

大气层外自由飞行轨道的解析解法

对于远程弹道导弹来说, 大约有 90% 以上的飞行是大气层外的自由飞行, 发射人造卫星的运载火箭也有好几段自由飞行轨道。因此研究自由飞行轨道的解析解, 无疑对弹道导弹和运载火箭的制导、弹道计算、射击诸元确定、轨道预测度是非常有意义的。美国学者 R. E. Roberson 和前苏联学者都研究了这个问题, 他们都是在绝对坐标系中取初始轨道内的射程角为自变量, 建立了关于如下变量的微分方程, 变量分别为

- 1) 地心至飞行器质心矢径的倒数;
- 2) 飞行器位置矢量与初始轨道平面的夹角;
- 3) 飞行器相对于地心的动量矩;
- 4) 飞行时间。

在考虑具有一阶扁率系数 J_2 地球引力模型的前提下, 建立了关于上述四个变量的微分方程。但他们均未导出完整的解析解。R. E. Roberson 的结果的应用是有限制的, 他只给出飞行自初始点到与地心距离再次等于初始位置矢径的飞行时间。即, 若以地心为球心, 以地心至初始点位置的矢径为半径, 作一惯性球壳, 则文献[1]只能给出由初始点算起的落到惯性球壳上的时间; 文献[2]只列出求飞行时间的积分形式, 而没有给出解析解, 通常, 在惯性坐标系中描述飞行器的运动时, 为求其相对于地球的运动, 必须知道精确的飞行时间。因此说, 他们的结果是有限制的、不完整的。

本节介绍一个新方法是在一个非正交的绝对坐标系中定义变量, 建立了三个运动微分方程, 并且由于巧妙地选择了自变量, 而导出了完整的解析解, 其解中忽略了 J_2^2 及以上的高阶项。

1 初始点轨道参数的转换

假定已知发射惯性坐标系中初始点参数为 $v_{xI}, v_{yI}, v_{zI}, x_I, y_I, z_I$ 和时间, 或者地面发射坐标系中的初始点参数 $v_{xg}, v_{yg}, v_{zg}, x_g, y_g, z_g$, 现对这些参数进行如下变换。

1.1 任一点位置用球坐标表示

- 1) 将地面发射坐标系 x_{gK}, y_{gK}, z_{gK} 的转换为球坐标 $(r_K, \phi_K, \lambda_{OK})$

这里 ϕ_K 是初始点 K 的地心纬度， λ_{OK} 是 K 点与发射点 O 之间的经度差，各坐标间的几何关系见图 3.6-1。

$$\mathbf{r}_{gK} = \mathbf{R}_0 + \begin{bmatrix} x_{gK} \\ y_{gK} \\ z_{gK} \end{bmatrix} \quad (3.6.1)$$

$$r_K = |\mathbf{r}_{gK}| = \sqrt{(R_{OX} + x_{gK})^2 + (R_{OY} + y_{gK})^2 + (R_{OZ} + z_{gK})^2} \quad (3.6.2)$$

$$\mathbf{r}_{gK}^0 = \mathbf{r}_{gK} / |\mathbf{r}_{gK}| \quad (3.6.3)$$

因

$$\sin \phi_K = (\boldsymbol{\omega}_E^0)^T \mathbf{r}_{gK}^0 \quad (3.6.4)$$

所以

$$\phi_K = \arcsin \left[(\boldsymbol{\omega}_E^0)^T \mathbf{r}_{gK}^0 \right] \quad (3.6.5)$$

因为

$$[\boldsymbol{\omega}_E^0 \times] \mathbf{r}_{gK}^0 = \cos \phi_K \mathbf{e}_{ZN}$$

而 \mathbf{e}_{ZN} 是以 K 点为原点的当地北天东坐标系 z_N 轴方向的单位矢量，它是过 K 点子午面的法线，于是有

$$\mathbf{e}_{ZN} = \frac{1}{\cos \phi_K} [\boldsymbol{\omega}_E^0 \times] \mathbf{r}_{gK}^0$$

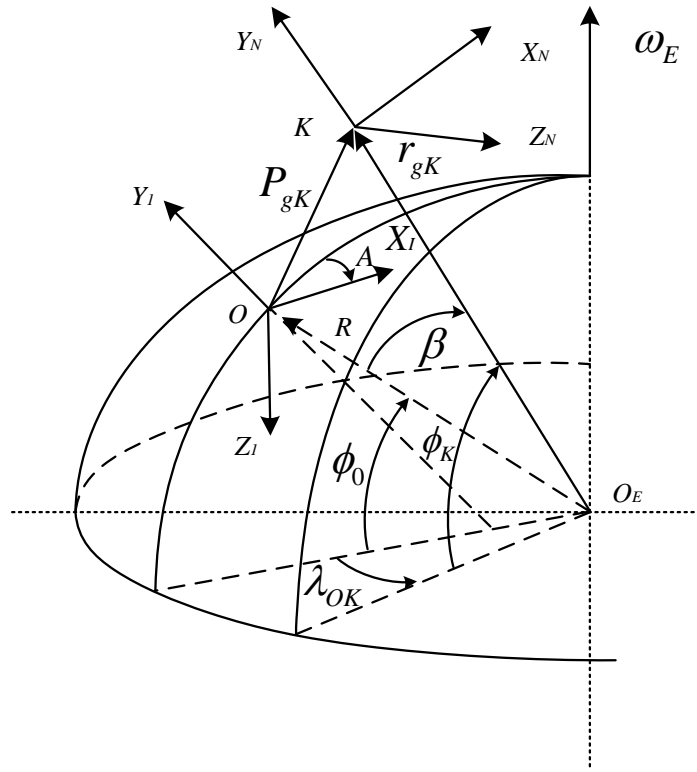


图 3.6—1 初始点 K 与发射点 O 之间的几何关系

记

$$\begin{bmatrix} F'_{31} \\ F'_{32} \\ F'_{33} \end{bmatrix} = [\omega_E^0 \times] \mathbf{r}_{gK}^0 \quad (3.6.6)$$

则

$$\mathbf{e}_{ZN} = \frac{1}{\cos \phi_K} \begin{bmatrix} F'_{31} \\ F'_{32} \\ F'_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6.7)$$

