TRANSFORMATION DE FOURIER

BUT RT **R314**

Introduction

Un signal périodique de période T se décompose en séries de Fourier. La somme de la série de Fourier recompose le signal qui apparaît comme une somme d'harmonique s de fréquences $\nu_n = \frac{n}{T}\ pour\ n \in \mathbb{N}$

Ces fréquences ν_n sont des valeurs isolées dans $\mathbb{R}$.

Les fréquences présentes dans un signal non périodique, ne sont pas des valeurs isolées, elles prennent toutes les valeurs d'un intervalle. La décomposition fréquentielle d'un tel signal est possible grâce à la transformation de Fourier.

Les fonctions dans ce chapitre sont à variable réelle et vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

(Elles sont à énergie finie)

De plus, elles sont absolument intégrables c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

Conséquence : $\lim_{|t| \to +\infty} |f(t)| = 0$

I/ TRANSFORMATIONS DE FOURIER

1°/ Définition **Transformée de Fourier**

On appelle transformée de Fourier de la fonction f la fonction **:**

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$\boldsymbol{\nu \to F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt} \qquad (\boldsymbol{\nu \in IR})$$

Vocabulaires et remarques

- L'application T_F qui transforme f en F est la transformation de Fourier
- La transformée de Fourier est une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$
- Le graphe de $\nu \to |F(\nu)|$ est le spectre d'amplitude de f
- Le graphe de $\nu \to Arg(F(\nu))$est le spectre de phase
- **La fonction f est dans le domaine temporelle alors que sa transformée de Fourier est dans le domaine fréquentiel**

Propriété : La transformée de Fourier est bornée.

Preuve :

Propriété : La transformée de Fourier est continue sur IR et

$\lim_{|\nu| \to \infty} |F(\nu)|$=0

Preuve : admise

Cas particuliers :
Comme $\boldsymbol{e^{-2i\pi\nu t}} = \cos(-2\pi\nu t) + i\sin(-2\pi\nu t)$, on peut écrire

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(-2\pi\nu t)dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(-2\pi\nu t)dt$$

Donc $$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\nu t)dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\nu t)dt$$

- Si f est paire :

- De même si f est impaire

2°/ Formule de réciprocité

On admet que la transformation de Fourier T_F possède une transformation réciproque, notée T_F^{-1}
$T_F(f) = F \Leftrightarrow f = T_F^{-1}(F)$

Propriété
Si f est une fonction continue

$$\mathbf{F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt \Leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{2i\pi\nu t}d\nu}$$

En particulier :

- Si F est paire, $\mathbf{f(t)} =$
- Si F est impaire, $\mathbf{f(t)} =$

3°/ Exemples fondamentaux

Exemple1 Fonction « porte » (ou fenêtre rectangulaire)
Soit Π définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 \; si|t| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \; si \; |t| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de Π
2. Montrer que sa transformée de Fourier est $F(v) = \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}$ et la tracer.
3. Dessiner son spectre d'amplitude.
4. Dessiner son spectre de phase.

Exemple 2 Fonctions impulsions

Soit la fonction Π_T d définie par : $\begin{cases} \Pi_T(t) = A \; si \; |t| \leq \frac{T}{2} \\ \Pi_T(t) = 0 \; si \; |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(\mathbf{t})\mathbf{dt} = \mathbf{AT}$

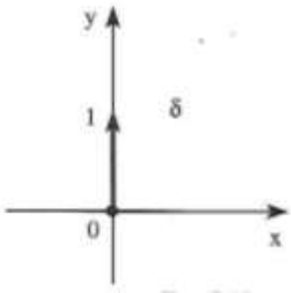
1. Tracer la représentation graphique de Π_T.
2. Donner la transformation de Fourier de Π_T .
3. Tracer sa représentation graphique
4. Donner la transformation de Fourier dans le cas particulier où $AT = 1$ (cas des fonctions impulsions-unité)

Exemple 3 Impulsions de Dirac

Si $T \to 0$ la fonction porte de Dirac a pour limite l'impulsion de Dirac noté δ.

On définit parfois abusivement δ par : $\delta(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \neq 0 \\ +\infty \ si \ x = 0 \end{cases}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$

L'impulsion de Dirac est représentée par le graphique suivant :



D'où le résultat important :

La transformation de Fourier de l'impulsion de Dirac est égale à :

Exemple 4 Fonction exponentielle

Soit $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(x)$ avec $a > 0$. Calculer sa transformation de Fourier

4°/ Symétrie

Si T_F (f) =F alors $F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi vt}dt$

En posant t = -x, dt = -dx on a :

$$F(v) = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(-x)e^{2i\pi vx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)e^{2i\pi vx}dx$$

En remplaçant x par v et v en t on obtient

$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-v)e^{2i\pi tv}dv = T_F{}^{-1}(f(-v))$

On retient :

Si F(v) est la transformée de Fourier de f(t) alors f(-v) = T_F (F)

Remarque : Si f est paire alors : T_F (f) =F ⇔ T_F (F) =f

II/ PROPRIETES

Dans ce paragraphe f et g sont deux fonctions ayant une transformée de Fourier notée F et G.
On note T_F la transformation de Fourier et $T_F{}^{-1}$ sa transformation réciproque.

