FONCTION EXPONENTIELLE

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R} :\ f'(x) = f(x)\ et\ f(0) = 1$$

Définition

La fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f\ et\ f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

Théorème

La fonction f définie par $f(x) = \exp(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \exp(u(x))$$

Théorème

Pour tout réel a et tout réel b,

$$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

Démonstration

On fixe le réel a et on introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$h = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \left(\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}\right)'$$

$$= \frac{1}{\exp\left(a\right)} \cdot \left(\exp\right)'\left(x+a\right)$$

$$= \frac{1}{\exp\left(a\right)} \cdot \left(x+a\right)' \cdot \exp\left(x+a\right)$$

$$= \frac{1}{\exp\left(a\right)} \cdot 1 \cdot \exp\left(x+a\right)$$

$$= \frac{\exp\left(x+a\right)}{\exp\left(a\right)}$$

$$= h'(x)$$

De plus: $h\left(0\right) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$

La fonction h est telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$: il s'agit donc de la fonction exponentielle.

Ainsi, pour tout réel x :

$$h\left(x\right) = \exp\left(x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\exp\left(x+a\right)}{\exp\left(a\right)} = \exp\left(x\right)$$

Avec $| \cdot \exp(a) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \exp\left(x+a\right) = \exp\left(x\right) \cdot \exp\left(a\right)$$

Pour $x = b$, on obtient:

$$\Leftrightarrow \exp\left(a+b\right) = \exp\left(a\right) \cdot \exp\left(b\right)$$

cqfd

Théorème

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(-a\right) = \frac{1}{\exp\left(a\right)}\ et\ \exp\left(a-b\right) = \frac{\exp\left(a\right)}{\exp\left(b\right)}$$

Démonstration

On sait que: $\forall a,\ b \in \mathbb{R} : \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ (1)

1 Pour $b = -a$, on obtient :

$$\exp[a + (-a)] = \exp(a) \cdot \exp(-a)$$

$$\Leftrightarrow \exp(0) = \exp(a) \cdot \exp(-a)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \exp(a) \cdot \exp(-a) \mid \cdot \frac{1}{\exp(a)},\ car\ \exp(a) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \ \ (2)$$

2) On a:

$$\exp(a-b) = \exp[a + (-b)]$$

Par (1):

$$= \exp(a) \cdot \exp(-b)$$

Par (2):

$$= \exp(a) \cdot \frac{1}{\exp(b)}$$

$$= \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

cqfd

Théorème

$\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$$

Théorème

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n \cdot x) = [\exp(x)]^n$$

Démonstration

Montrons d'abord par récurrence que la formule est vraie pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.

$$\mathscr{P}(x) : \exp(n \cdot x) = [\exp(x)]^n$$

Initialisation:

$\mathscr{P}(0)$ est vraie.

En effet $\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1$ et $[\exp(x)]^0 = 1$

Hérédité:

Supposons que l'on ait $\mathscr{P}(n)$.

Alors on aurait:

$$\exp[(n+1)x] = \exp(nx + x)$$
$$= \exp(nx) \cdot \exp(x)$$

par l'hypothèse de récurrence

$$= \exp[(x)]^n \cdot \exp(x)$$
$$= \exp[(x)]^{n+1}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N} : \exp(nx) = [\exp(x)]^n$

Par ailleurs,

$$\exp(-nx) = \frac{1}{\exp(nx)} = \frac{1}{[\exp(x)]^n} = [\exp(x)]^{-n}$$

La formule est donc vraie pour tout entier relatif.

cqfd

Notation

$$e = \exp(1)$$

e est appelé nombre exponentiel, nombre d'Euler ou constante de Néper.

$$e \simeq 2.71828$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$$

Conventions

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(e^x)' = e^x$$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $\forall x \in I$:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Variations

Théorème

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x > 0$$

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}$:

Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Démonstration

Démontrons que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ en comparant e^x à x.

Pour cela, étudions la fonction différence f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = e^x - x$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x > 1$$
$$\Leftrightarrow e^x > e^0$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

f sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geqslant 1$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x > x$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc par le théorème de comparaison, on a:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

cqfd

Démontrons que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Posons $t = -x \Leftrightarrow x = -t$

Si $x \to -\infty, t \to +\infty$

Donc,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{t \to +\infty} e^{-t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{e^t}}_{\to +\infty}$$

$$= 0$$

cqfd

Courbe représentative

Théorème

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0}$$

par définition de la dérivabilité de exp en 0

$$= (\exp)'(0)$$

$$= \exp(0)$$

$$= 1$$

Croissance comparée

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration 1

Démontrons que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ en comparant e^x à $\frac{x^2}{2}$

Pour cela, étudions la fonction différence f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x - x$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) =$$

Or:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x > 1$$
$$\Leftrightarrow e^x > e^0$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

Comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant (pour la fonction f'):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	1	$\nearrow$	

f' admet sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) \geqslant 1$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) > 0$$

On obtient alors le tableau de variations pour la fonction f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$\nearrow$	1	$\nearrow$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) > 1$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, donc par le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration 2

Démontrons que:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Posons $t = -x \Leftrightarrow x = -t$

Si $x \to -\infty$, alors $t \to +\infty$

Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} -te^{-t}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-t}{e^t}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\frac{e^t}{t}}$$

$$= 0$$

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Théorème

$\forall x \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration 1

Démontrons que:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Posons $t = \frac{x}{n} \Leftrightarrow x = t \cdot n$

Si $x \to +\infty$, alors $t \to +\infty$, car $n \geqslant 1$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{nt}}{(nt)^n}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{(e^t)^n}{n^n \cdot t^n}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{n^n}}_{>0} \cdot \left(\underbrace{\frac{e^t}{t}}_{\to +\infty} \right)^n$$

$$= +\infty$$

Démonstration 2

Posons $t = -x \Leftrightarrow x = -t$;

lorsque $x \to -\infty$ alors $t \to +\infty$

- <u>Si n est pair:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = \lim_{t \to +\infty} (-t)^n \cdot e^{-t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{e^t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{t^n}{e^t}}_{\to +\infty}}$$

$$= 0$$

- <u>Si n est impair:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = \lim_{t \to +\infty} (-t)^n \cdot e^{-t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{-t^n}{e^t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{-1}{\underbrace{\frac{t^n}{e^t}}_{\to +\infty}}$$

$$= 0$$