另外，若记过 O 点子午面法线方向的单位矢量为 \mathbf{k}' ，则有

$$\mathbf{k}' = \sin A \mathbf{e}_{Xg} + \cos A \mathbf{e}_{Zg} \quad (3.6.8)$$

于是矢量 \mathbf{k}' 用列矩阵可表示为

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} \sin A \\ 0 \\ \cos A \end{bmatrix} \quad (3.6.9)$$

因为 λ_{OK} 是过 K 点子午面和过 O 点子午面间的二面角，也就是 \mathbf{e}_{ZN} 与 \mathbf{k}' 之间的夹角，所以

$$\cos \mathbf{k}' = \mathbf{e}_{ZN}^T \mathbf{k}' \quad (3.6.10)$$

$$\sin \lambda_{OK} \omega_E^0 = [\mathbf{k}' \times] \mathbf{e}_{ZN} \quad (3.6.11)$$

式中

$$[\mathbf{k}' \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\cos A & 0 \\ \cos A & 0 & -\sin A \\ 0 & \sin A & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.12)$$

将 (3.6.7)、(3.6.8)、(3.6.12) 式代入 (3.6.10)、(3.6.11) 式得

$$\cos \lambda_{OK} = \frac{1}{\cos \phi_k} (F'_{31} \sin A + F'_{33} \cos A) \quad (3.6.13)$$

又

$$\begin{aligned} \sin \lambda_{OK} \omega_E^0 &= \sin \lambda_{OK} \begin{bmatrix} \omega_{Xg}^0 \\ \omega_{Yg}^0 \\ \omega_{Zg}^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \phi_k} \begin{bmatrix} 0 & -\cos A & 0 \\ \cos A & 0 & -\sin A \\ 0 & \sin A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{31} \\ F'_{32} \\ F'_{33} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos \phi_K} \begin{bmatrix} -F'_{32} \cos A \\ F'_{32} \cos A - F'_{33} \sin A \\ F'_{32} \sin A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

有

$$\sin \lambda_{OK} = -\frac{F'_{32} \cos A}{\cos \phi_K \omega_{Xg}^0} = \frac{F'_{32} \cos A - F'_{33} \sin A}{\cos \phi_K \omega_{Yg}^0} = \frac{F'_{32} \sin A}{\cos \phi_K \omega_{Zg}^0} \quad (3.6.14)$$

于是得

$$\lambda_{ok} \begin{cases} \lambda & (F'_{31} \sin A + F'_{33} \cos A) \geq 0 \\ \text{sgn } \lambda \cdot \pi - \lambda & (F'_{31} \sin A + F'_{33} \cos A) < 0 \end{cases} \quad (3.6.15)$$

式中

$$\lambda = \arcsin \left(-\frac{F'_{32}}{\cos B \cos \phi_K} \right) \quad (3.6.16)$$

2) 将发射惯性坐标系的 $x_{IK}, y_{IK}, z_{IK}, t_K$ 转换为球坐标 $(r_K, \phi_K, \lambda_{OK})$

因为 x_{IK}, y_{IK}, z_{IK} 是发射惯性坐标系的坐标，故我们定义一个以地心 O_E 为球心，以 R 为半径的不随地球旋转的惯性球壳。在此球壳上 K 点与 O 点的经差称为绝对经差，记为，因为发射点 O 随地球旋转，在飞行时间 t_K 时，它向东旋转了一个量值为 $\omega_E t_K$ 的角度，因此， K 点相对于随地球旋转的发射点的经差 λ_{OK} 与绝对经差 λ_{OK}^A 之间满足如下关系

$$\lambda_{OK} = \lambda_{OK}^A - \omega_E t_K \quad (3.6.17)$$

可写出矢径 r_K 的表达式为

$$r_K = |\mathbf{r}_{IK}| = \sqrt{(R_{OX} + x_{IK})^2 + (R_{OY} + y_{IK})^2 + (R_{OZ} + z_{IK})^2} \quad (3.6.18)$$

式中

$$\mathbf{r}_{IK} = \mathbf{R}_0 + \begin{bmatrix} x_{IK} \\ y_{IK} \\ z_{IK} \end{bmatrix} \quad (3.6.19)$$

关于 ϕ_K, λ_{OK}^A 的计算公式如下

$$\phi_K = \arcsin(\mathbf{r}_{IK}^{0T} \boldsymbol{\omega}_E^0) \quad (3.6.20)$$

$$\begin{bmatrix} F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\omega}_E^0 \times] \mathbf{r}_{IK}^0 \quad (3.6.21)$$

$$\lambda^A = \arcsin\left(-\frac{F_{32}}{\cos B \cos \phi_K}\right) \quad (3.6.22)$$

$$\lambda_{OK}^A = \begin{cases} \lambda^A & (F_{31} \sin A + F_{33} \cos A) \geq 0 \\ \text{sgn } \lambda^A \cdot \pi - \lambda^A & (F_{31} \sin A + F_{33} \cos A) < 0 \end{cases} \quad (3.6.23)$$

1.2 初始点绝对速度在北天东坐标系中分量的确定

1) 已知 K 点在发射惯性坐标系的速度 v_{XI}, v_{YI}, v_{ZI}

可写出

$$\begin{bmatrix} v_{XN}^A \\ v_{YN}^A \\ v_{ZN}^A \end{bmatrix} = \mathbf{C}_I^N \begin{bmatrix} v_{XI} \\ v_{YI} \\ v_{ZI} \end{bmatrix} \quad (3.6.24)$$

式中

$$\mathbf{C}_I^N = \begin{bmatrix} F_{11} / \cos \phi_K & F_{12} / \cos \phi_K & F_{13} / \cos \phi_K \\ \mathbf{r}_{XIK}^0 & \mathbf{r}_{YIK}^0 & \mathbf{r}_{ZIK}^0 \\ F_{31} / \cos \phi_K & F_{32} / \cos \phi_K & F_{33} / \cos \phi_K \end{bmatrix} \quad (3.6.25)$$

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_E^0 - \mathbf{r}_{IK}^0 \sin \phi_K \quad (3.6.26)$$

