DÉMONSTRATIONS DES FONCTIONS DÉRIVÉES

Dérivée de la fonction constante

Théorème

La fonction constante f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ et par $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$ est dérivable sur $D_{f'}$ et

$$f'(x) = 0$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction constante f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ et par $f(x) = k$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{k - k}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} \\ &= 0\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction affine

Théorème

La fonction affine f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}$ est:

$$f'(x) = m$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction affine f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{mx+p-(ma+p)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{mx+p-ma-p}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{mx-ma}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{m(x-a)}{x-a}\\ &= a\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction carré

Théorème

La fonction carré f définie sur $D_f=\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=2x.$$

Démonstration

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a.$$

cqfd.

Dérivée de la fonction inverse

Théorème

La fonction inverse f définie sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur D_f et

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

Démonstration

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{ax}\right)=-\frac{1}{a^2}.$$

cqfd.

Dérivée de la fonction racine carrée

Théorème

La fonction racine carrée f définie sur $D_f=\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\&=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\&=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction sinus

Théorème

La fonction sinus f définie sur $D_f=\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\cos(x).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\
&= \sin(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0}+\cos(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{1}\\
&= \cos(a).
\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction cosinus

Théorème

La fonction cosinus f définie sur $D_f = \mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -\sin(x).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}\\
&= \cos(a)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0}-\sin(a)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{1}\\
&= -\sin(a).
\end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction tangente

Théorème

La fonction tangente f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ par $f(x)=\tan(x)$ est dérivable sur son domaine et

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(a+h) - \tan(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)} - \frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{h}. \end{aligned}$$

Regroupons en un seul quotient:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h)\cos(a) - \sin(a)\cos(a+h)}{h\ \cos(a+h)\cos(a)}.$$

Or, par l'identité trigonométrique:

$$\sin(a+h)\cos(a) - \sin(a)\cos(a+h) = \sin(h).$$

D'où

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos(a+h)\cos(a)} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2(a)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(a)}. \end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction exponentielle

Théorème

La fonction $f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^x.$$

Démonstration

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^a(e^h - 1)}{h} = e^a \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

cqfd.

Dérivée de la fonction exponentielle de base a

Théorème

Pour $a > 0$, la fonction $f(x) = a^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = a^x \ln(a).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{a+h} - a^a}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^a(a^h - 1)}{h} \\ &= a^a \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^a \ln(a). \end{aligned}$$

cqfd.

Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction $f(x) = \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln\Big(1+\frac{h}{a}\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{h}{a}\underbrace{\frac{\ln(1+\frac{h}{a})}{\frac{h}{a}}}_{\to 1} \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

cqfd.

Dérivée de la fonction logarithme en base a

Théorème

La fonction $f(x) = \log_a(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $a > 0, a \neq 1$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$
f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.
$$

Démonstration

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(a+h)-\log_a(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\ln(a+h)}{\ln(a)} - \frac{\ln(a)}{\ln(a)}\right) \\
&= \frac{1}{\ln(a)}\lim_{h\to 0} \frac{\ln\big(a+h\big)-\ln(a)}{h} \\
&= \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{a} \\
&= \frac{1}{a\,\ln(a)}.
\end{aligned}
$$

cqfd.

Dérivée de sinus hyperboliques

Théorème

La fonction $f(x)=\sinh(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\cosh(x).$$

Démonstration

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\sinh(a+h)-\sinh(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sinh(a)\cosh(h)+\cosh(a)\sinh(h)-\sinh(a)}{h}$$
$$=\sinh(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cosh(h)-1}{h}}_{0}+\cosh(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sinh(h)}{h}}_{1}$$
$$=\cosh(a).$$

cqfd.

Dérivée de cosinus hyperboliques

Théorème

La fonction $f(x)=\cosh(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\sinh(x).$$

Démonstration

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\cosh(a+h)-\cosh(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cosh(a)\cosh(h)+\sinh(a)\sinh(h)-\cosh(a)}{h}$$

$$= \cosh(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cosh(h)-1}{h}}_{0} + \sinh(a)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sinh(h)}{h}}_{1}$$

$$= \sinh(a).$$

cqfd.

Théorème

La fonction $f(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Démonstration

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\tanh(a+h)-\tanh(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sinh(a+h)}{\cosh(a+h)} - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sinh(a+h)\ \cosh(a) - \sinh(a)\ \cosh(a+h)}{h\ \cosh(a+h)\cosh(a)}.$$

Or, par les formules d'addition :

$$\sinh(a+h)\cosh(a) - \sinh(a)\cosh(a+h) = \sinh(h).$$

D'où

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\sinh(h)}{h}\ \frac{1}{\cosh(a+h)\cosh(a)}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cosh^2(a)}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2(a)}.$$

cqfd.