



闭路制导与能量管理理论

许志

西北工业大学航天学院

陕西省空天飞行器设计重点实验室

西安 2023.06



汇报提纲

闭路制导原理

需用速度 \vec{V}_r 计算

闭路制导计算

闭路制导诸元计算

耗尽关机能量管理



上次课程内容回顾

- 摄动制导由几部分组成？
- 摄动制导诸元偏导数包含哪些参数，如何计算？
- 摄动制导是开环制导还是闭环制导？
- 摄动制导的优缺点？
- 摄动制导核心是跟踪标准轨迹，快速响应发射如何适用？
- 当采用耗尽关机时，摄动制导如何适用？



□ 闭路制导定义

- 闭路制导是在导航计算的基础上，根据导弹运动的当前状态(位置 \vec{r} 、速度 \vec{V} ，时间 t)和目标位置 \vec{r}_t ；
- 根据弹的当前状态，确定一条能命中目标的参考弹道（某种意义下的最佳弹道），按照选的飞行路径实时计算出能命中目标的“需要速度 \vec{V}_r ”；
- 以此求出待增速度 $\vec{V}_g = \vec{V}_r - \vec{V}$ ，而后控制弹的推力方向，以保证 \vec{V}_g 在最短时间内达到零；
- 当 $\vec{V}_g = 0$ 关闭发动机。按照“需要速度”的定义，关机后导弹将经过被动段飞行而命中目标。



□ 需要速度 \vec{V}_r 及虚拟目标定义

- 需要速度：导弹在任意一点处的需要速度是这样一個速度矢量，若导弹具有此速度并立即关闭发动机，而后导弹将按惯性飞行，经自由飞行段和再入段而达到目标点。
- 需要速度将导弹的瞬时位置同目标的位置联系起来，由于在自由飞行段和再入段中，导弹受到具有扁率影响的地球引力的作用及再入空气阻力的作用，其运动轨迹不是椭圆轨道，其轨道不能用简单的解析的方法求得，计算比较复杂。
- 根据需要速度定义，求解每一时刻点需要速度需要，需解自由段弹道和再入段弹道，需要迭代计算才能确定；即使采用自由段解析解和再入段解析解实时计算也比较复杂，为了简化计算提出**虚拟目标**的概念；
- 所谓**虚拟目标**就是以需要速度为初值的开普勒椭圆轨道与地球表面的交点入，于是,若以虚拟目标代替实际目标便可以利用椭圆轨道求需要速度，而此需要速度的实际落点便应是真实目标,从而大大简化了弹上计算；



□ 需要速度 \vec{V}_r 的确定

- 假定目标不随地球旋转时，需要速度的确定
- 目标随地球旋转时，需要速度的确定
- \vec{V}_r 投影到发射惯性坐标系。



需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 目标不随地球旋转时需要速度 \vec{V}_r 的确定

- 在有心力场作用下的自由运动物体，在惯性空间看它的运动是平面椭圆轨道。因此，通过惯性空间两点M和T椭圆轨道及点M的需要速度可按下述方法确定；
- 假设M点的绝对经度 λ_M^A ，地心纬度 ϕ_M ，T点的绝对经度 λ_T^A ，地心纬度 ϕ_T ，T点与M点的绝对经差 $\lambda_{MT}^A = \lambda_T^A - \lambda_M^A$ ，则M点到T点的地心角 β 、轨道平面与过M点点午面夹角 $\hat{\alpha}$ 可确定如下：

根据余弦定理

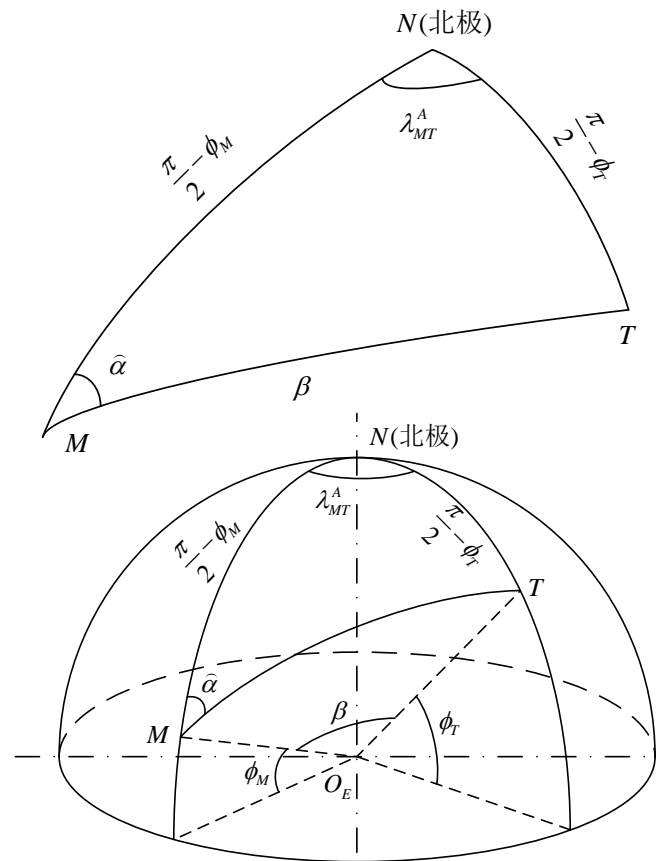
$$\cos \beta = \sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT}^A$$

当 $\beta < 180^\circ$ 时，可取

$$\beta = \arccos(\sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT}^A)$$

并可写出

$$\begin{cases} \sin \hat{\alpha} = \cos \phi_T \frac{\sin \lambda_{MT}^A}{\sin \beta} \\ \cos \hat{\alpha} = (\sin \phi_T - \cos \beta \sin \phi_M) / \sin \beta \cos \phi_M \end{cases}$$





需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 目标不随地球旋转时需要速度 \vec{V}_r 的确定

通过M、T两点椭圆轨道方程为

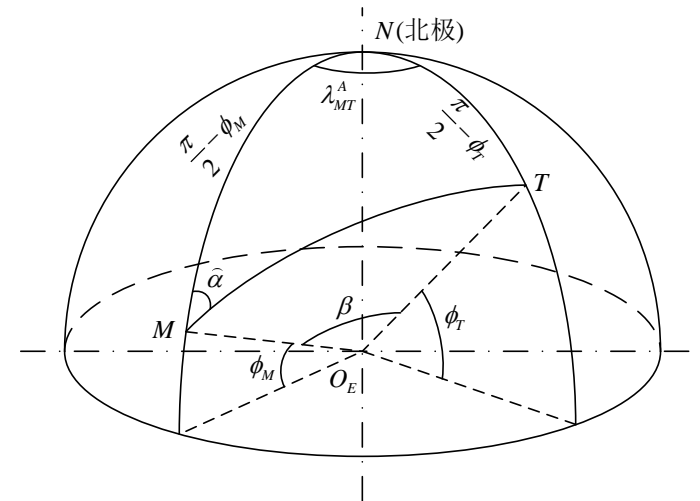
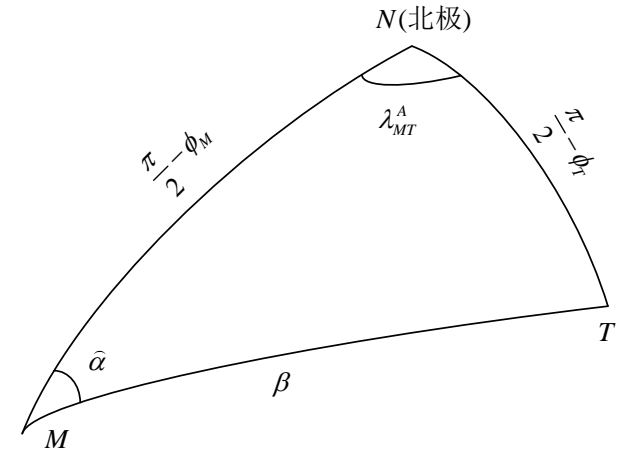
$$r_K = p / (1 - e \cos \xi_K)$$

$$r_T = p / (1 - e \cos(\xi_K + \beta))$$

两个方程，但有三个待定常数，所以有无穷多组解

可以加约束条件：

- 最小能量轨道，即能达到T点的最小速度对应的轨道；
- M点弹道倾角 θ_H 限定
- M点速度大小限定
- 被动段飞行时间限定





需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 已知椭圆轨道上一点的地心矢量 \vec{r} 、速度 \vec{V} 、速度倾角 θ_H ，求轨道参数

