

# 远程弹道导弹闭路制导方法研究

# 目 录

摘 要 .....	2
符号及定义 .....	3
一、前 言 .....	5
(一) 基本假设 .....	5
(二) 定义 .....	6
(三) 几个基本关系式 .....	7
二、导弹真速度和真位置的实时确定 .....	12
(一) 将 $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$ 展成坐标 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的级数 .....	12
(二) 主动段运动微分方程及其递推解 .....	16
三、需要速度的确定 .....	21
(一) 虚拟目标位置的确定 .....	21
(二) 需要速度 $\vec{V}_R$ 的确定 .....	23
四、弹的控制与导引 .....	29
1. 对关机点 $\vec{V}_R$ 进行预估 .....	29
2. 导引信号的确定 .....	30
五、关机方程 .....	32
1. 关机点附近计算公式的简化 .....	32
2. 转入小步长计算的判别式 .....	32
3. 关机时间的线性预报 .....	33
4. 关机方程及导引方程 .....	33
附 录 .....	35
一、被动段解析解计算公式 .....	35
二、有关椭圆轨道理论 .....	40
三、弹上计算公式一览表 .....	47
参考文献 .....	53

## 摘 要

本报告是我所开展的闭路制导预研课题的总结报告,其目的是为远程机动发射的地-地弹道导弹提供精度高的、适合于弹上计算机计算的制导方法。在导航计算方面,在对引力进行级数展开基础上,导出计算真速度、真坐标的递推公式。根据国外提出的“需要速度”概念,导出确定需要速度公式,进而导出导引指令和关机方程。计算结果,方法误差只有几十米。计算公式适合弹上计算机计算,现有的计算机可完成闭路制导的所有计算。

本文讨论了地-地弹道导弹惯性制导的一种方法——闭路制导。在主动段中,导弹在飞出大气层前按固定程序控制,飞出大气层后采用“闭路制导”。“闭路制导”是:利用国外提出的需要速度概念,根据导弹当时的“状态”(速度 $\vec{V}$ 、位置 $\vec{r}$ 、时间 $t$ )和目标位置 $\vec{r}_T$ ,实时的确定出“需要速度” $\vec{V}_R$ ,并求出 $\vec{V}_g = \vec{V}_R - \vec{V}$ ;而后控制弹的推力方向,使弹的绝对加速度 $\vec{a}$ 与 $\vec{V}_g$ 一致,以保证 $\vec{V}_g$ 在最短时间内达到零;当 $\vec{V}_g = 0$ 时,关闭发动机。按照“需要速度”的定义,关机后导弹将经过被动段飞行而命中目标。本文主要解决了以下几个问题:

1.将带有一阶扁率的地球引力加速度展成级数,并在此基础上导出解算 $\vec{V}$ 、 $\vec{r}$ 的递推公式,避免了数值积分,简化了计算;

2.参考国外资料,系统的推导整理出两套计算 $\vec{V}_R$ 的公式;

3.根据使 $\vec{a}$ 与 $\vec{V}_g$ 一致的原则,给出了具体的导引计算公式;

4.为减少弹上计算机计算时延所造成的关机误差,采取了两个措施:一是在关机点附近简化计算,从而减小计算步长;二是对关机时间进行线性预报。使计算机时延造成的导弹落点偏差降低到几十米。

实际计算结果表明,闭路制导的方法误差(包括计算机时延误差、被动段地球扁率计算误差等)小于100米,可见精度较高。它对弹上计算机的要求是:(1)平均计算速度十万次;(2)字长为26~28位二进制数;(3)计算机内存单元1K左右(制导计算本身需1K)。目前,国内提供此类性能的微型电子计算机是现实的。

## 符号及定义

- $a_E$  ——地球旋转椭球体的长半轴 ( $a_E = 6378140$  米);  
 $b_E$  ——地球旋转椭球体的短半轴 ( $b_E = 6356756.6$  米);  
 $e'^2$  ——地球旋转椭球体的第二偏心率 [ $e'^2 = (a_E^2 - b_E^2)/b_E^2 = 6.739096 \times 10^{-3}$ ];  
 $\vec{R}$  ——地心至旋转椭球体表面上任一点的矢径;  
 $\vec{r}$  ——地心至旋转椭球体外任一点的矢径;  
 $B$  ——地球上任一点的地理纬度;  
 $\phi$  ——地球上或地球外任一点的地心纬度;  
 $\lambda$  ——地球上或地球外任一点的经度;  
 $\lambda_{oc}$  ——落点  $C$  和发射点  $O$  两点间的经差 ( $\lambda_{oc} = \lambda_C - \lambda_O$ ), 亦称相对经差;  
 $\lambda_{oc}^A$  ——当  $O$  点在惯性空间定位,  $C$  点随地球旋转时,  $C$  点与  $O$  点之经差, 亦称绝对经差;  
 $\mu$  ——地球上任一点的地理纬度与其地心纬度之差 ( $\mu = B - \phi$ );  
 $fM$  ——万有引力常数与地球质量之积 ( $fM = 3.986005 \times 10^{14}$  米<sup>3</sup>/秒<sup>2</sup>);  
 $J$  ——地球引力场的一阶扁率常数 ( $J = 1.623945 \times 10^{-3}$ );  
 $\vec{\Omega}$  ——地球自转角速度矢量 (其方向是由南极指向北极, 其大小  $\Omega = 7.292115 \times 10^{-5}$  1/秒);  
 $\Omega_x^o$  ——  $\vec{\Omega}$  的单位矢量  $\vec{\Omega}^o$  在发射惯性坐标系  $x$  轴的分量 ( $\Omega_x^o = \cos A \cos B$ );  
 $\Omega_y^o$  ——  $\vec{\Omega}$  的单位矢量  $\vec{\Omega}^o$  在发射惯性坐标系  $y$  轴的分量 ( $\Omega_y^o = \sin B$ );  
 $\Omega_z^o$  ——  $\vec{\Omega}$  的单位矢量  $\vec{\Omega}^o$  在发射惯性坐标系  $z$  轴的分量 ( $\Omega_z^o = -\sin A \cos B$ );  
 $A$  ——射击方位角, 是发射惯性坐标系  $x$  轴与北向的夹角, 顺时针为正;  
 $g_r$  ——地球引力加速度在  $\vec{r}$  方向的分量;  
 $g_\Omega$  ——地球引力加速度在  $\vec{\Omega}$  方向的分量;  
 $O-xyz$  ——发射惯性坐标系, 其原点为发射点在旋转椭球体表面的投影点,  $y$  轴与椭球面法线一致, 向外为正,  $x$  轴与  $y$  轴垂直, 指向射击方位,  $z$  轴与  $x$  轴、 $y$  轴组成右手正交坐标系。  
 该坐标系在发射前随地球旋转, 从发射瞬间开始在惯性空间定位。  
 $O_N - x_N y_N z_N$  ——当地北东坐标系, 其原点可取任一点,  $y_N$  轴通过地心而指向上,  $x_N$  轴在通过原点的子午面内, 与  $y_N$  轴垂直而指向北,  $z_N$  轴指向东,

$x_N y_N z_N$  成右手正交坐标系。

$\vec{V}$  ——导弹质心相对于惯性空间的速度；

$\vec{a}$  ——导弹质心相对于惯性空间的加速度；

$\vec{V}_R$  ——任一点的“需要速度”；

$\vec{V}_g$  ——增益速度 ( $\vec{V}_g = \vec{V}_R - \vec{V}$ )。

## 一、前言

弹道导弹的惯性制导，是依据安装在导弹上的惯性器件（如加速度表、陀螺、惯性平台等）的测量值所提供的信息，而对导弹进行制导的。导弹惯性制导应该实现下述功能：

（1）根据惯性器件的测量数据，实时确定弹的状态变量（如 $\vec{V}$ 、 $\vec{r}$ 、姿态角等）；

（2）根据弹的状态变量和目标的位置，确定一条能命中目标的参考弹道（某种意义上下的最佳弹道），并控制和导引导弹沿此参考弹道飞行；

（3）确定准确的关机时间，向发动机发出关机指令。

闭路制导在实现制导功能方面具有下述特点：（1）给出了计算真速度、真坐标（\*这里的真速度、真坐标是相对于视速度、视坐标而言）的递推公式，毋需对引力加速度进行补偿；（2）采用了“需要速度”的概念，将目标的位置和弹的状态变量联系起来，给出确定需要速度的计算公式；（3）提出了对关机点需要速度进行预估的方法，并据此确定待增速度 $\vec{V}_g$ 。在保证弹的绝对加速度 $\vec{a}$ 与 $\vec{V}_g$ 方向一致的前提下，导出确定姿态控制信号的公式，这实际上是在“燃料消耗为最少”意义下的准最优闭路导引公式；（4） $\vec{V}_g=0$ 作为关机条件，而没采用摄动制导 $\Delta L=0$ 的关机条件，从而提高了精度。

现将本文所采用的基本假设、定义及几个基本关系式分述如下。

### （一）基本假设

#### 1. 地球的形状

地球上有陆地和海洋，陆地上又有高山、平原、谷地等，但基本上是一个不规则的椭球体，为了研究问题的方便，人们普遍选用旋转椭球体来逼近大地水准面，各国采用适合本国地理条件的椭球体。过去常用的克拉克椭球体、克拉索夫斯基椭球体等，随着航天技术的发展，对地球测地研究也取得新进展，目前各国均采用新的旋转椭球体，其参数（见图1）为

长半轴 $a_E=6378140$ 米；

短半轴 $b_E=6356756.6$ 米；

第二偏心率 $e'^2=(a_E^2-b_E^2)/b_E^2$   
 $=6.739096\times 10^{-3}$ 。

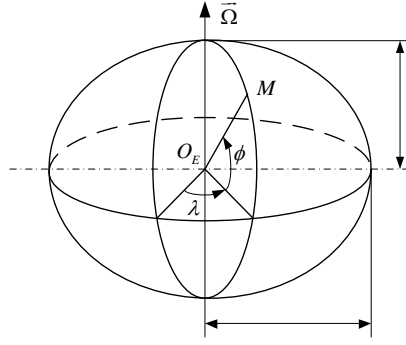


图 1

## 2. 地球的旋转及引力场

地球是以南北极为轴、自西向东旋转的。假定旋转角速度为常值，其值  $\Omega=7.292115 \times 10^{-5}$  弧度/秒，显然，地球自转角速度是南极指向北极的矢量，记为  $\vec{\Omega}$ （见图 1）。

假设地球为一个均质的旋转椭球体，其上或其外任意一点处的单位质量所受到地球的引力为

$$\vec{g} = g_r \vec{r}^o + g_{\Omega} \vec{\Omega}^o \quad (1)$$

式中  $\vec{r}^o$  ——地心到该点矢径的单位矢量；

$\vec{\Omega}^o$  ——地球自转角速度矢量的单位矢量；

$$\begin{cases} g_r = -\frac{fM}{r^2} \left[ 1 + J \frac{a_E^2}{r^2} (1 - 5 \sin^2 \phi) \right] \\ g_{\Omega} = -2JfM \frac{a_E^2}{r^4} \sin \phi \end{cases} \quad (2)$$

又  $fM$  ——万有引力常数与地球质量之积，其值  $fM=3.86005 \times 10^{14}$  米<sup>3</sup>/秒<sup>2</sup>；

$r$  ——地心至质点的距离；

$\phi$  ——质点的地心纬度；

$J$  ——地球引力的一阶扁率常数， $J=1.623945 \times 10^{-3}$ 。

## （二）定义

### 1. 描述地球表面任一点位置的两种坐标系

#### （1）地心坐标系

地球表面上任一点  $M$  可用经度  $\lambda$ 、地心纬度  $\phi$  及地球半径  $R$  表示。经度定义为过  $M$  点的子午面与过格林威治天文台的零子午面间的二面角，由零子午面向东为正，向西为负。显然有  $-180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$ 。由地心至  $M$  点的矢径称为  $M$  点的地球半径。地心纬度定义为过  $M$  点的地球半径与赤道平面的夹角，北半球为正，南半球为负。显然  $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ 。

根据椭圆方程可导出

$$R = a_E / \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \phi} \quad (3)$$

或近似取

$$R = a_E \left[ 1 - \frac{e'^2}{2} \sin^2 \phi + \frac{3}{8} (e'^2 \sin^2 \phi)^2 \right] \quad (4)$$

## (2) 地理坐标系

大地测量所标定的或地图上给出的地球上任一点的位置是经度和地理纬度。这里的经度定义与在地心坐标系中所述定义相同，地理纬度定义为：通过任一点  $M$  的旋转椭球体的法线  $MN$ （见图 2）与赤道平面的夹角，以符号  $B$  表示，同样， $M$  点在北半球  $B$  取正，在南半球取负，即  $-90^\circ \leq B \leq 90^\circ$ 。

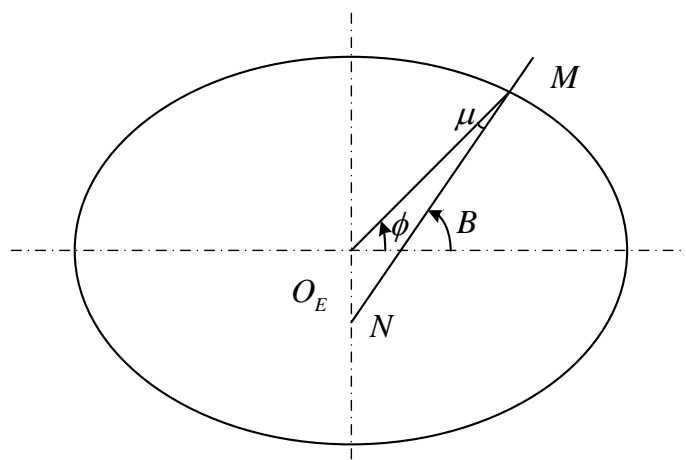


图 2

## 2. 发射惯性坐标系和当地北东坐标系

(1) 发射惯性坐标系定义：该坐标系的原点为过发射点的铅垂线与旋转椭球面的交点， $y$  轴与当地铅垂线一致，指向上为正， $x$  轴与  $y$  轴垂直而指向射向， $z$  轴与  $x$ 、 $y$  轴成右手直角坐标系。该坐标系在导弹发射前与地球固连，即以地球自转角速度  $\bar{\Omega}$  旋转，从而导弹起飞瞬间（严格的说应是制导系统开始工作瞬间）起，该坐标系变为惯性坐标系，不再随地球旋转而在惯性空间定向。故称此坐标系为发射惯性坐标系。

该坐标系是我们制导计算的基本参考系，在平台式制导方案中，它是惯性平台在起飞前后所要对准的坐标系，在捷联式制导方案中，该坐标系是“解析平台”（或称“数学平台”）所要对准的坐标系。

(2) 当地北东坐标系定义：任一点  $M$  为北东坐标系的原点， $y_N$  轴自地心至  $M$  点矢量的方向一致， $x_N$  轴在过  $M$  点的子午面内与  $y_N$  垂直而指向北极， $z_N$  轴指向东与  $x_N$ 、 $y_N$  成右手直角坐标系。

## (三) 几个基本关系式

### 1. 地球表面任一点处的地理纬度与地心纬度之差 $\mu$ 的表达式



按照定义：

$$\mu = B - \phi \quad (5)$$

因为通常是已知  $B$  求  $\phi$  或  $\mu$ ，只有(5)式尚不能确定  $\phi$ ，需求出  $\mu$  的另一表达式。

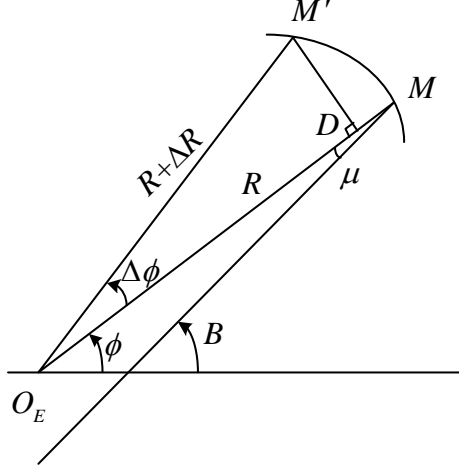


图 3

在图 2 上  $M$  点附近取一个微弧段  $\overline{MM'}$ ，并画于图 3，因为  $\overline{MM'}$  是微弧段，所以可视为直线段  $\overline{MM'}$ ， $M'$  点对应地心纬度  $\phi + d\phi$ ，对应地球半径  $R + dR$ ， $\overline{MM'}$  垂直于当地法线  $\overline{MN}$ ，过  $M'$  点作  $\overline{M'D} \perp \overline{O_E M}$ ，显然， $\angle MM'D = \mu$ 。另外，由  $\triangle MM'D$  有

$$\tan \angle MM'D = \tan \mu = \frac{\overline{MD}}{\overline{M'D}}$$

其中  $\overline{MD} = -dR$ ， $\overline{M'D} = R d\phi$ 。所以有

$$\tan \mu = -\frac{\Delta R}{R \Delta \phi}$$

当  $\Delta \phi \rightarrow$  无穷小时

$$\tan \mu = -\frac{1}{R} \frac{dR}{d\phi} \quad (6)$$

将(3)式对  $\phi$  求导数，可得

$$\frac{dR}{d\phi} = -\frac{R^3}{2a_E^2} e'^2 \sin 2\phi \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式，可得

$$\mu = \frac{e'^2 \sin 2\phi}{2(1 + e'^2 \sin^2 \phi)} \quad (8)$$

近似取

$$\mu = \frac{e'^2}{2} \sin 2\phi \times (1 - e'^2 \sin^2 \phi) \quad (9)$$

并可导得

$$\mu = \frac{e'^2}{2} \sin 2B \times (1 - e'^2 \cos^2 B) \quad (10)$$

## 2. 地球外任一点的地心纬度和地心矢径的确定

在制导计算中往往采用地心坐标系描述目标的位置, 而实际作战时给定的是目标的地理纬度  $B_T$  和高程  $h_T$ , 因此需要给出由  $B_T$  和  $h_T$  确定目标点的地心纬度  $\phi_T$  及地心矢径  $r_T$  的计算公式。

