

TRIGONOMETRIE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Vocabulaire

Soit ABC un triangle rectangle en C :

- le segment $[AB]$ est l'hypoténuse du triangle ABC .
- le segment $[AC]$ est le cotée adjacent de l'angle $\hat{C}AB$.
- le segment $[CB]$ est le cotée opposé de l'angle $\hat{C}AB$.

Démonstration

Fonctions trigonométriques

Définition

Soit ABC un triangle rectangle en C , et soit $\hat{\alpha}$ l'angle en A de ce triangle. On définit les fonctions trigonométriques suivant de cet angle:

1. Le sinus de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\sin(\hat{\alpha}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

2. Le cosinus de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

3. La sécante de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\sec(\hat{\alpha}) = \frac{\text{hypothénuse}}{\text{adjacent}}$$

4. Le cosécante de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\csc(\hat{\alpha}) = \frac{\textit{hypothènuse}}{\textit{opposé}}$$

5. La tangente de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\tan(\hat{\alpha}) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}}$$

6. La cotangente de l'angle $\hat{\alpha}$:

$$\cot(\hat{\alpha}) = \frac{\textit{adjacent}}{\textit{opposé}}$$

Conséquences

1. La mesure d'un angle est en degrés, mais le cosinus, le sinus et la tangente n'ont pas d'unité. Ce sont des rapports de longueurs.
2. Les rapports ne dépendent pas des longueurs choisissés, mais uniquement de la mesure de l'angle.
3. Dans un triangle rectangle le côté plus long est toujours l'hypoténuse on a donc:

$$0 \leq \sin(\hat{\alpha}) \leq 1$$

$$0 \leq \cos(\hat{\alpha}) \leq 1$$

mais

$$0 < \tan(\hat{\alpha})$$

Formule fondamentale de la trigonométrie

Définition

Pour toute mesure α d'un angle aigu, on a:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Démonstration

Soit ABC un triangle rectangle en C avec $\hat{\alpha} = \widehat{ABC}$.

1. Exprimer $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ dans ce triangle:

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} \text{ et } \cos(\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

2. En déduire $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \\ &= \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} \\ &= \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}\end{aligned}$$

D'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}&= \frac{AB^2}{AB^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque

$\cos^2(\alpha) = (\cos(\alpha))^2$ et désigne le carré des $\cos(\alpha)$ idem pour $\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$.

Cette écriture évite des parenthèses.