第二節 簡易遞迴數列的解法

在前一節中我們以實際的問題出發，依據題設條件構造一個數列$\langle a_n \rangle$並建立相鄰項間的遞迴關係。本節我們將介紹幾種常見的遞迴關係，解其遞迴方程式，求出一般項 a_n (用 n 表示)。

第一型：$a_{n+1} = a_n + f(n)$

若一數列$\{ a_n \}$滿足$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + f(n) \quad (n = 1,.2,3,...) \end{cases}$，其中 $f(n)$式 n 的已知函數，a 爲常數，則由遞迴相加可得 a_n 之通項 $a_n = a + f(1) + f(2) \ + \cdots + f(n\text{-}1)$。

[例題1] 已知數列＜a_n＞定義爲 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n$，則 $a_n=$__________。

[解答]：n^2-n+1

【詳解】

因爲已知關係式 $a_{k+1}-a_k=2k$，$k\in N$

分別將 k 以 1，2，3，⋯，$(n-1)$代入上式，可得

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=2\\
&a_3-a_2=4\\
&a_4-a_3=6\\
&\ \vdots\\
+)\ &a_n-a_{n-1}=2(n-1)，n\geq 2
\end{aligned}$$

將上面各式相加，則得

$a_n-a_1=2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=n(n-1)$，$n\geq 2$

$\therefore a_n=n^2-n+1$，$n\geq 2$⋯⋯(※)

但是 $n=1$ 代入(※)也成立，故此數列的第 n 項 $a_n=n^2-n+1$，對於任意自然數都成立。

[練習題]

1. 已知數列＜a_n＞滿足，$a_1 = 1$，$a_n - a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n \cdot a_{n+1}$，則 $a_n=$__________。

   [解答]：$\dfrac{2}{n(n+1)}$

2. 設 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n} + \dfrac{1}{4}, n \in N$，求 a_n。

   [解答]：$\dfrac{1}{4}(n-1)^2 + \sqrt{2}(n-1) + 2$

第二型：$a_{n+1}=a_n\times f(n)$

若一數列$\{ a_n \}$滿足$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot f(n) \quad (n = 1,.2,3,...) \end{cases}$，其中 $f(n)$式 n 的已知函數，a 爲常數，則由遞迴相乘可得 a_n 之通項 $a_n=a\times f(1) \times f(2) \times\ldots\times f(\text{n-1})$

[例題2] 已知數列＜a_n＞滿足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n\cdot(\frac{1}{3})^n$，則 $a_3=$______，數列的一般項 a_n 為______。

[解答]：$\frac{1}{27},(\frac{1}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【詳解】：

$$a_2=a_1(\frac{1}{3})^1,a_3=a_2(\frac{1}{3})^2=a_1(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^2=(\frac{1}{3})^3$$

$$\Rightarrow a_n=a_{n-1}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=a_{n-2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=\cdots=a_1\cdot(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^2\cdots(\frac{1}{3})^{n-2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=(\frac{1}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

[練習題]

1. 設數列＜a_n＞之首項 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$，，則 $a_n=$________。

   [解答]：$a_n=n$

2. 設 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{5a_n+3}{a_n+3},b_n=\frac{a_n-3}{a_n+1},n\in N$，求數列<$b_n$>前 n 項之和。

   [解答]：$-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})$

第三型：$a_{n+1}=pa_n+q$

若一數列{a_n}滿足 $\begin{cases}a_1=a\\a_{n+1}=pa_n+q\ (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$，其中 a，p，q 均為與 n 無關的常數，求 a_n 之通式。

(1) p=1 時，即表以 q 為公差的等差數列，其通項公式為 $a_n=a+(n-1)q$

(2) $p\neq1$，其通項公式為 $a_n=\frac{q}{1-p}+(a-\frac{q}{1-p})p^{n-1}$

【證明】

(1)當 $p=1$ 時，知 $a_n=a_{n-1}+q$

則 $<a_n>$ 為等差數列，首項為 a，公差為 q　故 $a_n=a+(n-1)q$。

(2)當 $p\neq1$ 時

希望化成 $(a_n-s)=p(a_{n-1}-s)$

比較係數得 $s-ps=q$，故 $s=\frac{q}{1-p}$　可得 $(a_n-s)=p(a_{n-1}-s)=\cdots=p^{n-1}(a_1-s)$

則 $a_n=s+(a_1-s)p^{n-1}=\frac{q}{1-p}+(a-\frac{q}{1-p})p^{n-1}$。

[例題3] (1)數列{a_n}中，$a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+2$，則 $a_n=$________.

