# 间断有限元方法的算法设计与应用

鲁硕

lushuo@zju.edu.cn

信息与计算科学
浙江大学

2024 年 3 月 1 日

# 研究背景与意义

- 半导体是一种电导率在绝缘体至导体之间的物质或材料．半导体器件利用此特性在电子技术、清洁能源、制造业和自动化等许多领域具有重要意义．半导体宏观数学模型则是现代半导体工业的重要研究课题之一，它不仅为为半导体材料、微电子配件等相关领域的许多技术问题提供了理论上必要的解释，提供对器件行为和性能的预测和分析，利于半导体材料开发和优化．
- LDG 算法具有良好的 h-p 自适应性，出色的并行效率，因为它们在本质上是非常局部的．此外，这些方法具有优秀的可证明非线性稳定性．

# 介绍

- 基础符号 $I_j=(x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}), j=1,2,\cdots,N$ 是计算域 I 的一个划分. $\Delta x_j=x_{j+\frac{1}{2}}-x_{j-\frac{1}{2}}, x_j=\frac{1}{2}(x_{j-\frac{1}{2}}+x_{j+\frac{1}{2}}), h=\max\{\sup_j \Delta x_j\}$. 有限维计算空间 $V_h=V_h^k=\{z: z|_{I_j}\in P^k(I_j)\}$. 定义 $(u_h)^+_{j+\frac{1}{2}}=u_h(x^+_{j+\frac{1}{2}})$ 和 $(u_h)^-_{j+\frac{1}{2}}=u_h(x^-_{j+\frac{1}{2}})$. 用 $[u_h]_{j+\frac{1}{2}}=(u_h)^+_{j+\frac{1}{2}}-(u_h)^-_{j+\frac{1}{2}}$ 和 $(\bar{u}_h)_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}((u_h)^+_{j+\frac{1}{2}}+(u_h)^-_{j+\frac{1}{2}})$ 来表示 $u_h$ 在每个单元边界点的跳跃和平均值.

# 空间离散方法 I

DG 法就是想找到 $V_h$ 一组基的系数，进而得到解．考虑简单的问题

$$\begin{cases} u_x = f, 0 \le x \le 1 \\ u(0) = a, \end{cases}$$

$\int_{I_j} v u_x = \int_{I_j} v f$ 由分步积分得

$$-\int_{I_j} u v_x \mathrm{d}x + u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}} = \int_{I_j} v f \mathrm{d}x$$

假设 u 是准确解，$u_h$ 是数值解．对于任意可微的 v 上述等式都成立．对上式求解得到的解就是数值解，也就是上式可以写作

$$-\int_{I_j} u_h v_x \mathrm{d}x + u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}} = \int_{I_j} v f \mathrm{d}x$$

# 空间离散方法 II

为了将 DG 法适用于含有高阶空间导数的方程，如

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

令 $v = u_x$ 得到

$$u_t - v_x = 0, \tag{2}$$

$$v - u_x = 0. \tag{3}$$

LDG 法的想法是找到 $u_h, v_h \in V_h$ 使得 $\forall w, z \in V_h$，我们有

$$\int_{I_j} u_t w dx + \int_{\mathrm{I_j}} \mathrm{v_h w_x dx} - \widehat{\mathrm{v}}_{\mathrm{j+1/2}} \mathrm{w}^{-}\mathrm{j} + 1/2 + \widehat{\mathrm{v}}_{\mathrm{j-1/2}} \mathrm{w}^{+}\mathrm{j} - 1/2 = 0, \tag{4}$$

$$\int_{I_j} v_h z dx + \int_{I_j} u_h z_x dx - \hat{u}_{j+1/2} z^-_{j+1/2} + \hat{u}_{j-1/2} z^+_{j-1/2} = 0. \tag{5}$$

其中 $\hat{u}_{j+1/2} = 1/2(u^-_{j+1/2} + u^+_{j+1/2}), \hat{v}_{j+1/2} = 1/2(v^-_{j+1/2} + v^+_{j+1/2})$.

# 总变差不增龙格库塔法 (TVD RK) I

离散情况下的总变差是

$$TV(u^n) = TV(u(\cdot, t^n)) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|$$

其中 $u_j^n = u(x_j, t^n)$.
TV 不增，即

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n).$$

RK 通常有形式

$$u^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1}(a_{ik}u^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} L(u^{(k)})), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$
$$u^{(0)} = u^n, \quad u^{(m)} = u^{n+1}.$$

# 总变差不增龙格库塔法 (TVD RK) II

## 引理

当 $a_{ik} \geq 0, \beta_{ik} \geq 0$，RK 法(6)在 CFL 条件下是 TVD，其中 $CFL = \min_{i,k} \frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} \Delta t$，即

$$\Delta t \leq CFL \Delta t_1 \tag{7}$$

## 最优三阶 TVD RK 法

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\
u^{(2)} &= \frac{1}{2} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta L(u^{(1)})), \\
u^{n+1} &= \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)}).
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_{ik} \geq 0, \beta_{ik} \geq 0$，CFL=1.

