SLAM14讲—04李群与李代数

4.1李群李代数基础

4.1.1群

群是一种集合加上一种运算的代数结构。我们把集合记作A，运算记作·，那么群可以记作G=（A，·）。群要求这个运算满足以下几个条件：

1. 封闭性: $\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \cdot a_2 \in A.$
2. 结合律: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3).$
3. 幺元: $\exists a_0 \in A, \quad s.t. \quad \forall a \in A, \quad a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a.$
4. 逆: $\forall a \in A, \quad \exists a^{-1} \in A, \quad s.t. \quad a \cdot a^{-1} = a_0.$

矩阵中常见的群有：

- 一般线性群GL(n) 指nxn的可逆矩阵，它们对矩阵乘法成群
- 特殊正交群SO(n) 也就是所谓的旋转矩阵群，其中SO(2)和SO(3)最为常见
- 特殊欧式群SE(n) 也就是前面提到的n维欧式变换，如SE(2)何SE(3)
  李群是指具有连续（光滑）性质的群。

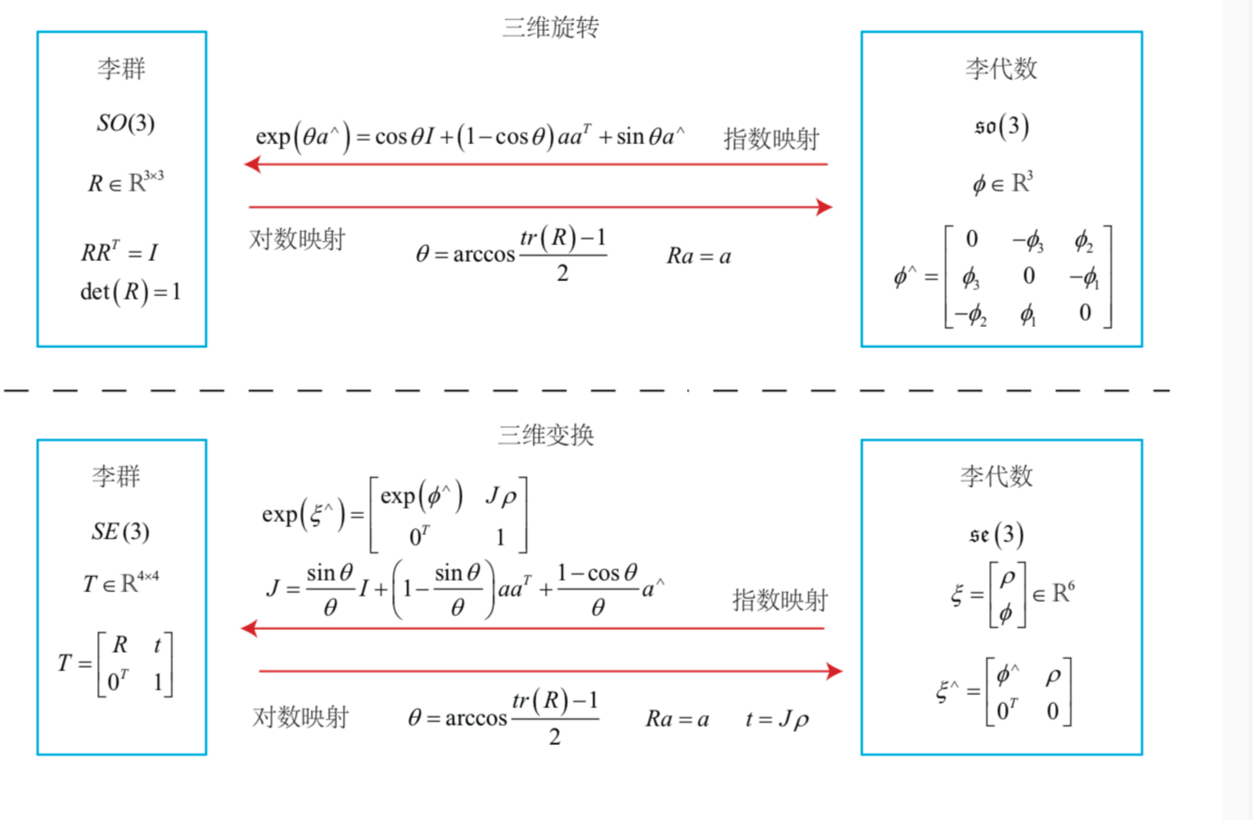

图 4-1 $SO(3), SE(3), \mathfrak{so}(3), \mathfrak{se}(3)$ 的对应关系。

4.3李代数求导与扰动模型

4.3.2SO(3)李代数上的求导

在SLAM中，我们要估计一个相机的位置和姿态，该位姿由SO(3)上的旋转矩阵或SE(3)上的变换矩阵描述的。设某个时刻机器人的位姿为T。它观察到了一个世界坐标位于**p**的点，产生了一个观测数据**z**。那么有坐标变换关系知：**z=Tp+w**
然而由于观测噪声**w**的存在，**z**往往不可能精确地满足**z=Tp**的关系。所以，可以得到误差：**e=z-Tp**
假设一共有N个这样的路标点和观测，于是就有N个上式。那么，对机器人的位姿估计，想到于是寻找一个最优的T，使得整体误差最小：

$$\min_{\boldsymbol{T}} J(\boldsymbol{T}) = \sum_{i=1}^{N} \left\| \boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{T}\boldsymbol{p}_i \right\|_2^2 . \qquad (4.39)$$

我们经常会构建与位姿有关的函数，然后讨论该函数关于位姿的导数，以调整当前的估计值。

- 用李代数解决求导问题的思路有两种：
  - 1.用李代数表示姿态，然后对根据李代数加法来对李代数求导。
  - 2.对李群左乘或右乘微小扰动，然后对该扰动求导，称为左扰动和右扰动模型。
- SO(3)求导
  对**R**进行一次扰动△**R**。以左扰动为例。设左扰动△**R**对应的李代数为**φ**，然后对**φ**求导：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} &= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{\exp(\boldsymbol{\varphi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&\approx \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{(1+\boldsymbol{\varphi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}^\wedge\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{-(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge .