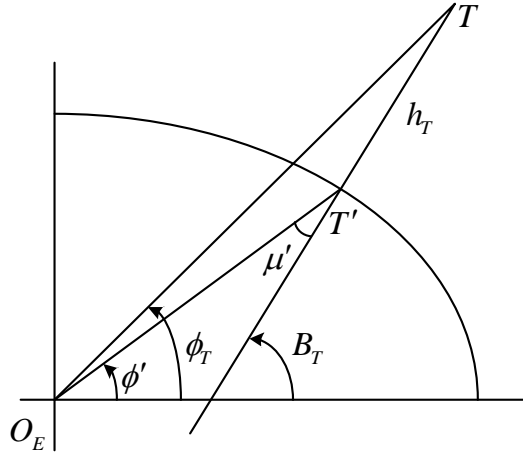


图 4

在图 4 中,  $T$  点的高程  $h_T$ 、地心纬度  $B_T$ ,  $T$  点在地球表面的投影点  $T'$ , 则  $T'$  点对应之地心矢径  $R_T$ , 地理纬度与地心纬度差  $\mu'$ , 可先由(10)式确定  $\mu'$ , 然后再由(5)式确定  $\phi'$ , 由(3)式确定  $R_T$ 。由图 4 的几何关系可得

$$r_T = (h_T + R_T \cos \mu') / \cos (B_T - \phi_T) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tan (B_T - \phi_T) &= R_T \sin \mu' / (h_T + R_T \cos \mu') \\ &= \tan \mu' / \left(1 + \frac{h_T}{R_T \cos \mu'}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

由(12)式近似有

$$\phi_T = B_T - \mu' \left(1 - \frac{h_T}{R_T} + \frac{h_T^2}{R_T^2}\right) \quad (13)$$

将(13)式带入(11)式, 可近似导得

$$r_T = R_T + h_T - \frac{\mu'^2}{2} h_T \quad (14)$$

因为  $h_T < 10$  公里,  $\frac{\mu'^2}{2} h_T < 0.25$  米, 可用

$$\phi_T = B_T - \mu' \left(1 - \frac{h_T}{R_T}\right) \quad (15)$$

$$r_T = R_T + h_T$$

计算  $\phi_T$  和  $r_T$ 。

### 3. 发射惯性坐标系与当地北东坐标系间的坐标转换

(1) 确定  $\vec{\Omega}^o$  在发射惯性坐标系中各轴的分量

设发射惯性坐标系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  各轴的单位矢量为  $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ ，且知射击方位角为  $A$ ，则有

$$\vec{\Omega}^o = \Omega_x^o \vec{i} + \Omega_y^o \vec{j} + \Omega_z^o \vec{k} \quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} \Omega_x^o = \cos A \cos B \\ \Omega_y^o = \sin B \\ \Omega_z^o = -\sin A \cos B \end{cases} \quad (17)$$

(2) 发射点地球半径  $\vec{R}_o$  在发射惯性坐标系中分量从几何关系可写出

$$\vec{R}_o = R_{ox} \vec{i} + R_{oy} \vec{j} + R_{oz} \vec{k} \quad (18)$$

$$\begin{cases} R_{ox} = -R_o \sin \mu \cos A \\ R_{oy} = R_o \cos \mu \\ R_{oz} = R_o \sin \mu \sin A \end{cases} \quad (19)$$

(3) 发射惯性坐标系中任一点  $M(x, y, z)$  之地心矢径

$$\vec{r}_M = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \quad (20)$$

$$\begin{cases} r_x = R_{ox} + x \\ r_y = R_{oy} + y \\ r_z = R_{oz} + z \end{cases} \quad (21)$$

$\vec{r}_M$  的单位矢量  $\vec{r}^o$  为

$$\begin{aligned} \vec{r}^o &= r_x^o \vec{i} + r_y^o \vec{j} + r_z^o \vec{k} \\ \begin{cases} r_x^o = r_x / r \\ r_y^o = r_y / r \\ r_z^o = r_z / r \\ r_M = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{1/2} \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

(4) 任一点  $M(x, y, z)$  对应的地心纬度

因为

$$\vec{r}^o \cdot \vec{\Omega}^o = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_M\right) = \sin \phi_M$$

所以有

$$\phi_M = \arcsin(r_x^o \Omega_x^o + r_y^o \Omega_y^o + r_z^o \Omega_z^o) \quad (23)$$

(5) 任一点  $M(x, y, z)$  与发射惯性坐标系原点间的经差  $\lambda_{OM}^A$  (\*上角标  $A$  表

示绝对经差)

首先, 以  $M$  点为原点作一北东坐标系  $x_N y_N z_N$ , 并记各轴单位矢量分别为  $\vec{i}_N$ 、 $\vec{j}_N$ 、 $\vec{k}_N$ , 由于  $\vec{r}_M$  与  $y_N$  轴方向一致, 故有  $\vec{j}_N = \vec{r}^o$ 。又根据矢量叉乘关系

$$\vec{\Omega}^o \times \vec{r}^o = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_M\right) \vec{k}_N = \cos \phi_M \vec{k}_N$$

可得

$$\vec{k}_N = \frac{1}{\cos \phi_M} (f_{31} \vec{i} + f_{32} \vec{j} + f_{33} \vec{k}) \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z^o & \Omega_y^o \\ \Omega_z^o & 0 & -\Omega_x^o \\ \Omega_y^o & \Omega_x^o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x^o \\ r_y^o \\ r_z^o \end{bmatrix} \quad (25)$$

按照定义,  $\lambda_{OM}^A$  是过  $M$  点的子午面与过发射点  $O$  子午面间的夹角。显然, 这两个子午面法线的夹角便是  $\lambda_{OM}^A$ 。由于  $\vec{k}_N$  是过  $M$  点子午面的法线, 又可写出过点  $O$  子午面的法线  $\vec{k}' = \sin A \vec{i} + \cos A \vec{k}$ , 则有

$$\vec{k}_N \times \vec{k}' = \cos \lambda_{OM}^A \quad (26)$$

$$\vec{k}' \times \vec{k}_N = \sin \lambda_{OM}^A \vec{\Omega}^o \quad (27)$$

由(26)、(27)两式可求得

$$\cos \lambda_{OM}^A = \frac{1}{\cos \phi_M} (f_{31} \sin A + f_{33} \cos A) \quad (28)$$

$$\sin \lambda_{OM}^A = -\frac{f_{32}}{\cos B_O \cos \phi_M} \quad (29)$$

$$\lambda_{OM}^A = \begin{cases} \arcsin \left[ -\frac{f_{32}}{\cos B_O \cos \phi_M} \right] & (\cos \lambda_{OM}^A \geq 0) \\ \text{sign}\{\sin \lambda_{OM}^A\} \pi - \arcsin \left[ -\frac{f_{32}}{\cos B_O \cos \phi_M} \right] & (\cos \lambda_{OM}^A < 0) \end{cases} \quad (30)$$

(6) 发射惯性坐标系与  $M$  点北东坐标系间方向余弦阵  $C_I^N$

因有

$$\begin{aligned} \vec{j}_N &= \vec{r}^o = r_x^o \vec{i} + r_y^o \vec{j} + r_z^o \vec{k} \\ \vec{k}_N &= \frac{1}{\cos \phi_M} (f_{31} \vec{i} + f_{32} \vec{j} + f_{33} \vec{k}) \end{aligned}$$

则有

$$\vec{i}_N = \vec{j}_N \times \vec{k}_N = \frac{1}{\cos \phi_M} (\vec{\Omega}^o - \sin \phi_M \vec{r}^o) \quad (31)$$

若记

$$\begin{cases} f_{11} = \Omega_x^o - \sin \phi_M r_x^o \\ f_{12} = \Omega_y^o - \sin \phi_M r_y^o \\ f_{13} = \Omega_z^o - \sin \phi_M r_z^o \end{cases} \quad (32)$$

则有

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_N \\ \vec{j}_N \\ \vec{k}_N \end{bmatrix} = C_I^N \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$C_I^N = \begin{bmatrix} f_{11}/\cos \phi_M & f_{12}/\cos \phi_M & f_{13}/\cos \phi_M \\ r_x^o & r_y^o & r_z^o \\ f_{31}/\cos \phi_M & f_{32}/\cos \phi_M & f_{33}/\cos \phi_M \end{bmatrix} \quad (34)$$

方向余弦矩阵在制导和弹道计算中应用广泛。

发射惯性坐标系与北东坐标系几何关系见图 5。

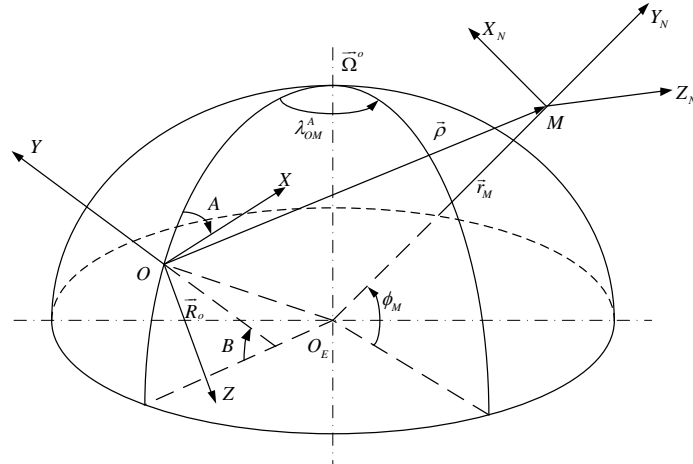


图 5

## 二、导弹真速度和真位置的实时确定

在本节中，首先将地球引力加速度分量  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  展成  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的级数，然后将主动段运动方程线性化，进而导出计算导弹状态变量的递推公式。

(一) 将  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  展成坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的级数

1. 将  $R_{ox}$ 、 $R_{oy}$ 、 $R_{oz}$  展成  $\Omega_x^o$ 、 $\Omega_y^o$ 、 $\Omega_z^o$  的级数

从(3)、(10)式可导得

$$R_o = a_E \left[ 1 - \frac{e'^2}{2} \sin^2 B + e'^4 \sin^2 B \left( 1 - \frac{5}{8} \sin^2 B \right) \right] \quad (35)$$

因  $\sin B = \Omega_y^o$ ，故

$$R_o = a_E \left[ 1 - \frac{e'^2}{2} \Omega_y^{o2} + e'^4 \Omega_y^{o2} \left( 1 - \frac{5}{8} \Omega_y^{o2} \right)^2 \right] \quad (36)$$

将(10)、(36)两式代入(19)式，经整理忽略 $(e'^2)^3$ 及以上高阶项可得

$$\begin{cases} R_{ox} = -a_E e'^2 (1 - e'^2 + \frac{e'^2}{2} \Omega_y^{o2}) \Omega_x^o \Omega_y^o \\ R_{oy} = a_E \left[ 1 - \frac{1}{2} e'^2 \Omega_y^{o2} + \frac{1}{2} e'^4 \Omega_y^{o2} \left( 1 - \frac{1}{4} \Omega_y^{o2} \right) \right] \\ R_{oz} = -a_E e'^2 (1 - e'^2 + \frac{e'^2}{2} \Omega_y^{o2}) \Omega_y^o \Omega_z^o \end{cases} \quad (37)$$

## 2. 将 $r$ 展为 $\Omega_x^o$ 、 $\Omega_y^o$ 、 $\Omega_z^o$ 及 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的级数

将(37)式代入(21)式，再将(21)代入(22)式，并展开为泰勒级数，忽略高阶项可得

$$\begin{aligned} r = a_E \{ & 1 - \frac{e'^2}{2} \Omega_y^{o2} + \frac{y}{a_E} + e'^4 \Omega_y^{o2} \left( 1 - \frac{5}{8} \Omega_y^{o2} \right) + \frac{1}{2a_E^2} (x^2 + z^2) \\ & - \frac{y}{2a_E} \times \frac{x^2 + z^2}{a_E^2} - \frac{e'^2}{a_E} \Omega_y^o (x \Omega_x^o + z \Omega_z^o) \} \end{aligned} \quad (38)$$

及

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = \frac{1}{a_E} \{ & 1 + \frac{e'^2}{2} \Omega_y^{o2} - \frac{y}{a_E} + \frac{1}{2a_E^2} (2y^2 - x^2 - z^2) - e'^4 \Omega_y^{o2} \left( 1 - \frac{7}{8} \Omega_y^{o2} \right) \\ & + \frac{e'^2}{a_E} \Omega_y^o (x \Omega_x^o + z \Omega_z^o - y \Omega_y^o) + \frac{y}{2a_E^3} (3x^2 + 3z^2 - 2y^2) \} \end{aligned} \quad (39)####$$

## 3. 将 $r_x^o$ 、 $r_y^o$ 、 $r_z^o$ 展为 $\Omega_x^o$ 、 $\Omega_y^o$ 、 $\Omega_z^o$ 及 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的级数

可求得

$$\begin{cases} r_x^o = \frac{x}{a_E} \left[ 1 - \frac{y}{a_E} + \frac{e'^2}{2} \Omega_y^{o2} + \frac{1}{a_E^2} (y^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2}) \right] - e'^2 \Omega_x^o \Omega_y^o \left[ 1 - \frac{y}{a_E} - e'^2 (1 - \Omega_y^{o2}) \right] \\ r_y^o = 1 - \frac{e'^4}{2} \Omega_y^{o2} (1 - \Omega_y^{o2}) - \frac{1}{2a_E^2} (1 - 2\frac{y}{a_E}) (x^2 + z^2) + \frac{e'^2}{a_E} \Omega_y^o (x \Omega_x^o + z \Omega_z^o) \\ r_z^o = \frac{z}{a_E} \left[ 1 - \frac{y}{a_E} + \frac{e'^2}{2} \Omega_y^{o2} + \frac{1}{a_E^2} (y^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2}) \right] - e'^2 \Omega_y^o \Omega_z^o \left[ 1 - \frac{y}{a_E} - e'^2 (1 - \Omega_y^{o2}) \right] \end{cases} \quad (40)$$

## 4. 将 $\sin \phi$ 展为 $\Omega_x^o$ 、 $\Omega_y^o$ 、 $\Omega_z^o$ 及 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的级数

将(40)式代入(23)式可得

$$\begin{aligned} \sin \phi = \Omega_y^o \left[ 1 - \frac{x^2 + z^2}{2a_E^2} \left( 1 - 2\frac{y}{a_E} \right) \right] + \frac{1}{a_E} (x \Omega_x^o + z \Omega_z^o) \left[ 1 - \frac{y}{a_E} + \frac{3}{2} e'^2 \Omega_y^{o2} \right. \\ \left. + \frac{1}{a_E} \left( y^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right) \right] - e'^2 \Omega_y^o (1 - \Omega_y^{o2}) \left[ 1 - \frac{y}{a_E} - e'^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \Omega_y^{o2} \right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

5. 将  $g_r$ 、 $g_\Omega$  展为  $\Omega_x^o$ 、 $\Omega_y^o$ 、 $\Omega_z^o$  及  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的级数

将(41)、(39)两式代入(2)式，忽略高阶项可得

$$\left\{ \begin{aligned} g_r &= -\frac{fM}{a_E^2} \left\{ 1 + J + (e'^2 - 5J)\Omega_y^{o2} + (12J - 2e'^2)\Omega_y^{o2}e'^2 + (2e'^2 - 20J)e'^2\Omega_y^{o4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{a_E} \left[ -2(1 + 2J) + (20J - 3e'^2)\Omega_y^{o2} + \frac{4}{a_E^2}(x^2 + z^2 - y^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{x\Omega_x^o + z\Omega_z^o}{a_E} \Omega_y^o \left[ (2e'^2 - 10J) + 50J \frac{y}{a_E} \right] + \frac{y^2}{a_E^2} [3 + J(10 - 35\Omega_y^{o2})] \right. \\ &\quad \left. - \left[ 1 - J(3 + 5\Omega_y^{o2}) \right] \frac{x^2 + z^2}{a_E^2} - 5J \frac{(x\Omega_x^o + z\Omega_z^o)^2}{a_E^2} \right\} \\ g_\Omega &= -2J \frac{fM}{a_E^2} \left\{ \Omega_y^o \left[ 1 - 4 \frac{y}{a_E} + e'^2(3\Omega_y^{o2} - 1) \right] + \frac{1}{a_E} (x\Omega_x^o + z\Omega_z^o) \right\} \end{aligned} \right. \quad (42)$$

6. 将  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  展为  $\Omega_x^o$ 、 $\Omega_y^o$ 、 $\Omega_z^o$  及  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的级数

