# 2014年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題

2013年 12 月 8 日

**說明: 本試題共一頁七題, 每題七分。**
**將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。**
**答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。**
**答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入**0.

一、(7分) 類似於平面座標系將西洋棋盤 $8 \times 8$ 的方格標記, 從左下方格 $(1,1)$ 直到右上爲 $(8,8)$. 將 21 支 $1 \times 3$ 的長方型放置在棋盤上。(長方型的方格與棋盤的方格大小一致, 放置時可以水平或垂直, 不重疊也不超出, 而且彼此方格要對齊。) 如果西洋棋盤方格 $(a,b)$ 是成功放置之後所留下的唯一空格, 稱之爲虧格。試問下列數字之和

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots = \underline{①②③},$$

其中 $(a_i, b_i)$ 是所有可能的虧格; 如果沒有任何虧格存在, 請填答 "000". Ans. 036.

二、(7分) 已知二項式係數 $\binom{111}{14}$ 是一個 18 位數: $210227xyz943268675$, 其中的三個數字 $xyz$ 因油漬汙染而看不清楚。試問 $x + z = \underline{④⑤}$. Ans. 10

三、(7分) 給定一直角三角形 ABC, 其中 $\angle B = 90°$. 在邊 $\overline{BC}$ 上取一點 $M$ 使得 $\overline{AB} = \overline{BM} = 12, \overline{DM} \parallel \overline{AB}$. 又點 $N$ 爲 $\overline{BM}$ 的中點且 $\angle ADN = \angle BAD$.
試問: 三角形 $DNM$ 的面積=$\underline{⑥⑦}$. Ans. 24

四、(7分) 設 $x_0$ 爲方程式 $x^3+3x^2+6x+20=0$ 的實根, $y_0$ 爲方程式 $y^3+6y^2+15y-2=0$ 的實根。試問 $x_0 + y_0 = \underline{⑧⑨}$. Ans. $-3$

五、(7分) 考慮滿足以下條件的正整數數列 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$:

(i) $a_{10} \le 50$;

(ii) 對所有的 $k = 1, 2, \cdots, 9$, 不等式 $a_{k+1} - a_k \ge k$ 均成立。

請問共有幾組數列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$ 滿足上述條件? 答 $\underline{⑩⑪⑫⑬}$. Ans. 1001

六、(7分) 某班有 15 位男同學、17 位女同學舉行冬季旅遊活動, 要在營火晚會時大家手牽手圍成一圈唱歌。令隨機變數 $X$ 的取值爲男女同學牽到手的對數。例如: 如果男生、女生都連續排在一起, 則 $X = 2$. 在每一種環狀排列出現的機率均等的情況下, 試問 $X$ 的期望值等於多少?(化爲最簡分數) 答 $\underline{\frac{⑭⑮⑯}{⑰⑱}}$. Ans. $\frac{510}{31}$

七、(7分) 已知存在兩組以上的整數數對 $(a,b,c)$ 滿足 $a \le b \le c$ 且

$$a + b + c = -3,\ a^3 + b^3 + c^3 - 20(a+3)(b+3)(c+3) = 2013.$$

試問 $3a + b + 2c = \underline{⑲⑳㉑}$. Ans. $-14$

$(a,b,c) = (-9,-1,7), (-8,0,5)$