $t_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Pour le premier choix par exemple, on obtient:

$$S(f, (\omega, t)) = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\right)$$

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ou continue par morceaux, avec $a < b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta > 0$ tel que si (ω, t) est une subdivision pointée de $[a, b]$ dont tous les intervalles sont de longueur au plus θ, alors

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - S(f, (\omega, t)) \right| < \varepsilon$$

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est intégrable sur $[a, b]$. De plus, les sommes de Riemann

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\right)$$

et

$$\overline{S}_n = \frac{b-a}{n}\left(f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right) + f(b)\right)$$

convergent vers $\int_a^b f(t)\,dt$ quand $n \to \infty$.

Démonstration

On suppose f croissante et on note g_n et h_n les fonctions définies par:

$$g_n(t) = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right), \quad h_n(t) = f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

lorsque $t \in \left[a + i\frac{b-a}{n},\, a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right[$

Ce sont des fonctions en escalier et, comme f est croissante, on a $g_n \leq f \leq h_n$. On note que:

$$\begin{aligned}\int_a^b (h_n - g_n)(t)\,dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\left(f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) = 0$$

et on en déduit que f est intégrable et que son intégrale est la limite des suites de terme général S_n et $\overline{S}_n$.

$\square$

INTÉGRALES IMPROPRES

Fonction non bornées sur un intervalle borné

Définition

Soit a, b tels que $[a, b[\subset I$. Supposons que f est integrable sur tous les intervalles de la forme $[a, x]$, pour $x \in [a, b[$. Si la limite

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

existe et est finie, on dit que l'integrale impropre de f entre a et b est convergente, et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'integrale impropre de f entre a et b est divergente.

Définition

Si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent toutes deux, on dit que l'integrale de f sur $]a, b[$ converge, et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'integrale de f sur $]a, b[$ diverge.

Fonctions sur un intervalle non borné

Définition

Soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction integrable sur tous les intervalles de la forme $[a, x]$ pour $x > 0$. Si

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt$$

existe et est finie, on dit que l'integrale impropre

$$\int_a^\infty f(t)dt$$

est convergente, et on note

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'integrale est divergente.

Définition

Si $\int_{-\infty}^c f(t)dt$ et $\int_c^\infty f(t)dt$ convergent toutes deux, on dit que l'integrale de f sur $\mathbb{R}$ converge, et on note

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'integrale de f sur $\mathbb{R}$ diverge.

<u>Exemples importants</u>

Théorème

L'integrale impropre

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha < 1$ et divergente pour $\alpha \geq 1$.

Démonstration

Il suffit de prendre une primitive de $t^{-\alpha}$. Pour $\alpha \neq 1$ cette primitive est $t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, qui tend vers 0 quand $t \to 0^+$ pour $\alpha < 1$, et vers $-\infty$ quand $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$ la primitive est $\log(t)$, qui tend vers $-\infty$ quand $t \to 0^+$.

On peut bien s\^ur remplacer dans cet enonce la borne superieure d'integration 1 par n'importe quel nombre dans $]0, \infty[$. De meme on peut etudier la convergence de l'integrale en a de $1/(t-a)^\alpha$, le resultat est le meme.

On a une situation complementaire pour la convergence de l'integrale sur $[0, \infty[$.

$\square$

Théorème

L'integrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$.

Démonstration

Comme pour le théorème précédent, il suffit de considerer une primitive de $t \to t^{-\alpha}$.

$\square$

Critères de convergence pour les fonctions positives

Théorème

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$, integrable sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$. Alors l'integrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est bornée.

Démonstration

Comme f est à valeurs positives, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante, donc elle admet une limite en b si et seulement si elle est bornée.

$\square$

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux fonctions intégrables sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$. Supposons que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$. Alors :

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge, il en est de meme pour f, et de plus

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

- si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, il en est de meme pour g.

Démonstration

On a pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$$

Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors la fonction $x \to \int_a^x g(t)dt$ est bornée, donc il est en de même pour f et donc $\int_a^b f(t)dt$ converge. On a pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$$

et en passant a la limite $x \to b^-$ on obtient l'inegalite entre les integrales de a a b.

Le second enonce est la contraposee du premier, et lui est donc equivalent.

On a un resultat analogue pour les intervalles de la forme $]a, b]$, avec a fini ou $a = -\infty$.

On peut donner tout de suite une application pour les fonctions de la forme $\log(t)/t^\alpha$.

Théorème

Soit $\alpha > 0$. Alors :

- $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- $\int_1^\infty \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Pour le premier point, la question de la convergence se pose seulement en 0. Supposons d'abord que $\alpha < 1$, et soit $\beta \in]\alpha, 1[$. On a vu plus haut que comme $\beta < 1$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$ converge. De plus, $\lim_{t\to 0} \log(t) t^{\beta-\alpha} = 0$. On en déduit qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq M$, $\frac{|\log(t)|}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\beta} \times |\log(t) t^{\beta-\alpha}| \leq \frac{1}{t^\beta}$. Le théorème 3.2 assure alors que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente.

De meme, si $\alpha > 1$, on prend $\beta \in]1, \alpha[$. On a vu que $\int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$ diverge, et $\lim_{t\to 0} \log(t) t^{\beta-\alpha} = \infty$. On en déduit par le même raisonnement que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t^\alpha} dt$ est divergente.

Pour $\alpha = 1$, on fait une integration par partie : pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\int_x^1 \frac{\log(t)}{t} dt = [\log(t)^2]_x^1 - \int_x^1 \frac{\log(t)}{t} dt$$

si bien que

$$\int_x \frac{\log(t)}{t} dt = \frac{1}{2} [\log(t)^2]_x^1 = -\frac{\log(x)^2}{2}$$

Il suit que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t} dt$ diverge.

□

Absolue convergence

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable sur tout intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$. Supposons que $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente. Alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, et

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Démonstration

Pour tout $t \in [a, b[$, on pose

$$f_+(t) = \max(f(t), 0)\ ,\ \ f_-(t) = \max(-f(t), 0)$$

On note que f_+ et f_- sont a valeurs positives, que $f = f_+ - f_-$ et que $|f| = f_+ + f_-$. Comme $\int_a^b |f(t)|dt$ converge et que $f_+ \leq |f|$, $\int_a^b f_+(t)dt$ converge, et de meme pour f_-. Comme $f = f_+ - f_-$, on montre alors en se ramenant a la definition de la convergence (par la limite quand $x \to b$ de l'integrale entre a et x) que $\int_a^b f(t)dt$ converge.

$\square$

Définition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

<u>Équivalences</u>

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux fonctions a valeurs positives, integrable sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$, telles que $f \sim g$ en b. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Démonstration

Par definition de l'equivalence en b, appliquée pour $\epsilon = 1/2$, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $t \geq c$ on a

$$\frac{f(t)}{2} \leq g(t) \leq \frac{3f(t)}{2}$$

Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Alors $\int_a^b 3f(t)/2dt$ converge et, d'apres le théorème 3.2, l'integrale de g sur $[c, b[$ converge, donc l'integrale de g sur $[a, b[$ converge.

La réciproque se montre de la même manière.

$\square$

INTÉGRATION

Notation

Définition

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre qui exprime l'aire, en unités d'aire notée: u.a., du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note:

$$\int_a^b f(x)dx = A(\mathscr{D})$$

Remarques

1. Dans la notation $\int_a^b f(x)dx$
   - a et b sont les bornes de l 'intégrale
   - la variable x est dite « muette », autrement dit, elle n'intervient pas dans le résultat et on peut noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

2. $\int_a^b f(x)dx$ se lit «somme de a à b de $f(x)dx$» ou «intégrale de a à b de $f(x)dx$»

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. La fonction Φ définie sur $[a;b]$ par

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a;b]$ et $\Phi' = f$.

Primitives d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit Φ une primitive de f sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme:

$$F(x) = \Phi + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$

Conséquences

1. Calcul de l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur $[a;b]$

   Nous savons que la fonction Φ définie par

   $$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   est une primitive de f sur $[a;b]$.

   On peut calculer l'intégrale $\int_b^a f(t)dt$, si on connaît une primitive quelconque F de f.

   En effet, il existe une constante C telle que pour tout $x \in [a;b]$: $F(x) = \Phi(x) + C$

   Ansi:

   $$F(a) = \Phi(a) + C$$

$$\Leftrightarrow F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$$

$$\Leftrightarrow F(a) = 0 + C$$

$$\Leftrightarrow F(a) = C$$

De plus:

$$F(a) = \Phi(b) + C$$

$$\Leftrightarrow \Phi(b) = F(b) - C$$

$$\Leftrightarrow \Phi(b) = F(b) - F(a)$$

Donc:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

2. <u>Primitive avec condition initiale</u>

   Si f admet des primitives sur I, alors pour tout nombre x_0 de I et tout nombre y_0, il existe une primitive et une seule F de f qui vérifie la condition initiale $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

<u>Calculs de primitives</u>

Tableau

Voici le tableau des primitives de fonctions.

Théorème

Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I et si k est un nombre réel, alors

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I

2. kF est une primitive de kf sur I.

Intégrale d'une fonction continue

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et a et b deux réels quelconques de I.

L'intégrale de f entre a et b est le nombre :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient $a, b \in I$:

1. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
2. $$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Relation de Chasles

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Théorème de positivité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$:

1. Si f est positive sur I, alors:

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

2. Si f est négative sur I, alors:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$$

Théorème d'ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$. Si $f \leqslant g$ sur I, alors:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et $a, b \in I$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration

$\forall x \in I$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$\Leftrightarrow u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

donc

$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b [(u(x)v(x))' - u'(x)v(x)]dx$$
$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b [u(x)v(x)]'dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$
$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Calcul d'aires

Définition:

f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ l'opposé de l'aire, en unités d'aire notée : u.a., du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note:

$$\int_a^b f(x)dx = -A(\mathscr{D})$$

Théorème

Si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$, alors du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$ est donnée par:

$$A(\mathscr{D}) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

LIMITES

Limites

Cas 1 limite en $+\infty$

Si les nombres d'une fonction $f(x)$ deviennent plus en plus grand si on prend x qui se rapproche d'une infinité

$$f(x) \to +\infty$$

On dit que la limite de $f(x)$ est plus l'infini on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Cas 2 limite en $-\infty$

Si les nombres de $f(x)$ deviennent plus en plus petit si on prend x qui se rapproche d'une infinité

$$f(x) \to -\infty$$

On dit que la limite de $f(x)$ est moins l'infini on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Cas 3 limite en un point

Si les nombres de $f(x)$ se rapprochent en un point si on prend x qui rapproche une infinité

$$f(x) \to a$$

On dit que la limite de $f(x)$ est a on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

ou en générale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

Limite à droite et a gauche

Une fonction f possède une limite en a si et seulement si f possède une limite a gauche et a droite de a et que les limites sont égales.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Les asymptotes

Asymptote horizontale

On note asymptote horizontale : A.H.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y = l$ en $+\infty$, si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

A.H. est sous forme:

$$A.H. \equiv y$$

nouveau signe: [$\equiv$]

On lit :l'asymptote horizontale a pour équation y

Asymptote verticale

On note asymptote verticale : A.V.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale (A.V.) d'équation $x = a$, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

A.V. est sous forme:

$$A.V. \equiv x$$

Asymptote Oblique

On note asymptote oblique : A.O.

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (A.O.) d'équation $y = ax + b$, en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$),si

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$$

$$respectivement$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$$

A.O. est sous forme:

$$A.O.\equiv ax+b$$

À retenir

On a jamais une A.H. et une A.O. pour une seul fonction.

Formules de Cauchy

La droite d'équation $y\ =\ ax\ +\ b$ est une A.O. à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si:

1. $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ avec\ a\ \in\mathbb{R}^*$
3. $\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]=b\ avec\ b\ \in\mathbb{R}$

Terme du plus haut dégrée

À l'infini, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n\ ,avec\ a_n\neq 0$$

Théorème du plus haut dégrée d'une fonction rationelle

Definition

Soit

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

une fraction rationelle avec

$$(a_n\neq 0;\ b_m\neq 0)$$

Alors la limite quand f(x) tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ est égale a la limite du rapport du termes

du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Demonstration

$$\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n\overbrace{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)}^{\to 1}}{b_mx^n\underbrace{\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\ldots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}\right)}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^n}$$

cqfd.

Limites des fonctions trigonométriques

Théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions définies sur l'intervalle ouvert I telles que:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

Si

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$$

avec

$$x \neq a \ \ (a \ réel \ ou \ infini)$$

donc

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Remarque

Le théorème d'encadrement est aussi apellée théorème de sandwich ou des gendarmes.

Théorème de comparaison par minoration ou majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et soit a une borne de I ou un réel appartenant à I.

1. Si pour tout x de I, $f(x) \geqslant g(x)$ et si:

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

2. Si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ et si:

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Théorème sur les limites

Limite d'une somme

$Si \ f \ a \ pour \ limite$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$et \ si \ g \ a \ pour \ limite$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$alors\ f\ +\ g\ a\ pour\ limite$	$l\ +\ l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l <\ 0$	$l <\ 0$
$si\ g\ a\ pour\ limite$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$alors\ f\ \cdot\ g\ a\ pour\ limite$	$l\ \cdot\ l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un quotient

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-$
$et\ si\ g\ a\ pour\ limite$	$l' \neq 0$	$-\infty\ ou\ +\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	l'
$alors\ \frac{f}{g}\ a\ pour\ limite$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-$

Limite d'un quotient

$Si\ f\ a\ pour\ limite$	$l > 0\ ou\ +\infty$	$l > 0\ ou\ +\infty$	$l < 0\ ou\ -\infty$
$et\ si\ g\ a\ pour\ limite$	0^+	0^-	0^+
$alors\ \frac{f}{g}\ a\ pour\ limite$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Remarque

f.i. signifie forme indéterminée

<u>Formes indéterminées</u>

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

1^{∞}

PRIMITIVES

Définition et propriétés principales

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Une primitive de f est une fonction de la forme

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt + C$$

où $c \in [a, b]$ et C est une constante.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors toute primitive de f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration

Comme f est intégrable, elle est bornée, et il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq M$. Soit F une primitive de f. Si $x, y \in [a, b]$ alors

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M|y - x|$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, si on pose $\alpha = \epsilon/M$, on voit que si $|y - x| \leq \alpha$, alors $|F(y) - F(x)| \leq \epsilon$, et F est donc uniformément continue.

$\square$

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors toute primitive F de f est dérivable sur $[a, b]$, de dérivée égale à f.

Démonstration

Soit $c \in [a, b]$, on va montrer que F est dérivable en c de dérivée $f(c)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{x \to c, x \neq c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

Prenons par exemple $x > c$. Comme f est continue, il existe $y_x \in [c, x]$ tel que

$$\int_c^x f(t)dt = (x-c)f(y_x)$$

Lorsque $x \to c, y_x \to c$, et comme f est continue, $f(y_x) \to f(c)$. On en déduit que

$$\lim_{x \to c, x \neq c} \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)dt = f(c)$$

ce qui est le résultat annoncé.

□

Corollaires

Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

- il existe des primitives de f sur I
- si $a \in I$, la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

  est l'unique primitive de f qui s'annule en a
- si F est n'importe quelle primitive de f sur I, on a pour tout $a, x \in I$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Démonstration

Pour le premier point, il suffit de remarquer que pour tout élément $a \in I$, la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I. Cette primitive s'annule en a. Si F est une autre primitive de f qui s'annule aussi en a, on doit avoir $(F - F_a)'(t) = 0$ pour tout $t \in I$, si bien que $F - F_a$ est constante sur I, et la valeur de cette constante doit être nulle puisque $(F - F_a)(a) = 0 - 0 = 0$. Finalement, le troisième point suit du fait que la différence entre deux primitives de f est une fonction dont la dérivée est nulle, et deux primitives de f diffèrent donc par une constante.

□

Intégration par parties

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Démonstration

On sait que $(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant, on voit que

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (u(t)v(t))'dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt$$

et le résultat s'en déduit.

$\square$

Changement de variables

Théorèmes

- oient I et J deux intervalles non réduits à un point, et soit $\phi : J \to I$ une fonction de classe C^1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient $a, b \in J$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- Si maintenant $\phi : J \to I$ est une bijection, et si $a', b' \in I$, alors

$$\int_{a'}^{b'} f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a')}^{\phi^{-1}(b')} (f \circ \phi)(t)\phi'(t)dt$$

Démonstration

Le second point est simplement une reformulation du premier dans le cas particulier où ϕ est une bijection. Quant au premier point, il suit simplement du fait que $(F \circ \phi)' = \phi'(F' \circ \phi)$, appliqué lorsque F est une primitive de f.

Dans la pratique, on se passe souvent de la fonction ϕ, et on note simplement $x = \phi(t)$, où ϕ est la fonction de changement de variable. On a alors formellement $dx = \phi'(t)dt$.

Intégration des développements limités

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et soit $a, b \in I$. On a alors la formule exacte suivante :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots$$

$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$$

Démonstration

On fait la preuve par récurrence sur n. Pour $n=1$ la formule s'écrit simplement

$$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(t)dt$$

et on a vu plus haut que c'est bien le cas car f est une primitive de f'.

On suppose maintenant le résultat vrai pour n, et on le montre pour $n+1$ par une intégration par parties sur le dernier terme, qui montre bien que :

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt&=\left[-\frac{(b-t)^n}{n(n-1)!}f^{(n)}(t)\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\\&=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

□

Corollaire

Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, on a

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+(b-a)^{n-1}\epsilon(b)$$

avec $\lim_{t\to a}\epsilon(t)=0$.

Démonstration

On a vu dans le chapitre précédent que comme la fonction $t\mapsto\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)$ est continue, il existe un $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt=(b-a)\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c)$$

Le résultat s'en déduit.

□

Théorème

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction qui admet en a le développement limité

$$f(t) = a_0 + a_1(t-a) + a_2(t-a)^2 + \cdots$$
$$+a_n(t-a)^n + (t-a)^n\epsilon(t)$$

avec $\lim_{t\to a}\epsilon(t) = 0$. Alors toute primitive F de f admet en a le développement limité :

$$F(t) = F(a) + a_0(t-a) + a_1\frac{(t-a)^2}{2} + a_2\frac{(t-a)^3}{3} + \cdots$$
$$+a_n\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} + (t-a)^{n+1}\epsilon(t)$$

avec $\lim_{t\to a}\epsilon(t) = 0$.

Définition

Une fraction rationnelle est une fonction de la forme

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)},$$

où P et Q sont des polynômes. f est alors définie en-dehors des zéros de Q, qu'on appelle pôles de f.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Théorème de division euclidienne pour les polynômes

Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$, avec $\deg(R) < \deg(B)$, tel que $A = BQ + R$.

Théorème de décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $B \in \mathbb{C}[X]$ unitaire. Il existe des familles

- $(a_1, a_2, \cdots, a_p) \in \mathbb{C}^p$
- $(n_1, n_2, \cdots, n_p) \in (\mathbb{N}_{>0})^p$

telles que

$$B = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{n_i}$$

avec les a_i deux à deux distincts. De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.

Théorème de décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $B \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Il existe des familles

- $(a_1, a_2, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^p$
- $(n_1, n_2, \cdots, n_p) \in (\mathbb{N}_{>0})^p$
- $(b_1, b_2, \cdots, b_q) \in \mathbb{R}^q$
- $(c_1, c_2, \cdots, c_q) \in (\mathbb{R}_{>0})^q$
- $(m_1, m_2, \cdots, m_q) \in (\mathbb{N}_{>0})^q$

telles que

$$B = \left(\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{n_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{q}((X - b_j)^2 + c_j^2)^{m_j}\right)$$

avec les a_i deux à deux distincts et les (b_j, c_j) deux à deux distincts. De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.

Théorème de Bezout

Soient $B_1, B_2 \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes sans élément irréductible commun, et soit $A \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(A) < \deg(B_1) + \deg(B_2)$. Il existe alors un unique couple $(A_1, A_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ avec $\deg(A_1) < \deg(B_1)$ et $\deg(A_2) < \deg(B_2)$ tel que $A = A_1B_2 + A_2B_1$.

Théorème

Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg(A) < \deg(B)$. Écrivons la décomposition de B en éléments irréductibles, sous la forme :

$$B = \left(\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{n_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{q}((X - b_j)^2 + c_j^2)^{m_j}\right)$$

avec les n_i et les m_j strictement positifs et les facteurs deux à deux disjoints.

Il existe des familles

- $(d_{1,1}, d_{1,2}, \ldots, d_{1,n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}, (d_{2,1}, d_{2,2}, \ldots, d_{2,n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}, \ldots, (d_{p,1}, d_{p,2}, \ldots, d_{p,n_p}) \in \mathbb{R}^{n_p}$
- $(e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{1,m_1}) \in \mathbb{R}^{m_1}, (e_{2,1}, e_{2,2}, \ldots, e_{2,m_2}) \in \mathbb{R}^{m_2}, \ldots, (e_{q,1}, e_{q,2}, \ldots, e_{q,m_q}) \in \mathbb{R}^{m_q}$,
- $(f_{1,1}, f_{1,2}, \ldots, f_{1,m_1}) \in (\mathbb{R}_{>0})^{m_1}, (f_{2,1}, f_{2,2}, \ldots, f_{2,m_2}) \in (\mathbb{R}_{>0})^{m_2}, \ldots,$
- $(f_{q,1}, f_{q,2}, \ldots, f_{q,m_q}) \in (\mathbb{R}_{>0})^{m_q}$,

telles que

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{d_{i,k}}{(X-a_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{m_j} \frac{e_{j,l}X + f_{j,l}}{((X-b_j)^2 + c_j^2)^l} \right)$$

De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.

Démonstration

Pour montrer ce théorème, plusieurs étapes sont nécessaires, toutes assez simples.

On décompose d'abord $B = B_1 B_2$, où B_1 est le produit des éléments irréductibles de degré 1 et B_2 le produit des éléments irréductibles de degré 2.

On peut alors appliquer le théorème 6.6, et écrire $A = A_2 B_1 + A_1 B_2$, où $\deg(A_1) < \deg(B_1)$ et $\deg(A_2) < \deg(B_2)$. On en déduit que

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}$$

où dans les deux fractions le dénominateur est de degré plus grand que le numérateur.

Pour la première fraction, on écrit

$$B_1 = (X-a_1)^{n_1} \left(\prod_{i=2}^{p} (X-a_i)^{n_i} \right)$$

et on applique à nouveau le théorème de Bezout pour obtenir que

$$A_1 = A_{12}(X-a_1)^{n_1} + A_{11} \left(\prod_{i=2}^{p} (X-a_i)^{n_i} \right)$$

avec $\deg(A_{12}) < \sum_{i=2}^{p} n_i$ et $\deg(A_{11}) < n_1$.

Ainsi,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_{11}}{(X-a_1)^{n_1}} + \frac{A_{12}}{\prod_{i=2}^{p}(X-a_i)^{n_i}}$$

et $\deg(A_{11}) < n_1$. On peut donc écrire

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{n_1} d_{1,k}(X-a_1)^{n_1-k}$$

et on obtient finalement que

$$\frac{A_{11}}{(X-a_1)^{n_1}} = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{d_{1,k}}{(X-a_1)^k}$$

En répétant le même argument avec a_2, a_3, et jusqu'à a_p, on obtient finalement que

$$\frac{A_1}{B_1} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{d_{i,k}}{(X-a_i)^k} \right)$$

Pour ce qui est du second terme, on note que

$$B_2 = \prod_{j=1}^{q} ((X-b_j)^2 + c_j^2)^{m_j},$$

et on applique à nouveau le théorème de Bezout pour les polynômes pour obtenir que

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_{21}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}} + \frac{A_{22}}{\prod_{j=2}^{q}((X-b_j)^2+c_j^2)^{m_j}}$$

avec $\deg(A_{21}) < 2m_1$ et $\deg(A_{22}) < 2\sum_{j=2}^{q} m_j$.

On considère d'abord le premier terme. On applique le théorème de Bezout pour les polynômes, qui indique qu'on peut écrire

$$A_{21} = A'((X-b_1)^2 + c_1^2) + (e_{1,m_1}X + f_{1,m_1})$$

En divisant, on en déduit que

$$\frac{A_{21}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}} = \frac{A'}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1-1}} + \frac{e_{1,m_1}X + f_{1,m_1}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}}$$

avec $\deg(A') < 2m_1 - 2$.

On applique alors $m_1 - 1$ fois le même argument basé sur le théorème de Bézout aux autres termes, et on obtient que :

$$\frac{A_{21}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}} = \sum_{l=1}^{m_1} \frac{e_{1,l}X + f_{1,l}}{((X-b_1)^2+c_1^2)^{l}}$$

En répétant le même argument pour les autres éléments irréductibles de B_2, on voit finalement que

$$\frac{A_2}{B_2} = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{m_j} \frac{e_{j,l}X + f_{j,l}}{((X-b_j)^2+c_j^2)^{l}} \right)$$

En ajoutant la décomposition obtenue pour A_1/B_1, on conclut la preuve du théorème

□

Décomposition en éléments irréductibles dans $\mathbb{C}$

Théorème

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$, avec $\deg(A) < \deg(B)$. Écrivons la décomposition de B en éléments irréductibles, sous la forme :

$$B = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{n_i},$$

avec n_i strictement positifs et les a_i deux à deux distincts. Il existe des familles $(d_{1,1}, d_{1,2}, \ldots, d_{1,n_1}) \in \mathbb{C}^{n_1}, (d_{2,1}, d_{2,2}, \ldots, d_{2,n_2}) \in \mathbb{C}^{n_2}, \ldots, (d_{p,1}, d_{p,2}, \ldots, d_{p,n_p}) \in \mathbb{C}^{n_p}$, telles que

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{d_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right).$$

De plus ces familles sont uniquement déterminées à permutation près.

SÉRIES NUMÉRIQUES

Démonstration

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. On appelle série de terme général x_n la suite des sommes partielles, définies par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Dans certains cas on peut faire commencer la somme à 1 au lieu de 0.

Définition

On dit que la série de terme général x_n est convergente respectivement divergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente respectivement divergente. Si elle est convergente, on appelle somme de la série la limite, notée sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Proposition

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries convergentes. Alors la série de terme général $x_n + y_n$ converge, et

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} y_k$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) alors la série de terme général λx_n est convergente, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

Proposition

Une série de terme général x_n est convergente si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, \left| \sum_{k=p}^{q} x_k \right| \leq \epsilon$$

Séries à terme positif

Proposition

Soient x_n, y_n les termes généraux de deux séries à termes positifs, tels que $x_n \leq y_n$ pour tout n. Si $\sum_n y_n$ converge alors $\sum_n x_n$ est convergente. Si $\sum_n x_n$ diverge, alors $\sum_n y_n$ diverge.

Corollaire

Soient $x_n > 0$ et $y_n > 0$ les termes généraux de deux séries. Si $x_n / y_n \to l \in \mathbb{R}_{>0}$, alors $\sum x_n$ converge si et seulement si $\sum y_n$ converge.

Proposition

Si $x_n \geq 0$ est le terme général d'une série dont les sommes partielles sont majorées par une constante $C > 0$, alors cette série est convergente.

Théorème

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}_{>0}$ une fonction décroissante pour $t \geq n_0$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge.

Démonstration

Comme f est décroissante, on a les inégalités suivantes pour tout n:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt \geq f(k+1)$$

En sommant, on voit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \geq \int_0^n f(t)dt \geq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Proposition

Soit x_n le terme général d'une série, $x_n > 0$.

- Si $\lim n^a x_n$ existe et est finie, pour $a > 1$, alors $\sum x_n$ converge.
- Si $\lim n^a x_n$ existe et est finie et non nulle, pour $a \leq 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

<u>Critères de convergence</u>

Proposition

Soit x_n le terme général d'une série à termes positifs.

- Supposons que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l < 1$. Alors $\sum_k x_k$ converge.
- Supposons que soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1$, soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1^+$. Alors $\sum_k x_k$ diverge.

Démonstration

Supposons que $\sqrt[n]{x_n} \to l < 1$. Alors $\log(x_n)/n \to L = \log(l) < 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\log(x_n)/n \leq L/2$, si bien que $x_n \leq \exp(nL/2) = \exp(L/2)^n$. Comme $\sum \exp(L/2)^n$ converge on voit que $\sum x_n$ converge.

Supposons maintenant que soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1$, soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1^+$. Alors pour n assez grand, $x_n \geq 1$, et donc $\sum x_n$ diverge.

Proposition

Soit x_n le terme général d'une série à termes positifs.

- Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$. Alors $\sum_k x_k$ converge.

- Supposons que soit $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1$, soit $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1^+$. Alors $\sum_k x_k$ diverge.

Démonstration

Supposons que $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq l + \epsilon < 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_{n_0+k} \leq x_{n_0}(l+\epsilon)^k$, d'où la convergence de $\sum x_n$ par comparaison avec la série géométrique $\sum (l+\epsilon)^k$.

Dans le second cas, on note que $x_{n+1}/x_n \geq 1$ pour n assez grand, donc (x_n) ne tend pas vers zéro et donc $\sum x_n$ diverge.

<u>Séries absolument convergentes</u>

Démonstration

La série $\sum x_n$ est absolument convergente si $\sum |x_n|$ converge.

Proposition

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration

Comme $\sum |x_n|$ converge elle vérifie le critère de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall q \geq p \geq n, \sum_{k=p}^{q} |x_k| \leq \epsilon$$

On en déduit que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall q \geq p \geq n, \left| \sum_{k=p}^{q} x_k \right| \leq \epsilon$$

et donc $\sum x_k$ satisfait le critère de Cauchy et donc converge.

Proposition

La somme de deux séries absolument convergentes est absolument convergente. Si $\sum x_n$ est absolument convergente, alors $\sum(\lambda x_n)$ est absolument convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{C}$.

Théorème

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries absolument convergentes. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

Alors la série $\sum z_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{m=0}^{\infty} z_m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} y_l\right)$$

Démonstration

Montrons d'abord que $\sum z_n$ est absolument convergente. On note que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq n} |z_m| &\leq \sum_{m\geq n}\left|\sum_{k+l=m} x_k y_l\right| \\ &\leq \sum_{k+l\geq n} |x_k|\cdot|y_l|\end{aligned}$$

On remarque que si $k+l \geq n$ alors k ou l est plus grand que p, qu'on définit comme la partie entière de $n/2$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq n} |z_m| &\leq \sum_{k\geq p \text{ ou } l\geq p} |x_k|\cdot|y_l| \\ \leq \left(\sum_{k\geq p}|x_k|\right)\left(\sum_{l}|y_l|\right) &+ \left(\sum_{k}|x_k|\right)\left(\sum_{l\geq p}|y_l|\right)\end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k\geq p}|x_k|\right)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k\geq p}|y_k|\right)=0$$

le résultat suit.

Pour déterminer la somme des z_n, on note que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{n}x_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n}y_l\right)-\sum_{m=0}^{n}z_m\right|=\left|\sum_{\substack{k\leq n,l\leq n\\ k+l>n}}x_ky_l\right|$$

Supposons que $n\geq 2p$. Si $k+l>n$ alors soit $k>p$, soit $l>p$. On a donc :

$$\left|\sum_{\substack{k\leq n,l\leq n\\ k+l>n}}x_ky_l\right|\leq\sum_{\substack{k\leq n,l\leq n\\ k+l>n}}|x_k|\cdot|y_l|$$

$$\leq\left(\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|\right)\left(\sum_{l=p+1}^{\infty}|y_l|\right)+\left(\sum_{k=p+1}^{\infty}|x_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}|y_l|\right)$$

Mais quand $p\to\infty$,

$$\sum_{l=p+1}^{\infty}|y_l|\to 0\quad\text{et}\quad\sum_{k=p+1}^{\infty}|x_k|\to 0$$

et le résultat suit.

□

Démonstration

Soit $\sum x_n$ une série. On dit que la série $\sum y_n$ est un rearrangement de $\sum x_n$ s'il existe une bijection $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y_n=x_{\sigma(n)}$.

Proposition

Supposons que $\sum x_n$ est absolument convergente et que $\sum y_n$ est un rearrangement de $\sum x_n$. Alors $\sum y_n$ converge, et $\sum y_n = \sum x_n$.

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$, et soit n_0 tel que $\sum_{n \geq n_0} |x_n| \leq \epsilon$. On note $m_0 = \max_{n \leq n_0} \sigma(n)$. On a alors pour $m \geq m_0$:

$$\left| \sum_{k=0}^{m} y_k - \sum_{l=0}^{n_0} x_l \right| = \left| \sum_{k=0}^{m} x_{\sigma(k)} - \sum_{l=0}^{n_0} x_l \right|$$

Mais $\{0, 1, \cdots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \cdots, \sigma(m)\}$ puisque $m \geq m_0$, et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{m} y_k - \sum_{l=0}^{n_0} x_l \right| &= \left| \sum_{\substack{l \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(m)\} \\ l > n_0}} x_l \right| \\ &\leq \sum_{\substack{l \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(m)\} \\ l > n_0}} |x_l| \\ &\leq \sum_{l > n_0} |x_l| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Comme $\sum x_l$ est absolument convergente, on en déduit le résultat.

□

<u>Séries semi-convergentes</u>

Définition

Une série est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Théorème du Critère d'Abel

Soient (a_n) et (x_n) deux suites, telles que :

- (a_n) est décroissante et tend vers 0
- (x_n) est le terme général d'une série dont les sommes partielles $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ sont bornées en valeur absolue par une constante $C > 0$

Alors la série $\sum a_n x_n$ est convergente.

Démonstration

On va utiliser la "transformation d'Abel" et le critère de Cauchy. Soit $p < q$, on a :

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k x_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k (X_k - X_{k-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k X_k - \sum_{l=p}^{q-1} a_{l+1} X_l\right|$$

$$= \left|\sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) X_k + a_q X_q - a_{p+1} X_p\right|$$

$$\leq \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) |X_k| + |a_q X_q| + |a_{p+1} X_p|$$

$$\leq C \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) + |a_q X_q| + |a_{p+1} X_p|$$

$$\leq C a_{p+1} + |a_q X_q| + |a_{p+1} X_p|$$

Comme chacun des termes dans la dernière expression tend vers 0 quand p et q tendent vers l'infini, on peut conclure par le critère de Cauchy.

$\square$

Proposition

Soit (a_n) une suite qui décroît vers 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.

ANALYSIS BASICS

Function

Definition

Given two sets A and B, a function from A to B is a rule or mapping that takes each element $x \in A$ and associates with it a single element of B. We write $f : A \to B$. Given an element $x \in A$, the expression $f(x)$ is used to represent the element of B associated with x by f.

The set A is called the domain of f.

The range of f is not necessarily equal to B but refers to the subset of B given by $\{y \in B : y = f(x) \quad \text{for some} \quad x \in A\}$.

Dirichlet function

The Dirichlet function is defined as:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

The domain is $\mathbb{R}$.

Absolute value function

The absolute value function is defined as:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{if} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

The domain is $\mathbb{R}$.

AXIOM OF COMPLETENESS

Axiom of completeness

Every nonempty set of real numbers that is bounded above has a least upper bound.

Upper bound

Definition

A set $A \subseteq \mathbb{R}$ is bounded above if there exists a number $b \in \mathbb{R}$ such that $a \leq b$ for all $a \in A$. The number b is called an upper bound for A.

Lower bound

Definition

The set A is bounded below if there exists a lower bound $l \in \mathbb{R}$ satisfying $l \leq a$ for every $a \in A$.

Supremum, Least upper bound

Definition

A real number s is the least upper bound for a set $A \subseteq \mathbb{R}$ if it meets the following two criteria:

- s is an upper bound for A
- if b is any upper bound for A, then $s \leq b$

Notation

The Supremum s of a subset A is written as:

$$s = \sup(A)$$

Remark

A less common notation is: $s = \text{lub}\,(A)$

Meaning *least upper bound*.

Corollary

A set can have a lot of upper bounds but it can only have at least one least upper bound.

Proof

If s_1 and s_2 are both least upper bounds for a set A, then we can assert $s_1 \leq s_2$ and $s_2 \leq s_1$. The conclusion is that $s_1 = s_2$ and least upper bounds are unique.

<u>Minimum and Maximum</u>

Definition

A real number a_0 is a maximum of the set A if a_0 is an element of A and $a_0 \geq a \quad \forall a \in A$.

Similarly, a number a_1 is a minimum of A if $a_1 \in A$ and $a_1 \leq a \quad \forall a \in A$.

Lemma

Assume $s \in \mathbb{R}$ is an upper bound for a set $A \subseteq \mathbb{R}$. Then, $s = \sup(A)$ if and only if, for every choice of $\varepsilon > 0$, there exists an element $a \in A$ satisfying $s - \varepsilon < a$.

Proof

Firstly, we need to prove that if $s = \sup(A)$, then for every choice of $\varepsilon > 0$, there exists an element $a \in A$ such that $s - \varepsilon < a$.

Secondly, we need to prove that if for every choice of $\varepsilon > 0$, there exists an element $a \in A$ satisfying $s - \varepsilon < a$, then $s = \sup(A)$.

1. Assume $s = \sup(A)$. We need to show that for every $\varepsilon > 0$, there exists an element $a \in A$ such that $s - \varepsilon < a$.

   Since $s = \sup(A)$, by definition, s is the least upper bound of A. This means:

   - s is an upper bound for A, i.e., $a \leq s$ for all $a \in A$.
   - For any $t < s$, there exists some element $a_t \in A$ such that $a_t > t$.

   Let $\varepsilon > 0$. Consider $t = s - \varepsilon$. Since $t < s$, by the property of the supremum, there must exist an element $a_\varepsilon \in A$ such that $a_\varepsilon > t$. Therefore, we have:

   $$a_\varepsilon > s - \varepsilon.$$

   Thus, for every $\varepsilon > 0$, there exists an element $a_\varepsilon \in A$ such that $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.

2. Assume that for every $\varepsilon > 0$, there exists an element $a \in A$ satisfying $s - \varepsilon < a$. We need to show that $s = \sup(A)$.

   First, we show that s is an upper bound of A. Assume for contradiction that s is not an upper bound. Then there exists some $b \in A$ such that $b > s$, which contradicts the assumption that s is an upper bound. Hence, s must be an upper bound.

   Next, we show that s is the least upper bound. Assume for contradiction that there exists some $u < s$ which is also an upper bound of A. Choose $\varepsilon = s - u > 0$. By assumption, there exists an element $a_\varepsilon \in A$ such that:

   $$s - \varepsilon < a_\varepsilon.$$

   Substituting $\varepsilon = s - u$, we get:

   $$s - (s - u) < a_\varepsilon, \quad u < a_\varepsilon.$$

   This contradicts the assumption that u is an upper bound of A. Therefore, no such $u < s$ can be an upper bound, and s must be the least upper bound.

Thus,

$$s = \sup(A)$$

Combining both parts, we conclude that $s = \sup(A)$ if and only if for every $\varepsilon > 0$, there exists an element $a \in A$ such that $s - \varepsilon < a$.

$\square$

CONTINUITY

Definition

Let $a \in \mathbb{R}$. A function $f : D \to \mathbb{R}$ is continuous at a if there exists an open interval $I \subset D$ containing a and if for all $\epsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that if $|x - a| < \delta$ then $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Definition

If a function is continuous at every point in its domain, we say that the function is continuous.

Sum of functions

Theorem

The sum of two continuous functions is continuous.

Proof

Let $f, g : D \to \mathbb{R}$ be two continuous functions at $a \in D$. Then for all $\epsilon > 0$ there exist $\delta_f, \delta_g > 0$ such that if $|x - a| < \delta_f$ then $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$ and if $|x - a| < \delta_g$ then $|g(x) - g(a)| < \epsilon/2$. Let $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$. Then if $|x - a| < \delta$ we have

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Product of functions

Theorem

The product of two continuous functions is continuous.

Proof

Let $f, g : D \to \mathbb{R}$ be two continuous functions at $a \in D$. Then for all $\epsilon > 0$ there exist $\delta_f, \delta_g > 0$ such that if $|x - a| < \delta_f$ then $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$ and if $|x - a| < \delta_g$ then $|g(x) - g(a)| < \epsilon/2$. Let $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$. Then if $|x - a| < \delta$ we have

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)| \\
&\leq |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a)| + |f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)| \\
&= |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(x) - f(a)| \\
&< |f(x)| \cdot \epsilon/2 + |g(a)| \cdot \epsilon/2 \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

<u>Intermediate Value Theorem</u>

Theorem

If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous and N is a number between $f(a)$ and $f(b)$, then there exists a $c \in [a, b]$ such that $f(c) = N$.

Proof

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous and N a number between $f(a)$ and $f(b)$. Without loss of generality, assume $f(a) < N < f(b)$. Then the set $S = \{x \in [a, b] : f(x) < N\}$ is non-empty and bounded above by b. Let $c = \sup S$. Then $f(c) \leq N$.

If $f(c) = N$, we are done. If $f(c) < N$, then by continuity of f at c, there exists a $\delta > 0$ such that for all $x \in [c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$, we have $|f(x) - f(c)| < N - f(c)$. This implies $f(x) < N$ for all such x, contradicting the definition of c as the least upper bound.

$\square$

Uniform continuity

Definition

A function $f : D \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous if for all $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that, for all $x, y \in D$ with $|x - y| < \delta$, we have $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Theorem

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous. Then f is uniformly continuous.

Proof

Let $\epsilon > 0$. Since f is continuous on the compact interval $[a, b]$, it is uniformly continuous on $[a, b]$. Therefore, there exists a $\delta > 0$ such that for all $x, y \in [a, b]$ with $|x - y| < \delta$, we have $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Brouwers' fixed point theorem in dimension 1

Theorem

Let $f : [a, b] \to [a, b]$ be a continuous function. Then there exists a point $c \in [a, b]$ such that $f(c) = c$.

Proof

We will use the Brouwer fixed point theorem in a more general setting. Consider the function $g : [a, b] \to [a, b]$ defined by $g(x) = f(x) - x$. Then g is continuous and

$g(a) \leq 0$, $g(b) \geq 0$. By the intermediate value theorem, there exists a point $c \in [a, b]$ such that $g(c) = 0$, also $f(c) = c$.

$\square$

Bolzano-Weierstrass Theorem

Theorem

Every bounded sequence in $\mathbb{R}^n$ has a convergent subsequence.

Proof

Let $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a bounded sequence in $\mathbb{R}^n$. By the Bolzano-Weierstrass theorem, every bounded sequence in $\mathbb{R}^n$ has a convergent subsequence. Therefore, there exists a subsequence $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ that converges to some limit $L \in \mathbb{R}^n$.

Maxima and minima

Theorem

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous. Then f admits a maximum and a minimum on $[a, b]$.

Proof

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous. Since $[a, b]$ is compact, f is uniformly continuous on $[a, b]$. Therefore, by the extreme value theorem, f attains a maximum and a minimum on $[a, b]$.

DIFFERNTIAL EQUATIONS

First Order Linear Differential Equation

A first order linear differntial equation has the following form:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Integrating Factor

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

multiyplying the expression by the integrating factor $\mu(x)$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

Setting: $\mu'(x) := \mu(x)P(x)$ and finding the integrating factor:

$$\mu'(x) = \mu(x)P(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = \int P(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(|\mu(x)|) = \int P(x)dx$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

DIFFERENTIATION

Derivative

Definition

The derivative quantifies the sensitivity to change of a function's output with respect to its input.

Notations

- For a given function we denote the derivative of a function $f(x)$ to be $f'(x)$, which is referred to as prime notation.
- For a given function f, the derivative f' is often denoted by:

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \text{or} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

  This notation is called Leibniz notation.

Differentiability

Definition

We say that $f : D \to \mathbb{R}$ is differentiable at x if the limit

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

exists. We call $f'(x)$ the derivative of $f(x)$. If $f'(x)$ exists for all $x \in D$ then we say f is differentiable.

Differentiation and Continuity

Theorem

If $f : D \to \mathbb{R}$ is differentiable at $a \in D$ then f is continuous at a.

Proof

We want to show that $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. But if $x = a + h$ then this is the same as $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. We will show that this is true by proving $\lim_{h \to 0}(f(a+h) - f(a)) = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0}(f(a+h) - f(a)) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \\
&= f'(a) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Remarks

- Note that this proof only makes sense when $f'(a)$ exists, that is, when f is differentiable.
- The converse to this theorem is not true.

<u>Absolute value function</u>

Theorem

The function $f(x) = |x|$ is continuous, but not differentiable.

Proof

At the point $a = 0$ we have

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = 0 = \lim_{x \to 0^+} |x| \quad \text{so} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

So the function is continuous.

We will now show that $f(x)$ is not differentiable. Unsurprisingly, the interesting

thing happens when $x = 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{if } h < 0 \\ 1 & \text{if } h > 0 \end{cases}$$

The expression $\frac{|h|}{h}\Big|$ is not defined when $h = 0$ (but we don't care about this as h never equals zero in our limit). So

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \qquad \text{and} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

These limits are not equal, so $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ does not exist. So $f(x) = |x|$ is not differentiable when $x = 0$.

$\square$

Higher derivatives

Definition

Deriving a function n times is called taking the n-th derivative.

Notation

As for the prime notation we denote higher derivatives:

$$f'''^{\cdots}(x) \quad \text{or} \quad f^{(n)}(x)$$

As for the Leibnizian notation we write:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Remark

For some functions it may not be possible or useless to take the derivative more than a few times.

Differentiation of common functions

See the proof of many common functions under démonstration des fonctions dérivées.

Sum rule of differentiation

Theorem

If f and g are differentiable at x then

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Proof

We want to show that $(f+g)'(x)$ exists and is equal to $f'(x) + g'(x)$. Recall that

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

so

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Product rule of differentiation

Theorem

If f and g are differentiable at x then

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Proof

As for the sum rule, we want to show that $(fg)'(x)$ exists and is equal to $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Recall that

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x)$$

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$\square$

Chain rule of differentiation

Theorem

If f and g are differentiable then

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Proof

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \right) \left(\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

To justify this, we define $H = g(x+h) - g(x)$, and equivalently $g(x+h) = g(x) + H$. Note that

$$\lim_{h \to 0} H = \lim_{h \to 0} g(x+h) - g(x) = g(x) - g(x) = 0$$

By making the substitutions we have that

$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \right) g'(x) = \left(\lim_{H \to 0} \frac{f(g(x) + H) - f(g(x))}{H} \right) g'(x)$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

$\square$

Quotient rule of differentiation

Theorem

If f and g are differentiable at x, then

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Proof

Since $f/g = f \cdot (1/g)$ we have

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g} \right)'(a)$$

$$= f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g} \right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g} \right)'(a)$$

$$= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f(a)(-g'(a))}{[g(a)]^2}$$

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

$\square$

Inverse functions

Definition

We say that $g : D_g \to \mathbb{R}$ is the inverse function of $f : D_f \to \mathbb{R}$ if for all $x \in D_g$

$$(f \circ g)(x) = x = (g \circ f)(x)$$

and if for all $x \in D_f$ we have

$$(g \circ f)(x) = x$$

Remark

Note that in certain cases we might be interested in functions that are not defined over all of $\mathbb{R}$.

Differentiation of inverse functions

Proposition

If f^{-1} is differentiable at y, then

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Proof

By the rule of composing functions, the derivative of $f^{-1}(f(x))$ is

$$f'(x)(f^{-1})'(f(x))$$

but because $f^{-1}(f(x)) = x$ this is also equal to 1. Hence

$$f'(x)(f^{-1})'(f(x)) = 1$$

and so

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Now setting $f(x) = y$ we have $x = f^{-1}(y)$ and so

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$\square$

FUNCTIONS

Function Notation

Definition

Functions are typically denoted by letters such as f, g, or h. If f is a function and x is an element of its domain, then $f(x)$ denotes the output value corresponding to the input x. The notation $f : A \to B$ indicates that f is a function with domain A and codomain B.

Function

Definition

A function is a collection of pairs of numbers with the following property: if (a, b) and (a, c) are both in the collection, then $b = c$; in other words, the collection must not contain two different pairs with the same first element.

Domain of a Function

Definition

If f is a function, the domain of f is the set of all a for which there is some b such that (a, b) is in f. If a is in the domain of f, it follows from the definition of a function that there is, in fact, a unique number b such that (a, b) is in f. This unique b is denoted by $f(a)$.

Notation

The domain of a function f is denoted by $\mathrm{dom}(f)$.

Range of a Function

Definition

The range of a function f is the set of all values $f(x)$ where x is in the domain of f. In other words, if $f : A \to B$ is a function, then the range is the set $\{f(x) : x \in A\}$.

Notation

The range of a function f is denoted by $\text{range}(f)$.

Function Uniqueness

Theorem

If f is a function and a is in the domain of f, then there exists exactly one b such that $f(a) = b$.

Proof

By the definition of a function, for each a in the domain, there exists at least one b such that (a, b) is in f. Suppose for contradiction that there exist two different values b_1 and b_2 such that both (a, b_1) and (a, b_2) are in f. This would violate the defining property of a function, which requires that if (a, b) and (a, c) are both in the function, then $b = c$. Therefore, there must be exactly one b for each a in the domain.

$\square$

Injective Functions, One-to-One Functions

Definition

A function $f : A \to B$ is called injective if different inputs always produce different outputs. Formally, f is injective if for all $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ implies $a_1 = a_2$.

Surjective Functions, Onto Functions

Definition

A function $f : A \to B$ is called surjective if every element in the codomain B is the image of at least one element in the domain A. Formally, f is surjective if for every $b \in B$, there exists an $a \in A$ such that $f(a) = b$.

Bijective Functions

Definition

A function $f : A \to B$ is called bijective if it is both injective and surjective. Bijective functions establish a perfect one-to-one correspondence between the elements of the domain and codomain.

Theorem

A function $f : A \to B$ is bijective if and only if there exists a function $f^{-1} : B \to A$ such that $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ and $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, where id_A and id_B are the identity functions on A and B respectively.

