巧題妙解法：二階線性遞迴

國立臺中文華高中 數學科 陳瑋岳老師

在數列與級數單元，會學到一般常見簡單的遞迴關係式，求一般項的方法，常用累加法，或累乘法。如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$→用累加法，如 $a_{n+1}=a_n\times f(n)$→用累乘法，如 $a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+\beta$（其中 $\alpha\neq 1$ 且 $\beta\neq 0$）→變形成 $a_{n+1}-k=\alpha(a_n-k)$，再用累乘法。但若遇到像費伯納西（*Fibonacci*）數列 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$（其中 n 為自然數），要如何求一般項呢？以下示範一個簡單的例題，來解這類的二階線性遞迴式。

題目：$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$（其中 n 為自然數），試求 $a_n=$______。（以 n 表示）

【$\dfrac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$】

解一：$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n\Rightarrow a_{n+2}-ka_{n+1}=(2-k)a_{n+1}+3a_n$

希望取適當的 k，使得 $\dfrac{1}{2-k}=\dfrac{-k}{3}$，即 $k^2-2k-3=0$，可得 $k=3$ 或 $k=-1$

若取 $k=-1$，則 $a_{n+2}+a_{n+1}=3(a_{n+1}+a_n)=3^2(a_n+a_{n-1})=\cdots=3^n(a_2+a_1)=2\cdot 3^n$

若取 $k=3$，則 $a_{n+2}-3a_{n+1}=(-1)(a_{n+1}-3a_n)=(-1)^2(a_n-3a_{n-1})=\cdots=(-1)^n(a_2-3a_1)=(-2)\cdot(-1)^n$

解聯立方程式 $\begin{cases}a_{n+2}+a_{n+1}=2\cdot 3^n\\ a_{n+2}-3a_{n+1}=(-2)\cdot(-1)^n\end{cases}$，得 $a_{n+1}=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$，

因為 a_1 亦滿足 $a_1=\dfrac{3^0+(-1)^0}{2}$，所以 $a_n=\dfrac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$，對任意自然數 n 皆成立。

解二：（其實是解一的精簡版而已）

先解 $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$ 的特徵方程式 $x^2=2x+3$，得兩個特徵根 $x=-1$ 或 $x=3$，

因此可令 $a_n=a\times 3^n+b\times(-1)^n$，帶入 $a_1=1$，$a_2=1$，解聯立方程式

$\begin{cases}3a-b=1\\ 9a+b=1\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(\frac{1}{6},-\frac{1}{2})$，得 $a_n=\dfrac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$。

解三：(利用矩陣) [對角化，這部分需要大學的線性代數的知識。]

因為$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$，所以$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$，

令 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，先求特徵方程式$\det\left(A-xI\right)=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & -x \end{vmatrix}=0\Rightarrow x=-1$或$x=3$

分別得兩個特徵向量$\overrightarrow{v_1}=\left(3,1\right)$及$\overrightarrow{v_2}=\left(-1,1\right)$，存在可逆矩陣$P=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，

使得$A=P\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1}\Rightarrow A^n=P\begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & \left(-1\right)^n \end{bmatrix}P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 3^{n+1}+\left(-1\right)^n & 3^{n+1}+3\left(-1\right)^{n-1} \\ 3^n+\left(-1\right)^{n-1} & 3^n+3\left(-1\right)^n \end{bmatrix}$，

所以$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{3^{n+1}+\left(-1\right)^{n+1}}{2} \\ \dfrac{3^n+\left(-1\right)^n}{2} \end{bmatrix}$，可得$a_{n+1}=\dfrac{3^n+\left(-1\right)^n}{2}$

因為a_1亦滿足$a_1=\dfrac{3^0+\left(-1\right)^0}{2}$，所以$a_n=\dfrac{3^{n-1}+\left(-1\right)^{n-1}}{2}$，對任意自然數 n 皆成立。

解四：(利用生成函數)

[幾何級數]
對於任何實數 x，若$\lvert x\rvert<1$，則
$1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$

令 $f\left(x\right)=a_1x+a_2x^2+\cdots$，則

$f\left(x\right)-2x\cdot f\left(x\right)-3x^2\cdot f\left(x\right)$

$=\left(a_1x+a_2x^2+\cdots\right)-2x\left(a_1x+a_2x^2+\cdots\right)-3x^2\left(a_1x+a_2x^2+\cdots\right)$