(2)承上，$\lim_{n\to\infty}a_n=$________.

[解答]：(1)$2-\frac{1}{2^{n-1}}$，(2)2

【詳解】　$a_1=1$

$2a_{n+1}=a_n+2\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

設$(a_{n+1}-\alpha)=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)\Rightarrow \alpha=2$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & a_2-2=\frac{1}{2}(a_1-2)\\
& a_3-2=\frac{1}{2}(a_2-2)\\
& \quad\vdots\\
\times\quad & a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)\\
\hline
& a_n-2=(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot(-1)
\end{aligned}$$

$\therefore a_n=2-(\frac{1}{2})^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

[例題4] 設一數列$\langle a_n\rangle$定義如下，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+2a_n}$，試求 a_n 的一般項及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值。

[解答]：(1) $a_n=\dfrac{1}{2-\frac{3}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

【詳解】

首先因爲

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+2a_n}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1+2a_n}{2a_n}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a_n}$

因此令 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，則右式可表爲 $b_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}\cdot b_n$

又因爲數列$\langle b_n\rangle$可表成 $b_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}\cdot(b_n-2)$，

所以$\langle b_n-2\rangle$是首項爲 $b_1-2=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$ 而公比爲 2 的等比數列。

於是 $b_n-2=(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot(b_1-2)=(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot(-\frac{3}{2}).\therefore b_n=2+(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot(-\frac{3}{2})$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{2-\frac{3}{2}\cdot 2(\frac{1}{2})^{(n-1)}}$

故所求一般項爲 $a_n=\dfrac{1}{2-\frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}}$，$n\in N$，其次，計算極限如下 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2-\frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}}=\dfrac{1}{2}$

[練習題]

1. 第一節中河內塔問題的遞迴關係式為 $a_n = 2a_{n-1}+1$，$a_1 = 1$，求一般項公式 a_n。

[解答]：$a_n = 2^n - 1,\ n \in N$

2. 設一數列$<a_n>$定義如下，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{4+3a_n}$，試求 a_n 的一般項。

[解答]：$a_n=\dfrac{2}{5\times(2)^{n-1}-3}$

第四型：觀察 → 歸納 → 猜想 → 證明

[例題5] 已知一數列$<a_n>$定義為 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$，$n=1，2，3，\cdots$。

(1)求 a_2，a_3，a_4。
(2)觀察(1)的規則性，並推測第 n 項 a_n(以 n 表示之)。
(3)證明在(2)中所推測之結果。
[解答]：
(1)因為 $a_1=1$，由所予遞迴定義可得

$a_2=\dfrac{3a_1-1}{4a_1-1}=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3a_2-1}{4a_2-1}=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{3a_3-1}{4a_3-1}=\dfrac{4}{7}$

(2)由 $a_1=\dfrac{1}{1}$，$a_2=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{4}{7}$，$\cdots$

觀察數列$<a_n>$的規則性如下

a_n 的分子成等差數列，首項為 1，公差為 1；分母也成等差數列，首項為 1，公差為 2

故可推測第 n 項 $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，$\forall n \in N$

(3) 【證明】①當 $n=1$ 時，$a_1=\dfrac{1}{2\cdot 1-1}$顯然成立

②假設 $n=k$ 時原式成立，即設 $a_k=\dfrac{k}{2k-1}$成立

則當 $n=k+1$ 時，因為 $a_{k+1}=\dfrac{3a_k-1}{4a_k-1}=\dfrac{3\cdot\dfrac{k}{2k-1}-1}{4\cdot\dfrac{k}{2k-1}-1}=\dfrac{k+1}{2(k+1)-1}$

所以當 $n=k+1$ 時原式也成立　。

故由①，②及數學歸納法可知對於所有自然數 n，$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$ 恆成立。

[練習題]

1. 已知一數列$<a_n>$定義為 $a_1=a$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$，$n=1，2，3，\cdots$。

