2016年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題

2015 年 12 月 6 日

說明: 本試題共二頁, 七題, 每題七分。
將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。
答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。
答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入 0.

一、(7分) 已知 a, b, c, d 均爲偶數, 且 $0 < a < b < c < d$, $d - a = 90$. 若 a, b, c 成等差數列, b, c, d 成等比數列。試求 $a + b + c + d$ 之值。答: ①②③

Ans. 194

二、(7分) 將二項式係數 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$ 視爲一數列。當 $n \le 2016$ 時 (此處 n 爲正整數) , 其中各項均爲奇數的數列共有 ④⑤ 組。

Ans. 10

三、(7分) 已知四邊形 $ABCD$ 內接於圓 O, AB 是直徑, $AD = DC$, 分別延長 BA, CD 交於點 E, $BF \perp EC$ 與 EC 的延長線交於點 F. 若 $AE = AO$, $BC = 6$, 試問線段 CF 的長爲 $= \dfrac{⑥\sqrt{⑦}}{⑧}$ 。(請寫成最簡分數)

Ans. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

四、已知函數 $f(x)$ 在開區間 $(-1, 1)$ 上有意義, $f(\dfrac{1}{2}) = -1$, 且滿足 $x, y \in (-1, 1)$ 時, 有

$$f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy}).$$

(1) (2分) 數列 $\{x_n\}$ 滿足

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n^2},\ n = 2, 3, \cdots.$$

設 $a_n = f(x_n)$, 試問: $a_{10} =$ ⑨⑩⑪⑫

Ans. $a_{10} = -512$

(2) (5分) 設 $b_n = n^2 + 3n + 1$. 試問:
$1 + f(\dfrac{1}{b_1}) + f(\dfrac{1}{b_2}) + \cdots + f(\dfrac{1}{b_{2016}}) + f(\dfrac{1}{2018}) =$ ⑬⑭
Ans. 00

五、(7分) 有一個三角形, 其三個邊長都是正整數, 且它們的最大公因數爲 1. 若此三角形的內切圓剛好將某一條中線三等分, 則這個三角形的周長爲 ⑮⑯。

Ans: (5 + 10 + 13 =) 28

六、(7分) 設集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. A 中有 $\underline{⑰⑱⑲⑳}$ 個子集合, 含有三個或三個以上的連續整數。

Ans: 2391

七、(7分) 一袋中有若干藍色球與若干紅色球, 總球數落在 2000 至 5000 之間。假設每球被抽出的機率皆相同。已知: 同時由袋中抽出兩球, 兩球都是藍色球的機率恰爲 $\frac{1}{2}$, 則此袋中藍色球共有 $\underline{㉑㉒㉓㉔}$ 顆。

Ans: 2871 (註: 袋中紅色球有 1189 顆, 共 4060 顆球。)