椭圆轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \xi}$$

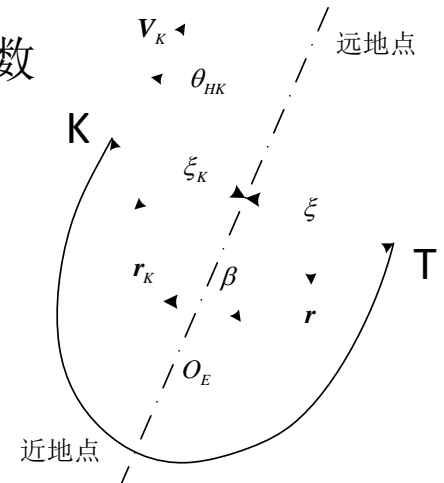
若已知椭圆轨道上K点的地心矢量、速度、速度倾角，求轨道参数

$$K = r_K v_K \cos \theta_{HK}$$

$$p = K^2 / fM$$

$$e = \left(1 - \frac{p}{r_k}\right) / \cos \xi_K$$

$$\xi_K = \arctan \left[\frac{p v_K \sin \theta_{HK}}{\left(\frac{p}{r_k} - 1\right) K} \right]$$



椭圆轨道示意图

质点沿椭圆运动，转过地心角 β 时对应的矢经 r ，和飞行时间 t_f 分别为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\xi_K + \beta)}$$

$$\xi = \xi_K + \beta$$

$$t_f = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left(\frac{p}{1 - e^2} \right)^{3/2} [\gamma - \gamma_K + e(\sin \gamma - \sin \gamma_K)]$$

$$\begin{cases} \gamma = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi}{2} \right] \\ \gamma_K = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi_K}{2} \right] \end{cases}$$



需用速度 \vec{V}_r 计算

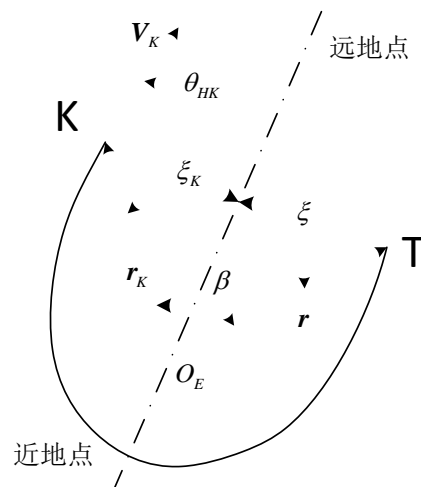
□ 通过定点K、T的椭圆轨道——给定K点轨道倾角 θ_{HK} 的椭圆轨道

若给定K点轨道倾角 θ_{HK}

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \xi_k} \rightarrow e = \left(1 - \frac{p}{r_k}\right) / \cos \xi_k \quad \text{式中} \quad \xi_k = \arctan \left[\frac{pv_k \sin \theta_{HK}}{\left(\frac{p}{r_k} - 1\right)K} \right] = \arctan \left[\frac{\tan \theta_{HK}}{\left(1 - \frac{r_k}{p}\right)} \right]$$

$$r_T = p / (1 - e \cos(\xi_k + \beta)) \rightarrow r_T = \frac{p}{1 - \left(1 - \frac{p}{r_k}\right)(\cos \beta - \sin \beta \tan \xi_k)}$$

$$\rightarrow p = \frac{r_T(1 - \cos \beta)}{1 - \frac{r_T}{r_k}(\cos \beta - \sin \beta \tan \theta_{HK})}$$



椭圆轨道示意图

于是，给定 θ_{HK} ，由三式求出唯一的一组椭圆轨道参数 p, ξ_k, e

K点速度由该式确定 $v_K = \frac{\sqrt{p \cdot fM}}{r_K \cos \theta_{HK}}$

K点到T点的飞行时间按下式计算 $t_f = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left(\frac{p}{1 - e^2} \right)^{3/2} [\gamma_T - \gamma_K + e(\sin \gamma_T - \sin \gamma_K)]$

式中 $\begin{cases} \gamma_T = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi_T}{2} \right] \\ \gamma_K = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi_K}{2} \right] \end{cases} \quad \xi_T = \xi_K + \beta$



需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 通过定点K、T的椭圆轨道——给定目标T点轨道倾角 θ_{HT} 的椭圆轨道

若给定T点轨道倾角 θ_{HT}

$$\tan \xi_T = \frac{\tan \theta_{HT}}{\left(1 - \frac{r_T}{p}\right)} \quad e = \left(1 - \frac{p}{r_T}\right) / \cos \xi_T$$

另外

$$\begin{aligned} r_K &= p / (1 - e \cos \xi_K) = \frac{p}{1 - e \cos (\xi_T - \beta)} \\ &= \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{r_T}\right) \left(\left(\frac{p - r_T}{r_T}\right) \cos \beta + \tan \theta_{HT} \sin \beta \right)} \\ &= \frac{p}{1 + \left(\left(\frac{p}{r_T} - 1\right) \cos \beta + \left(\frac{p}{r_T}\right) \tan \theta_{HT} \sin \beta \right)} \\ &= \frac{p}{1 - \cos \beta + \frac{p}{r_T} (\cos \beta + \tan \theta_{HT} \sin \beta)} \end{aligned}$$



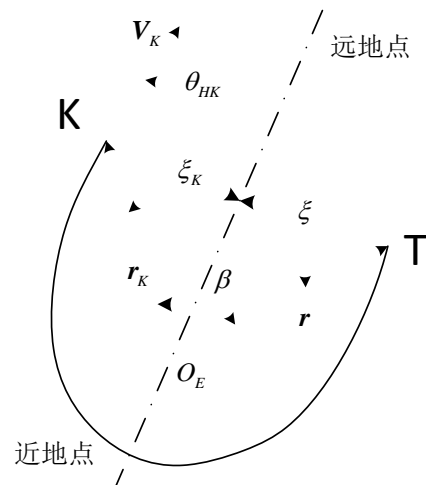
$$p = \frac{r_K (1 - \cos \beta)}{1 - \frac{r_K}{r_T} (\cos \beta + \tan \theta_{HT} \sin \beta)}$$

联立求解 p, ξ_T, e

$$\left. \begin{aligned} \xi_T &= \xi_K + \beta \\ &\} \text{求解 } p, \xi_T, e \end{aligned} \right\}$$

关于K点速度大小及飞行时间

$$t_f = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left(\frac{p}{1 - e^2} \right)^{3/2} [\gamma_T - \gamma_K + e (\sin \gamma_T - \sin \gamma_K)]$$



椭圆轨道示意图

若给定K点轨道倾角 θ_{HK}

$$\theta_{HK} = \arctan \left[\left(1 - \frac{r_K}{p}\right) \tan (\xi_T - \beta) \right]$$



需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 通过定点K、T的椭圆轨道——关于K点的速度的大小 v_K 与倾角 θ_{HK} 关系

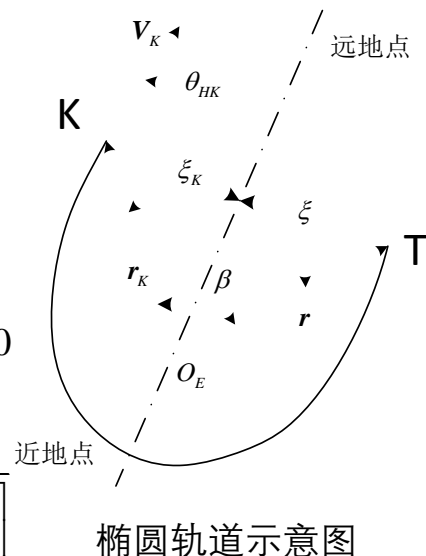
若给定K点的速度的大小，整理可得到关于 $\tan\theta_{HK}$ 的二次代数方程

$$p = \frac{r_T(1 - \cos\beta)}{1 - \frac{r_T}{r_K}(\cos\beta - \sin\beta \tan\theta_{HK})} \quad v_K = \frac{\sqrt{p \cdot fM}}{r_K \cos\theta_{HK}}$$

➡
$$fM(1 - \cos\beta)\tan^2\theta_{HK} - r_K v_K^2 \sin\beta \tan\theta_{HK} + \left[fM(1 - \cos\beta) - r_K v_K^2 \left(\frac{r_K}{r_T} - \cos\beta \right) \right] = 0$$

该方程的两个根为

$$\tan\theta_{HK} = \frac{r_K v_K^2 \sin\beta \pm \sqrt{r_K^2 v_K^4 \sin^2\beta - 4fM(1 - \cos\beta) \left[fM(1 - \cos\beta) - r_K v_K^2 \left(\frac{r_K}{r_T} - \cos\beta \right) \right]}}{2fM(1 - \cos\beta)}$$