2) 已知 K 点在地面发射坐标系的速度 v_{Xg}, v_{Yg}, v_{Zg}

可写出

$$\begin{bmatrix} v_{xN}^A \\ v_{yN}^A \\ v_{zN}^A \end{bmatrix} = C_I^N \begin{bmatrix} v_{xg} \\ v_{yg} \\ v_{zg} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_E r_K \cos \phi_K \end{bmatrix} \quad (3.6.27)$$

1.3 初始轨道平面的确定

定义由初始点 K 的位置矢量 \mathbf{r}_K ，绝对速度矢量 \mathbf{V}_K^A 所构成的平面为初始轨道平面。再定义 y_π 轴与 \mathbf{r}_K 方向一致， x_π 轴在初始轨道平面内，且与 y_π 轴垂直而指向导弹运动方向（见图 3.2-6），则 x_π 轴、 y_π 轴所构成的平面 π 即初始轨道平面。再以地心 O_E 为球心，以 r_K 为半径做一假想的惯性球壳，平面 π 与球壳所交大圆弧 KD ， x_π 轴与大圆弧 KD 相切，再记过 K 点的子午大圆弧为 KN ，记 KN 与 KD 两个大圆弧之间的交角为 $\hat{\alpha}_K^A$ ，显然， $\hat{\alpha}_K^A$ 便是初始轨道平面与过 K 点子午面间的二面角。

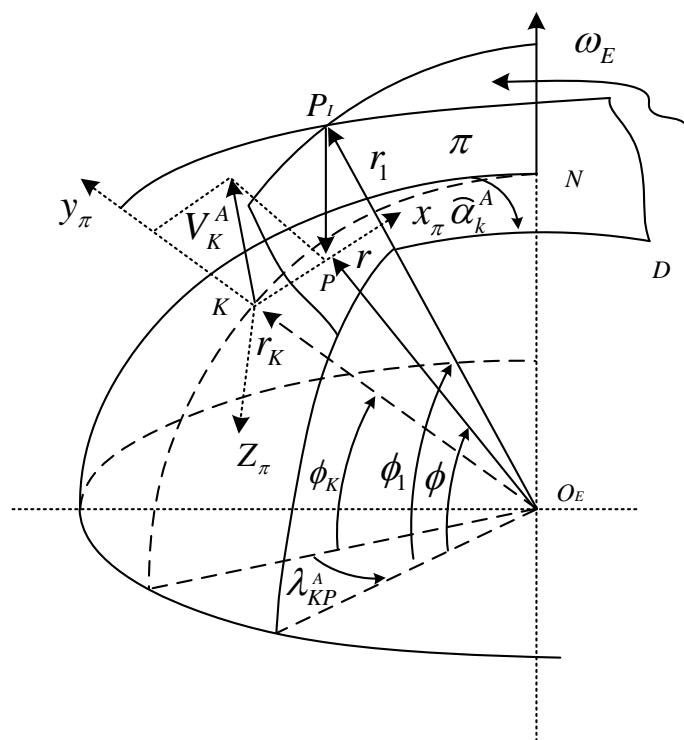


图 3.6—2 非正交绝对坐标系几何关系

记绝对速度在当地水平面的投影为 u_K^A

$$u_K^A = \sqrt{(v_{xN}^A)^2 + (v_{zN}^A)^2} \quad (3.6.28)$$

则可写出

$$\begin{cases} \sin \hat{\alpha}_K^A = v_{ZN}^A / u_K^A \\ \cos \hat{\alpha}_K^A = v_{XN}^A / u_K^A \end{cases} \quad (3.6.29)$$

于是 $\hat{\alpha}_K^A$ 值可按式计算

$$\hat{\alpha}_K^A = \begin{cases} \arcsin(v_{ZN}^A / u_K^A) & v_{ZN}^A \geq 0 \\ \operatorname{sgn}(v_{ZN}^A / u_K^A) \cdot \pi - \arcsin(v_{ZN}^A / u_K^A) & v_{ZN}^A < 0 \end{cases} \quad (3.6.30)$$

2 非正交绝对坐标系中运动微分方程的建立

2.1 非正交绝对坐标系的定义

已知初始点 K 处的位置矢量 \mathbf{r}_K ，绝对速度 \mathbf{V}_K^A ，若地球没有扁率（即 $\mathbf{J}_2 = 0$ ），地球引力场为与距离平方成反比的引力场，则飞行器的运动轨道为一个平面椭圆轨道，地心是椭圆轨道的一个焦点，该轨道平面与初始轨道平面重合。因为 \mathbf{J}_2 本身是一个数量级为 10^{-3} 的小量，所以在考虑 \mathbf{J}_2 的引力模型作用下，飞行器的实际的运动轨道将在上述椭圆轨道附近摄动。此外，若引力模型中的 g_ω 项等于零，则引力场仍然是有心力场，飞行器的运动服从动量矩守恒定律，还在初始轨道平面内运动。因此，可以将飞行器的自由飞行运动分解为两个分运动：在初始轨道平面内的分运动和沿 $\boldsymbol{\omega}_E$ 方向的分运动。于是定义一个非正交的绝对坐标系 $x_\pi y_\pi z_\pi$ ，其中 x_π, z_π 两个坐标轴在上节已经定义， z_π 轴过 K 点与 $\boldsymbol{\omega}_E$ 平行且方向相反（见图 3.5-2）

飞行器在任一点 P 处的矢量 \mathbf{r} ，可以写成两个分量 \mathbf{r}_I 和 \mathbf{r}_K 的矢量和，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_I + \mathbf{r}_K \quad (3.6.31)$$

其中， \mathbf{r}_I 是 π 平面内的分运动，其端点为 P_I ， \mathbf{r}_K 是过 P 点与 z_π 轴平行的矢量，其端点 P 是飞行器的实际位置。

与 \mathbf{r}_I 、 \mathbf{r} 有关的角度定义如下： \mathbf{r} 的地心纬度为 ϕ ， \mathbf{r}_I 的地心纬度为 ϕ_I 并记 $\delta = \phi_I - \phi$ ；从 \mathbf{r}_K 至 \mathbf{r}_I 的地心角为 β （见图 3.6-2）。