(1)求 a_2，a_3，a_4，a_5。
(2)觀察(1)的規則性，並推測第 n 項 a_n(以 n 表示之)。
(3)證明在(2)中所推測之結果。
[解答]：

(1)$a_2=\dfrac{2a}{1+a}$，$a_3=\dfrac{4a}{1+3a}$，$a_4=\dfrac{8a}{1+7a}$，$a_5=\dfrac{16a}{1+15a}$　(2) $a_n=\dfrac{2^{n-1}a}{1+(2^{n-1}-1)a}$　(3)略

2. 設$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$，$(n,a_n,b_n$都是正整數)

試證：(1) $(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ (2) $(2+\sqrt{3})^n$展開式的整數部分為奇數。

第五型：$a_{n+1}=c_1a_n+c_2a_{n-1}$ (二階線性齊次遞迴數列)

遞迴關係式：$a_{n+1}=c_1a_n+c_2a_{n-1}$…….(*)，$n\geq 2$，其中 $c_2\neq 0$，一般項 a_n 的求法。

假設透過裂項的方法可將遞推式變形成為

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

的形式，那麼，$(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 就成為以 $a_2-\alpha a_1$ 為首項，β 為公比的等比數列。

比較 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ 與 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=0$ 二式

得 $\alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2$

即α,β為二次方程式 $x^2=c_1x+c_2$ 的二個根，而這個式子稱為原遞推式的特徵方程式，α,β稱為特徵根。

解二次方程式(特徵方程式)：$x^2=c_1x+c_2$ 的兩根為α、β。

(1)若α、β為兩相異實數，則可以找到 A，B 使得 $a_n=\mathrm{A}\alpha^n+\mathrm{B}\beta^n$ 。

(2)若α、β為兩相等實數，則可以找到 A，B 使得 $a_n=(\mathrm{A}+n\mathrm{B})\alpha^n$ 。

【證明】(1) 若α、β為兩相異實數：

(*)可化成 $\Rightarrow a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta a_{n-1}$，$\because \alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2$

從上式可得：

$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$………..①

$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})$………..②

由① 利用累乘的方法可得： $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$ …………③

由② 利用累乘的方法可得： $a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$…………..④

④ −③ $\Rightarrow (\alpha-\beta)a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

$$\Rightarrow a_n=\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}+\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n=\mathrm{A}\alpha^n+\mathrm{B}\beta^n，\mathrm{A}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}，\mathrm{B}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\right)。$$

這裡的 A、B 為待定的常數與 a_1、a_0 有關。

反之，$a_n=\mathrm{A}\alpha^n+\mathrm{B}\beta^n$ 亦滿足(*)式，其中 A、B 為任意常數

直接計算 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=(\mathrm{A}\alpha^{n+1}+\mathrm{B}\beta^{n+1})-c_1(\mathrm{A}\alpha^n+\mathrm{B}\beta^n)-c_2(\mathrm{A}\alpha^{n-1}+\mathrm{B}\beta^{n-1})$

$$=A\alpha^{n-1}(\alpha^2-c_1\alpha-c_2)+B\beta^{n-1}(\beta^2-c_1\beta-c_2)=0$$

故得證。

(2)若α、β爲兩相等實數

由① $a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha(a_n-\alpha a_{n-1})$ 利用累乘的方法可得：$\alpha^{n-1}a_2-\alpha^n a_1=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

而由 $a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

$$\alpha a_n-\alpha^2 a_{n-1}=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

$$\alpha^2 a_{n-1}-\alpha^3 a_{n-2}=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

$$\vdots$$

$$\alpha^{n-1}a_2-\alpha^n a_1=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

⇒得 $a_{n+1}-\alpha^n a_1=n\cdot\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$…..⑤

由⑤ $a_{n+1}=\alpha^n a_1+(\dfrac{a_2}{\alpha}-a_2)n\alpha^n=(A+nB)\alpha^n$。$A=a_1$，$B=(\dfrac{a_2}{\alpha}-a_2)$

反之，對於任意的實數 A,B，$a_n=(A+nB)\alpha^n$ 亦滿足(*)。

因爲$\alpha=\beta$ ，$\alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2\Rightarrow c_1=2\alpha$，$c_2=-\alpha^2$