根号内的式子大于等于零时， $\tan\theta_{HK}$ 才有实根，即 v_K 应满足如下不等式

$$r_K^2 \sin^2\beta v_K^4 + 4fM(1 - \cos\beta)r_K \left(\frac{r_K}{r_T} - \cos\beta \right) v_K^2 - 4[fM(1 - \cos\beta)]^2 \geq 0$$

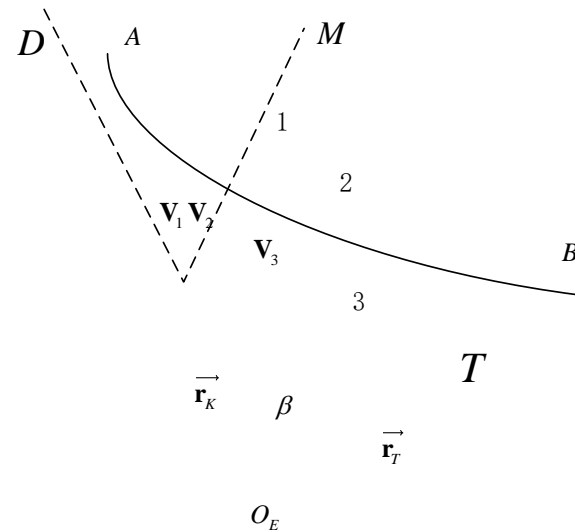
或

$$v_K^2 \geq v_K^{*2} \quad v_K^{*2} = \frac{2fM(1 - \cos\beta) \left[\cos\beta - \frac{r_K}{r_T} + \sqrt{\left(\frac{r_K}{r_T} - \cos\beta \right)^2 + \sin^2\beta} \right]}{r_K \sin^2\beta}$$

v_K^{*2} 是由 r_K , r_T 和 β 所唯一确定的，而不等式表明只有K点的速度 $v_K \geq v_K^*$ 时K点才有可能到达T点，所以称为 $v_K = v_K^*$ 所对应的椭圆轨道为最小能量轨道，此时 θ_{HK} 有唯一的解 θ_{HK}^*


$$\tan\theta_{HK}^* = \frac{r_K v_K^{*2} \sin\beta}{2fM(1-\cos\beta)}$$
$$\theta_K^* = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\sin \beta}{r_K / r_T - \cos \beta} \right]$$
$$v_K^* = \left[\frac{2fM(1 - \cos\beta)}{r_K \sin\beta} \tan\theta_{HK}^* \right]^{\frac{1}{2}}$$

可以证明： $\overrightarrow{O_E K}$ 的延长线 \overrightarrow{KD} 与直线 \overrightarrow{KT} 是此双曲线的两个渐近线，最小能量速度 \mathbf{v}_K^* 所在方向 \overrightarrow{KM} 是角DKT的平分线，双曲线相对于角平分线用是对称的。





需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 限定K点到T点的飞行时间 $t_f = T_\alpha$ 的椭圆轨道

限定K点到T点的飞行时间 $t_f = T_\alpha$, 可以通过迭代计算下列各式

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{r_T(1 - \cos\beta)}{1 - \frac{r_T}{r_K}(\cos\beta - \sin\beta \tan\theta_{HK,i})} \\ \xi_{K,j} = \arctan \left[\frac{\tan\theta_{HK,i}}{1 - \frac{r_K}{p_i}} \right] \\ \xi_{T,i} = \beta + \xi_{K,i} \\ e_j = \left(1 - \frac{p_i}{r_K} \right) / \cos\xi_{K,i} \\ \gamma_{T,i} = 2\arctan \left[\sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}} \tan \frac{\xi_{T,i}}{2} \right] \\ \gamma_{K,i} = 2\arctan \left[\sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}} \tan \frac{\xi_{K,i}}{2} \right] \\ t_{f,i} = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left(\frac{p_i}{1-e_i^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\gamma_{T,i} - \gamma_{K,i} + e_i (\sin\xi_{T,i} - \sin\xi_{K,i}) \right] \\ \Delta\theta_i = (T_\alpha - t_{f,i}) \frac{\theta_{HK,i} - \theta_{HK,i-1}}{t_{f,i} - t_{f,i-1}} \\ \theta_{HK,i+1} = \theta_{HK,i} + \Delta\theta_i \end{array} \right.$$

当 $|T_\alpha - t_{f,i+1}|$ 小于允许值时结束迭代, 并取: $\theta_{HK} = \theta_{HK,i+1}$ $p = p_{i+1}$ $e = e_{i+1}$ $\dots j$

$\theta_{HK,0}, \theta_{HK,1}$ 可根据经验选取。



需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 目标随地球旋转时需要速度 \vec{V}_r 的确定

- 因为导航计算通常是在发射惯性坐标系内进行的，其飞行过程中任一点K(飞行时间 t_K)的速度、位置是相对于发射惯性坐标系的，而目标点T是与地球固连的，它是随地球旋转的；
- 若按照地球不旋转条件下所确定的需要速度，则当具有此速度的导弹落地时，目标点T已随地球转过了角 $(t_K + t_f) \Omega$ 。于是考虑地球旋转时的需要速度必须采用迭代算法来确定。
- 从惯性空间看，T点与K点的绝对经差 λ_{KT}^A 是变化的，假定被动段飞行时间 t_f 已给定，则有

$$\lambda_{KT}^A = \lambda_{OT} - \lambda_{OK}^A + (t_k + t_f) \Omega$$

式中 $\lambda_{OT} = \lambda_T - \lambda_O$

λ_{OK}^A ——K点与发射点O之间的绝对经差

t_k ——由起飞至K点的飞行时间

即，若给定 t_f ，便可按地球不旋转情况确定需要速度 v_r



需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 目标随地球旋转时需要速度 \vec{V}_r 的确定——由 p, ξ, e 计算 v_r

当需要速度倾角给定时，若未限定飞行时间 t_f ，则 v_r 要同时满足一组超越方程，计算需要速度的迭代公式如下

由 p, ξ, e 计算 v_r ，对 $j=0,1,2,\dots$ 计算

$$P = \frac{r_T(1 - \cos \beta)}{1 - \frac{r_T}{r_M}(\cos \beta - \sin \beta \tan \theta_H)}$$

$$\lambda_{KT}^A = \lambda_{OT} - \lambda_{OK}^A + (t_k + t_f)\Omega$$

$$V_M = \frac{\sqrt{fM \cdot P}}{r_M \cos \theta_H}$$

$$\xi_K = \arctan \left[\frac{\tan \theta_H}{1 - r_M/P} \right]$$

$$\xi_T = \xi_M + \beta$$

$$\lambda_{MT,j}^A = \lambda_{OT} - \lambda_{OM,j}^A + (t_k + t_{f,j})\Omega$$

$$\beta_j = \arccos(\sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT,j}^A)$$

$$\theta_{H,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sin \beta_j}{r_M/r_T - \cos \beta_j} \right) & (\text{最小能量轨道}) \\ \theta_H & (\text{根据需要给定}) \end{cases}$$

$$P_j = \frac{r_T(1 - \cos \beta_j)}{1 - \frac{r_T}{r_M}(\cos \beta_j - \sin \beta_j \tan \theta_{H,j})}$$

$$\xi_{M,j} = \arctan \left(\frac{\tan \theta_{H,j}}{1 - r_M/P_j} \right)$$

$$\xi_{T,j} = \beta_j + \xi_{M,j}$$

$$e_j = \left(1 - \frac{P_j}{r_M} \right) / \cos \xi_{M,j}$$

$$\gamma_{T,j} = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e_j}{1-e_j}} \tan \frac{\xi_{T,j}}{2} \right)$$

$$\gamma_{M,j} = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e_j}{1-e_j}} \tan \frac{\xi_{M,j}}{2} \right)$$

$$t_{f,j+1} = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left(\frac{P_j}{1-e_j^2} \right)^{3/2} \left[\gamma_{T,j} - \gamma_{M,j} + e_j (\sin \gamma_{T,j} - \sin \gamma_{M,j}) \right]$$

当 $|P_{j+1} - P_j|$ 小于允许值（*允许值可取0.1米或1米），结束迭代。取

$\beta = \beta_{j+1}, P = P_{j+1}, \theta = \theta_{j+1}$ ，然后，按下式计算 v_r

$$V_R = \frac{\sqrt{fM}}{r_M \cos \theta_H} \sqrt{P} \begin{cases} \sin \hat{\alpha} \\ \cos \hat{\alpha} \\ \theta_H \end{cases} \vec{V}_R$$