Proof

($\Rightarrow$) Suppose f is bijective. Then for each $b \in B$, there exists a unique $a \in A$ such that $f(a) = b$. Define $f^{-1}(b) = a$. This is well-defined because f is surjective (so such an a exists) and injective (so it's unique). Then $f^{-1}(f(a)) = a$ for all $a \in A$ and $f(f^{-1}(b)) = b$ for all $b \in B$.

($\Leftarrow$) Suppose f has an inverse f^{-1}. To show f is injective, assume $f(a_1) = f(a_2)$. Then $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$, so $a_1 = a_2$. To show f is surjective, for any $b \in B$, let $a = f^{-1}(b)$. Then $f(a) = f(f^{-1}(b)) = b$, so b is in the range of f.

$\square$

Inverse Functions

Definition

If $f : A \to B$ is a bijective function, then it has an inverse function $f^{-1} : B \to A$ defined by $f^{-1}(b) = a$ if and only if $f(a) = b$. The inverse function reverses the action of the original function.

Pigeonhole Principle

Theorems

If A and B are finite sets and $f : A \to B$ is a function, then:

1. If $|A| > |B|$, then f is not injective.
2. If $|A| < |B|$, then f is not surjective.

Proofs

1. If $|A| > |B|$, then by the pigeonhole principle, at least two elements of A must map to the same element of B, so f cannot be injective.
2. If $|A| < |B|$, then there are more elements in B than in A, so it's impossible for every element of B to be the image of some element of A. Therefore, f cannot be surjective.

$\square$

Composition of Functions

Definition

If $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are functions, then the composition $g \circ f$ is a function from A to C defined by $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ for all $x \in A$.

Associativity of Composition Theorem

If $f : A \to B$, $g : B \to C$, and $h : C \to D$ are functions, then $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Proof

For any $a \in A$, we have:

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

and

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

Since both compositions give the same result for every $a \in A$, the functions are equal.

$\square$

<u>Image of Intersection and Union</u>

Theorems

Let $f : A \to B$ be a function, and let $X, Y \subseteq A$. Then:

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
2. $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

Equality holds in 2. if f is injective.

Proofs

1. ($\subseteq$) If $b \in f(X \cup Y)$, then $b = f(a)$ for some $a \in X \cup Y$. So $a \in X$ or $a \in Y$, which means $b \in f(X)$ or $b \in f(Y)$, so $b \in f(X) \cup f(Y)$.

   ($\supseteq$) If $b \in f(X) \cup f(Y)$, then $b \in f(X)$ or $b \in f(Y)$. So there exists $a \in X$ or $a \in Y$ such that $b = f(a)$. Thus $a \in X \cup Y$, so $b \in f(X \cup Y)$.

2. If $b \in f(X \cap Y)$, then $b = f(a)$ for some $a \in X \cap Y$. So $a \in X$ and $a \in Y$, which means $b \in f(X)$ and $b \in f(Y)$, so $b \in f(X) \cap f(Y)$.

For the equality when f is injective: If $b \in f(X) \cap f(Y)$, then $b \in f(X)$ and $b \in f(Y)$. So there exist $a_1 \in X$ and $a_2 \in Y$ such that $f(a_1) = b$ and $f(a_2) = b$. Since f is injective, $a_1 = a_2$, so $a_1 \in X \cap Y$, and thus $b \in f(X \cap Y)$.

$\square$

Left and Right Inverses Theorems

Let $f : A \to B$ be a function.

1. There exists $g : B \to A$ such that $g \circ f = I_A$ if and only if f is injective.
2. There exists $h : B \to A$ such that $f \circ h = I_B$ if and only if f is surjective.

Proofs

1. ($\Rightarrow$) If $g \circ f = I_A$ and $f(x) = f(y)$, then $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$, so f is injective.

   ($\Leftarrow$) If f is injective, for each b in the range of f, there's a unique a with $f(a) = b$. Define $g(b) = a$. For b not in the range, define $g(b)$ arbitrarily.

2. ($\Rightarrow$) If $f \circ h = I_B$, then for any $b \in B$, $a = h(b)$ satisfies $f(a) = f(h(b)) = b$, so f is surjective.

   ($\Leftarrow$) If f is surjective, for each $b \in B$, choose $a_b \in A$ with $f(a_b) = b$. Define $h(b) = a_b$. Then $f(h(b)) = f(a_b) = b$ for all $b \in B$.

$\square$

Definition

A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is:

- even if $f(-x) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$
- odd if $f(-x) = -f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$

Properties

1. The only function that is both even and odd is the zero function.
2. Every function can be uniquely written as the sum of an even and an odd function.

Proof

(1) If f is both even and odd, then $f(x) = f(-x) = -f(x)$, so $2f(x) = 0$, hence $f(x) = 0$.

(2) For any function f, define:

$$E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Then E is even, O is odd, and $f = E + O$. For uniqueness, if $f = E_1 + O_1 = E_2 + O_2$ with E_1, E_2 even and O_1, O_2 odd, then $E_1 - E_2 = O_2 - O_1$ is both even and odd, hence zero.

$\square$

<u>Polynomial Functions</u>

Definition

A polynomial is a function of the form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

where $a_0, a_1, \ldots, a_n$ are constants and $a_n \neq 0$. The number n is called the degree of the polynomial.

Polynomial Division Theorem

For any polynomial f and number a, there exist a polynomial g and a number b such that:

$$f(x) = (x - a)g(x) + b$$

Proof

Let $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. We can perform polynomial long division of $f(x)$ by $(x - a)$ to obtain quotient $g(x)$ and remainder b.

$\square$

Factor Theorem

If $f(a) = 0$, then $f(x) = (x - a)g(x)$ for some polynomial g.

Proof

By polynomial division, $f(x) = (x - a)g(x) + b$. Then $0 = f(a) = (a - a)g(a) + b = b$, so $f(x) = (x - a)g(x)$.

$\square$

Number of Roots Theorem

A degree n polynomial has at most n roots.

Proof

We proceed by induction. For $n = 0$, a nonzero constant polynomial has no roots. Assume the theorem holds for degree $n - 1$. If a degree n polynomial f has a root a, then $f(x) = (x - a)g(x)$ where g has degree $n - 1$. By induction, g has at most $n - 1$ roots, so f has at most n roots.

$\square$

<u>Characteristic Functions</u>

Definition

For a set $A \subseteq \mathbb{R}$, the characteristic function $C_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ is defined by:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Properties of Characteristic Functions Theorem

For sets $A, B \subseteq \mathbb{R}$:

1. $C_{A \cap B}(x) = C_A(x) \cdot C_B(x)$
2. $C_{A \cup B}(x) = C_A(x) + C_B(x) - C_A(x)C_B(x)$
3. $C_{\mathbb{R} \setminus A}(x) = 1 - C_A(x)$

Characterization of Characteristic Functions Theorem

A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $f = f^2$ if and only if $f = C_A$ for some set $A \subseteq \mathbb{R}$.

Proof

($\Leftarrow$) If $f = C_A$, then $f(x)^2 = C_A(x)^2 = C_A(x) = f(x)$ since $C_A(x) \in \{0, 1\}$.

($\Rightarrow$) If $f = f^2$, then for each x, $f(x) = f(x)^2$, so $f(x) \in \{0, 1\}$. Let $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$. Then $f = C_A$.

$\square$

<u>Fixed Points and Iteration</u>

Definition

A fixed point of a function f is a value x such that $f(x) = x$.

Definition

A function f is idempotent if $f \circ f = f$, i.e., $f(f(x)) = f(x)$ for all x.

Properties of Idempotent Functions

If f is idempotent, then:

1. Every element in the range of f is a fixed point.
2. For any x, $f(x)$ is a fixed point.

Proofs

1. If $y = f(x)$ is in the range, then $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$.
2. $f(f(x)) = f(x)$ by idempotence, so $f(x)$ is a fixed point.

$\square$

Functional Equations

Cauchy's Functional Equation Theorem

If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $f(x + y) = f(x) + f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$, and f is continuous, then $f(x) = cx$ for some constant c.

Proof

First, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, so $f(0) = 0$.

For natural numbers n, $f(nx) = nf(x)$ by induction.

For rational numbers $\frac{p}{q}$, $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$.

By continuity, $f(x) = xf(1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Additive and Multiplicative Functions Theorem

If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for all x, y
2. $f(xy) = f(x)f(y)$ for all x, y
3. f is not identically zero

Then $f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Proof

First, $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$, so $f(1) = 0$ or 1. If $f(1) = 0$, then $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$ for all x, contradicting (3). So $f(1) = 1$.

For rational $r = \frac{p}{q}$, $f(r) = r$ by the additive property.

If $x > 0$, then $x = y^2$ for some y, so $f(x) = f(y)^2 \geq 0$.

If $x > y$, then $f(x) - f(y) = f(x - y) > 0$ (since $x - y > 0$ and f is not identically zero), so f is strictly increasing.

Since f agrees with the identity on rationals and is increasing, $f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

<u>Max, Min, and Absolute Value</u>

Max-Min Formula Theorem

For any functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. $\max(f, g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$
2. $\min(f, g)(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$
3. $f(x) = \max(f, 0)(x) + \min(f, 0)(x)$

Proof

For any real numbers a, b:

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

Applying these pointwise gives (1) and (2). For (3), note that $\max(f, 0) + \min(f, 0) = f$.

$\square$

Domain Determination

Domain of Composite Functions Theorem

For functions $f : A \to B$ and $g : B \to C$, the domain of $g \circ f$ is:

$$\{x \in A : f(x) \in \text{domain of } g\}$$

Proof

The proof follows from the definition of function composition and the requirement that the output of f must lie in the domain of g for $g(f(x))$ to be defined.

$\square$

Domain of Algebraic Expressions Theorem

The domain of an expression is the set of all x for which:

1. Denominators are nonzero
2. Arguments of square roots are nonnegative
3. Arguments of logarithms are positive
4. etc.

Proof

The proof follows from the definitions of the functions involved and the restrictions on their domains.

$\square$

Addition of Functions

Definition

If f and g are functions with the same domain, then their sum $f + g$ is defined by $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ for all x in the domain.

Multiplication of Functions

Definition

If f and g are functions with the same domain, then their product $f \cdot g$ is defined by $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ for all x in the domain.

Scalar Multiplication

Definition

If f is a function and c is a constant (scalar), then the scalar multiple $c \cdot f$ is defined by $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ for all x in the domain of f.

LIMITS OF FUNCTIONS

Limits of functions at infinity

Definition

For a function f, we say that $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ if for all $\epsilon > 0$ there is a number $N > 0$ such that $|f(x) - L| < \epsilon$ for all $x > N$.

Definition

For a function f, we say that $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ if for all $\epsilon > 0$ there is a number $N < 0$ such that $|f(x) - L| < \epsilon$ for all $x < N$.

Definition

For a function f, we say that $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ if for all $M > 0$ there is a number $N > 0$ such that $f(x) > M$ for all $x > N$.

Limits of functions at real numbers

Epsilon delta definition

For a function f, we say that $\lim_{x\to a} f(x) = L$ if for all $\varepsilon > 0$ there is a number $\delta > 0$ such that $|f(x) - L| < \varepsilon$ for all x with $0 < |x - a| < \delta$.

Limits on the right and left of a point

Definitions

- We say that

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

  if for all $\varepsilon > 0$ there exists some $\delta > 0$ such that if $a - x < \delta$ for all $x < a$ then $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- We say that

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

if for all $\varepsilon > 0$ there exists some $\delta > 0$ such that if $x - a < \delta$ for all $x > a$ then $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Theorem

A function f admits a limit at a point $a \in \mathbb{R}$ if and only if f admits a left limit and right limit at a and they coincide. That is,

$$\lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

<u>Sum rule</u>

Theorem

If f and g are functions such that $\lim_{x \to a} f(x) = L$ and $\lim_{x \to a} g(x) = M$, then

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$$

Proof

Let $\epsilon > 0$ and let $\epsilon_1 > 0$ and $\epsilon_2 > 0$ be values so that $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Since $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exists and is equal to L we know that there exists some $\delta_1 > 0$ such that

$$\text{if } 0 < p|x - a| < \delta_2 \text{ then } |g(x) - M| < \epsilon_2$$

So if we define $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, then if $0 < |x - a| < \delta$ we have that $|x - a|$ is also smaller than both δ_1 and δ_2, so

$$|f(x) - L| < \epsilon_1 \qquad \text{and} \qquad |g(x) - M| < \epsilon_2$$

We can now apply the triangle inequality to see that

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (L + M)| &= |f(x) + g(x) - L - M| \\ &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \end{aligned}$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$
$$< \epsilon_1 + \epsilon_2$$
$$= \epsilon$$

So for any $\epsilon > 0$ we have found a value $\delta > 0$ such that

$$\text{if } 0 < |x - a| < \delta \text{ then } |(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$$

$\square$

Product rule

Theorem

If f and g are functions such that $\lim_{x \to a} f(x) = L$ and $\lim_{x \to a} g(x) = M$, then

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

Proof

Let $\epsilon > 0$ be given. Since $\lim_{x \to a} f(x) = L$, we can find a $\delta_1 > 0$ such that if $0 < |x - a| < \delta_1$ then $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2(|M|+1)}$. Similarly, since $\lim_{x \to a} g(x) = M$, we can find a $\delta_2 > 0$ such that if $0 < |x - a| < \delta_2$ then $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2(|L|+1)}$.

So if we define $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, then if $0 < |x - a| < \delta$ we have that $|x - a|$ is also smaller than both δ_1 and δ_2, so

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2(|M| + 1)} \qquad \text{and} \qquad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2(|L| + 1)}$$

We can now apply the product limit theorem to see that

$$|(f \cdot g)(x) - (L \cdot M)| = |f(x) \cdot g(x) - L \cdot M|$$
$$= |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot M + f(x) \cdot M - L \cdot M|$$
$$= |f(x) \cdot (g(x) - M) + (f(x) - L) \cdot M|$$
$$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - M| + |f(x) - L| \cdot |M|$$

$$< (|L|+1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|L|+1)} + \frac{\epsilon}{2(|M|+1)} \cdot |M|$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

So for any $\epsilon > 0$ we have found a value $\delta > 0$ such that

$$\text{if } 0 < |x-a| < \delta \text{ then } |(f \cdot g)(x) - (L \cdot M)| < \epsilon$$

$\square$

Squeeze theorem, sandwich theorem

Theorem

Let $f, g,$ and h be functions such that

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ for all } x \in \mathbb{R}$$

if

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ and } \lim_{x \to a} h(x) = L \text{ then } \lim_{x \to a} g(x) = L$$

Proof

For all $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\text{if } |x-a| < \delta \text{ then } |f(x) - L| < \epsilon, \text{ and}$$
$$\text{if } |x-a| < \delta \text{ then } |h(x) - L| < \epsilon$$

Recall that $|f(x) - L| < \epsilon$ and $|h(x) - L| < \epsilon$ is equivalent to writing

$$-\epsilon < f(x) - L < \epsilon \quad \text{and} \quad -\epsilon < h(x) - L < \epsilon$$

So if $|x-a| < \delta$ then

$$-\epsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \epsilon$$

hence

$$-\epsilon \leq g(x) - L \leq \epsilon$$

So $|g(x) - L| < \epsilon$

$\square$

SEQUENCES

Upper bound

Definition

$B \in \mathbb{R}$ is an upper bound for $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ if $a_n \leq B$ for all $n \in \mathbb{R}$.

Lower bound

Definition

$B \in \mathbb{R}$ is an upper bound for $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ if $a_n \geq B$ for all $n \in \mathbb{R}$.

Supremum, least upper bound

Definition

$S \in \mathbb{R}$ is the supremum, for $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ if $S \leq B$ for all upper bounds B.

$$S = \min\{B \in \mathbb{R} | a_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Infimum, greatest lower bound

Definition

$I \in \mathbb{R}$ is the infimum, for $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ if $I \geq B$ for all lower bounds B.

$$I = \max\{B \in \mathbb{R} | a_n \geq B, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Convergent sequences

Theoreme

Convergent sequences are bounded.

Proof

Let $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a converging sequence, and let $s = \lim_{x \to \infty} s_n$.

Let us take $\varepsilon = 1$ and apply the definition of a limit. We know that there exists N

such that $n > N \Rightarrow |s_n - s| < 1$. Now by the triangle inequality $n > N \Rightarrow |s_n| < |s| + 1$

$$|s_n| = |s_n - s + s| \leq |s_n| + |s| \leq 1 + |s|$$

We can now define: $M := \max\{|s| + 1, |s_1|, \cdots, |s_N|\}$

This means $|s_n| \leq M$ for all $n \in \mathbb{N}$ and so (s_n) is a bounded sequence.

$\square$

Monotonic sequences

- A sequence $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ is called monotone increasing if:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq n_0$$

- A sequence $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ is called monotone decreasing if:

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0$$

Monotone Convergence Theorem

- If $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ is a monotone increasing sequence, with supremum S, then

$$a_n \to S$$

- If $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ is a monotone decreasing sequence, with infimum I, then

$$a_n \to I$$

Proof

Since S is the supremum we have that $|a_n - S| = S - a_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Now let $\epsilon > 0$ and assume that $S - a_n \geq \epsilon$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then $a_n \leq S - \epsilon$ for all $n \in \mathbb{N}$, that is, $S - \epsilon$ is an upper bound. This contradicts the fact that S is the supremum, so there must be some $N \in \mathbb{N}$ such that $S - a_N < \epsilon$.

Since a_n is monotone increasing $a_n \geq a_N$ for all $n \geq N$. So

$$|a_n - S| = S - a_n \leq S - a_N < \epsilon$$

for all $n \geq N$.

Arithmetic mean - geometric mean inequality

Arithmetic mean - geometric mean inequality theorem

Let $x_1, \ldots, x_n$ satisfy $x_i \geq 0$ for $i = 1, \ldots, n$. Then their geometric mean is at most their arithmetic mean:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

with equality if and only if $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Proof

We will prove it by induction over $n \geq 1$.

- For $n = 1$: we get an equality

$$x = \sqrt{x} = \frac{x}{1} = x$$

- Suppose its true for any n-tuple of non-negative numbers. Consider an $(n+1)$-tuple $x_1, \ldots, x_{n+1}$ and let α be their arithmetic mean, that is:

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}}{n+1}$$

  We now have

$$(n+1)\alpha = x_1 + \cdots + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

Examining different cases:

1. One of the numbers is 0, that is there exists some i such that $x_i = 0$. The inequality here is obvious as one side is 0. And for the other side to also be 0 we

need that $x_k = 0$ for $k = 1, \ldots, n+1$, so equality only occurs in the case when all terms are equal.

2. When we have $x_i = \alpha$, $i = 1, \ldots, n+1$, then we get equality by a simple computation:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = (n+1)\alpha$$

so

$$\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{n+1} = \alpha$$

and

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\alpha^{n+1}} = \alpha$$

3. Everything else! That is $x_k > 0$ for $k = 1, \ldots, n+1$ and not all the terms are equal. In this case there is an x_i strictly greater than α and one that is strictly smaller (otherwise $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \neq (n+1)\alpha$). Up to reordering, let's suppose that these numbers are x_n and x_{n+1}, that is: $x_n > \alpha$ and $x_{n+1} < \alpha$. In particular, $x_n - \alpha > 0$ and $\alpha - x_{n+1} > 0$ so we have

$$(x_n - \alpha)(\alpha - x_{n+1}) > 0. \qquad (\star)$$

We define a new real number y as

$$y = x_n + x_{n+1} - \alpha \geq x_n - \alpha > 0$$

now

$$(n+1)\alpha = x_1 + \cdots + \underbrace{x_n + x_{n+1}}_{y+\alpha} = x_1 + \cdots + x_{n-1} + y + \alpha.$$

so

$$n \cdot \alpha = x_1 + \cdots + x_{n-1} + y$$

And thus α is also the arithmetic mean of $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$.

By the induction hypothesis we have

$$\underbrace{\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + y}{n}}_{\alpha} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_{n-1} y}$$

and so

$$\alpha^n \geq x_1 \ldots x_{n-1} y$$

now

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha \geq x_1 \ldots x_{n-1} y \alpha$$

But $y = x_n + x_{n+1} - \alpha$ and so

$$\begin{aligned} y \cdot \alpha - x_n \cdot x_{n+1} &= (x_n + x_{n+1} - \alpha)\alpha - x_n x_{n+1} \\ &= x_n \alpha + x_{n+1}\alpha - \alpha^2 - x_n x_{n+1} \\ &= (\alpha - x_{n+1})(x_n - \alpha) > 0 \end{aligned}$$

by the inequality $(\star)$ above.

We thus have that $y \cdot \alpha > x_n x_{n+1}$.

In conclusion: $\alpha^{n+1} > x_1 \ldots x_{n-1} \cdot x_n \cdot x_{n+1}$, that is

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} > x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$$

as wanted. And that proves the theorem!

$\square$

Lemma

The sequences $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ have the following monotonicity properties:

1. $a_{n+1} > a_n$ for $n \geq 1$

2. $b_{n+1} < b_n$ for $n \geq 2$

Proofs

1. Let $x_1 = 1,\ x_2 = \ldots = x_k = \ldots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$. We apply the AM-GM inequality to these numbers. Their arithmetic mean satisfies:

$$\frac{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n + 1 + n \cdot \frac{1}{n}}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \quad (\star\star)$$

Their geometric mean is

$$\sqrt[n+1]{x_1 \ldots x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \quad (\star\star\star)$$

The x_is are not all equal, so we know that $(\star\star) > (\star\star\star)$. From this:

$$1 + \frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

And so:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_n$$

2. This case is very similar to what we just did. We set $y_1 = 1$ and $y_2 = y_3 = \cdots = y_{n+1} = 1 - \frac{1}{n} > 0$. Then:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n+1} y_i}{n+1} &= \frac{1 + n\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n+1} \\
&= \frac{1 + n - 1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&> \sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

by the arithmetic mean - geometric mean inequality applied to $y_1, \ldots, y_{n+1}$. We deduce

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$$

By taking the inverse on both sides, we reverse the inequality and we get:

$$b_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = b_n$$

as required.

$\square$

Lemma

For $n \geq 2$:

$$0 < b_n - a_n < \frac{4}{n}$$

Proof

We already know that $b_n - a_n > 0$. Let's check the other inequality:

$$b_n - a_n = b_n \left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right)$$

We have:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$$

and

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

so

$$b_n - a_n = b_n \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$$
$$= b_n \left(1 - \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\right)$$

Set $q = \frac{n^2-1}{n^2} < 1$. We have:

$$b_n - a_n = b_n(1 - q^n)$$

and so

$$1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

As $q < 1$, we also have that $q^k < 1$ and we can deduce that

$$1 - q^n < (1-q) \cdot n$$

We've thus shown that

$$b_n - a_n < b_n(1-q) \cdot n$$

Now as

$$1 - q = \left(1 - \frac{n^2-1}{n^2}\right) = \frac{n^2 - (n^2-1)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

and b_n is decreasing so $b_n \leq b_2 = 4$. We can conclude:

$$b_n - a_n < 4 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{4}{n}$$

$\square$

<u>Squeeze theorem, Sandwhich theorem</u>

Squeeze Theorem

If $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ and $(z_n)_{n=n_0}^{\infty}$ are sequences that satisfy

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

and if

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \ell$$

for $\ell \in \mathbb{R}$ then

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \ell.$$

Euler's number

Definition

We define the real number e as the limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Approximating factorials

Theorem

For $n \geq 2$ we have

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < n^n$$

Proof

We have

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 \quad \text{so} \quad n! < \underbrace{n\cdot n\ldots n}_{n \text{ times}} = n^n$$

Let us establish the second inequality. As e is the limit of an increasing sequence $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, we have that, for all $k \geq 1, e > a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$. Thus

$$e^{n-1} > \prod_{k=1}^{n-1} a_k (= a_1 \cdot \cdots \cdot a_{n-1})$$

and from this

$$e^{n-1} > a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

Many terms simplify through telescoping:

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n^n}{n!}$$

Therefore

$$e^{n-1} > \frac{n^n}{n!} \quad \text{and} \quad n! > \frac{n^n}{e^{n-1}}$$

This completes the proof.

$\square$

Stirlings formula theorem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n^n}{e^n}\right)\sqrt{2\pi n}} = 1$$

Proof

We will use the result of the previous theorem. We have

$$n! \sim \left(\frac{n^n}{e^n}\right)\sqrt{2\pi n}$$

Thus

$$\frac{n!}{\left(\frac{n^n}{e^n}\right)\sqrt{2\pi n}} \to 1$$

as $n \to \infty$.

$\square$

TAYLOR EXPANSION

Taylor series

Definition

Let I be an interval $f\colon I \to \mathbb{R}$ an arbitrary differentiable function, then the infinite series:

$$T_f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_a^{(k)}}{k!}(x-a)^k$$

is the Taylor expansion of f around the point a. For $(x-a)$ being small, one can stop the Taylor expansion after a certain n^{th} element and obtain thus the approximation of the function f around the point a.

DÉMONSTRATIONS DES FONCTIONS DÉRIVÉES

Dérivée de la fonction constante

Théorème

La fonction constante f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ et par $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$ est dérivable sur $D_{f'}$ et

$$f'(x) = 0$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction constante f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ et par $f(x) = k$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{k - k}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} \\ &= 0\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction affine

Théorème

La fonction affine f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}$ est:

$$f'(x) = m$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction affine f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{mx+p-(ma+p)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{mx+p-ma-p}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{mx-ma}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{m(x-a)}{x-a}\\ &= a\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction carré

Théorème

La fonction carré f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2x.$$

Démonstration

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = 2a.$$

cqfd.

Dérivée de la fonction inverse

Théorème

La fonction inverse f définie sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur D_f et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Démonstration

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{ax}\right)=-\frac{1}{a^2}.$$

cqfd.

Dérivée de la fonction racine carrée

Théorème

La fonction racine carrée f définie sur $D_f=\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\&=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\&=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction sinus

Théorème

La fonction sinus f définie sur $D_f=\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\cos(x).$$

Démonstration

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}$$

$$=\sin(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0}+\cos(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{1}$$

$$=\cos(a).$$

cqfd.

Dérivée de la fonction cosinus

Théorème

La fonction cosinus f définie sur $D_f=\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=-\sin(x).$$

Démonstration

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}$$

$$=\cos(a)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0}-\sin(a)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{1}$$

$$=-\sin(a).$$

cqfd.

Dérivée de la fonction tangente

Théorème

La fonction tangente f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ par $f(x)=\tan(x)$ est dérivable sur son domaine et

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(a+h) - \tan(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)} - \frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{h}.$$

Regroupons en un seul quotient:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h)\cos(a) - \sin(a)\cos(a+h)}{h\ \cos(a+h)\cos(a)}.$$

Or, par l'identité trigonométrique:

$$\sin(a+h)\cos(a) - \sin(a)\cos(a+h) = \sin(h).$$

D'où

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos(a+h)\cos(a)}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(a)}.$$

cqfd.

Dérivée de la fonction exponentielle

Théorème

La fonction $f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^x.$$

Démonstration

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^a(e^h - 1)}{h} = e^a \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

cqfd.

Dérivée de la fonction exponentielle de base a

Théorème

Pour $a > 0$, la fonction $f(x) = a^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = a^x \ln(a).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{a+h} - a^a}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^a(a^h - 1)}{h} \\ &= a^a \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^a \ln(a). \end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction $f(x) = \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{a} \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{h}{a})}{\frac{h}{a}}}_{\to 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction logarithme en base a

Théorème

La fonction $f(x) = \log_a(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $a > 0, a \neq 1$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(a+h) - \log_a(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\ln(a+h)}{\ln(a)} - \frac{\ln(a)}{\ln(a)}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(a)} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\big(a+h\big) - \ln(a)}{h} \\ &= \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a\,\ln(a)}. \end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de sinus hyperboliques

Théorème

La fonction $f(x) = \sinh(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \cosh(x).$$

Démonstration

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sinh(a+h) - \sinh(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sinh(a)\cosh(h) + \cosh(a)\sinh(h) - \sinh(a)}{h}$$

$$= \sinh(a) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cosh(h) - 1}{h}}_{0} + \cosh(a) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sinh(h)}{h}}_{1}$$

$$= \cosh(a).$$

cqfd.

<u>Dérivée de cosinus hyperboliques</u>

Théorème

La fonction $f(x) = \cosh(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \sinh(x).$$

Démonstration

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\cosh(a+h) - \cosh(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cosh(a)\cosh(h) + \sinh(a)\sinh(h) - \cosh(a)}{h}$$

$$= \cosh(a) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cosh(h) - 1}{h}}_{0} + \sinh(a) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sinh(h)}{h}}_{1}$$

$$= \sinh(a).$$

cqfd.

Théorème

La fonction $f(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\tanh(a+h) - \tanh(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sinh(a+h)}{\cosh(a+h)} - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sinh(a+h)\,\cosh(a) - \sinh(a)\,\cosh(a+h)}{h\,\cosh(a+h)\cosh(a)}. \end{aligned}$$

Or, par les formules d'addition :

$$\sinh(a+h)\cosh(a) - \sinh(a)\cosh(a+h) = \sinh(h).$$

D'où

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sinh(h)}{h}\,\frac{1}{\cosh(a+h)\cosh(a)} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\cosh^2(a)} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(a)}. \end{aligned}$$

cqfd.

FONCTION EXPONENTIELLE

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = f(x)\ et\ f(0) = 1$$

Définition

La fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f\ et\ f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

Théorème

La fonction f définie par $f(x) = \exp(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \exp(u(x))$$

Théorème

Pour tout réel a et tout réel b,

$$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

Démonstration

On fixe le réel a et on introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$h = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \left(\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}\right)'$$

$$= \frac{1}{\exp(a)} \cdot (\exp)'(x+a)$$

$$= \frac{1}{\exp(a)} \cdot (x+a)' \cdot \exp(x+a)$$

$$= \frac{1}{\exp(a)} \cdot 1 \cdot \exp(x+a)$$

$$= \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$$

$$= h'(x)$$

De plus: $h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$

La fonction h est telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$: il s'agit donc de la fonction exponentielle.

Ainsi, pour tout réel x :

$$h(x) = \exp(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x)$$

Avec $| \cdot \exp(a) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \exp(x+a) = \exp(x) \cdot \exp(a)$$

Pour $x = b$, on obtient:

$$\Leftrightarrow \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

cqfd

Théorème

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}\ et\ \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

Démonstration

On sait que: $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$: $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ (1)

1 Pour $b = -a$, on obtient :

$$\exp[a + (-a)] = \exp(a) \cdot \exp(-a)$$

$$\Leftrightarrow \exp(0) = \exp(a) \cdot \exp(-a)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \exp(a) \cdot \exp(-a) \mid \cdot \frac{1}{\exp(a)},\ car\ \exp(a) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}\ \ (2)$$

2) On a:

$$\exp(a-b) = \exp[a + (-b)]$$

Par (1):

$$= \exp(a) \cdot \exp(-b)$$

Par (2):

$$= \exp(a) \cdot \frac{1}{\exp(b)}$$

$$= \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

cqfd

Théorème

$\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$$

Théorème

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n \cdot x) = [\exp(x)]^n$$

Démonstration

Montrons d'abord par récurrence que la formule est vraie pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.

$$\mathscr{P}(x) : \exp(n \cdot x) = [\exp(x)]^n$$

Initialisation:

$\mathscr{P}(0)$ est vraie.

En effet $\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1$ et $[\exp(x)]^0 = 1$

Hérédité:

Supposons que l'on ait $\mathscr{P}(n)$.

Alors on aurait:

$$\begin{aligned}\exp[(n+1)x] &= \exp(nx + x)\\ &= \exp(nx) \cdot \exp(x)\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}&= \exp[(x)]^n \cdot \exp(x)\\ &= \exp[(x)]^{n+1}\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N} : \exp(nx) = [\exp(x)]^n$

Par ailleurs,

$$\exp(-nx) = \frac{1}{\exp(nx)} = \frac{1}{[\exp(x)]^n} = [\exp(x)]^{-n}$$

La formule est donc vraie pour tout entier relatif.

cqfd

Notation

$$e = \exp(1)$$

e est appelé nombre exponentiel, nombre d'Euler ou constante de Néper.

$$e \simeq 2.71828$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$$

Conventions

$$e^0 = 1$$
$$e^1 = e$$

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$
$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$
$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$
$$e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(e^x)' = e^x$$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $\forall x \in I$:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Variations

Théorème

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x > 0$$

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Démonstration

Démontrons que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ en comparant e^x à x.

Pour cela, étudions la fonction différence f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = e^x - x$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1$$

$$\Leftrightarrow e^x > e^0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

f sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geqslant 1$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > x$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc par le théorème de comparaison, on a:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

cqfd

Démontrons que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Posons $t = -x \Leftrightarrow x = -t$

Si $x \to -\infty, t \to +\infty$

Donc,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{t \to +\infty} e^{-t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{e^t}}_{\to +\infty}$$

$$= 0$$

cqfd

Courbe représentative

Théorème

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0}$$

par définition de la dérivabilité de exp en 0

$$= (\exp)'(0)$$

$$= \exp(0)$$

$$= 1$$

Croissance comparée

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration 1

Démontrons que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ en comparant e^x à $\frac{x^2}{2}$

Pour cela, étudions la fonction différence f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x - x$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) =$$

Or:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow e^x > e^0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

Comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant (pour la fonction f'):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	1	$\nearrow$	

f' admet sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) \geqslant 1$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) > 0$$

On obtient alors le tableau de variations pour la fonction f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$\nearrow$	1	$\nearrow$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) > 1$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, donc par le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration 2

Démontrons que:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Posons $t = -x \Leftrightarrow x = -t$

Si $x \to -\infty$, alors $t \to +\infty$

Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} -te^{-t}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-t}{e^t}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\frac{e^t}{t}}$$

$$= 0$$

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Théorème

$\forall x \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration 1

Démontrons que:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Posons $t = \frac{x}{n} \Leftrightarrow x = t \cdot n$

Si $x \to +\infty$, alors $t \to +\infty$, car $n \geqslant 1$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{nt}}{(nt)^n}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{(e^t)^n}{n^n \cdot t^n}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{n^n}}_{>0} \cdot \left(\underbrace{\frac{e^t}{t}}_{\to +\infty} \right)^n$$

$$= +\infty$$

Démonstration 2

Posons $t = -x \Leftrightarrow x = -t$;

lorsque $x \to -\infty$ alors $t \to +\infty$

- <u>Si n est pair:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = \lim_{t \to +\infty} (-t)^n \cdot e^{-t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{e^t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{t^n}{e^t}}_{\to +\infty}}$$

$$= 0$$

- <u>Si n est impair:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = \lim_{t \to +\infty} (-t)^n \cdot e^{-t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{-t^n}{e^t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{-1}{\underbrace{\frac{t^n}{e^t}}_{\to +\infty}}$$

$$= 0$$

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y = f(x)$. La réciproque de cette fonction est la relation qui fait correspondre à chaque y obtenu par f, le ou les x dont y est l'image.

Remarques

- La réciproque d'une fonction est une relation, mais n'est pas toujours une fonction comme chaque antécédent admet au plus une seul image.
- Les courbes d'une fonction f et de sa réciproque sont toujours symétriques par rapport à la première bissectrices des axes du repère orthonormé.

Propriété

Soit f une fonction telle que sa réciproque soit également une fonction notée g.

Alors $\forall x \in D_g$:

$$f \circ g(x) = x$$

et $\forall x \in D_f$:

$$g \circ f(x) = x$$

Fonction réciproque

Définition

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie par:

$$\ln :]0; +\infty[\ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y = \ln(x)$$

où $\ln(x)$ est le nombre dont l'exponentielle est x.

Propriété

1. par définition

   $\forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$

3. $\ln(e) = 1$

4. $\ln(1) = 0$

Théorème

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$$

Démonstration

Si $\ln(a) = b$, alors $e^b = e^{\ln(a)} = a$

Réciproquement, si $a = e^b$, alors $\ln(a) = \ln(e^b) = b$.

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration

Considérons deux nombres strictement positifs u et v tels que $u < v$, soit encore $e^{\ln(u)} < e^{\ln(v)}$. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc nécessairement, $\ln(u) < \ln(v)$: La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Propriété

$\forall a, b \in]0; +\infty[$

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

et

$$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$$

Théorème

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Comme la fontion exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\Leftrightarrow e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$$

$$\Leftrightarrow ab = e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)}$$

$$\Leftrightarrow ab = e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)}$$

$$\Leftrightarrow ab = a \cdot b$$

Théorème

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$$

Démonstration

On sait que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* :$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \ (1)$$

- Pour $x = \frac{a}{b}$ et $y = b$, (1) s'écrit:

$$\ln(\frac{a}{b} \cdot b) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(a) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \ (2)$$

- Pour $a = 1$, (2) s'écrit:

$$\ln(\frac{1}{b}) = \ln(1) - \ln(b) = -\ln(b)$$

Théorème

Pour tout entier $p > 1$ et tous réels $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_p > 0$

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p)$$

Démonstration

Montrons par récurrence que la formule est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$

$$\mathscr{P}(p) : \ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p)$$

- <u>Initialisation:</u> $\mathscr{P}(1)$ est vraie

  En effet, $\ln(a_1) = \ln(a_1)$

- <u>Hérédité:</u> Supposons que l'on ait $\mathscr{P}(p)$

  Alors on aurait,

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p \cdot a_{p+1})$$

$$= \ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) + \ln(a_{p+1})$$

$$= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots \ln(a_p) + \ln(a_{p+1})$$

par l'hypothèse de récurrence

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie

- <u>Conclusion:</u> Pour tout entier $p \geqslant 1$ et tous réel $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_p > 0$:

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p)$$

Théorème

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall p \in \mathbb{Z}$

$$\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$$

Démonstration

On sait que:

Pour tout entier $p \geqslant 1$ et tous réels $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_p > 0$:

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_p) \ (1)$$

- si $p \geqslant 1$: Lorsque $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a$, alors (1) permet de conclure que

$$\ln(a^p) = p \ln(a) \ (2)$$

- $p \leqslant -1$:

$$\begin{aligned} \ln(a^p) &= \ln(\frac{1}{a^{-p}}) \\ &= -\ln(a^{-p}) \\ &= -(-p \ln(a)) \end{aligned}$$

  par (2), car $-p \geqslant 1$

$$= p \ln(a)$$

- si $p = 0$: $\ln(a^p) = \ln(1) = 0$ et $p \ln(a) = 0$.

  D'où le résultat.

Théorème

$\forall a > 0$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstration

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a})$$
$$\Leftrightarrow \ln(a) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a})$$
$$\Leftrightarrow \ln(a) = 2\ln(\sqrt{a})$$
$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

<u>Limites</u>

Théorème

1. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
2. $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Théorème

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Démonstration

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$$
$$= (\ln)'(1)$$
$$= 1$$

<u>Dérivée</u>

Théorème

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

Nous devons démontrer que:

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}$$

Posons:

$$y = \ln(a) \Leftrightarrow x = e^y$$

et

$$b = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^b$$

Si $x \to a$, alors $y \to \ln(a) = b$, car ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

On a donc:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} &= \lim_{y \to b} \frac{y - b}{e^y - e^b} \\
&= \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{y-b}{e^y - e^b}} \\
&= \frac{1}{(\exp)'(b)} \\
&= \frac{1}{e^b} \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

Conséquence

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction f définie par:

$$f(x) = \ln[u(x)]$$

est dérivable sur I et $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \frac{u^{(}x)}{u(x)}$$

<u>Croissance comparée de</u> $\ln(x)$ <u>et</u> x^n

Théorème

1. $\lim_{x \to +\infty} = \frac{\ln(x)}{x} = 0$
2. $\lim_{x \to 0^+} = x\ln(x) = 0$

Démonstration

1. Posons $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

   Si $x \to +\infty$, alors $y \to +\infty$

   Donc:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{\frac{y}{e^y}}}_{\to +\infty}$$

$$= 0$$

2. Posons $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

   Si $x \to 0^+$, alors $y \to -\infty$

   Donc:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) &= \lim_{y\to -\infty} e^y \cdot y \\ &= \lim_{y\to -\infty} ye^y \\ &= 0\end{aligned}$$

Théorème

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

Remarques

1. On dit qu'à l'infini et en 0 x l'emporte sur $\ln(x)$.
2. Vu que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, $\mathscr{C}_{\ln}$ n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

Théorème

$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} x^n \ln(x) = +\infty$
3. $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

Remarque

On dit qu'à l'infini et en 0, n'importe quelle puissance de x l'emporte sur $\ln(x)$.

CONDITIONS MATHÉMATIQUES UTILES

Droites parallèles

$$Les\ droites\ (AB)\ et\ (CD)\ sont\ parallels$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{CD}\ sont\ colineaires$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} |\ \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$$

Points alignés

$$Les\ droites\ A,\ B\ et\ C\ sont\ alignés$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{CD}\ sont\ colineaires$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} |\ \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$$

Parallèlogramme

$$ABCD\ est\ un\ parallelogramme$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ =\ \overrightarrow{DC}$$

Losange

$$ABCD\ est\ un\ losange$$

$$\Leftrightarrow ABCD\ est\ un\ parallelogramme$$

$$\Leftrightarrow ABCD\ est\ un\ parallelogramme\ et\ deux\ vecteurs\ consécutifs\ ont\ la\ même\ norme$$

Triangle isocèle

$$ABC\ est\ un\ triangle\ isocèle\ en\ A$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \ =\ \|\overrightarrow{AC}\|$$

Triangle équilatérale

$$ABC\ est\ un\ triangle\ équilatérale$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \ =\ \|\overrightarrow{AC}\| \ =\ \|\overrightarrow{BC}\|$$

Triangle rectangle

$$ABC \text{ est un triangle rectangle en } A$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \ + \ \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

Remarque

Ceci est la réciproque du théorème du Phythagore

Carré

$$ABCD \text{ est un carré}$$

$$\Leftrightarrow ABCD \text{ est un losange et il y a un angle droit}$$

Médiatrice

Soit A et B deux points et m_{AB} la médiatrice de $[AB]$

$$M\,(z) \in m_{AB}$$

$$\Leftrightarrow AM \ = \ MB$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\| \ = \ \|\overrightarrow{MB}\|$$

$$\Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$$

Cercle

Soit C le cercle de rayon r et de centre A

$$M\,(z) \in C$$

$$\Leftrightarrow AM = r$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\| \ = \ r$$

$$\Leftrightarrow |z - z_A| = \ r$$

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Règles de calcul

Définition

À tout couple des points $(A; B)$ de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dans un plan qui convient A et B, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B. Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.

Définition

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que $ABCD$ est un parallélogramme éventuellement aplati.
Dans ce cas, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont représentants d'un même vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Pour tout point E de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{v}$, il existe un unique point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{v}$
.

Relation de Chasles

Définition

Pour tous points A, B, C de l'espace

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nul et soient k et l deux nombres réels. On a:

1. $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$

3. $(k+l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$

4. $k(l\overrightarrow{u}) = (kl)\overrightarrow{u}$

Vecteurs colinéaires, parallélisme, alignement

Définition

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc s'ils ont la même pente.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Théorème

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel k tel que:

$$\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$$

  En effet, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont alors la même direction.

- Soient A, B, C trois points distincts de l'espace A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc qu'il existe un nombre réel k tel que:

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$$

Centre de gravité

Définition

On appelle centre de gravité un triangle ABC le point G tel que:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Propriété

Soient un triangle ABC, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et G le centre de gravité, alors:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

Plans de l'espace, vecteurs coplanaires

Règle

Par trois points A, B et C, non alignés, passe un plan et un seul.

Ce plan est noté (ABC). On dit que trois points non alignes déterminent un plan.

Conséquences

- Une droite d et un point extérieur à d déterminent un plan.
- Deux droites sécantes déterminent un plan.

Règle

Si A et B sont deux points distincts d'un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Théorème

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan (ABC). Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe des nombres réels x et y tels que:

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Démonstration

Dans le plan $\mathscr{P}$, comme les points A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan $\mathscr{P}$. Donc pour tout point M de $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{AM}$ se décompose en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ainsi il existe des nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

Réciproquement, on considère le point N du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. Alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ et $M = N$. Le point M appartient au plan $\mathscr{P}$.

Vocabulaire

En générale, un plan est défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On parle alors du plan $\mathscr{P}(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ et on dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs de ce plan.

Propriété

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèls.

Définition

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont dans le même plan.

Théorème *

$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels a et b tels que:

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

Démonstration

Pour un point O quelconque de l'espace, A, B, C sont définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan (OAB). Par définition $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires signifie que C appartient au plan (OAB). D'après le théorème *, il existe des nombres a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$

Conséquences

1. Dire que quatre points A, B, C et D sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

2. Dire que les droites (AB) et (CD) sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

3. Dire que les plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

Repère dans l'espace

Définition

Un repère de l'espace noté $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est formé d'un point O et d'un triplet $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires. Le triplet $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est appelé base de vecteurs de l'espace

Théorème

$(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels $(x; y; z)$ tels que:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Démonstration

Soit $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ une base de l'espace, O est un point de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan défini par O et les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Soit M' le point d'intersection de la droite passant par M de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$ et le plan $\mathscr{P}$. Comme $M' \in \mathscr{P}$ il existe deux nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires, donc il existe un nombre réel z tel que $\overrightarrow{MM'} = z \cdot \overrightarrow{k}$. D'où,

$$ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM^{\prime} + \overrightarrow{MM} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k} $$

On admet l'unicité de celle écriture.

Vocabulaire

$(x; y; z)$ sont des coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la cote de M dans ce repère.

$(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est un repère. Au vecteur $\overrightarrow{u}$ associons M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. Par définition, les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées $(x; y; z)$ de M. Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit de manière unique:

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

<u>Paramétrage d'une droite</u>

Théorème

La droite d passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que:

$$(S) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

Démonstration

$$M \in d(A;\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} | \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} | \begin{cases} x - x_0 & = t \cdot a \\ y - y_0 & = t \cdot b \\ z - z_0 & = t \cdot c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} | \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}$$

Le système (S) est appelé représentation paramétrique de la droite $d(A;\overrightarrow{u})$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ t est le paramètre.

À chaque valuer de t, on associe un et un seul point $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. Réciproquement, à chaque point M de d correspond un seul nombre t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$

Conséquences

Lorsqu'une représentation paramétrique d'une droite d est écrite sous la forme (S), alors on peut affirmer que d passe par $A(x_0; y_0; z_0)$ et que $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ est un vecteur directeur de d.

<u>Position relative, intersection de deux droites</u>

Théorie

Soient d la droite passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deux droites de l'espace de représentation paramétriques respectives:

$$d : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

et

$$d : \begin{cases} x' = x'_0 + s \cdot a' \\ y' = y'_0 + s \cdot b' \\ z' = z'_0 + s \cdot c' \end{cases} \quad , s \in \mathbb{R}$$

Ces deux droites d et d' peuvent être:

- <u>strictement parallèles:</u> $d \cap d' = \emptyset$. (d et d' sont coplanaires)
- <u>confondues:</u> $d = d'$
- <u>sécantes:</u> $d \cap d' = \{I\}$ (deux droites sécantes sont coplanaires, elles appartiennent à un même plan)
- <u>non coplanaires:</u> $d \cap d' = \emptyset$ (on dit aussi que d et d' sont gauches)

Conclusions

d *et* d' *sont* ...	*Comment le montrer*
strictement parallèles ou coplanaires	$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires $A \in d$, mais $A \notin d'$ (ou $A' \in d'$, mais $A' \notin d$; ou $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{u}$ non colinéaires)
confondues	$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires $A \notin d'$ (ou $A' \in d'$ et $A' \in d$: ou $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{u}$ sont coplanaires)

sécantes	il existe un unique couple $(s;t) \in \mathbb{R}^2$ tel que (S): $$\begin{cases} x_0 + at = x'_0 + s \cdot a's \\ y_0 + bt = y'_0 + s \cdot b's \\ z_0 + ct = z'_0 + s \cdot c's \end{cases}$$
non coplanaires	$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires il n'existe pas de couple $(s;t) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie (S)

Produit scalaire dans l'espace

Définition

Dans l'espace une unité de longuer étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}[\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2]$$

Deux vectuers de l'espace sont nécessairement coplanaires. En effet, quels que soient les trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les points A, B, C.

L'unité de longuer dans le plan étant celle choisie dans l'espace, la définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de l'espace coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan $\mathscr{P}$.

Il en résulte que les expression du produit scalaire établies dans le plan sont encore valables dans l'espace.

- Si α est la mesure de l'angle géométrique associé à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\alpha)$$

Conséquences: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \| \overrightarrow{AB} \|^2 = AB^2$ (1)

THÉORÈME DE PYTHAGORE

Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle. Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque du Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle. Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A.

Contraposée du Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle. Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

THÉORÈME DE THALÈS

Théorème

Considérons deux droites d_1 et d_2 sécantes en A coupées par deux parallèles (BC) et (DE).

Si les droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Démonstration

Considérons la première configuration.

1. 1^{ière} égalité: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

   - Considérons le triangle ADE et notons h_1 la hauteur issue de E du triangle ADE
     - $\mathscr{A}_{ADE} = \frac{AD \cdot h_1}{2}$
     - $\mathscr{A}_{ABE} = \frac{AB \cdot h_1}{2}$
     - $\frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ABE}} = \frac{\frac{AD \cdot h_1}{2}}{\frac{AB \cdot h_1}{2}} = \frac{AD}{AB}$
   - Notons h_2 la hauteur issue de D du triangle ADE
     - $\mathscr{A}_{ADE} = \frac{AE \cdot h_2}{2}$
     - $\mathscr{A}_{ADC} = \frac{AC \cdot h_2}{2}$
     - $\frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ADC}} = \frac{\frac{AE \cdot h_2}{2}}{\frac{AC \cdot h_2}{2}} = \frac{AD}{AB}$
   - Considérons les triangles DEB et DEC

     Notons que les triangles DEB et DEC ont une même base $[DE]$. De plus, puisque les droites (DE) et (BC) sont parallèles, ils ont la même hauteur h

relative à cette base.

