问题1

证：

因为$// A // = \max\limits_{x \neq 0} \frac{// Ax //}{// x //}$

所以 当 $x \neq 0$ 时，有$\frac{// Ax //}{// x //} \leq // A //$

所以$// Ax // \leq // A // // x //$

当 $x = 0$ 时，$// Ax // = // A // // x //$

综上，$// Ax // \leq // A // // x //$

得证

问题2

证： 由问题1知

$// ABx // \leq // A // // Bx // \leq // A // // B // // x //$

当 $x \neq 0$ 时，有$\frac{// ABx //}{// x //} \leq // A // // B //$

所以$// AB // = \max \frac{// ABx //}{// x //} \leq // A // // B //$

问题3

证明：

Frobenius范数不是算子范数

考虑单位矩阵I，则$\|I\|_F$=n

而$\max\limits_{\|x\|=1}\frac{\|Ix\|}{\|x\|}$=1

矛盾

所以Frobenius范数不是算子范数

问题4

证明 首先证明$\forall A \in C^{m\times n}$成立

$$\|A\|_F^2 = tr(A^HA) = tr(AA^H)$$

事实上A^HA的i行i列的元素为

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{ki}a_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \left|a_{ki}\right|^2$$

因此

$$tr(A^HA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \left|a_{ki}\right|^2 = \|A\|_F^2$$

于是

$$\|A\|_F^2 = \left\|A^H\right\|_F^2 = tr((A^H)^HA^H) = tr(AA^H)$$

下证 当Q和Z是酉阵时（正交阵同理可证），对Frobenius范数满足

$$\|QAZ\|_F = \|A\|_F$$

因为

$$\|QAZ\|_F^2 = tr((QAZ)^H(QAZ)) = tr(Z^HA^HQ^HQAZ) = tr(Z^HA^HAZ) = tr(A^HA) = \|A\|_F^2$$

故

$$// QAZ //_F = // A //_F$$

证明 当Q和Z是酉阵时（正交阵同理可证），对由$// \cdot //_2$导出的算子范数成立

$$// QAZ //_2 = // A //_2$$

因为

$$// QAZ //_2 = \sqrt{\lambda_{max}((QAZ)^H(QAZ))} = \sqrt{\lambda_{max}(Z^H A^H Q^H QAZ)} = \sqrt{\lambda_{max}(Z^H A^H AZ)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^H A)} = // A //_2$$

故

$$// QAZ //_2 = // A //_2$$

问题5

证

证明：　　设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0$,不妨设 $A \neq 0$.记

$$t = \ // \ x \ //_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad \mu = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

则

$$// Ax \ //_\infty = \max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \le t \max_{i} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

这就说明对任意的非零 $x \in R^n$,有

$$\frac{// Ax //_\infty}{// x //_\infty} \le \mu$$

下面来说明有一向量 $x_0 \neq 0$,使 $\frac{// Ax //_\infty}{// x //_\infty} = \mu$.设 $\mu = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0j}|$,取向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,其中 $x_j = sgn(a_{i_0j})(j = 1, 2, \cdots, n)$.

显然 $// x_0 //_\infty = 1$,且 Ax_0 的第 i_0 个分量为 $\sum_{i=1}^{n} a_{i_0j}x_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0j}|$,这说明

$$// Ax_0 //_\infty = \max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0j}| = \mu$$

得证

问题6

证： 设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0$, 不妨设$A \neq 0$. 记$t = max\left|x_i\right|$, $\mu =$ $\max_j \sum_i \left|a_{ij}\right|$, 则

$$// Ax //_1 = \max_j \left|\sum_i a_{ij}x_j\right| \le \max_j \sum_i \left|a_{ij}\right|\left|x_j\right| \le t \max_j \sum_i \left|a_{ij}\right|$$