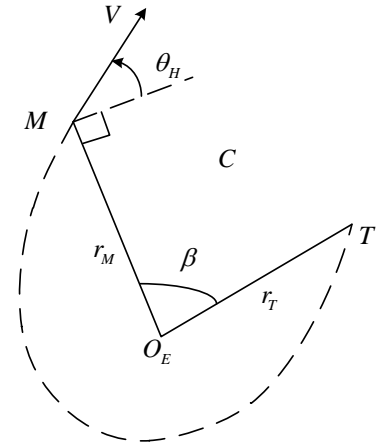


需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 目标随地球旋转时需要速度 \vec{V}_r 的确定——由C, S, α 计算 v_r

定义：C为连接M、T两点的弦长，S为三角形 $O_E MT$ 的半周长，对 $j=0,1,2,\dots$ 迭代计算

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{TM,j}^A = \lambda_{OT}^A - \lambda_{OM,j}^A + (t_k + t_{f,j})\Omega \\ \beta_j = \arccos(\sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT,j}^A) \\ C_j = (r_M^2 + r_T^2 - 2r_M r_T \cos \beta_j)^{1/2} \\ S_j = \frac{1}{2}(r_M + r_T + C_j) \\ \theta_{H,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{r_T}{C_j} \sin \beta_j\right) & (\text{最小能量轨道}) \\ \theta_H & (\text{根据需要给定}) \end{cases} \\ a_j = \begin{cases} \frac{r_M}{2} \left\{ 1 + \frac{r_T(1 - \cos \beta_j)}{2[r_M \cos^2 \theta_{H,j} - r_T \cos^2(\theta_{H,j} + \beta_j/2)]} \right\} \\ S_j/2 \end{cases} \quad (\text{最小能量轨道}) \\ \alpha_{M,j} = \begin{cases} 2 \arcsin \sqrt{S_j/2a_j} \\ \pi \end{cases} \quad (\text{最小能量轨道}) \\ \beta_{M,j} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{S_j - C_j}{2a_j}} \\ t_{f,j+1} = \begin{cases} \frac{a_j^{3/2}}{\sqrt{fM}} [2\pi + \sin \beta_{M,j} + \sin \alpha_{M,j} - (\beta_{M,j} + \alpha_{M,j})] \\ \frac{a_j^{3/2}}{\sqrt{fM}} (\pi + \sin \beta_{M,j} - \beta_{M,j}) \end{cases} \quad (\text{最小能量轨道}) \end{array} \right.$$



当 $|C_{j+1} - C_j|$ 小于允许值，结束迭代。取
 $\beta = \beta_{j+1}, C = C_{j+1},$
 $\theta = \theta_{j+1}$, 然后，按下式计算 v_r

$$\left. \begin{array}{l} V_R = \sqrt{fM} \sqrt{\frac{2}{r_M} - \frac{1}{a}} \\ \sin \hat{\alpha} \\ \cos \hat{\alpha} \\ \theta_H \end{array} \right\} \vec{V}_R$$



需用速度 \vec{V}_r 计算

□ 目标随地球旋转时需要速度 \vec{V}_r 的确定——关于 θ 讨论

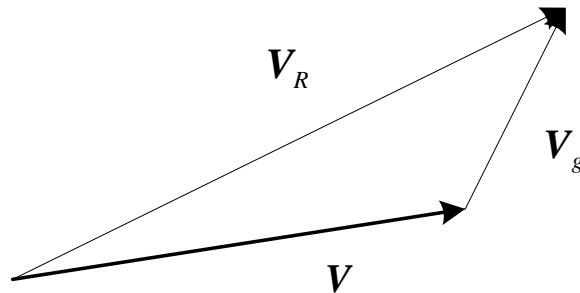
当 \vec{r}_M, \vec{r}_T 给定后，最小能量轨道对应唯一的一个 θ_H 角，对于非最小能量轨道，给定一个 V_R 对应两个 θ_H 角。通常可按最小能量轨道选 θ_H 角，有时可根据特殊需要来选取 θ_H 角，例如

- 从突防要求一定得再入角出发来确定 θ_H 角；
- 远程导弹要打小射程，根据此要求 θ_H 角。
- 根据工具误差对落点影响最小的原则来确定 θ_H 角



□ 待增速度 V_g 及其所满足的微分方程

- **待增速度：** 需要速度和导弹实际速度之差为待增速度 $V_g = V_R - V$ 。
- **待增速度的物理意义：** 由导弹当前状态 (r, V) 给其瞬时增加速度增量 V_g ,而后导弹依惯性飞行便可命中目标。
- **关机条件应为：** $V_g = 0$
- 待增速度不可能瞬时增加，因而导引的任务是如何使导弹尽快满足关机条件，使燃料消耗最少。





闭路制导导引

□ 待增速度 V_g 及其所满足的微分方程（续）

- 待增速度不可能瞬时增加，因而导引的任务是如何使导弹尽快满足关机条件，使燃料消耗最少。必须考虑导引过程中 V_g 所满足的微分方程

$$\frac{dV_g}{dt} = \frac{dV_R}{dt} - \frac{dV}{dt}$$

因为 V_R 是 r 和 t 的函数，所以

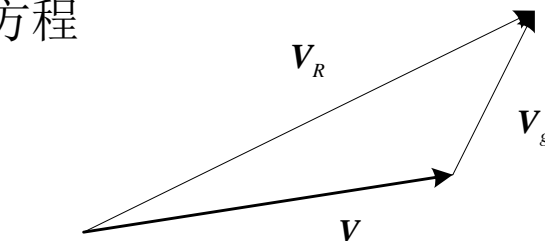
$$\frac{dV_R}{dt} = \frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{r}^T} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial V_R}{\partial t} = \frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{r}^T} \mathbf{V} + \frac{\partial V_R}{\partial t}$$

又

$$\frac{dV}{dt} = a$$

若导弹在 t 时刻的速度为 V_R ，即有

$$\Rightarrow \frac{dV_g}{dt} = \frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{r}^T} \mathbf{V}_g - a$$



$$\frac{dV_g}{dt} = \frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{r}^T} \mathbf{V} + \frac{\partial V_R}{\partial t} - a$$

若使导弹产生的 a 与 V_g 的方向一致， $\frac{dV_g}{dt}$ 便为最大的负值， V_g 将以最快的速度达到零。



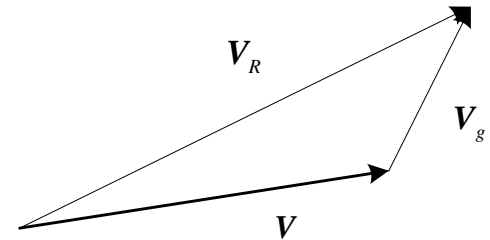
□ 待增速度 V_g 及其所满足的微分方程 (续)

$$Q = \frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{r}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rx}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Rx}}{\partial y} & \frac{\partial V_{Rx}}{\partial z} \\ \frac{\partial V_{Ry}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Ry}}{\partial y} & \frac{\partial V_{Ry}}{\partial z} \\ \frac{\partial V_{Rz}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Rz}}{\partial y} & \frac{\partial V_{Rz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

于是，可写成如下矩阵形式

$$\frac{dV_g}{dt} = -QV_g - a$$

V_R 的变化仅与 a 、 $\frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{r}^T}$ 有关，而 $\frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{r}^T}$ 的各个元素的变化很缓慢，可以预先求出它们随时间变化的曲线，并将其存入弹上计算机中，便可实时计算 V_g ，当 V_g 的三个分量中的大者小于允许值便可关机。



对于中近程导弹 Q 的元素可以取常值，所以 V_g 的实时计算非常简单。



导引计算公式

□ 闭路制导导引指令计算——对关机点 \vec{V}_R 的预估

在导弹飞出大气层后转入闭路制导段。此时，导弹的机动不再受结构强度的限制了，可以控制导弹进行较大的机动。闭路导引段没有固定的飞程序，按照实时算出的俯仰、偏航信号来控制，其滚动控制仍与固定程序段一样，保持其滚动角为零。

- 按照“绝对加速度 \vec{a} 与 \vec{V}_g 一致”的原则进行导引，当 \vec{V}_R 不变时，将是“燃料消耗最少”意义下的最优导引；
- 在闭路导引段中，由于导弹位置的不断变化，其对应的 \vec{V}_R 也在不断的变化，故按照“绝对加速度 \vec{a} 与 \vec{V}_g 一致”的原则进行的导引便不是最优了。
- 但因使 \vec{V}_R 的变化比较缓慢，可以对关机点 \vec{V}_R 的进行预估得