On peut conclure que les deux triangles ont la même aire:

$$\underbrace{\mathscr{A}_D EB}_{\frac{1}{2}\cdot DE\cdot h} = \underbrace{\mathscr{A}_D EC}_{\frac{1}{2}\cdot DE\cdot h}$$

- Comme $\mathscr{A}_{ABE} = \mathscr{A}_{DEC}$, on a:

$$\frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ABE}} = \frac{\mathscr{A}_{ADE}}{\mathscr{A}_{ADC}} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

2. 2^{ière} égalité: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

Soit F le point d'intersection de la parallèle à la droite (AC) passant par le point D et de la droite (BC).

Considérons le quadrilatère $DECF$.

- Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Donc $DECF$ est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longuer.

  Donc $FC = DE$ et $DF = EC$.

On peut maintenant appliquer la 1^{ière} égalité démontrée précédemment à la figure formée par les droites (DA) et (FC) et les droites parallèles (DF) et (AC)

Remarque

Le théorème de Thalès permet de calculer une ou plusieurs longuers manquants dans une de ces configurations.

Réciproque de théorème de Thalès

Théorème

Considérons deux droites (BC) et (CD) sécantes en A.

Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ et si les points ADE et les points $A;\ E;\ C$ sont alignés dans le même ordre, alors les droites $(DE) \parallel (BC)$ sont parallèles.

Contraposée de théorème de Thalès

Théorème

Considérons deux droites (BD) et (CE) sécantes en A.

Si $\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$, alors les droites (BC) et (DC) ne sont pas parallèles.

TRIGONOMÈTRIE DANS UN CERCLE

Cercle trigonometrique

Deftinition

Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Definition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

Les axes OI et OJ subdivisent le cercle en en quatre quadrants notés: (I), (II), (III), (IV)

Radian

Definition

On appelle radian, noté rad, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

Formules trigonomètriques

Voici les formules trigonomètriques.

TRIGONOMETRIE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Vocabulaire

Soit ABC un trianle rectangle en C:

- le segment $[AB]$ est l'hypotènuse du triangle ABC.
- le segment $[AC]$ est le cotée adjacent de l'angle $C\hat{A}B$.
- le segment $[CB]$ est le cotée opposé de l'angle $C\hat{A}B$.

Démonstration

Fonctions trigonomètriques

Définition

Soit ABC un triangle rectangle en C, et soit $\hat{\alpha}$ l'angle en A de ce triangle. On définit les fonctions trigonomètriques suivant de cet angle:

1. Le sinus de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\sin(\hat{\alpha}) = \frac{opposé}{hypothènuse}$$

2. Le cosinus de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{adjacent}{hypothènuse}$$

3. La sécante de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\sec(\hat{\alpha}) = \frac{hypothènuse}{adjacent}$$

4. Le cosécante de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\csc(\hat{\alpha}) = \frac{hypothènuse}{opposé}$$

5. La tangente de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\tan(\hat{\alpha}) = \frac{opposé}{adjacent}$$

6. La cotangente de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\cot(\hat{\alpha}) = \frac{adjacent}{opposé}$$

Conséquences

1. La mesure d'un angle est en degrés, mais le cosinus, le sinus et la tangente n'ont pas d'unité. Ce sont des rapports de longueurs.

2. Les rapports ne dépendent pas des longueurs choisisses, mais uniquement de la mesure de l'angle.

3. Dans un triangle rectangle le côté plus long est toujours l'hypoténuse on a donc:

$$0 \leqslant \sin(\hat{\alpha}) \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \cos(\hat{\alpha}) \leqslant 1$$

mais

$$0 < \tan(\hat{\alpha})$$

Formule fondamentale de la trigonométrie

Définition

Pour toute mesure α d'un angle aigu, on a:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Démonstration

Soit ABC un triangle rectangle en C avec $\hat{\alpha} = A\hat{B}C$.

1. Exprimer $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ dans ce triangle:

   $\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB}$ et $\cos(\alpha) = \frac{AC}{AB}$

2. En déduire $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \\ &= \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} \\ &= \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}\end{aligned}$$

   D'apres le théorème de Phythagore

$$\begin{aligned}&= \frac{AB^2}{AB^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque

$\cos^2(\alpha) = (\cos(\alpha))^2$ et designe le carré des $\cos(\alpha)$ idem pour $\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$.

Cette écriture évite des parentheses.

TRIGONOMETRIE

Cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 qui est orienté, ce qui veut dire qu'on a choisi un sens positif (celui des ronds-points) et un sens négatif (celui des aiguilles d'une montre)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et I, J deux points de $\mathscr{C}$ tel que $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est un R.O.N. du plan. Alors les axes (OI) et (OJ) subdivisent le cercle en quatre quadrants notés au sens positif : (I), (II), (III) et (IV) :

Fonctions trigonométriques

Valeurs remarquables

Cour : 3eB-ch4-trigonometrie

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$degrée$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$

Formule fondamentale de la trigonometrie

Soit ABC un triangle rectangle en C avec:

$$\alpha = \hat{A}$$

- Exprimer sin(α) et cos(α) dans ce triangle:

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} \; et \; \cos(\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

- On obtient donc:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$$

$$= \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$= \frac{\overbrace{BC^2 + AC^2}^{Théoréme\ de\ Pythagore}}{AB^2}$$

$$= \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

VECTEURS

Vecteur

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

Vocabulaire

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, alors:

1. $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur d'origine A et d'extrémité B
2. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur du segment $[AB]$

   On note:

$$\underbrace{\| \overrightarrow{AB} \|}_{norme\ de\ \overrightarrow{AB}} = AB$$

3. La direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB)
4. Le sens du vecteur est celui de A vers B

Remarque

Le mot *norme* est parfois subistué par: amplitude, longueur, magnitude, module, scalaire

Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur, tel que

$\overrightarrow{a} = \binom{a_1}{a_2}$ dans une base (e_1, e_2), alors $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Algébriquement

$$\|\overrightarrow{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{\left(\lambda^2 a_1^2\right) + \left(\lambda^2 a_2^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{\lambda^2 \left(a_1^2 + a_2^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{b}\| = \begin{cases} \lambda \left\|\overrightarrow{a}\right\| & si\ \lambda > 0 \ \Rightarrow \ \left\|\overrightarrow{a}\right\| = |\lambda| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \\ -\lambda \left\|\overrightarrow{a}\right\| & si\ \lambda < 0 \end{cases}$$

Vecteur nul

Définition

Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, est un vecteur dont la norme est nulle $\| \overrightarrow{0} \| = 0$ et sa direction et son sens ne sont pas définis.

De plus, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$$

Égalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont égaux si ils ont la même norme, le même direction et le même sens.

Représentant d'un vecteur

Definition

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur représentant de $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est une translation de $\overrightarrow{v}$.

Vecteurs opposé

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont opposés si ils ont la même norme et le même direction, mais ils sont de sens opposés.

On note:

$$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$$

Remarque

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan, la translation, notée $t\overrightarrow{u}$, est l'application du plan lui-même qui associe à tout point M tel que $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{u}$. Le point M' appelé image de M par $t\overrightarrow{u}$.

Composantes d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur défini par: $\overrightarrow{u}(u_x, u_y, u_z)$, le vecteur a comme composantes:

$$\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

Produit scalaire

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul le produit scalaire est nul et la propriété est vraie puisque, par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Si les deux vecteurs sont non nuls, leurs normes sont non nulles donc :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0$$

On obtient donc que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

cqfd.

Propriété

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel k:

- $\left(k \cdot \overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = k\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$
- $\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. Le carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ est le réel positif ou nul:

$$\left(\overrightarrow{u}\right)^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

Démonstration

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{u}|| \cdot \underbrace{\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right)}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$$

cqfd.

Théorème

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2} \cdot \left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Démonstration

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = \left(\overrightarrow{u}\right)^2 + 2 \cdot \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) + \left(\overrightarrow{v}\right)^2$$

$$= ||\overrightarrow{u}||^2 + 2 \cdot \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) + ||\overrightarrow{v}||^2$$

Par conséquent:

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2 \cdot \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) + ||\overrightarrow{v}||^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2} \cdot \left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

cqfd.

Vecteur dans l'espace vectoriel

Un vecteur peut s'exprimer de manière unique dans une base de l'espace vectoriel.

$\overrightarrow{v}$ s'écrit alors comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

$$\exists a_1,\ a_2 \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$$

a_1 et a_2 sont alors les composantes de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$

Produit vectoriel

Définition

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, on définit le produit vectoriel de $\overrightarrow{a}$ par $\overrightarrow{b}$ comme le vecteur:

$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

tel que

1. $$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 0$$

   et

   $$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

2. $$\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$$

3. $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ forme un système de coordonnées direct

Propriétés

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Distributivité

Distributivité par rapport à l'addition vectoriel:

- $$\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$$
- $$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$$

Asymmétrie

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$$

Multiplication d'un scalaire

$$\lambda\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(\lambda\overrightarrow{a}\right) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$$

<u>Produit vectoriel nul</u>

Le produit vectoriel est nul si et seulement si:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}\, ou\, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}\, ou\ \sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0$$

Pour: $\sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0$

$$\sin(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \equiv 0\,[\pi]$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} \mid \varphi = 0 + k \cdot \pi$$

EIGENVECTORS AND EIGENVALUES

Eigenvector and Eigenvalue

Definition

Given an $(n \cdot m)$ matrix A and an n-vector $\overrightarrow{r}$, if $\overrightarrow{r'} = Ar$ points in the same direction as $\overrightarrow{r}$, i.e. $\overrightarrow{r'} = \lambda\overrightarrow{r}$ where λ is a real scalar, then r is called an eigenvector of A with real eigenvalue.

The cases $r = 0$ or $\lambda = 0$ are excluded from this definition.

Trivial Eigenvalues

Theorem

If the matrix equation $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$, is inversible we have the trivial solutions:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

and

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Proof

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{1})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

If A is reversible:

$$\Leftrightarrow A = \lambda\mathbb{1} \vee \overrightarrow{v} = (A - \lambda\mathbb{1})^{-1}\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vee \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

$\square$

Characteristic equation

When solving for non trivial eigenvalues we call the following equation the characteristic equation:

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$$

Characteristic polynomial

We call $A - \lambda\mathbb{1}$, the characteristic polynomial of A, when solving for eigenvalues.

Non-trivial Eigenvalues

Theorem 1

If $(A - \lambda\mathbb{1})$ does not have an inverse, $\overrightarrow{v} \neq 0$.

Theorem 2

For the real scalar λ to be an eigenvalue of the matrix A it must be a real root of the characteristic equation:

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$$

Remark

This is a polynomial equation of degree n if A is an $(n \cdot n)$ matrix.

Multiple of eigenvector solutions

Theorem

For any solution of eigenvectors $\overrightarrow{v}$ there is a multiple of the eigenvector $\alpha \in \mathbb{R}$ that still satisfies the equation:

$$A\alpha\overrightarrow{v} = \lambda\alpha\overrightarrow{v}$$

FINITE-DIMENSIONAL VECTOR SPACES

Linear combinations

Definition

Let V be a vector space over a field $\mathbb{F}$. A linear combination of vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ is an expression of the form:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ are scalars. The set of all linear combinations of a given set of vectors is called the span of those vectors.

Span

Definition

The span of a set of vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ is the set of all linear combinations of those vectors.

Notation

The span of the vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ is denoted by $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Theorem

The span of a list of vectors in V is the smallest subspace of V containing all the vectors in the list.

Proof

Let W be the span of the vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$. By definition, W is the set of all linear combinations of these vectors. Since W is formed by taking linear combinations of the vectors in the list, it is a subspace of V.

Now, suppose there exists a subspace U of V that contains all the vectors

$v_1, v_2, \ldots, v_n$. Since U is a subspace, it must also contain all linear combinations of these vectors. Therefore, we have $W \subseteq U$.

Since U was an arbitrary subspace containing the vectors in the list, we conclude that W is the smallest subspace of V containing all the vectors in the list.

$\square$

Finite-Dimensional Vector Spaces

Definition

A vector space is called finite-dimensional if some list of vectors in it spans the space.

Polynomial

Definition

The space of polynomials with coefficients in a field $\mathbb{F}$ is denoted by $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. A polynomial $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ is an expression of the form:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

where $a_i \in \mathbb{F}$ for all i and n is a non-negative integer.

Degree of a polynomial

Definition

The degree of a polynomial $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ is the highest power of x that appears in the polynomial with a non-zero coefficient. Formally, if

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

where $a_n \neq 0$, then the degree of $p(x)$ is n, denoted by $\deg(p) = n$.

Remark

The polynomial that is identically 0 is said to have degree $-\infty$.

Space of polynomials

Definition

For a nonnegative integer m, $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ denotes the set of all polynomials with coefficients in $\mathbb{F}$ and degree at most m.

Infinite-dimensional vector space

Definition

A vector space is called infinite-dimensional if it is not finite-dimensional.

Linearly independence

Definition

A set of vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ is said to be linearly independent if the only linear combination of these vectors that equals the zero vector is the trivial combination where all coefficients are zero. Formally, if

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

implies $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, then the vectors are linearly independent.

Remark

The empty list () is also declared to be linearly independent.

Linearly dependent

Definition

A set of vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ is said to be linearly dependent if there exist coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, not all zero, such that

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

In other words, at least one of the vectors can be expressed as a linear combination of the others.

Linear dependence lemma

Suppose $v_1, \ldots, v_m$ is a linearly dependent list in V. Then there exists $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ such that the following hold:

1. $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$
2. if the jth term is removed from $v_1, \ldots, v_m$, the span of the remaining list equals $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Proof

We will prove the linear dependence lemma by showing that if $v_1, \ldots, v_m$ is a linearly dependent list in V, then the two conditions stated in the lemma must hold for some $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Since $v_1, \ldots, v_m$ is linearly dependent, there exist coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{F}$, not all zero, such that

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m = 0$$

Without loss of generality, assume $c_j \neq 0$ for some $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. We can then express v_j as a linear combination of the other vectors:

$$v_j = -\frac{c_1}{c_j} v_1 - \frac{c_2}{c_j} v_2 - \ldots - \frac{c_{j-1}}{c_j} v_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j} v_{j+1} - \ldots - \frac{c_m}{c_j} v_m$$

This shows that v_j can be expressed as a linear combination of the vectors $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m$, which proves the first condition of the lemma.

To prove the second condition, we note that removing v_j from the list does not change the span of the remaining vectors, since v_j can be expressed as a linear

combination of them. Therefore, we have

$$\text{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m) = \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$$

This completes the proof of the linear dependence lemma.

$\square$

Length of linearly independent list and length of spanning list

Theorem

In a finite-dimensional vector space, the length of every linearly independent list of vectors is less than or equal to the length of every spanning list of vectors.

Proof

Let $v_1, v_2, \ldots, v_k$ be a linearly independent list of vectors in a finite-dimensional vector space V, and let $u_1, u_2, \ldots, u_m$ be a spanning list of vectors in V. We want to show that $k \leq m$.

Since $u_1, u_2, \ldots, u_m$ is a spanning list, every vector in V can be expressed as a linear combination of the u_i's. In particular, the vectors $v_1, v_2, \ldots, v_k$ can be expressed as linear combinations of the u_i's:

$$v_j = a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2 + \ldots + a_{jm}u_m$$

for some coefficients $a_{ji} \in \mathbb{F}$. We can form the following matrix A whose columns are the vectors $u_1, u_2, \ldots, u_m$ and whose rows correspond to the coefficients a_{ji}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix}$$

Since the vectors $v_1, v_2, \ldots, v_k$ are linearly independent, the rows of the matrix A must be linearly independent as well.

However, in a finite-dimensional vector space, the maximum number of linearly independent vectors or the dimension is equal to the number of columns in the matrix A. Therefore, we must have $k \leq m$, which completes the proof.

$\square$

Finite-dimensional subspaces

Theorem

Every subspace of a finite-dimensional vector space is finite-dimensional.

Proof

Let W be a subspace of a finite-dimensional vector space V. Since V is finite-dimensional, there exists a finite basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ for V. We claim that the set $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ spans W.

To see this, let $w \in W$. Since W is a subspace, we can express w as a linear combination of the basis vectors of V:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k$$

for some coefficients $a_i \in \mathbb{F}$. However, since $w \in W$ and W is closed under linear combinations, it follows that each v_i must also be expressible in terms of the basis vectors of W. Thus, we can find a finite set of vectors in W that spans W.

Therefore, W is finite-dimensional, which completes the proof.

$\square$

Basis

Definition

A basis of V is a list of vectors in V that is linearly independent and spans V.

Theorem

A list $v_1, \ldots, v_n$ of vectors in V is a basis of V if and only if every $v \in V$ can be expressed as a linear combination of the v_i's.

Proof

($\Rightarrow$) Suppose $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V. Then by definition, the v_i's are linearly independent and span V. Therefore, every $v \in V$ can be expressed as a linear combination of the v_i's.

($\Leftarrow$) Conversely, suppose every $v \in V$ can be expressed as a linear combination of the v_i's. We need to show that the v_i's are linearly independent. Assume for the sake of contradiction that they are not linearly independent. Then there exists a non-trivial linear combination of the v_i's that equals zero:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

for some coefficients $c_i \in \mathbb{F}$, not all zero. But then we could express one of the v_i's as a linear combination of the others, contradicting the assumption that the v_i's span V.

Therefore, the v_i's must be linearly independent, and we conclude that $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V.

$\square$

<u>Spanning list contains a basis</u>

Theorem

Every spanning list in a vector space can be reduced to a basis of the vector space.

Proof

Let $v_1, v_2, \ldots, v_n$ be a spanning list in a vector space V. We will show that we can reduce this list to a basis for V.

First, we can apply the process of Gaussian elimination to the vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ to obtain a set of linearly independent vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (where $k \leq n$) that still spans V. This is possible because the original vectors span V, and we can remove any linear dependencies among them.

Next, we claim that the set $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ is a basis for V. To see this, we need to show that it is linearly independent and spans V.

Since we obtained $u_1, u_2, \ldots, u_k$ from $v_1, v_2, \ldots, v_n$ through a process that removes linear dependencies, it follows that the u_i's are linearly independent.

Furthermore, because the v_i's span V, any vector $v \in V$ can be expressed as a linear combination of the v_i's:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

Since the u_i's are obtained from the v_i's, we can also express v as a linear combination of the u_i's:

$$v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_k u_k$$

for some coefficients $b_i \in \mathbb{F}$. This shows that the u_i's span V.

Therefore, we conclude that $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ is a basis for V, and we have successfully reduced the spanning list $v_1, v_2, \ldots, v_n$ to a basis.

$\square$

<u>Basis of finite-dimensional vector space</u>

Theorem

Every finite-dimensional vector space has a basis.

Proof

Let V be a finite-dimensional vector space. By definition, this means that there exists a finite spanning list $v_1, v_2, \ldots, v_n$ of vectors in V. We will show that we can reduce this spanning list to a basis for V.

By the previous theorem, we know that every spanning list can be reduced to a basis. Therefore, we can apply this result to our spanning list $v_1, v_2, \ldots, v_n$ to obtain a basis $u_1, u_2, \ldots, u_k$ for V.

Thus, we conclude that every finite-dimensional vector space has a basis.

$\square$

Linearly independent list extends to a basis

Theorem

Every linearly independent list of vectors in a finite-dimensional vector space can be extended to a basis of the vector space.

Proof

Let V be a finite-dimensional vector space, and let $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ be a linearly independent list of vectors in V. Since V is finite-dimensional, it has a basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ with n vectors.

We can extend the list $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ to a basis of V by adding vectors from the basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ that are not in the span of $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Specifically, we can take a vector u_i from the basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ that is not in the span of $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ and add it to our list. This new list $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, u_i\}$ will still be linearly independent, as the addition of u_i does not introduce any linear dependencies.

We can repeat this process until we have added enough vectors to form a basis for V . Since V is finite-dimensional, this process must terminate, and we will obtain a basis for V that extends the original linearly independent list $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Therefore, we conclude that every linearly independent list of vectors in a finite-dimensional vector space can be extended to a basis of the vector space.

$\square$

Every subspace of V is part of a direct sum equal to V

Theorem

Suppose V is finite-dimensional and U is a subspace of V. Then there is a subspace W of V such that $V = U \oplus W$.

Proof

Let V be a finite-dimensional vector space and U be a subspace of V. Since V is finite-dimensional, we can choose a basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ for U and extend it to a basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ for V.

We claim that $V = U \oplus W$, where $W = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. To show this, we need to verify two things:

1. $V = U + W$: Any vector $v \in V$ can be expressed as a linear combination of the basis vectors, so we can write

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_mv_m$$

for some scalars a_i and b_j. This shows that V is the sum of U and W.

2. $U \cap W = \{0\}$: If a vector x is in both U and W, it can be expressed as a linear combination of the basis vectors for U and W. However, since the basis vectors for W are not in U, the only vector that can be in both subspaces is the zero vector. Thus, $U \cap W = \{0\}$.

Since both conditions are satisfied, we conclude that $V = U \oplus W$.

$\square$

Basis length does not depend on basis

Theorem

Any two bases of a finite-dimensional vector space have the same length.

Proof

Let $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ be a basis for the finite-dimensional vector space V, and let $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ be another basis for V. We need to show that $n = m$.

Since $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ is a basis for V, it is linearly independent and spans V. Therefore, each vector u_i can be expressed as a linear combination of the vectors v_j:

$$u_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{im}v_m$$

for some scalars a_{ij}. This means that the set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ is also linearly dependent on the set $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Conversely, since $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ is a basis for V, each vector v_j can be expressed as a linear combination of the vectors u_i:

$$v_j = b_{j1}u_1 + b_{j2}u_2 + \ldots + b_{jn}u_n$$

for some scalars b_{ji}. This means that the set $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ is also linearly dependent on the set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Since both sets are linearly dependent on each other, we conclude that they must have the same number of vectors, $n = m$.

$\square$

Dimension

Definition

The dimension of a vector space V is defined as the length of any basis of V.

Notation

The dimension of a vector space V is denoted by $\dim(V)$.

Dimension of a subspace

Theorem

If V is finite-dimensional and U is a subspace of V, then $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Proof

Let $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ be a basis for the subspace U and extend it to a basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ for V. Since the basis for U has k vectors and the basis for V has $k + m$ vectors, we have

$$\dim(U) = k \leq k + m = \dim(V).$$

$\square$

Linearly independent list of the right length is a basis

Theorem

Suppose V is finite-dimensional. Then every linearly independent list of vectors in V with length $\dim(V)$ is a basis of V.

Proof

Let $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be a linearly independent list of vectors in V with length $n = \dim(V)$. We need to show that this list is a basis for V.

Since $n = \dim(V)$, any basis for V must also have n vectors. We can extend the list $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ to a basis for V by adding vectors from V that are not in the span of the v_i's.

However, since $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is linearly independent, it cannot be expressed as a linear combination of any other vectors in V. Therefore, the only way to extend this list to a basis is to include all n vectors.

Thus, we conclude that $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is a basis for V.

$\square$

Spanning list of the right length is a basis

Theorem

Suppose V is finite-dimensional. Then every spanning list of vectors in V with length $\dim V$ is a basis of V.

Proof

Let $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be a spanning list of vectors in V with length $n = \dim(V)$. We need to show that this list is a basis for V.

Since $n = \dim(V)$, any basis for V must also have n vectors. We can extend the list $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ to a basis for V by adding vectors from V that are not in the span of

the v_i's.

However, since $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is spanning, it must be able to express any vector in V as a linear combination of the v_i's. Therefore, the only way to extend this list to a basis is to include all n vectors.

Thus, we conclude that $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is a basis for V.

$\square$

Dimension of a sum

Theorem

If U and W are finite-dimensional subspaces of a vector space V, then

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Proof

Let $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ be a basis for U and $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ be a basis for W. Then $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ spans $U + W$.

To show that this set is linearly independent, we need to consider the intersection $U \cap W$. Let $\{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ be a basis for $U \cap W$. Then we can express the dimensions as follows:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

$\square$

INVERTIBILITY AND ISOMORPHIC VECTOR SPACES

Invertible

Definition

A linear map $T \in \mathcal{L}(V; W)$ is called invertible if there exists a linear map $S \in \mathcal{L}(W; V)$ such that ST equals the identity map on V and TS equals the identity map on W.

Inverse

Definition

A linear map $S \in \mathcal{L}(W; V)$ satisfying $ST = I$ and $TS = I$ is called an inverse of T.

Remark

Note that the first I is the identity map on V and the second I is the identity map on W

Inverse is unique

Definition

An invertible linear map has a unique inverse.

Proof

Suppose S_1 and S_2 are both inverses of T. Then

$S_1 = S_1 I = S_1(TS_2) = (S_1 T)S_2 = IS_2 = S_2$

$\square$

Notation

If T is invertible, then its inverse is denoted by T^{-1}. In other words, if $T \in \mathcal{L}(V, W)$ is invertible, then T^{-1} is the unique element of $\mathcal{L}(W, V)$ such that $T^{-1}T = I$ and $TT^{-1} = I$.

Invertibility is equivalent to injectivity and surjectivity

Theorem

A linear map is invertible if and only if it is injective and surjective.

Proof

Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$. We need to show that T is invertible if and only if it is injective and surjective.

First suppose T is invertible. To show that T is injective, suppose $u, v \in V$ and $Tu = Tv$. Then

$$u = T^{-1}(Tu) = T^{-1}(Tv) = v$$

so $u = v$. Hence T is injective.

We are still assuming that T is invertible. Now we want to prove that T is surjective. To do this, let $w \in W$. Then $w = T(T^{-1}w)$, which shows that w is in the range of T. Thus range $T = W$. Hence T is surjective, completing this direction of the proof.

Now suppose T is injective and surjective. We want to prove that T is invertible. For each $w \in W$, define Sw to be the unique element of V such that $T(Sw) = w$ (the existence and uniqueness of such an element follow from the surjectivity and injectivity of T). Clearly $T \circ S$ equals the identity map on W.

To prove that $S \circ T$ equals the identity map on V, let $v \in V$. Then

$$T\big((S \circ T)v\big) = (T \circ S)(Tv) = I(Tv) = Tv$$

This equation implies that $(S \circ T)v = v$ (because T is injective). Thus $S \circ T$ equals the identity map on V.

To complete the proof, we need to show that S is linear. To do this, suppose $w_1, w_2 \in W$. Then

$$T(Sw_1 + Sw_2) = T(Sw_1) + T(Sw_2) = w_1 + w_2$$

Thus $Sw_1 + Sw_2$ is the unique element of V that T maps to $w_1 + w_2$. By the definition of S, this implies that

$$S(w_1 + w_2) = Sw_1 + Sw_2$$

Hence S satisfies the additive property required for linearity.

The proof of homogeneity is similar. Specifically, if $w \in W$ and $\lambda \in \mathbb{F}$, then

$$T(\lambda Sw) = \lambda T(Sw) = \lambda w$$

Thus λSw is the unique element of V that T maps to λw. By the definition of S, this implies that

$$S(\lambda w) = \lambda Sw$$

Hence S is linear, as desired.

$\square$

Isomorphisms

Definition

An isomorphism is an invertible linear map.

Isomorphic

Definition

Two vector spaces are called isomorphic if there is an isomorphism from one vector space onto the other one.

Dimension shows whether vector spaces are isomorphic

Theorem

Two finite-dimensional vector spaces over $\mathbb{F}$ are isomorphic if and only if they have the same dimension.

Proof

($\Rightarrow$) Suppose $V \cong W$, i.e., there exists a linear isomorphism $T : V \to W$. Since T is bijective, it maps a basis of V to a basis of W. Hence the number of basis vectors is the same:

$$\dim V = \dim W$$

($\Leftarrow$) Suppose $\dim V = \dim W = n$. Let $\{v_1, \ldots, v_n\}$ be a basis of V and $\{w_1, \ldots, w_n\}$ be a basis of W. Define a linear map $T : V \to W$ by

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

for scalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$.

This map is well-defined and linear. Moreover, T is injective because the kernel is $\{0\}$ (the linear combination $\sum \alpha_i v_i = 0$ implies all $\alpha_i = 0$). It is surjective because any $w \in W$ can be written as a linear combination of the basis $\{w_i\}$. Hence T is a bijective linear map, and $V \cong W$.

$\square$

Matrix Representation Isomorphism

Theorem

Suppose $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V and $w_1, \ldots, w_m$ is a basis of W. Then M is an isomorphism between $\mathcal{L}(V, W)$ and $\mathbb{F}^{m,n}$.

Dimension of $\mathcal{L}(V, W)$

Theorem

Suppose V and W are finite-dimensional. Then $\mathcal{L}(V, W)$ is finite- dimensional and

$$\dim L(V, W) = (\dim V) \cdot (\dim W)$$

Matrix of a vector

Definition

Suppose $v \in V$ and $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V. The matrix of v with respect to this basis is the n-by-1 matrix

$$M(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

where $c_1, \ldots, c_n$ are the scalars such that

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

Column of a Linear Map's Matrix

Theorem

Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$ and $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V and $w_1, \ldots, w_m$ is a basis of W. Let $1 \leq k \leq n$. Then the kth column of $M(T)$, which is denoted by $M(T)_{\cdot,k}$, equals $M(v_k)$.

Proof

The desired result follows immediately from the definitions of $M(T)$ and $M(v_k)$.

The next result shows how the notions of the matrix of a linear map, the matrix of a

vector, and matrix multiplication fit together.

$\square$

Linear maps act like matrix multiplication

Theorem

Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$ and $v \in V$. Suppose $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V and $w_1, \ldots, w_m$ is a basis of W. Then

$$M(Tv) = M(T)M(v)$$

Operator

Definition

- A linear map from a vector space to itself is called an operator.
- The notation $\mathcal{L}(V)$ denotes the set of all operators on V. In other words, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$.

Injectivity is equivalent to surjectivity in finite dimensions

Theorem

Suppose V is finite-dimensional and $T \in \mathcal{L}(V)$. Then the following are equivalent:

1. T is invertible
2. T is injective
3. T is surjective

LINEAR MAPS

Linear Map

Definition

A linear map from V to W is a function $T : V \to W$ with the following properties:

- additivity: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ for all $u, v \in V$
- homogeneity: $T(c \cdot v) = c \cdot T(v)$ for all $v \in V$ and all scalars c

Notation

The set of all linear maps from V to W is denoted $\mathcal{L}(V; W)$.

Linear maps and basis of domain

Theorem

Suppose $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V and $w_1, \ldots, w_n \in W$. Then there exists a unique linear map $T : V \to W$ such that

$T(v_i) = w_i$ for all $i = 1, \ldots, n$.

Proof

Since $\{v_1, \ldots, v_n\}$ is a basis for V, every $v \in V$ can be written uniquely as

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n,$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are scalars. Define $T : V \to W$ by

$$T(v) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_n w_n.$$

This is well-defined due to the uniqueness of the representation. We verify that T is linear:

- Let $v, u \in V$, with $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ and $u = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i$. Then

$$v + u = \sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i) v_i,$$

so

$$T(v + u) = \sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i + \sum_{i=1}^{n} d_i w_i = T(v) + T(u).$$

- For any scalar a,

$$av = \sum_{i=1}^{n} (ac_i) v_i,$$

so

$$T(av) = \sum_{i=1}^{n} (ac_i) w_i = a \sum_{i=1}^{n} c_i w_i = aT(v).$$

Thus, T is linear. Moreover, for each basis vector v_j,

$$v_j = 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_j + \cdots + 0 \cdot v_n,$$

so

$$T(v_j) = 0 \cdot w_1 + \cdots + 1 \cdot w_j + \cdots + 0 \cdot w_n = w_j.$$

Therefore, T satisfies $T(v_i) = w_i$ for all i.

Suppose $T : V \to W$ is a linear map such that $T(v_i) = w_i$ for all i. For any $v \in V$, write

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Then by linearity of T,

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i.$$

This shows that $T(v)$ is completely determined by the values $T(v_i) = w_i$. Hence, T is unique.

$\square$

Addition and scalar multiplication on $\mathcal{L}(V; W)$

Definition

Let $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V; W)$ and $c \in \mathbb{F}$. We define addition and scalar multiplication on $\mathcal{L}(V; W)$ as follows:

- Addition: $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$ for all $v \in V$.
- Scalar multiplication: $(c \cdot T)(v) = c \cdot T(v)$ for all $v \in V$.

Vector space $\mathcal{L}(V; W)$

Theorem

The set $\mathcal{L}(V; W)$ is a vector space over the field $\mathbb{F}$.

Proof

To show that $\mathcal{L}(V; W)$ is a vector space, we need to verify the following properties:

- Closure under addition: Let $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V; W)$. Then $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$ is a linear map, so $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V; W)$.
- Closure under scalar multiplication: Let $T \in \mathcal{L}(V; W)$ and $c \in \mathbb{F}$. Then $(c \cdot T)(v) = c \cdot T(v)$ is a linear map, so $c \cdot T \in \mathcal{L}(V; W)$.
- Existence of zero vector: The zero map $0 : V \to W$ defined by $0(v) = 0$ for all $v \in V$ is in $\mathcal{L}(V; W)$.
- Existence of additive inverses: For each $T \in \mathcal{L}(V; W)$, the map $-T$ defined by $(-T)(v) = -T(v)$ is in $\mathcal{L}(V; W)$.

Since all vector space axioms are satisfied, we conclude that $\mathcal{L}(V;W)$ is a vector space over the field $\mathbb{F}$.

$\square$

Product of Linear Maps

Definition

Let $T_1 : V \to W$ and $T_2 : W \to U$ be linear maps. The product of T_1 and T_2, denoted $T_2 \circ T_1$, is defined by

$$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$$

for all $v \in V$.

Algebraic properties of products of linear maps

- associativity

$$(T_3 \cdot T_2) \cdot T_1 = T_3 \cdot (T_2 \cdot T_1)$$

  Whenever T_1, T_2, and T_3 are linear maps such that the products make sense.

- identity

$$T \cdot I = T \cdot I = T$$

  Whenever $T \in \mathcal{L}(V;W)$.

- distributive properties

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T \quad \text{and} \quad S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$$

  Whenever $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U;V)$ and $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V;W)$.

Linear maps take 0 to 0

Theorem

Suppose T is a linear map from V to W. Then $T(0) = 0$.

Proof

Let $v \in V$. Then by linearity, we have:

$$T(0) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0.$$

$\square$

MATRICES AND LINEAR MAPS

Matrix

Definition

Let m and n denote positive integers. An m-by-n matrix A is a rectangular array of elements of $\mathbb{F}$ with m rows and n columns:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Notation

The notation $A_{j,k}$ denotes the entry in row j, column k of A. In other words, the first index refers to the row number and the second index refers to the column number.

Matrix of a linear maps

Definition

Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$ and $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V and $w_1, \ldots, w_m$ is a basis of W. The matrix of T with respect to these bases is the m-by-n matrix $M(T)$ whose entries $A_{j,k}$ are defined by

$$Tv_k = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m$$

Notation

If the bases are not clear from the context, then the notation

$$M(T, (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_m))$$

is used.

Matrix addition

Definition

The sum of two matrices of the same size is the matrix obtained by adding corresponding entries in the matrices:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,n} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{1,1} + C_{1,1} & \cdots & A_{1,n} + C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} + C_{m,1} & \cdots & A_{m,n} + C_{m,n} \end{pmatrix}$$

In other words, $(A + C)_{j,k} = A_{j,k} + C_{j,k}$.

<u>Matrix sum of linear maps</u>

Theorem

Suppose $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. Then $M(S + T) = M(S) + M(T)$.

Proof

Let $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ and write the matrix of a linear map with respect to the bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ column-wise: the j-th column of $M(S)$ is the coordinate vector $[S(v_j)]_{\mathcal{C}}$, and similarly the j-th column of $M(T)$ is $[T(v_j)]_{\mathcal{C}}$.

For each basis vector v_j of V we have by linearity of S and T that

$$(S + T)(v_j) = S(v_j) + T(v_j)$$

Taking coordinates with respect to $\mathcal{C}$ gives

$$[(S + T)(v_j)]_{\mathcal{C}} = [S(v_j) + T(v_j)]_{\mathcal{C}} = [S(v_j)]_{\mathcal{C}} + [T(v_j)]_{\mathcal{C}}$$

Therefore the j-th column of $M(S + T)$ equals the sum of the j-th columns of $M(S)$ and $M(T)$. Since this holds for every $j = 1, \ldots, n$, the two matrices are

equal:

$$M(S+T) = M(S) + M(T)$$

$\square$

Scalar multiplication of a matrix

Definition

The product of a scalar and a matrix is the matrix obtained by multiplying each entry in the matrix by the scalar:

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \cdots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}$$

In other words, $(\lambda A)_{j,k} = \lambda A_{j,k}$.

Matrix of a scalar times a linear map

Theorem

Suppose $\lambda \in \mathbb{F}$ and $T \in \mathcal{L}(V; W)$. Then $M(\lambda T) = \lambda M(T)$.

Proof

Let $T \in \mathcal{L}(V, W)$ and $\lambda \in \mathbb{F}$. By definition the j-th column of $M(T)$ is the coordinate vector $[T(v_j)]_{\mathcal{C}}$. For each basis vector v_j we have

$$(\lambda T)(v_j) = \lambda\big(T(v_j)\big)$$

Taking coordinates with respect to $\mathcal{C}$ yields

$$[(\lambda T)(v_j)]_{\mathcal{C}} = [\lambda T(v_j)]_{\mathcal{C}} = \lambda[T(v_j)]_{\mathcal{C}}$$

since scalar multiplication commutes with taking coordinates. Thus the j-th column of $M(\lambda T)$ is λ times the j-th column of $M(T)$. As this holds for every $j = 1, \ldots, n$,

we conclude

$$M(\lambda T) = \lambda M(T)$$

$\square$

Matrix spaces

Notation

For m and n positive integers, the set of all m-by-n matrices with entries in $\mathbb{F}$ is denoted by $\mathbb{F}^{m,n}$.

Dimensionality of $\mathbb{F}^{m,n}$

Theorem

Suppose m and n are positive integers. With addition and scalar multiplication defined as above, $\mathbb{F}^{m,n}$ is a vector space with dimension mn.

Proof

The verification that $\mathbb{F}^{m,n}$ is a vector space is left to the reader. Note that the additive identity of $\mathbb{F}^{m,n}$ is the m-by-n matrix whose entries all equal 0.

The reader should also verify that the list of m-by-n matrices that have 0 in all entries except for a 1 in one entry is a basis of $\mathbb{F}^{m,n}$. There are mn such matrices, so the dimension of $\mathbb{F}^{m,n}$ equals mn.

$\square$

Matrix multiplication

Definition

Suppose A is an m-by-n matrix and C is an n-by-p matrix. Then AC is defined to be the m-by-p matrix whose entry in row j, column k, is given by the following

equation:

$$(AC)_{j,k} = \sum_{r=1}^{n} A_{j,r} C_{r,k}$$

In other words, the entry in row j, column k, of AC is computed by taking row j of A and column k of C, multiplying together corresponding entries, and then summing.

Matrix of the product of linear maps

Theorem

If $T \in \mathcal{L}(U;V)$ and $S \in \mathcal{L}(V;W)$, then $M(ST) = M(S)M(T)$.

Proof

For each $j = 1, \ldots, p$ the j-th column of $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(T)$ is the coordinate vector $[T(u_j)]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{F}^n$. Applying S to $T(u_j)$ and taking coordinates with respect to $\mathcal{C}$ gives

$$[\, S(T(u_j)) \,]_{\mathcal{C}} = [\, S \,]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \, [T(u_j)]_{\mathcal{B}}$$

because the matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(S)$ sends the coordinate vector of any $v \in V$ (relative to $\mathcal{B}$) to the coordinate vector of $S(v)$ (relative to $\mathcal{C}$). But $[S(T(u_j))]_{\mathcal{C}}$ is exactly the j-th column of $M_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(ST)$. Therefore the j-th column of $M_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(ST)$ equals the j-th column of $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(S)\, M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(T)$. Since this holds for every j, the matrices are equal:

$$M_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(ST) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(S)\, M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(T)$$

For completeness, an equivalent entry-wise argument: if $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(T) = (t_{kj})$ (with $1 \le k \le n$, $1 \le j \le p$) and $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(S) = (s_{ik})$ (with $1 \le i \le m$, $1 \le k \le n$), then the (i,j)-entry of the product is $\sum_{k=1}^{n} s_{ik} t_{kj}$. This equals the i-th coordinate (relative to $\mathcal{C}$) of $S(T(u_j))$, i.e. the (i,j)-entry of $M_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(ST)$. Thus the two matrices have the same entries and are equal.

$\square$

Notation

Suppose A is an m-by-n matrix.

- If $1 \leq j \leq m$, then $A_{j,\cdot}$ denotes the 1-by-n matrix consisting of row j of A.
- If $1 \leq k \leq n$, then $A_{\cdot,k}$ denotes the m-by-1 matrix consisting of column k of A.

<u>Entry of matrix product equals row times column</u>

Theorem

Suppose A is an m-by-n matrix and C is an n-by-p matrix. Then

$$(AC)_{j,k} = A_{j,\cdot} C_{\cdot,k}$$

for $1 \leq j \leq m$ and $1 \leq k \leq p$.

Proof

Write the matrices in entry form:

$$A = (A_{j,i})_{1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n}, \qquad C = (C_{i,k})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq p}$$

By the definition of matrix multiplication, the (j,k)-entry of AC is the sum of products of corresponding entries in the j-th row of A and the k-th column of C:

$$(AC)_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}\, C_{i,k}$$

Interpreting $A_{j,\cdot}$ as the row vector $(A_{j,1}, \ldots, A_{j,n})$ and $C_{\cdot,k}$ as the column vector $(C_{1,k}, \ldots, C_{n,k})^T$, their matrix or dot product equals the same sum:

$$A_{j,\cdot}\, C_{\cdot,k} = (A_{j,1}, \ldots, A_{j,n}) \begin{pmatrix} C_{1,k} \\ \vdots \\ C_{n,k} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}\, C_{i,k}$$

Thus for every $1 \leq j \leq m$ and $1 \leq k \leq p$ we have $(AC)_{j,k} = A_{j,\cdot}\, C_{\cdot,k}$, as required.

$\square$

Column of matrix product equals matrix times column

Theorem

Suppose A is an m-by-n matrix and C is an n-by-p matrix. Then

$$(AC)_{\cdot,k} = AC_{\cdot,k}$$

for $1 \leq k \leq p$.

Proof

Let $C_{\cdot,k}$ denote the k-th column of C,

$$C_{\cdot,k} = \begin{pmatrix} C_{1,k} \\ C_{2,k} \\ \vdots \\ C_{n,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

By the definition of matrix multiplication, the j-th entry of $(AC)_{\cdot,k}$ is

$$(AC)_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}\, C_{i,k}, \qquad 1 \leq j \leq m$$

On the other hand, the j-th entry of the product $A\, C_{\cdot,k}$ is

$$\big(A\, C_{\cdot,k}\big)_j = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}\, (C_{\cdot,k})_i = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}\, C_{i,k}$$

Thus for each j, the j-th entry of $(AC)_{\cdot,k}$ equals the j-th entry of $A\, C_{\cdot,k}$. Therefore

$$(AC)_{\cdot,k} = A\, C_{\cdot,k}$$

$\square$

Linear combination of columns

Theorem

Suppose A is an m-by-n matrix and $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ is an n-by-1 matrix. Then

$$Ac = c_1 A_{\cdot,1} + \cdots + c_n A_{\cdot,n}$$

In other words, Ac is a linear combination of the columns of A, with the scalars that multiply the columns coming from c.

Proof

Write A in terms of its columns:

$$A = \begin{bmatrix} A_{\cdot,1} & A_{\cdot,2} & \cdots & A_{\cdot,n} \end{bmatrix}$$

where each $A_{\cdot,i}$ is the i-th column of A (an $m \times 1$ vector). Multiplying A by c yields the matrix product

$$Ac = \begin{bmatrix} A_{\cdot,1} & A_{\cdot,2} & \cdots & A_{\cdot,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

By the rules of block (or column) multiplication this equals the linear combination of the columns of A with coefficients c_i:

$$Ac = c_1 A_{\cdot,1} + c_2 A_{\cdot,2} + \cdots + c_n A_{\cdot,n}$$

Equivalently, checking entries: for each $1 \le j \le m$ the j-th entry of Ac is

$$(Ac)_j = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}\, c_i$$

while the j-th entry of the right-hand side is

$$\left(c_1 A_{\cdot,1} + \cdots + c_n A_{\cdot,n}\right)_j = \sum_{i=1}^{n} c_i A_{j,i}$$

which is the same sum. Hence the two sides are equal.

$\square$

MATRICES

Matrix

A matrix is a rectangular array of numbers.

Scalars

Scalars are real numbers that define a numerical quantity.

Entries

The numbers in the array are called the entries in the matrix. Each entry has a row number m and a column number n.

The entry that occurs in row i and column j of a matrix A is usually denoted by $(A)_{ij}$ or by a_{ij}.

Matrix size

The matrix size is defined by the number of rows and the number of columns.

Notation

A matrix A with m rows and n columns has a size of $m \cdot n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{m \cdot n}$$

Special case matrices

- row vector, row matrix:

  A row vector only consists of one row:

  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- column vector, column matrix

A column vector only consists of one column

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix}$$

- A matrix with one row and one column can be identified with its only entry:

$$(a_{11})$$

Square matrix

A square matrix is a matrix with the same number of rows and of columns. A matrix A of size $n \cdot n$ is a square matrix of order n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Main diagonal

For a square matrix the main diagonal is the diagonal that is made up of the entries in the following order: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$

Remark

The row number equals the column number for the entire diagonal.

Trace

Definition

The trace is the sum of all entries of the main diagonal in a square matrix.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Remark

There is no trace for a non square matrix.

Equality of matrices

Theorem

Two matrices are equal if and only if they have the same size and the corresponding entries are equal.

Methods

To prove that two matrices of the same size are equal we can:

- prove that corresponding entries are the same
- prove that corresponding row vectors are the same
- prove that corresponding column vectors are the same
- prove that corresponding submatrices are the same, with the same partition

Sum of matrices

For the matrices A and B the sum $A+B$ is the matrix obtained by adding the entries of B to the corresponding entries of A:

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

Remark

Matrices of different sizes cannot be added.

Difference of matrices

For the matrices A and B the difference $A-B$ is the matrix obtained by subtracting the entries of B to the corresponding entries of A:

$$(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij}$$

Remark

Matrices of different sizes cannot be subtracted.

Scalar multiples

The product of a matrix A and a scalar c is denoted by cA. The matrix cA is called a scalar multiple of A.

Consequence

Substracting a matrix A from a matrix M means adding the scalar multiple c of -1 times the matrix A to M.

$$M - A = M + (-1)A$$

Linear combinations of matrices

If $A_1, \ldots, A_r$ are matrices of the same size, and if $c_1, \ldots, c_r$ are scalars, then an expression of the form:

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_rA_r$$

is a linear combination of $A_1, \ldots, A_r$ with coefficients $c_1, \ldots, c_r$.

Conditions for multiplying matrices

For the numbers $r, m, n \in \mathbb{N}^*$: $m > r$ and $n > r$, we can multiply a $m \cdot r$ matrix by a $r \cdot n$ matrix, and the result is an $m \cdot n$ matrix.

Row column rule

Let A and B be 2 matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

The row column rule for matrix multiplication is:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

the entry $(AB)_{ij}$ in row i and column j of AB is given by:

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj} \\ &= \sum_{h=1}^{r} a_{ih}b_{hj} \end{aligned}$$

Remark

The rows of A and the columns of B must have the same length. Here: r.

<u>Matrix products and linear combinations</u>

Theorem

Let A be an $m \cdot n$ matrix, and x an $n \cdot 1$ column vector. The product Ax is a linear combination of the column vectors of A, the coefficients being the entries of x.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Then:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Column-row expansion

Let A be an $m \cdot s$ matrix and B an $s \cdot n$ matrix. Considering the ith column cA, i of A and the ith row $r_{B,i}$ of B,

$$AB = c_{A,1}r_{B,1} + c_{A,2}r_{B,2} + \ldots + c_{A,s}r_{B,s}$$

Matrix form of a linear equation

A linear system:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

can be expressed as the equality of 2 column matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

we can also write:

$$Ax = b$$

we get therefore

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

We obtain the matrix A wich is called the <u>coefficient matrix</u>.

The augmented matrix is $[A, b]$, with b as an additional last column.

<u>Transpose</u>

Let A be an $m \cdot n$ matrix.

The transpose of A is the $n \cdot m$ matrix A^T obtained as follows:

- the kth column of A^T is the kth row of A
- equivalently, the kth row of A^T is the kth column of A

We are reversing the indices, $\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$

<u>Transpose of a square matrix</u>

A square matrix A and its transpose A^T are symmetric with respect to the main diagonal:

- The entries on the main diagonal are the same

- The entries above the main diagonal get swapped with the entries below the main diagonal

Properties of the transpose

Provided that the sizes of the matrices are such that the stated operations can be performed:

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A-B)^T = A^T - B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Generalisations

- The transpose of a sum of any number of matrices is the sum of the transposes.
- The transpose of a product of any number of matrices is the product of the transposes in the reverse order.

Algebraic properties

Let A, B, C be matrices, and let a, b be scalars. Assuming that the sizes of the matrices are such that the indicated operations can be performed, we have:

- Commutative law for matrix addition

  $A + B = B + A$

- Associative law for matrix addition

  $A + (B + C) = (A + B) + C$

- <u>Associative law for matrix multiplication</u>

  $A(BC) = (AB)C$

- <u>Left distributive law</u>

  $A(B + C) = AB + AC$

- <u>Right distributive law</u>

  $(B + C)A = BA + CA$

Other properties are:

- $A(B - C) = AB - AC$
- $(B - C)A = BA - CA$

Scalar properties:

- $a(B + C) = aB + aC$
- $a(B - C) = aB - aC$
- $(a + b)C = aC + bC$
- $a(B - C) = aB - aC$
- $a(bC) = (ab)C$
- $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Remark

There are three reasons why the matrix product is not commutative:

1. AB may be defined and BA may not
2. if AB and BA are defined, they may have different sizes

3. if AB and BA are defined and have the same size, the two products are usually different

Zero matrices

Definition

A zero matrix is a matrix where every entries are zero.

