

# THÉORÈME DE THALÈS

## *Théorème*

Considérons deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sécantes en  $A$  coupées par deux parallèles  $(BC)$  et  $(DE)$ .

Si les droites  $(BC)$  et  $(DE)$  sont parallèles, alors:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

## *Démonstration*

Considérons la première configuration.

1. 1<sup>ière</sup> égalité:  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

- Considérons le triangle  $ADE$  et notons  $h_1$  la hauteur issue de  $E$  du triangle  $ADE$

- $\mathcal{A}_{ADE} = \frac{AD \cdot h_1}{2}$
  - $\mathcal{A}_{ABE} = \frac{AB \cdot h_1}{2}$
  - $\frac{\mathcal{A}_{ADE}}{\mathcal{A}_{ABE}} = \frac{\frac{AD \cdot h_1}{2}}{\frac{AB \cdot h_1}{2}} = \frac{AD}{AB}$

- Notons  $h_2$  la hauteur issue de  $D$  du triangle  $ADE$

- $\mathcal{A}_{ADE} = \frac{AE \cdot h_2}{2}$
  - $\mathcal{A}_{ADC} = \frac{AC \cdot h_2}{2}$
  - $\frac{\mathcal{A}_{ADE}}{\mathcal{A}_{ADC}} = \frac{\frac{AE \cdot h_2}{2}}{\frac{AC \cdot h_2}{2}} = \frac{AE}{AC}$

- Considérons les triangles  $DEB$  et  $DEC$

Notons que les triangles  $DEB$  et  $DEC$  ont une même base  $[DE]$ . De plus, puisque les droites  $(DE)$  et  $(BC)$  sont parallèles, ils ont la même

hauteur  $h$  relative à cette base.

On peut conclure que les deux triangles ont la même aire:

$$\underbrace{\mathcal{A}_D EB}_{\frac{1}{2} \cdot DE \cdot h} = \underbrace{\mathcal{A}_D EC}_{\frac{1}{2} \cdot DE \cdot h}$$

- Comme  $\mathcal{A}_{ABE} = \mathcal{A}_{DEC}$ , on a:

$$\frac{\mathcal{A}_{ADE}}{\mathcal{A}_{ABE}} = \frac{\mathcal{A}_{ADE}}{\mathcal{A}_{ADC}} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

2. 2<sup>ième</sup> égalité:  $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

Soit  $F$  le point d'intersection de la parallèle à la droite  $(AC)$  passant par le point  $D$  et de la droite  $(BC)$ .

Considérons le quadrilatère  $DECF$ .

- Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Donc  $DECF$  est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur.

Donc  $FC = DE$  et  $DF = EC$ .

On peut maintenant appliquer la 1<sup>ière</sup> égalité démontrée précédemment à la figure formée par les droites  $(DA)$  et  $(FC)$  et les droites parallèles  $(DF)$  et  $(AC)$

### ***Remarque***

Le théorème de Thalès permet de calculer une ou plusieurs longueurs manquants dans une de ces configurations.

## **Réciproque de théorème de Thalès**

### ***Théorème***

Considérons deux droites  $(BC)$  et  $(CD)$  sécantes en  $A$ .

Si  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$  et si les points  $ADE$  et les points  $A; E; C$  sont alignés dans le même ordre, alors les droites  $(DE) \parallel (BC)$  sont parallèles.

### **Contraposée de théorème de Thalès**

### ***Théorème***

Considérons deux droites  $(BD)$  et  $(CE)$  sécantes en  $A$ .

Si  $\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$ , alors les droites  $(BC)$  et  $(DC)$  ne sont pas parallèles.