1°/ Linéarité

Soient α et β deux nombres réels

Propriété :

T_F **(αf +βg) = α** T_F **(f)+β** T_F **(g)**

$T_F{}^{-1}$ **(αF +βG) = α** $T_F{}^{-1}$**(F)+β** $T_F{}^{-1}$**(G)= α** f **+β** g

2°/ Dilatation temporelle

Soit a un réel non nul, on cherche la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto f(at)$

Propriété :

∀a≠0, $\boldsymbol{T_F(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{v}{a}\right)}$

Démonstration :

<u>Exemple</u>
Déterminer la transformée de Fourier de $\Pi\left(\frac{t}{3}\right)$

<u>3°/ Décalage temporelle (avance-retard)</u>

Soit a un réel positif

TRANSFORMATION DE FOURIER

BUT RT **R314**

Retard de a : $t \mapsto f(t-a)$ Avance de a : $t \mapsto f(t+a)$

Propriété :

$\forall a \in \mathbb{R}$, $T_F(f(t-a)) = e^{-2i\pi\nu a}F(\nu)$

$\forall b \in \mathbb{R}$, $T_F^{-1}(F(\nu-b)) = e^{2i\pi tb}f(t)$

Démonstration

En combinant les deux propriétés précédentes, on obtient la propriété suivante :

$\forall a \neq 0$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, $T_F(f(at+b)) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\nu}{a}\right)e^{2i\pi\nu\frac{b}{a}}$

Exemple important : Transformée d'une impulsion décalée $\Pi_T(\mathbf{t-a})$

Exercice :

Représenter les signaux suivants et donner leurs transformées de Fourier.

1. $\Pi(t-3)$
2. $\Pi\left(\frac{t-2}{3}\right)$
3. $\Pi\left(\frac{3t-1}{2}\right)$

Transformée de Fourier d'une exponentielle complexe :

Des deux propriétés suivantes :

- Si F(v) est la transformée de Fourier de f(t) alors f(-v) = T_F (F)
- $T_F(\,\delta_a)(v) = e^{-2i\pi va}$

On déduit que $T_F\left(e^{-2i\pi ta}\right) = \delta(v+a)$ et $T_F\left(e^{2i\pi ta}\right) = \delta(v-a)$

Exercice fondamental : *Résultat à retenir* ***pour la modulation de signaux***

Calculer la transformée de Fourier d'un signal fondamentale de la forme $f(t) = Acos(2\pi vt)$

4°/ Transformée de $f'(t)$

Propriété :

Soit *f* une fonction dérivable et de limite nulle à l'infini :

$$T_F\,(f'(t)) = 2i\pi v F(v)$$
$$T_F^{-1}\left(\boldsymbol{F'(v)}\right) = \boldsymbol{-2i}\pi t f(t)$$

Généralisation à la dérivée n$^{\text{iéme}}$:

$$T_F\,(f^{(n)}\,(t)) = (2i\pi v)^n F(v)$$
$$T_F{}^{-1}\left(\boldsymbol{F}^{(n)}(\boldsymbol{v})\right) = (-\boldsymbol{2i}\pi t)^{\boldsymbol{n}} f(t)$$

Démonstration :

Exemple Fonction « triangle » (ou fenêtre triangulaire)
Soit Λ définie sur ℝ par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} -t+1 \; si 0 < t < 1 \\ t+1 \quad si -1 < t \leq 0 \\ 0 \qquad si\ |t| > 1 \end{cases}$$

1. Tracer Λ
2. Déterminer et tracer Λ'
3. Appliquer la transformée de Fourier et en déduire que Λ'(t) = $\Pi\left(t+\frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t-\frac{1}{2}\right)$(somme de deux portes)
4. En déduire que : $2i\pi vF(v) = \frac{Sin(\pi v)}{\pi v}\left(e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}\right)$
5. En déduire que F(v) = $\left(\frac{Sin(\pi v)}{\pi v}\right)^2$

5°/ Théorème de Parseval

Théorème important : L'énergie d'un signal est conservée par la transformation de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \; = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(v)|^2 dv$$

Exemple : En appliquant le théorème de Parseval à la fonction $f(t) = \Pi(t)$, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^2 dt = \pi$

III/ CONVOLUTION

1°/ Rappel

Le produit de convolution de deux signaux f et g est un signal noté $f * g$ par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t - x)dx$$

2°/ Convolution et transformée de Fourier

On admettra sans démonstration : **La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit de leurs transformées.**

Propriété :

$$\mathbf{T_F(f * g) = T_F(f) \times T_F(g)}$$
$$\mathbf{T_F(f \times g) = T_F(f) * T_F(g)}$$
$$\mathbf{{T_F}^{-1}(f * g) = {T_F}^{-1}(f) \times {T_F}^{-1}(g)}$$
$$\mathbf{{T_F}^{-1}(f \times g) = {T_F}^{-1}(f) * {T_F}^{-1}(g)}$$

On retiendra que la transformation de Fourier échange produit algébrique et produit de convolution.