Notation

The zero matrix $m \cdot n$ is commonly denoted as: $0_{m \cdot n}$ or 0.

Consequences

- The zero matix is the neutral element for addition.

$$A + 0 = 0 + A = 0$$

- The zero matrix is the additive inverse of A to $-A$.

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

Remark

There are zero matrices for every possible size.

Operations with zero

Let $0_{m \cdot n}$ be the zero matrix of size $m \cdot n$ and let $A_{m \cdot n}$ be the matrix of size $m \cdot n$ and let a be a nonzero scalar:

- Scalar times zero matrix:

$$a \cdot 0_{m \cdot n} = 0_{m \cdot n}$$

- Scalar 0 times matrix

$$0 \cdot A = 0_{m \cdot n}$$

- <u>Multiplying a matrix by a zero matrix</u>

  $\forall m \cdot n$ matrices A and $\forall r \geq 1$

$$0_{r \cdot m} \cdot A = 0_{r \cdot n}$$
$$A \cdot 0_{n \cdot r} = 0_{m \cdot r}$$

<u>Zero-product</u>

Let c be a scalar, and let A be a matrix:

$$cA = 0 \ \Leftrightarrow c = 0 \ \vee \ A = 0$$

or:

$$c \neq 0 \ \wedge \ A \neq 0 \ \Leftrightarrow cA \neq 0$$

Remark

This property does not hold for matrix multiplication.

<u>Cancellation law for scalar multiplication</u>

For scalar multiplication we have the cancellation laws:

- If $cA = cA'$ and $c \neq 0$, then $A = A'$
- If $cA = c'A$ and $A \neq 0$, then $c = c'$

Remark

This property does not hold for matrix multiplication.

<u>Identity matrix</u>

A square matrix with 1's on the main diagonal and zeros elsewhere is called identity matrix. There are identity matrices of any order. We write I or I_n for the $n \cdot n$ identity matrix.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Properties

- If A is an $m \cdot n$ matrix, we have:

$$AI_n = A$$
$$I_m A = A$$

- Consider $n \cdot n$ matrices. Then I_n is the neutral element of the multiplication:

$$AI_n = I_n A = A$$

Remark

Sometimes the identity matrix I is also denoted with the symbol:

$$\mathbb{1}$$

<u>Powers of a square matrix</u>

Definitions

- Let A be a $m \cdot m$ matrix. We define:

$$A^0 = I_m$$

- For every integer $n \geq 1$ we define:

$$A^n := \underbrace{AA \ldots A}_{n\ factors}$$

Theorem

For every integer $r, s \geq 0$

$$A^r A^s = A^{r+s}$$

$$(A^r)^s = A^{rs}$$

Remark

Powers of a same square matrix commute.

Matrix polynomials

Let A be an $n \cdot n$ matrix and consider the polynomial with $x \in \mathbb{N}$ and $c \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m$$

We define the matrix polynomial:

$$p(A) = c_0 I_n + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_m A^m$$

Remark

This polynomial is again a matrix of size $n \cdot n$.

Property

Since powers of a square matrix commute, and since a matrix polynomial in A is built up from powers of A, any two matrix polynomials in A also commute. That is, for any polynomials p_1 and p_2 we have:

$$p_1(A)p_2(A) = p_2(A)p_1(A)$$

Inverse, Nonsingular, Nondegenerate, Regular

Let A be a square matrix. If there is a square matrix B of the same size such that

$$AB = BA = I$$

then A is invertible or nonsingular and B is an inverse of A. Else, A is singular.

Condition

For a matrix A to be invertible the determinant of the matrix can not be 0.

$$\det(A) \neq 0$$

Remark

If B is an inverse of A, then A is an inverse of B.

Non-invertible, Singular

A non-invertible or singular matrix is a matrix that can not be inverted.

Unicity of inverses

Theorem

If a square matrix has an inverse, then the inverse is unique. If B and C are inverses of A, then $B = C$.

Proof

$$B = BI = B(AC)$$

by Associativity:

$$= (BA)C = IC = C$$

$\square$

Inverse and Transpose

Theorem

If A is an invertible matrix, then A^T is also invertible. We have:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Proof

Let A be a square matrix and its determinant be non-zero:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

$\square$

Inverse of matrix products

Theorem

If A and B are invertible matrices of the same size, then AB is invertible. We have:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Proof

Let A and B be invertible matrices:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$\square$

Negative powers of invertible matrices

Suppose that A is invertible, A is a square matrix and $n \in \mathbb{Z}$:

- We define

$$A^{-n} := \left(A^{-1}\right)^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1}}_{n factors}$$

- All powers of A are invertible.
- For any scalar $c \neq 0$ the matrix cA is invertible and the inverse is $\frac{1}{c}A^{-1}$

Inverting elementary row operations

Every elementary row operation has an inverse which are:

- Multiply a row by a nonzero constant c.

  Multiply the same row by $\frac{1}{c}$.

- Interchange two rows.

  Interchange the same two rows.

- Add cr_i to r_j $(i \neq j)$.

  Add $-cr_i$ to r_j.

If a matrix B is obtained from a matrix A by performing a sequence of elementary row operations, then there is a sequence of elementary row operations, which when applied to B gives A.

Row equivalence

Two matrices are row equivalent if one can be obtained from the other by elementary row operations. It is an equivalence relation:

1. reflexive: A is row equivalent to A
2. symmetric: if A is row equivalent to B, then B is row equivalent to A
3. transitive: if A is row equivalent to B and B is row equivalent to C, then A is row equivalent to C

Theorem

Two matrices are row equivalent if and only if they have the same reduced row echelon form.

Elementary matrix

Definition

A square matrix is called an elementary matrix if it can be obtained from the identity matrix by performing one elementary row operation.

Elementary row operation as the multiplication by an elementary matrix

Theroem

If the elementary matrix E results from a certain elementary row operation on the identity matrix I , performing this elementary row operation on a matrix A gives EA.

Invertiblity of elementary matrices

Theorem

Every elementary matrix is invertible. The inverse is the elementary matrix corresponding to the inverse elementary row operation.

Proof

Consider E , E' elementary matrices of the same size corresponding to inverse row operations. We have:

$$E'E = I$$

because:

$$E'(EI) = I$$

$\square$

NULL SPACES AND RANGES

Null Space and Injectivity

Definition

For $T \in \mathcal{L}(V; W)$, the null space of T, denoted null T, is the subset of V consisting of those vectors that T maps to 0:

$$\operatorname{null} T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

Null space is a subspace

Theorem

The null space of a linear transformation is a subspace of the domain.

Proof

Let $T \in \mathcal{L}(V; W)$ and let $v_1, v_2 \in \operatorname{null} T$. Then $T(v_1) = 0$ and $T(v_2) = 0$. We need to show that $v_1 + v_2 \in \operatorname{null} T$ and $\alpha v_1 \in \operatorname{null} T$ for all $\alpha \in \mathbb{F}$.

First, consider $T(v_1 + v_2)$:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

Thus, $v_1 + v_2 \in \operatorname{null} T$.

Now, consider $T(\alpha v_1)$:

$$T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Thus, $\alpha v_1 \in \operatorname{null} T$.

Since null T is closed under addition and scalar multiplication, it is a subspace of V.

$\square$

Injective

Definition

A function $T : V \to W$ is called injective if $T(u) = T(v)$ implies $u = v$.

Theorem

Let $T \in \mathcal{L}(V; W)$. Then T is injective if and only if $\operatorname{null} T = \{0\}$.

Proof

Suppose T is injective. Then $T(v) = 0$ implies $v = 0$, so $\operatorname{null} T \subseteq \{0\}$. Conversely, suppose $\operatorname{null} T = \{0\}$. Then $T(v) = T(w)$ implies $T(v) - T(w) = 0$, so $T(v - w) = 0$, and thus $v - w = 0$ or $v = w$. Therefore, T is injective.

$\square$

<u>Range</u>

Definition

For T a function from V to W, the range of T is the subset of W consisting of those vectors that are of the form Tv for some $v \in V$:

$$\operatorname{range} T = \{Tv \mid v \in V\}$$

Theorem

If $T \in \mathcal{L}(V; W)$, then $\operatorname{range} T$ is a subspace of W.

Proof

Let $T \in \mathcal{L}(V; W)$ and let $w_1, w_2 \in \operatorname{range} T$. Then there exist $v_1, v_2 \in V$ such that $T(v_1) = w_1$ and $T(v_2) = w_2$. We need to show that $w_1 + w_2 \in \operatorname{range} T$ and $\alpha w_1 \in \operatorname{range} T$ for all $\alpha \in \mathbb{F}$.

First, consider $T(v_1 + v_2)$:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

Thus, $w_1 + w_2 \in \text{range}\, T$.

Now, consider $T(\alpha v_1)$:

$$T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha w_1$$

Thus, $\alpha w_1 \in \text{range}\, T$.

Since range T is closed under addition and scalar multiplication, it is a subspace of W.

$\square$

Surjective

Definition

A function $T : V \to W$ is called surjective if for every $w \in W$, there exists a $v \in V$ such that $T(v) = w$ or in other words if its range equals W.

Fundamental Theorem of Linear Maps

Theorem

Suppose V is finite-dimensional and $T \in \mathcal{L}(V; W)$. Then $\text{range}\, T$ is finite-dimensional and

$$\dim(\text{range}\, T) = \dim(V) - \dim(\text{null}\, T)$$

Proof

Let $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ be a basis for V. Then $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$ span range T.

The dimension of the range is given by the number of linearly independent vectors in $\{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$. By the rank-nullity theorem, we have:

$$\dim(\text{range}\, T) + \dim(\text{null}\, T) = \dim(V)$$

Rearranging gives:

$$\dim(\text{range } T) = \dim(V) - \dim(\text{null } T)$$

$\square$

Maps and dimensional space

Theorem

Suppose V and W are finite-dimensional vector spaces such that $\dim V > \dim W$. Then no linear map from V to W is injective.

Proof

Suppose $T : V \to W$ is a linear map. Since $\dim V > \dim W$, by the rank-nullity theorem, we have:

$$\dim(\text{range } T) + \dim(\text{null } T) = \dim(V)$$

Since $\dim V > \dim W$, it follows that $\dim(\text{range } T) < \dim W$. Therefore, the kernel of T must be non-trivial, implying that T is not injective.

$\square$

Theorem

Suppose V and W are finite-dimensional vector spaces such that $\dim V < \dim W$. Then no linear map from V to W is surjective.

Proof

Suppose $T : V \to W$ is a linear map. Since $\dim V < \dim W$, by the rank-nullity theorem, we have:

$$\dim(\text{range } T) + \dim(\text{null } T) = \dim(V)$$

Since $\dim V < \dim W$, it follows that $\dim(\text{range } T) < \dim W$. Therefore, the kernel of T must be non-trivial, implying that T is not injective.

$\square$

Homogeneous system of linear equations

Definition

A homogeneous system of linear equations is a system of equations of the form $Ax = 0$, where A is a matrix and x is a vector of variables. The system is called homogeneous because all of the constant terms are zero.

Theorem

A homogeneous system of linear equations with more variables than equations has nonzero solutions.

Proof

Consider the homogeneous system of linear equations represented by the matrix equation $Ax = 0$, where A is an $m \times n$ matrix with $m < n$. The null space of A is defined as:

$$\text{null } A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

Since there are more variables than equations, the rank-nullity theorem implies:

$$\dim(\text{null } A) = n - \dim(\text{range } A)$$

Given that $m < n$, it follows that $\dim(\text{range } A) < n$, which implies $\dim(\text{null } A) > 0$. Therefore, the null space contains nonzero vectors, indicating the existence of nontrivial solutions to the homogeneous system.

$\square$

Inhomogeneous system of linear equations

Definition

An inhomogeneous system of linear equations is a system of equations of the form $Ax = b$, where A is a matrix, x is a vector of variables, and b is a nonzero vector. The system is called inhomogeneous because the constant terms are not all zero.

Theorem

An inhomogeneous system of linear equations with more equations than variables has no solution for some choice of the constant terms.

Proof

Consider the inhomogeneous system of linear equations represented by the matrix equation $Ax = b$, where A is an $m \times n$ matrix with $m > n$. The null space of A is defined as:

$$\text{null } A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

Since there are more equations than variables, the rank-nullity theorem implies:

$$\dim(\text{null } A) = n - \dim(\text{range } A)$$

Given that $m > n$, it follows that $\dim(\text{range } A) < n$, which implies $\dim(\text{null } A) > 0$. Therefore, the null space contains nonzero vectors, indicating the existence of nontrivial solutions to the homogeneous system.

$\square$

SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

System of equations

A system of equations is a collection of finitely many equations involving the same set of variables.

The system may not contain any functions or variables with a degree higher then 1.

Solution of the system

- The solution of the system is the intersection of the solution sets of each equation.
- If some equation has no solution, the system has no solution.
- It is possible that each equation has a solution but not the system.

Lines

A line in $\mathbb{R}^2$: take $a, b, c \in \mathbb{R}$ with $a, b \neq 0$, we obtain for the equation of a line:

$$ax + by = c$$

a, b, c are constants and x, y are variables.

Planes

Plane in $\mathbb{R}^3$: take $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ with $a, b, c \neq 0$, we obtain for the equation of a plane:

$$ax + by + cz = d$$

a, b, c, d are constants and x, y, z are variables.

Linear equations

A linear equation has n variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ are constants and $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$.

Constant term

The term that doesn't have a variable associated with that term is called a constant term.

Homogeneous linear equation, Homogeneity

If a systems constant term is zero it is refered to as a homogeneous linear equation.

Remark

If the system represents a line, the line passes through the origin of the coordinate system.

Linear system, System of linear equations

A linear system or a system of linear equations with the variables $x_1, \ldots, x_n$ where $n \in \mathbb{N}$ is:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases}$$

With a_{ij} for $i = 1, \ldots, m$ and $j = 1, \ldots, n$ and b_k for $k = 1, \ldots, m$ are constants.

Solution of a linear system

A solution of the linear system with the variables $x_1, \ldots, x_n$ is a sequence of numbers $(s_1, \ldots, s_n)$ such that the substitution makes the following equation a true equality:

$$x_1 = s_1;\ x_2 = s_2;\ \ldots x_n = s_n$$

Remark

The solution is an ordered pair, an ordered triple, or in general an ordered n-tuple.

Tuple

Definition

A tuple is a finite sequence or ordered list of numbers or, mathematical objects, which are called the elements of the tuple.

Solution sets for lines

For a linear system with $a, b \neq 0$ as variables the equation represents a line in the real plane $\mathbb{R}^2$. We therefore get 3 possible scenarios:

- The lines are parallel and distinct: no solution

$$L_1 \| L_2$$

- The lines intersect: exactly one exact solution

$$L_1 \cap L_2$$

- The lines coincide: infinitely many solutions

$$L_1 = L_2$$

Solution sets for planes

For a linear system with $a, b, c \neq 0$ as variables the equation represents a plane in real space $\mathbb{R}^3$. We therefore get 8 possible scenarios:

- The planes are parallel: no solution

$$P_1 \| P_2 \| P_3$$

- One plane intersects 2 parallel planes: no solution

$$P_1 \cap (P_2 \| P_3)$$

- The planes intersect each other but at no common line L_s: no solution

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \neq L_s$$

- One plane coincides one other plane and a third is parallel to the them: no solution

$$P_1 \| (P_2 = P_3)$$

- All 3 planes are at angles $\theta, \alpha \neq 0$ to each other and the angle follows no plane, the solution is a point S_p: one exact solution

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = S_p$$

- All 3 planes are at angles $\theta, \alpha \neq 0$ to each other and the angle follows one plane, the solution is a line L_s: infinitely many solutions

$$L_s = P_1 \cap P_2 \cap P_3$$

- The planes are all coincide, the solution is the entire plane: infinitely many solutions

$$P_1 = P_2 = P_3$$

- Two planes coincide and one of them is at an angle $\theta \neq 0$ to the planes, the solution is a line: infinitely many solutions

$$(P_1 = P_2) \cap P_3$$

Remark

Every linear system has either zero, one or infinitely many solutions.

Infinitely many solutions

If a solution to a linear equation has infinitely many solutions, the solution is expressed with finitely many parameters to which we can assign arbitrary values in $\mathbb{R}$.

Remark

The parameter is commonly called t.

Consistent

A linear equation is consistent if it has at least one solution, the solution set is not empty.

Remark

A homogeneous system is always consistent. It has at least one trivial solution, where all variables are 0.

Inconsistent

A linear equation is inconsistent if it has at no solution, the solution set is empty.

Augmented matrix

Definition

The augmented matrix is the matrix that is formed by appending the column of constant terms to the end of the matrix formed by the coefficients.

Constructing an augmented matrix

For the following generalised linear equation:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases}$$

- We associate a row to each equation
- We associate a column to each variable, in a preserved order for each equation
- We also consider one additional column to take care of the constant term

After these steps we obtain:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

Elementary row operations

Elementary row operations are:

- Multiply a row through by a non zero constant
- Interchange two rows
- Add a constant times one row to another

Definition

Elementary row operations are the most basic operations done to solve the system.

Row echelon form

For a matrix to be in row echelon form, it needs to satisfy all of the following conditions:

- If there are any rows that consist entirely of zeros, then they are grouped together at the bottom of the matrix
- If a row does not consist entirely of zeros, then the first nonzero number in the row is a 1. We call this a leading 1
- In any two successive rows that do not consist entirely of zeros, the leading 1 in the lower row occurs farther to the right than the leading 1 in the higher row

Reduced row echelon form

For a matrix to be in reduced row echelon form, it needs to satisfy all of the conditions to be in row echelon form as well as:

- Each column that contains a leading 1 has zeros everywhere else in that column

Gaussian elimination

The Gaussian elimination is the standard procedure to turn a matrix into row echelon form.

Gaussian elimination procedure

We start with the left most nonzero column C:

- Swap rows so that the top entry of C is non zero. For this swap we use the first suitable row.
- Multiply the top row by a non-zero constant and make the top entry of C a 1.
- Add suitable multiples of the top row to the other rows and make sure that all entries of C apart from the top one are 0.

After this the first row is now completed and we continue to iterate through the remaining submatrix.

This process goes on until the all the rows are covered or until all remaining rows consist of zeros.

Gauss-Jordan elimination

The Gauss-Jordan elimination is the standard procedure to turn a matrix into reduced row echelon form.

Gauss-Jordan elimination procedure

We start with the last nonzero row R:

- Consider the leading 1 of R which is in some column C
- Multiply R by non-zero constants and add it to previous rows and make 0 all other entries of C apart from the leading 1.

After this the first row is now completed and we continue to iterate through the remaining submatrix.

This process continues until all entries above all leading 1's are zero.

Associated homogeneous linear system

Every inhomogeneous linear system has an associated homogeneous linear system, where the constant terms are zero.

Superposition principle

For a consistent inhomogeneous linear system:

All solutions are obtained by summing to the chosen solution, the solutions of the associated homogeneous linear system.

Proof

Consider the linear system where the i th equation is:

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h = b_i$$

The corresponding homogeneous linear system is:

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h = 0$$

Let $(X_1, \ldots, X_n)$ be a fixed solution, $(x_1, \ldots, x_n)$ any solution, $(y_1, \ldots, y_n)$ any solution of the homogeneous system. Then:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \left(x_h - X_h\right) &= \sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h - \sum_{h=1}^{n} a_{ih} X_h \\ &= b_i - b_i \\ &= 0\end{aligned}$$

so $(x_1 - X_1, \ldots, x_n - X_n)$ is a solution of the homogeneous system. Conversely,

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \left(x_h + X_h\right) &= \sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h + \sum_{h=1}^{n} a_{ih} X_h \\ &= b_i + b_i \\ &= 0\end{aligned}$$

so summing to $(X_1, \ldots, X_n)$ any solution of the homogeneous system gives again a solution.

$\square$

Number of parameters in the solution

For nonzero solution set, any consistent linear system:

The number of parameters in the solution set is the number of free variables.

Number of free variables

The number of free variables is the number of variables minus the number of leading variables.

Number of leading variables

The number of leading variables is the number of non-zero rows in the row echelon form.

VECTOR SPACES

Notations

- $\mathbb{F}$ can be used instead of $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$
- V is the vector space of $\mathbb{F}$.

Remark

The letter $\mathbb{F}$ is used because $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ are examples of what are called fields.

Lists and length

Definition

Suppose n is a nonnegative integer. A list of length n is an ordered collection of n-elements, of some mathematical objects, is separated by commas and surrounded by parentheses. A list of length n-looks like this:

$$(x_1, \cdots, x_n)$$

Definition

Two lists are equal if and only if they have the same length and the same elements in the same order.

Field $\mathbb{F}^n$

Definition

$\mathbb{F}^n$ is the set of all lists of length n of elements of $\mathbb{F}:

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \text{ for } j = 1, \ldots, n\}$$

For $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ and $j \in \{1, \ldots, n\}$, we say that x_j is the jth coordinate of $(x_1, \ldots, x_n)$

Addition in $\mathbb{F}$

Definition

Addition in $\mathbb{F}^n$ is defined by adding corresponding coordinates:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Commutativity of addition in $\mathbb{F}^n$

If $x, y \in \mathbb{F}^n$, then $x + y = y + x$.

Proof

Suppose $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Then

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \\ &= y + x, \end{aligned}$$

where the second and fourth equalities above hold because of the definition of addition in $\mathbb{F}^n$ and the third equality holds because of the usual commutativity of addition in $\mathbb{F}$.

$\square$

Zero

Definition

Let 0 denote the list of length n-whose coordinates are all 0:

$$0 = (0, \ldots, 0)$$

Additive inverse in $\mathbb{F}^n$

Definition

For $x \in \mathbb{F}^n$, the additive inverse of x, denoted $-x$, is the vector $-x \in \mathbb{F}^n$ such that

$$x + (-x) = 0$$

Definition scalar multiplication in $\mathbb{F}^n$

Definition

The product of a number λ and a vector in $\mathbb{F}^n$ is computed by multiplying each coordinate of the vector by λ:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

here $\lambda \in \mathbb{F}$ and $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$.

Addition and scalar multiplication

Definition

- An addition on a set V is a function that assigns an element $u + v \in V$ to each pair of elements $u, v \in V$.
- Scalar multiplication on a set V is a function that assigns an element $\lambda v \in V$ to each $\lambda \in F$ and each $v \in V$.

Vector space

Definition

A vector space is a set V along with an addition on V and a scalar multiplication on V such that the following properties hold:

- Commutativity

$$u + v = v + u \text{ for all } u, v \in V$$

- Associativity

$$(u+v)+w=u+(v+w)$$

and

$$(ab)v=a(bv) \quad \forall u,v,w \in V$$

and all $a,b \in \mathbb{F}$

- <u>Additive identity</u>

  there exists an element $0 \in V$ such that $v+0=v$ for all $v \in V$

- <u>additive inverse</u>

  for every $v \in V$, there exists $w \in V$ such that $v+w=0$

- <u>Multiplicative identity</u>

$$1v=v \quad \forall v \in V$$

- <u>Distributive properties</u>

$$a(u+v)=au+av$$

and

$$(a+b)v=av+bv \quad \forall a,b \in \mathbb{F} \text{ and } \forall u,v \in V.$$

<u>Points and vectors</u>

Definition

Elements of a vector space are called points or vectors.

<u>Real vector space and complex vector space</u>

Definitions

- A vector space over $\mathbb{R}$ is called a real vector space.
- A vector space over $\mathbb{C}$ is called a complex vector space.

<u>Set of functions</u>

Notation

If S is a set, then $\mathbb{F}^S$ denotes the set of functions from S to $\mathbb{F}$.

- For $f, g \in \mathbb{F}^S$, the sum $f + g \in \mathbb{F}^S$ is the function defined by

  $$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

  for all $x \in S$

- For $\lambda \in \mathbb{F}$ and $f \in \mathbb{F}^S$, the product $\lambda f \in \mathbb{F}^S$ is the function defined by

  $$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

  for all $x \in S$.

Unique additive identity

Theorem

A vector space has a unique additive identity.

Proof

Suppose 0 and 0' are both additive identities for some vector space V. Then

$\square$

Unique additive inverse

Theorem

Every element in a vector space has a unique additive inverse.

Proof

Suppose v and w are both additive inverses of some element $u \in V$. Then: $v + u = 0$ and $w + u = 0$

Adding the additive inverse of $v+u$ to both sides of the equation above gives $0 = w - v$, as desired.

$\square$

Notation

Let $v, W \in V$, then

- $-v$ denotes the additive inverse of v
- $w - v$ is defined to be $w + (-w)$

<u>Numbers and vectors</u>

Theorem

$0v = 0$ every $v \in V$.

Proof

$$0v = (0+0)v = 0v + 0v$$

Adding the additive inverse of $0v$ to both sides of the equation above gives $0v = 0$, as desired.

$\square$

Theorem

$a0 = 0$ for every $a \in \mathbb{F}$.

Proof

$$a0 = a(0+0) = a0 + a0$$

Adding the additive inverse of $a0$ to both sides of the equation above gives $0 = a0$, as desired.

$\square$

Theorem

$(-1)v = -v$ for every $v \in V$.

Proof

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$$

This equation says that $(-1)v$, when added to v, gives 0. Thus $(-1)v$ is the additive inverse of v, as desired.

$\square$

Subspaces

Definition

A subset W of a vector space V is called a subspace if:

- It contains the zero vector.
- It is closed under vector addition.
- It is closed under scalar multiplication.

Sum of subsets

Definition

Let U and W be subsets of a vector space V. The sum of U and W, denoted $U + W$, is the set defined by:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Sum of subspaces is the smallest containing subspace

Theorem

Suppose $U_1, \ldots, U_m$ are subspaces of V. Then $U_1 + \cdots + U_m$ is the smallest subspace of V containing $U_1, \ldots, U_m$.

Proof

Let W be the smallest subspace of V containing $U_1, \ldots, U_m$. We need to show that W is contained in $U_1 + \cdots + U_m$.

Since W is a subspace, it is closed under addition and scalar multiplication. Therefore, if $w \in W$, then for any $u_i \in U_i$ and $\lambda \in \mathbb{F}$, we have $w + u_i \in W$ and $\lambda w \in W$.

Now, consider any element $z \in U_1 + \cdots + U_m$. By definition, z can be written as $z = u_1 + \cdots + u_m$ for some $u_i \in U_i$. Since each U_i is contained in W, it follows that $z \in W$.

Thus, we have shown that $W \subseteq U_1 + \cdots + U_m$, which proves the theorem.

$\square$

Direct Sum

Definition

Suppose $U_1, \ldots, U_m$ are subspaces of V.

- The sum $U_1 + \cdots + U_m$ is called a direct sum if each element of $U_1 + \cdots + U_m$ can be written in only one way as a sum $u_1 + \cdots + u_m$, where each u_j is in U_j.
- If $U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum, then $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ denotes $U_1 + \cdots + U_m$, with the $\oplus$ notation serving as an indication that this is a direct sum.

Condition for a direct sum

Theorem

Suppose $U_1, \ldots, U_m$ are subspaces of V. Then $U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum if and only if the intersection $U_i \cap U_j = \{0\}$ for all $i \neq j$.

Proof

Suppose $U_1, \ldots, U_m$ are subspaces of V. We will show that $U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum if and only if the intersection $U_i \cap U_j = \{0\}$ for all $i \neq j$.

($\Rightarrow$) Assume $U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum. Let $v \in U_i \cap U_j$ for some $i \neq j$. Then we can write

$$v = u_i + \cdots + u_m$$

for some $u_k \in U_k$. However, since $v \in U_i$ and $v \in U_j$, this representation is not unique, contradicting the assumption that the sum is direct. Thus, we must have $v = 0$, proving that $U_i \cap U_j = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Now assume $U_i \cap U_j = \{0\}$ for all $i \neq j$. Let $v \in U_1 + \cdots + U_m$. Then we can write

$$v = u_1 + \cdots + u_m$$

for some $u_k \in U_k$. Suppose there is another representation

$$v = w_1 + \cdots + w_m$$

for some $w_k \in U_k$. Then we have

$$u_1 + \cdots + u_m = w_1 + \cdots + w_m.$$

Rearranging gives

$$(u_1 - w_1) + \cdots + (u_m - w_m) = 0.$$

Since the U_i are pairwise disjoint, it follows that each $u_k - w_k = 0$, proving the uniqueness of the representation. Thus, $U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum.

$\square$

Direct sum of two subspaces

Theorem

Suppose U and W are subspaces of V. Then $U \oplus W$ is a direct sum if and only if $U \cap W = \{0\}$.

Proof

Suppose U and W are subspaces of V. We will show that $U \oplus W$ is a direct sum if and only if $U \cap W = \{0\}$.

($\Rightarrow$) Assume $U \oplus W$ is a direct sum. Let $v \in U \cap W$. Then we can write

$$v = u + w$$

for some $u \in U$ and $w \in W$. However, since $v \in U$ and $v \in W$, this representation is not unique, contradicting the assumption that the sum is direct. Thus, we must have $v = 0$, proving that $U \cap W = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Now assume $U \cap W = \{0\}$. Let $v \in U \oplus W$. Then we can write

$$v = u + w$$

for some $u \in U$ and $w \in W$. Suppose there is another representation

$$v = w_1 + w_2$$

for some $w_k \in W$. Then we have

$$u + w = w_1 + w_2.$$

Rearranging gives

$$(u - w_1) + (w - w_2) = 0.$$

Since $U \cap W = \{0\}$, it follows that each $u - w_1 = 0$ and $w - w_2 = 0$, proving the uniqueness of the representation. Thus, $U \oplus W$ is a direct sum.

$\square$

FOUNDATIONS OF SET THEORY

Sets

Definition

A set is a well-defined collection of distinct objects, called elements or members, considered as a single entity.

Notation

Sets are usually denoted with capital letters or are written out as their elements in curly braces.

Containment to sets

Notation

If an element x is contained in a set A it is denoted using the greek letter epsilon in the following way:

$$x \in A$$

Equality of sets

Axiom of extension

Two sets are equal if and only if they have the same elements.

Notation

For two sets A and B if they are equal we write:

$$A = B$$

or if they are not equal

$$A \neq B$$

Remark

Equality of two sets is symmetric as:

$$A = B \quad \text{is the same as} \quad B = A$$

<u>Inclusion in sets</u>

Definition

A set A can be included in a distinct set B if and only if the all the elements of the set A are also included in B.

Notation

- We denote inclusion of A in B by writing:

  $$A \subset B$$

  similarly

  $$B \supset A$$

- Furthermore if A and B are subsets but may equal we can write:

  $$A \subseteq B$$

  similarly

  $$B \supseteq A$$

Remark

Both A is included in B and A is a subset of B are equal and mean the same thing.

Properties

- <u>Reflexive</u>

  A sole set A by definition is reflexive, it is included in itself.

- <u>Proper</u>

  Both A and B are proper sets if and only if:

$$A \subset B$$

  and

$$A \neq B$$

- <u>Transitive</u>

  The sets A, B and C are transitive if and only if:

$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\text{and} \quad B \subset C \\ &\iff A \subset C \end{aligned}$$

- <u>Antisymmetric</u>

  If A and B are sets such that:

$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\text{and} \quad A \supset B \\ &\iff A = B \end{aligned}$$

  By extension they must also have the same elements.

Axiom of pairing

For any two sets there exists a set that they both included in.

<u>Logical operators, Logical connectives</u>

Some logical operators are:

Name	Symbol
and	$\wedge$

or	$\vee$
not	$\neg$
if then, implies	$\implies$
if and only if, there exists	$\iff$
for some	$\exists$
for all	$\forall$

Remark

The Negation or not operator can also be written as:

$$\text{not}(S(x))$$

<u>Sentences</u>

Definition

A sentence is a logical statement with no free variables, meaning its truth value can be determined as either true or false. Sentences are built from set-theoretic expressions using logical connectives and quantifiers.

Axiom of specification

To every set A and to every condition $S(x)$ there corresponds a set B whose elements are exactly those elements x of A for which $S(x)$ holds.

$$B = \{x \in A : S(x)\}$$

Universe

A universe is the set defined as having included within it every possible element there exists.

The empty set

Definition

The empty set is defined as the set which contains no elements of any kind.

Notation

The empty set is commonly denoted in the following ways:

$$\emptyset \quad \text{or} \quad \varnothing \quad \text{or} \quad \{\}$$

Property

The empty set by definition is included in every set.

Pairs, Singeltons etc.

Unions

Axiom of unions

For every collection of sets C there exists a set U that contains all the elements x that belong to at least one set of the given collection.

$$U = \{x : x \in X, \forall X \in C\}$$

Notation

A union of two sets A and B can be denoted as follows:

$$A \cup B$$

Definition

The union over a collection of sets indexed by n is the set of all elements that belong to at least one of the sets in the collection. Formally, if $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of sets, then the union over $n \in \mathbb{N}$ is written as:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x : \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\}$$

<u>Unions of pairs</u>

Properties

Unions of pairs have the following properties:

1. <u>Identity</u>

   $A \cup \varnothing = A$

2. <u>Commutativity</u>

   $A \cup B = B \cup A$

3. <u>Associativity</u>

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

4. <u>Idempotence</u>

   $A \cup A = A$

5. <u>Subset Characterization</u>

   $A \subset B \iff A \cup B = B$

Proofs

1. Identity: $A \cup \varnothing = A$

   Let $x \in A \cup \varnothing$. Then $x \in A$ or $x \in \varnothing$. But $\varnothing$ has no elements, so $x \in A$. Thus, $A \cup \varnothing \subseteq A$. Conversely, any $x \in A$ is also in $A \cup \varnothing$. Hence:

$$A \cup \varnothing = A$$

2. Commutativity: $A \cup B = B \cup A$

   Let $x \in A \cup B$. Then $x \in A$ or $x \in B$, so $x \in B \cup A$. Similarly, any $x \in B \cup A$ implies $x \in A \cup B$. Therefore:

$$A \cup B = B \cup A$$

3. Associativity: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   Let $x \in A \cup (B \cup C)$. Then $x \in A$, or $x \in B \cup C$, meaning $x \in B$ or $x \in C$. In all cases, $x \in (A \cup B) \cup C$. The reverse direction follows similarly.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

4. Idemportence: $A \cup A = A$

   Let $x \in A \cup A$. Then clearly $x \in A$, so:

$$A \cup A = A$$

5. Subset Characterization: $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

   - If $A \subseteq B$, then every element of A is already in B, so $A \cup B = B$.
   - If $A \cup B = B$, then any $x \in A$ must be in B, so $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B$$

$\square$

DÉMONSTRATIONS

Démonstration

Définition

Une démonstration mathématique est une suite d'assertions mathématiques, chacune découlant logiquement de la précédente, permettant de passer d'assertions admises comme étant vraies, vers une assertion finale qu'on souhaite démontrer.

Différentes méthodes de démonstrations

- Démonstration directe

  Une preuve directe est une succession d'implications commençant par “P” et terminant par “Q”. La plupart des preuves sont directes.

- Démonstration par l'absurde

  On suppose que la conclusion à laquelle on veut aboutir est fausse, et on en déduit une contradiction. Faire une démonstration par l'absurde revient donc à démontrer.

  $$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$$

  pour en déduire que:

  $$A \Rightarrow B$$

- Démonstration par hérédité, démonstration par induction

  C'est un type particulier de preuve, utilisé pour démontrer des assertions dépendant d'un nombre entier n. Notons ainsi (A_n) une assertion dépendant de n. Pour démontrer que (A_n) est vraie pour tout n, il suffit de montrer que :

  - (A_0) est vraie

- $\forall n \geqslant 0, (A_0) \Rightarrow (A_{n+1})$

Remarque

Dans certains cas, on pourra commencer à $n = 1$ au lieu de $n = 0$.

- <u>Démonstration par contraposée</u>

  Dans une preuve par contraposée, on suppose la négation de la conclusion et on montre la négation de l'hypothèse.

  Ainsi, montrer “Si P alors Q” par contraposée signifie qu'on part de “non Q” et qu'on arrive à “non P ”.

LOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

Propositions et assertions

Definition

Une proposition, ou assertion, est une phrase qui peut être vraie ou fausse.

Remarque

Les propositions peuvent être mathématiques, ou plus générales.

Nous utiliserons les lettres capitales A, B etc. pour désigner des assertions mathématiques. On peut noter qu'un phrase en langue naturelle peut être vraie ou fausse, mais peut aussi ne pas avoir de valeur de vérité bien définie.

Tautologie

Definition

Une tautologie est une assertion qui est vraie du fait de sa construction.

Opérations sur les assertions

Définitions

- La négation d'une assertion A, notée $\neg A$, est l'assertion qui est vraie si A et fausse, et fausse si A est vraie.
- La conjonction de deux assertions A et B, notée $A \wedge B$, est l'assertion qui est vraie si et seulement si A et vraie et B est vraie. On la lit “et”.
- La disjonction de deux assertions A et B, est l'assertion $A \vee B$ qui est vraie si et seulement si A est vraie ou B est vraie. On la lit “ou”.

Remarque

Dans une expression composée, la négation prend la priorité sur $\vee$ et $\wedge$.

Propositions atomiques, assertions atomiques, variables proportionnelles

Definition

Les assertions atomiques, sont des assertions qui ne sont pas obtenues comme composition d'autres assertions.

Table de vérité

Les tables de vérité sont un moyen efficace pour analyser une proposition composée C à partir de plusieurs assertions atomiques A, B, ... Ce sont des tableaux ayant une ligne pour chaque valeur possible des assertions A, B, ... qui apparaissent dans C, et on met dans les cases correspondantes les valeurs de C. Ces valeurs sont obtenues à partir des valeurs des variables propositionnelles en utilisant les tables de vérités qui définissent les opérations $\wedge$, $\vee$ et $\neg$, et en utilisant les règles de priorités sur les opérations. On représente habituellement la valeur “vrai” par 1 et “faux” par 0, et on parle de valeurs de vérités.

L'algèbre de Boole

Propriétés

- Associativité de $\wedge$

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

- Associativité de $\vee$

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

- Commutativité de $\wedge$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

- Commutativité de $\vee$

$$A \vee B = B \vee A$$

- Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

- L'assertion vraie 1 est élément neutre pour $\wedge$ et

  l'assertion fausse 0 est élément neutre pour $\vee$.

$$A \wedge 1 = A$$
$$A \vee 0 = A$$

- Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- Double négation

$$\neg(\neg A) = A$$

- Loi de Morgan

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

- Loi de Morgan

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

- $$(\neg A) \wedge A = 0$$
- $$(\neg A) \vee A = 1$$

- Loi d'absorption
  - $$(A \wedge B) \vee B = B$$
  - $$(A \vee B) \wedge B = B$$

Implication et équivalence

A partir des opérateurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$, on peut introduire d'autres opérateurs logiques utiles.

Définition

On note $\Rightarrow$ l'opérateur "Implication" défini pour deux assertions A et B quelconques par:

$$(A \Rightarrow B) = (\neg A) \vee B$$

Remarque

On dira que A implique B si l'assertion $A \Rightarrow B$ est vraie. On dit que A est l'antécédent, et que B est le conséquent, de l'implication $A \Rightarrow B$.

Définition

L'implication $B \Rightarrow A$ est appelée réciproque de l'implication $A \Rightarrow B$.

Conséquence

- Il suit de la définition que $A \Rightarrow B$ est vraie sauf dans le cas où A est vraie et B est fausse. Ceci correspond à l'implication qu'on utilise dans le langage courant.
- On note aussi $\Leftarrow$ l'implication dans le sens inverse, c'est-à-dire que $B \Leftarrow A$ est équivalent à $A \Leftarrow B$.

Définition

L'implication $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ est appelée <u>contraposée</u> de l'implication $A \Rightarrow B$.

Proposition

Une implication est équivalente à sa contraposée.

Démonstration

On veut montrer que $A \Rightarrow B$ est vraie si et seulement si $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$. Or $A \Rightarrow B$ est fausse si et seulement si A est vraie et B et fausse. Mais $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ est fausse si et seulement si $(\neg B)$ est vraie et $(\neg A)$ est fausse, donc si et seulement si A

est vraie et B est fausse. Les deux assertions ont donc exactement les mêmes valeurs de vérité, elles sont donc équivalentes.

$$
\begin{aligned}
(A \Rightarrow B) &= ((\neg A) \vee B) \\
&= ((\neg A) \vee (\neg(\neg B))) \\
&= ((\neg(\neg B)) \vee (\neg A)) \\
&\quad (\neg B) \Rightarrow (\neg A)
\end{aligned}
$$

cqfd.

VECTORS AND SCALARS

Vectors

Definition

Vectors are quantities defined by magnitude and direction. The geometrical representation of a vector is by means of an arrow whose length, to some scale, represents the magnitude of the physical quantity and whose direction indicates the direction of the vector.

Scalar

Definition

A scalar quantity is one which is completely defined by its magnitude.

Fundamentals

Vectors are represented as such:

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

or

$$\overrightarrow{r}(x; y; z)$$

When a vector is used to denote a time dependent position we write:

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Properties

A vector is defined by having a direction, length,

PROBABILITÉS

Dénombrement

Définition

Dénombrer, c'est calculer le nombre de possibilités de grouper un certain nombre d'éléments d'un ensemble.

Probabilité d'un événement

Définition

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini, avec $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$

1. Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque issue e_i un nombre positif $p(e_i)$ tel que:

$$p(e_1) + p(e_2) + \ldots + p(e_n) = 1$$

2. Le nombre $p(e_i)$ est appelé : <u>probabilité de l'événement élémentaire</u>

3. La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités de toutes les issues qui réalisent A.

Propriétés

1. La probabilité de l'événement certain Ω vaut:

$$p(\Omega) = 1$$

2. La probabilité de l'événement impossible $\emptyset$ vaut:

$$p(\emptyset) = 0$$

3. Pour tout événement A, on a:

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$$

4. Pour tout événement A, $p(A) + p(\bar{A}) = 1$

Définition

Si une expérience aléatoire d'univers Ω, avec $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$. Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobable, et on a:

$$p(e_1) = p(e_2) = \ldots = p(e_n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{card\Omega}$$

Arrangement avec répétition

Arrangement avec répétition B de p éléments distincts ou non choisi parmi n éléments distincts:

- Les n éléments sont tous utilisés.
- Les éléments ne se répètent pas.
- Deux groupements diffèrent uniquement par l'ordre des éléments.

Formule

$$B_n^p = n^p$$

Permutation

Permutation P de n éléments distincts:

- Les éléments donnés ne sont pas tous utilisés.
- Les p éléments choisi peuvent se répéter.
- Deux groupements diffèrent soit par l'ordre soit par la nature des éléments.

Formule

$$P_n = n!$$

Arrangement sans répétition

Arrangement sans répétition A de p éléments distincts choisis parmi n éléments distincts:

- Les n éléments donnés ne sont pas tous utilisés.
- Les p éléments choisis ne se répètent pas.
- Deux groupements diffèrent soit par l'ordre soit par la nature des éléments.

Formule

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$(p \leqslant n)$$

Combinaison

Combinaison C de p éléments distincts choisis parmi n éléments distincts:

- Les n éléments donnés ne sont pas tous utilisés.
- Les p éléments choisis ne se répètent pas.
- Deux groupements diffèrent uniquement par la nature des éléments.

Formule

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{P_n}$$

$$(p \leqslant n)$$

Vocabulaire des événements

Définition

1. Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats possible et qu'on ne peut pas prévoir lequel sera obtenu. Le résultat d'une tell expérience est uniquement dû au hasard.

2. Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.

3. L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers associé à cette expérience.

   On note souvent: Ω

4. Un événement A est sous-ensemble de l'ensemble Ω.

   On dit qu'une issue réalise un événement A lorsque cette issue est un résultat appartenant à la partie A.

Schéma

Événements particuliers

1. L'événement impossible est l'ensemble vide noté $\emptyset$: aucune issue ne le réalise.

2. L'événement certain est l'univers Ω: toutes les issues le réalisent.

3. Un événement élémentaire est un événement formé d'une seule issue.

Événements

Définition

L'intersection de A et B, notée $A \bigcap B$ ou A et B, est l'événement constitué des issues qui réalisent A <u>et</u> B en même temps.

Définition

Dans le cas où A et B ne peuvent pas être réalisés en même temps, c'est à dire si $A \bigcap B \notin \emptyset$, on dit que A et B sont incompatible ou disjoint.

Définition

La réunion de A et de B, notée $A \bigcup B$ ou A ou B, est l'événement constitué des issues qui réalisent A <u>ou</u> B, c'est à dire au moins l'un des deux.

Définition

L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$ est constitué [...] de Ω qui ne réalisent pas A

Propriété

Soit une expérience aléatoire où les événements élémentaires sont équiprobables et soit A un événement, alors on a:

$$p(A) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ totales\ d'issues}$$
$$= \frac{nombre\ d'issues\ favorable\ de\ A}{nombres\ d'issues\ possibles}$$

Arbres pondérés

Propriétés

- Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est égale au produit des branches qui le composent.
- Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement composé est égale à la sommes des probabilité qui le composent.

Variable aléatoire

Définition

Pour définir une variable aléatoire X sur un univers Ω d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i, a chaque éventualité e_i de Ω.

Probabilité d'une variable aléatoire

Définition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction qui à chaque valeur x_i prise par X associe la probabilité: $p(X = x_i)$

Espace mathématiques

Definition

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X, notée $E(X)$ est la somme des produits de chaque valeur prise par X par la probabilité que X prenne cette valeur :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$= x_1 \cdot p(X = x_1) + x_2 \cdot p(X = x_2) + \ldots + x_k \cdot p(X = x_k)$$

Propriété

Si X est une variable aléatoire égale au gain algébrique d'un jeu hasard, alors $E(X)$ représente le gain moyen auquel on peut s'attendre.

- Si $E(X) > 0$, on dit que le jeu est <u>favorable</u> au joueur.
- Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est <u>équitable</u> au joueur.
- Si $E(X) < 0$, on dit que le jeu est <u>défavorable</u> au joueur.

Variance

Définition

On appelle variance d'une variable aléatoire X le nombre $V(X)$ défini par:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \cdot p(X = x_i)$$

$$= (x_1 - E(X))^2 \cdot p(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \cdot p(X = x_2) + \ldots + (x_k - E(X))^2 \cdot p(X = x_k)$$

Propriété

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p(X = x_i) - (E(X))^2$$

$$= x_1^2 \cdot p(X = x_1) + x_2^2 \cdot p(X = x_2) + \ldots + x_k^2 \cdot p(X = x_k) - (E(X))^2$$

$$= E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

Écart type

Definition

On appelle écart type d'une variable aléatoire X le nombre $\sigma(X)$ défini par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété

Plus l'écart type et la variance sont grands, plus la variable aléatoire est dispersée.

STATISTIQUES

COLLECTION DES FORMULES DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES

Figures dans 2 dimensions

Nom	$Périmètre$	$Aire$
$Cube$	$P = 4 \cdot a$	$A = a^2$
$Rectangle$	$P = 2(a + b)$	$A = a \cdot b$
$Triangle$	$P = a + b + c$	$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$
$Losange$	$P = 4a$	$A = \frac{c \cdot d}{2}$
$Disque$	$P = 2\pi \cdot r$	$A = \pi \cdot r^2$

Figures dans 3 dimensions

Nom	$Aire$	$Volume$
$Cube$	$A = 6c^2$	$V = c^3$

Cylindre	$A = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 h$
Cône de révolution	$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Sphère	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

LIMITES IMPORTANTES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Limites importantes

- $$D_{\ln} =]0; +\infty[$$
- $\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
- $\ln(e) = 1; \ln(1) = 0$
- $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}; \ln(a) = b \leftrightarrow a = e^b$
- $\forall a > 0, \forall b > 0$

COLLECTION DES FORMULES DE TRIGONOMÈTRIE

Formules de trigonomètrie
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$ $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ $\sin^2(\alpha) = \dfrac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ $1+\tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$
$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$ $\tan(-x) = -\tan(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot(x)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos^2(2x)$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos^2(2x)$$

$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = -3\cos(x) + 4\cos^3(x)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}$$

$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

FONCTIONS-DÉRIVÉES

Tableau Fonctions-Dérivées

$f(x)$	D_f	$f'(x)$
$k\ (constante)$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^n\ avec\ n \in \mathbb{N}\ et\ n > 1$	$\mathbb{R}$	nx^{x-1}
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$

$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$
$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}\ mod\ 2\pi\right)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$u(x) + v(x)$	$D_u \cap D_v$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x) - v(x)$	$D_u \cap D_v$	$u'(x) - v'(x)$
$k \cdot u(x)\ avec\ k \in \mathbb{R}$	D_u	$k \cdot u'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$D_u \cap D_v$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$\frac{1}{u(x)}$	$D_u \backslash \{x \vert u(x) = 0\}$	$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$D_v \cap D_u \backslash \{x \vert u(x) = 0\}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$v(u(x)) = (v \circ u(x))$	$D_u \cap \{x \vert v(x) \in D_v\}$	$v'(u(x)) \cdot u'(x)$

Cas particuliers

Nom	$f(x)$	$f'(x)$
$fonction\ puissance$	$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = n[u(x)]^{n-1}$
$fonction\ racine\ carrée$	$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(}}$
$fonction\ sinus$	$f(x) = \sin[u(x)]$	$f'(x) = \cos[u(x)]$
$fonction\ arcsinus$	$f(x) = \sin^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-}}$
$fonction\ cosinus$	$f(x) = \cos[u(x)]$	$f'(x) = -\sin[u(x)]$

fonction arccosinus	$f(x) = \cos^{-1}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 -}}$
fonction tangente	$f(x) = \tan[u(x)]$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]} = \{1 + \text{ta}$
fonction arctangente	$f(x) = \tan^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$
fonction exponentielle	$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'$
fonction logarithme	$f(x) = \ln[u(x)]$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

TABLEAU DES PRIMITIVES DE FONCTIONS

Primitives de fonctions usuelles

Fonction:	Primitive:	Sur l'intervalle I:
m (constante)	$mx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}\ et\ n \geqslant 2)$	$-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[\ ou\ ]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$	$]-\infty; 0[\ ou\ ]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$

e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

Primitives de fonctions composées

Fonction:	Primitive:	Conditions:
$u'(x)u(x)^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u(x)^{n+1} + c$	aucune
$\frac{u'(x)}{u(x)^n} \ (n \in \mathbb{N} \ et \ n \geqslant 2)$	$-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{u(x)^{n-1}} + c$	$\forall x \in I, \ u(x) \neq 0$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\left(\lvert u(x)\rvert\right) + c$	$\forall x \in I, \ u(x) \neq 0$
$\frac{u(x)'}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$	$\forall x \in I, \ u(x) > 0$
$u(x)' \sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$	aucune
$u(x)' \cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$	aucune
$u(x)'e^u(x)$	$e^u(x) + c$	aucune
$u'(x)v'\left[u(x)\right]$	$v\left[u(x)\right] + c$	$\forall x \in I, u[u(x)]$ existe

ENSEMBLES DES NOMBRES

$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{D} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R} \in \mathbb{C} \in \mathbb{H} \in \mathbb{O} \in \mathbb{S} \in \mathbb{P} \in \mathbb{X} \in \mathbb{U} \in \mathbb{V}$

Noms des ensembles

Symbole	*Nom*
$\mathbb{N}$	*ensemble des entiers naturels*
$\mathbb{Z}$	*ensemble des entiers relatifs*
$\mathbb{D}$	*ensemble des décimaux*
$\mathbb{Q}$	*ensemble des rationnels*
$\mathbb{R}$	*ensemble des réels*
$\mathbb{C}$	*ensemble des complexes*
$\mathbb{H}$	*ensemble des quaternions*
$\mathbb{O}$	*ensemble des octonions*

$\mathbb{S}$	*ensemble des sédénions*
$\mathbb{P}$	*ensembles des pathions*
$\mathbb{X}$	*ensembles des chingons*
$\mathbb{U}$	*ensembles des routons*
$\mathbb{V}$	*ensemble des voudrons*

MESSTECHNIK

Grundbegriffe

- Messgröße

  Die Messgröße ist die physikalische Größe, die durch eine Messung erfasst werden soll.