2.2 运动微分方程的建立

1) 引力 g 的分解

将任一点 P 处的引力 g 分解到 \mathbf{r}_I 和 \mathbf{z}_π 方向。首先将 (3.6.31) 式两端除以 $r(=|\mathbf{r}|)$ ，得

$$\mathbf{r}^0 = \frac{r_I}{r} \mathbf{r}_I^0 + \frac{z_\pi}{r} \mathbf{z}_\pi^0 \quad (3.6.32)$$

于是

$$\mathbf{g} = g_r \mathbf{r}^0 + g_\omega \boldsymbol{\omega}_E^0 = g_{r_I} \mathbf{r}_I^0 + g_{z_\pi} \mathbf{z}_\pi^0 \quad (3.6.33)$$

式中

$$\begin{cases} g_{r_I} = \frac{r_I}{r} g_r \\ g_{z_\pi} = \frac{z_\pi}{r} g_r - g_\omega \end{cases} \quad (3.6.34)$$

2) 初始轨道平面内的运动微分方程

首先定义一个动坐标系 $x_d y_d z_d$ ， y_d 轴与 \mathbf{r}_I 方向一致， x_d 轴在初始轨道平面内与 y_d 轴垂直且指向运动方向， z_d 轴与 x_d 轴、 y_d 轴成右手正交坐标系。动坐标系 $x_d y_d z_d$ 绕 z_d 轴以角速度 $\dot{\beta}$ 旋转。对 \mathbf{r}_I 求导数

$$\dot{\mathbf{r}}_I = \frac{d}{dt}(r_I \mathbf{e}_{yd}) = \dot{r}_I \mathbf{e}_{yd} + r_I \dot{\mathbf{e}}_{yd} = \dot{r}_I \mathbf{e}_{yd} + r_I \dot{\beta} \mathbf{e}_{zd} \times \mathbf{e}_{yd} = \dot{r}_I \mathbf{e}_{yd} + r_I \dot{\beta} \mathbf{e}_{xd} \quad (3.6.35)$$

再对上式求导

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_I &= \ddot{r}_I \mathbf{e}_{yd} + \dot{r}_I \dot{\mathbf{e}}_{yd} + (\dot{r}_I \dot{\beta} + r_I \ddot{\beta}) \mathbf{e}_{xd} + r_I \dot{\beta} \dot{\mathbf{e}}_{xd} \\ &= \ddot{r}_I \mathbf{e}_{yd} + r_I \ddot{\beta} \mathbf{e}_{xd} + (\dot{r}_I \dot{\beta} + r_I \ddot{\beta}) \mathbf{e}_{xd} + r_I \dot{\beta}^2 \mathbf{e}_{zd} \times \mathbf{e}_{xd} \end{aligned}$$

于是得

$$\ddot{\mathbf{r}}_I = (\ddot{r}_I - r_I \dot{\beta}^2) \mathbf{e}_{yd} + (2\dot{r}_I \dot{\beta} + r_I \ddot{\beta}) \mathbf{e}_{xd} \quad (3.6.36)$$

又

$$\ddot{\mathbf{r}}_I = g_{r_I} \mathbf{e}_{yd} \quad (3.6.37)$$

所以

$$\ddot{r}_I - r_I \dot{\beta}^2 = g_{r_I} \quad (3.6.38)$$

$$2\dot{r}_I \dot{\beta} + r_I \ddot{\beta} = 0 \quad (3.6.39)$$

因为

$$\frac{d}{dt}(r_I^2 \dot{\beta}) = 2r_I \dot{r}_I \dot{\beta} + r_I^2 \ddot{\beta} = r_I (2\dot{r}_I \dot{\beta} + r_I \ddot{\beta}) = 0 \quad (3.6.40)$$

所以 (3.6.38) 式可改写为

$$r_l^2 \dot{\beta} = K = \text{const} \quad (3.6.41)$$

(3.6.41) 式表述了理论力学的一个定理：在有心立场运动的物体，因外力矩等于零，所以动量矩守恒。

为解方程 (3.6.38) 和 (3.6.41) 需做如下变换：

a) 将变量 t 换成变量 β ；

b) 做变换： $\eta = \frac{1}{r_l}$

因为

$$\begin{aligned} K &= \frac{\dot{\beta}}{\eta^2} \\ \frac{dr_l}{dt} &= \frac{dr_l}{d\beta} \dot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\eta} \right) = -\frac{\dot{\beta}}{\eta^2} \frac{d\eta}{d\beta} = -K \frac{d\eta}{d\beta} \\ \frac{d^2 r_l}{dt^2} &= -K \dot{\beta} \frac{d^2 \eta}{d\beta^2} = -\eta^2 K^2 \frac{d^2 \eta}{d\beta^2} \\ -r_l \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 &= -\frac{1}{\eta} \dot{\beta}^2 = -\eta^3 K^2 \end{aligned}$$

所以，(3.6.41) 式、(3.6.38) 式可分别改写为

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{1}{K\eta} \quad (3.6.42)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\beta} + \eta = -\frac{g_{r_l}}{\eta^2 K^2} \quad (3.6.43)$$

3) z_π 轴方向的运动方程

z_π 轴方向的运动方程为

$$\frac{d^2 z_\pi}{d\beta^2} + g_{z_\pi} = \frac{z_\pi}{r} g_r - g_\omega \quad (3.6.44)$$

再作变换： $\zeta = z_\pi / r_l$ ，则 (3.6.44) 式可改写为

$$\frac{d^2 \zeta}{d\beta^2} + \zeta = -\frac{g_\omega}{K^2 \eta^2} \quad (3.6.45)$$

4) 将 g_{r_l} 、 g_ω 化为 η 、 ζ 、 β 的显函数

首先, g_{r_l} 、 g_{ω} 的表达式可写成如下形式

$$g_{r_l} = -\left(\frac{r_l}{r}\right)^3 \eta^2 fM \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \eta^2 \left(\frac{r_l}{r}\right)^2 a_E^2 (1 - 5 \sin^2 \phi_k) \right] \quad (3.6.46)$$

$$g_{\omega} = -3J_2 fM \eta^4 \left(\frac{r_l}{r}\right)^4 a_E^2 E(\beta) \quad (3.6.47)$$

