

◆數學歸納法◆

自然數是人類最早認識的數，它有兩個作用：**一是計數，二是排序**。因此相應的自然數理論有自然數的“基數理論”和“序數理論”兩種。十九世紀中葉，在數學公理化思想潮流影響下，皮亞諾（G. Peano）在西元 1889 年建立了自然數的序數理論，這個理論是以兩個不加定義的概念——“集合”、“後繼”為基礎，透過一組公設來刻畫。

自然數關於順序的基本性質。

這一組公設包含自然數的五條公理，稱為皮亞諾公理：

- (1) 存在自然數 1。
- (2) 每個自然數 a ，有一個後繼元素 a' 。（如果 a' 是 a 的後繼元素，則 a 叫做 a' 的生成元素）
- (3) 自然數 1 無生成元素。
- (4) 如果 $a' = b'$ ，則 $a = b$ 。
- (5) 歸納公理：

設 S 是由某些自然數組成的集合，如果

(i) $1 \in S$ 。

(ii) 若 $a \in S$ ，則 $a' \in S$ 。

那麼， S 含有一切的自然數。

其中“1”與“自然數”也是不定義的原始概念。適合這五條公理的集合叫做自然數集，記做 N 。

數學歸納法是皮亞諾的第五條公理——歸納公理，延伸出來的一個原理（公理），無需證明，但“數學歸納法”與“良序原則”是等價的。

“良序原則”（Well ordering principle）是指：設 S 是 N 的非空子集，則 S 含有最小元素。（即存在 $a_0 \in S$ ，使得 S 中所有元素 $a \geq a_0$ ）