- Anzeigebereich

  Der Anzeigebereich ist der Bereich der Messwerte, der am Instrument ablesbar ist.

- Unterdrückungsbereich

  Der Unterdrückungsbereich ist der Bereich von Messwerten außerhalb des Anzeigebereichs.

- Messbereich

  Der Messbereich ist der Teil des Anzeigebereichs, für den die Spezifikationen des Gerätes gelten, häufig gleich Anzeigebereich.

- Messprinzip

  Das Messprinzip ist das Phänomen, welches der Messung zugrunde liegt.

- Messverfahren

  Das Messverfahren ist die Funktionsweise der Messeinrichtung.

- Empfindlichkeit

  Eingang oder Ausgang, analog: Zeigerweg auf Skala je Einheit der Messgröße, digital: Anzahl der Ziffernschritte je Einheit der Messgröße

- Umkehrspanne

  Die Umkehrspanne ist die Differenz beim Wechsel der Messrichtung.

- Ansprechschwelle

  Ansprechschwelle ist der erforderlicher Wert, der Änderung der Anzeige hervorruft.

- Justieren, Abgleichen

  Justieren, Abgleichen ist das Einstellen, um Fehler zu minimieren.

- Kalibrieren

  Kalibrieren ist das Feststellen eines Zusammenhangs zwischen Eingangsgröße und Ausgangsgröße.

- Eichen

  Eichen ist das Amtliche Prüfen des Messgerätes, Anpassen an Norm.

- Messkette

  Funktionselemente der Messeinrichtung, die nacheinander vom Signal durchlaufen werden

- Messfühler

  Im Messraum angeordnet, entnimmt die Messgröße und liefert diese weiter

- Messumformer

  Wandelt Signal in eine andere physikalische Größe um.

- Sensor

  kein strenger Begriff, Teil der Messkette oder auch gesamte Messkette

Messsystem

Durchführung einer Messung

Durch das Zuschalten des Messgerätes findet eine Veränderung der Messgröße statt. Dieser Effekt muss durch geeignete Geräte und Messverfahren klein gehalten werden.

Elektrische Messtechnik

Diagramm der elektrischen Messtechnik.

Auflösung

Definition

Die Auflösung ist der kleinste detektierbarer Unterschied.

Weitere Auflösungen:

- Dynamik, -umfang

Quotient aus möglichem Maximum und Minimum des ausgegebenen Messwertes.

- Zeitliche Auflösung

  Dauer des Messvorgangs zur Bestimmung eines Messwertes entspricht nicht der „Abtastrate".

- Räumliche Auflösung

  Größe der Linie, Fläche oder des Volumens aus dem ein Messwert ermittelt wird.

- Digitale Auflösung

  Diskretisierung des Signals in 2^n ganzzahlige Inkremente $[bit]$.

- Reale Auflösung

  Dynamik unter Einbeziehung des Signalrauschens

Kennlinie

1. Arbeitsbereiche

   Abschnitte der Kennlinie mit charackteristischem nutzbaren Verlauf sind streng monoton, linear, logarithmisch,...

2. Empfindlichkeit

   Durch Änderung der Eingangsgröße hervorgerufene Änderung der Ausgangsgröße.

$$Steigung: \frac{\Delta X_a}{\Delta X_e}$$

3. Lineraität

Maß für die Proportionalität zwischen Eingangsgröße und Ausgangsgröße.

Linearisierung von nichtlinearen Kennlinien

Hat man eine nichtlineare Kennlinie und möchte diese linearisieren so muss eine Taylorreihenentwicklung vorgenommen werden, wobei Terme höherer Ordnung vernachlässigbar sind wenn die Differenzen der zu messenden Punkte ausreichend klein sind.

Akkuratheit und Präzision

GRAVITATION

Keplersche Gesetze

1. Keplersche Gesetz:

   Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersche Gesetz:

   Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Keplersche Gesetz:

   Der Quadrat der Umlaufzeit T eines Planeten ist proportional zum Kubus der groβen Bahnhalbachse a der Umlaufbahn.

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = konstant$$

Newtons Gravitationsgesetz

Zwei punktförmige Kärper A und B der Massen m_A und m_B, die sich in der Entfernung r voneinander befinden, ziehen sich gegenseitig an. Die vektorielle schreibweise der Anziehungskraft ist:

$$\overrightarrow{F_{A\,auf\,B}} = -\overrightarrow{F_{B\,auf\,A}} = -G \cdot \frac{m_A m_B}{r^2}$$

$$\overrightarrow{F_{A\,auf\,B}},\ Kraft\ von\ A\ auf\ B$$

$$\overrightarrow{F_{B\,auf\,A}},\ Kraft\ von\ B\ auf\ A$$

$$G,\ ist\ die\ Gravitationskonstante$$

$$G = 6,67390 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Siehe: Naturkonstanten.

Herleitung

Es wird vereinfachend angenommen:

- Planeten bewegen sich auf Kreisbahnen
- Auf diesen Kreisbahnen bewegen sich die Planeten mit gleich bleibender Geschwindigkeit

Ein Planet der Masse m bewege sich mit der Bahngeschwindigkeit v auf einem Kreis um die Sonne mit der Masse M. Auf ihn wirkt die Sonne mit der Zentripetalkraft:

$$\begin{aligned} F_z &= m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \\ &= \frac{4\pi^2}{C \cdot r^3} \cdot m \cdot r \\ &= \frac{4\pi^2}{C} \cdot \frac{m}{r^2} \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

Die Gravitationskraft ist direkt proportional zur Masse m des Planeten und indirekt proportional zum Quadrat seines Abstandes von der Sonne r.

Es folgt:

$$F_1 \sim \frac{m}{r^2} \ (1)$$

und

$$F_2 \sim \frac{M}{r^2} \ (1)$$

Nach dem Wechselwirkungsprinzip übt aber auch der umlaufende Körper auf den Zentralkörper eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kraft F_2 aus. Somit gilt: $Fi = F2$ und die beiden Proportionalitäten lassen sich vereinen zu:

$$F \sim \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Unter Einführung einer Proportionalitätskonstante k ergibt sich:

$$F = k\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Die Proportionalitätskonstante k ist jedoch in diesem Fall die Gravitationskonstante G.

Es folgt:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Formel

Beträge:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Vektoriell:

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \overrightarrow{r_0}$$

<u>Gravitationsfeld</u>

Definition

Ein Gravitationsfeld ist eine Region des Raums, wo eine Masse in einer Gravitationskraft unterliegt.

Bahngeschwindigkeit eines Satelliten

Herleitung

Es gilt:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_{Grav}} = m \cdot \overrightarrow{a} = m \cdot \overrightarrow{a_{zp}}$$

Da nur eine Kraft am Satelliten angreift und diese Kraftrichtung bekannt ist, kann das Gesetz in skalarer Form geschrieben werden.

$$F_{Grav} = m \cdot a_{zp}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot \frac{M}{r} = v^2$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Der Satellit bewegt sich in Höhe h über dem Boden eines Himmelskörpers. Mit einbeziehung deren Radiuses R erhalten wir: $r = R + h$

Einsetzen:

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}}$$

Formel

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}}$$

Periodendauer eines Satelliten

Herleitung

Da die Bahngeschwindigkeit v der Quotient aus Kreisumfang und Umlaufzeit T entspricht.

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \frac{r \cdot \sqrt{r}}{\sqrt{G \cdot M}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{G \cdot M}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot M}}$$

Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot M}}$$

<u>Geostationäre Satellit</u>

Ein geostationärer Satellit ist ein künstlicher Erdsatellit der sich auf einer Kreisbahn über dem Äquator befindet. Die Höhe des Satelliten über dem Äquator wird so gewählt, dass der Satellit der Erddrehung folgt. Dies ist dann der Fall, wenn die Umlaufzeit des Satelliten und die Umlaufdauer der Erde gleich groß sind.

Es gilt dann:

$$T = 23h + 56min + 4,0989s = 86\ 164,098\ 9s$$

Man nennt diese Periodendauer <u>siedrischer Tag</u>.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{G \cdot M}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}}$$

$$R + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}} - R$$

GRUNDLAGEN DER PHYSIK

Etymologie

Die Physik (vom griechischen ”physis” für Natur) ist eine Naturwissenschaft.

mittelhochdeutsch fisike < lateinisch physica = Naturlehre < griechisch physikḗ (theōría) = Naturforschung, zu: physikós, physisch

Vorgehensweise der Physik

Die Arbeitsweise in der Physik lässt sich in folgende Schritte unterteilen:

1. Beobachtung eines Naturphänomens
2. Hypothesen formulieren
3. Experimente, methodische Vorgehensweise um Phänomene zu untersuchen
4. Hypothesen neu formulieren ,die Experimente wenn nötig wiederholen
5. Naturgesetze herleiten / Modelle erstellen
6. Die Naturgesetze und Modelle auf andere Phänomene anwenden (wenn nötig von vorne beginnen)

Physikalische Größe

Definition

Eine physikalische Größe ist eine Eigenschaft einer Naturerscheinung, eines Körpers oder eines Stoffes, die messbar ist.

Basisgröße

Definition

Basisgrößen können nicht auf andere Größen zurückgeführt werden. Es gibt nur 7 Basisgrößen: Die Länge, die Zeit, die Masse, die Temperatur, die Stromstärke, die Stoffmenge, die Lichtstärke.

Abgeleitete Größen

Definition

Abgeleitete Größen sind von den Basisgrößen abgeleitet.

S.I.-Einheiten

Um den Vergleich von Messungen physikalischer Größen international zu vereinfachen, wird oft das internationale Einheitensystem benutzt. Auch S.I. genannt für "système international d'unités".

Genau wie man zwischen Basisgrößen und abgeleiteten Größen unterscheidet, so nennt man die zu den Basisgrößen gehörigen Einheiten Basiseinheiten und die zu den abgeleiteten Größen gehörigen Einheiten abgeleitete Einheiten.

Sowohl für jede physikalische Größe als auch für die Einheiten werden Symbole benutzt.

Siehe auch S.I. - Basisgrößen.

Masse

Definition

Die Masse gibt an, wie schwer oder wie leicht und wie träge ein Körper ist. Die Masse gibt an welche Stoffmenge in einem Körper enthalten ist.

Physikalische Darstellung

Größenzeichen: m

S.I.-Einheit: kg

Messinstrument: Balkenwaage

Volumen

Definition

Das Volumen eines Körpers gibt an, wie viel Raum ein Körper einnimmt.

Physikalische Darstellung

Größenzeichen: V

S.I.-Einheit: m^3

Siehe auch Berechnung der Geometrischen Formen.

Dichte

Definition

Die Dichte ρ eines Körpers ist der Quotient aus der Masse m des Körpers und dessen Volumen V:

Formel

$$\rho = \frac{m}{V}$$

S.I. - Einheit

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

Bemerkung

Die Dichte wird oft in der Chemie und Physik in $[\rho] = \frac{g}{cm^3}$ angegeben. Die Umwandlung ist:

$$1\frac{kg}{m^3} = 0,001\frac{g}{cm^3}$$

<u>Geschwindigkeit</u>

Definition

Die Geschwindigkeit v eines Körpers ist der Quotient aus der vom Körper zurückgelegten Strecke s und der dafür benötigten Zeit t:

Formel

$$v = \frac{s}{t}$$

S.I. - Einheit

$$[v] = \frac{m}{s}$$

Bemerkung

Die Geschwindigkeit wird oft im Alltag und Physik in $[v] = \frac{km}{h}$ angegeben. Die Umwandlung ist:

$$1\frac{m}{s} = 3,6\frac{km}{h}$$

FORMELSAMMLUNG RADIOAKTIVITÄT

Bezeichnung eines Atomkerns

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K}$$

Masse des Atoms

$$m_A = A_r \cdot u$$

Anzahl der Atome

$$N_{Atome} = \frac{m}{m_A}$$

Strahlungsarten

Alphastrahlung

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K}_1 \longrightarrow {}^{\mathrm{A}-4}_{\mathrm{Z}-2}\mathrm{K}_2 + {}^{4}_{2}\alpha$$

Betastrahlung

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K}_1 \longrightarrow {}_{\mathrm{Z}+1}^{\mathrm{A}}\mathrm{K}_2 + {}^{0}_{-1}\beta^+ \, {}^{0}_{0}\bar{\nu}$$

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K}_1 \longrightarrow {}_{\mathrm{Z}-1}^{\mathrm{A}}\mathrm{K}_2 + {}^{0}_{+1}\beta^+ \, {}^{0}_{0}\nu$$

Gammastrahlung

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K}^* \longrightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K} + \gamma$$

Aktivität

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$

$$A = \lambda \cdot N$$

Grundgesetz des radioaktiven Zerfalls

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

<u>Halbwertszeit</u>

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

RADIOAKTIVITÄT

Physikalische Größen

- Z: Kernladungszahl äquivalent zur Ordnungszahl
- N: Anzahl an Neutronen
- A: Massenzahl
- e: Elementarladung

Bermerkung

Siehe Naturkonstanten.

Grundlagen

Der Atomkern besteht aus Neutronen n^0 und Protonen p^+, diese werden Nukleonen genannt und sind sogenannte Kernbausteine eines Atomkerns. Der Atomkern ist also positiv.

Es gilt:

$$A = Z + N$$

Tröpfchenmodell

Das Tröpfchenmodell wurde in 1937 von *Gavmov* entwickelt und betrachtet den Atomkern als Ganzes.

Die Atomkerne werden als kleine Tropfen einer aus Protonen und Neutronen bestehenden Kernflüssigkeit angesehen. Wie in einem Wassertropfen werden die einzelnen Moleküle durch Kohäsionskräfte zusammengehalten und verbinden so Kernkräfte und Nukleonen.

Nuklid

Ein Nuklid wird beschrieben durch ein chemisches Elementsymbol K, eine Massenzahl A und eine Kernladungszahl Z.

$$^{A}_{Z}\mathrm{K}$$

Isotope

Isotope sind Atomkerne mit gleicher Protonenzahl aber verschiedener Neutronenzahl.

Bemerkung

Isotope verhalten sich chemisch gesehen gleich, wie ein Atomkern gleicher Neutronenzahl und Protonenzahl da, chemisch gesehen nur die Elektronenzahl relevant.

Atomare Masseneinheit

Die atomare Masseneinheit u ist $\frac{1}{12}$ der Atommasse m_A des Kohlenstoffisotops $^{12}_{6}\mathrm{C}$.
$1u = 1,660\,5 \cdot 10^{-27} kg$

Bermerkung

Siehe Exotische Umwandlungen.

Absolute Atommasse

Formel:

$$m_A = A_r \cdot 1u$$

Radioaktivität

Radioaktivität ist die Eigenschaft von Atomkernen sich selbst umzuwandeln und dabei eine charakteristische Strahlung auszusenden.

Natürliche und Unnatürliche Strahlung

Je nachdem, ob das zerfallende Nuklid natürlich vorkommt oder künstlich erzeugt wurde, spricht man von natürlicher oder künstlicher Radioaktivität.

Strahlungsarten

- Alphastrahlung:

  Beim α Zerfall zerfällt der Atomkern in ein neues Element und strahlt dabei ein α - Teilchen aus also ein He-Kern.

  Zerfallsgleichung:

  ${}^{A}_{Z}K_1 \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}K_2 + {}^{4}_{2}\alpha$

- β^--Strahlung:

  Beim β^- Zerfall zerfällt der Atomkern in ein neues Element und strahlt dabei ein Elektron e^- ab. Dabei zerfällt im Atomkern ein Neutron zu einem Elektron und einem Proton:

  $$n^0 \longrightarrow e^- + p^+$$

  Dieser Prozess den Energieerhaltungssatz nicht befolgt, wurde das Antineutrino $\bar{\nu}$ postuliert. Dieses Teilchen besteht aus Antimaterie, besitzt keine elektrische Ladung und stellt eine Portion Energie dar.

  Zerfallsgleichung:

  ${}^{A}_{Z}K_1 \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}K_2 + {}^{0}_{-1}\beta + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$

- β^+-Strahlung:

  Beim β^+ Zerfall zerfällt der Atomkern in ein neues Element und strahlt dabei ein Positron $\bar{e}^+$ ab. Dabei zerfällt im Atomkern ein Proton zu einem Positron und einem Neutron:

$$\mathrm{p}^+ \longrightarrow \bar{e}^+ + \mathrm{n}^0$$

Dieser Prozess den Energieerhaltungssatz nicht befolgt, wurde das Neutrino ν postuliert. Dieses Teilchen besteht aus gewöhnlicher Materie, besitzt keine elektrische Ladung und stellt eine Portion Energie dar.

<u>Zerfallsgleichung:</u>

$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K}_1 \longrightarrow {}_{\mathrm{Z}-1}^{\mathrm{A}}\mathrm{K}_2 + {}_{+1}^{0}\beta + {}_{0}^{0}\nu$$

- <u>Gammastrahlung</u>

  Die Gammastrahlung ist eine kurzwellige elektromagnetische Welle welche von dem Atomkern ausgesendet wird wenn dieser sich von einem energetisch angeregten Zustand zu einem energetisch niedrigen Zustand oder manchmal dem Grundzustand verändert.

  <u>Zerfallsgleichung:</u>

$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K}^* \longrightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{K} + \gamma$$

<u>Nomenklatur der Antimaterie</u>

Antimaterie wird mit einem oberen Strich gekennzeichnet.

<u>Aktivität</u>

Die Aktivität A gibt die Zerfallsrate der Radioaktiven Atomkerne an.

Formel

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$

Einheit

$$[A] = 1Bq$$

$$[A] = 1s^{-1}$$

$$Bq,\ Becquerel$$

Die Aktivität lässt sich auch anders definieren. Da:

$$A \sim N$$

und

$$A \sim \lambda$$

erhalten wir:

$$A = \lambda \cdot N$$

Erklärungen

$$\lambda,\ Zerfallskonstante$$

Die Zerfallskonstante λ ist für jedes Element und Isotop anders.

Bemerkung

Siehe Zerfallskonstantentabelle

Grundgesetz des radioaktiven Zerfalls

Herleitung

Um ein Gesetz für den radioaktiven Zerfall zu finden Kombinieren wir folgende Formeln der Aktivität A

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}(1)$$

$$A = \lambda \cdot N(2)$$

Es gilt:

$$(1) = (2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda \cdot N$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N$$

Mit

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt}$$

Wir erhalten also

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{dN}{N}\right) = -\lambda \cdot t$$

$$\Leftrightarrow N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Anzahl der Atome

Formel

$$N_{Atome} = \frac{m}{m_A}$$

$$N_{Atome},\ Atomanzahl$$

$$m,\ Masse\ des\ Körpers$$

$$m_A,\ Masse\ eines\ Atoms$$

Radioaktiver Zerfall: Masse

Herleitung

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow N(t) \cdot m_A = N_0 \cdot m_A \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Formel

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Radioaktiver Zerfall: Aktivität

Herleitung

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow N(t) \cdot \lambda = N_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Formel

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Halbwertszeit

Die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$ gibt die Zeit ein die ein radioaktives Präparat benötigt um zur Hälfte zerfallen zu sein.

Herleitung 1

Nach der Definition der Halbwertszeit gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Formel

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Herleitung 2

Mit der Formel der Aktivität gilt

$$A = \lambda \cdot N(t)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{A}{N(t)} (1)$$

und

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} (2)$$

Es gilt:

$$(1) = (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{N(t)} = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{N(t)}{T_{\frac{1}{2}}} \cdot \ln(2)$$

ARBEIT, ENERGIE, LEISTUNG

Arbeit

Definition

Wenn ein Körper unter der Einwirkung einer konstanten Kraft $\overrightarrow{F}$ die Strecke s zurückgelegt, dann wird an ihm die Arbeit W verrichtet.

Mathematisch

Die Arbeit kann berechnet werden nach:

$$W = \int_c \overrightarrow{F} \cdot \left(\overrightarrow{s}\right) \cdot d\overrightarrow{s}$$

oder

$$W\left(\overrightarrow{F}\right) = F \cdot s$$

oder

$$W(\overrightarrow{F}) = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$$

Der Winkel α ist zwischen Kraftrichtung und Wegrichtung.

Einheit

$$[W] = Nm = J$$

$$J,\ Joule$$

$$Nm,\ Newton\ Meter$$

Mechanische Energie

Definition

Mechanische Energie ist die unabdingbare Bedingung mechanische Arbeit zu verrichten. Mechanische Energie tritt in Form von kinetischer und potentieller Energie auf.

Energie

Definition

Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu verrichten.

Name	Formel
Potentielle Lageenergie	$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
Elektrische Energie	$E_{el} = U \cdot I \cdot t$
Wärmeenergie	$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$
spann Energie	$E_{spann} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$

Anmerkung

Bei der Wäremeenergie wird oft $\Delta\theta$ für Grad Celsius benutzt und ΔT für Kelvin

Energieerhaltungssatz

Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden, sie kann jediglich von einer Form in eine andere umgewandelt werden.

Bemerkungen

Benötigte Energie

$$\Delta W = E_2 - E_1$$

Zugeführte Energie

$$\Delta E > 0$$

Abgeführte Energie

$$\Delta E < 0$$

Dreharbeit

Formel

$$W_{rotation} = M_r \cdot \Delta\varphi$$

Herleitung

$$\begin{aligned} W_{rotation} &= F_T \cdot \Delta s \\ &= F_T \cdot 2\pi r \cdot N \\ &= M_r \cdot 2\pi \cdot N \\ &= M_r \cdot \Delta\varphi \end{aligned}$$

Leistung

Definition

Leistung ist die Geschwindigkeit mit der Energie verbraucht wird.

$$P = \frac{W}{t}$$

Mit $W = F \cdot s$ erhalten wir

$$P = F \cdot v$$

Einheit

$$[P] = W$$

Drehleistung

Formel

$$P_{rotation} = M \cdot 2\pi n$$

Herleitung

$$P_{rotation} = F_T \cdot v_u$$

$$= F_T \cdot \omega \cdot r$$
$$= F_T \cdot 2\pi n \cdot r$$
$$= M \cdot 2\pi n$$

Wirkungsgrad

Definition

Der Wirkungsgrad η einer Energieumwandlung gibt an, welcher Teil der zugeführten Energie E_{zu} in nutzbare Energie E_{nutz} umgewandelt wird:

$$\eta = \frac{E_{nutz}}{E_{zu}}$$

oder

Der Wirkungsgrad η gibt an, welcher Teil der zugeführten Leistung P_{zu} in nutzbare Leistung P_{nutz} umgewandelt wird:

$$\eta = \frac{P_{nutz}}{P_{zu}}$$

oder

Der Wirkungsgrad η gibt an, welcher Teil der zugeführten Arbeit W_{zu} in nutzbare Arbeit W_{nutz} umgewandelt wird:

$$\eta = \frac{W_{nutz}}{W_{zu}}$$

Einheit

$$\eta,\ hat\ keine\ Einheit$$

Gesamtwirkungsgrad

Der Gesamtwirkungsgrad hängt multiplikativ von allen vorherigen und kommenden Wirkungsgraden ab. Es gilt:

$$\eta_{gesamt} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_n$$

AUFTRIEB

Auftriebskraft

Auf in Flüssigkeiten eingetauchte Körper wirkt eine der Gewichtskraft entgegen gerichtete Kraft: die Auftriebskraft $\overrightarrow{F_A}$.

Herleitung

Der Betrag der Auftriebskraft $\overrightarrow{F_A}$ kann auch berechnet werden.

Er ergibt sich durch: Die Auftriebskraft $\overrightarrow{F_A}$ ergibt sich aus der Resultierenden der Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$. Unter Berücksichtigung der Richtungssinne erhalten wir für den Betrag der Auftriebskraft:

$$F_A = F_1 - F_2$$

Für die Kräfte gilt: $F_1 = p_1 \cdot A$ und $F_2 = p_2 \cdot A$

und für die Drücke: $p_1 = \rho_F \cdot g \cdot h_1$ und $p_2 = \rho_F \cdot g \cdot h_1$

Daher:

$$F_A = p_2 \cdot A - p_1 \cdot A$$
$$= \rho_F \cdot g \cdot A \cdot h_1 - \rho_F \cdot g \cdot A \cdot h_2$$

$$= \rho_F \cdot g \cdot \underbrace{A \cdot \underbrace{(h_2 - h_1)}_{=h}}_{=V_K}$$

$$= \rho_F \cdot g \cdot V_K$$

Formel

$$F_A = \rho_F \cdot g \cdot V_K$$

Archimedisches Prinzip

Der Betrag der Auftriebskraft ist gleich dem Betrag der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Mathematisch

Für das Volumen der verdrängten Flüssigkeit:

$$V_K = V_{FL}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_{FL} \cdot g \cdot V_{FL} \\ &= m_{FL} \cdot g \\ &= F_{G,FL} \end{aligned}$$

wobei $F_{G,FL}$ die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist.

Steigen, schweben, sinken

Zusammenhang zwischen Gewichtskraft und Auftriebskraft:

- Steigen: $F_A > F_G$
- Schweben: $F_A = F_G$
- sinken: $F_A < F_G$

Daraus lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen der Dichte der Flüssigkeit ρ_{FL} und der Dichte des Körpers ρ_K ableiten:

Da: $F_G = m_K \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$, ergibt sich für:

$$F_G \gtreqless F_A$$

$$\Leftrightarrow \rho_K \cdot V_K \cdot g \gtreqless \rho_F \cdot V_K \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \rho_K \gtreqless \rho_F$$

Also:

$\rho_K > \rho_F$: Der Körper sinkt; $\rho_K = \rho_F$: Der Körper schwebt; $\rho_K < \rho_F$: der Körper steigt bis er schwimmt.

Auftrieb in der Luft

Genauso wie in Flüssigkeiten gibt es auch in Luft (oder anderen Gasen) eine Auftriebskraft. Diese Auftriebskraft entsteht auch hier durch die Veränderung des Schweredrucks der Luft mit der Höhe. Nimmt man an, dass sich der Luftdruck zwischen dem unteren Rand und dem oberen Rand des Körpers nicht verändert, so kann auch die zuvor erstellte Formel angewandt werden, nur muss nun die Dichte der Luft ($\rho_{Luft} = 1,29 \frac{g}{L}$) anstatt der Dichte der Flüssigkeit benutzt werden:

$$F_A = \rho_{Luft} \cdot g \cdot V_K$$

DRUCK

Entstehung des Drucks in Gasen

Bei eingeschlossenen Gasen entsteht der Druck durch unregelmäßige Stöße der Teilchen auf die Gefäßwände. Die Stöße sehr vieler Teilchen wirken wie eine gleich bleibende Kraft.

In einem Gefäß ist der Gasdruck an allen Stellen gleich groß. An den Wänden entstehen so nach außen, senkrecht zur Begrenzungsfläche, gerichtete Druckkräfte.

Entstehung des Drucks in Flüssigkeiten

Bei Versuchen lässt sich herausfinden, dass der Druck in Flüssigkeiten in alle Richtungen gleichzeitig wirkt. Man entdeckte das: *Pascal'sches Prinzip*.

Unten gezeichnet ist ein Versuch mit einem mit Löchern versehenen Glaskolben.

Pascal'sches Prinzip

In einer abgeschlossenen Flüssigkeit ist der Druck an allen Stellen und in alle Richtungen gleich groß.

Bemerkung

Das Pascal'sche Prinzip gilt nur, wenn man die Gewichtskraft der Flüssigkeit nicht berücksichtigt.

Druck, Auflagedruck

Definition

Der Druck p ist der Quotient aus dem Betrag F der senkrecht auf eine Fläche wirkenden Kraft und dem Flächeninhalt A der Fläche.

Formel

$$p = \frac{F}{A}$$

Einheit

$$[p] = \frac{N}{m^2}$$

oder

$$[p] = Pa$$

$$Pa,\ Pascal$$

Manometer

Zum Messen des Drucks benutzt man einen: *Manometer*.

Schweredruck, hydrostatischer Druck

Der Druck, der in einer bestimmten Tiefe in einer Flüssigkeit herrscht, bezeichnet man als hydrostatischen Druck oder Schweredruck.

Herleitung

Man kann eine Formel herleiten, die es erlaubt, den Schweredruck in einer beliebigen Flüssigkeit und in einer bestimmten Tiefe zu berechnen.

Der Druck p in der Tiefe h entsteht durch die Gewichtskraft F_G der oberen Flüssigkeitssäule auf die Trennfläche A zur unteren Flüssigkeitssäule.

Sei m die Masse der Flüssigkeit über der Trennfläche A.

Für den Druck gilt:

$$\begin{aligned} p &= \frac{F_G}{A} \\ &= \frac{m \cdot g}{A} \\ &= \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} \\ &= \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} \\ &= \rho \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

Formel

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

Kommunizierende oder verbundene Gebiete

Definition

Als kommunizierende oder verbundene Gefäße bezeichnet man nach oben offene Gefäße beliebiger Form, die miteinander verbunden sind.

In kommunizierende oder verbundene Gefäße stehen gleiche Flüssigkeiten gleich hoch.

FORMELSAMMLUNG WÜRFE

Senkrechter Wurf

s-t-Gesetz:

$$s_x(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

v-t-Gesetz:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t$$

$$\frac{d}{dt} s_x(t)$$

Steigzeit:

$$t_h = \frac{v_0}{g}$$

Wurfhöhe:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Wurfdauer:

$$t_e = \frac{2v_0}{g} = 2t_h$$

Endgeschwindigkeit:

$$v_e = -v_0$$

Waagerechter Wurf

$$s_x = v \cdot t$$

$$s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_x = v_0$$

$$v_y = g \cdot t$$

Wurfparabel:

$$s_y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot s_x^2$$

Wurfweite:

$$s_{xw} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v_0$$

Wurfzeit:

$$t_w = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Bahngeschwindigkeit:

$$= \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}$$

<u>Schrägerwurf Wurf</u>

Wurfparabel:

$$s_y = s_x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot s_x^2$$

Wurfweite:

$$s_{xw} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2g}$$

Steighöhe:

$$s_{xm} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Wurfzeit:

$$t_w = \frac{2v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha) + [v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t]^2}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

GRUNDLAGEN MECHANIK

Kraft

Definition

Als Kraft bezeichnet man jedliche Ursache, die:

- den Bewegungszustand eines Körpers ändert;
- die Form eines Körpers ändert.

Formelzeichen

$$F$$

Einheit

$$[F] = N$$

Newton

Definition

Wenn die Geschwindigkeit eines Körpers mit einem Kilogramm in einer Sekunde um ein Meter pro Sekunde ändert, so wirkt auf den Körper eine Kraft von einem Newton.

Bemerkung

Das Messgerät für die Kraft ist das : *Dynamometer* oder *Federkraftmesser*

Trägheitssatz

Definition

Jeder Körper behaart in Zustand der Ruhe oder der geradlining gleichförmigen Bewegung, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn wirken oder die Wirkung der Kräfte

sich ausgleichen.

Trägheit

Definition

Die Trägheit ist die Eigenschaft von Körpern sich Änderungen des Bewegungszustandes zu widersetzen. Die Masse ist eine Messung für die Trägheit.

Wechselwirkungsprinzip, Reaktionsprinzip, Actio-Reactio

Definition

Übt der Körper A eine Kraft $\overrightarrow{F_A}$ (actio) auf den Körper B aus, so übt Körper B auf Körper A die Gegenkraft $\overrightarrow{F_B}$ (reactio) aus. Dabei sind Kraft und Gegenkraft gleich groß, aber genau entgegengesetzt gerichtet. Es gilt:

$$\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$$

Schwerkraft

Definition

Die Schwerkraft gibt an, mit welcher Kraft ein Körper von der Erde oder einem anderen Himmelskörper angezogen wird. Sie ist zum Mittelpunkt der Erde beziehungsweise des Himmelskörpers gerichtet.

Gewichtskraft

Definition

Die Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ eines Körpers gibt an, mit welcher Kraft der Körper an seiner Aufhängung zieht oder auf seine waagerechte Unterlage drückt.

Fallbeschleunigung, Ortsfaktor

Definition

Die Fallbeschleunigung g ist eine Zahl die angibt wie viel Schwerkraft eine Masse eines Objektes erfährt.

Schwerelosigkeit

Schwerelos zu sein bedeutet nicht, dass man nicht mehr angezogen wird.

HOOK'SCHES GESETZ

Hook'sches Gesetz

Definition

Das Gesetz von Hook beschreibt die elastische Verformung von Festkörpern, wenn deren Verformung proportional zur einwirkenden Belastung ist.

Bemerkung

Oft wird beim hook'schen Gesetz von Federn geredet.

Federkonstante

Definition

Die Federkonstante D ist der Quotient aus der Kraft F und der Auslenkung s.

Formel

$$D = \frac{F}{s}$$

Einheit

$$[D] = \frac{N}{m}$$

IMPULS

Definition

Der Impuls p eines Körpers ist das Produkt aus seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit v.

Formel

$$p = m \cdot v$$

Vektoriell

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$$

Einheit

$$[p] = 1\frac{kg \cdot m}{s}$$

Stoßvorgänge Definitionen

1. ***Elastischer Stoß***

   Der Elastischer Stoß liegt vor, wenn sich die stoßenden Körper nach dem Stoß wieder trennen. Eine kurze Verbindung unter den Körpern existiert nur während des Stoßes

2. ***Unelastischer Stoß***

   Ein Unelastischer Stoß liegt vor, wenn die stoßemdem Körper beim Stoß verhaken oder verbinden und auch nach dem Zusammentreffen verbunden bleiben.

3. ***Zentraler Stoß***

   Ein Zentraler Stoß liegt vor, wenn sich die Schwerpunkte der stoßenden Körper entlang einer geraden Linie aufeinander zu bewegen.

Zentraler elastischer Stoß

Impulserhaltung

Beim zentralen elastischen Stoß ist der Gesamtimpuls vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß.

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p'}$$

Energieerhaltung

Beim zentralen elastischen Stoß ist die mechanische Energie E vor dem Stoß gleich der mechanischen Energie E' nach dem Stoß.

Geschwindigkeiten nach dem zentralen elastischen Stoß

Ein Körper der Masse m_1 stößt mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_1}$ gegen einen Körper der Masse m_2 welcher sich mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_2}$ bewegt.

Es sollen Formeln hergeleitet werden, welche es erlauben, die Geschwindigkeiten beider Körper mach dem Stoß ($\overrightarrow{v_1'}$ und $\overrightarrow{v_2'}$) in Abhängigkeit der Massen m_1 und m_2, sowie der Geschwindigkeiten $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ zu bestimmen. Wenn der Stoß eindimensional ablauft, so können die die Vektoren auf eine x-Achse projiziert werden, welche der Richtung der Bewegung der Körper entspricht.

Herleitung

Aus dem Impulserhaltungssatz ergibt sich entlang der x-Achse:

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} \ (1)$$

Energieerhaltungssatz:

$$E_{kin,1} + E_{kin,2} = E'_{kin,1} + E'_{kin,2} \ (2)$$

Mit der Definition des Impulses und der kinetischen Energie erhalten wir aus (1) und (2):

$$\begin{cases} m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x} & (3) \\ \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2x}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v'^2_{1x} + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v'^2_{2x} & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \left(v_{1x} - v'_{1x}\right) = m_2 \left(v'_{2x} - v_{2x}\right) \\ m_1 \left(v_{1x}^2 - v'^2_{1x}\right) = m_2 \left(v'^2_{2x} - v_{2x}^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{1x} - v'_{1x} = \frac{m_2}{m_1}(v'_{2x} - v_{2x}) & (5) \\ m_1 \left(v_{1x} - v'_{1x}\right)\left(v_{1x} + v'^{1x}\right) = m_2 \left(v'_{2x} - v_{2x}\right)\left(v'_{2x} + v_{2x}\right) & (6) \end{cases}$$

(5) in (6):

$$m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1}\left(v'_{2x} - v_{2x}\right)\left(v_{1x} + v'_{1x}\right) = m_2 \left(v'^{2x - v_{2x}}\right)\left(v'_{2x} + v_{2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow v_{1x} + v'_{1x} = v_{2x} + v'_{2x} \ \ (7)$$

(3) und (7):

$$\begin{cases} m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x} \\ v_{1x} + v'_{1x} = v_{2x} + v'_{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x} & (8) \\ m_2 v_{1x} + m_2 v'_{1x} = m_2 v_{2x} + m_2 v'_{2x} & (9) \end{cases}$$

(8) – (9):

$$m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} + m_2 v_{2x} - m_2 v'_{1x} = m_1 v'_{1x} - m_2 v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{1x}\left(m_1 + m_2\right) = m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} + 2 m_2 v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2\left(2 v_{2x} - v_{1x}\right)}{m_1 + m_2} \ \ (10)$$

(10) in (7):

$$v'_{2x} = v_{1x} + v'_{1x} - v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x} = v_{1x} + \frac{m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} + 2 m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} - v_{2x}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{1x} + m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} + 2 m_2 v_{2x} - m_1 v_{2x} - m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x} = \frac{m_2 v_{2x} + 2 m_1 v_{1x} - m_1 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow v'_{2x} = \frac{m_2 v_{2x} + m_1(2v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeiten der Körper nach dem zentralen elastischen Stoß:

$$v'_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2(2v_{2x} - v_{1x})}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{2x} = \frac{m_2 v_{2x} + m_1(2v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}$$

Zentraler unelastischer Stoß

Impulserhaltung

Beim zentralen elastischen Stoß ist der Gesamtimpuls vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß.

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p'}$$

Energieveränderung

Beim zentralen elastischen Stoß ist die mechanische Energie E vor dem Stoß größer als die mechanische Energie E' nach dem Stoß. Beim Verhaken der Körper geht mechanische Energie durch Verformungsarbeit verloren.

Herleitung der Energieveränderung

Die Änderung oder Abnahme der kinetischen Energie ΔE_{kin} beim unelastischen Stoß entspricht der Differenz zwischen gesamter kinetischer Energie nach dem Stoß und gesamter kinetischer Energie vor dem Stoß. Sie entspricht dem Betrag der Zunahme der thermischen Energie der Körper:

$$\Delta E_{kin} = E'_{kin} + E_{kin}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{kin} = E'_{kin1} + E'_{kin2} - E_{kin1} - E_{kin2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\overrightarrow{v'}^2 - \frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1}^2 - \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = (m_1+m_2)\frac{\left(m_1\overrightarrow{v_1}+m_2+\overrightarrow{v_2}\right)^2}{(m_1+m_2)^2} - m_1\overrightarrow{v_1}^2 - m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{\left(m_1\overrightarrow{v_1}+m_2+\overrightarrow{v_2}\right)^2}{m_1+m_2} - m_1\overrightarrow{v_1}^2 - m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 + m_2^2\overrightarrow{v_2}^2 + 2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}}{m_1+m_2} - m_1\overrightarrow{v_1}^2 - m_2\overrightarrow{v_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 + m_2^2\overrightarrow{v_2}^2 + 2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} - (m_1+m_2)m_1\overrightarrow{v_1}^2 - (m_1+m_2)m_2\overrightarrow{v_2}^2}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 + m_2^2\overrightarrow{v_2}^2 + 2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} - m_1^2\overrightarrow{v_1}^2 - m_1m_2\overrightarrow{v_1}^2 - m_1m_2\overrightarrow{v_2}^2 - m_2^2\overrightarrow{v_2}^2}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} - m_1m_2\overrightarrow{v_1}^2 - m_1m_2\overrightarrow{v_2}^2}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{-\left(-2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} + m_1m_2\overrightarrow{v_1}^2 + m_1m_2\overrightarrow{v_2}^2\right)}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta E_{kin} = \frac{-m_1m_2\left(\overrightarrow{v_1}^2 + \overrightarrow{v_2}^2 - 2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}\right)}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{kin} = \frac{1}{2}\frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}\cdot\left(\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}\right)^2$$

Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p'}$$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{v'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v'} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1+m_2}$$

Spezialfall: $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_1}$ ***und*** $m_1 = m_2$

Beide Körper besitzen die gleiche Masse m und stoßen mit gleicher jedoch entgegengesetzter Geschwindigkeit aufeinander.

$$\overrightarrow{v'} = \frac{m\overrightarrow{v_1} + m\overrightarrow{v_2}}{m+m} = \frac{m\overrightarrow{v_1} - m\overrightarrow{v_1}}{2m} = \overrightarrow{0}$$

Die gesamte kinetische Energie, die vor dem Stoß vorhanden war, hat sich somit während des Stoßes in thermische Energie umgewandelt.

Impulserhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Impulse p vor dem Stoß gleich der Summe der Impulse p' nach dem Stoß. Der Gesamtimpuls bleibt erhalten.

$$\sum \overrightarrow{p} = \sum \overrightarrow{p'}$$

Zentraler elastischer Stoß gegen einen ruhenden Körper

Impulserhaltungssatz

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_1}' + \overrightarrow{p_2}'$$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v_1}' + m_2\overrightarrow{v_2}' \ (1)$$

Energieerhaltungssatz

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1^2} + 0 = \frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1^2}' + \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_2^2}' \ (2)$$

Herleitung der Geschwindigkeiten

Wir erhalten ein System mit 2 Gleichungen und 2 unbekannten : $\overrightarrow{v_1}'$ und $\overrightarrow{v_2}'$.

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v_1}' + m_2\overrightarrow{v_2}' \ (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1^2} + 0 = \frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1^2}' + \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_2^2}' \ (2)$$

(1) wird nach $\overrightarrow{v_1}'$ umgestellt und in (2) eingesetzt.

Substitutionsmethode:

$$\overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_1} - \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{v_2}' \ (*)$$

und

$$m_1 \cdot \left(\overrightarrow{v_1} - \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{v_2}'\right)^2 + m_2\overrightarrow{v_2}^{2\prime} = m_1\overrightarrow{v_1}^2$$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{v_1}^2 + m_1\frac{m_2^2}{m_1^2}\overrightarrow{v_2}^{2'} - 2m_1\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}' + m_2\overrightarrow{v_2}^{2'} = m_1\overrightarrow{v_1}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_2^2}{m_1}\overrightarrow{v_2}^{2\,\prime} - 2m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}' + m_2\overrightarrow{v_2}'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}'^2\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) - 2m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}' = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}'\left[\overrightarrow{v_2}'\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) - 2m_2\overrightarrow{v_1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = 0 \ oder \ \overrightarrow{v_2}'\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) - 2m_2\overrightarrow{v_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_2\overrightarrow{v_1}}{\frac{m_2^2}{m_1} + m_2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_2}{m_2\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)}\overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2}{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_1}$$

Um $\overrightarrow{v_1}'$ zu bestimmen wird die soeben gefundene Gleichung $(*)$ eingesetzt:

$$\overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_1} - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_1} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{v_1} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1 + m_2 - 2m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

Wir erhalten also:

$$\overrightarrow{v_2}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{v_1}$$

und

$$\overrightarrow{v_1}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

Spezialfälle der Stoßvorgänge

1. ***Spezialfall:*** $m_1 = m_2$

   Der stoßende und ruhende Körper besitzen die gleiche Masse m. In diesem Fall vereinfachen sich die Formeln zu:

   $$\overrightarrow{v_1}' = \frac{m - m}{m + m} \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$$

   und

   $$\overrightarrow{v_2}' = \frac{2m}{m + m} \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1}$$

2. ***Spezialfall:*** $m_1 > m_2$

Die Masse des stoßenden Körpers ist größer als die Masse des ruhenden Körpers. In diesem Fall gilt:

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} > 0$$

und

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} > 0$$

Daher kann man schlussfolgern, dass sich beide Körper nach dem Stoß in die Richtung des stoßenden Körpers bewegen.

3. ***Spezialfall:*** $m_1 < m_2$

   Die Masse des stoßenden Körpers ist kleiner als die Masse des ruhenden Körpers. In diesem Fall gilt:

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} < 0$$

und

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} < 0$$

Daher kann man schlussfolgern, dass der stoßende Körper sich nach dem Stoß in Richtung des ursprünglich stoßenden bewegt.

4. ***Spezialfall:*** $m_2 >> m_1$

   Die Masse des ruhenden Körpers ist viel größer als die Masse des stoßenden Körpers. In den Formeln kann dann m_1 vernachlässigt werden und man findet:

$$\vec{v_2}' = \frac{2 \cdot 0}{m_2}\vec{v_1} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v_2}' = \vec{0}$$

und

$$\overrightarrow{v_1}' = \frac{0 - m_2}{0 + m_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}' = -\overrightarrow{v_1}$$

In diesem Fall wird der erste Körper beim Stoß reflektiert; der zweite bleibt in Ruhe.

KINEMATIK

Trägheitsprinzip

Definition

Ein sich selbst überlassener Körper bewegt sich ohne äußere Einwirkung geradlining gleichförmig oder bleibt in Ruhe.

Inertialsysteme

Definition

Inertialsysteme sind Bezugssysteme, in denen ein kräftefreier Körper in Ruhe oder in geradlining gleichförmiger Bewegung verharrt und dem Trägheitsprinzip gehorcht. In beschleunigten Bezugssystemen gilt das Trägheitsprinzip nicht.

Bemerkung

Es gibt unendlich viele gleichberechtigte Inertialsysteme. Es existiert kein absoluter Ruhezustand.

Geschwindigkeit

Definition

Unter der Geschwindigkeit v versteht man das Verhältnis des zurückgelegten Weges s zu der dafür benötigten Zeit t (Die Geschwindigkeit ist die Positionsänderung pro Zeiteinheit):

Formel

$$v = \frac{s}{t}$$

Einheit

$$[v] = \frac{m}{s}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

Definition

Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird bestimmt, indem der gesamte zurückgelegte Weg s durch die dafür benötigte Zeit t geteilt wird.

Formel

$$\bar{v} = v_d = \frac{s}{t}$$

Momentangeschwindigkeit

Definition

Die Momentangeschwindigkeit ist die mittlere Geschwindigkeit in einem sehr kurzen Weg - und Zeitintervall.

Formel

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Beschleunigung, Verzögerung

Definition

Die Beschleunigung oder Verzögerung ist das konstante ändern der Geschwindigkeit Δv über einen Zeitraum Δt.

Formel

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Einheit

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$

Anmerkung

Da bei Verzögerung die Geschwindigkeit sich verlangsamt erhält man eine negative Beschleunigung.

Gradlinige gleichförmige Bewegung

Definition

Eine Körperbewegung ist gleichförmig wenn in gleichen, beliebigen Zeitabschnitten Δt stets gleiche Wegabschnitte zurückgelegt werden.

$$s = v \cdot t$$
$$v = konstant$$
$$a = 0$$

Gradlinig gleichförmig beschleunigte Bewegung

Beschleunigung ändert sich der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit.

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$
$$v = a \cdot t + v_0$$
$$a = konstant$$

Torricelli-Formel

Herleitung

Die Gleichung, welche im folgenden hergeleitet wird, dient zu Berechnungen, wenn die Zeit t nicht bekannt ist. Sie wird aus den Gleichungen eliminiert.