其次, 对图 3.6-2 中的三角形 PP_lO_E 应用余弦定理有

$$r^2 = r_l^2 + z_{\pi}^2 - 2r_l z_{\pi} \sin \phi_l$$

将此式两端除以 r_l^2 , 整理可得

$$\frac{r}{r_l} = (1 - 2\zeta \sin \phi_l + \zeta^2)^{1/2}$$

因为 ζ 为 10^{-3} 的量级, 上式可近似为

$$\frac{r}{r_l} = 1 + \zeta \sin \phi_l - \frac{1}{2} \zeta^2 (1 - 3 \sin^2 \phi_l) \quad (3.6.48)$$

另外, 由图 3.6-2 还可写出 $\sin \phi_l$ 与 $\sin \phi_k$ 的关系式

$$r_l \sin \phi_l = r \sin \phi_k + z_{\pi}$$

于是,

$$\sin \phi_k = \frac{r_l}{r} (\sin \phi_l - \zeta) \approx (\sin \phi_l - \zeta)(1 + \zeta \sin \phi_l) \quad (3.6.49)$$

再由球面三角形的余弦定理, 可有

$$\sin \phi_l = \sin \phi_k \cos \beta + \cos \phi_k \sin \beta \cos \hat{\alpha}_K^A$$

记

$$E(\beta) = \sin \phi_k \cos \beta + \cos \phi_k \sin \beta \cos \hat{\alpha}_K^A \quad (3.6.50)$$

则

$$\sin \phi_l = E(\beta) \quad (3.6.51)$$

5) 忽略 J_2^2 、 ζ^2 项的运动微分方程

将(3.6.49)式分别代入(3.6.48)式、(3.6.49)式, 然后将经整理的(3.6.48)式、(3.6.49)式代入(3.6.46)式、(3.6.47)式, 并忽略 J_2^2 、 ζ^2 得

$$g_{\eta} = -\frac{K^2\eta^2}{p} \left\{ 1 + 3\zeta E(\beta) + \frac{3}{2} J_2 a_E^2 \eta^2 [1 - E^2(\beta)] \right\} \quad (3.6.52)$$

$$g_{\omega} = -3K^2 J_2 \eta^3 \frac{a_E^2}{p} E(\beta) \quad (3.6.53)$$

式中

$$p = \frac{K^2}{fM} \quad (3.6.54)$$

将 (3.6.52) 式、(3.6.53) 式代入 (3.6.43) 式和 (3.6.45) 式，再把 (3.6.42) 式列在一起，我们得到自由飞行轨道的运动微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2\eta}{d\beta^2} + \eta = \frac{1}{p} \left\{ 1 + 3\zeta E(\beta) + \frac{3}{2} J_2 a_E^2 \eta^2 [1 - E^2(\beta)] \right\} \\ \frac{d^2\zeta}{d\beta^2} + \zeta = 3J_2 \frac{a_E^2}{p} \eta E(\beta) \\ \frac{dt}{d\beta} = \frac{1}{K\eta^2} \end{cases} \quad (3.6.55)$$

将该方程组与参考文献[7]中给出的方程组比较，可发现，这里给出的方程组少了一个关于动量矩的方程。可见我们采用非正交绝对坐标系所带来的好处。

3 运动微分方程的解

因为方程 (3.6.55) 中， J_2 、 ζ 均为 10^{-3} 的量级，所以它是小参数方程，故可近似取

$$\begin{cases} \frac{d^2\eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \frac{1}{p} \\ \frac{d^2\zeta}{d\beta^2} + \zeta = 3J_2 \frac{a_E^2}{p} \eta_0 E(\beta) \\ \frac{d^2\delta\eta}{d\beta^2} + \delta\eta = \frac{1}{p} \left\{ 3\zeta E(\beta) + \frac{3}{2} J_2 a_E^2 \eta_0^2 [1 - 5] E^2(\beta) \right\} \\ \eta = \eta_0 + \delta\eta \\ \frac{dt}{d\beta} = \frac{1}{K\eta^2} \end{cases} \quad (3.6.56)$$

3.1 椭圆轨道的解

椭圆轨道方程

$$\frac{d^2\eta_0}{d\beta^2} + \eta_0 = \frac{1}{p} \quad (3.6.57)$$

初始条件:

$$\beta=0, \quad \eta_0|_{\beta=0} = \frac{1}{r_K}, \quad \left. \frac{d\eta_0}{d\beta} \right|_{\beta=0} = -\frac{v_{yN}^A}{K}$$

可以导出方程 (3.6.57) 的解为

$$\eta_0 = \frac{1}{p}(1 - e \cos \xi) \quad (3.6.58)$$

式中

$$\xi = \xi_0 + \beta \quad (3.6.59)$$

$$e = (p_K^2 + Q^2)^{1/2} \quad (3.6.60)$$

又

$$\xi_0 = \begin{cases} \arcsin\left(-\frac{Q}{e}\right) & (p_K \geq 0) \\ \operatorname{sgn}\left(-\frac{Q}{e}\right) \cdot \pi + \arcsin\left(\frac{Q}{e}\right) & (p_K < 0) \end{cases} \quad (3.6.61)$$

$$p_K = 1 - \frac{p}{r_K} \quad (3.6.62)$$

$$Q = v_{yN}^A p / K \quad (3.6.63)$$

关于 ξ, ξ_0, β 之间的几何关系见图 3.6-3。

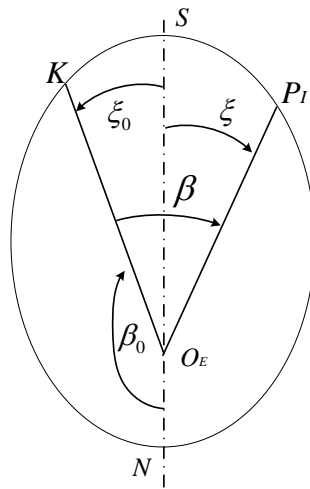


图 3.6—3 椭圆轨道几何关系图

图中, ξ 为从远地点 S 至 P_I 点的地心角, 顺时针为正;