$g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  分别为  $\bar{g}$  在发射惯性系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的分量，它们为

$$\left\{ \begin{aligned} g_x &= g_r r_x^o + g_\Omega \Omega_x^o \\ g_y &= g_r r_y^o + g_\Omega \Omega_y^o \\ g_z &= g_r r_z^o + g_\Omega \Omega_z^o \end{aligned} \right.$$

将(40)式和(42)式代入(1)各式，忽略高阶项整理可得

$$\left\{ \begin{aligned} g_x &= g_{10} + g_{11}x + g_{12}y + g_{13}z + \left\{ g_{14}y + g_{15} \left[ 2y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] \right\} x \\ g_y &= g_{20} + g_{12}x + g_{22}y + g_{23}z - g_{14} \left[ y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] \\ &\quad + g_{15} \left[ 2(x^2 + z^2) - \frac{4}{3}y^2 \right] y \\ g_z &= g_{30} + g_{13}x + g_{23}y + g_{33}z + \left\{ g_{14}y + g_{15} \left[ 2y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] \right\} z \end{aligned} \right. \quad (43)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned}
g_{10} &= g_{40} \Omega_x^o \\
g_{30} &= g_{40} \Omega_z^o \\
g_{20} &= -\frac{fM}{a_E^2} \left\{ 1 + J + \left[ (e'^2 - 3J) + e'^2 \left( 10J - \frac{5}{2} e'^2 \right) + \left( \frac{5}{2} e'^2 - 14J \right) e'^2 \Omega_y^{o2} \right] \Omega_y^{o2} \right\} \\
g_{11} &= -\frac{fM}{a_E^3} (g_{50} + 2J \Omega_x^{o2}) \\
g_{33} &= -\frac{fM}{a_E^3} (g_{50} + 2J \Omega_z^{o2}) \\
g_{22} &= -(g_{11} + g_{33}) \\
g_{12} &= g_{60} \Omega_x^o \\
g_{23} &= g_{60} \Omega_z^o \\
g_{13} &= -2J \frac{fM}{a_E^3} \Omega_x^o \Omega_z^o \\
g_{14} &= 3 \frac{fM}{a_E^4} \\
g_{15} &= -\frac{g_{14}}{a_E} \\
g_{40} &= -\frac{fM}{a_E^2} \left[ (2J - e'^2) + e'^2 (e'^2 - 3J) + e'^2 (11J - 2e'^2) \Omega_y^{o2} \right] \Omega_y^o \\
g_{50} &= 1 + J + \left( \frac{3}{2} e'^2 - 5J \right) \Omega_y^{o2} \\
g_{60} &= -\frac{fM}{a_E^3} (3e'^2 - 8J) \Omega_y^o
\end{aligned} \right. \quad (44)$$

将  $a_E$ 、 $fM$ 、 $J$ 、 $e'^2$  之值代入(44)式可得

$$\left\{ \begin{aligned}
g_{20} &= -9.7982777 - (1.8258 + 0.03876 \Omega_y^{o2}) \times 10^{-2} \Omega_y^{o2} \\
g_{11} &= -1.5387287 \times 10^{-6} - 3.0554 \times 10^{-9} \Omega_y^{o2} - 4.9895 \times 10^{-9} \Omega_x^{o2} \\
g_{33} &= -1.5387287 \times 10^{-6} - 3.0554 \times 10^{-9} \Omega_y^{o2} - 4.9895 \times 10^{-9} \Omega_z^{o2} \\
g_{13} &= -4.9895 \times 10^{-9} \Omega_x^o \Omega_z^o \\
g_{14} &= 7.22575 \times 10^{-13} \\
g_{15} &= -1.1329 \times 10^{-19} \\
g_{40} &= (3.4030318 \times 10^{-2} - 2.89562 \times 10^{-4} \Omega_y^{o2}) \Omega_y^o \\
g_{60} &= -1.1100366 \times 10^{-9} \Omega_y^o
\end{aligned} \right. \quad (45)$$

## 7. 关于 $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$ 级数展开式的讨论

(43)式中给出的  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  的级数展开式，其中忽略了  $(x/a_E)^4$ 、 $(y/a_E)^4$  等项及高阶项，可见误差与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的四次方成比例。假定关机点坐标  $x$ 、 $y$  均



为  $3.18 \times 10^5$  米, 则在关机点处  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  的计算误差均为  $6 \times 10^{-5}$  (米/秒<sup>2</sup>), 而  $x$ 、 $y$  可近似看作与时间  $t$  的平方成正比, 于是  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  的计算误差可看作  $t$  的三次函数, 故在整个主动段  $g_x$ 、 $g_y$  的平均计算误差约为  $\frac{1}{9} \times 6 \times 10^{-5} = \frac{2}{3} \times 10^{-5}$  (米/秒<sup>2</sup>), 若关机时间  $t_k$  为 150(秒), 则主动段终点速度误差将达  $150 \times \frac{2}{3} \times 10^{-5} = 1 \times 10^{-3}$  米/秒, 位置误差为 0.15 米左右。实际计算结果与上述分析是一致的。对于关机点坐标  $x$ 、 $y$  均小于  $1 \times 10^5$  (米) 的中近程导弹, 可忽略  $x/a_E$ 、 $y/a_E$  的三次项, 因  $z$  很小, 故可取

$$\begin{cases} g_x = g_{10} + g_{11}x + g_{12}y + g_{13}z + g_{14}xy \\ g_y = g_{20} + g_{21}x + g_{22}y + g_{23}z - g_{14}(y^2 - \frac{1}{2}x^2) \\ g_z = g_{30} + g_{13}x + g_{32}y + g_{33}z + g_{14}yz \end{cases} \quad (46)$$

## (二) 主动段运动微分方程及其递推解

在惯性空间中, 导弹质心的运动微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{g} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \end{cases} \quad (47)$$

式中  $\frac{d\vec{W}}{dt}$  ——弹的视加速度矢量 (亦称非引力加速度或比力), 该量由惯性测量元件给出。

方程(47)在发射惯性坐标系中改写为标量方程组

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = \dot{W}_x + g_x \\ \frac{dV_y}{dt} = \dot{W}_y + g_y \\ \frac{dV_z}{dt} = \dot{W}_z + g_z \\ \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dz}{dt} = V_z \end{cases} \quad (48)$$

其中,

$V_x$ 、 $V_y$ 、 $V_z$  分别为  $\vec{V}$  在发射惯性系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的分量;

$\dot{W}_x$ 、 $\dot{W}_y$ 、 $\dot{W}_z$  分别为  $\dot{\vec{W}}$  在发射惯性系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的分量；

$g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  分别为  $\vec{g}$  在发射惯性系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的分量；

又， $r_x^o$ 、 $r_y^o$ 、 $r_z^o$  分别为  $\vec{r}$  的单位矢量  $\vec{r}^o$  在发射惯性系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的分量。

由(46)式可知， $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的非线性函数，所以方程组(47)是非线性方程组，故不能有解析解，只能用数值积分方法求解。为求得解析形式的递推解，我们将方程组线性化。

### 1. 主动段运动微分方程的线性化

将(43)式代入(48)式，得主动段运动微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = g_{11}x + g_{12}y + g_{13}z + \left\{ g_{14}y + g_{15} \left[ 2y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] \right\} x + g_{10} + \dot{W}_x \\ \frac{dV_y}{dt} = g_{12}x + g_{22}y + g_{23}z - g_{14} \left[ y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] + g_{15} \left[ 2(x^2 + z^2) - \frac{4}{3}y^2 \right] y + g_{20} + \dot{W}_y \\ \frac{dV_z}{dt} = g_{13}x + g_{23}y + g_{33}z + \left\{ g_{14}y + g_{15} \left[ 2y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] \right\} z + g_{30} + \dot{W}_z \\ \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dz}{dt} = V_z \end{cases}$$

方程(47)中的非线性项的系数  $g_{14}$ 、 $g_{15}$  分别为  $7 \times 10^{-13}$  (1/秒<sup>2</sup>·米) 和  $1.1 \times 10^{-19}$  (1/秒<sup>2</sup>·米<sup>2</sup>) 的量级，可见非线性项的数值较小。这样，在比较小的积分区间内，非线性项中的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  可近似取

$$\begin{cases} x(t) = x(t_i) + (t - t_i)V_x(t_i) \\ y(t) = y(t_i) + (t - t_i)V_y(t_i) \\ z(t) = z(t_i) + (t - t_i)V_z(t_i) \end{cases} \quad (49)$$

式中  $x(t_i)$ 、 $y(t_i)$ 、 $z(t_i)$ 、 $V_x(t_i)$ 、 $V_y(t_i)$ 、 $V_z(t_i)$  为在小区间内积分的初值，故  $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$  化为时间  $t$  的线性函数。

将(49)式代入  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  表示式中的非线性项内，忽略高阶小量，可得

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ g_{14}y + g_{15} \left[ 2y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] \right\} x = g_{14}x_i y_i + g_{15} \left[ 2y_i^2 - \frac{1}{2}(x_i^2 + z_i^2) \right] x_i + g_{14} (x_i V_{yi} + y_i V_{xi}) (t - t_i) \\ & -g_{14} \left[ y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] = -g_{14} \left[ y_i^2 - \frac{1}{2}(x_i^2 + z_i^2) \right] - 2g_{14} \left[ y_i V_{yi} - \frac{1}{2}(x_i V_{xi} + z_i V_{zi}) \right] (t - t_i) \\ & g_{15} \left[ 2(x^2 + z^2) - \frac{4}{3}y^2 \right] y = g_{15} \left[ 2(x_i^2 + z_i^2) - \frac{4}{3}y_i^2 \right] y_i \\ & \left\{ g_{14}y + g_{15} \left[ 2y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \right] \right\} z = g_{14}y_i z_i + g_{15} \left[ 2y_i^2 - \frac{1}{2}(x_i^2 + z_i^2) \right] z_i + g_{14} (y_i V_{zi} + z_i V_{yi}) (t - t_i) \end{aligned} \right. \quad (50)$$

将(50)式代入原微分方程组，则可写成如下形式的线性矩阵方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{U}_0 + (t - t_i)\mathbf{U}_1 \quad (51)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}_{6 \times 1} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}
\end{aligned}$$

$\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵， $\mathbf{0}$  为  $3 \times 3$  的零矩阵。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{W}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 1} \\ \dot{\mathbf{W}} &= \begin{bmatrix} \dot{W}_x \\ \dot{W}_y \\ \dot{W}_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ \mathbf{U}_0 &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 1} \\ \mathbf{U}_1 &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 1}
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{U}}_0 = \begin{bmatrix} g_{10} + g_{14}x_i y_i + g_{15} \left[ 2y_i^2 - \frac{1}{2}(x_i^2 + z_i^2) \right] x_i \\ g_{20} - g_{14} \left[ y_i^2 - \frac{1}{2}(x_i^2 + z_i^2) \right] + g_{15} \left[ 2(x_i^2 + z_i^2) - \frac{4}{3}y_i^2 \right] y_i \\ g_{30} + g_{14}y_i z_i + g_{15} \left[ 2y_i^2 - \frac{1}{2}(x_i^2 + z_i^2) \right] z_i \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = \begin{bmatrix} g_{14}(x_i V_{yi} + y_i V_{xi}) \\ -2g_{14} \left[ y_i V_{yi} - \frac{1}{2}(x_i V_{xi} + z_i V_{zi}) \right] \\ g_{14}(y_i V_{zi} + z_i V_{yi}) \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

若记

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

则有

$$\mathbf{g} = \mathbf{GS} + \bar{\mathbf{U}}_0 + \bar{\mathbf{U}}_1(t - t_i) \quad (52)$$

这个式子下边将要用到，它是 $\mathbf{S}$ 的函数。

## 2. 运动微分方程的解

根据现代控制理论，方程(51)的解为

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_i) \mathbf{X}_i + \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) [\mathbf{U}_0 + (\tau - t_i) \mathbf{U}_1 + \dot{\mathbf{W}}(\tau)] d\tau \quad (53)$$

其中，转移矩阵

$$\Phi(t, t_i) = e^{(t-t_i)\mathbf{A}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^j}{j!} \mathbf{A}^j$$

$$\approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \frac{(t-t_i)^2}{2} \mathbf{G} + \frac{(t-t_i)^4}{24} \mathbf{G}^2 & (t-t_i) \mathbf{G} + \frac{(t-t_i)^3}{6} \mathbf{G}^2 \\ (t-t_i) \mathbf{I} + \frac{(t-t_i)^3}{6} \mathbf{G} + \frac{(t-t_i)^5}{120} \mathbf{G}^2 & \mathbf{I} + \frac{(t-t_i)^2}{2} \mathbf{G} + \frac{(t-t_i)^4}{24} \mathbf{G}^2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

取积分区间为 $[t_i, t_{i+1}]$ ，并记 $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ，完成(53)式右端的积分，并忽略高阶项，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{i+1} = \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{G} \right) \mathbf{V}_i + \left( \Delta t \mathbf{G} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{G}^2 \right) \mathbf{S}_i + \Delta t \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{6} \mathbf{G} \right) \bar{\mathbf{U}}_0 \\ \quad + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{G} \right) \bar{\mathbf{U}}_1 + \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{6} \mathbf{G} \right) \Delta \bar{\mathbf{W}}_{i+1} \\ \mathbf{S}_{i+1} = \Delta t \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{6} \mathbf{G} \right) \mathbf{V}_i + \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{G} \right) \mathbf{S}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{G} \right) \bar{\mathbf{U}}_0 \\ \quad + \frac{\Delta t^3}{6} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{20} \mathbf{G} \right) \bar{\mathbf{U}}_1 + \frac{\Delta t}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{G} \right) \Delta \bar{\mathbf{W}}_{i+1} \end{array} \right. \quad (55)$$

式中

$$\Delta \bar{\mathbf{W}}_{i+1} = \begin{bmatrix} W_x(t_{i+1}) - W_x(t_i) \\ W_y(t_{i+1}) - W_y(t_i) \\ W_z(t_{i+1}) - W_z(t_i) \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

是发射惯性坐标系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向的加速度表，在采样间隔  $(t_i, t_{i+1})$  内的积分输出（测量值）所组成的矩阵。

忽略高阶项，(55)式可近似写成如下递推公式

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{V}_{i+1} = \Delta \bar{\mathbf{W}}_{i+1} + \Delta t \mathbf{g}(\mathbf{S} = \mathbf{S}'_i) \\ \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + \Delta \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{S}_{i+1} = \mathbf{S}_i + \Delta t \left( \mathbf{V}_i + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{V}_{i+1} \right) \end{array} \right. \quad (56)$$

$$\mathbf{S}'_i = \mathbf{S}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}_i \quad (57)$$

$\mathbf{g}(\mathbf{S} = \mathbf{S}')$  表示  $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$  时之  $\mathbf{g}$  矩阵。

递推公式(56)便是实时计算真速度、真坐标的公式。该公式虽然是由  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  的级数展开式导出的，但它反映了内在规律，具有普遍意义。就是说，式中的  $\mathbf{g}(\mathbf{S} = \mathbf{S}')$  用未展成级数的引力计算公式时，此递推公式同样可以用。

### 3. 关于递推公式精度的讨论

在上节的推导中，我们对非线性项进行了线性化处理，并且在求转移矩阵  $\phi$  及有关的积分时，均忽略了高阶项。所有忽略的高阶项都与计算步长  $\Delta t$  有关。显然，步长越小，精度越高。表 1 列出同一引力计算公式，分别用递推公式和数值积分方法所计算的某一条主动段弹道关机点参数偏差的绝对值。

表 1 递推公式的精度与计算步长的关系

$\Delta t$ (秒)	1/8	1/16	1/32
$ \Delta V_x $ (米/秒)	0.00004	0.00002	0.00001
$ \Delta V_y $ (米/秒)	0.00013	0.00007	0.00004

$ \Delta V_z $ (米/秒)	0.00007	0.00004	0.00002
$ \Delta x $ (秒)	0.09	0.02	0.01
$ \Delta y $ (秒)	0.04	0.01	0.003
$ \Delta z $ (秒)	0.01	0.002	0.0008

从表 1 可看出, 递推公式误差随步长增大而增大, 在实际应用中我们可以取步长为  $\frac{1}{10} \sim \frac{1}{8}$  秒, 其精度便足够了。

应用递推公式时应注意一点, 因发射惯性坐标系的原点是选在地球椭球体的表面上, 当发射点的高程为  $h_0$  时, 则递推公式的初值应取:  $y_0=h_0$ ,  $x_0=z_0=0$ 。

### 三、需要速度的确定

按照需要速度 (Require Velocity) 的定义<sup>[4]</sup>, 导弹在任意一点处的需要速度是这样一个速度矢量, 若导弹具有此速度并立即关闭发动机, 而后导弹将按惯性飞行, 经自由飞行段和再入段而达到目标点。显然, 需要速度将导弹的瞬时位置同目标的位置联系起来, 故在国外一些资料中也将需要速度称为相关速度 (Corelated Velocity)<sup>[7]</sup>。由于在自由飞行段和再入段中, 导弹受到具有扁率影响的地球引力的作用及再入空气阻力的作用, 其运动轨迹不是椭圆轨道, 其轨道不能用简单的解析的方法求得, 计算比较复杂。从而, 使在实时确定需要速度方面遇到困难。为克服这个困难, 本文提出虚拟目标概念。