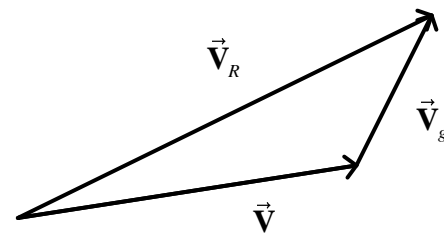
将 \vec{V}_R 在 t_i 点展开，近似取

$$\vec{V}_{R,K} = \vec{V}_R(t_i) + \dot{\vec{V}}_R(t_i)(t_K - t_i)$$

式中

$$\dot{\vec{V}}_R(t_i) \approx \frac{\vec{V}_R(t_i) - \vec{V}_R(t_{i-1})}{\tau}$$

$$\tau = t_i - t_{i-1}$$



另外，关机时 $V_{gx}(t_K) = V_{gx}(t_i) + \dot{V}_{gx}(t_i)(t_K - t_i) = 0$ 可得

$$\begin{aligned} (t_K - t_i) &= -V_{gx}(t_i) / \dot{V}_{gx}(t_i) \\ \dot{V}_{gx} &= \dot{V}_{RX,K} - \dot{V}_X \approx \dot{V}_X \\ \dot{V}_X &\approx -\frac{\Delta V_{x,i}}{\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{R,K,i} &= \vec{V}_{R,i} + \frac{\vec{V}_{R,i} - \vec{V}_{R,i-1}}{\Delta V_{x,i}} \vec{V}_{gx,i} \\ \vec{V}_{gx,i} &= V_{RX,K,i-1} - V_{x,i} \end{aligned}$$

进行预估的矢量方程，越接近关机点，预估越准 $\vec{V}_{R,K} = \vec{V}_R$

实际计算表明，取 $\vec{V}_g = \vec{V}_{R,K} - \vec{V}$ ，再按照“绝对加速度 \vec{a} 与 \vec{V}_g 一致”进行导引，效果较好，可以达到燃料消耗的准最佳。而且保证了关机点附近导弹的姿态变化比较平稳。



导引计算公式

□ 闭路制导导引指令计算——导引信号的确定

- 要实现“加速度 \vec{a} 与 \vec{V}_g 一致”的原则，必须知道这两个矢量间的夹角。对 \vec{V}_g 定义两个欧拉角 φ_g 和 ψ_g ：

$$\begin{cases} \tan \varphi_g = \frac{V_{gy}}{V_{gx}} \\ \tan \psi_g = \frac{-V_{gz}}{V_{gx}} \end{cases}$$

- 同样，对 \vec{a} 定义两个欧拉角 φ_a 和 ψ_a ，有：

$$\begin{cases} \tan \varphi_a = \frac{a_y}{a_x} \approx \frac{\Delta V_y}{\Delta V_x} \\ \tan \psi_a = -\frac{a_z}{a_x} \approx -\frac{\Delta V_z}{\Delta V_x} \end{cases}$$

根据三角公式 $\tan(\varphi_g - \varphi_a) = \frac{\tan \varphi_g - \tan \varphi_a}{1 + \tan \varphi_g \tan \varphi_a}$

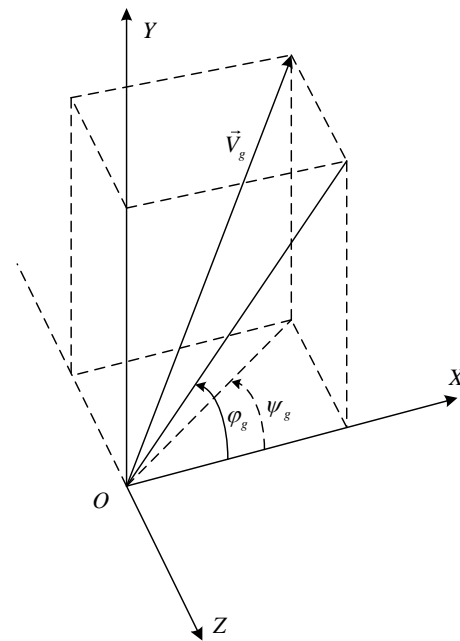
并考虑到 $(\varphi_g - \varphi_a)$ 、 $(\psi_g - \psi_a)$ 都比较小，可得

$$\varphi_g - \varphi_a = \frac{V_{gy}\Delta V_x - V_{gx}\Delta V_y}{V_{gx}\Delta V_x + V_{gy}\Delta V_y} \quad \psi_g - \psi_a = \frac{V_{gx}\Delta V_z - V_{gz}\Delta V_x}{V_{gx}\Delta V_x - V_{gz}\Delta V_z}$$

证明：当 g/W 比较小时，当弹轴俯仰 $(\varphi_g - \varphi_a) / \left(1 + \frac{g}{W} \sin \varphi\right)$ 、偏航 $(\psi_g - \psi_a) \cos \varphi$ 后，方能消除 \vec{a} 与 \vec{V}_g 两矢量的差角，近似取俯仰、偏航控制信号分别为

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \varphi_g - \varphi_a \\ \Delta \psi = \psi_g - \psi_a \end{cases}$$

显然，当 $\Delta \varphi = \Delta \psi = 0$ 时， \vec{a} 与 \vec{V}_g 方向一致





□ 高加速度推理的导引信号确定

- 对于具有推力终止能力的固体导弹，关机前推力较大，由此产生的绝对加速度 \dot{V} 也将远大于地球引力加速度 g ，主动段飞行时间较长的固体导弹的加速度 \dot{V} 是 g 的数十倍。

$$\dot{V} = \dot{W}$$

- 将速度增量 $\Delta V = \Delta W = [\Delta W_x \quad \Delta W_y \quad \Delta W_z]$ 分别代入，姿态导引信号方程为。

$$\begin{cases} \Delta\varphi_c = \frac{V_{gy}\Delta W_x - V_{gx}\Delta W_y}{V_{gx}\Delta W_x + V_{gy}\Delta W_y} \\ \Delta\psi_c = \frac{V_{gx}\Delta W_z - V_{gz}\Delta W_x}{V_{gx}\Delta W_x + V_{gz}\Delta W_z} \end{cases}$$

- 导引方法一般可得到满意的结果，只是要注意一点，在临近关机时 V_R 的微小变化就会导致 V_g 的方向有很大的变化，使导弹有很大的转动角速度，为避免此现象发生，在临近关机时取 $\Delta\varphi_c = \Delta\psi_c = 0$ 。



□ 低加速度推理的导引信号确定

- 对于采用末速修正系统的固体导弹，末修发动机推力都比较小，由此产生的加速度 \dot{V} ，比重力加速度 g 小得多，一般只有几分之一。
- 在这种情况下，如继续采用最佳能量对应的速度倾角或给定的速度倾角来确定需要速度 V_R ，将会因 $|\dot{W}| < \left| \frac{\partial V_R}{\partial r^T} V_R \right|$ 的情况出现，使得仍通过改变 \dot{W} 的方向来实现改变 V_R 的方向变得相当困难，即不能满足 $V_g \rightarrow 0$ 的关机条件。
- 为此，可先以绝对速度矢量 V 的弹道倾角作为需要速度矢量 V_R 的弹道倾角来确定需要速度大小和方向，然后再采用使 \dot{W} 与 V_g 一致的原则进行导引。



□ 闭路制导的关机

按照需要速度的定义，关机条件应为

$$\mathbf{V}_g = 0$$

一个矢量等于零，显然它的各个元素同时为零，即

$$V_{gx} = V_{gy} = V_{gz} = 0$$

所以，可以取“三个分量中较大的一个等于零”作为关机条件，对于远程导弹，通常是 $V_{gx} > V_{gy} > V_{gz}$ ，所以取

$$V_{gx} = 0$$

作为关机条件。但计算机计算有时延，当计算步长为 τ 时， $t_i (= i\tau)$ 时刻的测量数据采样，在 t_{i+1} 时刻才能给出计算结果。另外，关机时间不一定恰好是在 τ 的整数倍的点上，只能判断当第一次出现 $V_{gx}(t_i) < 0$ 时关机