Weg-Zeit-Gesetz:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{1} \cdot a \cdot t^2 \ (1)$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$v = v_0 + a \cdot t \ (2)$$

Aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz (2) erhalten wir nach t umgestellt:

$$t = \frac{v - v_0}{a} \ (3)$$

(3) in (1):

$$s = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{1} \cdot a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{v \cdot v_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v^2 - 2v \cdot v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{2v \cdot v_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2v \cdot v_0 + v_0^2}{2a}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Leftrightarrow v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

Formel

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

KREISBEWEGUNGEN

Winkelgeschwindigkeit, Drehfrequenz

Definition

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist der Quotient aus dem durchlaufenden Drehwinkel $\Delta\varphi$ und dem dafür benötigten Zeitintervall Δt.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$[\Delta\varphi] = rad$$

$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

Anmerkung

Durch die Definition des Bogenmaβes oder Radianten erhält man:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

Bahngeschwindigkeit

Herleitung

Die Bahngeschwindigkeit v entspricht dem Quotienten aus dem zurückgelegten Bogenstück Δs und dem dafür benötigten Zeitintervall Δt.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$$

Definition

Die Bahngeschwindigkeit v ist das Produkt aus Bahnradius r und Winkelgeschwindigkeit ω.

$$v = r \cdot \omega$$

Periodendauer, Umlaufzeit

Die Umlaufzeit oder Periodendauer ist die benötigte Zeit T für einen Umlauf.

$$T = \frac{t}{n}$$

$$n,\ Anzahl\ an\ Umläufen$$

Einheit

$$[T] = s$$

Umdrehungsfrequenz, Drehzahl

Die Umdrehungsfrequenz oder Drehzahl f, gibt die Anzahl an Umläufen pro Sekunde an.

$$f = \frac{1}{T}$$

Einheit

$$[f] = Hz$$

$$Hz,\ Hertz$$

Zentripetalkraft

Die Zentripetalkraft ist die einzig wirkende Kraft, die den Körper auf der Kreisbahn hält. Sie wird bestimmt durch Anwenden des Grundgesetzes der Mechanik.

$$\overrightarrow{F_r} = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

Herleitung

In der Figur ist eine punktförmige Masse m die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ auf einer Kreisbahn bewegt mit Radius r und der Positionsänderung $\overrightarrow{\Delta r}$ in einem kleinen Zeitintervall Δt um den Winkel $\Delta\Theta$.

Da die Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ zu jedem Zeitpunkt die Tangente zur Kreisbahn ist, ist die Resultierende aus $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ zum Kreiszentrum gerichtet. Es gilt:

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{\Delta v}$$

und:

$$v = v_1 = v_2$$

Die Richtung von $\Delta\overrightarrow{v}$ ist radial und zum Kreiszentrum gerichtet. Sie entspricht die Winkelhalbierenden von $\Delta\Theta$ im inneren des Kreises. Durch Ähnlichkeit beider Dreiecke kann Thales angewendet werden:

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{r}\|}{r} = \frac{\|\ \Delta\overrightarrow{v}\ \|}{v}$$

$$\Leftrightarrow \|\Delta\overrightarrow{r}\| = \frac{r}{v} \cdot \|\ \Delta\overrightarrow{v}\ \| \quad (1)$$

Für Kleinwinkelnäherung:

$$\widehat{AB} = [AB]$$

Es gilt also:

$$\|\Delta\overrightarrow{r}\| \approx v \cdot \Delta t \ (2)$$

(1) gleich (2):

$$\frac{r}{v} \cdot \parallel \Delta\overrightarrow{v} \parallel \approx v \cdot \Delta t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\parallel \Delta\overrightarrow{v} \parallel}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$$

mit der Definition der Beschleunigung:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

Einsetzen:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Anmerkung

Die Zentripetalkraft ist immer zu dem Kreiszentrum hin gerichtet.

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Durch einsetzen der Formel der Bahngeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{r} | \; v = \omega \cdot r$$

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Durch einsetzen der Formel der Winkelgeschwindigkeit erhalten wir

$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r | \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_r = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$

REIBUNG

Ursprung der Reibung

Die Hauptursache für das Auftreten von Reibungskräften liegt in der Oberflächenbeschaffenheit der Körper. Diese Oberflächen sind mehr oder weniger rau. Auch bei scheinbar glatten Oberflächen bestehen mikroskopisch kleine Unebenheiten. Wenn Körper aufeinander liegen oder sich gegeneinander bewegen, so verhaken sich die Unebenheiten der Flächen. Ursache für die Rollreibung ist das Verformen des Körpers auf dem der Körper abrollt.

Normalkraft

Definition

Die Kraft mit der ein Körper senkrecht auf seine Unterlage drückt wird als Normalkraft $\overrightarrow{F_N}$ bezeichnet. Wenn ein Körper auf einer waagerechten und horizontalen Fläche steht, ist die Normalkraft gleich der Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$.

Reibungskoeffizient

Die Reibungskoeffizienten sinn abhängig von den zwei Stoffen die aufeinander wirken. Die Reibungszahl ist eine Zahl, sie ist einheitslos.

Formelzeichen

$$\mu$$

$$[\mu] \rightarrow keine\ Einheit$$

$$\mu_{Haftreibung} > \mu_{Gleitreibung}$$

$$F_{Haftreibung} > F_{Gleitreibung}$$

Haftreibung

Definition

Die Haftreibungskraft F_{HR} ist direkt proportional zur Normalkraft F_N . Also gilt: $\frac{F_{HR}}{F_N} = konstant.$

Allgemein

Ist ein Körper in Ruhe so gilt:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Bei Haftreibung gilt dann, durch Actio-Reactio

$$F_{HR} = F$$

Maximale Haftreibung

$$F_{HR,max} = \mu_0 \cdot F_N$$

$$\mu_0,\ Haftreibungskoeffizient$$

Gleitreibung

Definition

Die Gleitreibungskraft F_{GR} ist direkt proportional zur Normalkraft F_N . Also gilt: $\frac{F_{GR}}{F_N} = konstant.$

Allgemein

Gleitreibung bedeutet dass der Körper sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt

$$\overrightarrow{v} = \ konstant$$

Der Körper kommt in Bewegung oder Gleitreibung erst wenn

$$F_{GR} \ > \ F_{HR}$$

also,

$$F = F_R = \mu \cdot F_N$$

$$\mu,\ Gleitreibungskoeffizient$$

Reibungskoeffizient

Formelzeichen

$$\mu$$

$$[\mu] \rightarrow keine\ Einheit$$

$$\mu_{Haftreibung} > \mu_{Gleitreibung}$$

$$F_{Haftreibung} > F_{Gleitreibung}$$

Die Haftreibung und Haftreibungskoeffizient sind also immer größer als die Gleitreibung oder der Gleitreibungskoeffizient.

Selbsthemmung auf der schiefen Ebene

Ist die Haftreibung größer oder gleich der Hangabtriebskraft so herrscht Selbsthemmung. Es herrscht also keine Bewegung, der Körper bewegt sich grade nicht nach oben und gerade nicht nach unten.

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Sigma F = 0$$

Reibung

Es herrscht maximale Haftreibung.

Suche nach maximalem Haftreibungswinkel α:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = \mu_0 \cdot F_N - F_g \cdot \sin(\alpha) & (1) \\ \Sigma F_y = F_N - F_g \cos(\alpha) & (2) \end{cases}$$

Aus (2):

$$F_N = F_g \cdot \cos(\alpha)\ (3)$$

(3) in (1):

$$\mu_0 \cdot F_g \cos(\alpha) - F_g \sin(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{F_g}_{>0} \cdot [\mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha)]$$

$$\Leftrightarrow \mu_0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu_0 = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{max} = \tan^{-1}(\mu_0)$$

Es herrscht Selbsthemmung wenn:

$$\alpha_{max} = \tan^{-1}(\mu_0)$$

FORMELSAMMLUNG STRAHLENOPTIK

Reflexionsgesetz

$$\alpha = \alpha'$$

Erklärungen

$$\alpha,\ Einfallswinkel$$

$$\alpha',\ Reflexionswinkel$$

Brechzahlen

$$n = \frac{c_0}{c}$$

Erklärungen

$$n,\ BrechzahleinesMediums$$

$$c_0,\ Lichtgeschwindigkeit\ im\ Vakuum$$

$$c,\ Lichtgeschwindigkeit\ im\ Medium$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

Brechungsgesetz

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

Erklärungen

$$n_1,\ BrechzahlimMedium1$$

$$n_2,\ Brechzahl\ im\ Medium2$$

$$\alpha,\ Einfallswinkel\ im\ Medium\ 1$$

$$\beta,\ Reflexionswinkel\ im\ Medium\ 2$$

Prisma

Ablenkung

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

Brechungswinkel

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2$$

Minimalablenkung

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$$

$$\beta = \beta_1 = \beta_2$$

$$\delta = 2 \cdot \alpha - \gamma$$

$$\gamma = 2 \cdot \beta$$

Erklärungen

$$\delta,\ Ablenkungswinkel$$

$$\alpha_1,\ Einfallswinkel$$

$$\alpha_2,\ Austrittswinkel$$

$$\beta_1,\ Brechungswinkel$$

$$\beta_2,\ Eintrittswinkel$$

$$\gamma,\ Brechenderwinkel$$

<u>Linsen</u>

Gesetz des Abbildungsmaßstabs

$$\Gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

Erklärungen

$$\Gamma,\ Abbildungsma\beta stab$$

$$G,\ Gegenstandsgr\ddot{o}\beta e$$

$$B,\ Bildgr\ddot{o}\beta e$$

g, *Gegenstandsweite*

b, *Bildweite*

f, *Brennweite*

FORMELSAMMLUNG WELLENOPTIK

Konstruktive Interferenz, Verstärkung

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$

Destruktive Interferenz, Auslöschung

$$\Delta s = (2K + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$

Resümierende Tabelle

Spalttyp	Verstärkung	Auslöschung	Gültigkeitsbedingung
Einfachspalt	$\sin(\alpha_k) = \frac{2k+1}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}$	$\sin(\alpha_k) = \frac{2k}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}$	$k \in \mathbb{Z}^*$
Doppelspalt	$\sin(\alpha_k) = \frac{2k}{g} \cdot \frac{\lambda}{2}$	$\sin(\alpha_k) = \frac{2k+1}{g} \cdot \frac{\lambda}{2}$	$k \in \mathbb{Z}$
Gitter	$\sin(\alpha_k) = \frac{2k}{g} \cdot \frac{\lambda}{2}$	-	$k \in \mathbb{Z}$

STRAHLENOPTIK

Reflektion

Es gibt 2 Arten von Reflektionen:

- Diffuse Reflektion
- Gesetzmäßige Reflektion

Reflektions Gesetz bei gemäßigter Reflektion

Der einfallende Strahl, das Lot und der reflektierte Strahl liegen in einer Ebene.

Der Einfallswinkel α ist gleich dem Reflektionswinkel α'

$$\alpha = \alpha'$$

Das Lot

Das Lot (oder Einfallslot) ist eine Hilfslinie, welche senkrecht zum Spiegel steht, in dem Punkt wo der einfallende Lichtstrahl auf den Spiegel trifft.

Reelles, Virtuelles Bild

Reelles Bild

Wenn das Bild mittels eines Schirmes aufgefangen werden kann, dann ist das Bild reell.

Virtuelles Bild

Wenn das Bild nicht mittels eines Schirmes aufgefangen werden kann, dann ist das Bild virtuell.

Brechungsindex

Die Lichtgeschwindigkeit ist in materiellen Medien kleiner als im Vakuum.

Die Lichtgeschwindigkeit ist eine der wenigen exakten Naturkonstanten.

$$\approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Der Brechungsindex n oder Brechzahl eines Mediums ist definiert als der Quotient aus der Lichtgeschwindigkeit c_0 im Vakuum und der Lichtgeschwindigkeit c im Medium.

Definition

$$n = \frac{Geschwindigkeit\ des\ Lichtes\ im\ Vakuum}{Geschwindigkeit\ des\ Lichtes\ im\ Medium}$$

$$n = \frac{c_0}{c}$$

Zusammenhang zwischen den Brechzahlen und den Lichtgeschwindigkeiten

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c_0}{c_2}}{\frac{c_0}{c_1}} = \frac{c_1}{c_2}$$

Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = konstant = \frac{n_1}{n_2}$$

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) \ = \ n_2 \cdot \sin(\beta)$$

$$\alpha,\ Winkel\ im\ Medium\ 1\ \ (Einfallswinkel)$$

$$\beta,\ Winkel\ im\ Medium\ 2\ \ (Brechungswinkel)$$

Prinzip von Fermat

Das Licht nimmt den Weg der am wenigsten Zeit beansprucht.

Brechungsgesetzes von Snellius

Herleitung

Um von A nach B zu gelangen folgt der Strahl dem Prinzip von Fermat, er nimmt den Weg den die geringste Zeit beansprucht.

$$t_{gesamt} = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{s_2}$$

Um die minimale Zeit zu bestimmen berechnen wir die Ableitung und stellen diese gleich null.

Laut Pythagoras gilt im Rechtwinkeligen Dreieck:

$$s_1 = \sqrt{x^2 + y_A^2}$$

$$s_2 = \sqrt{(x - x_B)^2 + y_A^2}$$

$$t'_{gesamt} = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y_A^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}}{c_2} \right)'$$

Berechnung der Ableitungen

$$A = \sqrt{x^2 + y_A^2} \;\rightarrow\; A' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}}$$

$$B = \sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2} \;\rightarrow\; B' = \frac{-(x - x_B)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}}$$

$$C = c_1 \;\rightarrow\; C' = 0$$

$$D = c_1 \;\rightarrow\; D' = 0$$

$$t'_{gesamt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2} \cdot c_1} + \frac{-x + x_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2} \cdot c_2}$$

$$= \frac{\sin(\alpha)}{c_1} - \frac{\sin(\beta)}{c_2}$$

Ein minimum liegt vor wenn die Ableitung gleich 0 ist.

$$t'_{gesamt} = \frac{\sin(\alpha)}{c_1} - \frac{\sin(\beta)}{c_2} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Daraus folgt das Brechungsgesetz von Snellius

$$\Longrightarrow n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

Totalreflektion

Bestimmung des Grenzwinkels

Mit dem Brechungsgesetz: $n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$

und $\alpha = \alpha_G \ \ (in\ Medium\ 1)$

und $\beta = 90^\circ \ \ (in\ Medium\ 2)$

Wir erhalten also aus dem Brechungsgesetz

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_G) = n_2 \cdot 1$$

$$\sin(\alpha_G) = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_G = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \beta_G$$

Bemerkung

Da die Sinusfunktion auf -1 bis 1 definiert ist, gibt es keinen Winkel den der Lichtstrahl einnehmen könnte; deshalb erhalten wir das Phänomen : *Totalreflektion*.

Planparallele Platte

Fällt ein Lichtstrahl senkrecht auf eine planparallele Platte, so geht der Stahl ungebrochen hindurch. Fällt er schräg auf, so erfährt er beim Durchgang eine Parallelverschiebung.

Herleitung

Wir wollen einen Ausdruck für die Parallelverschiebung d mit h und α und den Brechzahlen n_1 und n_2.

Im Dreieck ANC gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{AN}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{h}{\cos(\beta)}$$

Im Dreieck ABC gilt:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{d}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{d}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Suche nach einem Ausdruck für β

Brechungsgesetz:

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \beta = \sin^{-1}\left[\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin(\alpha)\right] \ (1)$$

$$AC = AC$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{\cos(\beta)} = \frac{d}{\sin(\alpha - \beta)} \ (2)$$

$$(2) \ in \ (1):$$

$$d = h \cdot \frac{\sin\left\{\alpha - \sin^{-1}\left[\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin(\alpha)\right]\right\}}{\cos\left\{\sin^{-1}\left[\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin(\alpha)\right]\right\}}$$

<u>Prisma</u>

Im Dreieck ABC:

Die Summe der Internen Winkeln beträgt $180°$:

$$(90° - \beta_1) + (90° - \beta_2) + \gamma = 180°$$

$$\Leftrightarrow 180° - \beta_1 - \beta_2 + \gamma = 180°$$

$$\Leftrightarrow -\beta_1 - \beta_2 + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \beta_1 + \beta_2$$

Im Punkt C:

Der platte Winkel beträgt $180°$:

$$(90° - \alpha_1) + \gamma + (90° - \alpha_2) + \delta = 180°$$

$$\Leftrightarrow 180° - \alpha_1 + \gamma - \alpha_2 + \delta = 180°$$

$$\Leftrightarrow -\alpha_1 + \gamma - \alpha_2 + \delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

Prismenwinkel, brechender Winkel

Definition

Der brechende Winkel γ ist der Winkel zwischen der Eintrittsfläche und der Austrittsfläche des Lichtstrahls.

Ablenkungswinkel, Gesamtablenkung

Definition

Der Ablenkungswinkel δ ist der Winkel zwischen dem einfallenden und dem austretenden Lichtstrahl.

Minimalablenkung in einem Prisma

Formel der Ablenkung

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

Herleitung

Um die Minimalablenkung δ_{min} zu bestimmen muss dei Ableitung einer Funktion in der δ vorhanden ist aufgestellt werden, und die gleich Null stellen:

Berechnung des Brechungsgesetzes an der Eintrittsfläche

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\beta_1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \sin^{-1}\left[\frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(\beta_1)\right]$$

Berechnung des Brechungsgesetzes an der Austrittsfläche

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\beta_1)$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \sin^{-1}\left[\frac{n_2}{n_1} \cdot \sin(\beta_2)\right]$$

$$mit\, \gamma = \beta_1 + \beta_2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \sin^{-1}\left[\frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\left(\gamma - \beta_1\right)\right]$$

Für die Ablenkung δ gilt also:

$$\delta = \sin^{-1}\left[\frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\left(\beta_1\right)\right] + \sin^{-1}\left[\frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\left(\gamma - \beta_1\right)\right] - \gamma$$

Für Minimalablenkung gilt:

$$\frac{d\delta}{d\beta_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \cos\left(\beta_1\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\beta_1\right)}} + \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \cos\left(\gamma - \beta_1\right) \cdot (-1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\gamma - \beta_1\right)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\left(\beta_1\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\beta_1\right)}} = \frac{\cos\left(\gamma - \beta_1\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\gamma - \beta_1\right)}}$$

Dies gilt nur wenn:

$$\cos\left(\beta_1\right) = \cos\left(\gamma - \beta_1\right)$$

$$und$$

$$\sin^2\left(\beta_1\right) = \sin^2\left(\gamma - \beta_1\right)$$

Die Gleichungen sind nur wahr wenn:

$$\beta_1 = \gamma - \beta_1$$

δ ist minimal wenn:

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{2}$$

Des weiteren gilt:

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \frac{\gamma}{2}$$

Das heißt der Strahlengang verläuft symmetrisch durch das Prisma.

Fraunhoferformel

Herleitung

$$\delta_{min} = 2 \cdot \alpha_1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\delta_{min} + \gamma}{2}$$

$$und$$

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2$$

Bei Minimalablenkung gilt:

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \frac{\gamma}{2}$$

Setzt man diese Gleichungen in das Brechungsgesetz ein, so ergibt dies:

$$\sin(\alpha_1) = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\delta_{min} + \gamma}{2}\right) = n \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min}+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Linsen

Eine Linse ist ein rotationssymmetrischer Körper der meist aus Glas oder Kunststoff hergestellt ist. Das optische Medium ist von zwei Kugelflächen begrenzt. Es ergeben sich zwei verschiedene Linsenarten.

Sammellinse, Konvexlinse

Es gibt:

1. Bikonvexlinsen

2. Plankonvexlinsen

3. Konkavkonvexlinsen

Skizzierung

Zerstreuungslinse, Konkavlinsen

Die Zerstreuungslinse, Konkavlinse ist in der Mitte dünner als am Rand.

Es gibt:

1. Bikonkavlinsen

2. Plankonkavlinsen

3. Konvexkonkavlinsen

Skizzierung

Hauptstrahlen bei Linsen

Brennpunkt

Ein Lichtbündel, welches parallel zur optischen Achse verläuft, wird nach dem Durchgang durch eine Sammellinse in einem Punkt gebündelt. Dieser Punkt wird Brennpunkt genannt.

Symmetrisch zum Mittelpunkt der Linse befindet sich der zweite Brennpunkt.

Brennweite

Die Distanz zwischen dem Mittelpunkt der Linse und dem Brennpunkt ist die Brennweite und wird mit dem Buchstaben f angeschrieben.

Sammellinse

Brennpunkte:

F_1 und F_2

Brennweite:

$OF_1 = OF_2 = f$

1. Ein Lichtstrahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, verläuft nach der Brechung durch den Brennpunkt F_1. Ein Achsenparallelstrahl wird zum Brennpunktstrahl gebrochen.

2. Ein Lichtstrahl, der durch den Brennpunkt F_2 verläuft, verläuft nach der Brechung parallel zur optischen Achse weiter. Ein Brennpunktstrahl wird zum Achsenparallelstrahl gebrochen.

3. Ein Lichtstrahl, der durch den Mittelpunkt O verläuft, verläuft in gerader Linie weiter. Ein Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen.

Zerstreuungslinse

Brennpunkte:

F_1 und F_2

Brennweite:

$OF_1 = OF_2 = f$

1. Ein Lichtstrahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, scheint nach der Brechung aus dem Brennpunkt F_1 zu kommen. Ein Achsenparallelstrahl wird zum Brennpunktstrahl gebrochen.

2. Ein Lichtstrahl, der durch den Brennpunkt F_2 verlaufen müsste, verläuft nach der Brechung parallel zur optischen Achse weiter. Ein Brennpunktstrahl wird zum Achsenparallelstrahl gebrochen.

3. Ein Lichtstrahl, der durch den Mittelpunkt O verläuft, verläuft in gerader Linie weiter. Ein Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen.

Bildentstehung an Linsen

1. ***reelle Bilder***

   Die Strahlen konvergieren hinter der Linse, somit können diese Bilder auf einem Schirm aufgefangen werden.

2. ***virtuelle Bilder***

   Die Strahlen divergieren hinter der Linse, somit können diese Bilder durch unser Auge erkannt werden, jedoch nicht auf einem Schirm sichtbar gemacht werden.

Ob reelle oder virtuelle Bilder entstehen, hängt von der Position des Gegenstandes zur Linse ab.

Es gilt:

$$F_1 \; und F_2 \;\; Brennpunkte$$

$$G, \; Gegenstandsgröße$$

$$B, \; Bildgröße$$

$$g, \; Gegenstandsweite$$

$$b, \; Bildweite$$

$$f, \; Brennweite$$

Bildkonstruktion Sammellinsen

Es gelten folgende Vorzeichenregeln:

1. ***Brennweite***

   Sammellinse: $f > 0$

   Zerstreuungslinse: $f < 0$

2. ***Gegenstand***

   reeller Gegenstand: $g > 0$ und $G > 0$

   virtueller Gegenstand: $g < 0$ und $G < 0$

3. ***Bild***

   reeller Bild: $b > 0$ und $B > 0$

   virtueller Bild: $b < 0$ und $B < 0$

Gegenstandsweite g	Bildweite b	Bildeigenschaften
$+\infty$	f	verkleinert, umgekehrt, reell
$+\infty > g > 2f$	$f < b < 2f$	verkleinert, umgekehrt, reell
$2f$	$2f$	gleich groß, umgekehrt, reell
$2f > g > f$	$2f > b > \infty$	vergrößert, umgekehrt, reell
f	$+\infty$	sehr groß, umgekehrt, reell
$f > g > 0$	$-\infty < b < 0$	vergrößert, aufrecht, virtuell
$g \to 0$	$b \to 0$	gleich groß, aufrecht, virtuell

Bildkonstruktion Zerstreuungslinsen

1. ***Bild***

   verkleinert; aufrecht, gerade; virtuell

Gegenstandweite	Bildweite
$+\infty > g > 0$	$-f < b < 0$

Sehwinkel

Der Sehwinkel ist der Winkel unter dem ein Beobachter einen Gegenstand sieht. Er wird mit ω bezeichnet.

Wir erhalten:

$$\frac{G}{g} = \tan(\omega)$$

Bei kleinen Winkeln erhalten wir durch Kleinwinkelnäherung (wenn ω in rad):

$$\omega = \frac{B}{b} = \frac{G}{g}$$

Einheit

Der Sehwinkel kann in rad oder in Sekunden s und Minuten min angegeben werden.

$$1^\circ = 60' \ (min)$$

$$1^\circ = 3600'' \ (s)$$

Abbildungsmaßstab

Herleitung

Da ähnliche Dreiecke:

$$\tan(\omega) = \frac{G}{g} = \frac{B}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

Abbildungsmaßstab

$$\Gamma = \left| \frac{B}{G} \right|$$

Der Abbildungsmaßstab gibt uns an, wie viel Mal das Bild größer als der Gegenstand ist und ist immer positiv.

Dioptrie

Oft wird nicht die Brennweite einer Linse angegeben, sondern ihre Brechkraft D in Dioptrien.

Formel

$$D = \frac{1}{f}$$

Einheit

$$[D] = \frac{1}{m} = 1dpt$$

Abbildungsgleichung

Herleitung

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{g-f} = \frac{b}{f}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{G} = \frac{f}{g-f} = \frac{b}{g}$$

$$\Leftrightarrow f \cdot g = b(g-f)$$

$$\Leftrightarrow f \cdot g = bg - bf$$

$$\Leftrightarrow fg + bf = bg$$

$$\Leftrightarrow f(b+g) = bg$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{bg}{(b+g)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{b}{bg} + \frac{g}{bg}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

WELLENOPTIK

Beugung des Lichts

Als Beugung bezeichnet man allgemein das Eindringen von Wellen in den geometrischen Schattenraum. Beugung tritt in Erscheinung, wenn die Ausdehnung l von Hindernissen oder Öffnungen sich der Wellenlänge des Lichtes annähert. Bei $\lambda \simeq l$ ist die Beugung besonders ausgeprägt.

Interferenz des Lichtes

Interferenz tritt auf, wenn zwei oder mehrere Wellen gleicher Frequenz an einem Ort zusammentreffen. Dabei addieren sich ihre Elongationen dieses Phänomen heiβt Superpositionsprinzip. Nach dem Zusammentreffen laufen die Wellen ungestört weiter. Je nach Gangunterschied Δs unterscheidet man zwischen:

1. Konstruktiver Interferenz oder Verstärkung

   Sie tritt auf wenn der Gangunterschied ein geradzahliges Vielfach der halben Wellenlänge ist.

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

2. Destruktive Interferenz oder Auslöschung

   Sie tritt dann auf, wenn der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist.

$$\Delta s = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Das Huygens'sche Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt von einer neuen kugelförmigen Elementarwelle. Durch Überlagerung oder Superposition sämtlicher Elementarwellen ergibt sich die Wellenfront.

Da die Elementarwelle kugelförmig ist, bildet sie ebenfalls eine rücklaufende Welle.

Interferenz des Lichtes am Doppelspalt

D, *Distanz Schirm Doppelspalt*

g, *Abstand zwischen Spalten*

α, *Beugungswinkel*

Zwei Strahlen, die mittig aus den Spalten kämen, formen diese Grafik. Der Gangunterschied zwischen beiden Strahlen ist also hier Δs. Wir erhalten die Formel:

$$\Delta s = g \cdot \sin(\alpha)$$

Verallgemeinerung der Formel

1. ***Bei*** $\alpha_1 = 0$

   Bei $\alpha = 0$ liegen beide Strahlen in Phase der Gangunterschied ist: $\Delta s = 0$

   Wir beobachten ein Helligkeitsmaximum nullter Ordnung $k = 0$, auch zentrales Maximum genannt.

$$\Delta s = 0 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

2. $\alpha_1 > \alpha_2$

   Wählen wir α_2 so, dass wir einen Gangunterschied von $\Delta s = \frac{\lambda}{2}$ erhalten, so legt die unterste Elementarwelle genau eine halbe Schwingung mehr als die oberste zurück. Die beiden Elementarwellen sind in Gegenphase zueinander und interferieren destruktiv. Wir beobachten ein Helligkeitsminimum nullter Ordnung $k = 0$.

$$\Delta s = 1 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

3. $\alpha_2 > \alpha_3$

   Hier liegen beiden Strahlen in Phase der Gangunterschied ist: $\Delta s = \lambda$

   Wir beobachten ein Helligkeitsmaximum erster Ordnung $k = 1$

$$\Delta s = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

4. $\alpha_3 > \alpha_4$

   Wählen wir α_4 so, dass wir einen Gangunterschied von $\Delta s = \frac{3\lambda}{2}$ erhalten, sind beide Elementarwellen sind in Gegenphase zueinander und interferieren destruktiv. Wir beobachten ein Helligkeitsminimum erster Ordnung $k = 1$.

$$\Delta s = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

5. $\alpha_4 > \alpha_5$

   Wenn α_5 einen Gangunterschied von $\Delta s = \frac{4\lambda}{2}$ entsteht konstruktive Interferenz wir beobachten ein Helligkeitsmaximum zweiter Ordnung $k = 2$.

$$\Delta s = 4 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Schlussfolgerungen

1. Beim kontinuierlichen Anstieg des Beugungswinkels wechseln sich helle und dunkle Streifen also regelmäßig ab.

2. Konstruktive Interferenz entsteht dann, wenn der Gangunterschied beider Elementarwellen ein geradzahliges Vielfache ist.

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

   Es gilt für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta s = g \cdot \sin(\alpha_k)\ (1)$$
$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}\ (2)$$

   (1) in (2):

$$\sin(\alpha_k) \cdot g = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_k) = \frac{2k}{g} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

3. Destruktive Interferenz entsteht dann, wenn der Gangunterschied beider Elementarwellen ein ungeradzahliges Vielfache ist.

$$\Delta s = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Es gilt für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta s = g \cdot \sin(\alpha_k)\ (1)$$

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}\ (2)$$

(1) in (2):

$$\sin(\alpha_k) \cdot g = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_k) = \frac{2k+1}{g} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

<u>Beugung und Interferenz am Einfachspalt</u>

$$D,\ Distanz\ Schirm\ Einfachspalt$$

$$l,\ Abstand\ der\ Öffnung$$

$$\alpha,\ Beugungswinkel$$

Nach dem Huygens'schen Prinzip sind alle Punkte der Spaltöffnung Zentren für Elementarwellen.

Es gilt:

$$\Delta s = \sin(\alpha) \cdot l$$

1. Bei $\alpha = 0$ liegen alle Strahlen in Phase der Gangunterschied ist: $\Delta s = 0$

   Wir beobachten ein Helligkeitsmaximum nullter Ordnung $k = 0$, auch zentrales Maximum genannt.

   Maximum:

$$\Delta s = 0 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

2. Bei noch größerem Beugungswinkel kann der Gangunterschied zwischen den Randstrahlen $\Delta s = \lambda$ betragen.

   Strahlen aus dem ersten Teilbündel interferieren destruktiv mit den Strahlen aus

dem zweiten Teilbündel, da diese $\frac{\lambda}{2}$ von einander entfernt sind.

Es bleiben also keine Strahlen die nicht destruktiv interferieren übrig kein Licht erreicht also den Schirm.

Minimum:

$$\Delta s = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

3. Wird α so groß, dass der Gangunterschied $\frac{3\lambda}{2}$ beträgt so interferieren nur 2 der 3 Teilbündel destruktiv.Es interferieren also Teilbündel 1 und Teilbündel 2 miteinander. Wir erhalten also $\frac{1}{3}$ des Lichtes am Schirm.

Maximum:

$$\Delta s = \frac{3\lambda}{2}$$

4. Wird α nun so groß, dass der Gangunterschied $\frac{4\lambda}{2}$ beträgt so interferieren Teilbündel 1 und 2 sowie 3 und 4 destruktiv miteinander. Wir erhalten also kein Licht auf dem Schirm in dieser Konfiguration.

Minimum:

$$\Delta s = 4 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Schlussfolgerungen

1. Beim kontinuierlichen Anstieg des Beugungswinkels wechseln sich helle und dunkle Streifen also regelmäßig ab.

2. Destruktive Interferenz entsteht dann, wenn der Gangunterschied beider Elementarwellen ein geradzahliges Vielfache ist.

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z}^*$$

Es gilt für $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$\Delta s = l \cdot \sin(\alpha_k)\ (1)$$

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}\ (2)$$

(1) in (2):

$$\sin(\alpha_k) \cdot l = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_k) = \frac{2k}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

3. Konstruktive Interferenz entsteht dann, wenn der Gangunterschied beider Elementarwellen ein ungeradzahliges Vielfache ist.

$$\Delta s = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z}^*$$

Es gilt für $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$\Delta s = l \cdot \sin(\alpha_k)\ (1)$$

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}\ (2)$$

(1) in (2):

$$\sin(\alpha_k) \cdot l = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_k) = \frac{2k+1}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Gitterkonstante

Ein Beugungsgitter besteht aus N parallelen Spaltöffnungen, deren Mittelpunkte den gleichen Abstand haben. Dieser Abstand wird Gitterkonstante genannt.

Bei einem Gitter wird oft die Anzahl n der Spalte in $\frac{1}{mm}$ angegeben. Dann beträgt die Gitterkonstante:

$$g = \frac{1}{n}$$

Beugung und Interferenz am Gitter

Bei $\alpha = 0°$ ist der Gangunterschied $\Delta s = 0$ alle Elementarwellen sind in Phase. Wir erhalten also konstruktive Interferenz.

Auf dem Schirm entsteht ein Hauptmaxima nullter Ordnung $k = 0$.

Ist α so groβ, dass der Gangunterschied $\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$ beträgt so sind alle Elementarwellen sind in Phase. Wir erhalten also konstruktive Interferenz.

Schlussfolgerungen

Konstruktive Interferenz bei:

$$\Delta s = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\Leftrightarrow g \cdot \sin(\alpha_k) = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

ergibt:

$$g \cdot \sin(\alpha_k) = \frac{2k}{g} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$

Gültigkeitsbedingung

Damit ein Hauptmaximum auf einem endlichen Schirm abgebildet werden kann muss $sin(\alpha_k) < 90^\circ$ oder $sin(\alpha_k) < \frac{\pi}{2}$ sein:

$$|\sin(\alpha_k)| < 1$$

$$\Leftrightarrow |\frac{2k}{g} \cdot \frac{\lambda}{2}| < 1$$

$$\Leftrightarrow |\frac{k\lambda}{g}| < 1$$

$$\Leftrightarrow |k| < \frac{g}{\lambda}$$

CINÉMATIQUE

La cinématique consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps.

Point dans l'espace

Définition

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k},\right)$ un repère d'espace orthonormé fixé au référentiel Γ. Le point M dans l'espace peut alors être repéré par le vecteur-position.

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes

Définition

x, y, z sont les coordonnées cartésiennes du point M.

Norme

Définition

La distance qui sépare M de O est donnée par

$$d = \| \overrightarrow{r} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Degrés de liberté

Si l'on veut préciser la position du point $M(x, y, z)$ dans l'espace sans ambiguïté, on est donc obligé de préciser les trois coordonnées cartésiennes de M. On dira que le point M, libre de se déplacer dans l'espace, possède trois degrés de liberté. D'une manière générale, le nombre de degrés de liberté d'un point correspond au nombre de paramètres qu'on doit préciser pour repérer sa position dans l'espace.

Vecteur-vitesse

Si le point M est en mouvement par rapport au référentiel Γ, son vecteur position dépend du temps t.

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{r}(t)$ est la représentation paramétrique de la trajectoire décrite par le point M.

Vecteur-vitesse moyenne

Supposons que pendant l'intervalle de temps Δt , le point mobile M avance de la position repérée par le vecteur $\overrightarrow{r}(t)$ vers la position $\overrightarrow{r}(t+\Delta t) = \overrightarrow{r}(t) + \Delta\overrightarrow{r}$. Dans ce

cas le mouvement effectué par M peut être caractérisé par le vecteur-vitesse moyenne:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{r}(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t}$$

Vecteur-vitesse instantanée

Si l'on veut connaître les caractéristiques du mouvement à la date précise t, on doit déterminer le vecteur-vitesse instantanée en M:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dot{\overrightarrow{r}}$$

Le vecteur-vitesse correspond à la dérivée du vecteur-position $\overrightarrow{r}$ du point M par rapport au temps.

Plus précisément :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Vecteur-accélération

Lorsqu'au cours du mouvement effectué par le point M son vecteur-vitesse instantané change de direction, de sens ou de norme, nous dirons que le mouvement est accéléré.

Vecteur-accélération moyenne

Le vecteur-accélération moyenne est donné par:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v}(t+\Delta t) - \overrightarrow{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

Vecteur-accélération instantanée

$$\overrightarrow{a}(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v}(t+\Delta t) - \overrightarrow{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \dot{\overrightarrow{v}}$$

Le vecteur-accélération à la date t correspond à la dérivée du vecteur-vitesse v par rapport au temps.

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix}$$

De plus:

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \ddot{\overrightarrow{r}}$$

De plus l'accélération est la norme du vecteur-accélération:

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}$$

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$

Mouvement curviligne et vecteur-accélération

Supposons que le point M décrit la trajectoire curviligne T. Le mouvement de M est accéléré. Intéressons- nous tout d'abord aux caractéristiques du vecteur-accélération moyenne entre les dates et t et $t + \Delta t$:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v}(t+\Delta t) - \overrightarrow{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

Dans le cas d'un mouvement curviligne, le vecteur-accélération est toujours orienté vers la concavité de la trajectoire.

Si le point mobile passe par le point b de la trajectoire curviligne T à la date t. On admet que T est située intégralement dans le plan formé par l'axe des X et l'axe des Y. Le vecteur-vitesse instantanée $\overrightarrow{v}$ est porté par la tangente à la trajectoire en b et le

vecteur-accélération instantanée $\overrightarrow{a}$ est orienté vers la concavité de la trajectoire. Nous allons décomposer le vecteur $\overrightarrow{a}$ dans la base de *Frenet* formée par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{t_u}$ et $\overrightarrow{n_u}$:

$$\overrightarrow{a} = a_t\overrightarrow{t_u} + a_n\overrightarrow{n_u} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$

<u>On définit:</u>

- $\overrightarrow{t_u}$, est le vecteur directeur unitaire de la tangente à la trajectoire en b
- $\overrightarrow{n_u}$ est le vecteur directeur unitaire de la normale à la trajectoire en b
- $\overrightarrow{n_u}$ est orienté vers le centre de courbure c de la trajectoire au voisinage du point b
- $\overrightarrow{a_t} = a_t\overrightarrow{t_u}$: composante tangentielle du vecteur-accélération qui décrit la variation de la vitesse par seconde.
- $\overrightarrow{a_n} = a_n\overrightarrow{n_u}$: composante normale du vecteur-accélération qui décrit la variation de la direction du vecteur-vitesse par seconde

<u>L'accélération tangentielle et l'accélération normale</u>

Démonstration

Exprimons le vecteur-vitesse $\overrightarrow{v}$ dans la base de Frenet:

$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{t_u}$$

De plus, le vecteur-accélération peut s'écrire sous forme

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\overrightarrow{t_u}\right) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{t_u} + v\frac{d\overrightarrow{t_u}}{dt}$$

La base de Frenet représente un outil approprié à l'étude du comportement local d'une trajectoire. Elle est fixée au point mobile qui décrit la trajectoire. Dans le cas

où la trajectoire est courbe, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{t_u}$ et $\overrightarrow{n_u}$ changent continuellement de direction si le point mobile avance le long de la trajectoire. $\overrightarrow{t_u}$ et $\overrightarrow{n_u}$ dépendent donc du temps. Leurs dérivées par rapport au temps ne s'annulent pas.

Cherchons: $\frac{d\overrightarrow{t_u}}{dt}$

Par rapport à la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$\overrightarrow{t_u} = \cos(\beta)\overrightarrow{i} + \sin(\beta)\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{n_u} = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j}$$

$$= -\sin(\beta)\overrightarrow{i} + \cos(\beta)\overrightarrow{j}$$

où β désigne l'angle entre l'axe des X et la tangente à la trajectoire en b. Comme les vecteurs unitaires et $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont indépendants du temps, et β varie continuellement lorsque le point mobile avance le long de la trajectoire.

$$\frac{d\overrightarrow{t_u}}{dt} = -\sin(\beta)\frac{d\beta}{dt}\overrightarrow{i} + \cos(\beta)\frac{d\beta}{dt}\overrightarrow{j} = \frac{d\beta}{dt}\overrightarrow{n}$$

Ainsi le vecteur $\frac{d\overrightarrow{t_u}}{dt}$ est normal à la tangente à la trajectoire en b.

Admettons que pendant le laps de temps dt le point mobile avance de b vers b'. L'arc de cercle infinitésimal s'exprime par:

$$\widehat{bb'} = \rho \cdot d\beta$$

Il suit:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\widehat{bb'}}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

et

$$\frac{d\overrightarrow{t_u}}{dt} = \frac{v}{\rho}\overrightarrow{n_u}$$

Finalement:

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{t_u} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n_u}$$

En comparant à l'équation $\overrightarrow{a} = a_t\overrightarrow{t_u} + a_n\overrightarrow{n_u}$ nous trouvons:

ÉLECTROSTATIQUE

Loi de Coulomb

Considérons deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 séparées par une distance r. Pour fixer les idées nous admettons que $q_1 > 0$ et $q_1 < 0$. Suivant Coulomb les deux charges ponctuelles s'attirent mutuellement par des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ dirigées suivant la droite qui relie q_1 et q_2. Les deux forces d'interaction qui obéissent au principe de l'action et de la réaction $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$ ont une norme commune $F = F_1 = F_2$ telle que

$$F \sim q_1 \cdot q_2$$

et que

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

On obtient donc:

$$F \sim \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Introduisons le facteur de proportionnalité k:

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

et vectoriellement:

$$\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2} = F\frac{\overrightarrow{r}}{r} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

Champ électrique

Plaçons la charge ponctuelle $Q > 0$ en l'origine O d'un repère d'espace vide. La charge Q modifie les propriétés physiques de l'espace. En effet, si nous plaçons une

charge témoin ponctuelle $q_0 > 0$ en un point repéré par le vecteur-position $\overrightarrow{r}$, q_0 est libre en l'absence de Q ; par contre, en présence de la charge Q , la charge témoin subit la force de Coulomb:

$$\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

Pour décrire les propriétés de l'espace modifiées par la charge Q , nous associons à tout point de l'espace un champ électrique caractérisé par le vecteur:

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) = \lim_{q_0 \to 0}\frac{\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}\right)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

Remarque

Dans la définition du champ électrique nous exigeons $q \to 0$ pour garantir que la charge témoin ne perturbe pas substantiellement le champ électrique créé par la charge source Q.

Unité

$$[E] = \frac{[F]}{[q_0]} = \frac{N}{C}$$

ou bien:

$$[E] = \frac{V}{m}$$

Champ électrique créé par une distribution de charges ponctuelles discrètes

Considérons la distribution de n charges ponctuelles discrètes.

Cette accumulation de charges est source d'un champ électrique qui existe en tout point de l'espace. Pour déterminer les caractéristiques de ce champ électrique au point repéré par le vecteur-position $\overrightarrow{r}$, nous plaçons en ce point la charge témoin q_0 et appliquons le principe de superposition pour déterminer la force électrique résultante agissant sur q_0:

$$\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}\right) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}\left(\overrightarrow{r}\right)$$

avec

$$\overrightarrow{F_i}\left(\overrightarrow{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i q_0}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}\|^2}\frac{\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}\|}$$

ainsi

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) = \frac{\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}\right)}{q_0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}\|^2}\frac{\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}\|}$$

et

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{E_i}\left(\overrightarrow{r}\right)$$

À l'image des forces électriques, les champs électriques obéissent eux aussi à un principe de superposition.

Champ électrique créé par une distribution de charge continue

Pour déterminer le champ électrique créé par le nuage chargé au point repéré par le vecteur-position $\overrightarrow{r}$, nous décomposons la distribution de charge continue en des éléments de volume $d\tau$ infinitésimaux, assimilables à des charges ponctuelles.

La contribution de la charge infinitésimale $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)$ à l'endroit $\overrightarrow{r'}$ au champ électrique en $\overrightarrow{r}$ est donnée par:

$$d\overrightarrow{E'}\left(\overrightarrow{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)d\tau}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}\|^2}\frac{\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_i}\|}$$

Le champ électrique total en $\overrightarrow{r}$ est obtenu en appliquant le principe de superposition : nous intégrons les contributions des différents éléments de volume qui forment la distribution de charge :

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right)=\iiint\limits_{\substack{\text{distribution}\\ \text{de charge}}} d\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right)$$

Représentation d'un champ électrique par des vecteurs

Pour visualiser le champ électrique associé à une charge ou une distribution de charges, on peut représenter les vecteurs $\overrightarrow{E}$ en différents points de l'espace. Illustrons la méthode, si la charge-source est la charge ponctuelle $Q>0$.

Il s'agit d'un champ électrique radial à symétrie sphérique : $E = E(r)$. Les vecteurs $\overrightarrow{E}$ divergent de la charge-source positive Q.

Remarque

Si $Q < 0$, les vecteurs champ électrique convergeraient vers Q.

Représentation par des lignes de champ

Définition

Une ligne de champ électrique est une courbe dans l'espace qui possède la propriété qu'en chacun de ses points la direction du champ électrique correspond à la direction de la tangente à la ligne de champ au point considéré.

À toute charge ou répartition de charges correspond un spectre de lignes de champ électrique. Les lignes de champ sont orientées : par convention elles partent des charges positives pour rentrer sur les charges négatives.

Énergie potentielle électrostatique

Considérons la situation à l'instant où la charge Q_2 se trouve à la distance r de Q_1 . La charge Q_2 subit l'action de la force électrique $\overrightarrow{F_{\acute{e}}l}$. Si elle se déplace à vitesse constante, l'expérimentateur $\overrightarrow{F_exp} = -\overrightarrow{F_{\acute{e}}l}$ exerce la force. Pour réduire la distance entre les deux charges à R, il doit effectuer le travail:

$$W_{exp} = \int_{\infty}^{R} \overrightarrow{F_{exp}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

$$= \int_{R}^{\infty} \overrightarrow{F_{él}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R}$$

L'énergie potentielle électrostatique emmagasinée dans le champ électrique de la configuration de charges (Q_1, Q_2) vaut ainsi:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R}$$

FORMELSAMMLUNG QUANTENMECHANIK

Photonenenergie

$$E = h \cdot f$$

$$h \cdot f = W_A + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Elektrische Energie

$$E_{elektrisch} = Q \cdot U$$

Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Bohr'sche Quantenbedingung

$$m_e \cdot r \cdot v = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

oder

$$m_e \cdot r \cdot v = n \cdot \hbar$$

Coulombkraft im Wasserstoffatom

$$F_{elektrisch} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{r^2}$$

Potentielle elektrische Energie

$$E_{potentiel} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Gesamtenergie des Elektrons im Wasserstoffatom

$$E_{gesamt} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Bohr'sche Radius im Wasserstoffatom

$$r_n = \frac{h^2 \cdot \varepsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2$$

und

$$r_n = r_1 \cdot n^2$$

Energie des Elektrons im Wasserstoffatom

$$E_n = E_1 \cdot \frac{1}{n^2}$$

wobei: $E_1 = 13,6eV$

oder:

$$E_n = -\frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

QUANTENMECHANIK

Etymologie

Das Word Quantenmechanik setzt sich zusammen aus dem Wort Quantität und Mechanik.

In der Quantenmechanik wird, anders wie in dem Alltag, die Energie nicht kontinuierlich sondern in Portionen abgegeben. Diese werden Energiequanten oder Energieportionen genannt.

Photoeffekt, lichtelektrischer Effekt, photoelektrischer Effekt

Der Photoeffekt, behandelt das Freisetzen von Elektronen aus einem Metall, wenn diese von elektromagnetischer Strahlung getroffen wird.

Versuch

Eine negativ geladene Metallplatte wird mit elektromagnetischer Strahlung bestrahlt. Die elektromagnetische Strahlung wird bei dem Versuch von einer Quecksilberdampflampe geliefert. Dieses Licht besteht aus: sichtbarem Licht sowie ultraviolettem Licht. Dabei entlädt sich die Platte.

Bei dem Versuch ist die Lichtintensität irrelevant. Bei höherer Frequenz zum Beispiel Licht mit ultraviolettem Licht lösen sich dei Elektronen ab und sie entlädt sich.

Schlussfolgerung

Der Photoeffekt ist also abhänging von der Wellenlänge sowie der Frequenz der elektromagnetischen Strahlung, sowie Material. Und es gibt eine Grenzfrequenz f_G und auch eine Grenzwellenlänge λ_G. Der Photoeffekt ist jedoch nicht von der

Lichtintensität abhänging. Die Elektronen werden also abgestoβen in einem Stoβvorgang.

Gültigkeitsbedingungen

Sodass der Photoeffekt eintritt müssen:

$$f \geqslant f_G$$

und

$$\lambda \leqslant \lambda_G$$

Daher gilt:

$$\lambda_G = \frac{c}{f_G}$$

Photon, Lichtquant

Um den Photoeffekt zu erklären wurde das *Photon* postuliert. Dieses Teilchen erklärt nun den Stoβvorgang, das die Elektronen abstoβt. Es kann als Art: Energiebündel, gesehen werden. Die Energie des Photons E beträgt:

$$E = h \cdot f$$

mit

$$h,\ Planck - Konstante$$
$$h,\ 6,626 \cdot 10^{-34} Js$$

Siehe Naturkonstanten.

Prinzip der Gegenfeldmethode

Bei der Gegenfeldmethode wird eine Metallplatte mit Photonen beschossen. Mit einer gewissen Lichtintensität lösen sich durch einen Stoβvorgang zwischen den Photonen und Elektronen die Elektronen ab.

