

2018 年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題

參考解答

2017 年 12 月 24 日 上午 10:00 ~ 12:00

說明: 本試題共兩頁七題, 每題七分。

請將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。

答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。

答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入 0。

- 一、(7分) 已知梯形  $ABCD$  內接於圓  $O$ ,  $AB \parallel CD$ , 過點  $D$  作圓的切線交  $CA$  的延長線於點  $F$ , 且  $DF \parallel BC$ . 若  $CA = 5$ ,  $BC = 4$ . 試問: 線段  $AF$  的長 =  $\frac{\textcircled{1}\textcircled{2}}{\textcircled{3}}$

(化為最簡分數)

Ans.  $\frac{80}{9}$ .

- 二、(7分) 設  $k, x, y$  均為正整數, 且  $k$  被  $x^2, y^2$  整除所得的商分別為  $n, (n + 148)$ .

- (1) (3分) 若  $(x, y) = 1$  (即,  $x, y$  互質), 試問:  $k$  的值。答:  $\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{6}\textcircled{7}\textcircled{8}\textcircled{9}$ .

Ans.  $k = 467856$ .

- (2) (4分) 若  $(x, y) = 4$ , (即  $x, y$  的最大公因數為 4), 試問:  $k$  的值。答:  $\textcircled{10}\textcircled{11}\textcircled{12}\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}$ .

Ans.  $k = 7485696$ .

- 三、(7分) 已知正整數  $a, b$  滿足

$$\sqrt{\frac{ab}{2b^2 - a}} = \frac{a + 2b}{4b}.$$

試問:  $|10(a - 5)(b - 15)| + 8$  之值。答:  $\textcircled{17}\textcircled{18}\textcircled{19}\textcircled{20}$ .

Ans. 2018.

- 四、(7分) 將  $1 \sim 16$  這 16 個正整數隨機地填入  $4 \times 4$  棋盤的 16 個格子中 (每格填寫一數)。試問: 使每行、每列填數之和皆為偶數的機率為多少? 答:  $\frac{\textcircled{21}\textcircled{22}}{\textcircled{23}\textcircled{24}\textcircled{25}\textcircled{26}}$ .

Ans.  $\frac{41}{2145}$ .

- 五、(7分) 設

(i)  $a_1, a_2, a_3$  成等差數列,  $a_1 + a_2 + a_3 = 18$ ;

(ii)  $b_1, b_2, b_3$  成等比數列,  $b_1 b_2 b_3 = 64$ .

若  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$  是正整數且成等比數列。

試問:  $a_3$  的最大值。答:  $\frac{\textcircled{27}\textcircled{28}\textcircled{29} + \textcircled{30}\sqrt{\textcircled{31}\textcircled{32}}}{\textcircled{33}}$ .

Ans.  $\frac{111 + 9\sqrt{97}}{2}$ .

六、(7分) 設  $ABCD$  是單位正方形,  $E, F$  分別是  $CD, BC$  的中點,  $AE$  交對角線  $BD$  於點  $P$ .  $AF$  分別交  $BD, BE$  於點  $Q, R$ . 試問: 四邊形  $PQRE$  的面積。答:  $\frac{34}{35 \cdot 36}$ .

Ans.  $\frac{2}{15}$

七、 參加大型團體表演的學生共 240 名, 他們面對教練站成一排, 自左至右按 1, 2, 3, 4, 5... 依次報數。教練要求全體學生記住各自所報的數, 並做下列動作:

先讓報的數是 3 的倍數的同學向後轉; 接著讓報的數是 5 的倍數的同學向後轉;

最後讓報的數是 7 的倍數的同學向後轉。

試問:

(1) (2分) 此時還有多少名同學面對教練? 答  $37 \cdot 38 \cdot 39$ .

Ans. 136

(2) (5分) 面對教練的同學中, 自左至右第 66 位同學所報的數是多少? 答  $40 \cdot 41 \cdot 42$ .

Ans. 118