Exemple : Démontrer en utilisant les propriétés précédentes que $\Lambda = \Pi * \Pi$

Cas particulier : convolution par un Dirac

On sait que $T_F(\delta) = 1$ d'où $T_F(f * \delta) = T_F(f) \times T_F(\delta) = T_F(f)$

On en déduit que $f * \delta = f$

On retrouve le résultat obtenu au cours précédent sur la convolution : **L'impulsion de Dirac est l'élément neutre dans la convolution**

Plus généralement :

$T_F(f * \delta_a) = T_F(f) \times T_F(\delta_a)$ or $T_F(\,\delta_a) = \boldsymbol{e^{-2i\pi\nu a}}$

Donc $T_F(f * \delta_a) = T_F(f) \times \boldsymbol{e^{-2i\pi\nu a}} = \boldsymbol{e^{-2i\pi\nu a}} T_F(f)$

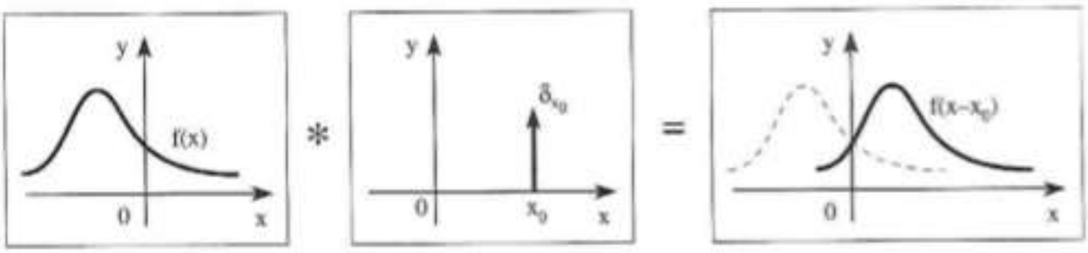
Or d'après la propriété sur le retard,

$T_F(f(t-a)) = e^{-2i\pi\nu a} T_F(f)$

D'où $T_F(f(t-a)) = T_F(f * \delta_a)$

Ainsi $\boxed{f(t-a) = (\,f * \delta_a)(t)}$

On peut illustrer ce résultat par la figure :



Résumé des propriétés :

TRANSFORMATION DE FOURIER

BUT RT **R314**

Signal f(t)	Transformée de Fourier F(v)
$\mathbf{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v)e^{2i\pi vt}dv}$	$\mathbf{F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi vt}dt}$
Symétrie : F(t)	f(-v)
Parité : F est paire F est impaire	$\mathbf{F(v) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi vt)\,dt}$ $\mathbf{F(v) = 2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi vt)\,dt}$
Linéarité : $\alpha f + \beta g$	α F(v)+β G(v)
Dilatation temporelle : f(at)	$\boldsymbol{\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{v}{a}\right)}$
Décalage temporel = déphasage fréquentiel : f(t-a)	$\boldsymbol{e^{-2i\pi va}F(v)}$
Déphasage temporel = décalage fréquentiel : $\boldsymbol{e^{2i\pi at}f(t)}$	F(v-a)
Dérivation temporelle $\boldsymbol{f'(t)}$ $\boldsymbol{f^{(n)}(t)}$	 $\boldsymbol{2i\pi vF(v)}$ $\boldsymbol{(2i\pi v)^nF(v)}$
Dérivation fréquentielle -2iπtf(t)	F'(v)
Produit de convolution : $\boldsymbol{f * g}$ $\boldsymbol{f \times g}$	 $\boldsymbol{F \times G}$ $\boldsymbol{F * G}$

Résumé plus simple des propriétés de T_F et T_F^{-1}

TRANSFORMATION DE FOURIER

BUT RT **R314**

Le tableau ci-dessous résume en terme opératoires, les propriétés de transformation de Fourier directe ou réciproque.

On lira :
$t \leftarrow t - a$: « changer t en $t - a$ dans f »
$\times\ 2i\pi v$: « multiplier F par $2i\pi v$ »

T_F	$T_F^{\ -1}$
$+$ $\times\ a$	$+$ $\times\ a$
$t \leftarrow t - a$	$\times\ \boldsymbol{e^{-2i\pi va}}$
$\times\ \boldsymbol{e^{2i\pi va}}$	$v \leftarrow v - a$
$\dfrac{d}{dt}$ $\times\ (-2i\pi t)$	$\times\ 2i\pi v$ $\dfrac{d}{dv}$
$*$ $\times$	$\times$ $*$