ξ_0 为从远地点 S 至 K 点的地心角，顺时针为正。

在以往的椭圆理论中，其椭圆方程具有如下形式

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (3.6.64)$$

式中的 f 是由近地点算起的地心角。而本书前面导出的对应方程为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \xi} \quad (3.6.65)$$

其中的 ξ 为由远地点算起的地心角。考虑到地地弹道导弹的自由飞行轨道与远地点近于对称，同时，为便于方程的推导，特别是能使飞行时间 T 的表达式变得简单，所以选择了从远地点算起的地心角 ξ 和 ξ_0 。

3.2 关于 ζ 方程的解

为解该方程，首先将 $E(\beta)$ 化为的函数

$$E(\beta) = E_s \sin \xi + E_c \cos \xi = F(\xi) \quad (3.6.66)$$

式中

$$\begin{cases} E_s = E\left(\beta = \frac{\pi}{2} - \xi_0\right) \\ E_c = E(\beta = -\xi_0) \end{cases} \quad (3.6.67)$$

于是，关于 ζ 的方程可改写为

$$\frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} + \zeta = J_a (-eE_c + 2E_s \sin \xi + 2E_c \cos \xi - eE_s \sin 2\xi - eE_c \cos 2\xi) \quad (3.6.68)$$

式中

$$J_a = \frac{3}{2} J_2 a_E^2 / p^2 \quad (3.6.69)$$

可以导出方程 (3.6.38) 的解为

$$\begin{cases} \zeta = J_a [\sigma(\xi) - a_{1\zeta} \sin \xi - b_{1\zeta} \cos \xi] \\ \frac{d\zeta}{d\xi} = J_a [\sigma'(\xi) - a_{1\zeta} \sin \xi - b_{1\zeta} \cos \xi] \end{cases} \quad (3.6.70)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\xi) = a_{0\zeta} + a_{2\zeta} \sin 2\xi + b_{2\zeta} \cos 2\xi + \beta \sigma_1(\xi) \\ \sigma_1(\xi) = c_{1\zeta} \sin \xi + d_{1\zeta} \cos \xi \\ \sigma'(\xi) = 2(a_{2\zeta} \cos 2\xi - b_{2\zeta} \sin 2\xi) + \sigma_1(\xi) + \beta \sigma'_1(\xi) \\ \sigma'_1(\xi) = c_{1\zeta} \cos \xi - d_{1\zeta} \sin \xi \\ a_{0\zeta} = -eE_C \\ c_{1\zeta} = E_C \\ d_{1\zeta} = -E_S \\ a_{2\zeta} = \frac{e}{3} E_S \\ b_{2\zeta} = \frac{e}{3} E_C \\ a_{1\zeta} = \sigma(\xi_0) \sin \xi_0 + \sigma'(\xi_0) \cos \xi_0 \\ b_{1\zeta} = \sigma(\xi_0) \sin \xi_0 - \sigma'(\xi_0) \cos \xi_0 \end{array} \right. \quad (3.6.71)$$

3.3 关于 δ_η 方程的解

将 (3.6.58) 式、(3.6.65) 式及 (3.6.66) 式，代入方程组 (3.6.56) 之第三式，然后解该方程可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\eta = \frac{J_a}{p} [\Phi(\xi) - a_{1\eta} \sin \xi - b_{1\eta} \cos \xi] \\ \frac{d\delta\eta}{d\xi} = \frac{J_a}{p} [\Phi'(\xi) - a_{1\eta} \sin \xi + b_{1\eta} \cos \xi] \end{array} \right. \quad (3.6.72)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned}
& \Phi(\xi) = \sum_{k=2}^4 (a_{k\eta} \sin k\xi + b_{k\eta} \cos k\xi) + \beta \Phi_1(\xi) + a_{0\eta} \\
& \Phi_1(\xi) = \sum_{k=1}^2 (c_{k\eta} \sin k\xi + d_{k\eta} \cos k\xi) \\
& \Phi'(\xi) = \sum_{k=2}^4 k (a_{k\eta} \sin k\xi - b_{k\eta} \cos k\xi) + \Phi_1(\xi) + \beta \Phi_1'(\xi) \\
& \Phi_1'(\xi) = \sum_{k=1}^2 k (c_{k\eta} \sin k\xi - d_{k\eta} \cos k\xi) \\
& a_{1\eta} = \Phi(\xi_0) \sin \xi_0 + \Phi'(\xi_0) \cos \xi_0 \\
& b_{1\eta} = \Phi(\xi_0) \cos \xi_0 - \Phi'(\xi_0) \sin \xi_0 \\
& c_{2\eta} = \frac{1}{2} (d_{1\zeta}^2 - c_{1\zeta}^2) \\
& d_{2\eta} = E_S E_C = -c_{1\zeta} d_{1\zeta} \\
& E_0 = c_{1\zeta}^2 + d_{1\zeta}^2 \\
& c_{2\eta}' = c_{2\eta} + 1 - 2E_0 \\
& c_{1\eta} = -e c_{2\eta}' \\
& d_{1\eta} = -e d_{2\eta} \\
& a_{3\eta} = \frac{3}{4} d_{1\eta} \\
& b_{3\eta} = \frac{3}{4} e c_{2\eta} \\
& a_{4\eta} = -\frac{e}{9} a_{3\eta} \\
& b_{4\eta} = -\frac{e}{9} b_{3\eta} \\
& e_I = 1 + e^2 / 2 \\
& a_0 = \frac{1}{2} [3(a_{1\zeta} d_{1\zeta} - b_{1\zeta} c_{1\zeta}) - 5e_I E_0] - 15b_{4\eta} + e_I \\
& a_{2\eta} = \frac{1}{2} [a_{1\zeta} c_{1\zeta} - b_{1\zeta} d_{1\zeta} + \frac{1}{3} (2 + 5e^2) d_{2\eta}] \\
& b_{2\zeta} = \frac{1}{2} [a_{1\zeta} d_{1\zeta} + b_{1\zeta} c_{1\zeta} - \frac{1}{3} (2 + 5e^2) c_{2\eta} - \frac{e^2}{3} + \frac{5}{6} e^2 E_0]
\end{aligned} \right. \quad (3.6.73)$$