#### (一) 虚拟目标位置的确定

对远程弹道导弹而言, 再入阻力对落点偏差的影响比较小, 凡有几百米的量级。地球引力的扁率影响也不大, 为十几公里的量级。上述二者的交连影响就更小, 只有几米, 可以忽略不计。因此, 可以设法对再入阻力影响和地球扁率影响预先进行单独修正, 即事先分别求出他们所造成的落点偏差 (经度和纬度偏差), 然后在目标的经度、纬度上迭加这两项偏差的负值, 便得虚拟目标的位置 (经度和纬度)。这样, 不计地球扁率和再入阻力的惯性飞行轨道便是平面椭圆轨道, 因而通过发射点和虚拟目标的椭圆轨道所确定的需要速度, 便能保证导弹的实际飞行轨道经过真正的目标点。从而简化了需要速度的计算, 提供了实时完成计算的可能。

##### 1. 再入阻力影响的修正

为减小再入气动影响造成的落点散步, 导弹弹头采用零攻角再入。对于零攻角再入, 再入阻力对落点的影响, 取决于再入速度、再入弹道倾角及弹头的重阻比。对于一定型号的导弹, 弹头的重量、气动特性已经确定, 于是再入阻力影响可用一个再入速度、再入弹道倾角的函数来描述。目前已有标准大气情况下再入

运动的解析解法，也可用拟合的方法拟合出简单的经验公式，用来实现再入阻力影响的计算。然而，由于导弹在主动段运动中各点的需要速度不同，再入速度和倾角均在变化中，因而各点的再入影响也不同，在要求在计算需要速度过程中每次都算再入阻力影响，从而增加了计算量。对于地-地弹道导弹来说，真正有意义的且是实际出现的，是关机点参数对应的再入阻力引起的落点偏差，因而在主动段各点求需要速度时，其再入阻力影响都可按关机点对应之再入阻力影响进行考虑，只计算一次关机点对应的再入阻力影响便可。由给定的发射点向给定的目标射击时，由于各种干扰的作用，使得实际的关机点在标准弹道的关机点附近摄动，其对应的再入阻力影响与标准关机点对应的再入阻力影响的差别可忽略不计。因此，可按标准弹道的关机点参数确定再入阻力造成的落点偏差，将给定的目标点的经度、纬度，分别减去再入阻力造成的经度和纬度偏差，便得到考虑再入阻力影响的虚拟目标位置。

假设已经确定一条命中目标的标准弹道，利用再入点弹道参数为初值，不计空气阻力求出落点，则此落点就是不计再入阻力的虚拟目标。远程弹道导弹再入阻力对射程影响只有几百米（不考虑鼻锥烧蚀不对称而引起的偏差），干扰弹道与标准弹道的再入阻力影响相差甚小，可以忽略不计，因此，只按标准弹道的再入阻力影响进行修正便可。另外，当弹头参数确定后，再入阻力影响仅是再入点落角、落速的函数。此函数可预先求得，现以  $\Delta\beta_x$  表示再入阻力影响的地心角射程（见图 9），图中  $OPT$  表示达到目标的不计再入阻力轨道，那么考虑再入阻力修正的虚拟目标  $T_Q$  便可近似的确定如下：在  $O$  点至  $T$  点的角射程  $\beta$  平面内增加一个角增量  $\Delta\beta_x$ ，即可确定  $T_Q$  点。

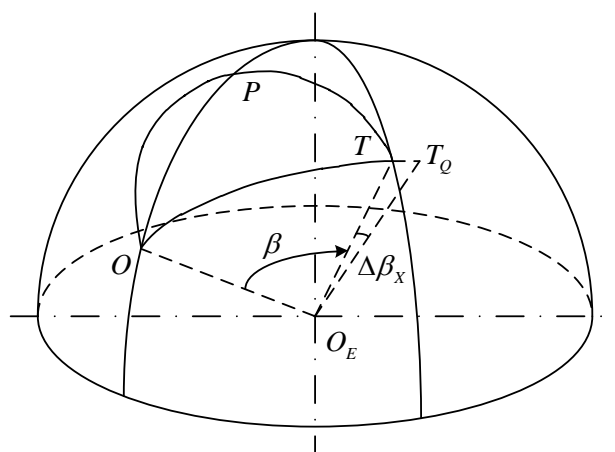


图 9

## 2. 地球引力扁率影响的修正

主动段不同点的需要速度对应的地球引力扁率影响是不同的，我们与按关机点处需要速度对应的地球引力扁率影响进行修正。关于地球引力扁率影响的计算，可利用附录中给出的被动段解析解公式，分别令  $J = \text{固有值}$  和  $J = 0$  计算落点，求出其落点偏差便是地球引力扁率影响造成的。现将射程为 6500 公里一组

结果列于表 2。其中，干扰 0 表示没干扰的标准弹道；干扰 I 表示+5%的秒耗量偏差；干扰 II 表示-5%的秒耗量偏差；干扰 III 为发动机推力偏斜 15 角分；干扰 IV 为弹的质心横移为 8 毫米；干扰 V 为纵风（1%概率风场）；干扰 VI 为横风（1%概率风场）。若各种干扰弹道的扁率影响均按标准弹道的扁率影响进行修正，并将引起的偏差列于表 3。

表 2

干扰	0	I	II	III	IV	V	VI
射程偏差 $\Delta L$ (米)	1480.5	1434.6	1557.6	1478.9	1487.9	1462.6	1502.1
横向偏差 $\Delta H$ (米)	9857.8	9901.6	9785.3	9857.2	9861.6	9863.0	9876.7

表 3

干扰	I	II	III	IV	V	VI
$\delta \Delta L$ (米)	-46	77	-2	7	-18	22
$\delta \Delta H$ (米)	44	-72	1	4	5	19

由表 3 可见，按照标准弹道的扁率进行修正，其扁率修正的最大误差为 77 米。在通常情况下，扁率修正误差小于 100 米被认为是允许的。欲达到更高的精度，可在发射前按标准弹道修正地球引力的扁率影响，同时求出此项偏差对关机点位置的偏导数，再根据实际关机位置与标准关机位置之差，对扁率影响的差额部分进行修正。

与考虑再入阻力影响的虚拟目标位置的确定方法相同，考虑地球引力扁率影响的虚拟目标位置的确定方法，也是从目标经度、纬度分别减去扁率影响造成的落点的经度和纬度偏差。

综上所述，在发射前根据标准弹道关机点参数分别确定再入阻力及地球引力扁率造成的落点偏差（经度差和纬度差），然后从目标位置的经纬度减去这两因素造成的落点偏差，便得到虚拟目标位置。

## （二）需要速度 $\bar{v}_r$ 的确定

上节中给出了虚拟目标的确定方法，本节将根据虚拟目标的位置  $\vec{r}_T$ 、弹在某一时刻的位置  $\vec{r}_M$ ，来确定弹在该点的需要速度。下面各节中，凡是提到目标时均指虚拟目标，不再作专门说明。

### 1. 假定目标不随地球旋转时，需要速度的确定

我们知道，在有心力场作用下的自由运动物体，在惯性空间看它的运动是平面椭圆轨道。因此，通过惯性空间两点  $M$  和  $T$  椭圆轨道及点  $M$  的需要速度可按下述方法确定。



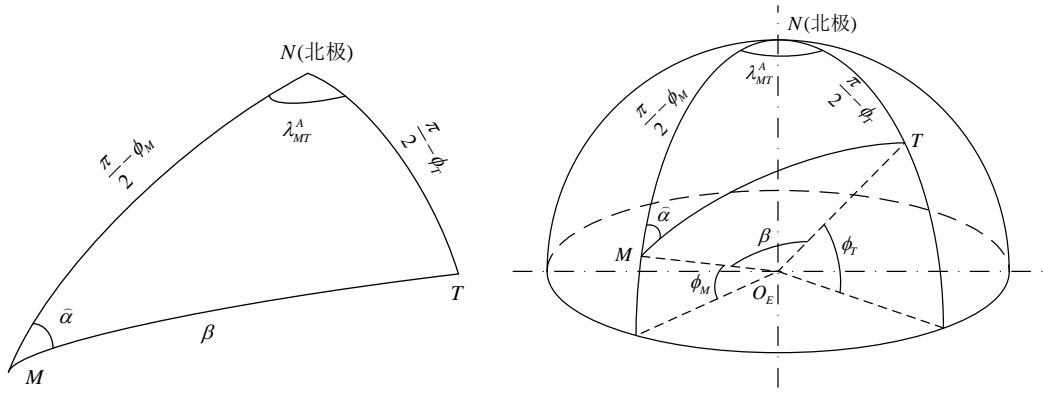


图 6

假定  $M$  点的绝对经度为  $\lambda_M^A$ ，地心纬度  $\phi_M$ ； $T$  点的绝对经度  $\lambda_T^A$ ，地心纬度  $\phi_T$ 。 $T$  点与  $M$  点之间的绝对经差  $\lambda_{MT}^A = \lambda_T^A - \lambda_M^A$ 。则  $M$  点至  $T$  点的地心角  $\beta$ 、轨道平面与过  $M$  点子午面夹角  $\hat{\alpha}$ （见图 6）可确定如下：根据余弦定理

$$\cos \beta = \sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT}^A \quad (58)$$

当  $\beta \leq 180^\circ$  时，可取

$$\beta = \arccos(\sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT}^A) \quad (59)$$

并可写出

$$\begin{cases} \sin \hat{\alpha} = \cos \phi_T \frac{\sin \lambda_{MT}^A}{\sin \beta} \\ \cos \hat{\alpha} = (\sin \phi_T - \cos \beta \sin \phi_M) / \sin \beta \cos \phi_M \end{cases} \quad (60)$$

通过  $M$ 、 $T$  两点的椭圆轨道有无数条，因此，我们可以加约束条件，例如：

- 最小能量轨道，即能达到  $T$  点的最小速度对应的轨道。
- $M$  点的弹道倾角  $\theta_H$  给定。对  $\theta_H$  的给定可从不同角度提出，如：从再入倾角限定要求而给定  $\theta_H$ ；也可从工具误差最小观点给定  $\theta_H$ ，等等。

c.  $M$  点的速度大小限定。

d. 被动段飞行时间限定等。

（1）给定  $\theta_H$  确定  $V_R$  及自由飞行时间  $t_f$

由附录(A. 14)式确定  $P$ ，按下式计算  $V_R$

$$V_R = \frac{\sqrt{fM \cdot P}}{r_M \cos \theta_H} \quad (61)$$

再根据(A. 18)、(A. 19)诸式确定  $\xi_M$ 、 $\xi_T$ ，将  $\xi_M$ 、 $\xi_T$  代入(A. 7)便可求得飞行时间  $t_f$ 。

（2）最小能量轨道的  $V_R^*$  及  $t_f^*$

先由(A. 26)式求出  $M$  点弹道倾角  $\theta_H^*$ ，然后按下式计算  $V_R^*$

$$V_R^* = \left[ \frac{2fM(1-\cos\beta)}{r_M \sin\beta} \tan\theta_H^* \right]^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

再取  $r_0=r_M$ ， $V_0=V_R$ ，代入(A. 2)~(A. 8)各式并考虑到  $\xi=\beta+\xi_0$ ，可求出  $t_f^*$ 。

(3) 给定  $V_R$  的大小求  $\theta_H$  及  $t_f$

首先要判断给定的  $V_R$  是否满足

$$V_R^2 \geq \frac{2fM(1-\cos\beta) \left[ -\left( \frac{r_M}{r_T} - \cos\beta \right) + \sqrt{\left( \frac{r_M}{r_T} - \cos\beta \right)^2 + \sin^2\beta} \right]}{r_M \sin^2\beta} \quad (63)$$

若满足(63)式，则对(A. 21)式的右端求反正切，可求得两个  $\theta_H$  角，大者对应的  $t_f$  大，根据需要进行选择其一。然后按(2)节中给出的方法确定  $t_f$ 。

若不满足(63)式，则说明给定  $V_R$  不合理，不可能达到  $T$  点。

(4) 给定  $t_f$  求  $V_R$  和  $\theta_H$

给定  $t_f=T$  后可根据下述方程迭代确定  $V_R$ 、 $\theta_H$ ，具体计算过程可概述如下：首先任意给定两个满足(63)式的  $V_{R,1}$ 、 $V_{R,2}$ ，再由(A. 21)式对应的  $\theta_H$  分别按下述式子算出  $t_{f,1}$  和  $t_{f,2}$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i = r_M V_{R,i} \cos\theta_H \\ P_i = K_i^2 / fM \\ \xi_{0,i} = \arctan \left[ \frac{P_i V_{R,i} \sin\theta_H}{(P_i / r_M - 1) K_i} \right] \\ e_i = (1 - P_i / r_M) / \cos\xi_{0,i} \\ \xi_i = \xi_{0,i} + \beta \\ \gamma_i = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}} \tan \frac{\xi_i}{2} \right] \\ \gamma_{0,i} = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}} \tan \frac{\xi_{0,i}}{2} \right] \\ t_{f,i} = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left( \frac{P_i}{1-e_i^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \gamma_i - \gamma_{0,i} + e_i (\sin\gamma_i - \sin\gamma_{0,i}) \right] \end{array} \right. \quad (64)$$

$$V_{R,i+1} = V_{R,i} - \frac{V_{R,i} - V_{R,i-1}}{t_{f,i} - t_{f,i-1}} (t_{f,i} - T) \quad (65)$$

取由(65)式算出的  $V_{R,3}$  为初值，迭代计算(A. 21)、(64)和(65)，直至  $|P_{i+1} - P_i| <$  允许值，则  $V_{R,i+1} = V_R$  为所求。

## 2. 目标随地球旋转时，需要速度的确定

实际上，目标是固定在地球上，地球是以角速度 $\vec{\Omega}$ 旋转着的，所以 $T$ 点也是以角速度 $\Omega$ 绕地轴旋转着的。从惯性空间看， $T$ 点与 $M$ 的绝对经差 $\lambda_{MT}^A$ 是变化的，假定被动段飞行时间 $t_f$ 已给定，则有

$$\lambda_{MT}^A = \lambda_{OT} - \lambda_{OM}^A + (t_k + t_f)\Omega \quad (66)$$

式中 $\lambda_{OT} = \lambda_T - \lambda_O$ ；

$\lambda_{OM}^A$ —— $M$ 点与发射点 $O$ 之间的绝对经差，由(30)式给出；

$t_k$ ——由起飞至 $M$ 点的飞行时间。

即，若给定 $t_f$ ，则由(66)求出 $\lambda_{MT}^A$ ，便可按地球不旋转情况确定需要速度 $V_R$ 。

若未限定飞行时间 $t_f$ ，则 $V_R$ 要同时满足(66)、(A. 14)、(A. 17)、(A. 18)、(A. 19)、(A. 7)等方程这是一个超越方程组，得不到解析解，只能用迭代方法求解。下边给出计算 $\vec{V}_R$ 的两套公式（详细推证见附录）

(1) 通过 $P$ 、 $e$ 、 $\xi$ 计算 $\vec{V}_R$ （对 $j=0,1,2,\dots$ 计算）

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{MT,j}^A = \lambda_{OT} - \lambda_{OM,j}^A + (t_k + t_{f,j})\Omega \\ \beta_j = \arccos(\sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT,j}^A) \\ \theta_{H,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sin \beta_j}{r_M/r_T - \cos \beta_j}\right) & (\text{最小能量轨道}) \\ \theta_H & (\text{根据需要给定}) \end{cases} \\ P_j = \frac{r_T(1 - \cos \beta_j)}{1 - \frac{r_T}{r_M}(\cos \beta_j - \sin \beta_j \tan \theta_{H,j})} \\ \xi_{M,j} = \arctan\left(\frac{\tan \theta_{H,j}}{1 - r_M/P_j}\right) \\ \xi_{T,j} = \beta_j + \xi_{M,j} \\ e_j = \left(1 - \frac{P_j}{r_M}\right) / \cos \xi_{M,j} \\ \gamma_{T,j} = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e_j}{1-e_j}} \tan \frac{\xi_{T,j}}{2}\right) \\ \gamma_{M,j} = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e_j}{1-e_j}} \tan \frac{\xi_{M,j}}{2}\right) \\ t_{f,j+1} = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left(\frac{P_j}{1-e_j^2}\right)^{3/2} [\gamma_{T,j} - \gamma_{M,j} + e_j(\sin \gamma_{T,j} - \sin \gamma_{M,j})] \end{array} \right. \quad (67)$$

当 $|P_{j+1} - P_j| < \text{允许值}$ （\*允许值可取 0.1 米或 1 米），结束迭代，取 $\beta = \beta_{i+1}$ ，

$P = P_{i+1}$ ， $\theta_H = \theta_{H,j+1,\dots}$ 。然后，按下式计算 $V_R$

$$V_R = \frac{\sqrt{fM}}{r_M \cos \theta_H} \sqrt{P} \quad (68)$$

另外,  $\sin \hat{\alpha}$ 、 $\cos \hat{\alpha}$  可由(60)式算出。于是  $\vec{V}_R$  矢量便由  $V_R$ 、 $\hat{\alpha}$  和  $\theta_H$  唯一确定了。