□ 最佳射击方位角的确定方法

- 闭路制导方案的射击诸元计算量要比摄动制导少得多，主要是射击方位角、虚拟目标的确定，以及关机点（或再入点）的弹道倾角
- 采用闭路制导的导弹，在一个方向上完成瞄准后，只要能量够，可以向正负十几度范围内的目标进行射击，且能保证命中精度。只有向最大射程附近的目标进行射击时，才需要确定使射程为最大的最佳射击方位角。
- 严格地说，射程为最大的射击方位角 A 要由迭代的方法来确定，即给定 A 的一个初值解算主动段、被动段弹道，再根据落点修正射击方位角，以求得射程为最大的 A 值
- 考虑到向不同方位射击时，造成落点横向偏差的主要原因是地球旋转影响和地球引力的扁率影响，而扁率影响在确定虚拟目标时已作了修正，只需修正地球旋转影响。近似取发射点处的需要速度所对应的方位角作为最佳方位角。



□ 弹道倾角 θ_H 确定方法

对于远程弹道导弹关机点处需要速度的弹道倾角 θ_H 可根据如下考虑来确定：

- 对最大射程附近的目标选取最小能量轨道的 θ_H
- 对于最小射程附近的目标应充分考虑弹头再入要求，倾角 θ_H 过大，则再入速度过大而使气动加热超过弹头承受能力；反之，如取最小能量轨道的 θ_H 则可能再入速度低而使弹头易被拦截。因此须选取合适的 θ_H
- 对于中间射程的目标可选取使工具误差最小的 θ_H 。



□ 虚拟目标位置的确定

- 对远程弹道导弹而言，再入阻力对落点偏差的影响比较小，凡有几百米的量级。地球引力的扁率影响也不大，为十几公里的量级。上述二者的交连影响就更小，只有几米，可以忽略不计。
- 可以设法对再入阻力影响和地球扁率影响预先进行单独修正，即事先分别求出它们所造成的落点偏差（**经度和纬度偏差**），然后在目标的经度、纬度上迭加这两项偏差的负值，得到虚拟目标的位置（**经度和纬度**）。
- 这样不计**地球扁率**和**再入阻力**的惯性飞行轨道便是**平面椭圆轨道**，因而通过发射点和虚拟目标的椭圆轨道所确定的需要速度，便能保证导弹的实际飞行轨道经过真正的目标点。从而简化了需要速度的计算，提供了实时完成计算的可能；



□ 虚拟目标位置的确定——再入阻力修正

- 对于**零攻角再入**，再入阻力对落点的影响，取决于再入速度、再入弹道倾角及弹头的重阻比。对于导弹弹头的重量、气动特性已经确定，再入阻力影响可用再入速度、再入弹道倾角的函数来描述，可以实现再入运动的解析解法，也可用拟合的方法拟合出简单的经验公式，用来实现再入阻力影响的计算。
- **地地弹道导弹**真正有意义的是**关机点参数**对应的**再入阻力引起的落点偏差**，因而在主动段各点求需要速度时，其再入阻力影响都可按关机点对应的再入阻力影响进行考虑，只**计算一次关机点**对应的再入阻力影响便可。
- 由给定的发射点向给定的目标射击时，由于各种干扰的作用，使得实际的关机点在**标准弹道的关机点附近摄动**，其对应的再入阻力影响与标准关机点对应的再入阻力影响的差别可忽略不计。因此可按标准弹道的关机点参数确定再入阻力造成的落点偏差，将给定的目标点的经度、纬度，分别减去再入阻力造成的经度和纬度偏差，便得到考虑再入阻力影响的虚拟目标位置。



□ 虚拟目标位置的确定——再入阻力修正

- 对远程弹道导弹而言，再入阻力对落点偏差的影响比较小，凡有几百米的量级。地球引力的扁率影响也不大，为十几公里的量级。上述二者的交连影响就更小，只有几米，可以忽略不计。
- 可以设法对再入阻力影响和地球扁率影响预先进行单独修正，即事先分别求出它们所造成的落点偏差（**经度和纬度偏差**），然后在目标的经度、纬度上迭加这两项偏差的负值，得到虚拟目标的位置（**经度和纬度**）。
- 这样不计**地球扁率**和**再入阻力**的惯性飞行轨道便是**平面椭圆轨道**，因而通过发射点和虚拟目标的椭圆轨道所确定的需要速度，便能保证导弹的实际飞行轨道经过真正的目标点。从而简化了需要速度的计算，提供了实时完成计算的可能；



□ 虚拟目标位置的确定——地球引力扁率影响的修正

- 主动段不同点的需要速度对应的地球引力扁率影响是不同的，按关机点处需要速度对应的地球引力扁率影响进行修正。
- **干扰0**表示没干扰的标准弹道；**干扰Ⅰ**表示+5%的秒耗量偏差；**干扰Ⅱ**表示-5%的秒耗量偏差；**干扰Ⅲ**为发动机推力偏斜15角分；**干扰Ⅳ**为弹的质心横移为8毫米；**干扰Ⅴ**为纵风（1%概率风场）；**干扰Ⅵ**为横风（1%概率风场）。

各种干扰弹道的偏差

干扰	0	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
射程偏差（米）	1480.5	1434.6	1557.6	1478.9	1487.9	1462.6	1502.1
横向偏差（米）	9857.8	9901.6	9785.3	9857.2	9861.6	9863.0	9876.7

各种干扰弹道的扁率影响均按标准弹道的扁率影响进行修正

干扰	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
射程偏差（米）	-46	77	-2	7	-18	22
横向偏差（米）	44	-72	1	4	5	19



□ 虚拟目标位置的确定——地球引力扁率影响的修正

- 按照上表标准弹道的扁率进行修正，其扁率修正的最大误差为77米。在通常情况下，扁率修正误差小于100米被认为是允许的。欲达到更高的精度，可在发射前按标准弹道修正地球引力的扁率影响，同时求出此项偏差对关机点位置的偏导数，再根据实际关机位置与标准关机位置之差，对扁率影响的差额部分进行修正。
- 与考虑再入阻力影响的虚拟目标位置的**确定方法相同**，考虑地球引力扁率影响的虚拟目标位置的确定方法，也是从目标经度、纬度分别减去扁率影响造成的落点的经度和纬度偏差
- 在发射前根据标准弹道关机点参数分别确定再入阻力及地球引力扁率造成的落点偏差（经度差和纬度差），然后从目标位置的经纬度减去这两因素造成的落点偏差，便得到虚拟目标位置。



□ 视速度模量

➤ 视速度模量

$$W_M = \int_{t_0}^{t_f} \frac{P(t)}{m(t)} dt = -I_{sp} g_0 \int_{t_0}^{t_f} \frac{\dot{m}}{m(t)} dt = -I_{sp} g_0 \int_{t_0}^{t_f} \frac{dm}{m(t)} = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_f}$$

- 忽略气动力的影响，那么发动机推力产生的加速度和视加速度相同，因此视速度模量和可用速度增量相同：

$$\Delta V_T = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T(t)}{m(t)} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{P(t)}{m(t)} dt = W_M$$

- 视速度模量只与发动机的比冲、点火点的质量、停火点的质量有关，而与装药的秒耗量的变化无关。因此可以认为第三级导弹的视速度模量是已知的。
- 当飞行器零攻角飞行时，火箭视速度增量的模才等于该级发动机的视速度模量，即

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{W} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\mathbf{P}}{m} dt = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\mathbf{W}} dt \\ W_M = |\Delta \mathbf{W}| \end{cases}$$



耗尽关机的能量管理

□ 视速度模量

闭路导引段，根据导弹的位置矢量 \vec{r} 和目标的位置矢量 \vec{r}_t 确定需要速度 \vec{V}_r 和待增速度 \vec{V}_g ，并按照 \vec{V} 和 \vec{V}_g 一致原则，要求进行导引，待导弹的姿态稳定后，对装药耗尽时的 \vec{V}_r 进行预测