3.4 关于飞行时间 t 方程的解

若记由初始点 K 至任一点 P 的飞行时间为 T，则时间 T 的方程可改写为

$$T = \int_0^\beta \frac{d\beta}{K\eta^2} = \int_{\xi_0}^\xi \frac{d\xi}{K\eta^2} \quad (3.6.74)$$

因为 $\eta = \eta_0 + \delta\eta$ ，故近似取

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{\eta_0^2} \left(1 - 2 \frac{\delta\eta}{\eta_0} \right)$$

所以有

$$T = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\eta_0^2} \left(1 - 2 \frac{\delta\eta}{\eta_0} \right) \frac{d\xi}{K} \quad (3.6.75)$$

将 (3.6.58) 式、(3.6.72) 式的第一式代入 (3.6.75) 式，然后求定积分，该积分的求解比较复杂，这里只给出结果。求飞行时间的计算公式为

$$T = \Gamma(\xi) - \Gamma(\xi_0) \quad (3.6.76)$$

式中

$$\Gamma(\xi) = T_{0t}(\xi) - 2J_2 \frac{a_E^2}{K} \sum_{k=1}^7 I_{kt}(\xi) \quad (3.6.77)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{0t} = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi}{2} \right) \\ b'_{0t} = \frac{2b_{0t}}{(1-e^2)^{1/2}} \\ b_{1t} = e \sin b_{0t} \\ b_{2t} = \cos b_{0t} \\ b'_{2t} = b_{2t} / (1-e^2) \end{array} \right. \quad (3.6.78)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
T'_{0t} &= \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} (b_{0t} + b_{1t}) \\
I'_{0t} &= \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \left(e_1 b_{0t} + b_{1t} \left(2 + \frac{e}{2} b_{2t} \right) \right) \\
I'_{1t} &= \frac{b_{2t}}{(1-e^2)^2} \left(1 + \frac{e}{2} b_{2t} \right) \\
T_{0t}(\xi) &= \frac{p^2}{K} T'_{0t} \\
I_{0t}(\xi) &= a_{0\eta} I'_{0t} \\
I_{1t}(\xi) &= a_{1\eta} I'_{1t} \\
I_{2t}(\xi) &= \frac{b_{2\eta}}{e} (T'_{0t} - I'_{0t}) \\
I_{3t}(\xi) &= 2 \frac{b_{2\eta}}{e} (b'_{2t} - I'_{1t}) \\
I_{4t}(\xi) &= \frac{b_{2\eta}}{e^2} \left[(2-e^2) I'_{0t} - 4T'_{0t} + b'_{0t} \right] \\
I_{5t}(\xi) &= \frac{1}{2} c'_{2\eta} (\beta' - T'_{0t}) \\
\beta' &= \beta / (1 - e \cos \xi)^2 \\
I_{6t}(\xi) &= d_{2\eta} \left\{ \left(\frac{2}{3e} + \beta' \sin \xi \right) \cos \xi + \frac{1}{3e} \left[\left(7 - \frac{5}{4} e^2 \right) I'_{1t} - (9 + e^2) b'_{2t} \right] \right\} \\
I_{7t}(\xi) &= c_{2\eta} \left\{ \left(\frac{2}{3e} + \beta' \sin \xi \right) \sin \xi - \beta' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12e^2} \left[(28 - 19e^2 - e^4) I'_{0t} - (64 - 11e^2) T'_{0t} + (18 + 4e^2) b'_{0t} \right] \right\}
\end{aligned} \right.$$

(3.6.79)

4 任一点轨道参数的确定

上节中导出了自由飞行轨道运动微分方程的解析解，它的具体应用分三种情况考虑：1) 给定初始轨道平面内的 β 角，求其对应的轨道参数；2) 给定飞行时间，求该时刻的轨道参数；3) 给定地心距 r_c ，求 $r = r_c$ 时的轨道参数。现分述如下。

4.1 求 β 角对应的轨道参数

首先，根据给定的初始点的轨道参数，由 3.6.1 节导出的有关公式进行初始点轨道初始转换；然后，根据 3.6.3.1 节给出公式计算出 K, p, ξ_0 ，再由给定的 β

求出对应的 ξ ；再后，根据（3.6.58）式、（3.6.70）式、（3.6.72）式、（3.6.76）式求出： $\eta_0(\xi)$ 、 $\zeta(\xi)$ 、 $\delta\eta(\xi)$ 、 $\eta(\xi)$ 、 $T(\xi)$ 等有关参数。最后，由下列公式求有关参数：

1) P_I 点地心纬度 ϕ_I

$$\phi_I = \arcsin[F(\xi)] \quad (3.6.80)$$

2) P 点地心纬度 ϕ

$$\phi = \phi_I - \zeta \cos \phi_I (1 + \zeta \sin \phi_I) \quad (3.6.81)$$

3) 地心 O_E 至 P 点的矢径 r_P

$$r_P = \frac{1}{\eta_0 + \delta\eta} \left(1 - \zeta \sin \phi_I + \frac{1}{2} \zeta^2 \cos^2 \phi_I \right) \quad (3.6.82)$$

4) P 点与 K 点间的绝对经差 λ_{KT}^A

$$\lambda_1 = \arcsin \left(\sin \beta \frac{\sin \alpha_K^A}{\cos \phi_I} \right)$$

$$\lambda_{KT}^A = \begin{cases} \lambda_1 & (\cos \beta - \sin \phi_K \sin \phi_I \geq 0) \\ \text{sgn}(\lambda_1) - \lambda_1 & (\cos \beta - \sin \phi_K \sin \phi_I < 0) \end{cases} \quad (3.6.83)$$