(2) 通过  $C$ 、 $S$ 、 $a$  计算  $\vec{V}_R$

定义:  $C$  为连接  $M$ 、 $T$  两点的弦长,  $S$  为三角形  $O_E MT$  的半周长 (图 7)。

对  $j=0,1,2,3,\dots$  迭代计算

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{TM,j}^A = \lambda_{OT} - \lambda_{OM,j}^A + (t_k + t_{f,j}) \Omega \\ \beta_j = \arccos(\sin \phi_M \sin \phi_T + \cos \phi_M \cos \phi_T \cos \lambda_{MT,j}^A) \\ C_j = (r_M^2 + r_T^2 - 2r_M r_T \cos \beta_j)^{1/2} \\ S_j = \frac{1}{2}(r_M + r_T + C_j) \\ \theta_{H,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{r_T}{C_j} \sin \beta_j\right) & (\text{最小能量轨道}) \\ \theta_H & (\text{根据需要给定}) \end{cases} \\ a_j = \begin{cases} \frac{r_M}{2} \left\{ 1 + \frac{r_T(1 - \cos \beta_j)}{2[r_M \cos^2 \theta_{H,j} - r_T \cos^2(\theta_{H,j} + \beta_j/2)]} \right\} \\ S_j/2 \end{cases} & (\text{最小能量轨道}) \\ \alpha_{M,j} = \begin{cases} 2 \arcsin \sqrt{S_j/2a_j} \\ \pi \end{cases} & (\text{最小能量轨道}) \\ \beta_{M,j} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{S_j - C_j}{2a_j}} \\ t_{f,j+1} = \begin{cases} \frac{a_j^{3/2}}{\sqrt{fM}} [2\pi + \sin \beta_{M,j} + \sin \alpha_{M,j} - (\beta_{M,j} + \alpha_{M,j})] \\ \frac{a_j^{3/2}}{\sqrt{fM}} (\pi + \sin \beta_{M,j} - \beta_{M,j}) \end{cases} & (\text{最小能量轨道}) \end{array} \right. \quad (69)$$

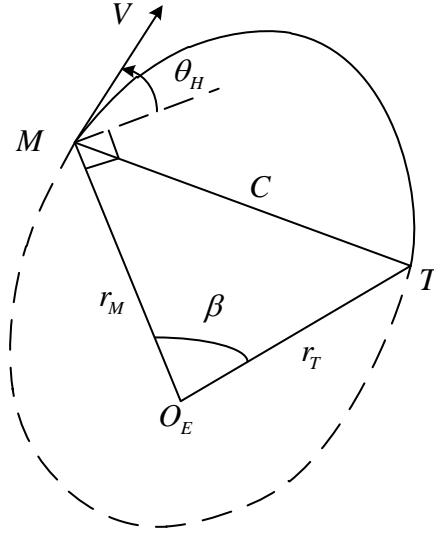


图 7

当  $|C_{j+1} - C_j| < \text{允许值}$  时, 取:  $\beta = \beta_{j+1}$ ,  $C = C_{j+1}$ ,  $\theta_H = \theta_{H,j+1}$ ,  $\lambda_{MT}^A = \lambda_{MT,j+1,\dots}^A$ 。  
然后按下式计算  $V_R$

$$V_R = \sqrt{fM} \sqrt{\frac{2}{r_M} - \frac{1}{a}} \quad (70)$$

$\sin \hat{\alpha}$ 、 $\cos \hat{\alpha}$  仍按(60)式计算。

(4) 关于  $\theta_H$  的讨论

当  $\vec{r}_M$ 、 $\vec{r}_T$  给定后, 最小能量轨道对应唯一的一个  $\theta_H$  角, 对于非最小能量轨道, 给定一个  $V_R$  对应两个  $\theta_H$  角。通常可按最小能量轨道选  $\theta_H$  角, 有时可根据特殊需要来选取  $\theta_H$  角, 例如

- (i) 从突防要求一定得再入角出发来确定  $\theta_H$  角;
- (ii) 远程导弹要打小射程, 根据此要求  $\theta_H$  角;
- (iii) 根据工具误差对落点影响最小的原则来确定  $\theta_H$  角, 等等。

### 3. 将 $\vec{V}_R$ 投影到发射惯性坐标系

上节中给出的公式可以确定  $\vec{V}_R$  的大小  $V_R$ 、方位  $\hat{\alpha}$ 、倾角  $\theta_H$ , 而关机和控制  
的计算均是在发射惯性坐标系中进行的, 所以需将  $\vec{V}_R$  在发射惯性坐标系中进行  
描述。

(1) 在  $M$  点的当地北东坐标系中有

$$\vec{V}_R = V_R (\cos \theta_H \cos \hat{\alpha} \vec{i}_N + \sin \theta_H \vec{j}_N + \cos \theta_H \sin \hat{\alpha} \vec{k}_N) \quad (71)$$

(2) 将  $\vec{V}_R$  由北东坐标系转换到发射惯性坐标系, 将(33)代入(71)式

$$\vec{V}_R = V_R [\cos \theta_H \cos \hat{\alpha} \quad \sin \theta_H \quad \cos \theta_H \sin \hat{\alpha}] C_I^N \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = (V_{RX} \quad V_{RY} \quad V_{RZ}) \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\begin{cases} V_{RX} = (pf_{11} + qr_x^o + lf_{31})V_R \\ V_{RY} = (pf_{12} + qr_y^o + lf_{32})V_R \\ V_{RZ} = (pf_{13} + qr_z^o + lf_{33})V_R \end{cases} \quad (73)$$

$$\begin{cases} p = \frac{\cos \theta_H \cos \hat{\alpha}}{\cos \phi_M} \\ q = \sin \theta_H \\ l = \frac{\cos \theta_H \sin \hat{\alpha}}{\cos \phi_M} \end{cases} \quad (74)$$

(73)式中  $f_{11}$ 、 $f_{12}$ 、 $f_{13}$  由(32)式给出； $f_{31}$ 、 $f_{32}$ 、 $f_{33}$  由(25)式给出。

## 四、弹的控制与导引

我们将导弹在主动段中飞行的控制分为两段：(1) 固定程序飞行段；(2) 闭路制导段。

**固定程序段：**在导弹飞出大气层之前，导弹按固定的俯仰程序控制。在设计飞行程序时，力求使弹的攻角保持最小，使弹的法向过载小，以满足结构设计上的要求。在参考文献[1]中介绍了速度程序控制方法，可以较好地控制速度矢量方向，从而减少程序飞行段终点处弹的散布。

**闭路制导段：**在导弹飞出大气层后转入闭路制导段。此时，导弹的机动不再受结构强度的限制了，可以控制导弹进行较大的机动。闭路导引段没有固定的飞行程序，按照实时算出的俯仰、偏航信号来控制，其滚动控制仍与固定程序段一样，保持其滚动角为零。下面着重介绍闭路导引方法。

### 1. 对关机点 $\vec{V}_R$ 进行预估

在前言中谈到，按照“使  $\vec{a}$  与  $\vec{V}_g$  一致”的原则进行导引，当  $\vec{V}_R$  不变时，将是“燃料消耗最少”意义下的最优导引。实际上，在闭路导引段中，由于导弹位置的不断变化，其对应的  $\vec{V}_R$  也在不断的变化，故按照“使  $\vec{a}$  与  $\vec{V}_g$  一致”的原则进行的导引便不是最优了。但因使  $\vec{V}_R$  的变化比较缓慢，可以对关机点的  $\vec{V}_R$  进行预估得，具体方法如下：

将  $\vec{V}_R$  在  $t_i$  点展开，近似取

$$\vec{V}_{R,K} = \vec{V}_R(t_i) + \dot{\vec{V}}_R(t_i)(t_k - t_i) \quad (75)$$

式中

$$\dot{\vec{V}}_R(t_i) \approx \frac{\vec{V}_R(t_i) - \vec{V}_R(t_{i-1})}{\tau} \quad (76)$$

$$\tau = t_i - t_{i-1}$$

另外，关机时

$$V_{gx}(t_K) = V_{gx}(t_i) + \dot{V}_{gx}(t_i)(t_K - t_i) = 0 \quad (77)$$

可得

$$(t_K - t_i) = -V_{gx}(t_i) / \dot{V}_{gx}(t_i) \quad (78)$$

又

$$\dot{V}_{gx} = \dot{V}_{RX,K} - \dot{V}_X \approx \dot{V}_X \quad (79)####$$

及

$$\dot{V}_X \approx -\frac{\Delta V_{x,i}}{\tau} \quad (80)####$$

将(76)、(77)~(80)代入(75)式，得

$$\vec{V}_{R,K,i} = \vec{V}_{R,i} + \frac{\vec{V}_{R,i} - \vec{V}_{R,i-1}}{\Delta V_{x,i}} \vec{V}_{gx,i} \quad (81)$$

$$\vec{V}_{gx,i} = V_{RX,K,i-1} - V_{x,i} \quad (82)$$

(81)式便是对  $\vec{V}_R$  进行预估的矢量方程，越接近关机点，预估越准。在关机点， $\vec{V}_{R,K} = \vec{V}_R$ 。

实际计算表明，取  $\vec{V}_g = \vec{V}_{R,K} - \vec{V}$ ，再按照“使  $\vec{a}$  与  $\vec{V}_g$  一致”进行导引，效果较好，可以达到燃料消耗的准最佳。而且保证了关机点附近导弹的姿态变化比较平稳。

## 2. 导引信号的确定

为了实现“使  $\vec{a}$  与  $\vec{V}_g$  一致”的导引准则，必须知道这两个矢量间的夹角。首先，对  $\vec{V}_g$  定义两个欧拉角  $\varphi_g$  和  $\psi_g$ （见图8），有

$$\begin{cases} \tan \varphi_g = \frac{V_{gy}}{V_{gx}} \\ \tan \psi_g = \frac{-V_{gz}}{V_{gx}} \end{cases} \quad (83)$$

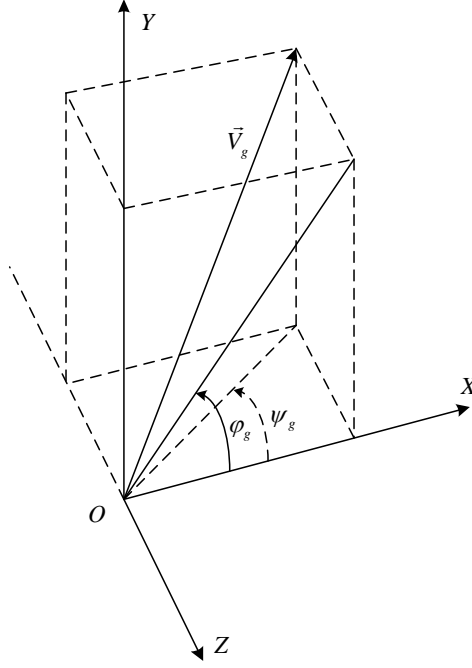


图 8

同样，对  $\vec{a}$  定义两个欧拉角  $\varphi_a$  和  $\psi_a$ ，有

$$\begin{cases} \tan \varphi_a = \frac{a_y}{a_x} \approx \frac{\Delta V_y}{\Delta V_x} \\ \tan \psi_a = -\frac{a_z}{a_x} \approx -\frac{\Delta V_z}{\Delta V_x} \end{cases} \quad (84)$$

根据三角公式

$$\tan(\varphi_g - \varphi_a) = \frac{\tan \varphi_g - \tan \varphi_a}{1 + \tan \varphi_g \tan \varphi_a}$$

并考虑到  $(\varphi_g - \varphi_a)$ 、 $(\psi_g - \psi_a)$  都比较小，可得

$$\varphi_g - \varphi_a = \frac{V_{gy} \Delta V_x - V_{gx} \Delta V_y}{V_{gx} \Delta V_x + V_{gy} \Delta V_y} \quad (85)$$

$$\psi_g - \psi_a = \frac{V_{gx} \Delta V_z - V_{gz} \Delta V_x}{V_{gx} \Delta V_x - V_{gz} \Delta V_z} \quad (86)$$

可以证明：当  $g/\dot{W}$  比较小时，当弹轴俯仰  $(\varphi_g - \varphi_a) \times \left(1 + \frac{g}{\dot{W}} \sin \varphi\right)$ 、偏航  $(\psi_g - \psi_a) \cos \varphi$  后，方能消除  $\vec{a}$  与  $\vec{V}_g$  两矢量的差角，我们近似取俯仰、偏航控制信号分别为

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \varphi_g - \varphi_a \\ \Delta \psi = \psi_g - \psi_a \end{cases} \quad (87)$$

显然，当  $\Delta \varphi = \Delta \psi = 0$  时， $\vec{a}$  与  $\vec{V}_g$  方向一致。



## 五、关机方程

按照需要速度的定义，关机条件应为

$$\vec{V}_g = \vec{V}_R - \vec{V} = 0 \quad (88)$$

一个矢量等于零，则各分量必为零，故可取

$$V_{gx} = 0 \quad (89)$$

作为关机条件。

弹上计算机实时解算，当满足方程(89)时关机。但由于计算机有时间延迟，当计算步长为 $\tau$ 时， $t_i (= i\tau)$ 时刻采样，在 $t_{i+1} [= (i+1)\tau]$ 时刻才能算出，所以计算时延为 $\tau$ 。另外，关机时刻不一定恰好落到 $t_i = i\tau (i=1,2,3,\dots)$ 各点上，即，不能求出满足 $V_{gx} = 0$ 之点，只能判断当第一次出现 $V_{gx} < 0$ 时关机。因此，关机时间的最大误差将在 $\tau$ 与 $2\tau$ 之间，为了使关机误差减少，可在 $V_{gx}$ 中预先扣除一个步长 $\tau$ 内对应的 $V_{gx}$ 之增量，使关机时间内的最大误差降为 $\tau$ 。然而对于固体发动机推进的导弹来说， $\tau$ 造成的落点偏差仍然很可观。例如，当射程为6000公里， $\tau = 1/8$ 时，造成的射程偏差最大可达25公里。为降低此项误差，本文提出两个方法：

- (1) 合理的简化关机点附近的计算公式，从而缩小计算步长；
- (2) 对关机时间进行线性预报计算，提前预报出关机时间。

### 1. 关机点附近计算公式的简化

(1) 因为在关机点附近很短的时间内，导弹姿态的微小变化对导弹质心运动没有多大影响，故在关机点附近不加导引，即

$$\Delta\varphi = \Delta\psi = \Delta\gamma = 0 \quad (90)$$

(2) 由于 $\bar{g}$ 的变化很缓慢，在关机点附近很小的时间间隔内可取常值。

(3) 因 $\vec{V}_R$ 变化缓慢，不再做实时迭代计算，对其采用线性外推方法计算：

$$V_{RX,j} = V_{RX,N} + \Delta V_{RX} (t_j - t_N) / \tau \quad (91)$$

$$\Delta V_{RX} = V_{RX,N} - V_{RX,N-1} \quad (92)$$

$V_{RX,N}$  ——大步长计算之最后一点( $t = t_N$ )的 $V_{RX}$ ；

$V_{RX,N-1}$  —— $t = t_{N-1}$ 点之 $V_{RX}$ 。

(4) 因关机条件取 $V_{gx} = 0$ ，所以在关机点附近只需计算 $V_x$ 、 $V_{RX}$ 及 $V_{gx}$ 分量。

### 2. 转入小步长计算的判别式

在关机附近的计算做了上述简化之后，使计算降到大步长计算量的 $1/50 \sim 1/100$ ，也就是说，可以使计算步长缩小为大步长的 $1/50 \sim 1/100$ ，我们称此缩小后的步长为小步长，记为 $\tau'$ 。显然为了保证制导精度，小步长计算次数越少越好，因此必须给出一个转入小步长计算的判别式。下节将表明，对关机时间进

行线性预报，至少需要两个小步长。又考虑到，最后一个大步长计算是在  $t_{N+1} = t_N + \tau$  时刻给出  $t_N$  时刻参数值的。所以， $(t_K - t_N)$  应满足

$$(2\tau + 2\tau') \geq (t_K - t_N) \geq 2\tau' + \tau \quad (93)$$

因为大步长计算是连续进行的，当第一次出现  $(t_K - t_N) \leq 2\tau + 2\tau'$  时，也必满足  $(t_K - t_N) \geq 2\tau' + \tau$ ，故取

$$(t_K - t_N) \leq 2\tau + 2\tau' \quad (94)$$

作为转入小步长的判别条件。而由(78)式知

$$(t_K - t_i) = -V_{gx,i} \tau' / (V_{gx,i} - V_{gx,i-1}) \quad (95)$$

从(94)、(95)式可得到转入小步长计算的判别式为

$$V_{gx,i} \leq K_1 V_{gx,i-1} \quad (96)$$

$$K_1 = \frac{2 + 2\tau'/\tau}{3 + 2\tau'/\tau} = \text{常数} \quad (97)$$

### 3. 关机时间的线性预报

由(78)式给出关机时间线性预报公式为

$$t_K - t = -\frac{V_{gx}(t)}{\dot{V}_{gx}(t)} \quad (98)$$

显然， $(t_K - t)$  愈小， $V_{gx}(t)$  曲线的线性度愈好，预报精度也就愈高。即，从精度考虑， $(t_K - t)$  应愈小愈好。然而，由于计算机“时延”， $(t_K - t)$  必须大于或等于  $\tau'$  才能实现预报。因此，进行预报的条件应为

$$\tau' \leq (t_K - t) \leq 2\tau' \quad (99)$$

同样，因计算是连续进行的，故取

$$(t_K - t) \leq 2\tau' \quad (100)$$

作为发出线性预报的判别条件。据此导出发出线性预报的判别式为

$$V_{gx,j} \leq \frac{2}{3} V_{gx,j-1} \quad (101)$$

关机时间计算式为

$$t_K = t_j + \frac{\tau' V_{gx,j}}{V_{gx,j-1} - V_{gx,j}} \quad (102)$$

### 4. 关机方程及导引方程

综上所述，闭路制导要求弹上计算机作如下计算（详见附录三）：

(1) 大步长（ $\tau$ ）计算

(i) 进行真速度、真坐标计算[见(56)式]；

(ii) 进行  $\vec{V}_g$  及导引计算（公式从略）；

(iii) 每一步均需判别是否满足等式(96)，若不满足，则继续计算下一步。

若满足，则转入小步长计算。设  $i=N$  时满足(96)式。

(2) 小步长（ $\tau'$ ）计算，对  $j=0,1,2,3,\dots$  计算

$$\begin{cases} V_{x,j} = V_{x,N} + \Delta W_{x,N+1} + \sum_{l=1}^j \Delta W_{x,l} + (\tau + j\tau')g_{x,N} \\ V_{RX,j} = V_{RX,N} + (1 + j\frac{\tau'}{\tau})(V_{RX,N} - V_{RX,N-1}) \\ V_{RX,K,j} = V_{RX,j} + \frac{V_{RX,j} - V_{RX,j-1}}{V_{x,j} - V_{x,j-1}}(V_{RX,K,j-1} - V_{x,j}) \\ V_{gx,j} = V_{RX,K,j} - V_{x,j} \end{cases} \quad (103)$$