$$V_{R,K} = V_R(t_i) + \dot{V}_R(t_i) [\bar{t} - (t_i - t_0)]$$

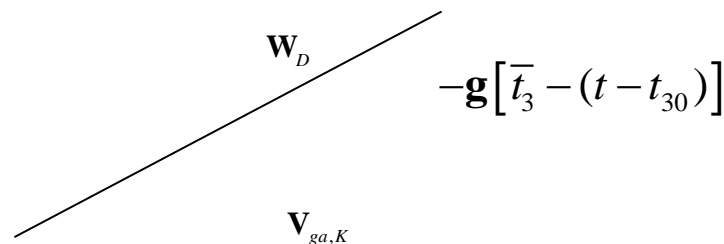
式中， \bar{t} 为该级发动机的标准工作时间

t_i 为从起飞算起的时刻

t_0 为从起飞算起的该级点火时刻

$t_i - t_0$ 是该级发动机工作了多少时间

$\bar{t} - (t_i - t_0)$ 是发动机的剩余工作时间



待增视速度与预测关机点需要速度几何关系

同时计算预测的关机时刻的需要速度

$$V_{g,K} = V_{R,K} - V$$

可写出 $W_D = V_{g,K} - g [\bar{t} - (t_i - t_0)]$

g 近似取为时刻的 t_i 地球引力加速度

定义已消耗掉的视速度模量 ΔW_h $\Delta W_h(t) = \int_{t_0}^t |\dot{W}| d\tau$

当满足表达式时 $\Delta W_h = \Delta W_1$ 时结束闭路导引段并进入姿态调制段。



□ 视速度模量

➤ 多余视速度模量的确定

考虑到留给常姿态导引段的视速度模量 ΔW_3 ，姿态调制段实际的需要视速度增量 \mathbf{v}_D

$$\mathbf{v}_D = (|\mathbf{W}_D| - \Delta W) \mathbf{W}_D^0$$

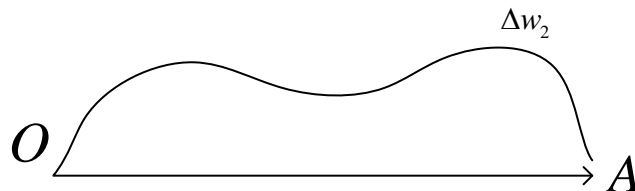
\mathbf{W}_D^0 为 \mathbf{W}_D 的单位矢量

发动机工作到此时刻（姿态调制段开始时），在总冲为标准值的前提下，发动机剩余的视速度模量为 $\Delta W_2 + \Delta W_3$ ，所以姿态调制段多余的视速度模量 ΔW_e

$$\Delta W_e = \Delta W_2 - |\mathbf{v}_D|$$

➤ 通过姿态调制消耗掉多余冲量原理

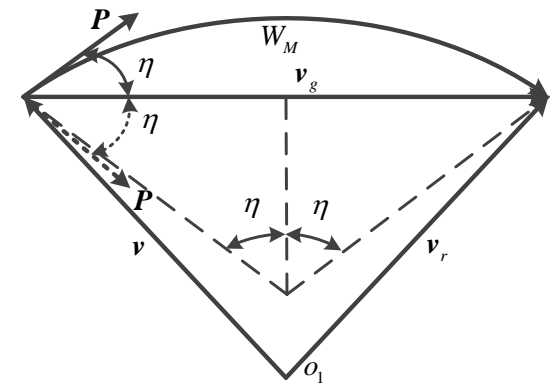
假定已知姿态调制段的需要视速度增量 \mathbf{v}_D ，此段中导弹的视速度模量 ΔW_2 ，那么如何对导弹进行导引和控制，使导弹该段的视速度模量达到 ΔW_2 时，其视速度增量恰好为 \mathbf{v}_D



从O到A长度为 ΔW_2 的曲线有无数条，因此导引规律不是唯一的。考虑到导弹的姿态控制容易实现、且弹上计算机的计算量尽量小。所以采用的曲线应是光滑连续的

□ 一般能量管理

- W_M 的圆弧表示发动机当前剩余燃料全部燃烧后所能提供的视速度模量
- v_g 是制导算法解算的待增速度
- 在圆弧的起始端，推力方向与当前的圆弧切线方向相同
- 由几何关系可知推力方向与 v_g 的夹角 η 是圆弧所对应的中心角的一半。



一般能量管理示意图

$$\begin{cases} W_M = 2\eta r \\ v_g = 2r \sin \eta \end{cases} \Rightarrow \frac{v_g}{\Delta V} = \frac{\sin \eta}{\eta}$$

- 取 $\sin \eta$ 的忽略二阶以上项的泰勒展开式，即 $\sin \eta = \eta - \eta^3/6$

$$\frac{v_g}{\Delta V} = 1 - \frac{\eta^2}{6} \Rightarrow \eta = \sqrt{6 \left(1 - \frac{v_g}{\Delta V} \right)}$$

- 但在三维空间中，与矢量 v_g 的夹角 η 的推力方向有无数个，取不同的推力方向都能使火箭在预定时刻达到预定的速度，一般情况下在当前速度 v 与待增速度 v_g 构成的平面内改变姿态角



□ 一般能量管理

一般能量管理方法为其他的能量管理方法提供了原理性的描述。这类能量管理方法的机理就是，在发动机推进过程中，通过调整姿态角，使实际推力方向与待增速度方向产生一个持续变化的夹角，那么沿待增速度方向的推力将使火箭加速并满足终端速度的要求，而垂直于待增速度方向的推力产生的视速度增量将相互抵消，从而达到消耗多视速度模量的目的。

□ 交变姿态能量管理

发动机总视速度模量 W_M 按照导引程序的功能一般可分为两部分，第一部分主要用于能量耗散管理（约占85%），第二部分主要用于误差的补偿修正或姿态调整（约占15%）。一般假定在能量管理的起始时刻，运载器的纵轴已经与待增视速度 W_g 方向一致。

令交变姿态控制能量管理段总视速度模量为：

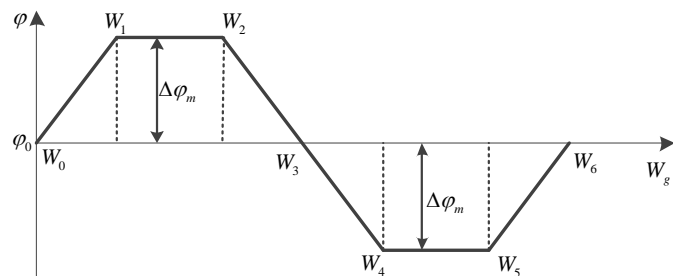
$$\Delta W_I = 4 \cdot \Delta W_1 + 2 \cdot \Delta W_2$$

其中：

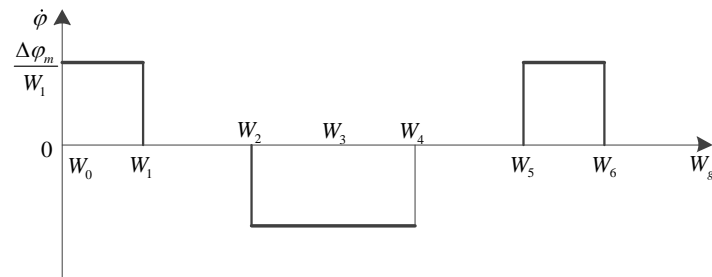
$$\begin{cases} \Delta W_1 = W_1 - W_0 = W_3 - W_2 = W_4 - W_3 = W_6 - W_5 \\ \Delta W_2 = W_2 - W_1 = W_5 - W_4 \end{cases}$$

则以视速度模量为自变量的姿态角变化模型为：

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 + \Delta\varphi_m(W - W_0)/\Delta W_I & W_0 \leq W < W_1 \\ \varphi_0 + \Delta\varphi_m & W_1 \leq W < W_2 \\ \varphi_0 + \Delta\varphi_m - \Delta\varphi_m(W - W_2)/\Delta W_I & W_2 \leq W < W_4 \\ \varphi_0 - \Delta\varphi_m & W_4 \leq W < W_5 \\ \varphi_0 - \Delta\varphi_m - \Delta\varphi_m(W - W_5)/\Delta W_I & W_5 \leq W < W_6 \end{cases}$$



交变姿态控制能量管理的姿态角变化规律



姿态角速率随视速度模量的变化规律

其中， $\Delta\varphi_M$ 为最大调姿角， W 为当前时刻的发动机的视速度模量使用量，表达式为

$$W = \int_{t_0}^t \frac{P}{m} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{W}_x^2 + \dot{W}_y^2 + \dot{W}_z^2} dt$$



□ 交变姿态能量管理

➤ 最大调姿角 $\Delta\varphi_M$ 的计算

$\Delta\varphi$ 为当前姿态方向与待增视速度方向之间的夹角，在第一个斜坡姿态机动段内，消耗掉的视速度为：

$$\begin{aligned} W_{1con} &= \int_{W_0}^{W_1} (1 - \cos \Delta\varphi) dW = \int_0^{\Delta\varphi_{\max}} \frac{\dot{W}_s}{\dot{\varphi}_{W_1}} (1 - \cos \Delta\varphi) d\Delta\varphi \\ &= \frac{\Delta W_1}{\Delta\varphi_m} (\Delta\varphi_m - \sin \Delta\varphi_m) = \Delta W_1 \left(1 - \frac{\sin \Delta\varphi_m}{\Delta\varphi_m} \right) \end{aligned}$$

