问题1

证：

因为$\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

所以 当 $x \neq 0$ 时，有$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$

所以$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

当 $x = 0$ 时，$\|Ax\| = \|A\|\|x\|$

综上，$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

得证

问题2

证： 由问题1知

$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$

当 $x \neq 0$ 时，有$\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|B\|$

所以$\|AB\| = \max \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|B\|$

问题3

证明：

Frobenius范数不是算子范数

考虑单位矩阵I， 则$\|I\|_F$=n

而$\max\limits_{\|x\|=1} \frac{\|Ix\|}{\|x\|}$=1

矛盾

所以Frobenius范数不是算子范数

问题4

证明 首先证明$\forall A \in C^{m\times n}$成立

$$\|A\|_F^2 = tr(A^HA) = tr(AA^H)$$

事实上A^HA的i行i列的元素为

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ki}} a_{ki} = \sum_{k=1}^{m} |a_{ki}|^2$$

因此

$$tr(A^HA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |a_{ki}|^2 = \|A\|_F^2$$

于是

$$\|A\|_F^2 = \left\|A^H\right\|_F^2 = tr((A^H)^H A^H) = tr(AA^H)$$

下证 当Q和Z是酉阵时（正交阵同理可证），对Frobenius范数满足

$$\|QAZ\|_F = \|A\|_F$$

因为

$$\|QAZ\|_F^2 = tr((QAZ)^H(QAZ)) = tr(Z^HA^HQ^HQAZ) = tr(Z^HA^HAZ) = tr(A^HA) = \|A\|_F^2$$

故

$$\|QAZ\|_F = \|A\|_F$$

证明 当Q和Z是酉阵时（正交阵同理可证），对由$\|\cdot\|_2$导出的算子范数成立

$$\|QAZ\|_2 = \|A\|_2$$

因为

$$\|QAZ\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((QAZ)^H(QAZ))} = \sqrt{\lambda_{max}(Z^HA^HQ^HQAZ)} = \sqrt{\lambda_{max}(Z^HA^HAZ)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^HA)} = \|A\|_2$$

故

$$\|QAZ\|_2 = \|A\|_2$$

问题5

证

证明： 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0$,不妨设 $A \neq 0$.记

$$t = \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|, \quad \mu = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

则

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \le t\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

这就说明对任意的非零 $x \in R^n$,有

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \mu$$

下面来说明有一向量 $x_0 \neq 0$,使 $\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \mu$.设 $\mu = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}|$,取向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,其中 $x_j = sgn(a_{i_0j})(j = 1, 2, \cdots, n)$.

显然 $\|x_0\|_\infty = 1$,且 Ax_0 的第 i_0 个分量为 $\sum_{i=1}^n a_{i_0j}x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}|$,这说明

$$\|Ax_0\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = \mu$$

得证

问题6

证：设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0,$ 不妨设$A \neq 0.$ 记$t = max|x_i|,$ $\mu = \max_j \sum_i \left|a_{ij}\right|,$ 则

$$\|Ax\|_1 = \max_j \left|\sum_i a_{ij}x_j\right| \le \max_j \sum_i |a_{ij}||x_j| \le t\max_j \sum_i |a_{ij}|$$

这说明，对于任何非零x,有

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le \mu$$

下面说明有一向量$x_0 \neq 0$, 使$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \mu$. 设$\mu = \sum_i |a_{ij_0}|$,取向量

$$x_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

其中

$$x_i = sgn(a_{ij_0}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

显然$\|x_0\|_1 = 1$, 且Ax_0的第j_0个分量为$\sum_i a_{ij_0}x_i = \sum_i |a_{ij_0}|$,这说明

$$\|Ax_0\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}x_i| = \sum_i |a_{ij_0}| = \mu$$

得证

问题8

证：

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sqrt{\lambda_{max}(AA^T)} = \left\|A^T\right\|_2$$

问题9

证：A 是正规阵，必然存在酉阵 Q 满足 $Q'AQ = D$, D 为对角阵且对角线的元素都是 A 的特征值。记 $D = diag\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足 $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$ ，则 $|\lambda_1|$ 为 A 的最大的特征值。

令 x_1为 λ_1 对应的右特征向量，满足 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$,必然有：$\frac{\|Ax_1\|_2}{\|x_1\|_2} = |\lambda_1| \ge \|A\|_2$

令 y_1 为 $\|A\|_2$ 对应的单位向量，即：$\|y_1\|_2 = 1$ 且 $\|A\|_1 = \|Ay_1\|_2$. y_1可以被 Q 线性表出为 $y_1 = Qz_1$,且 z_1 也为单位向量。那么不难得出：

$$\|A\|_2 = \|Ay_1\|_2 = \|AQz_1\|_2 = \|Qz_1\|_2 \le |\lambda_1|$$

即： $\|A\|_2 = \max_i |\lambda_i(A)|$

问题10

证： 由$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n^{1/2}\|x\|_2$ 得

$\|Ax\|_1 \le n^{1/2}\|Ax\|_2 \le n^{1/2}\|A\|_2\|x\|_2 \le n^{1/2}\|A\|_2\|x\|_1$

所以$\|A\|_1 \le n^{1/2}\|A\|_2$

$\|Ax\|_2 \le \|Ax\|_1 \le \|A\|_1\|x\|_1 \le n^{1/2}\|A\|_1\|x\|_2$

所以$\|A\|_2 \le n^{1/2}\|A\|_1$

所以$n^{-1/2}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le n^{1/2}\|A\|_2$

问题11

证： 由$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le n^{1/2}\|x\|_\infty$ 得

$\|Ax\|_\infty \le \|Ax\|_2 \le \|A\|_2\|x\|_2 \le n^{1/2}\|A\|_2\|x\|_\infty$

所以$\|A\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_2$

$\|Ax\|_2 \le n^{1/2}\|Ax\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_\infty\|x\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_\infty\|x\|_2$

所以$n^{-1/2}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty$

所以 $n^{-1/2}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_2$

问题12

证： 由$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

$\|Ax\|_1 \le n\|Ax\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|x\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|x\|_1$

所以$\|A\|_1 \le n\|A\|_\infty$

$\|Ax\|_\infty \le \|Ax\|_1 \le \|A\|_1 \|x\|_1 \le n\|A\|_1 \|x\|_\infty$

所以$n^{-1}\|A\|_\infty \le \|A\|_1$

所以$n^{-1}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le n\|A\|_\infty$

问题13

证明：由定义知

$$\|A\|_1^2 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

因此

$$\|A\|_1^2 \le \sum_{i=1}^n |a_{i1}|^2 + \sum_{i=1}^n |a_{i2}|^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n |a_{in}|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2$$

即：$\|A\|_1 \le \|A\|_F$

对于右边的不等式，定义 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，那么有

$$\begin{aligned}\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |a_{i1}|^2 + \sum_{i=1}^n |a_{i2}|^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n |a_{in}|^2 \\ = tr(A^TA) = \lambda_1(A^TA) + \lambda_2(A^TA) + \cdots + \lambda_n(A^TA) \\ \le n \max_{1\le i\le n} \lambda_i(A^TA) = n\|A\|_2^2\end{aligned}$$

即：$\|A\|_F \le n^{\frac{1}{2}} \|A\|_2$

所以

$$\|A\|_1 \le \|A\|_F \le n^{\frac{1}{2}} \|A\|_2$$