当  $V_{gx,j} \leq \frac{2}{3}V_{gx,j-1}$  时，计算(102)式得  $t_K$ ，当  $t = t_K$  时，发出关机指令。

实际上，发动机关机的执行机构有一个时间延迟，尚需对判别式(97)、(101)进行修正，这里暂未做考虑。

计算结果表明，按照本文提出的闭路制导方法进行导引和关机，其落点偏差（纵向、横向）只有十几米。外单位同志对闭路制导方法和国外的  $Q$  矩阵制导方法进行了比较计算，结果表明闭路制导的精度高于  $Q$  矩阵制导。

致谢：在本课题的研究过程中，得到了我所副总师周炎勋通知的指导和支持。全部计算工作均有安维廉同志完成，他对该研究提出很多宝贵意见。另外，骊山微电子有限公司科技委副主任沈绪榜及邵兴方同志对闭路制导方法在微型计算机上的实现问题，进行了分析和论证，认为是可行的。至此，对上述诸同志表示感谢！

## 附 录

### 一、被动段解析解计算公式

已知条件：给定发射点地理纬度  $B$ ，射击方位角  $A$ ，及在发射惯性坐标系中的主动段关机点参数  $V_x$ 、 $V_y$ 、 $V_z$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t_K$ 。

为简便引入下列符号和函数：

$$\lambda_1 = V_x, \quad \lambda_2 = V_y, \quad \lambda_3 = V_z, \quad \lambda_4 = x, \quad \lambda_5 = y, \quad \lambda_6 = z,$$

$$r_{1k} = r_{xk}, \quad r_{2k} = r_{yk}, \quad r_{3k} = r_{zk}, \quad R_{o1} = R_{ox}, \quad R_{o2} = R_{oy}, \quad R_{o3} = R_{oz},$$

及函数

$$\mu(B) = \frac{e'^2}{2} \sin 2B (1 - e'^2 \cos^2 B), \quad \mu_0 = \mu(B_0)$$

$$R(\phi) = a_E / \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \phi}, \quad R_0 = R(\phi_0)$$

$$E(\beta) = \sin \phi_K \cos \beta + \cos \phi_K \sin \beta \cos a_K^A$$

#### 1. 主动段终点参数转换

$$\begin{cases} \Omega_1^o = \cos B \cos A \\ \Omega_2^o = \sin B \\ \Omega_3^o = -\cos B \sin A \end{cases}$$

$$\phi = B - \mu_0$$

$$\begin{cases} R_{01} = -R_0 \sin \mu_0 \cos A \\ R_{02} = R_0 \cos \mu_0 \\ R_{03} = R_0 \sin \mu_0 \sin A \end{cases}$$

$$r_{ik} = R_{0i} + \lambda_{i+3} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$r_K = \left( \sum_{i=1}^3 r_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

$$r_{ik}^o = r_{ik} / r_K \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\phi_K = \arcsin \left( \sum_{i=1}^3 r_{ik}^o \Omega_i^o \right)$$

$$f_{3i} = \Omega_{i+1}^o r_{(i+2)k}^o - \Omega_{i+2}^o r_{(i+1)k}^o \quad (i = 1, 2, 3)$$

其中， $\Omega_4^o = \Omega_1^o$ ； $\Omega_5^o = \Omega_2^o$ ； $r_{4k}^o = r_{1k}^o$ ； $r_{5k}^o = r_{2k}^o$ 。

$$\dot{y}_{K,N} = \sum_{i=1}^3 r_{ik}^o \lambda_i$$

$$\dot{x}_{K,N} = \frac{1}{\cos \phi_K} \left( \sum_{i=1}^3 \Omega_i^o \lambda_i - \dot{y}_{K,N} \sin \phi_K \right)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{K,N} &= \frac{1}{\cos \phi_K} \sum_{i=1}^3 f_{3i} \lambda_i \\ u_K &= (\dot{x}_{K,N}^2 + \dot{z}_{K,N}^2)^{1/2} \\ \sin a_K^A &= \dot{z}_{K,N} / u_K \\ \cos a_K^A &= \dot{x}_{K,N} / u_K \\ \lambda_{OK}^A &= \arcsin \left( \frac{-f_{32}}{\cos B_0 \cos \phi_K} \right)\end{aligned}$$

## 2. 椭圆轨道参数

$$\begin{aligned}K &= r_K u_K & e &= p_K / \cos \xi_0 \\ P &= K^2 / fM & e_1 &= 1 + e^2 / 2 \\ p_K &= 1 - P / r_K & J_0 &= J a_E^2 / P^2 \\ \xi_0 &= -\arctan \left( \frac{P \dot{y}_{K,N}}{p_K \cdot K} \right) & J_1 &= 2 J a_E^2 / K\end{aligned}$$

## 3. 被动段解析解及落点参数确定

### (1) 常用参数

$$\begin{aligned}S_1(\xi) &= c_{1\zeta} \sin \xi + d_{1\zeta} \cos \xi \\ S'_1(\xi) &= c_{1\zeta} \cos \xi - d_{1\zeta} \sin \xi \\ S(\xi) &= a_{0\zeta} + a_{2\zeta} \sin 2\xi + b_{2\zeta} \cos 2\xi + \beta S_1(\xi) \\ S'(\xi) &= 2(a_{2\zeta} \cos 2\xi - b_{2\zeta} \sin 2\xi) + S_1(\xi) + \beta + S'_1(\xi) \\ f_1(\xi) &= \sum_{k=1}^2 (c_{k\eta} \sin k\xi + d_{k\eta} \cos k\xi) \\ f'_1(\xi) &= \sum_{k=1}^2 k(c_{k\eta} \cos k\xi - d_{k\eta} \sin k\xi) \\ f(\xi) &= \sum_{k=2}^4 (a_{k\eta} \sin k\xi + b_{k\eta} \cos k\xi) + \beta f_1(\xi) + a_{0\eta} \\ f'(\xi) &= \sum_{k=2}^4 k(a_{k\eta} \cos k\xi - b_{k\eta} \sin k\xi) + f_1(\xi) + \beta f'_1(\xi)\end{aligned}$$

### (2) 系数计算

$$\begin{aligned}c_{1\zeta} &= E(\beta = -\xi_0) & a_{0\zeta} &= -e c_{1\zeta} \\ d_{1\zeta} &= -E(\beta = \frac{\pi}{2} - \xi_0) & E_0 &= d_{1\zeta}^2 + c_{1\zeta}^2 \\ a_{2\zeta} &= -\frac{e}{3} d_{1\zeta} & b_{2\zeta} &= \frac{e}{3} c_{1\zeta} \\ c_{2\eta} &= \frac{1}{2} (d_{1\zeta}^2 - c_{1\zeta}^2) & c'_{2\eta} &= c_{2\eta} + 1 - 2E_0 \\ d_{2\eta} &= -c_{1\zeta} d_{1\zeta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{1\eta} &= -ec'_{2\eta} & d_{1\eta} &= -ed_{2\eta} \\
a_{3\eta} &= \frac{3}{4}d_{1\eta} & b_{3\eta} &= \frac{3}{4}ec_{2\eta} \\
a_{4\eta} &= -\frac{e}{9}a_{3\eta} & b_{4\eta} &= -\frac{e}{9}b_{3\eta} \\
a_{1\zeta} &= S(\xi_0)\sin\xi_0 + S'(\xi_0)\cos\xi_0 \\
b_{1\zeta} &= S(\xi_0)\cos\xi_0 - S'(\xi_0)\sin\xi_0 \\
a_{0\eta} &= \frac{1}{2}[3(a_{1\zeta}d_{1\zeta} - b_{1\zeta}c_{1\zeta}) - 5e_1E_0] - 15b_{4\eta} + e_1 \\
a_{2\eta} &= \frac{1}{2}[a_{1\zeta}c_{1\zeta} - b_{1\zeta}d_{1\zeta} + \frac{1}{3}(2+5e^2)d_{2\eta}] \\
b_{2\eta} &= \frac{1}{2}[a_{1\zeta}d_{1\zeta} + b_{1\zeta}c_{1\zeta} - \frac{1}{3}(2+5e^2)c_{2\eta} - \frac{e^2}{3} + \frac{5}{6}e^2E_0] \\
a_{1\eta} &= f(\xi_0)\sin\xi_0 + f'(\xi_0)\cos\xi_0 \\
b_{1\eta} &= f(\xi_0)\cos\xi_0 - f'(\xi_0)\sin\xi_0
\end{aligned}$$

(3) 求落点的迭代公式

$$\begin{aligned}
\xi_{i+1} &= \xi_i + \Delta\xi_i \\
\Delta\xi_i &= \cot\theta_i(1 - \zeta_i \sin\phi_{li} + \frac{1}{2}\zeta_i^2 \cos\phi_{li} - r_{cj}\eta_i)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
r_{cj} &= \frac{a_E}{\sqrt{(1+e'^2 \sin^2 \phi_i)}} \\
\zeta_i &= J_0[S(\xi_i) - a_{1\zeta} \sin\xi_i - b_{1\zeta} \cos\xi_i] \\
\eta_i &= \frac{1}{P}\{1 - e \cos\xi_i + J_0[f(\xi_i) - a_{1\eta} \sin\xi_i - b_{1\eta} \cos\xi_i]\} \\
\beta_i &= \xi_i - \xi_0 \\
\sin\phi_{li} &= E(\beta_i) \\
\phi_{li} &= \arcsin[E(\beta_i)] \\
\delta_i &= \zeta_i \cos\phi_{li}(1 + \zeta_i \sin\phi_{li}) \quad ##### \\
\phi_i &= \phi_{li} - \delta_i \\
\lambda_{Kc,i}^A &= \begin{cases} \arcsin[\sin\beta_i \frac{\sin a_{Ki}^A}{\cos\phi_{li}}] & (\cos\beta_i - \sin\phi_K \sin\phi_{li}) \geq 0 \\ \pi \operatorname{sign}[\sin\beta_i \frac{\sin a_{Ki}^A}{\cos\phi_{li}}] - \arcsin[\sin\beta_i \frac{\sin a_{Ki}^A}{\cos\phi_{li}}] & (\cos\beta_i - \sin\phi_K \sin\phi_{li}) < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sin a_{ci}^A = \cos\phi_K \sin a_K^A / \cos\phi_{li}$$

$$\cos a_{ci}^A = \cos a_k^A \cos \lambda_{Kc,i}^A - \sin a_k^A \sin \lambda_{Kc,i}^A \sin\phi_K$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_i &= \frac{1}{P}\{e \sin \xi_i + J_0[f'(\xi_i) - a_{1\eta} \cos \xi_i + b_{1\eta} \sin \xi_i]\} \\
\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_i &= J_0[S'(\xi_i) - a_{1\zeta} \cos \xi_i + b_{1\zeta} \sin \xi_i] \\
\dot{r}_{1ci} &= -K\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_i \\
u_{Ki} &= K\eta_i \\
\dot{z}_{1i} &= u_{Ki}\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_i + \zeta_i \dot{r}_{1ci} \\
\dot{x}_{ci} &= u_{Ki} \cos a_{ci}^A + \dot{r}_{1ci} \delta_i - \dot{z}_{1i} \cos \phi_i \\
\dot{y}_{ci} &= \dot{r}_{1ci} - u_{Ki} \delta_i \cos a_{ci}^A - \dot{z}_{1i} \sin \phi_i \\
\dot{z}_{ci} &= u_{Ki} \sin a_{ci}^A - r_{ci} \Omega \cos \phi_i \\
u_{ci} &= (\dot{x}_{ci}^2 + \dot{z}_{ci}^2)^{1/2} \\
\cot \theta_i &= u_{ci} / \dot{y}_{ci}
\end{aligned}$$

迭代的初值取

$$\xi_1 = \arccos\left[\left(1 - \frac{P}{R^*}\right)/e\right], R^* = 6371110 \text{米}$$

当迭代至  $|\Delta \xi_i| < \text{允许值}$  (\*允许值可取  $10^{-1}$  或  $10^{-2}$ ) 时, 取  $\xi_c = \xi_i$ ,  $\eta_c = \eta_i$ ,  $\zeta_c = \zeta_i$ ,  $\phi_c = \phi_i$ , .....。

(4) 关机点至落点的飞行时间  $t_f$

计算公式为

$$t_f = J_c - J_0$$

其中,  $J$  为  $\xi$  的函数,  $J_0 = J(\xi = \xi_0)$ ,  $J_c = J(\xi = \xi_c)$ 。

$$J = T_{0t} - J_1 \sum_{k=0}^7 I_{kt}$$

及

$$T_{0t} = \frac{P^2}{K} T'_{0t}, \quad T'_{0t} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} (b_{0t} + b_{1t})$$

$$I'_{0t} = \frac{1}{(1-e^2)^{5/2}} [e_1 b_{0t} + b_{1t} (2 + \frac{e}{2} b_{2t})]$$

$$I_{0t} = a_{0\eta} I'_{0t}$$

$$I'_{1t} = \frac{b_{2t}}{(1-e^2)^2} (1 + \frac{e}{2} b_{2t})$$

$$I_{1t} = a_{1\eta} I'_{1t}$$

$$\begin{aligned}
I_{2t} &= \frac{b_{1\eta}}{e}(T'_{0t} - I'_{1t}) \\
I_{3t} &= 2 \frac{a_{2\eta}}{e}(b'_{2t} - I'_{1t}) \\
I_{4t} &= \frac{b_{2\eta}}{e^2}[(2 - e^2)I'_{0t} - 4T'_{0t} + b'_{0t}] \\
I_{5t} &= \frac{1}{2}c'_{2\eta}(\beta' - T'_{0t}) \quad \beta' = \beta/(1 - e \cos \xi)^2 \\
I_{6t} &= d_{2\eta} \left\{ \left( \frac{2}{3e} + \beta' \sin \xi \right) \cos \xi + \frac{1}{3e} \left[ \frac{1}{4}(28 - 5e^2)I'_{1t} - (9 + e^2)b'_{2t} \right] \right\} \\
I_{7t} &= c_{2\eta} \left\{ \left( \frac{2}{3e} + \beta' \sin \xi \right) \sin \xi - \beta' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12e^2}[(28 - 19e^2 - e^4)I'_{0t} - (64 - 11e^2)T'_{0t} + (18 + 4e^2)b'_{0t}] \right\}
\end{aligned}$$

及

$$b_{0t} = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi}{2} \right]$$

$$b'_{0t} = 2b_{0t}/(1 - e^2)^{1/2}$$

$$b_{1t} = e \sin b_{0t}$$

$$b_{2t} = \cos b_{0t}$$

$$b'_{2t} = b_{2t}/(1 - e^2)$$

(5) 在地球上落点与发射点之间的经差

$$\lambda_{oc} = \lambda_{oK}^A + \lambda_{Kc}^A - \Omega(t_K + t_f)$$

4. 落点的地心角射程  $\hat{\beta}$  及球面方位角  $\hat{\alpha}$

$$\hat{\beta} = \arccos(\sin \phi_0 \sin \phi_c + \cos \phi_0 \cos \phi_c \cos \lambda_{oc})$$

$$\sin \hat{\alpha} = \frac{\sin \lambda_{oc}}{\sin \hat{\beta}} \cos \phi_c$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\sin \phi_c - \cos \hat{\beta} \sin \phi_0}{\cos \phi_0 \sin \hat{\beta}}$$

当  $|\sin \hat{\alpha}| \leq |\cos \hat{\alpha}|$  时

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \arcsin[\sin \hat{\alpha}] & (\cos \hat{\alpha} \geq 0) \\ \pi \operatorname{sign}[\sin \hat{\alpha}] - \arcsin[\sin \hat{\alpha}] & (\cos \hat{\alpha} < 0) \end{cases}$$

当  $|\sin \hat{\alpha}| > |\cos \hat{\alpha}|$  时

$$\hat{\alpha} = \pm \arccos[\cos \hat{\alpha}] \quad \begin{matrix} (\sin \hat{\alpha} \geq 0 \text{取}+) \\ (\sin \hat{\alpha} < 0 \text{取}-) \end{matrix}$$