Herleitung

Die Elektronen haben beim Austreten folgende Energie:

$$E_{Photon} = W_A + E_{kin}$$
$$\Leftrightarrow h \cdot f = W_A + U_G \cdot |e|$$
$$\Leftrightarrow U_G \cdot |e| = h \cdot f - W_A$$
$$\Leftrightarrow U_G \cdot |e| = h \cdot f - W_A = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Für 2 verschiedene Punkte gilt:

$$U_{G1} \cdot |e| = h \cdot f_1 - W_A \ (1)$$
$$U_{G2} \cdot |e| = h \cdot f_2 - W_A \ (2)$$

$(1) - (2)$:

$$|e| \left(U_{G1} - U_{G2}\right) = h \cdot (f_1 - f_2)$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{|e| \left(U_{G1} - U_{G2}\right)}{f_1 - f_2}$$

<u>Impuls der Photonen</u>

Herleitung

Laut Relativitätstheorie gilt:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v = m \cdot v$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{p}{v} \ (1)$$

Und

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = m \cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{E}{c^2} \ (2)$$

$(1) = (2)$:

$$\frac{p}{v} = \frac{E}{c^2}$$

$$p = \frac{E \cdot v}{c^2}$$

mit: $E_{Photon} = h \cdot f$

$$p = \frac{h \cdot f \cdot v}{c^2}$$

Da $c = v$ und $\lambda = h \cdot f$

$$p = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{\lambda}{c}$$

Formel

$$p = \frac{\lambda}{c}$$

Welle-Teilchen-Dualismus der Elektronen

Der Welle-Teilchen-Dualismus des Elektrons bedeutet, dass das Elektron sich als Welle sowie auch als Teilchen verhalten kann.

De Broglie-Wellenlänge

Ein Teilchen mit dem Impuls p hat die Wellenlänge λ:

Formel

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

oder auch

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

De-Broglie-Wellenlänge in der Atomhülle

Bei stehenden Wellen um den Atomkern ist der Bahnumfang ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen ist zeitlich konstant.

Siehe Kapitel: Wellenlehre, um mehr über *stehende Wellen* zu erfahren.

Stehende Wellen entsprechen den möglichen stabilen Zuständen des Elektrons im Atom. Für diese Zustände gilt:

$$2\pi \cdot r = n \cdot \lambda$$
$$n,\ Quantenzahl$$

wobei:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

und

$$n \in \mathbb{N}$$

Bohr'sche Quantenbedingung

Herleitung

Es gilt:

$$2\pi \cdot r = n \cdot \lambda$$

$$\Leftrightarrow r \cdot p = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

mit: $p = m_e \cdot v$

$$\Leftrightarrow r \cdot m_e \cdot v = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

Bemerkung

Diese Formel wird oft mit $\hbar$ angegeben

$$r \cdot m_e \cdot v = n \cdot \hbar$$

Hierbei bedeutet $\hbar$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Geschwindigkeit der Elektronen im Bahnradius

Stellt man die Bohr'sche Quantenbedingung um nach der Geschwindigkeit v erhält man:

$$v = n \cdot \frac{h}{2\pi \cdot m_e \cdot r}$$

Ionisationsenergie im Wasserstoffatom

Herleitung

$$W = \int_r^{+\infty} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

$$= \int_r^{+\infty} \overrightarrow{-F_{el}} \cdot d\overrightarrow{r}$$

$$= \int_r^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \cdot dr$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_r^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r^2} \right]_r^{+\infty}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} > 0$$

Die verrichtete Arbeit bei der Ionisierung ist positiv das Elektron gewinnt also an potentieller Energie

Es gilt:

$$E_{potentiell,\infty} = E_{potentiell} + W$$

Gesamtenergie des Elektrons im Wasserstoffatoms

Es gilt:

$$E_{gesamt} = E_{kinetisch} + E_{potentiell}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$E_{gesamt} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Bahnradien im Bohr'schen Atommodell

Nach dem 1ten Bohrschen Postulat, bewegen sich Elektronen strahlungsfrei auf kreisförmigen Bahnen.

Also gilt:

$$F_{el} = F_r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = \frac{m_e \cdot v^2}{r} \ (1)$$

mit Quantenbedingung:

$$v = \frac{h \cdot n}{2\pi \cdot m_e \cdot r} \ (2)$$

(1) in (2)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = \frac{m_e \cdot h^2 \cdot n^2}{r^3 \cdot 4\pi^2 \cdot m_e^2}$$

Da $r \sim n$ schreibt man r_n

Umstellen:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m_e} \cdot n^2$$

Formel

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m_e} \cdot n^2$$

Bohr'scher Radius

Der Bohr'sche Radius ist $n = 1$. Setzt man für $n = 1$ die Relevanten Werte ein so erhält man einen Radius für das Wasserstoffatom im Grundzustand:

$$r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10} m$$

oder

$$r_1 = 0,529 \mathring{A}$$

Als Vereinfachung gilt für weitere Elektronenbahnen:

$$r_n = r_1 \cdot n^2$$

Diskrete Energiezustände

Da sich Elektronen nur auf bestimmten Bahnen bewegen, ergeben sich nur wenige Energiezustände.

Herleitung

Es gilt:

$$E_{gesamt} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

mit der Quantenbedingung:

$$v = \frac{h \cdot n}{2\pi \cdot m_e \cdot r} \ (2)$$

erhalten wir:

$$E_n = \frac{h^2 \cdot n^2}{8\pi^2 \cdot m_e \cdot r_n^2} - \frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0^2 \cdot r_n}$$

mit der Formel der Bahnradien:

$$r_n = \frac{h^2 \cdot \varepsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2$$

erhalten wir:

$$E_n = \frac{m_e \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2} - \frac{m_e \cdot e^4}{4\varepsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2}$$

$$\Leftrightarrow E_n = -\frac{m_e \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Wert

Setzt man in die Formel ein für $n = 1$

$$E_{n=1} = -\frac{m_e \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{1^2} = -\frac{m_e \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2} = 13,6eV$$

Für nachfolgende Elektronenbahnen oder Anregungszustände gilt:

$$E_n = -13,6eV \cdot \frac{1}{n^2}$$

Wasserstoffspektrum

Wenn ein Elektron nun sein Energieniveau ändert kann man folgende Formel verwenden:

$$\Delta E = E_{Ende} - E_{Anfang}$$

$$= -13,6eV \cdot \left(\frac{1}{n_{Ende}^2} - \frac{1}{n_{Anfang}^2} \right)$$

FORMELSAMMLUNG RELATIVITÄTSTHEORIE

Relativistischer Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

mit $\gamma \geqslant 1$

$$v, Geschwindigkeit$$

$$c_0, Lichtgeschwindigkeit\ im\ Vakuum$$

Zeitdilatation

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

$$\Delta t_0,\ Dauer\ eines\ Vorgangs\ im\ Ruhesystem$$

$$\Delta t,\ Dauer\ eines\ Vorgangs\ im\ bewegten\ System$$

Längenkontraktion

$$x = \frac{x_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$$

$$x_0,\ Länge\ im\ Ruhesystem$$

$$x,\ Länge\ im\ bewegtenSystem$$

Dynamische Masse

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

$$m_0,\ Masse\ im\ Ruhesystem$$

$$m,\ Masse\ im\ bewegtenSystem$$

Relativistische Form des Grundgesetzes der Mechanik

$$F = \frac{m_0 \cdot a}{\left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Relativistischer Impuls

$$\overrightarrow{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \overrightarrow{v} = \frac{m_0 \cdot \overrightarrow{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

Relativistische kinetische Energie

$$E_{kin} = m_0 \cdot c_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} - 1 \right)$$

Ruheenergie

$$E_0 = m_0 \cdot c_0^2$$

Relativistische Gesamtenergie eines bewegten Teilchens

$$E = E_0 + E_{kin} = m \cdot c_0^2 = \gamma \cdot m_0 \cdot c_0^2$$

RELATIVITÄTSTHEORIE

Relativitätsprinzip

Altes Relativitätsprinzip

Jede Bewegung spielt sich in allen Bezugssystemen so ab, als ob diese ruhen würden. Daher ist jede Bewegung relativ, da das jeweilige ruhende Bezugssystem frei gewählt werden kann.

Konsequenz

Es gibt keinen absoluten Ruhezustand.

Inertialsysteme

Inertialsysteme sind räumliche Bezugssysteme, in denen ein kräftefreier Körper in Ruhe oder in geradlinig gleichförmiger Bewegung verharrt.

Grundprinzipien

Relativitätsprinzip

Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit ist vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters unabhängig. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt in jedem Inertialsystem: $c_0 = 299\ 792\ 458 \frac{m}{s}$, siehe Naturkonstanten.

Relativistische Kinematik

Zeitdilatation

Herleitung

Wir unterscheiden zwischen: *ruhender Beobachter* und *bewegter Beobachter*

- **<u>ruhender Beobachter</u>**

$$2D = c_0 \cdot \Delta t_0$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{2} \cdot c_0 \cdot \Delta t_0$$

und

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c_0}$$

- **<u>Bewegter Beobachter</u>**

<u>Nach Pythagoras</u>:

$$\left(c_0 \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot c_0 \cdot \Delta t_0\right)^2 + \left(v \frac{\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c_0^2 \cdot \Delta t^2 = c_0^2 \cdot \Delta t_0^2 + v^2 \cdot \Delta t^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t^2 \left(c_0^2 - v^2\right) = c_0^2 \cdot \Delta t_0^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t^2 = \frac{c_0^2}{c_0^2 - v^2} \cdot \Delta t_0^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t_0^2 = \frac{c_0^2}{c_0^2} - \frac{v^2}{c_0^2} \cdot \Delta t^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t_0^2 = 1 - \frac{v^2}{c_0^2} \cdot \Delta t^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \cdot \Delta t_0^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma$$

Beobachtungen

1. $\gamma > 1$
2. $\Delta t > \Delta t_0$

Δt, bewegte Zeit

Δt_0, Eigenzeit, ruhende Zeit

- **<u>Zusammenfassung</u>**

  Benötigt ein Vorgang in einem dazu ruhenden Bezugssystem die Zeitdauer Δt_0, so läuft der gleiche Vorgang in einem dazu bewegten Bezugssystem in der Zeit Δt ab:

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

  mit v als Relativgeschwindigkeit zwischen den Bezugssystemen.

<u>Längenkontraktion</u>

Hat eine Strecke in einem zu ihr ruhenden System eine Länge x_0, so hat die gegen den Beobachter in Längsrichtung bewegte Strecke eine kleinere Länge x:

$$x = \frac{x_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot x_0$$

Bemerkung

Die im Ruhesystem gemessene Länge heißt Eigenlänge.

<u>Dynamische Masse</u>

Bewegt sich ein Körper der Ruhemasse m_0 mit der Geschwindigkeit v, so beträgt seine dynamische Masse m:

$$m = m_0 \cdot \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

Masse-Energie-Relation

$$E = m \cdot c^2$$

Jede Massenänderung bedeutet eine Energieänderung und umgekehrt.

Bemerkung

Der Satz von Lavoisier: Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme, ist also mit dieser Formel ungültig.

Die gesamte Energie eines bewegten Körpers besteht aus seiner Ruheenergie $E_0 = m_0 \cdot c^2$ und seiner kinetischen Energie E_{kin}:

$$E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + E_{kin}$$

Massendefekt

Jeder Atomkern ist aus Nukleonen (Protonen und Neutronen) aufgebaut, die durch starke Kernkräfte aneinander gebunden sind. Um ein Nukleon aus dem Atomkern zu entfernen, muss man Arbeit gegen die Kernkräfte verrichten, also Energie aufwenden. Baut man den Atomkern dagegen aus Nukleonen auf, so wird Energie frei, die Kernbindungsenergie.

Diese Energieabgabe entspricht wegen der Masse-Energie-Beziehung einer Abnahme der Ruhemasse der zum Atomkern vereinigten Nukleonen um Δm_0. Die Masse des vereinigten Atomkerns ist stets kleiner als die Summe der Massen der einzelnen Nukleonen. Diese Differenz Δm_0 heiβt Massendefekt. Allgemein gilt für den Massendefekt:

$$\Delta m_0 = (Z \cdot m_{0P} + N \cdot m_{0n}) - m_{0k}$$

$$Z,\ Protonenanzahl$$

$$N,\ Neutronenanzahl$$

$$m_{0P},\ Ruhemasse\ des\ Protons$$

$$m_{0n},\ Ruhemasse\ des\ Neutron$$

$$m_{0k},\ Gesamt - Ruhemasse\ des\ Atomkerns$$

Die Masse eines Atomkerns ist immer kleiner als die Summer der Nukleonenmassen. Die der Massendifferenz entsprechende Energie ist die Kernbindungsenergie, welche beim Zusammenfügen des Atomkerns aus seinen Nukleonen frei wird.

ASTRONOMISCHE DATEN

Allgemein

Zeichen	Größenwert	
Astronomische Längeneinheiten mittlere Entfernung Erde-Sonne	$1AE$	$1,496 \cdot 10^{11}m$
Lichtjahr Weg des Lichtes in einem Jahr	$1Lj$	$0,946 \cdot 10^{16}m$
Parallaxensekunde Entfernung entsprechend der Parallaxe einer Bogensekunde	$1parsec$	$1pc = 3,086 \cdot 10^{6}m$
Siderisches Jahr $365d\ 6h\ 9min\ 10s$ Zeit zwischen zwei Vorübergängen der mittleren Sonne vor demselben Stern		$365,2563$ mittlere Sonnentage $3,1558 \cdot 10^{7}s$
Tropisches Jahr $365d\ 5h\ 48min\ 46s$ Zeit zwischen zwei Durchgängen der mittleren Sonne durch den Frühlingspunkt		$365,2422$ mittlere Sonnentage $3,1557 \cdot 10^{7}s$
Siderischer Monat $27d\ 7h\ 43min\ 12s$ Zeit zwischen zwei Vorübergängen des Mondes vor demselben Stern		$27,3217d$
Synodischer Monat $29d\ 12h\ 44min\ 3s$ Zeit zwischen zwei Vorübergängen des Mondes vor der Sonne		$29,5306d$

Sonne

	Zeichen	Größenwert
mittlerer Radius	$R_\odot$	$6,96 \cdot 10^8 m$ Sehwinkel $32'$
Masse	$m_\odot$	$1,989 \cdot 1030 kg$ $(= 3,33 \cdot 10^5 m_E)$
mittlere Dichte	$\rho_\odot$	$1,409 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$
Schwerebeschleunigung, an der Oberfläche	$g_\odot$	$2,736 \cdot 10^2 \frac{m}{s^2}$
Oberflächentemperatur	T	$5773K$
Effektive Temperatur der "Oberfläche"	T_{eff}	$5777K$
Abstand zum nächsten Fixstern, Proxima Centauri	e	$4,26Lj$
Leuchtkraft, gesamte Strahlungsleistung	$L_\odot$	$3,86 \cdot 10^{26} W$
Solarkonstante der auf der Erde ankommende Strahlungsleistung	S	$1,372 \cdot 10^3 \frac{W}{m^2}$

Erde

	Zeichen	Größenwert
Äquatorradius	r_{Ea}	$6,37814 \cdot 10^6 m$
Polarradius	r_{Ep}	$6,35680 \cdot 10^6 m$

mittlerer Erdradius, Radius der Kugel mit Volumen der Erde	r_E	$6,37104 \cdot 10^6 m$
mittlere Dichte	ρ_E	$5,515 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$
Dichte der Erdkruste in 30 bis 70 km Tiefe	ρ_E	$2,6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ bis $3,0 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$
Masse	m_E	$5,9737 \cdot 10^24 kg$
mittlere Schwerebeschleunigung	g_E	$9,814 \frac{m}{s^2}$

Mond

	Zeichen	Größenwert
mittlerer Radius	r_M	$1,738 \cdot 10^6 m$ (Sehwinkel 31)
Masse	m_M	$7,349 \cdot 10^{22} m$ $(= 0,0123 m_E)$
Dichte	ρ_M	$3,341 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$
Schwerebeschleunigung	g_M	$1,620 \frac{m}{s^2}$ $\left(= \frac{1}{6} g_E\right)$
mittlerer Abstand von Erde (Abstand schwankt zwischen $3,633 \cdot 10^8 m$ und $4,055 \cdot 10^8 m$)	e	$3,844 \cdot 10^8 m$

Planetensystem

Planet	Zeichen	Masse des Planeten	mittlere Entfernung e zur Sonne	siderische Umlaufzeit T Zeit eines	Äqua Radiu km

		absolut in $10^{24}kg$	relativ zur Masse m_E der Erde $\frac{m}{m_E}$	absolut in $10^{9}kg$	relativ zum Erdbahnradius r_E der Erde $\frac{e}{r_E}$	vollen Umlaufs um die Sonne	
Merkur	☿	0,330	0,0553	57,9	0,387	87,969 d	2440
Venus	♀	4,869	0,815	108,2	0,723	224,701 d	6052
Erde	⊕	5,9736	1,000	149,6	1,000	365,256 d	6378
Mars	♂	0,6419	0,107	227,9	1,523	686,98 d	3397
Jupiter	♃	1899	317,9	778,3	5,204	11,862 a	7149
Saturn	♄	568,5	95,2	1429,4	9,555	29,457 a	6026
Uranus	⛢	568,5	95,2	1429,4	9,555	29,457 a	6026
zum Vergleich							
Sonne	☉	1989100	332950	-	-	-	6950

Mond	☾	0,0735	0,0123	-	-	-	1738

SONNENSYSTEM

Körper	mittlerer Sonnenabstand in: $10^6 km$	Umlaufzeit in Jahren	relative Masse: $\frac{m}{M_{Erde}}$	mittlere Bahngeschwindigkeit in: $\frac{km}{s}$	Fallbeschleunigung in: $\frac{m}{s^2}$	mittlere Dichte in: $\frac{kg}{dm^3}$
Sonne	-	-	332946	-	273,4	1,42
Merkur	57,9	0,24	0,05	47,9	3,82	5,6
Venus	108,2	0,62	0,82	35,05	8,83	5,2
Erde	149,6	1	1	29,8	9,81	5,52
Mars	227,9	1,88	0,11	24,14	3,73	3,95
Jupiter	778,3	11,86	317,9	13,1	24,6	1,3
Saturn	1 428	29,46	95,11	9,65	10,4	0,68
Uranus	2 872	84,01	14,52	6,8	9,42	1,19
Neptun	4 501	164,8	17,22	5,43	11,3	2,2
Pluto	5 910	247,7	0,05	4,74	8	3
Mond	0,384 4*	27,32d	0,01	1,02	1,63	3.36

Weitere Informationen:

- $1\ Jahr = 365,25d$
- $m_{Erde} = 5,974 \cdot 10^{24} kg$

*Abstand Erde-Mond

GAS GESETZE

Boyle-Mariotte

$$p \cdot V = konstant$$

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Gay-Lussac

$$\frac{V}{T} = konstant$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Amotons

$$\frac{p}{T} = konstant$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Ideale Gase

$$\gamma_{ideales\ Gas} = \frac{1}{273,15K}$$

$$\frac{p \cdot V}{T} = konstant$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

$$N,\ Teilchenanzahl$$

$$k,\ Proportionalitätsfaktor\ (Boltzmannkonstante)$$

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R$$

$$R\, Gaskonstante$$

$$R\ =\ 8,314 \frac{J}{molK}$$

KALIROMETRIE

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

$$c,\ spezifische\ Wärmekapazität$$

Thermische Leistung

$$P = \frac{Q}{t}$$

Heitzwert

$$H_v = \frac{Q}{m}$$

$$H_v = \frac{Q}{v}$$

Wärmeaustausch

Verallgemeinertes Mischungsprinzip

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0$$

Wärmekapazität

$$Q_G = C \cdot \Delta\theta$$

$$C,\ wärmekapazität\ des\ Gefäßes$$

Umwandlungsenergie

$$Q_G = C \cdot \Delta\theta$$

$$Q_E,\ Erstarrungsengerie$$

$$Q_s,\ Schemlzenergie$$

$$q_s, spezifischeSchmelzwärme$$

$$Q_k = -Q_v = m \cdot q \cdot v$$

$$Q_K,\ Kondensationsenergie$$

$$Q_V,\ Verdampfungsenergie$$

$$q_V, spezifischeVerdampfungsenergie$$

LÄNGENAUSDEHNUNG

Gesetz der Längenausdehnung

Herleitung

Die Längenausdehnung ΔL ist:

- direkt proportional zur Temperaturänderung $\Delta\theta$ des Stabes:

$$\Delta L \sim \Delta\theta$$

- direkt proportional zur Anfangslänge L_0 des Stabes:

$$\Delta L \sim L_0$$

Die beiden Proportionalitäten lassen sich zusammenschreiben, daher ergibt sich:

$$\Delta L \sim \Delta\theta \cdot L_0$$

und

$$\frac{\Delta L}{\Delta\theta \cdot L_0} = konstant$$

Die Proportionalitätskonstante drückt die Abhängigkeit der Ausdehnung vom Material aus und wird als Längenausdehnungskoeffizient α bezeichnet. Also erhalten wir:

$$\frac{\Delta L}{\Delta\theta \cdot L_0} = \alpha$$

Formel

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta\theta \cdot L_0$$

oder

$$L - L_0 = \alpha \cdot (\theta - \theta_0) \cdot L_0$$

Längenausdehnung

Die Länge L des Körpers bei der Temperatur θ ergibt sich durch die Summe aus der Ausgangslänge L_0 und der Längenänderung ΔL :

$$L = L_0 + \Delta L = L_0 + \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta\theta$$

es gilt:

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Längenausdehnungskoeffizient, linearer Wärmeausdehnungskoeffizient

Definition

Der Längenausdehnungskoeffizient gibt an wie viel oder wenig ein Stoff sich unter Auswirkung von Temperatur ausdehnt.

Einheit

$$[\alpha] = \frac{1}{K} = \frac{1}{^\circ C}$$

Ausdehnung und Verkürzung

- Ausdehnung

  Wenn die Temperatur des Körpers steigt, dann dehnt sich der Körper aus; die Längenänderung ΔL ist positiv. Für $\alpha > 0$:

  $$\begin{gathered} \theta > \theta_0 \\ \Leftrightarrow \Delta\theta > 0 \\ \Leftrightarrow L > L_0 \\ \Leftrightarrow \Delta L > 0 \end{gathered}$$

  Es gilt also:

  $$\Delta\theta > 0 \Leftrightarrow \Delta L > 0$$

- <u>Verkürzung</u>

  Wenn die Temperatur des Körpers sinkt, dann zieht sich der Körper zusammen; die Längenänderung ΔL ist negativ. Für $\alpha > 0$:

$$\theta < \theta_0$$
$$\Leftrightarrow \Delta\theta < 0$$
$$\Leftrightarrow L < L_0$$
$$\Leftrightarrow \Delta L < 0$$

  Es gilt also:

$$\Delta\theta < 0 \Leftrightarrow \Delta L < 0$$

GRUNDLAGEN DER THERMODYNAMIK

Temperatur

Die Materie besteht aus kleinsten Bausteinen wie Atomen, Molekülen. Diese Bausteine erfahren, mit Ausnahme von $0K$ eine Bewegung, die sogenannte thermische Bewegung.

Bewegen sich also die Bausteine der Materie so ist eine Temperatur vorhanden.

Definition

Mit der Temperatur T beschreibt man den thermischen Zustand eines Körpers, der durch die kinetische Energie der Teilchen, aus denen er besteht, bestimmt ist.

Formelzeichen

Das Formelzeichen hängt oft von der Einheit in der eine Temperatur gemessen wird ab. Es gilt:

- Für Fahrenheit: θ_F
- Für Celsius: θ
- Für Kelvin: T

Thermometer

Die Messung der Temperatur erfolgt, durch ein Thermometer.

Temperaturskala

Um eine Temperaturskala zu erstellen muss eine beliebige Temperatur als Nullpunkt gewählt werden. Dann werden im nächsten Schritt die Abstände zwischen den ganzzahligen Abständen bestimmt, was meistens durch einen zweiten Temperatur-

Punkt bestimmt, und noch unterteilt wird. Damit hat man also eine Temperaturskala kreiert.

Absoluter Nullpunkt

Der absolute Nullpunkt bezeichnet den unteren Grenzwert für die Temperatur, also die tiefst mögliche Temperatur, die nur theoretisch erreicht und nicht unterschritten werden kann. An diesem Punkt ist die thermische Bewegung der Teilchen gleich Null.

Kelvinskala

Die Kelvinskala ist eine physikalische Größe die die Temperatur beschreibt.

Veraltete Festlegung

Die Kelvinskala wird folgendermaßen definiert:

- Der absolute Nullpunkt ist $0K$
- Der Tripelpunkt von Wasser ist $273,15K$

Einheit

$$[T] = K$$

$$K,\ Kelvin$$

Bemerkung

Die Kelvinskala ist eine der sieben S.I.-Basisgrößen der Physik. Siehe S.I.-Basisgrößen.

Celsiusskala

Die Celsiusskala ist eine physikalische Größe die die Temperatur beschreibt.

Veraltete Festlegung

Für das Festlegen der Celsiusskala sind diese Fixpunkte benötigt:

- Die Schmelztemperatur von Wasser, als $0°C$ definiert.
- Die Siedetemperatur von Wasser, als $100°C$ definiert.

Einheit

$$[\theta] = \ °C$$

$$°C,\ Grad\ Celsius$$

Fahrenheitskala

Die Fahrenheitskala ist eine physikalische Größe die die Temperatur beschreibt.

Veraltete Festlegung

Das Festlegen der Fahrenheitskala erfolgt durch zwei Fixpunkte diese legte Fahrenheit so fest:

- die Schmelztemperatur von Wasser, als $32°C$ definiert
- die normale Körpertemperatur, als $96°C$ definiert

Einheit

$$[\theta_F] = \ °F$$

$$°F,\ Grad\ Fahrenheit$$

Umwandlungen

Umwandlung	Formel
$K \rightarrow \ °C$	$\theta\left(T\right) = T - 273,15$

$K \rightarrow\ ^{\circ}F$	$\theta_F(T) = 1,8 \cdot T - 459,67$
$^{\circ}C \rightarrow\ K$	$T(\theta) = \theta + 273,15$
$^{\circ}C \rightarrow\ ^{\circ}F$	$\theta_F(\theta) = \frac{9}{5} \cdot \theta + 32$
$^{\circ}F \rightarrow\ K$	$T(\theta_F) = \frac{5}{9}(\theta_F - 32) + 273,15$
$^{\circ}F \rightarrow\ ^{\circ}C$	$\theta(\theta_F) = \frac{5}{9}(\theta_F - 32)$

Thermische Bewegung, Brown'sche Bewegung

Unter der thermischen Bewegung versteht man die ungeordnete, chaotische Bewegung, der Teilchen eines Körpers. Je höher die Temperatur eines Körpers ist, desto heftiger ist die thermische Bewegung seiner Teilchen.

THERMODYNAMICS

Mole

The mole N is a measurement for the amount of substance of a system.

Unit

$$[N] = mol$$

Avogadro number

The Avogadro number N_A is the number of particles in 1 mole of $12g$ of $^{12}\mathrm{C}$.

$$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$$

Pressure

When a force $\overrightarrow{F}$ with the perpendicuar component $F_\perp$ is applied on a surface A, we can define the pressure P exerted on the surface A as:

Formula

$$P = \frac{F_\perp}{A}$$

Unit

$$[P] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

$$Pa,\ Pascal$$

Remark

Pressure is a scalar quantity.

Pressure units

Pressure has a lot of weird units that have historical or practical significance. See: Exotische Umwandlungen.

Critical Temperature

The critical temperature T_c is the temperature where above the critical temperature the system cannot liquify anymore, no matter how much the pressure is increased.

Triple point of Water

The triple point for water is the temperature and pressure where the 3 phases of water, vapour, liquid, gas, coexists at the same time.

This occurs for $T = 0.01°C$ and $P = 611Pa$

Gas and vapour

The terms gas and vapour cannot be used interchangeably:

- Vapour:

  We use the term vapour to describe a thermodynamic situation in which a system can be condensed just by decreasing pressure, keeping the temperature fixed.

- Gas:

A gas is what we obtain by heating a vapour or a liquid above the critical temperature.

Gas universal constant

$$R = 8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$$

Perfect gas

Perfect gas has the following properties:

- the dimension of each particle is much smaller that the volume of the container
- the particles can only interact through elastic collisions
- the particles occupy uniformously the volume of the container
- there are no favoured directions in which motion can occur. The particles can move in every direction

Formula

$$PV = nRT$$

Kinetic Theory of Gases

VOLUMENÄNDERUNG

Gesetz der Volumenänderung

Herleitung

Die Volumenänderung ΔV ist:

- direkt proportional zur Temperaturänderung $\Delta\theta$:

$$\Delta V \sim \Delta\theta$$

- direkt proportional zum Anfangsvolumen V_0:

$$\Delta V \sim V_0$$

Die beiden Proportionalitäten lassen sich zusammenschreiben, daher ergibt sich:

$$\Delta V \sim \Delta\theta \cdot V_0$$

und

$$\frac{\Delta V}{\Delta\theta \cdot V_0} = konstant$$

Die Proportionalitätskonstante drückt die Abhängigkeit der Ausdehnung vom Material aus und wird als Volumenausdehnungskoeffizient γ bezeichnet. Also erhalten wir:

$$\frac{\Delta V}{\Delta\theta \cdot V_0} = \gamma$$

Formel

$$\Delta V = \gamma \cdot \Delta\theta \cdot V_0$$

oder

$$V - V_0 = \gamma \cdot (\theta - \theta_0) \cdot L_0$$

DOPPLER-EFFEKT

Bewegter Empfänger

- Empfänger E nähert sich dem Sender S:

  Bewegt sich ein Empfänger mit einer Geschwindigkeit v_E auf den Sender, der eine Welle mit der Frequenz f und der Phasengeschwindigkeit v_{ph} abstrahlt, zu, so erreichen ihn in einer bestimmten Zeit mehr Wellen als wenn er in Ruhe ware. Die Wellenlange λ der Schallwellen in der Luft bleibt zwar konstant, jedoch ist die Geschwindigkeit relativ zum Empfänger jetzt $v_{ph} + v_E$. Die Frequenz der vom Empfänger registrierten Wellen wird damit:

$$f_E = \frac{v_{ph} + v_E}{\lambda}$$

  mit: $f = \frac{v_{ph}}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{v_{ph}}$

$$\Leftrightarrow f_E = f \cdot \frac{v_{ph} + v_E}{v_{ph}}$$

$$\Leftrightarrow f_E = f \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{v_E}{v_{ph}}\right)}_{>1}$$

  Die vom Empfänger registrierte Frequenz f_E ist somit höher als die vom Sender ausgesendete Frequenz f.

- Empfänger E entfernt sich dem Sender S:

Bewegt sich ein Empfänger mit einer Geschwindigkeit v_E von dem Sender, der eine Welle mit der Frequenz f und der Phasengeschwindigkeit v_{ph} abstrahlt, weg, so erreichen ihn in einer bestimmten Zeit weniger Wellen als wenn er in Ruhe wäre. Die Wellenlänge λ der Schallwellen in der Luft bleibt zwar konstant, jedoch ist die Geschwindigkeit relativ zum Empfänger jetzt $v_{ph} - v_E$. Die Frequenz der vom Empfänger registrierten Wellen wird damit:

$$f'_E = \frac{v_{ph} - v_E}{\lambda}$$

mit: $f = \frac{v_{ph}}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{v_{ph}}$

$$\Leftrightarrow f'_E = f \cdot \frac{v_{ph} - v_E}{v_{ph}}$$

$$\Leftrightarrow f'_E = f \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{v_E}{v_{ph}}\right)}_{<1}$$

Die vom Empfänger registrierte Frequenz f'_E, ist somit <u>niedriger</u> als die vom Sender ausgesendete Frequenz f.

<u>Ruhender Sender</u>

- <u>Sender S nähert sich dem Empfänger E</u>

Nähert sich der Sender S, der eine Welle mit einer Frequenz f und einer Phasengeschwindigkeit v_{ph} aussendet, dem Empfänger E mit einer Geschwindigkeit v_s, so legt er in der Zeit t, bei seiner Bewegung von S_1 nach

S_5, die Strecke $v_s \cdot t$ zurück. Die Wellen die bei ruhendem Sender die Strecke $v_{ph} \cdot t$ einnehmen, verteilen sich nur noch auf die verkürzte Strecke $v_{ph} \cdot t - v_s \cdot t = (v_{ph} - v_s) \cdot t$. Daher hat sich die vom Empfänger wahrgenommene Wellenlange λ_E verkürzt auf:

$$\frac{\lambda_E}{\lambda} = \frac{(v_{ph} - v_S) \cdot t}{v_{ph} \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_E = \lambda \cdot \frac{v_{ph} - v_S}{v_{ph}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_E = \lambda \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{v_S}{v_{ph}}\right)}_{<1}$$

Die vom Empfänger wahrgenommene Frequenz f_E ist demnach <u>höher</u> als die ausgesendete Frequenz f:

$$f_E = \frac{v_{ph}}{\lambda_E} = \frac{v_{ph}}{\lambda \cdot \left(1 - \frac{v_S}{v_{ph}}\right)} = f \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_S}{v_{ph}}}$$

- <u>Sender S entfernt sich vom Empfänger E</u>

  Entfernt sich der Sender S, der eine Welle mit einer Frequenz f und einer Phasengeschwindigkeit v_{ph} aussendet, vom Empfänger E mit einer Geschwindigkeit v_S, so legt er in der Zeit t, bei seiner Bewegung von S_1 nach S_5, die Strecke $v_S \cdot t$ zurück. Die Wellen die bei ruhendem Sender die Strecke $v_{ph} \cdot t$ einnehmen, verteilen sich nun auf die verlängerte Strecke $v_{ph} \cdot t + v_S \cdot t = (v_{ph} + v_S) \cdot t$. Daher hat sich die vom Empfänger wahrgenommene Wellenlange λ_E verlängert auf:

$$\frac{\lambda'_E}{\lambda} = \frac{(v_{ph} + v_S) \cdot t}{v_{ph} \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \lambda'_E = \lambda \cdot \frac{v_{ph} + v_S}{v_{ph}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda'_E = \lambda \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{v_S}{v_{ph}}\right)}_{>1}$$

Die vom Empfänger wahrgenommene Frequenz f'_E ist demnach <u>niedriger</u> als die ausgesendete Frequenz f:

$$f_E = \frac{v_{ph}}{\lambda_E} = \frac{v_{ph}}{\lambda \cdot \left(1 + \frac{v_S}{v_{ph}}\right)} = f \cdot \frac{1}{1 + \frac{v_S}{v_{ph}}}$$

MECHANISCHE WELLEN

Welle

Definition

Eine Welle ist ein zeitlich und räumlich periodischer Vorgang. Die zeitliche Periode ist die Schwingungsdauer T, die räumliche Periode ist die Wellenlänge λ.

Bemerkung

Wellen transportieren Energie, keine Materie.

Wellenlänge

Definition

Die Wellenlänge λ ist der kürzeste Abstand zweier in Phase schwingender Punkte entlang der Welle.

Wellenarten

Definitionen

1. Transversalwellen

   Ist die Auslenkungsrichtung y rechtwinklig zur Ausbreitungsrichtung x, so spricht man von einer Transversalwelle.

2. Lonitudinalwellen

   lst die Auslenkungsrichtung y parallel zur Ausbreitungsrichtung x, so spricht man von einer Longitundialwelle.

Wellengleichung

Herleitung

Zur Beschreibung der Welle müssen wir einen Ausdruck finden, welcher die doppelte Periodizität im Raum und in der Zeit beschreibt. Ihre Auslenkung y hängt sowohl vom dem betrachteten Ort x als auch vom Zeitpunkt t ab. Es gilt also: $y = f(x, t)$.

Die Welle startet durch einen Oszillator am Ursprung $x = 0$ und hat eine Amplitude y_{max} und eine Frequenz f.

Breitet sich die Welle in positiver x-Richtung aus, dann erreicht die Welle einen Ort x mit einer Verspätung Δt.

Zu einem Zeitpunkt t führt der Punkt x die gleiche Schwingung aus, welche der Ursprung zum Zeitpunkt $t - \Delta t$ durchgeführt hat.

Für die Elongation am Ort x zum Zeitpunkt t gilt also:

$$y(x, t) = y_{max} \cdot \sin\left[2\pi f(t - \Delta t) + \varphi_0\right] (1)$$

Sei v_{ph} die Phasengeschwindigkeit der in positiver Richtung laufenden Welle. Die benötigte Zeit Δt um die Strecke x zurückzulegen beträgt:

$$\Delta t = \frac{x}{v_{ph}} (2)$$

(2) in (1):

$$y(x, t) = y_{max} \cdot \sin\left[2\pi f(t - \frac{x}{v_{ph}}) + \varphi_0\right]$$

mit $f = \frac{1}{T}$ und $v_{ph} = \lambda \cdot f$:

$$y(x, t) = y_{max} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - f \cdot \frac{x}{\lambda \cdot f}\right) + \varphi_0\right]$$

$$y(x, t) = y_{max} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

Formel

$$y(x,t) = y_{max} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

Überlagerung

Treffen an einer Stelle eines Wellenträgers mehrere Wellen aufeinander, so addieren sich dort die Elongationen der Schwingungen $(y = y_1 + y_2)$. Nach dem Zusammentreffen laufen die Wellen ungestört weiter.

Interferenz

Die ungestörte Überlagerung mehrerer Wellen von gleicher Frequenz wird als Interferenz bezeichnet.

Gangunterschied

Definition

Der Gangunterschied Δs zweier Wellen an einem Ort im Wellenfeld ist die Wegdifferenz $\Delta s = s_2 - s_1$ der Strecken s_1 und s_2 von diesem Ort zu den beiden Erregern E_1 und E_2.

Interferenz Bedingungen

1. Verstärkung, konstruktive Interferenz

   - Phasendifferenz

     $$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi$$

     mit $n \in \mathbb{Z}$

   - Gangunterschied

     $$\Delta s = n \cdot \lambda$$

     mit $n \in \mathbb{Z}$

2. Auslöschung, destruktive Interferenz

- Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = (2n - 1) \cdot \pi$$

mit $n \in \mathbb{Z}$

- Gangunterschied

$$\Delta s = (2n - 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$

Kohärenz

Definition

Wellen, die von Erregerzentren ausgehen, die eine konstante Phasendifferenz haben, heißen kohärent. Kohärenz ist eine unabdingbare Voraussetzung für die Entstehung eines über längere Zeit beobachtbaren Interferenzphänomens.

Synchronität

Definition

Zwei Wellenquellen oder Schwingungen sind synchron, wenn sie gleichphasig schwingen.

Huygens'sches Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt von Elementarwellen angesehen werden, die sich mit gleicher Phasengeschwindigkeit und gleicher Frequenz wie die ursprüngliche Welle ausbreiten. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die neue Wellenfront.

Beugung

Das Eindringen von Wellen in den geometrischen Schattenraum hinter Hindernissen und Öffnungen wird als Beugung bezeichnet. Entscheidend für die Ausprägung der Beugungserscheinungen ist das Verhältnis der Größe der Hindernisse zur Wellenlänge.

Die Beugung ist besonders stark, wenn das Ausmaß des beugenden Hindernisses von gleicher Größenordnung ist wie die Wellenlänge oder kleiner.

Reflexionsgesetz der Wellen

Der Einfallswinkel α ist gleich dem Ausfallswinkel β:

$$\alpha = \beta$$

Brechungsgesetz von Wellen

Treten Wellen aus einem Medium in ein anderes, so besitzen die Wellennormalen der einfallenden und der gebrochenen Welle verschiedene Richtungen. Es gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_{ph1}}{v_{ph2}} = konstant$$

Siehe auch Wellenoptik.

SCHWINGUNGEN

Definition

Eine mechanische Schwingung ist die periodische Bewegung eines Körpers um seine Ruhelage.

Rücktreibende Kraft

Schwingungen werden durch eine stets zur Ruhelage hin wirkende Kraft verursacht. Diese Kraft wird als rücktreibende Kraft bezeichnet.

Schwingungsdauer

Die Periodendauer oder Schwingungsdauer T ist die zeitliche Dauer einer vollständigen Schwingung.

$$T = \frac{t}{n}$$

Einheit

$$[T] = 1s$$

Frequenz

Die Frequenz f gibt an, wie oft ein Körper in einer Sekunde hin und her schwingt.

$$f = \frac{1}{T}$$

Einheit

$$[f] = 1Hz$$

Elongation

Die Elongation oder momentane Auslenkung $y(t)$ gibt an, wie weit der schwingende Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt von seiner Ruhelage entfernt ist.

$$y(t) = y_{max} \cdot sin(\omega t + \varphi_0)$$

Einheit

$$[y(t)] = m$$

Amplitude

Die Amplitude y_{max} ist der größte Abstand des schwingenden Körpers von der Ruhelage.

Einheit

$$[y_{max}] = m$$

Harmonische Schwingung

Eine Schwingung bei der die Elongation y in Abhängigkeit der Zeit t eine Sinuskurve ergibt, bezeichnet man als Harmonische Schwingung oder Sinusschwingung.

Rücktreibende Kraft:

$$\overrightarrow{F} = -D \cdot \overrightarrow{y}$$

Phasenwinkel

Der Winkel φ, den der Radiusvektor zu einem bestimmten Zeitpunkt t mit der positiven x-Achse einschließt heißt Phasenwinkel oder Phase der Schwingung. Die Phase kennzeichnet den augenblicklichen Schwingungszustand.

$$\varphi_0 = \omega t$$

Einheit

$$[\varphi_0] = rad$$

$y(t)$ - t - Gesetz

Eine lineare Schwingung, die mit der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung übereinstimmt heiβt harmonische Schwingung oder Sinusschwingung.

$$y\left(t\right) = y_{max} \sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Einheit

$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

Auslenkung y, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a

$$y\left(t\right) = y_{max} \sin\left(\omega t\right)$$

$$\frac{d}{dt} y\left(t\right) \ = \ v(t)$$

$$v\left(t\right) = y_{max} \omega \cos\left(\omega t\right)$$

$$\frac{d}{dt} v\left(t\right) = a\left(t\right)$$

$$a\left(t\right) = -\omega^2 y_{max} \sin\left(\omega t\right)$$

Richtgröβe

Die Richtgröβe entspricht der Federkonstante des Hooke'schen Gesetzes.

Einheit

$$[D] = \frac{N}{m}$$

Formeln

$$D = m\omega^2$$

$$D = \frac{m \cdot g}{l}$$

Phasendifferenz

Definition

Die Phasendifferenz zweier Schwingungen gleicher Frequenz ist der Phasenwinkel $\Delta\varphi$, um den beide Schwingungen verschoben sind. $\Delta\varphi$ entspricht der Zeitdifferenz: $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$

Fadenpendel

Herleitung

Bei einem Fadenpendel ist die rücktreibende Kraft $\overrightarrow{F_r}$ tangential zum Kreisbogen und zur Elongation y, die in endgegengerichte. Sie ist gleich der Resultierenden aus der Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ des anhängenden Körpers und der in Richtung des Fadens wirkende Spannkraft $\overrightarrow{F_x}$:

$$\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_x}$$

Projektion auf (Ox):

$$F_r = -F_G \cdot \sin(\alpha)$$

Mit $y = l \cdot \alpha$ (α in Bogenmaβ) wird die vorherige Gleichung zu:

$$\frac{F_r}{y} = -\frac{F_G}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$

Bei Kleinwinkelnäherung: $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$

$$F_r = -\frac{F_G}{l} \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y$$

Mit: $D = \frac{m \cdot g}{l}$

$$F_r = -D \cdot y$$

Für kleine Winkel α ist die rücktreibende Kraft F_r, der Elongation y proportional, sodass die Schwingung des Fadenpendels harmonisch ist. Mit der Formel für die Dauer einer harmonischen Schwingung folgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Gültigkeitsbedingungen

Die gefundene Formel gilt nur:

1. für kleine Auslenkungen.
2. wenn die Masse des Fadens gegenüber des Pendelkörpers vernachlässigt werden kann.
3. wenn die Pendelmasse als punktförmig angenommen wird.

Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

<u>Federpendel</u>

Herleitung

Durch Anhängen des schwingenden Körpers mit der Masse m wird die Feder um die Strecke s_0 verlängert. Nach dem Hooke'schen Gesetz ist die Verlängerung $\overrightarrow{s_0}$ innerhalb der Elastizitätsgrenzen der Schraubenfeder direkt proportional zur Federkraft

$$\overrightarrow{F_{F,0}} \ : \ \overrightarrow{F_{F,0}} = -D \cdot \overrightarrow{s_0}$$

, wobei D die Federkonstante der Schraubenfeder ist.

Projektion auf (Oy) :

$$F_{R,0,y} = -D \cdot s_0 (1)$$

An dem schwingenden Körper wirken seine Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ und die Federkraft $\overrightarrow{F_F}$. In der Ruhelage gilt Kräftegleichgewicht und somit:

$$\overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_{F,0}} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_{F,0}} = -\overrightarrow{F_G}$$

Projektion auf (Oy) :

$$F_{F,0,y} = -F_G \ (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir:

$$F_G = D \cdot s_0 \ (3)$$

Wird die Feder ausgelenkt, herrscht kein Kräftegleichgewicht und die Resultierende der beiden wirkenden Kräfte ist gleich der rücktreibenden Kraft

$$\overrightarrow{F_r} \ : \ \overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_F} + \overrightarrow{F_G}$$

Projektion auf (Oy) :

$F_{F,y} = -F_F$ und $F_{G,y} = -F_G$

Die Feder wurde dann insgesamt um $y + s_0$ gedehnt. Es gilt:

$$F_F = -D \cdot (s_0 + y) \ (4)$$

Somit erhalten wir: $F_{r,y} = -F_F + F_G$

Mit (3) und (4):

$$F_{r,y} = -D \cdot y$$

Für die rücktreibende Kraft F_r beim Fadenpendel gilt ebenfalls ein lineares Kraftgesetz.

Gültigkeitsbedingungen

Die Gefundene Formel gilt nur wenn:

1. die Periodendauer unabhängig von der Amplitude y_{max} der Schwingung ist.
2. die Periodendauer direkt proportional zu der Quadratwurzel aus Masse m des Pendelkörpers ist.
   (bei gleicher Federkonstante)
   $$T \sim m$$
3. die Periodendauer indirekt proportional zu der Quadratwurzel aus der Federkonstante D der Feder ist.
   (bei gleicher Masse)
   $$T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Energie eines harmonischen Oszillators

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2 \sin^2(\omega t)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2 \cos^2(\omega t)$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} D \cdot y_{max}^2$$

Überlagerungen von Schwingungen

Frequenz der Schwebung

$$f_s = |f_1 - f_2|$$

Frequenz des Schwebungstons

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

STEHENDE WELLEN

Reflexion von Transversalwellen

Eine Transversalwelle wird am freien Ende ohne Phasensprung, am festen Ende mit einem Phasensprung von π reflektiert. Der Wellenberg kehrt am freien Ende als Wellenberg und am festen Ende als Wellental zurück.

Entstehung von stehenden Wellen

Treffen zwei Wellen aufeinander welche eine Phasendifferenz von π aufweisen, löschen sich diese bei der Überlagerung aus (destruktive Interferenz), Dies geschieht an den Schwingungsknoten.

Treffen zwei Wellen aufeinander welche phasengleich sind, so verstärken sie sich bei der Überlagerung (konstruktive Interferenz). Dies geschieht an den Schwingungsbäuchen.

Eine stehende Welle entsteht durch Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen (die ankommende und die reflektierte) gleicher Frequenz und gleicher Amplitude. In den Schwingungsbäuchen ist die Energie der Welle gespeichert.

Eigenschwingungen

Am festen Ende eines Wellenträgers bildet sich ein Schwingungsknoten.

Am freien Ende eines Wellenträgers bildet sich ein Schwingungsbauch.

Der Abstand zwischen zwei Schwingungsknoten beträgt $\frac{\lambda}{2}$.

frei-frei	fest-frei	fest-fest
$n = 0$ (Grundschwingung) $L = \frac{\lambda_0}{2}$ und $f_0 = f_0$	$n = 0$ (Grundschwingung) $L = \frac{1}{2} \cdot \lambda_1$ und $f_0 = f_0$	$n = 0$ (Grun $L = \frac{1}{2} \cdot \lambda_1$ u
$n = 1$ (1. Oberschwingung) $L = 2 \cdot \frac{\lambda_1}{2}$ und $f_1 = 2 \cdot f_0$	$n = 1$ (1. Oberschwingung) $L = \frac{3}{4} \cdot \lambda_1$ und $f_1 = 3 \cdot f_0$	$n = 1$ (1. Ob $L = \frac{2}{2} \cdot \lambda_1$ u
$n = 2$ (2. Oberschwingung) $L = 3 \cdot \frac{\lambda_2}{2}$ und $f_2 = 3 \cdot f_0$	$n = 2$ (2. Oberschwingung) $L = \frac{5}{4} \cdot \lambda_1$ und $f_1 = 5 \cdot f_0$	$n = 2$ (2. Ob $L = \frac{3}{2} \cdot \lambda_1$ u
<u>Verallgemeinerung:</u>	<u>Verallgemeinerung:</u>	<u>Verallgemein</u>

$L = (n+1)\frac{\lambda_n}{2}$ $\lambda_n = \frac{2L}{(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$	$L = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4}$ $\lambda_n = \frac{4L}{(2n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$	$L = (n$ $\lambda_n =$ $(n$

Eigenfrequenzen eines Seils (fest-fest)

Mit dem Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit einer Transversalwelle entlang eines Seils, welches an beiden Enden befestigt ist ergibt sich fur die Eigenfrequenzen eines elastischen Seils, welches an beiden Enden befestigt ist:

$$f_n = \frac{n+1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

mit: $n \in \mathbb{N}$

Eigenschwingungen

Es gilt:

Am geschlossenen Rohrende bildet sich ein Schwingungsknoten. Am offenen Rohrende bildet sich ein Schwingungsbauch.

offen-offen	offen-geschlossen
$n = 0$ (Grundschwingung) $L = \frac{\lambda_0}{2}$ und $f_0 = f_0$	$n = 0$ (Grundschwingung) $L = \frac{1}{2} \cdot \lambda_1$ und $f_0 = f_0$

$n = 1$ (1. Oberschwingung) $L = 2 \cdot \frac{\lambda_1}{2}$ und $f_1 = 2 \cdot f_0$	$n = 1$ (1. Oberschwingung) $L = \frac{3}{4} \cdot \lambda_1$ und $f_0 = 3 \cdot f_0$
$n = 2$ (2. Oberschwingung) $L = 3 \cdot \frac{\lambda_2}{2}$ und $f_2 = 3 \cdot f_0$	$n = 2$ (2. Oberschwingung) $L = \frac{5}{4} \cdot \lambda_2$ und $f_2 = 5 \cdot f_0$
<u>Verallgemeinerung:</u> $$L = (n+1)\frac{\lambda_n}{2}$$ $$\lambda_n = \frac{2L}{(n+1)}$$ $$n \in \mathbb{N}$$	<u>Verallgemeinerung:</u> $$L = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4}$$ $$\lambda_n = \frac{4L}{(2n+1)}$$ $$n \in \mathbb{N}$$

ENERGIEEFFIZIENZ

Grundlagen

Energie ist umweltbelastend, oft nicht erneuerbar und oft teuer. Deshalb ist es wichtig nach besserer Nutzung der Energie zu streben.