这说明，对于任何非零x,有

$$\frac{// Ax //_1}{// x //_1} \le \mu$$

下面说明有一向量$x_0 \neq 0$, 使$\frac{// Ax //_1}{// x //_1} = \mu$. 设$\mu = \sum_i \left|a_{ij_0}\right|$,取向量

$$x_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

其中

$$x_i = sgn(a_{ij_0}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

显然 $// x_0 //_1 = 1$, 且Ax_0的第j_0个分量为$\sum_i a_{ij_0}x_i = \sum_i \left|a_{ij_0}\right|$,这说明

$$\| Ax_0 \|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}x_i| = \sum_i |a_{ij_0}| = \mu$$

得证

问题8

证：

$$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sqrt{\lambda_{max}(AA^T)} = \| A^T \|_2$$

问题9

证：A 是正规阵，必然存在酉阵 Q 满足 $Q'AQ = D$, D 为对角阵且对角线的元素都是 A 的特征值。记 $D = diag\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ ，则 $|\lambda_1|$ 为 A 的最大的特征值。

令 x_1为 λ_1 对应的右特征向量，满足 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$,必然有： $\frac{\| Ax_1 \|_2}{\| x_1 \|_2} = |\lambda_1| \geq \| A \|_2$

令 y_1 为 $\| A \|_2$ 对应的单位向量，即： $\| y_1 \|_2 = 1$ 且 $\| A \|_1 = \| Ay_1 \|_2$. y_1可以被 Q 线性表出为 $y_1 = Qz_1$,且 z_1 也为单位向量。那么不难得出：

$$\| A \|_2 = \| Ay_1 \|_2 = \| AQz_1 \|_2 = \| Qz_1 \|_2 \leq |\lambda_1|$$

即： $\| A \|_2 = \max_i |\lambda_i(A)|$

问题10

证： 由$\| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq n^{1/2} \| x \|_2$ 得

$\| Ax \|_1 \leq n^{1/2} \| Ax \|_2 \leq n^{1/2} \| A \|_2 \| x \|_2 \leq n^{1/2} \| A \|_2 \| x \|_1$

所以$\|A\|_1 \le n^{1/2}\|A\|_2$

$\|Ax\|_2 \le \|Ax\|_1 \le \|A\|_1\|x\|_1 \le n^{1/2}\|A\|_1\|x\|_2$

所以$\|A\|_2 \le n^{1/2}\|A\|_1$

所以$n^{-1/2}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le n^{1/2}\|A\|_2$

问题11

证：由$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le n^{1/2}\|x\|_\infty$得

$\|Ax\|_\infty \le \|Ax\|_2 \le \|A\|_2\|x\|_2 \le n^{1/2}\|A\|_2\|x\|_\infty$

所以$\|A\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_2$

$\|Ax\|_2 \le n^{1/2}\|Ax\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_\infty\|x\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_\infty\|x\|_2$

所以$n^{-1/2}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty$

所以 $n^{-1/2}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty \le n^{1/2}\|A\|_2$

问题12

证：由$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

$\|Ax\|_1 \le n\|Ax\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|x\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|x\|_1$

所以$\|A\|_1 \le n\|A\|_\infty$

$\|Ax\|_\infty \le \|Ax\|_1 \le \|A\|_1\|x\|_1 \le n\|A\|_1\|x\|_\infty$

所以$n^{-1}\|A\|_\infty \le \|A\|_1$

所以$n^{-1}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le n\|A\|_\infty$

问题13

证明：由定义知

$$\| A \|_1^2 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

因此

$$\| A \|_1^2 \le \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \| A \|_F^2$$

即： $\| A \|_1 \le \| A \|_F$

对于右边的不等式，定义 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，那么有

$$\| A \|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|^2 = tr(A^TA) = \lambda_1(A^TA) + \lambda_2(A^TA) + \cdots + \lambda_n(A^TA) \le n \max_{1 \le i \le n} \lambda_i(A^TA) = n \| A \|_2^2$$

即： $\| A \|_F \le n^{\frac{1}{2}} \| A \|_2$

所以

$$\| A \|_1 \le \| A \|_F \le n^{\frac{1}{2}} \| A \|_2$$