## 二、有关椭圆轨道理论

1. 已知椭圆轨道上一点参数，求轨道上任一点参数

弹在与地心距离成反比的引力场中运动的椭圆轨道方程为

$$r = \frac{P}{1 - e \cos \xi} \quad (\text{A. 1})$$

其中， $\xi$ 是由远地点为始边的角度，顺时针为正，逆时针为负。 $\xi = \beta + \xi_0$

已知：椭圆轨道上一点  $K$ ，地心矢径  $r_0$ ，速度  $V_0$ ，倾角  $\theta_H$ 。则轨道参数为

$$K = r_0 V_0 \cos \theta_H = \text{常数} \quad (\text{A. 2})$$

$$P = K^2 / fM \quad (\text{A. 3})$$

$$\xi_0 = \arctan \left[ \frac{P V_0 \sin \theta_H}{(P/r_0 - 1) K} \right] \quad (\text{A. 4})$$

$$e = \frac{(1 - P/r_0)}{\cos \xi_0} \quad (\text{A. 5})$$

于是，自  $\vec{r}_0$  开始沿椭圆轨道运动，经地心角  $\beta$  至  $\vec{r}$ ， $\vec{r}$  的大小为  $r$

$$r = \frac{P}{1 - e \cos(\beta + \xi_0)} \quad (\text{A. 6})$$

其飞行时间  $t_f$  为

$$t_f = \frac{1}{\sqrt{fM}} \left( \frac{P}{1 - e^2} \right)^{3/2} [\gamma - \gamma_0 + e(\sin \gamma - \sin \gamma_0)] \quad (\text{A. 7})$$

$$\gamma = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi}{2} \right] \quad (\text{A. 8})$$

$$\gamma_0 = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi_0}{2} \right]$$

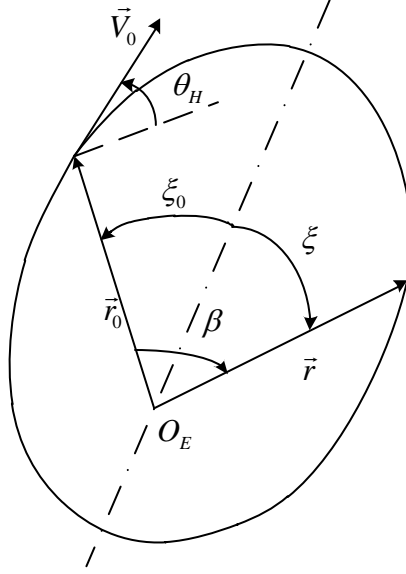


图 A. 1

## 2. 求通过两个已知点 $M$ 和 $T$ 的椭圆轨道

给定  $M$  点矢径  $r_M$ 、 $T$  点矢径  $r_T$ ，两点间的地心角  $\beta$ （见图 A. 2），则在  $M$  点满足

$$r_M = \frac{P}{1 - e \cos \xi_M} \quad (\text{A. 9})$$

在  $T$  点满足

$$r_T = \frac{P}{1 - e \cos(\beta + \xi_M)} \quad (\text{A. 10})$$

方程(A. 9)和(A. 10)中有三个待定常数： $p$ 、 $e$ 和 $\xi_M$ 。这样，由两个方程确定三个未知数，显然有无穷多组解。就是说，经过两点  $M$ 、 $T$  的椭圆轨道有无穷多个。因此还必须规定限定条件：

(1) 给定在  $M$  点的倾角  $\theta_H$

由(A. 9)式可得

$$e = \left(1 - \frac{P}{r_M}\right) / \cos \xi_M \quad (\text{A. 11})$$

为消去  $e$ ，将(A. 11)代入(A. 10)式，可得

$$r_T = \frac{P}{1 - \left(1 - \frac{P}{r_M}\right) (\cos \beta - \sin \beta \tan \xi_M)} \quad (\text{A. 12})$$

由(A. 4)式得

$$\tan \xi_M = \frac{P V_M \sin \theta_H}{(P/r_M - 1)K} \quad (\text{A. 13})$$

将(A. 13)代入(A. 12)，并考虑到  $K = r_M V_M \cos \theta_H$ ，整理可得

$$P = \frac{r_T(1 - \cos \beta)}{1 - \frac{r_T}{r_M}(\cos \beta - \sin \beta \tan \theta_H)} \quad (\text{A. 14})$$

(A. 14)式说明，当给定 $r_M$ 、 $r_T$ 、 $\beta$ 及 $\theta_H$ 后便可确定 $P$ ，椭圆轨道另外的两个参数 $\xi_M$ 、 $e$ ，分别由(A. 13)、(A. 11)两式确定。

求 $M$ 点的速度 $V_M$ ：由(A. 3)式得

$$K = \sqrt{fM \cdot P} \quad (\text{A. 15})$$

由(A. 2)式有

$$K = V_M r_M \cos \theta_H \quad (\text{A. 16})$$

故

$$V_M = \frac{\sqrt{fM \cdot P}}{r_M \cos \theta_H} \quad (\text{A. 17})$$

由 $M$ 至 $T$ 的飞行时间 $t_f$ 可由

$$\xi_M = \arctan \left[ \frac{\tan \theta_H}{1 - r_M/P} \right] \quad (\text{A. 18})$$

和

$$\xi_T = \xi_M + \beta \quad (\text{A. 19})$$

两式求得 $\xi_M$ 和 $\xi_T$ 后，代入(A. 7)式求得 $t_f$ 。

(2) 给定 $M$ 点速度 $V_M$ 求过 $M$ 、 $T$ 点的椭圆轨道

将(A. 14)式代入(A. 17)，整理可得关于 $\tan \theta_H$ 的二次方程

$$fM(1 - \cos \beta) \tan^2 \theta_H - r_M V_M^2 \sin \beta \tan \theta_H + [fM(1 - \cos \beta) - V_M^2 r_M (r_M/r_T - \cos \beta)] = 0 \quad (\text{A. 20})$$

该方程的两个根为

$$\tan \theta_H = \frac{r_M V_M^2 \sin \beta \pm \sqrt{r_M^2 V_M^4 \sin^2 \beta - 4fM(1 - \cos \beta)[fM(1 - \cos \beta) - V_M^2 r_M (\frac{r_M}{r_T} - \cos \beta)]}}{2fM(1 - \cos \beta)} \quad (\text{A. 21})$$

关于(A. 21)式得讨论：

a. 当(A. 21)式中根号内式子之和大于零，此时 $\theta_H$ 有两个不同的实根，说明给定速度 $V_M$ ，有两个经过 $M$ 和 $T$ 点的椭圆轨道。

b. 当(A. 21)式中根号内式子之和等于零， $\tan \theta_H$ 有两个相等的实根。此时，过 $M$ 、 $T$ 点只有一个椭圆轨道，即最小能量轨道。由根号内式子之和等于零可导出

$$V_M^2 = \frac{2fM(1-\cos\beta) \left[ \cos\beta - r_M/r_T + \sqrt{(r_M/r_T - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta} \right]}{r_M \sin^2\beta} = V_M^{*2} \quad (\text{A. 22})$$

c. 当(A. 21)式中根号内式子之和小于零，有两个复根。即当 $V_M < V_M^*$ 时，得不到通过 $T$ 点的椭圆轨道。

因此， $V_M$  必须满足

$$V_M \geq V_M^* \quad (\text{A. 23})$$

对于最小能量轨道，有

$$\tan\theta_H^* = \frac{r_M V_M^{*2} \sin\beta}{2fM(1-\cos\beta)} \quad (\text{A. 24})$$

为消去(A. 24)中 $V_M^{*2}$ ，将(A. 22)代入(A. 24)，整理得

$$\tan 2\theta_H^* = \frac{\sin\beta}{r_M/r_T - \cos\beta} \quad (\text{A. 25})$$

于是最小能量轨道的 $\theta_H^*$ 为

$$\theta_H^* = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\sin\beta}{r_M/r_T - \cos\beta} \right] \quad (\text{A. 26})$$

最小能量轨道 $M$ 点的速度为

$$V_M^* = \left[ \frac{2fM(1-\cos\beta)}{r_M \sin\beta} \tan\theta_H^* \right]^{1/2} \quad (\text{A. 27})$$

3. 椭圆轨道参数用 $s$ 、 $c$ 、 $a$ 等表示

首先，令连接 $M$ 、 $T$ 两点之弦长为 $c$ ，并记

$$s = \frac{1}{2}(r_M + r_T + c) \quad (\text{A. 28})$$

根据余弦定理有

$$c^2 = r_M^2 + r_T^2 - 2r_M r_T \cos\beta \quad (\text{A. 29})$$

由(A. 29)式可得

$$\cos\beta = 2 \frac{s(s-c)}{r_M r_T} - 1 \quad (\text{A. 30})$$

将(A. 30)式代入(A. 22)式

$$V_M^{*2} = \frac{2fM \times 2 \left[ 1 - \frac{s(s-c)}{r_M r_T} \right] \left[ \frac{1}{r_T} \sqrt{r_M^2 + r_T^2 - 2r_M r_T \cos\beta} - \left( \frac{r_M}{r_T} - 2 \frac{s(s-c)}{r_M r_T} + 1 \right) \right]}{4r_M \left[ 1 - \frac{s(s-c)}{r_M r_T} \right] \times \frac{s(s-c)}{r_M r_T}}$$

整理得

$$V_M^{*2} = 2fM \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{s} \right) \quad (\text{A. 31})$$

另外，因椭圆轨道的能量表达式为

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{fM}{r} = -\frac{fM}{2a} \quad (\text{A. 32})$$

由(A. 31)和(A. 32)两式可得最小能量轨道的长半轴  $a^*$  满足

$$a^* = \frac{1}{2}s \quad (\text{A. 33})$$

下面推导由  $\theta_H$ 、 $\beta$ 、 $r_M$ 、 $r_T$  计算  $a$  的表达式。

图 A. 3 中， $\bar{r}_1$  为椭圆轨道的最大矢径， $\bar{r}_2$  为最小矢径。由方程(A. 1)有

$$r_1 = \frac{P}{1-e}$$

$$r_2 = \frac{P}{1+e}$$

故

$$r_1 + r_2 = 2a = \frac{2P}{1-e^2}$$

故

$$a = \frac{P}{1-e^2} \quad (\text{A. 34})$$

将(A. 11)、(A. 14)式代入(A. 34)式，整理可得

$$a = \frac{r_M}{2} \left[ 1 + \frac{r_T(1 - \cos \beta)}{2 \cos^2 \theta_H [r_M - r_T(\cos \beta - \sin \beta \tan \theta_H)] - r_T(1 - \cos \beta)} \right] \quad (\text{A. 35})$$

$$= \frac{r_M}{2} \left[ 1 + \frac{r_T(1 - \cos \beta)}{r_M - r_T + r_M \cos 2\theta_H - r_T \cos(2\theta_H + \beta)} \right]$$

$$a = \frac{r_M}{2} \left[ 1 + \frac{r_T(1 - \cos \beta)}{2[r_M \cos^2 \theta_H - r_T \cos^2(\theta_H + \beta/2)]} \right] \quad (\text{A. 36})$$

根据拉姆伯特（Lambert）定理，由  $M$  至  $T$  的飞行时间  $t_f$  的表达式为

$$t_f = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{fM}} [2\pi - (\alpha_M + \beta_M) + \sin \beta_M + \sin \alpha_M] \quad (\text{A. 37})$$

式中

$$\begin{cases} \alpha_M = 2 \arcsin \sqrt{\frac{s}{2a}} \\ \beta_M = 2 \arcsin \sqrt{\frac{s-c}{2a}} \end{cases} \quad (\text{A. 38})$$

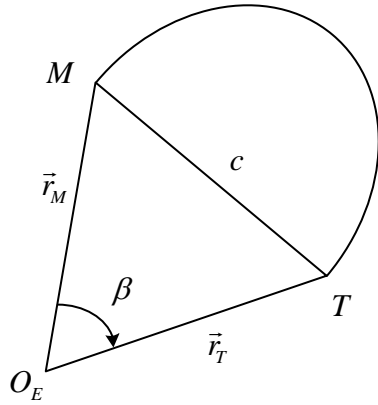


图 A. 2

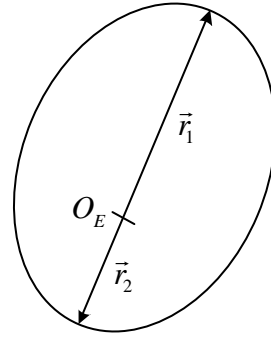


图 A. 3

#### 4. 椭圆轨道的几何描述

前面对椭圆轨道进行了解析的推证，现从几何角度描述，加深对椭圆轨道形象的理解，顺便导出个别公式。

(1) 过  $M$ 、 $T$  两点的椭圆轨道的焦点

我们已知地心  $O_E$  是椭圆轨道的一个焦点。

首先，假定过  $M$ 、 $T$  两点的一个椭圆轨道长半轴为  $a_1$ ，又根据椭圆的基本性质：椭圆上任一点到两个焦点的距离之和等于常数（为长半轴的二倍）。因此，为求椭圆的另一个焦点，应是以  $M$  点为圆心，以  $(2a_1 - r_M)$  为半径之圆，与以  $T$  点为圆心，以  $(2a_1 - r_T)$  为半径之圆的交点为另一焦点，两圆的交点记  $F_1$ ， $\tilde{F}_1$ 。这说明，与给定的长半轴  $a_1$  相对应的椭圆有两个。再给长半轴取不同值： $a_2$ ， $a_3$ ， $a_4$ ，...。其焦点  $F_i$ ， $\tilde{F}_i$  的轨迹为双曲线（见图 A. 4）。此双曲线与  $\overline{MT}$  的焦点  $F^*$  是最小能量轨道之另一焦点。

将以  $F_1$ ， $\tilde{F}_1$  为焦点的两个椭圆画于图 A. 5。

根据动量矩守恒原理知，在椭圆轨道上，矢量  $r$  单位时间内扫过的面积相等。其动量矩分别为

$$K = r_M V_M \cos \theta_H$$

和

$$\tilde{K} = r_M V_M \cos \tilde{\theta}_H$$

因为  $|\tilde{\theta}_H| < |\theta_H|$ ，所以  $K < \tilde{K}$ 。

对于以  $(O_E, F_1)$  为焦点的椭圆，由  $M$  点到  $T$  点扫过的面积为扇形  $O_E MDT$ 。以  $(O_E, \tilde{F}_1)$  为焦点的椭圆，由  $M$  点到  $T$  点， $r$  扫过的面积为扇形  $O_E \tilde{M} \tilde{D} T$ 。因此，对应的飞行时间分别为

$$t_f = \frac{\text{扇形 } O_E MDT \text{ 面积}}{K} \quad (\text{A. 39})$$

$$\tilde{t}_f = \frac{\text{扇形 } O_E M \tilde{D} T \text{ 面积}}{K} \quad (\text{A. 40})$$

因为  $K < \tilde{K}$ ，扇形  $O_E MDT$  的面积  $>$  扇形  $O_E M \tilde{D} T$  的面积，所以  $t_f > \tilde{t}_f$ 。故可得结论：由  $M$  点到  $T$  点得两个椭圆轨道，焦点为  $F_1$  的椭圆的飞行时间比焦点为  $\tilde{F}_1$  的椭圆的飞行时间长。

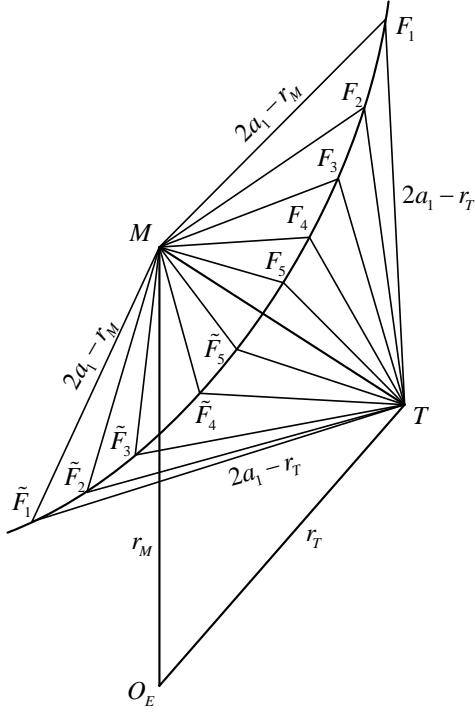


图 A. 4

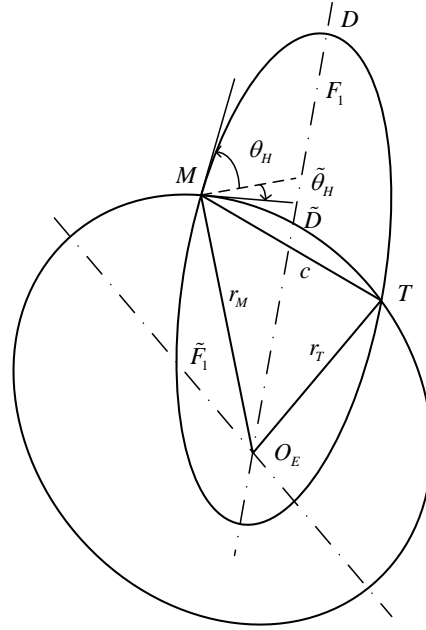


图 A. 5

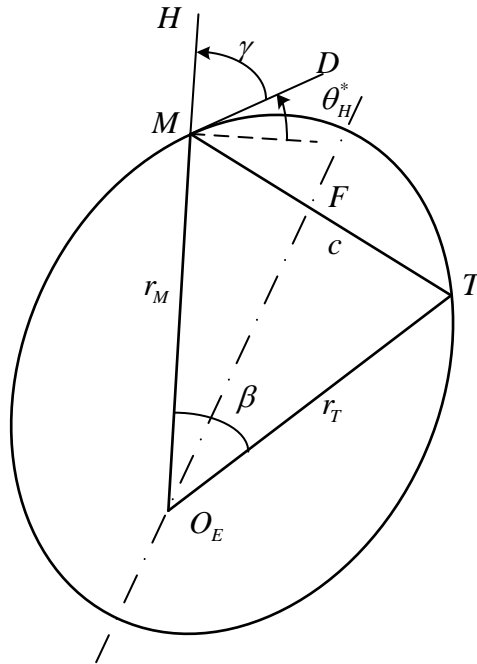


图 A. 6

(2) 最小能量椭圆轨道的  $\theta_H^*$  角的另一表达式

过  $M$ 、 $T$  的最小能量椭圆画于图 A.6, 如上所述, 焦点  $F^*$  在  $\overline{MT}$  上。用解析几何的方法可以证明, 过  $M$  点的切线  $\overline{MD}$  是  $O_E M$  的延长线  $\overline{MH}$  和  $\overline{MF}$  夹角  $\angle HMT$  的角分线。因此若记  $\angle HMD = \gamma$ , 则  $\angle DMF = \gamma$   
故

$$\angle O_E MT = \pi - 2\gamma \quad (\text{A. 41})$$

又因

$$\begin{aligned} \theta_H^* + \gamma &= \frac{\pi}{2} \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} - \theta_H^* \end{aligned} \quad (\text{A. 42})$$