$=a_1x+\left(a_2-2a_1\right)x^2+\left(a_3-2a_2-3a_1\right)x^3+\left(a_4-2a_3-3a_2\right)x^4+\cdots$

$=a_1x+\left(a_2-2a_1\right)x^2+0\cdot x^3+0\cdot x^4+\cdots=x-x^2$，

$f\left(x\right)\cdot\left(1-2x-3x^2\right)=x-x^2\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{x-x^2}{1-2x-3x^2}=\dfrac{x\left(1-x\right)}{\left(1+x\right)\left(1-3x\right)}=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-3x}\right)$，

其中$\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-\left(-x\right)}=1+\left(-x\right)+\left(-x\right)^2+\cdots$且$\dfrac{1}{1-3x}=1+\left(3x\right)+\left(3x\right)^2+\cdots$，

所以，$f\left(x\right)=\dfrac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(-x\right)^{n-1}+\left(3x\right)^{n-1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}+\left(-1\right)^{n-1}}{2}\cdot x^n$，且因為$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_nx^n$，

故，$a_n=\dfrac{3^{n-1}+\left(-1\right)^{n-1}}{2}$，對任意自然數 n 皆成立。

如果遇到特徵方程式的根是重根呢？簡單舉以下類題示範。

題目：$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$（其中 n 為自然數），試求 $a_n=$________。（以 n 表示）

【$\dfrac{3\cdot 2^n-n\cdot 2^n}{4}$】

解一：

$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n\Rightarrow a_{n+2}-ka_{n+1}=\left(4-k\right)a_{n+1}-4a_n$

希望取適當的 k，使得 $\dfrac{1}{4-k}=\dfrac{-k}{-4}$，即 $k^2-4k-4=0$，可得 $k=2$ (重根)

取 $k=2$，則 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-2a_n\right)=2^2\left(a_n-2a_{n-1}\right)=\cdots=2^n\left(a_2-2a_1\right)=\left(-1\right)\cdot 2^n$

$a_{n+2}=2a_{n+1}+\left(-1\right)\cdot 2^n$，因此可條列下列各式

$$\begin{aligned}
a_{n+2}&=2a_{n+1}+\left(-1\right)\cdot 2^n\\
2a_{n+1}&=2^2a_n+\left(-1\right)\cdot 2^n\\
2^2a_{n+1}&=2^3a_n+\left(-1\right)\cdot 2^n\\
&\vdots\\
2^na_2&=2^{n+1}a_1+\left(-1\right)\cdot 2^n
\end{aligned}$$

相加可得 $a_{n+2}=2^{n+1}a_1+\left(n+1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot 2^n$，即 $a_{n+2}=2^{n+1}+\left(n+1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot 2^n$

但因為 $a_1=2^0+0\cdot\left(-1\right)\cdot 2^{-1}$ 且 $a_2=2^1+1\cdot\left(-1\right)\cdot 2^0$ 亦成立，

所以 $a_n=2^{n-1}+\left(n-1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot 2^{n-2}=\dfrac{3\cdot 2^n-n\cdot 2^n}{4}$，對任意自然數 n 皆成立。

解二：（其實是解一的精簡版而已）

先解 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ 的特徵方程式 $x^2=4x-4$，得兩個特徵根 $x=2$ (重根)，

因此可令 $a_n=a\cdot 2^n+b\cdot n\cdot 2^{n-1}$，帶入 $a_1=1$，$a_2=1$，解聯立方程式

$\begin{cases}2a+b=1\\4a+4b=1\end{cases}\Rightarrow\left(a,b\right)=(\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{2})$，得 $a_n=\dfrac{3\cdot 2^n-n\cdot 2^n}{4}$。

更多思考練習題

*Ex*1. 費氏數列 $a_1=1$， $a_2=1$， $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ （其中 n 為自然數），

試求 $a_n=$______。（以 n 表示）

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

*Ex*2. 甲與乙玩一個遊戲，在每一回合甲贏乙的機率為 p，乙贏甲的機率為 $1-p$，遊戲一開始甲有 a 元，B 有 b 元，在每一回合裡，輸家要給贏家 1 元，如果任何一人將對方贏光，則遊戲停止，則甲最終會將乙贏光的機率為何？ (*keyword*: 醉漢走路、隨機過程)

*Ex*3. 正 n 邊形的 n 個頂點皆為固定位置，用 k 種顏色塗這 n 個頂點，但相鄰的任兩個頂點不同顏色，則塗完之後有多少種情況。