直接計算 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=[A+(n+1)B]\alpha^{n+1}-c_1(A+nB)\alpha^n-c_2[A+(n-1)B]\alpha^{n-1}$

$$=A(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+Bn(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+B(\alpha^{n+1}+c_2\alpha^{n-1})$$

$$=A\cdot0+Bn\cdot0+B\alpha^{n-1}(\alpha^2-\alpha^2)=0$$

故得證。

[例題6] 已知費布納西(*F*ibo*n*acci)數列＜F_n＞滿足$\begin{cases}F_1=F_2=1\\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\end{cases}$，求此數列的一般項 a_n。

【解答】費布納西(*F*ibo*n*acci)數列＜F_n＞對應的特徵方程式是

$x^2-x-1=0$。其解爲 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 。

所以可設一般項 $F_n=c_1\times(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+c_2\times(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

將$F_1=1, F_2=1$的條件代入，得

$$c_1\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+c_2\times(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=1$$

$$c_1\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+c_2\times(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2=1$$

解得 $c_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$c_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。所以 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$。

[例題7] 已知數列＜a_n＞滿足$a_1=3, a_2=0$且$a_n-6a_{n-1}+9a_{n-2}=0$，則數列的一般項 a_n 爲______。

【解答】 所給數列的對應的特徵方程式是 $x^2-6x+9=0$ 解得二重根 $x_1=x_2=3$。

所以可設一般項 $a_n=(c_1+c_2n)\times 3^n$ 。

將 $a_1=3, a_2=0$ 代入，得

$$(c_1+c_2)\times 3=3$$

$$(c_1+2c_2)\times 3^2=0$$

解得 $c_1=2$，$c_2=-1$ 。所以 $a_n=(2-n)\times 3^n$ 。

[練習題]

1. 已知數列＜a_n＞滿足 $a_1=3, a_2=93$ 且 $a_n-10a_{n-1}+21a_{n-2}=0$，求此數列的一般項 a_n。

2. 若 $\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+b_n & (1) \\ b_{n+1}=-a_n+b_n & (2) \end{cases}$，且初始條件是 $a_1=14$ ，$b_1=-6$。求兩遞迴數列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通項公式。

3. 已知費布納西(*F*ibo*na*cci)數列＜F_n＞滿足 $\begin{cases} F_1=F_2=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}$，

   證明：

   (1)對於任意正整數 m， $F_{n+m}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n$.

   (2)對於任意正整數 m, n，若 m 整除 n，則 F_m 也整除 F_n 。

習 題 二

A 類

1. 求下列遞迴關係式所決定的一般項公式。

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \quad (n = 2,3,4,...) \end{cases}$ $(a_n = n^2)$

(2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \quad (n = 1,2,3,4,\ldots) \end{cases}$ $\left(a_n = n^3\right)$

(3) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ na_n = (n-1)a_{n-1} + 2 \quad (n = 2,3,4,\ldots) \end{cases}$ $(a_n = 2 - \frac{1}{n})$

(4) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n-1} - a_n = na_{n-1}a_n \quad (n = 2,3,4,\ldots) \end{cases}$ $(a_n = \frac{2}{n(n+1)})$

2. 求下列遞迴關係式所決定的一般項公式。

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)a_n \quad (n = 1,2,3,4,\ldots) \end{cases}$ $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$

(2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n 2^n \quad (n = 1,2,3,4,\ldots) \end{cases}$ $\left(a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$

3. 求下列遞迴關係式所決定的一般項公式。

(1)設數列$\{a_n\}$滿足$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1,2,3,4,\ldots) \end{cases}$，求其一般項公式。

$(a_n = 2^n - 1)$

(2)設數列$\{a_n\}$滿足$\begin{cases} a_{a1} = 1 \\ na_{n+1} = (n+1)a_n - 2 \quad (n = 1,2,3,4,\ldots) \end{cases}$，求其一般項公式。

$(a_n = 2 - n)$

(3)設數列$\{a_n\}$滿足$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + (-1)^{n+1} \quad (n = 2,3,4,\ldots) \end{cases}$，求其一般項公式。

$\left(a_n = \frac{1}{3}\left[2^n - (-1)^n\right]\right)$

4. 遞迴數列$\{a_n\}$滿足下列條件，求一般項a_n。

(1) $\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 1 \\ 2a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1} \end{cases}$ $(n = 2,3,4,...)$ （$a_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-2}$）