所以

$$\theta_H^* = \frac{1}{2} \angle O_E MT$$

在  $\square O_E MT$  中

$$\sin \angle O_E MT = \frac{r_T}{c} \sin \beta \quad (\text{A. 43})$$

所以

$$\theta_H^* = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{r_T}{c} \sin \beta \right) \quad (\text{A. 44})$$

(A. 44) 式便是最小能量轨道  $\theta_H^*$  的另一表达式。

若过  $T$  点作  $\overline{O_E M}$  的垂线  $\overline{TN}$ , 可得

$$\tan \angle O_E MT = \frac{r_T \sin \beta}{r_M - r_T \cos \beta}$$

因而可得

$$\theta_H^* = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\sin \beta}{r_M / r_T - \cos \beta} \right) \quad (\text{A. 45})$$

(A. 45) 式与解析法推证的 (A. 26) 式完全一致。

### 三、弹上计算公式一览表

(一) 给定条件

1. 发射点的地理纬度  $B_o$ 、经度  $\lambda_o$ 、高程  $h_o$ ;
2. 目标点的地理纬度  $B_T$ 、经度  $\lambda_T$ 、高程  $h_T$  (假定已转化为虚拟目标的经纬度)。

(二) 计算公式

1. 射击方位角  $A$  的确定



$$(1) \mu_T = \frac{e'^2}{2} \sin 2B_T (1 - e'^2 \cos^2 B_T)$$

$$(2) R_T = a_E / \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 (B_T - \mu_T)}$$

$$(3) \phi_T = B_T - \mu_T (1 - \frac{h_T}{R_T})$$

$$(4) r_T = R_T + h_T$$

$$(5) \lambda_{OT} = \lambda_T - \lambda_O$$

(6) 迭代计算《起飞后弹上计算公式》中  $\beta_j$  至  $t_{f,j+1}$  段之公式，然后求  $V_R$ 、 $\theta_H$ 、 $\sin \hat{\alpha}$ 、 $\cos \hat{\alpha}$

$$(7) \begin{cases} V_{gx,N} = V_R \cos \theta_H \cos \hat{\alpha} \\ V_{gz,N} = V_R \cos \theta_H \sin \hat{\alpha} - R_0 \Omega \cos \phi_0 \end{cases}$$

$$(8) \sin A_E = V_{gz,N} / (V_{gx,N}^2 + V_{gz,N}^2)^{1/2}$$

$$\cos A_E = V_{gx,N} / (V_{gx,N}^2 + V_{gz,N}^2)^{1/2}$$

$$(9) A = \pm \arccos(\cos A_E) \begin{cases} \sin A_E \geq 0 \text{ 取} + \\ \sin A_E < 0 \text{ 取} - \end{cases}$$

2. 起飞前若干常数的计算

$$(1) \begin{cases} \Omega_x^o = \cos B_o \cos A \\ \Omega_y^o = \sin B_o \\ \Omega_z^o = -\cos B_o \sin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{10} = 3.4030318 - 2.89562 \times 10^{-2} \Omega_x^o \Omega_y^o \\ g_{20} = -9.7982777 - (1.8258 + 0.03876 \Omega_y^{o2}) \times 10^{-2} \Omega_y^{o2} \\ g_{10} = 3.4030318 - 2.89562 \times 10^{-2} \Omega_y^o \Omega_z^o \\ g_{11} = -1.5387287 \times 10^{-6} - 3.0554 \times 10^{-9} \Omega_y^{o2} - 4.9895 \times 10^{-9} \Omega_x^{o2} \\ g_{33} = -1.5387287 \times 10^{-6} - 3.0554 \times 10^{-9} \Omega_y^{o2} - 4.9895 \times 10^{-9} \Omega_z^{o2} \\ g_{22} = -(g_{11} + g_{33}) \\ g_{12} = -1.1100366 \times 10^{-9} \Omega_x^o \Omega_y^o \\ g_{13} = -4.9895 \times 10^{-9} \Omega_x^o \Omega_z^o \\ g_{14} = 7.22575 \times 10^{-13} \\ g_{15} = -1.1329 \times 10^{-19} \\ g_{23} = -1.1100366 \times 10^{-9} \Omega_y^o \Omega_z^o \\ g_{40} = (3.4030318 \times 10^{-2} - 2.89562 \times 10^{-4} \Omega_y^{o2}) \Omega_y^o \end{cases}$$

$$(2) g_{60} = -1.1100366 \times 10^{-8} \Omega_y^o$$

$$(3) \begin{cases} \mu_0 = \frac{e'^2}{2} \sin 2B_0 (1 - e'^2 \cos^2 B_0) \\ \phi_0 = B_0 - \mu_0 \end{cases}$$

$$(4) R_0 = a_E / \sqrt{1 + e'^2 \sin \phi_0}$$

$$(5) \begin{cases} R_{ox} = -R_o \sin \mu_0 \cos A \\ R_{oy} = R_o \cos \mu_0 \\ R_{oz} = R_o \sin \mu_0 \sin A \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} V_{x0} = \Omega[\Omega_y^o R_{ox} - \Omega_z^o (R_{oy} + h_o)] \\ V_{z0} = \Omega[\Omega_x^o (R_{oy} + h_o) - \Omega_y^o R_{ox}] \quad #### \\ V_{y0} = 0 \end{cases}$$

将  $g_{ij}$ 、 $\lambda_{OT}$ 、 $\phi_T$ 、 $r_T$ 、 $\Omega_x^o$ 、 $\Omega_y^o$ 、 $\Omega_z^o$ 、 $R_{ox}$ 、 $R_{oy}$ 、 $R_{oz}$ 、 $V_{xo}$ 、 $V_{yo}$ 、 $V_{zo}$ 、 $h_o$  等存入弹上计算机中。

### 3. 起飞后弹上计算机计算公式

#### (1) 大步长计算（步长为 $\tau$ ）

对  $i=1,2,3,\dots$  计算

$$x'_i = x_{i-1} + \frac{\tau}{2} V_{x,i-1}$$

$$y'_i = y_{i-1} + \frac{\tau}{2} V_{y,i-1}$$

$$z'_i = z_{i-1} + \frac{\tau}{2} V_{z,i-1}$$

$$\Delta V_{x,i} = \Delta W_{x,i} + \tau \left\{ g_{10} + \left[ g_{11} + g_{14} y'_i + g_{15} \left[ 2y_i'^2 - \frac{1}{2} (x_i'^2 + z_i'^2) \right] \right] x'_i + g_{12} y'_i + g_{13} z'_i \right\}$$

$$\Delta V_{y,i} = \Delta W_{y,i} + \tau \left\{ g_{20} + g_{12} x'_i + \left[ g_{22} + g_{15} \left[ 2(x_i'^2 + z_i'^2) - \frac{4}{3} y_i'^2 \right] \right] y'_i + g_{23} z'_i - g_{14} \left[ y_i'^2 - \frac{1}{2} (x_i'^2 + z_i'^2) \right] \right\}$$

$$\Delta V_{z,i} = \Delta W_{z,i} + \tau \left\{ g_{30} + g_{13} x'_i + g_{23} y'_i + \left[ g_{33} + g_{14} y'_i + g_{15} \left[ 2y_i'^2 - \frac{1}{2} (x_i'^2 + z_i'^2) \right] \right] z'_i \right\}$$

$$V_{x,i} = V_{x,i-1} + \Delta V_{x,i}$$

$$V_{y,i} = V_{y,i-1} + \Delta V_{y,i}$$

$$V_{z,i} = V_{z,i-1} + \Delta V_{z,i}$$

$$x_i = x_{i-1} + \tau (V_{x,i-1} + \frac{1}{2} \Delta V_{x,i})$$

$$y_i = y_{i-1} + \tau (V_{y,i-1} + \frac{1}{2} \Delta V_{y,i})$$

$$z_i = z_{i-1} + \tau (V_{z,i-1} + \frac{1}{2} \Delta V_{z,i})$$

$$\begin{aligned}
r_{xi} &= R_{ox} + x_i \\
r_{yi} &= R_{oy} + y_i \\
r_{zi} &= R_{oz} + z_i \\
r_i &= \sqrt{r_{xi}^2 + r_{yi}^2 + r_{zi}^2} \\
r_{xi}^o &= \frac{r_{xi}}{r}, r_{yi}^o = \frac{r_{yi}}{r}, r_{zi}^o = \frac{r_{zi}}{r} \\
\phi_i &= \arcsin(r_{xi}^o \Omega_x^o + r_{yi}^o \Omega_y^o + r_{zi}^o \Omega_z^o) \\
f_{32,i} &= \Omega_z^o r_{xi}^o - \Omega_x^o r_{zi}^o \\
\lambda_{OM,i}^A &= \arcsin\left(-\frac{f_{32,i}}{\cos B_o \cos \phi_i}\right)
\end{aligned}$$

迭代计算：  $j=0,1,2,3,\dots$

$$\begin{aligned}
\lambda_{MT,j}^A &= \lambda_{OT} - \lambda_{OM,i}^A + \Omega(t_i + t_{f,j}) \\
\beta_j &= \arccos(\sin \phi_i \sin \phi_T + \cos \phi_i \cos \phi_T \cos \lambda_{OM,i}^A) \\
c_j &= [r_i^2 + r_T^2 - 2r_i r_T \cos \beta_j]^{1/2} \\
s_j &= \frac{1}{2}(r_i + r_T + c_j) \\
\theta_{H,j} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{r_T}{c_j} \sin \beta_j\right) & (\text{最小能量轨道}) \\ & (\text{根据预先给定}) \end{cases} \\
a_j &= \frac{r_i}{2} \left[ 1 + \frac{r_T(1 - \cos \beta_j)}{2[r_i \cos^2 \theta_{H,j} - r_T \cos^2(\theta_{H,j} + \beta_j/2)]} \right] \\
\alpha_{M,j} &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{s_j}{2a_j}} \\
\beta_{M,j} &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{s_j - c_j}{2a_j}} \\
t_{f,j+1} &= \frac{a_j^{3/2}}{\sqrt{fM}} [2\pi + (\sin \beta_j - \beta_{M,j}) + (\sin \alpha_{M,j} - \alpha_{M,j})]
\end{aligned}$$

迭代至  $|c_{j+1} - c_j| < 1$  米，结束迭代，取  $\beta_i = \beta_j$ ， $c_i = c_j$ ， $a_i = a_j$ ， $\theta_{H,i} = \theta_{H,j}$ ， $t_{f,i} = t_{f,j}$  等等，余此类推。

$$V_{R,i} = \sqrt{fM} \sqrt{\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a_i}}$$

$$\begin{aligned}
\sin \widehat{\alpha}_i &= \cos \phi_T \frac{\sin \lambda_{MT,i}^A}{\sin \beta_i} \\
\cos \widehat{\alpha}_i &= \frac{\sin \phi_T - \cos \beta_i \sin \phi_i}{\sin \beta_i \cos \phi_i} \\
p_i &= \frac{\cos \theta_{H,i} \cos \widehat{\alpha}_i}{\cos \phi_i} \\
q_i &= \sin \theta_{H,i} \\
l_i &= \frac{\cos \theta_{H,i} \sin \widehat{\alpha}_i}{\cos \phi_i} \\
V_{RX,i} &= V_{Ri} \left[ p_i (\Omega_x^o - \sin \phi_i r_{xi}^o) + q_i r_{xi}^o + l_i (\Omega_y^o r_{zi}^o - \Omega_{zi}^o r_{yi}^o) \right] \\
V_{RY,i} &= V_{Ri} \left[ p_i (\Omega_y^o - \sin \phi_i r_{yi}^o) + q_i r_{yi}^o + l_i f_{32,i} \right] \\
V_{RZ,i} &= V_{Ri} \left[ p_i (\Omega_z^o - \sin \phi_i r_{zi}^o) + q_i r_{zi}^o + l_i (\Omega_x^o r_{yi}^o - \Omega_y^o r_{xi}^o) \right] \\
V_{RX,K,i} &= V_{RX,i} + \frac{V_{RX,i-1} - V_{RX,i}}{\Delta V_{x,i}} \tilde{V}_{gx,i} \\
V_{RY,K,i} &= V_{RY,i} + \frac{V_{RY,i-1} - V_{RY,i}}{\Delta V_{x,i}} \tilde{V}_{gx,i} \\
V_{RZ,K,i} &= V_{RZ,i} + \frac{V_{RZ,i-1} - V_{RZ,i}}{\Delta V_{x,i}} \tilde{V}_{gx,i} \\
\tilde{V}_{gx,i} &= V_{RX,K,i-1} - V_{xi} \\
V_{gx,i} &= V_{RX,K,i} - V_{xi} \\
V_{gy,i} &= V_{RY,K,i} - V_{yi} \\
V_{gz,i} &= V_{RZ,K,i} - V_{zi} \\
\Delta \varphi_i &= \frac{V_{gy,i} \Delta V_{xi} - V_{gx,i} \Delta V_{yi}}{V_{gx,i} \Delta V_{xi} + V_{gy,i} \Delta V_{yi}} \\
\Delta \psi_i &= \frac{V_{gx,i} \Delta V_{zi} - V_{gz,i} \Delta V_{xi}}{V_{gx,i} \Delta V_{xi} - V_{gz,i} \Delta V_{zi}}
\end{aligned}$$

当  $V_{gx,i} \leq \frac{2+2\tau'/\tau}{3+2\tau'/\tau} V_{gx,i-1}$  时转入小步长计算（设  $i=N$  时满足此不等式）

（2）小步长计算（步长为  $\tau'$ ）

对  $m=0,1,2,3,\dots$  计算

$$\begin{aligned}
V_{x,m} &= \Delta W_{x,N+1} + \sum_{n=1}^m \Delta W_{x,n} + (\tau + m\tau') g_{x,N} + V_{x,N} \\
V_{RX,m} &= V_{RX,N} + (1 + m \frac{\tau'}{\tau})(V_{RX,N} - V_{RX,N-1})
\end{aligned}$$

$$V_{RX,K,m} = V_{RX,m} + \frac{V_{RX,m} - V_{RX,m-1}}{V_{x,m} - V_{x,m-1}} (V_{RX,K,m-1} - V_{x,m})$$

$$V_{gx,m} = V_{RX,K,m} - V_{x,m}$$

$$V_{gx,m} \leq \frac{2}{3} V_{gx,m-1} \text{ 时计算}$$

$$t_K = t_m + \frac{V_{gx,m}}{V_{gx,m-1} - V_{gx,m}} \tau'$$

并结束计算，当  $t = t_K$  时发出关机指令。

## 参考文献

- [1] Leondes C. T., "Guidance and Control of Aerospace Vehicle", New York McGraw-Hill Book Company. Inc. 1963.
- [2] 李连仲, 弹道飞行器自由飞行轨道解析解法, 宇航学报, 1982 年, 第一期。
- [3] Whitcomber D. W., "An Introduction to Inertial Guidance Concepts for Ballistic Missiles", AD 259865.
- [4] Battin G. R., "Astronautical Guidance", New York McGraw-Hill Book Company. Inc.1964.
- [5] Macombor G. R., Fernandez M., "Inertial Guidance Engineering", Englewood Cliffs N. J., Prentice-Hall, 1962.
- [6] Macpherson D., "Self-contained Explicit Guidance Equations for Ballistic Missiles", AD 403872.
- [7] Davis W. L., "An Efficient Algorithm for Computing the Q-Guidance Matrix"(Final Report), AD-A06816.
- [8] 李连仲, 弹上计算机实时解算导弹的真速度和真坐标方法的研究 (内部)。