在常值姿态角段，消耗掉的视速度为：

$$\begin{aligned} W_{2con} &= \int_{W_1}^{W_2} (1 - \cos \Delta\varphi) dW = (1 - \cos \Delta\varphi_{\max}) \int_{W_1}^{W_2} dW \\ &= (1 - \cos \Delta\varphi_{\max}) \Delta W_2 \end{aligned}$$

那么在整个姿态机动段内，消耗掉的总视速度为：

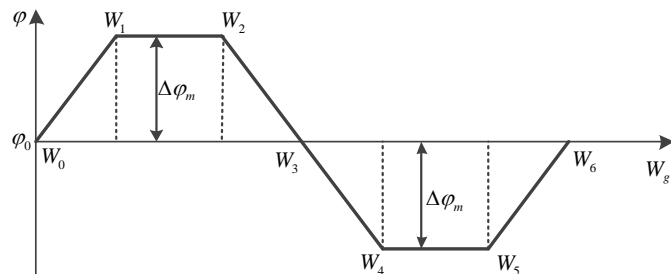
$$\begin{aligned} W_{con} &= 4 \cdot W_{1con} + 2 \cdot W_{2con} \\ &= 4 \cdot \Delta W_1 \left(1 - \frac{\sin \Delta\varphi_m}{\Delta\varphi_m} \right) + 2 \cdot \Delta W_2 (1 - \cos \Delta\varphi_m) = W_M - W_g \end{aligned}$$

当 W_g 由箭载计算机确定后，若其小于发动机总视速度模量 W_M ，通过求解方程即可求得最大调姿角 $\Delta\varphi_M$ 。该方程无解析解，可利用数值计算方法求解

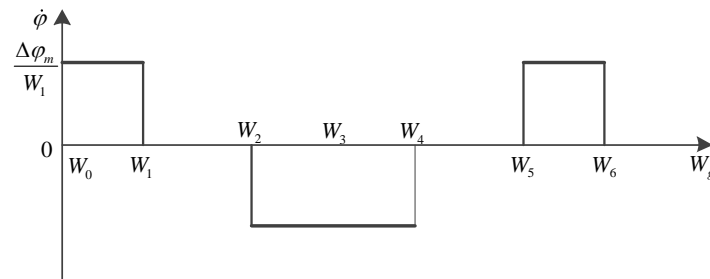
$$\Delta\varphi_m = \left[\frac{B}{2A} - \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{W_M - W_g}{A}} \right]^{1/2}$$

$$A = \Delta W_1 / 30 + \Delta W_2 / 12$$

$$B = 2\Delta W_1 / 3 + \Delta W_2$$



交变姿态控制能量管理的姿态角变化规律



姿态角速率随视速度模量的变化规律



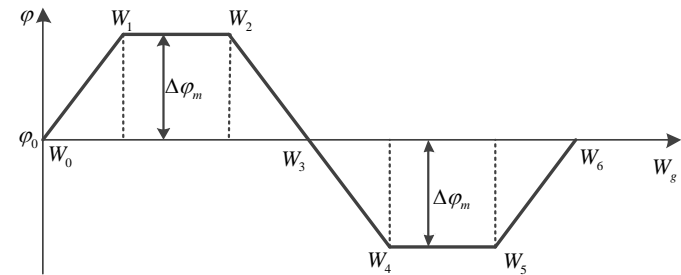
□ 交变姿态能量管理

➤ 能量管理的闭环实现

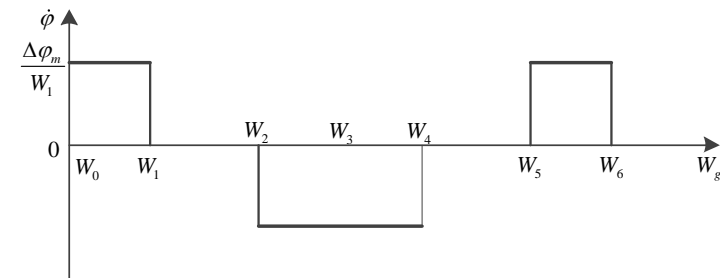
在飞行过程中，实时计算发动机视速度模量使用 W ，以及按照姿态变化规律已经消耗的视速度模量 W_c ，同时更新待增视速度 W_g ，那么最大调姿角为

$$\Delta\varphi_m = \left[\frac{B}{2A} - \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{W_M - W + W_c - W_g}{A}} \right]^{1/2}$$

按照此最大调姿角进行后续的调姿程序。当发动机剩余视速度模量 $W_M - W$ 与待增视速度 W_g 相等时，停止更新，并停止进行能量管理。



交变姿态控制能量管理的姿态角变化规律



姿态角速率随视速度模量的变化规律



□ 样条能量管理

样条能量管理是在交变姿态控制能量管理技术基础上提出的一种闭环能量管理技术，使用样条曲线来描述发动机的视速度模量，然后根据约束条件对样条函数的系数进行求解并不断更新，实现闭环制导，耗能过程在铅垂平面内完成，但是该方法无法考虑终端位置约束。

考虑用三次多项式函数来描述 W_M 曲线，即

$$F(x) = A(x - v_r \cos \theta_r)^3 + B(x - v_r \cos \theta_r)^2 + C(x - v_r \cos \theta_r) + D$$

其中A、B、C、D是待定系数， x 表示当地水平方向速度的值。对 x 求导

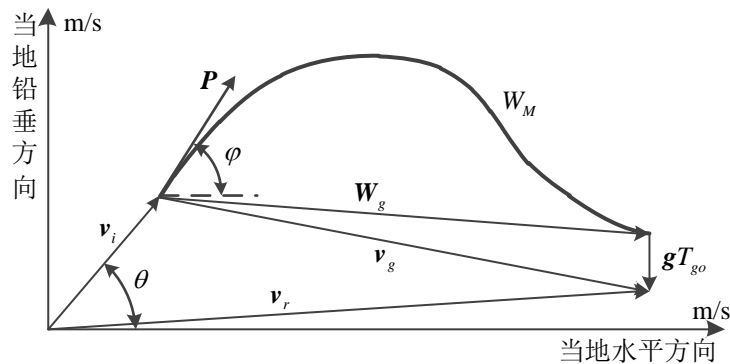
$$F'(x) = 3A(x - v_r \cos \theta_r)^2 + 2B(x - v_r \cos \theta_r) + C$$

由于推力的方向始终和 W_M 曲线相切，所以， $F(x)$ 导数的值表示了描述推力方向的当地俯仰角的正切值的曲线，即

$$F'(x) = \tan \varphi$$

确定多项式函数的四个系数需要四个条件，考虑以下条件：

- 样条曲线起点为 $(v_i \cos \theta_i, v_i \sin \theta_i)$
- 样条曲线终点为 $(v_r \cos \theta_r, v_r \sin \theta_r + \Delta v_G)$
- 样条曲线长度为 W_M
- 要求关机点处的攻角接近于零，即当地俯仰角等于当地速度倾角 $\varphi_r = \theta_r$

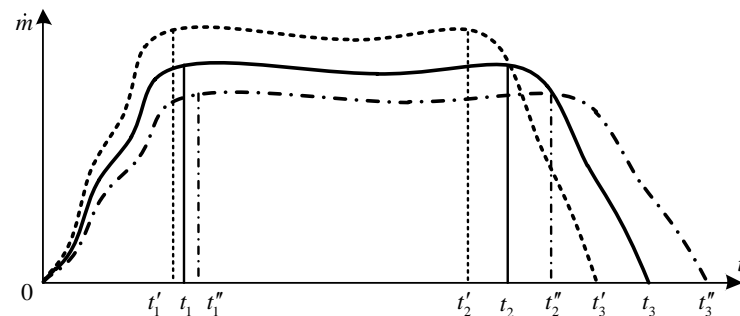


交变姿态控制能量管理的姿态角变化规律



□ 发动机剩余工作时间估计

- 有多个公式都含有发动机剩余工作时间 T_{go} 项，它的作用是补偿重力加速度和计算视速度模量，由于固体火箭发动机秒耗量偏差比较大，不能简单的用发动机工作时间的的设计值减去已工作时间来计算，而需要利用可测量量对 T_{go} 进行实时估算。
- 在飞行过程中不可能测得推进剂的秒耗量，或推进剂的已消耗量，但是可以测得火箭的视加速度，并积分得到发动机已经消耗的视速度，可利用此量估计剩余工作时间。



推进剂秒消耗量近似变化曲线



谢谢！