\end{aligned}$$

- SE(3)上的李代数求导

最后，我们给出 $SE(3)$ 上的扰动模型，而直接李代数上的求导就不再介绍了。假设某空间点 $\boldsymbol{p}$ 经过一次变换 $\boldsymbol{T}$（对应李代数为 $\boldsymbol{\xi}$），得到 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}$[1]。现在，给 $\boldsymbol{T}$ 左乘一个扰动 $\Delta \boldsymbol{T} = \exp\left(\delta \boldsymbol{\xi}^\wedge\right)$，我们设扰动项的李代数为 $\delta \boldsymbol{\xi} = [\delta \boldsymbol{\rho}, \delta \boldsymbol{\phi}]^T$，那么：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}\right)}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} &= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\exp\left(\delta \boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&\approx \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\left(\boldsymbol{I} + \delta \boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\delta \boldsymbol{\xi}^\wedge \exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\phi}^\wedge & \delta \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t} \\ 1 \end{bmatrix}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\phi}^\wedge\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}\right) + \delta \boldsymbol{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}}{\delta \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}\right)^\wedge \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \triangleq \left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}\right)^\odot.
\end{aligned}
$$

我们把最后的结果定义成一个算符 $\odot$[2]，它把一个齐次坐标的空间点变换成一个 4×6 的矩阵。

[1] 请注意为了使乘法成立，$\boldsymbol{p}$ 必须使用齐次坐标。

4.4实践：Sophus（具体见slam/ch4/useSophus)

```
#include "sophus/so3.h"
#include "sophus/se3.h"
```