Technische Maβnahmen

Diese sind:

- Verbesserung der Wirkungsgrade
- Effizientere Energieumwandlungen
- Verringerungen von Energieverlusten
- Energierückgewinnung, Mehrfachnutzung
- Einsetzen von: Messtechnik, Steuertechnik, Regelungstechnik

Verhaltensänderungen

Diese sind:

- Unnötigen Gebrauch vermeiden
- Nutzung von Massenverkehrsmittel

Politische Maβnahmen

Diese sind:

- Förderung energiesparender Technologien oder Verfahren
- Besteuerung von hohem Energieverbrauch
- Aufklärung über rationellen Energieverbrauch

Kraft-Wärme-Kopplung

Der größte Anteil an Strom wird in Wärmekraftwerken produziert oder auch in Wasserkraftwerken.

Bei Wärmekraftwerken wird jedoch aus thermodynamischen Gründen ein großer Teil an Wärme, also Energie, an die Umgebung abgestrahlt.

Benutzt man diese Energie um zu Heizen nennt man dies Kraft-Wärme-Kopplung, da das Kraftwerk sowohl mechanische Energie also auch Wärmeenergie produziert.

FESTIGKEITSLEHRE

Beanspruchung auf Zug

Im Werkstück entstehen Zugspannungen σ_z, welche senkrecht zum beanspruchten Querschnitt stehen. Solche Spannungen nennt man Normalspannungen.

Formel

$$\sigma_z = \frac{F}{S}$$

Beanspruchung auf Druck

Bei der Druckbeanspruchung entstehen mi Werkstück Druckspannungen σ_d welche wie die Zugspannungen senkrecht zum beanspruchten Querschnitt stehen. Druckspannungen sind also auch Normalspannungen.

Formel

$$\sigma_d = \frac{F}{S}$$

Beanspruchung auf Abscherung

Hier entstehen mi Werkstück Scherspannungen τ_a. Sie liegen inder Querschnittsfläche und man bezeichnet sie als Schubspannungen.

Formel

$$\tau_a = \frac{F}{S}$$

Beanspruchung auf Biegung

Bei der Biegebeanspruchung entstehen im Werkstück Normalspannungen welche als Zugspannungen oder Druckspannungen auftreten. In den Randfasern des

Werkstücks sind die Spannungen am größten. Eine Faser ist spannungslos, man bezeichnet sie als neutrale Faser.

Formel

$$\sigma_{bmax} = \frac{M_v}{l}$$

Beanspruchung auf Verdrehung, Torsion

Die bei der Beanspruchung auf Verdrehung entstehenden Torsionsspannungen sind Schubspannungen. Die Randfasern werden am stärksten beansprucht während die Wellenachse spannungslos ist.

Formel

$$\tau_{tmax} = \frac{M_t r}{l_p}$$

Konvetion

σ steht für Normalspannungen diese sind senkrecht zum Schnitt und τ (Tau) für Schubspannungen diese sind parallel zum Schnitt.

Zugspannungen

Der dargestellte Stab ist im Gleichgewicht unter Einwirkung der äuβeren Kräfte. Denken wir uns den Stab an einer beliebigen Stelle durchgeschnitten. Um das Gleichgewicht zu erhalten muss an der Schnittfläche die innere Kraft F_N wirken. Da diese Kraft mit der äußeren Kraft F mi Gleichgewicht ist muss sie senkrecht zur Schnittfläche stehen. Man bezeichnet sie deshalb als Normalkraft.

Die Kraft F_N wirkt gleichmäßig auf alle Flächenteilchen des Querschnittes. Wir können ein Maβ für die Beanspruchung des Werkstoffes erhalten wenn wir die Kraft F_N durch den Querschnitt teilen. Diese Gröβe nennt man Spannung. Da die

verursachende Kraft eine Normalkraft ist erhalten wir eine Normalspannung. Die Zugspannung ist also eine Normalspannung da sie senkrecht zum beanspruchten Querschnitt steht.

Formeln

$$Spannung = \frac{innere\ Kraft}{Querschnitt}$$

$$\sigma_z = \frac{F_N}{S}$$

da $F_N = F$:

$$\sigma_z = \frac{F}{S}$$

Einheiten

$$[F] = N$$

$$[S] = mm^2$$

$$oder\ [S] = m^2$$

$$[\sigma_z] = \frac{N}{mm^2}$$

$$oder\ [\sigma_z] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Gefährdeter Querschnitt

Bei der Dimensionierung von Maschinenteilen müssen die Maβe so berechnet werden, dass eine bestimmte Spannung, die zulässige Spannung nicht überschritten wird.

Beschreibung	Formel

zulässige Zugspannung	$\sigma_{z,\,zul} = \frac{F}{S}$
erforderlicher Querschnitt	$S_{erf} = \frac{F}{\sigma_{z,\,zul}}$
vorhandene Spannung	$\sigma_{z,\,vorha} = \frac{F}{S}$
maximale Belastung	$F_{max} = S \cdot \sigma_{z,\,zul}$

Bei Berechnungen muss der Querschnitt der durch die Kraft F belastet wird richtig erkannt werden. Es ist immer der kleinstmögliche Querschnitt.

Zugversuch

Beim Zugversuch wird ein zylindrischer Probestab einer langsam steigenden Belastung ausgesetzt. Der unbelastete Stab hat einen Querschnitt S_0 und eine Messstrecke l_0 ist durch zwei Markierungen auf dem Stab festgelegt.

Bezeichnen wir die Länge unter Belastung mit l so beträgt die Längenzunahme $\Delta l = l - l_0$.

Bezieht man die Längenzunahme auf die Messstrecke so erhält man die Dehnung.

Formel

$$Dehnung = \frac{Längenzunahme}{Meßstrecke}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Einheit

$$[l] = mm^2$$

$$[\varepsilon] \rightarrow keine\ Einheit$$

Bemerkung

Die Dehnung ε wird oft in $\%$ angegeben.

Durch den Zugversuch wird der Stab dünner. Wir erhalten also folgende größen:

$$d_0,\ Stabdurchmesser\ ohne\ Belastung$$

$$d,\ Stabdurchmesser\ unter\ Belastung$$

$$\Delta d,\ Änderung\ des\ Stabdurchmesser$$

Formel

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}$$

Bemerkung

Beide Größen werden normalerweise in mm angegeben.

$$[\varepsilon_q] \rightarrow keine\ Einheit$$

Den Zusammenhang zwischen der Zugspannung σ_z und der Dehnung ε kann man in einem Diagramm darstellen : dem *Spannungs Dehnungs Diagramm*.

Wichtige Größen

- <u>Proportionalitätsgrenze</u> σ_P

Bis zu dieser Grenze verlauft die Spannungs-Dehnungskurve linear. Die Spannung ist direkt proportional zur Dehnung.

- <u>Elastizitatsgrenze</u> σ_E

  Wird der Probestab nicht über die Spannung σ_E hinaus beansprucht, so verhält sich der Stab elastisch, das heiβt nach Abklingen der Belastung ist keine bleibende Verformung zu erkennen.

- <u>Streckgrenze</u> R_e

  Ist die Streckgrenze erreicht, so beginnt der Werkstoff zu flieβen, das heiβt die Spannung fällt leicht ab und die Dehnung nimmt bei praktisch konstanter Spannung stark zu. Diese Streckgrenze ist nur bei weichen Stahlen ausgepragt, bei andern Werkstoffen ist sic nicht vorhanden.

- <u>Zugfestigkeit</u> R_m

  Nach dem Flieβen erholt sich der Werkstoff wieder und die Spannung steigt mit zunehmender Dehnung bis zu ihrem Höchstwert R_m. Danach nimmt die Spannung bei zunehmender Dehnung ab, bis der Bruch des Probestabes erfolgt. In diesem Bereich tritt eine starke Einschnürung auf.

<u>Gesetz von Hooke</u>

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = konstant = \tan(\alpha)$$

ZAHNRADTRIEBE

Grundvoraussetzung

Zwei Zahnräder die ineinandergreifen, müssen den gleichen Modul haben.

Formelzeichen

$$z,\ Zähnezahl$$

$$d,\ Teilkreisdurchmesser\ (gemessen\ in\ Mitte\ der\ Zähne)$$

$$n,\ Drehzahl$$

$$m,\ Modul$$

$$p,\ Teilung$$

$$h,\ Zahnhöhe$$

$$h_f,\ Zahnfußhöhe$$

$$d_a,\ Kopfkreisdurchmesser;\ Außendurchmesser$$

$$a,\ Achsenabstand$$

$$c,\ Kopfspiel$$

$$h_a,\ Zahnkopfhöhe$$

$$d_f,\ Fußkreisdurchmesser$$

$$b,\ Zahnbreite$$

Formeln

Modul

$$m = \frac{d}{z}$$

Bemerkung

Der Modul wird auch Diametral Pitch genannt

Teilkreisdurchmesser

$$d = m \cdot z$$

Kopfkreisdurchmesser

$$d_a = d + 2 \cdot m$$

Achsenabstand

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Übersetzungsverhältnis

$$i,\ Übersetzungsverhältnis$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{M_2}{M_1}$$

Gesamtübersetzungsverhältnis:

$$i_{ges} = \prod_{n=1}^{m} i_n$$

$$m,\ Anzahl\ an\ Übersetzungen$$

Doppelte Übersetzung

Formel

$$i_{14} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$$

LUFTSCHADSTOFFE

Wichtige Emissionen

- Primärenergie

  Kohle, Erdöl, Erdgas, Natururan

- Emissionen

  Staub, Asche, Ruβ, Schwermetalle

  SO_2, NO_x, CO, CO_2, C_mH_n

  Radioaktivität, Abwärme, Abwasser

Auswirkungen der Emissionen

Diese emittierten Stoffe reagieren mit den Stoffen aus der Umwelt beispielsweise dem Sauerstoff in der Luft. Dabei entstehen komplexe und oft unerforschte Umwandlungsketten. Diese entstandenen Stoffe sind schädlich für:

- Menschen

  Atemwegserkrankungen, Krebs, etc.

- Tiere und Pflanzen

  Fischsterben, Verschmutzung der Gewässer, Waldsterben

- Sachgüter

  Schäden an Gebäuden

Immissionen

Wenn die Emissionen wieder Menschen, Tiere und Pflanzen sowie Sachgüter befallen, nennt man diesen Prozess Immissionen.

Immissionen haben oft weit entfernt von da wo die Emissionen geschehen einen Effekt. Dies ist oft vom Wetter abhängig.

Die Immissionen werden oft in $\frac{mg}{m^3}$ gemessen.

Zusammensetzung der Naturressourcen

Da in der Natur ein Energieträger nie rein ist, somit also auch andere Stoffe enthält, geschehen auch weitere unerwartete Reaktionen. Hier die erwarteten Reaktionen:

Beispiele

Die vollständige Verbrennung von Kohlenstoff.

$$C + O_2 \longrightarrow CO_2$$

Die vollständige Verbrennung von Methan.

$$CH_4 + 2\,O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Emissionen bei der Verbrennung

Die fossilen Energieträger enthalten oft zusätzliche Stoffe, eben so wie die Reaktionspartner der Energieträger auch nicht immer beispielsweise reiner Sauerstoff ist.

Welche und wie viel Emissionen bei der Verbrennung auftreten ist abhängig von:

- den chemischen Zusammensetzung der Reaktionspartner
- dem Verbrennungsprozess
- der Verbrennungstemperatur
- den folgenden Verfahren der Abgasreinigung

Ebenfalls sind folgende Luftschadstoffe bei Verbrennungen möglich:

- Staub

- Schwefeldioxid: SO_2
- Kohlenmonoxid: CO
- Stickoxide: NO_x
- Unverbrannte Kohlenwasserstoffe: C_mH_n

Wobei oft bei Kohlekraftwerken folgendes entsteht: Staub; Schwefeldioxid: SO_2, und bei Verbrennungsmotoren: Kohlenmonoxid: CO; Stickoxide: NO_x; Unverbrannte Kohlenwasserstoffe: C_mH_n

Emittenten

Die Emittenten sind die Verursacher der Emissionen.

Maβnahmen zur Luftreinhaltung

Die Politik gibt Grenzwerte der Emissionen an welche dann durch Maschinen eingehalten müssen werden.

Rauchgasentschwefelungsanlage, REA

Da die Luft frei von Luftschadstoffen sein sollte, ist in fast jedem Kohlekraftwerk eine Rauchgasentschwefelungsanlage installiert.

Die Rauchgasentschwefelungsanlage hat das Ziel de Abgase in Kohlekraftwerken von Schwefeldioxidemissionen zu befreien. Sie senkt die Schwefeldioxidemissionen um etwa 85%.

Hier beschrieben wird nun die Rauchgasentschwefelungsanlage mit Nassverfahren auf Kalksteinbasis.

Funktionsweise

Der Schwefelgehalt in der Steinkohle, etwa 1% bis 2% wird bei dem Verbrennen der Kohle ebenfalls Oxidiert er ist nun also unter der Form: SO_2, enthalten.

Der SO_2 ist also nun mit in dem Rauchgas, was das Kohlekraftwerk ausstoβt vorhanden. Das Rauchgas flieβt also nun zum *Elektrofilter*. Der Elektrofilter entstaubt das Rauchgas. Das Rauchgas flieβt dann zu einem *Wärmetauscher*. Im Wärmetauscher wird die Temperatur von etwa $140°C$ auf $50°C$ abgekühlt. Das Rauchgas flieβt dann in den *Absorberturm*.

Während dem das Rauchgas diesen Prozess erfährt, wird Kalkstein $CaCO_3$, gemahlen und mit Wasser aufgeschlämmt, also in Wasser gegeben. Diesen Prozess nennt man Kalkaufschlämmung

Das Aufgeschlämmte Wasser wird dann im Absorberturm auf das Rauchgas gesprüht. Dabei geschieht folgende Reaktion:

$$CaCO_3 + SO_2 \longrightarrow CaSO_3 + CO_2$$

Das entstandenen Calciumsulfit wird danach zu Calciumsulfat oxidiert, was Gips ist.

Das übrige Rauchgas wird dann im Wärmetauscher wieder erhitzt und verlässt die Anlage über den Schornstein in die Umwelt.

Bemerkung

Da die Rauchgasentschwefelungsanlage eine chemische Fabrik ist, sie auch damit sehr teuer.

Abgaskatalysatoren

Abgaskatalysatoren sind dafür zuständig die Luftschadstoffe der Verbrennungsmotoren zu reduzieren.

In Verbrennungsmotoren entstehen die Luftschadstoffe: CO, NO_x, C_mH_n.

Die Entstehung dieser Schadstoffe ist vorallem von dem Luftverhältnis λ abhängig.

Luftverhältnis

Definition

Das Luftverhältnis λ gibt an wie viel Luft vohanden ist im bezug auf wie viel Luft benötigt ist. Das Luftverhältnis ist folgendermaβen definiert:

Formel

$$\lambda = \frac{vorhandene\ Luftmasse}{benötigte\ Luftmasse}$$

Luftverhältniswerte

Aus der Definition ergibt sich:

- $\lambda < 1$:

  Das Kraftstoff-Luft-Gemisch wird als *mager* bezeichnet.

  Es gibt zu wenig Luft damit die Reaktion vollständig abläuft.

- $\lambda = 1$:

  Das Kraftstoff-Luft-Gemisch erlaubt eine vollständige Reaktion.

- $\lambda > 1$:

  Das Kraftstoff-Luft-Gemisch wird als *fett* bezeichnet.

Geregelter Dreiwegkatalysator

Der Dreiwegkatalysator erhält seinen Namen dadurch, dass er folgende Reaktion beschleunigt:

1. Stickoxide NO_x werden zu Stickstoff N_2 reduziert. Hierbei wird Sauerstoff freigesetzt.

2. Sauerstoff der durch die Reduktion von Stickoxiden freigesetzt wurde wird nun benutzt um Kohlenmonoxid CO zu Kohlenmonoxid CO_2 oxidieren.

3. Sauerstoff der durch die Reduktion von Stickoxiden freigesetzt wurde, wird nun benutzt um unverbrannte Kohlenwasserstoffe C_mH_n zu Wasser H_2O und Kohlendioxid CO_2 reagieren zu lassen.

Funktionsweise

Der Dreiwegkatalysator ist ein Katalysator der aus wabenförmigen Keramikkörpern besteht. Diese Keramikkörper bilden lange Kanäle welche mit den Katalysatorsubstanzen: Platin Pt, Rhodium Rh beschichtet sind. Zusammen ergeben sie eine Masse von $1g$ bis $2g$.

Um die Konversionsgrad zu erhöhen muss eine größt mögliche Fläche vorhanden sein.

Konversionsgrad

Definition

Der Konversionsgrad gibt an wie viel der giftigen Schadstoffe im Katalysator um zu ungiftigen Schadstoffen gewandelt werden.

Bemerkung

Durch die entgiftende Eigenschaft, spricht man auch von Abgasentgiftung.

Lambda-Reglung

Die Lambda-Reglung regelt das Luftverhältnis λ. Dieses Luftverhältnis wird mit der λ-Sonde gemessen.

TREIBHAUSEFFEKT

Natürliche Treibhauseffekt

Die einfallenden Sonnenstrahlen sind elektromagnetische Wellen. Sie sind haben eine sehr kleine Wellenlänge und eine hohe Frequenz. Da $c = \lambda \cdot f$. Diese Strahlung kommt problemlos durch die Atmosphäre auf die Erde und wird dann wieder reflektiert. Diese Reflektion macht aus der kurzen Wellenlänge eine viel größere. Die Strahlung geht vom sichtbaren Bereich oder ultra Violette in das Infrarote über; sie wird zu Wärme Strahlung. Diese Strahlung steigt wieder nach oben wird jedoch hier durch Spurengase absorbiert und wieder auf die Erde gestrahlt.

Die Spurengase wirken hier wie die Glasscheiben eines Treibhauses.

Der Treibhauseffekt erwärmt die Erde um rund $33°C$, ohne diesen Effekt hätte die Erde eine Durchschnittstemperatur von etwa -18$°C$.

Spurengase

Definition

Spurengase nennt man alle Gase, die in der Luft in geringeren Anteilen vorkommen.

Treibhausgase

Zu den Treibhausgase gehören:

- Wasserdampf H_2O
- Kohlenstoffdioxid CO_2
- Distickoxid N_2O
- Methan CH_4
- Ozon O_3

- Fluorkohlenwasserstoffe, FCKW

Anthropogener Treibhauseffekt

Der anthropogener Treibhauseffekt ist der Treibhauseffekt der vom Mensch verursacht wird. Die Menschen emittieren verschiedene Spurengase etwa 50% des Treibhauseffekts ist anthropogen. Hier sind einige der Emittenten:

- Das Verbrennen fossiler Brennstoffe
- Die Herstellung von Produkten die Fluorkohlenwasserstoffe erhalten, welche die Ozonschicht der Atmosphäre zerstört und dabei noch als Treibhausgas wirkt.
- Der Raubbau an den Tropenwäldern
- Landwirtschaft: Nassfeldreisanbau, Rinderhaltung
- Mülldeponien
- Düngung

CO_2-Problem

Reaktionsgleichung

$$C + O_2 \longrightarrow CO_2$$

Hierbei gilt:

$$n(C) = 1mol \Leftrightarrow m(C) \simeq 12g$$
$$n(O2) = 1mol \Leftrightarrow m(C) \simeq 32g$$

Es folgt also, dass für $12g$ C etwa $44g$ CO_2 freigesetzt wird.

Durch diese groβe Menge an CO_2 gibt es verschiedene Projekte für CO_2-Abscheidung und-speicherung. In englisch: *Carbon Dioxode Capture and Storage* oder *CCS*.

Das Meer hat jedoch die gleiche Wirkung wie bei diesen Projekten erzielt wird. Jedoch lässt das Meer mit dieser Eigenschaft bei erhöhter Temperatur nach.

Folgen der Globalenerwärmung

Diese sind:

- Zusammenbruch von Ökosystemen
- Verschiebung der Vegetationszonen
- Zunahme der Niederschlagsmengen
- Zunahme von: Stürmen, Wirbelstürmen, Sturmfluten, Unwettern
- Veränderte Meeresströmungen
- Ansteigen der Meeresspiegel
- Klimaflüchtlinge

Gegenmaβnahmen

Diese sind:

- Verwendung Kohlenstoff armer Brennstoffe
- Verwendung Kohlenstoff freier Brennstoffe
- Erhöhung der Wirkungsgrade bei Energieumwandlungen
- Verwendung nachhaltiger, regenerativer Energieträger
- Energiesparen
- Bessere Energieverwendung

KERNKRAFTWERKE

Kernenergie

Als Kernenergie bezeichnet man die Ausbeutung der Energie, durch Kernspaltung, die in den Atomkernen besteht. Diese Energienutzung ist neu und gibt es erst seit den 1950er Jahren.

Jedoch war anfangs keine friedliche Nutzung vorgesehen sondern die Nutzung in der Atombombe.

Kernspaltung, Kernfission

Im Jahre 1938 entdeckten die Physiker *Otto Hahn* und *Fritz Strassmann* die Kernspaltung

Funktionsweise

Beschieβt man einen Uran ^{235}U-Kern mit einem Neutron, so bildet sich ein zwischen Kern der dann zerfällt und in zwei Kerne spaltet. Dabei werden 2 bis 3 Neutronen freigesetzt.

Bei dieser Spaltreaktion werden pro gespalteter Kern etwa $200MeV = 3 \cdot 10^{-11} J$ freigesetzt.

Kettenreaktion

Um groβe Mengen an ^{235}U Spalten zu können gebraucht man sich der Kettenreaktion. Da pro Spaltung 2 bis 3 Neutronen freigesetzt werden bildet sich

eine Kettenreaktion.

Die Kettenreaktion erlaubt es groβe Mengen an Energie freizusetzen.

Vermehrungsfaktor

Die Kettenreaktion zieht jedoch mit sich, dass die Reaktion *lawinenartig* anwächst.

Um das technisch zu beschreiben definiert man den Vermehrungsfaktor k.

Formel

$$k = \frac{Anzahl\ der\ nachfolgenden\ Spaltungen}{Anzahl\ der\ vorherigen\ Spaltungen}$$

Vermehrungsfaktor	Zustand	Beispiel	Bezeichnung
$k < 1$	Die Anzahl an Spaltungen nimmt ab	Herunterfahren des Reaktors	unterkritisch
$k = 1$	Die Anzahl an Spaltungen bleibt konstant	stationärer Betrieb des Reaktors	kritisch

$k > 1$	Die Anzahl an Spaltungen nimmt zu	Hochfahren des Reaktors	überkritisch

Stationärer Betrieb

Um den stationären Betrieb des Reaktor aufrechtzuerhalten muss eine mindest Menge, genannt kritische Masse, an Spaltstoff vorhanden sein.

Wird die kritische Masse überschritten, so verlassen zu viele Neutronen den Spaltstoff ohne eine Spaltung zu bewirken. Dies kann verhindert werden mit Neutronenreflektoren der die Neutronen wieder ins Spaltprodukt reflektiert.

Wechselwirkung zwischen Neutron und Kern

Wenn ein Neutron auf ein Atomkern trifft so gibt es 3 verschiedene Möglichkeiten wie sie mit einander reagieren können. Diese sind *Spaltung*, *Streuung*, *Absorption*.

Alle genannten Reaktionen sind möglich, sie hängen also von der statistischen Wahrscheinlichkeit der Reaktion ab, und das unabhängig von der Geschwindigkeit der Neutronen.

Bemerkung

Thermische Neutronen sind langsame Neutronen.

Bezeichnung	Neutrongeschwindigkeit
schnelle Neutronen	$> 10^7 \frac{m}{s}$

mittelschnelle Neutronen	$> 10^5 \frac{m}{s}$ bis $> 10^7 \frac{m}{s}$
langsame Neutronen	$> 10^5 \frac{m}{s}$

1. Spaltung

   Man unterscheidet zwischen:

   - Kerne mit gerader Massenanzahl

     Ein Neutron kann ein Kern mit gerader Massenzahl spalten, wenn das Neutron ein schnelles Neutron ist.

   - Kerne mit ungerader Massenanzahl

     Hier kann auch ein langsames Neutron den Kern spalten.
     Wobei schnelle Neutronen auch den Kern Spalten können ist das viel unwahrscheinlicher und werden daher nicht benutzt.

2. Streuung

   Die Streuung ist der Stoβvorgang zwischen den Neutronen und den Kernen. Hierbei wird das Neutron nach dem Stoβvorgang abgelenkt und es verliert Energie an den Atomkern. Da hierbei das Neutron an Geschwindigkeit verliert werden die schnellen Neutronen zu thermischen Neutronen. Man spricht hierbei auch von einem Bremsvorgang der Neutronen.

3. Absorbtion

   Absorbtion ist wenn der Atomkern das Neutron einfängt, es gilt:

$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n}^{0} + {}^{A}_{Z}\mathrm{K} \longrightarrow {}^{A+1}_{Z}\mathrm{K} $$

Da der Kern ein Neutron eingefangen hat ist er radioaktiv. Er sendet γ-Strahlung aus.

Moderator, Moderation

Stoffe die die Streuung begünstigen heiβen Moderatoren, sie machen Moderation. Sie bremsen also schnelle Neutronen auf langsame Neutronen ab.

Oft werden folgende Stoffe verwendet: schweres Wasser, Wasser, Beryllium, Grafit.

Neutronen einfangen

Stoffe die Neutronen einfangen sind einerseits in den Reaktorstäben enthalten; wo sie erwünscht sind, und auch in den Spaltprodukten hier bezeichnet man sie als Reaktorgifte.

Wenn der Reaktor gebaut wird müssen jedoch Stoffe eingesetzt werden die keine Tendenz haben Neutronen einzufangen diese heiβen Strukturmaterialien.

Sie haben ebenfalls einen Einfluss auf den Vermehrungsfaktor. Gibt es mehr Reaktorgifte so sinkt der Vermehrungsfaktor $k < 1$ gibt es weniger so steigt der Vermehrungsfaktor $k > 1$

Kernbrennstoffe

Geeignete Kernbrennstoffe müssen aus schweren Kernen bestehen, wobei : $A > 200$. Hierfür eignet sich technisch bis jetzt nur $^{235}\mathrm{U}$.

Bemerkung

Der Name Kernbrennstoffe kommt daher dass in anderen Kraftwerken oft etwas verbrannt wird. Das ist jedoch beim Kernkraftwerk nicht der Fall.

Gewinnung von U-235

Das Natürlich vorkommende Uran besteht aus:

- 0,7%: $^{235}\mathrm{U}$

Das ^{235}U ist das gewollte spaltbare Uran

- 99,3%: ^{238}U

  Das ^{238}U ist das ungewollte nicht groβtechnisch spaltbare Uran

Diese Mischung an Uran ist gleichmäβig über alle Kontinente verteilt, jedoch in sehr geringen Mengen. Was Uran sehr teuer macht und durch die geringen Mengen an Uran in 1t Erz, etwa 7g, noch teurer. Die geringen Mengen und die kosten sind groβe Faktoren bei den neuen Kernkraftwerken. Es ist nicht sicher gestellt op genug und kostengünstiges Uran zu betrieb vorhanden ist.

Brennelement, Brennstoff, Brennstab

In einem Reaktor sind Brennstäbe eingebaut. Sie sind lange rohrförmige Stäbe. In diesen laufen die Spaltreaktion statt. Man füllt sie mit Pellets oder Brennstofftabletten auf. Diese bestehen aus Urandioxidpulver was in Tabletten gepresst wurde. Dabei muss beachtet werden, dass zwischen dem Brennstoff genügend Platz vorhanden damit entstehende Gase genügend Platz haben.

In einem Reaktor werden mehrere dieser Brennstäbe mit einem Abstandshalter zusammengefasst. Das fertige Produkt bezeichnet man als Brennelement.

Ein Brennstoff dürfen nicht in Kontakt geraten, deshalb werden sie in Tabletten gepresst und in dem Brennstab eingeschlossen. Ein Kontakt von Brennstoff und Kühlmittel nennt man Kontamination.

Bemerkung

Bei einem Unfall könnte man pulverförmiges Urandioxid nicht so leicht bergen als Tabletten von Urandioxid.

Leichtwasserreaktoren, LWR

Ein Leichtwasserreaktor ist eine Art von Reaktor. Zu dieser Art gehören Siedewasserreaktor und Druckwasserreaktor.

Aufbau

Ein Leichtwasserreaktor besteht aus einem Reaktorgefäß, einem Brennelement, leichtem Wasser und Regelstäbe.

Funktionsweise

Im Reaktorgefäß befindet sich Wasser, im Wasser ist das Brennelement. Das Wasser fungiert hierbei als Kühlmittel und als Moderator. Die Regelstäbe können rein und raus bewegt werden um die Spaltgeschwindigkeit zu regulieren. Sind die Regelstäbe näher an den Brennstäben so geschehen weniger Zerfälle pro Zeiteinheit, sind sie weiter entfernt so steigt die Anzahl an Zerfällen.

Regelstäbe

Ein Regelstab hat zur Aufgabe den Vermehrungsfaktor k zu regulieren. Regelstäbe bestehen aus Stoffen die die Eigenschaft haben Neutronen einzufangen, somit verändern sie kontrolliert die Spaltgeschwindigkeit.

Selbststabilisierung

Leichtwasserreaktor sind selbst stabilisierend, das Bedeutet, dass eine unkontrollierbare Kettenreaktion wie bei einer Atombombe physikalisch unmöglich ist.

Steigt die Spaltaktivität schnell an so wird ebenfalls mehr Wärme produziert. Diese fließt in das Kühlmittel und erwärmt ihn. Das Wasser erhöht also seine Temperatur, seine Dichte nimmt damit ab, und damit auch seine Moderatorwirkung. Dies bewirkt nun, dass die schnellen Neutronen nicht mehr auf thermische Neutronen abgebremst

werden können und somit die Reaktion an Geschwindigkeit abnimmt. Die Reaktion kommt zum stoppen.

Siedewasserreaktor, SWR

Schaltplan

Aufbau

Siedewasserreaktoren besitzen einen Kreislauf.

Funktionsweise

Bei einem Siedewasserreaktor ist der Reaktor zu $\frac{2}{3}$ mit Wasser gefüllt. Das erlaubt dem Wasser, unter der Wärme des Brennelements, zu sieden, daher der Name. Der Wasserdampf wird anschließend getrocknet und fließt dann zu den Turbinen. Nach den Turbinen kondensiert der Wasserdampf wieder zu Wasser, durchgeht einen Kondensator und wird dann wieder in den Reaktor zurückgepumpt.

Schutzmaßnahmen

Da das Wasser den stark radioaktiven Reaktor durchläuft ist es ebenfalls stark radioaktiv und muss somit Abgeschirmt werden um Kontamination zu vermeiden. Das Maschinenhaus der Turbinen sowie Pumpen, Reaktor und alles weitere was mit dem Wasser in Kontakt gerät muss Abgeschirmt werden, dass keine Strahlung heraus gelangen kann.

Druckwasserreaktor, DWR

Schaltplan

Aufbau

Druckwasserreaktoren besitzen 2 Kreisläufe.

Funktionsweise

Der Primärkreislauf transportiert die Wärme die im Reaktor entsteht zu einem Dampferzeuger. Das geschieht ohne, dass das Wasser dabei Aggregatzustand ändert; es bleibt flüssig.

Im Sekundärkreislauf wird das flüssige Wasser im Dampferzeuger zum sieden gebracht. Der Dampf fließt, dann zu der Hochdruckturbine und anschließend zum Überhitzer und dann zur Niederdruchturbine.

Schutzmaßnahmen

Bei dem Druckwasserreaktor gibt es den Vorteil, dass es mehrere Kreisläufe gibt, was bewirkt, dass die Strahlung besser abgeschirmt ist.

Barrierenkonzept

Das Barrierenkonzept ist die Methode die Umwelt von den radioaktiven Stoffen frei zu halten.

Verschiedene Barrieren schützten von verschiedenen Arten von Kontamination beispielsweise durch auslaufen des stark radioaktiven Wassers, oder das

Durchdringen der Strahlung, sowie der Austritt der Brennstoffe. Es gibt folgende Barrieren von ganz innen nach aussen:

1. Der Brennstoff wird in Brennstofftabletten gepresst.

   Verhindert den Stoffausbruch.

2. Der Brennstoff wird in Brennstäbe gepackt.

   Verhindert den Stoffausbruch.

3. Das Brennelement wird in den Reaktordruckbehälter eingebaut.

   Verhindert den Wasserauslauf.

4. Der Reaktordruckbehälter wird in eine Betonabschirmung eingebaut.

   Verhindert, dass Strahlen entkommen.

5. Die Betonabschirmung wird in ein Sicherheitsbehälter eingebaut.

   Verhindert den Wasserauslauf.

6. Der Sicherheitsbehälter wird in eine zweite Stahlbetonhülle eingebaut.

   Verhindert, dass Strahlen entkommen.

GAU

GAU steht für: Größt anzunehmender Unfall.

GAU bei LWR

Der Größt anzunehmender Unfall bei einem Leichtwasserreaktor ist die Kernschmelze. Der Brennstoff würde sich so stark aufheizen, bis zum Beispiel einem Rohrbruch im Kühlsystem, dass es zur Kernschmelze käme. Da eine Kettenreaktion ausgeschlossen ist durch die Selbststabilisierung, würde der Reaktor sich so stark erhitzen, dass er sich möglicherweise durch alle Barrieren

durchschmelzen würde. Somit gelängen die radioaktiven Spaltprodukte in die Umwelt.

Sicherheitsmaβnahmen

Die Sicherheitsmaβnahmen sollen die Wahrscheinlichkeit, dass ein GAU vorkommt verringern. Sie sind:

- Redundanz

  Redundanz bedeutet, dass wichtige System mehrfach vorhanden sind. Dies ist wichtig, fällt nun ein kritisches System aus, kommt es nicht sofort zu GAU.

- Diversität

  Die mehrfach vorhandenen Systeme müssen auch unterschiedliche funktionsweisen haben beispielsweise eine andere Energieversorgung, von Strom auf Kraftstoffe.

- Räumliche Trennung

  Wichtige Systeme sollten ebenfalls in verschieden Räumen vorhanden sein, so dass sie von äuβeren Faktoren geschützt sind beispielsweise Explosionen.

Entsorgung

Bei der Reaktion im Brennstab, werden auch Reaktorgifte produziert. Deshalb muss vor dem, dass das Ganze Uran gespalten ist schon der Brennstab entsorgt werden.
Die bei der Spaltung von Uran entstandenen Stoffe sind stark radioaktiv jedoch haben diese eine kurze Halbwertszeit. Sie werden deshalb in ein sogenanntes Abklingbecken zwischengelagert. Das Abklingbecken ist mit Wassergefüllt.

Wiederaufbereitung

Da Uran nicht wieder erzeugt werden kann und dessen Gewinnung nur teurer wird. Muss das noch brauchbare ^{235}U wieder aufbereitet werden. Wiederaufbereitung ist also das brauchbare Uran aus den Brennstäben in neue Brennstäbe zu recyclen.

WAA

WAA, steht für Wiederaufbereitungsanlage. Sie arbeiten mit dem sogenannten *PUREX-Verfahren*.

PUREX-Verfahren

PUREX steht für: Plutonium-Uranium-Recovery by Extraction. Das PUREX-Verfahren besteht aus folgenden Schritten:

1. Die Brennstäbe werden in etwa 5 cm groβe lange Stücke zerschnitten. Dann werden sie in konzentrierte Salpetersäure gelegt, das löst den Inhalt der Brennstäbe in der Lösung auf.

2. Das Uran und Plutonium werden aus der Lösung getrennt.

   Die anderen stark radioaktiven Spaltprodukte werden verfestigt, in Glas eingeschmolzen, wiederrum in Edelstahlzylinder eingeschmolzen.

   Die mittelstarken Spaltprodukte werden in Beton ummantelt.

3. Uran und Plutonium werden anschlieβend von einander getrennt und so aufbereitet, dass es in der Brennelementfertigung weiterverarbeitet werden kann.

Endlagerung

Die Spaltprodukte mit einer sehr groβen Halbwertszeit und die stark radioaktiv sind müssen für sehr lange Zeit gelagert werden, man spricht von Endlagerung.

Schwach radioaktive oder mittelstarke radioaktive Abfälle werden oft nur in stillgelegten Bergwerken gelagert.

Um einen geeigneten Standort zu finden um die stark radioaktiven Spaltprodukte endlagern zu können müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- geologische Stabilität
- keine Verbindung zum Grundwasser
- ausreichende Tiefe
- gute Wärmeleitfähigkeit

OTTOMOTOR

Verbrennungsmotoren

Die benötigte Wärme für die Motoren wird bei Verbrennungsmotoren durch das Verbrennen des Kraftstoffes erzeugt. Die dabei erzeugten Gase werden dann an die Umgebung abgeben.

Bemerkung

Da die Verbrennung im Zylinder des Verbrennungsmotors geschieht spricht man auch von einer *inneren Verbrennung*

Etymologie

Der Ottomotor wurde von *Nicolaus August Otto* erfunden. Der Motor wurde also nach seinem Erfinder benannt.

Verdichtungsverhältnis

Definition

Das Verdichtungsverhältnis ist der Quotient aus dem Volumen am oberen Totpunkt und dem Volumen am unteren Totpunkt.

Formel

$$\varepsilon = \frac{V_u}{V_o}$$

Vier-Takt-Ottomotor

Der Vier-Takt-Ottomotor hat 4 Takte und diese sind:

1. Ansaugen

Das Auslassventil ist hier geschlossen und das Einlassventil ist offen. Der Zylinder bewegt sich vom oberen Totpunkt zum unteren Totpunkt. Dabei wird das Volumen vergrößert es geht von V_o auf V_u. Hier entsteht also ein Unterdruck wodurch das Kraftstoff-Luft-Gemisch in den Zylinder hinein gesaugt wird.

Um den Zylinder optimal mit dem Gemisch zu füllen, öffnet das Einlassventil bereits etwas vor dem oberen Totpunkt und schließt erst nach dem unteren Totpunkt.

2. Verdichten

3. Arbeiten

4. Ausstoßen

STIRLINGMOTOR

Heißgasmotor, Stirlingmotor

Das sind Motoren die Wärmeenergie in mechanische Umwandeln.

Robert Stirling

Der Stirlingmotor wurde 1816 von dem schottischen Pfarrer Robert Stirling erfunden.

Aufbau

Der Stirlingmotor enthält einen Verdrängerkolben und einen Arbeitskolben, alle in einem Zylinder.

Im Zylinder befindet sich ein Arbeitsgas was üblicherweise aus Luft, Helium oder Wasserstoff besteht.

Die beiden Kolben sind um 90° Phasenverschoben. Der Verdrängerkolben schiebt das Arbeitsgas dabei vom kalten zum heißen Zylinderbereich.

WÄRMEPUMPE

Grundlagen

Nach dem 2ten Gesetz der Thermodynamik fließt Wärme von warm nach kalt. Maschinen die die natürliche Wärmerichtung umdrehen heißen: Wärmepumpen, es passiert als ein linksgäniger Kreisprozess.

Prinzip

In einer Wärmepumpe gibt es 2 Wärmereservoirs. Ein warmes mit der Temperatur T_o und ein kaltes mit der Temperatur T_u. Zwischen den Wärmereservoirs ist ein mit einem Arbeitsgas gefüllten Arbeitszylinder. Der Arbeitszylinder kann mit den Wärmereservoirs in thermischem Kontakt sein.

Das Arbeitsgas im Arbeitszylinder wird adiabat expandiert, bis die seine Temperatur unter T_u liegt. Dies führt dazu, dass nun Wärme vom kalten Reservoir an das noch kältere Arbeitsgas im Zylinder fließt. Der thermische Kontakt löst sich und es wird eine Arbeit mit einem Kolbel auf das Gas verrichtet. Das Gas wird adiabat komprimiert bis seine Temperatur über T_o liegt. Der Zylinder wird nun in thermischen Kontakt mit dem warmen Reservoir gebracht. Die Wärme fließt vom wärmeren Arbeitsgas zum warmen Reservoir. Ab hier wiederhsolt sich der Prozess wieder.

Schematische Darstellung

Schaltplan

Leistungszahl

Die Leistungszahl ε ist das Maβ für die Effektivität der Wärmepumpe.

Kosten

Bezahlt wird nur die Aufgewendete Arbeit W_{auf} der Wärmepumpe. Die benötigte Energie Q_{zu} wird der Umgebung entnommen und kostet somit nichts.

Formel

Da nach dem idealen Carnotprozess die Leistungszahl $\varepsilon = \frac{1}{\eta_c}$ ist gilt dem nach:

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta_c} = \frac{T_o}{T_o - T_u}$$

Es gilt also, dass die Leistungszahl ε mit steigender Temperaturdifferenz $\Delta T = T_o - T_u$ abnimmt. Die Wärmepumpe wird weniger effizient.

Reale Wärmepumpen

Um die Leistungszahl zu erhöhen, wird in realen Wärmepumpen eine Änderung des Aggregatzustandes des Arbeitsmittels bewirkt. Hier wird das Arbeitsmittel verdampft und wieder abgekühlt. Da bei

Funktionsweise

Einem kalten Reservoir zum Beispiel der Umgebung wird Wärme entzogen um das flüssige Arbeitsmittel zu verdampfen. Dies geschieht bei der Temperatur T_u. Im

Verflüssiger wird nun der Druck so hoch erhöht, dass das Arbeitsmittel wieder kondensiert. Es gibt dabei Wärme ab sogenannte Kondensationswärme. Es hat nun die Temperatur T_o.

Das Arbeitsmittel soll nun bei niedriger Temperatur verdampfen und bei hoher Temperatur kondensieren. Dafür müssen unterschiedliche Drücke herrschen. Dieser Druck reguliert ein Verdichter der ebenfalls das Arbeitsmittel durch die Rohre pumpt. Der Druckunterschied wird durch ein Expansionsventil erhalten.

Leistungszahl

In der Praxis erreichen reale Wärmepumpen Leistungszahlen von: $\varepsilon = 2,5 \ldots 4,5$

Arbeitsmittel

Das Arbeitsmittel sind die Umweltschädlichen FCKW eine abkürzung für Fluorkohlenwasserstoffe. Sie sind umweltschädlich da sie die Ozonschicht zerstören und müssen daher fachgerecht entsorgt werden.

Einsatz

Wärmepumpen werden benutzt um zu Heizen. Um das zu bewirken müssen sie groβe Wärmemengen aufnehmen. Das macht sie effektiver und man muss weniger bezahlen. Deswegen werden die Rohrsysteme für Wärmepumpen tief in den Erdboden eingegraben um sie von Frost zu schützen.

Die Wärme muss jedoch bei möglichst niedriger Temperatur abgegeben werden. Das ist zum Beispiel der Fall bei Fuβbodenheizungen oder ganz groβen Heizkörpern.

Da die Wärmepumpe gegenüber eisigen Temperaturen empfindlich ist, muss oft ein konventionelles Heizsystem mit eingebaut sein man spricht dann von: bivalenten Heizsystemen.

Wärmepumpen kommen oft zum einsatz, wo man die warme und kalte Seite der Wärmepumpe nutzen kann. Zum Beispiel in einem Kaufhaus in den Kühlräumen, wobei der Kühlraum gekühlt wird und der Rest des Kaufhauses geheizt wird.

KREISPROZESSE

Kreisprozesse

Eine geschlossene Kurve im p-V-Diagramm bezeichnet man als Kreisprozess. Je nachdem in welchem Drehsinn die Kurve durchlaufen wird, unterscheidet man rechts- und linksgängige Kreisprozesse. Da bei dem Kreisprozess stets wieder der Anfangszustand erreicht wird, haben auch alle Zustandsgrößen nach einem Durchlauf des Kreisprozesses wieder ihre Ausgangswerte.

Rechtsgänginger Kreisprozess

Soll der Kreisprozess Arbeit nach außen abgeben, so genannte Nutzarbeit, so muss die Kompressionskurve unterhalb der Expansionskurve verlaufen. Um das zu erreichen, muss vor oder während der Kompression gekühlt und vor oder während der Expansion geheizt werden. Dabei ergibt sich ein rechtsgängiger Durchlauf der Prozesskurve. Da derartige Maschinen Wärme in Arbeit oder Kraft umwandeln, nennt man sie Wärmekraftmaschinen.

Daraus geht hervor, dass W_{12} die nach außen abgegebene Expansionsarbeit ist, die betragsmäßig durch den Flächeninhalt unter der Expansionskurve repräsentiert wird. Das ist aber nicht die Nutzarbeit, die der Kreisprozess nach außen abgibt, da von *3*

nach *4* ein arbeitsaufnehmender Takt notwendig ist, dessen Betrag durch den Flächeninhalt unter der Kompressionskurve dargestellt wird. Man erkennt: Die Nutzarbeit kann durch Differenzbildung aus dem arbeitsliefernden Takt und dem arbeitsverzehrenden Takt bestimmt werden.Entsprechend findet man den Betrag der Nutzarbeit als Differenz der die Arbeitsbeträge darstellenden Flächeninhalte.

Nutzarbeit

Die Nutzarbeit W , die mit jedem Durchlauf des rechtsgängigen Kreisprozesses nach auβen abgegeben wird, entspricht betragsmäβig dem von der Kreisprozesskurve eingeschlossenen Flächeninhalt.

Energiebilanz

Für jeden Kreisprozess gilt:

$$\sum Q + \sum W = 0$$

mit $W_{23} = W_{41} = 0$ und $Q_{12} = Q_{34} = 0$ folgt:

$$Q_{12} + Q_{34} + W_{23} + W_{41} = 0$$

mit $W_N = W_{12} + W_{34}$

$$W_N = W_{12} + W_{34} = -Q_{23} - Q_{41}$$
$$|W_N| = |W_{12}| - W_{34} = Q_{41} - |Q_{23}|$$

Thermischer Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Nutzen}{Aufwand}$$

$$\eta = \frac{|W_N|}{Q_{zu}} = \frac{Q_{zu} - |Q_{ab}|}{Q_{zu}} = 1 - \frac{|Q_{ab}|}{Q_{zu}}$$

Linksgängige Kreisprozesse

Verläuft bei einem Kreisprozess die Kompressionskurve oberhalb der Expansionskurve, so wird dem Kreisprozess in der Bilanz Arbeit von auβen zugeführt. Bei solchen Prozessen wird die Prozesskurve im linksgängigen Drehsinn durchlaufen, weshalb man von linksgängigen Kreisprozessen spricht. Diese Kreisprozesse werden als Wärmepumpenprozesse bezeichnet.

Der Wärmepumpenprozess kann im Prinzip dadurch realisiert werden, dass man die Laufrichtung einer Wärmekraftmaschine umkehrt und ihr mechanische Arbeit zuführt. Diese aufgewandte Arbeit W_{auf}, lässt sich auch beim Wärmepumpenprozess als Flächeninhalt der vom linksgängigen Kreisprozess eingeschlossenen Fläche wiederfinden.

Leistungszahl

Beim Wärmepumpenprozess, nur dieser wird im Folgenden betrachtet, ist die dem warmen Reservoir zugeführte Wärme der Nutzen. Damit ergibt sich die Leistungszahl zur Bewertung des Wärmepumpenprozesses wie folgt:

$$\varepsilon = \frac{Nutzen}{Aufwand} = \frac{|Q_{ab}|}{W_{auf}} = \frac{|Q_{ab}|}{|Q_{ab}| - Q_{zu}} = \frac{1}{\eta}$$

Die Leistungszahl des Wärmepumpenprozesses ist der Kehrwert des Wirkungsgrades beim Wärmekraftprozess. Für die Leistungszahl gilt offensichtlich stets: $\varepsilon > 1$.

Der Grenzfall $\varepsilon = 1$ hätte zur Folge, dass die Nutzwärme ausschlieβlich aus der aufgewandten Arbeit gespeist wird. Ein Wärmepumpen fände nicht mehr statt.

Carnot'sche Kreisprozess

Der Carnot'sche Kreisprozess stellt ein idealer Kreisprozess dar. Er besteht aus 2 Isothermen sowie 2 Adiabaten, wobei die Wärmeaufnahme und Wärmeabgabe bei konstanter Temperatur erfolgen.

WERKSTOFFEIGENSCHAFTEN

$$\sigma_z = \frac{F}{S_0}$$

$$\sigma_z,\ Zugspannung$$

$$R_e = \frac{F_e}{S_0}$$

$$R_e,\ Streckgrenze\ oder\ Drehgrenze$$

$$R_m = \frac{F_m}{S_0}$$

$$R_m,\ Zugfestigkeit$$

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta L}{L_0} \times 100$$

$$\varepsilon,\ Dehnung$$

$$A = \frac{\Delta L_{Br}}{L_0}$$

$$\Delta L_{Br},\ Bruchdehnungslänge$$

$$\Delta L,\ Bruchdehnung$$

$$\nu = \frac{R_e}{\sigma_{z,zul}}$$

$$\nu,\ Sicherheitszahl$$

Dat Komplett Buch vun der Säit vun all de beschten Zauberer déi d'Welt jeemools kannt huet. Erlieft Luxformel an engem neien ongewinnte Format...

Versioun 1 - Update 69

Erstallt vum: Niederkorn Damon