(2) $\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 1 \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \end{cases}$ $(n = 3,4,5,...)$ （$a_n = \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n]$）

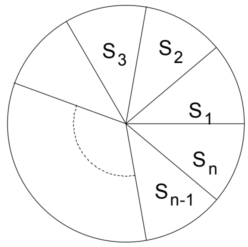
(3) $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2 \\ a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0 \end{cases}$ $(n = 1,2,3,4,...)$ （$a_n = 2^n$）

(4) $\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 1 \\ a_{n+2} = \frac{3}{5}a_{n+1} + \frac{2}{5}a_n \end{cases}$ $(n = 1,2,3,4,...)$ （$a_n = \frac{5}{7}[1 - (-\frac{2}{5})^{n-1}]$）

5. 用紅、白、藍三色將$1 \times n$棋盤上的方格塗色，對於$n = 1, 2, 3, \cdots,$令a_n表示沒有兩相鄰方格都塗紅色的個數，求一般項公式a_n。

（$a_n = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$）

6. （著色問題）地圖上某一地區有n個國家相鄰，但n個國家只有一個公共點（如圖）。現用紅，黃，綠三種顏色給地圖染色，但使相鄰的國家顏色不同。令a_n表示滿足上述染色規則的方法數，求一般項公式a_n。（$a_n = 2^n + (-1)^n \cdot 2$）



7. 若數列$< a_n >$滿足$a_1 = \frac{1}{7}$，$a_2 = \frac{3}{7}$及$a_{n+1} = \frac{7}{2}a_n(1 - a_n)$（$n \geq 1$），則$a_{101} - a_{100}$ =__________。

8. 設數列$< a_n >$，$a_1 = 2$，$a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$，$n \in N$，
(1)求出數列的前四項，再由此推測一般項a_n。
(2)用數學歸納法證明(1)的結果。

9. 已知費布納西(*F*ibo*n*acci)數列$< F_n >$滿足$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$，利用數學歸納法，求證：

$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$，$\forall n \in \mathrm{N}$.

B 類

10. 五隻猴子分桃子，老大先把桃子均分成五堆，然後把剩餘的一個扔掉，自己拿走了五堆中的一堆，老二把剩下來的再均分成五堆，又扔掉剩餘的一個，自己拿走了這五堆中的一堆，以後，每隻猴子來了都是如此辦理，問原來至少有多少個桃子？最後至少有多少個桃子？

11. 數列$\{a_n\}$由公式 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n + 1 = \dfrac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}\right) \end{cases}$，$n = 1,2,\ldots$定義,求$a_n$的一般項公式。

12. 若數列{ a_n }由$a_1 = 1, 4a_n a_{n+1} = (a_n + a_{n+1} - 1)^2$, $a_n > a_{n-1}$確定,求{ a_n }的通項公式.

13. 數列{ F_n }定義如下： $F_1 = 1, F_2 = 2.$ 對任何$n \in N$, 有$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

求證對任何$n \in N$,均有$\sqrt[n]{F_{n+1}} \geq 1 + \dfrac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$.(1997 年聖彼得堡數學選拔賽試題)

14. 對於 0<a<1，定義$\begin{cases} a_1 = 1 + a, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + a,\ n = 1,\ 2,\ 3,\cdots \end{cases}$，求證對所有正整數$n$，都有$a_n > 1$。

(1979 加拿大數學競賽)

15. 已知數列＜a_n＞,＜b_n＞滿足$a_0 = 1, b_0 = 0$且$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3, & (1) \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4. & (2) \end{cases}$ n＝1，2，3，…

試證a_n ($n = 0,1,2,\cdots.$)是完全平方數。(2000 年大陸全國高中數學聯賽試題)

16. 設q爲任意正實數, 而$a_n(n = 1,2,\cdots)$爲實數. $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + q$, 且對於所有自然數k, 均有

$(1)\dfrac{a_{2k-1}}{a_{2k-2}} = \dfrac{a_{2k}}{a_{2k-1}}$;

$(2)a_{2k} - a_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k}$.

求證對每個給定的正實數q, 總能找到自然數N, 使得$n > N$時, 總有$a_2 > 1994$。

〔1994 年澳大利亞數學競賽題〕