5) P 点与 K 点间的相对经差 λ_{KP}

$$\lambda_{KP} = \lambda_{KT}^A - T\omega_E \quad (3.6.84)$$

6) P 点的绝对速度在当地北天东坐标系各轴分量 v_{XN}^A 、 v_{YN}^A 、 v_{ZN}^A 的确定

$$\begin{cases} v_{XN}^A = u_\pi \cos \hat{\alpha}_{P_I}^A + \dot{r}_1 - \dot{z}_\pi \cos \phi \\ v_{YN}^A = -u_\pi \delta \cos \hat{\alpha}_{P_I}^A + \dot{r}_1 - \dot{z}_\pi \sin \phi \\ v_{ZN}^A = u_\pi \sin \hat{\alpha}_{P_I}^A \end{cases} \quad (3.6.85)$$

式中

$$\begin{cases} \sin \hat{\alpha}_{P_I}^A = \frac{\cos \phi_K}{\cos \phi_I} \sin \hat{\alpha}_K^A \\ \cos \hat{\alpha}_{P_I}^A = \cos \hat{\alpha}_K^A \cos \lambda_{KT}^A - \sin \hat{\alpha}_K^A \sin \lambda_{KT}^A \sin \phi_K \end{cases} \quad (3.6.86)$$

$$\begin{cases} u_\pi = \eta K \\ \dot{r}_I = -\frac{K}{p} \left\{ e \sin \xi + J_a \left[\Phi'(\xi) - a_{1\eta} \cos \xi + b_{1\eta} \sin \xi \right] \right\} \\ \dot{z}_\pi = u_\pi \frac{d\xi}{d\xi} + \zeta \dot{r}_I \\ \delta = \phi_I - \phi \end{cases} \quad (3.6.87)$$

7) 在 P 点处相对与地球的相对速度在当地北天东坐标系中分量 v_{XN} 、 v_{YN} 、 v_{ZN} 的确定

$$\begin{cases} v_{XN} = v_{XN}^A \\ v_{YN} = v_{YN}^A \\ v_{ZN} = v_{ZN}^A - r_P \omega_E \cos \phi \end{cases} \quad (3.6.88)$$

8) 速度倾角的确定

绝对速度倾角 θ_H^A

$$\theta_H^A = \arctan \left[v_{YN}^A / \sqrt{v_{XN}^2 + v_{ZN}^2} \right] \quad (3.6.89)$$

相对速度倾角 θ_H

$$\theta_H = \arctan \left[v_{YN} / \sqrt{v_{XN}^2 + v_{ZN}^2} \right] \quad (3.6.90)$$

4.2 给定飞行时间 T_c ，求 T_c 时刻的轨道参数

(3.6.76) 式给出了飞行时间 T 是 ξ 的显函数关系式，而若求 $T = T_c$ 时刻所对应的 ξ ，却没有一一对应的显函数关系，只能用迭代方法求解，具体解法如下：

由给定的初值求出 K 、 p 、 ξ_0 、 e ，先按下式求出 $\xi^{[0]}$

$$\xi^{[0]} = \xi_0 + \frac{K}{r_K^2} T_c \quad (3.6.91)$$

然后，由 $i=0$ 开始迭代计算

$$\begin{cases} \eta_0^{[i]} = \frac{1}{p}(1 - e \cos \xi^{[i]}) \\ \delta \eta^{[i]} = \frac{J_a}{p} [\Phi(\xi^{[i]}) - a_{1\eta} \sin \xi^{[i]} - b_{1\eta} \cos \xi^{[i]}] \\ \eta^{[i]} = \eta_0^{[i]} + \delta \eta^{[i]} \\ T^{[i]} = \Gamma(\xi^{[i]}) - \Gamma(\xi_0) \\ \Delta \xi^{[i]} = (T_c - T^{(i)}) (\eta^{[i]})^2 K \\ \xi^{[i+1]} = \xi^{[i]} + \Delta \xi^{[i]} \end{cases} \quad (3.6.92)$$

当满足

$$|\Delta \xi^{[i]}| < \Delta_1 \quad (3.6.93)$$

时终止迭代。式中 Δ_1 是根据精度要求而预先确定的允许值，假定 $i = n$ 时满足

(3.6.93) 式，则取 $\xi_c = \xi^{[i+1]}$ 。然后，由 (3.6.81) ~ (3.6.90) 诸式求 $\xi = \xi_c$ 对应的轨道参数。

4.3 给定距地心距离 r_c ，求 $r = r_c$ 时的轨道参数

为求 $r = r_c$ 时的轨道参数，必须先求出 $r = r_c$ 时对应的 ξ_c ，与上一节一样，由 $r = r_c$ 求 ξ_c 也没有一一对应的显函数关系，因此也用迭代求解。

对于 $i = 0, 1, 2, \dots$ ，计算

$$\begin{cases} \eta_0^{[i]} = \frac{1}{p}(1 - e \cos \xi^{[i]}) \\ \delta \eta^{[i]} = \frac{J_a}{p} [\Phi(\xi^{[i]}) - a_{1\eta} \sin \xi^{[i]} - b_{1\eta} \cos \xi^{[i]}] \\ \eta^{[i]} = \eta_0^{[i]} + \delta \eta^{[i]} \\ \zeta^{[i]} = J_a [\sigma(\xi^{[i]}) - a_{1\zeta} \sin \xi^{[i]} - b_{1\zeta} \cos \xi^{[i]}] \\ \phi_I^{[i]} = \arcsin(F(\xi^{[i]})) \\ \phi^{[i]} = \arcsin[(\sin \phi_I^{[i]} - \zeta^{[i]})(1 + \zeta^{[i]} \sin \phi_I^{[i]})] \\ \delta r^{[i]} = \frac{1}{\eta^{[i]}} \left(1 - \zeta^{[i]} \sin \phi_I^{[i]} + \frac{1}{2} (\zeta^{[i]})^2 \cos^2 \phi_I^{[i]} \right) - r_c \\ \Delta \xi^{[i]} = -\text{ctg } \theta_H^{A^{[i]}} \delta r^{[i]} / R^* \\ \xi^{[i+1]} = \xi^{[i]} + \Delta \xi^{[i]} \end{cases} \quad (3.6.94)$$

式中, R^* 为地球的平均半径, $R^* = 6371100m$, 当迭代计算满足 (3.6.93) 式时, 取 $\xi_c = \xi^{[i+1]}$, 气候的计算与 3.6.4.1 节之计算相同。