# IMEX RK 法 I

该方法的想法是隐性处理线性扩散部分，显性处理非线性耦合漂移项来节省计算成本，同时依然追求无条件稳定性，即时间步长可以取小于给定常数的任意值.

# DD 模型 I

DD(drift-diffusion) 模型

## DD 模型

$$n_t - (\mu E n)_x = \tau\theta n_{xx}, \tag{8}$$

$$\phi_{xx} = \frac{e}{\epsilon}(n - n_d), \tag{9}$$

其中 $x \in (0,1)$，第一个方程具有周期边界条件，势方程 $\phi(0,t) = 0, \phi(1,t) = v_{bias}$ 具有 Dirichlet 边界条件．泊松方程(9)是电势方程，$E = -\phi_x$ 代表电场．
在系统(8)-(9)，未知变量是电子浓度 n 和电势 $\phi$．$m_0$ 是电子有效质量，k 是 Boltzmann 常数，e 是电子电荷，$\mu$ 是迁移率，$T_0$ 是晶格温度，$\tau = \frac{m_0\mu}{e}$ 是松弛参数，$\theta = \frac{k}{m_0}T_0$，$\epsilon$ 是节电常数，$n_d$ 是掺杂，这是一个给定的函数．

# DD 模型 II

令 $q=\sqrt{\tau\theta}n_x$，因此等式(8)可以写作

$$n_t-(\mu En)_x-\sqrt{\tau\theta}q_x=0, \tag{10}$$

$$q-\sqrt{\tau\theta}n_x=0, \tag{11}$$

$$E_x=-\frac{e}{\epsilon}(n-n_d), \tag{12}$$

$$E=-\phi_x. \tag{13}$$

# DD 模型 III

用测试函数 $v, w, r, z \in V_h^k$ 分别乘以上述方程，再对所有包含空间导数的部分进行公式化的分部积分来得到

$$\int_{I_j} n_t v \mathrm{dx} + \int_{\mathrm{I_j}} (\mu \mathrm{E} \mathrm{n} + \sqrt{\tau\theta}\mathrm{q}) \mathrm{v_x} \mathrm{dx}$$

$$-(\mu E n + \sqrt{\tau\theta} q)_{j+\frac{1}{2}} v^-_{j+\frac{1}{2}} + (\mu E n + \sqrt{\tau\theta} q)_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} = 0, \tag{14}$$

$$\int_{I_j} q w \mathrm{dx} + \int_{\mathrm{I_j}} \sqrt{\tau\theta} \mathrm{n} \mathrm{w_x} \mathrm{dx} - \sqrt{\tau\theta} \mathrm{n}_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}} \mathrm{w}^-_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}} + \sqrt{\tau\theta} \mathrm{n}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}} \mathrm{w}^+_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}} = 0, \tag{15}$$

$$-\int_{I_j} E r_x \mathrm{dx} + \mathrm{E}_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}} \mathrm{r}^-_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}} - \mathrm{E}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}} \mathrm{r}^+_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}} = -\frac{\mathrm{e}}{\epsilon} \int_{\mathrm{I_j}} (\mathrm{n} - \mathrm{n_d}) \mathrm{r} \mathrm{dx}, \tag{16}$$

$$\int_{I_j} E z \mathrm{dx} - \int_{\mathrm{I_j}} \phi \mathrm{z_x} \mathrm{dx} + \phi_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}} \mathrm{z}^-_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}} - \phi_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}} \mathrm{z}^+_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}} = 0, \tag{17}$$

其中 $j = 1, \cdots, N$, $v, w, r, z \in V_h$.

# DD 模型 IV

## DD 另一种 LDG 格式

$$
\begin{aligned}
&\int_{I_j} \left(n^h\right)_t v dx + \int_{I_j} \left(\mu E^h n^h + \sqrt{\tau\theta} q^h\right) v_x dx \\
&\quad - \left(\mu \widehat{E^h n^h} + \sqrt{\tau\theta} \hat{q}^h\right)_{j+\frac{1}{2}} v^-_{j+\frac{1}{2}} + \left(\mu \widehat{E^h n^h} + \sqrt{\tau\theta} \hat{q}^h\right)_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} = 0,
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\int_{I_j} q^h w dx + \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} n^h w_x dx - \sqrt{\tau\theta} \hat{n}^h_{j+\frac{1}{2}} w^-_{j+\frac{1}{2}} + \sqrt{\tau\theta} \hat{n}^h_{j-\frac{1}{2}} w^+_{j-\frac{1}{2}} = 0, \tag{19}
$$

$$
E^h_x = \tilde{E}^h_x = -\frac{e}{\varepsilon}\left(n^h - n_d\right), \tag{20}
$$

$$
E^h = \tilde{E}^h - v_{\text{bias}} = \int_0^x -\frac{e}{\varepsilon}\left(n^h - n_d\right) dx + E_0 - v_{\text{bias}}, \tag{21}
$$

其中，$E_0 = E^h(0) = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{e}{\varepsilon}\left(n^h - n_d\right) ds\right) dx$．这里的“hat”表示数值通量．

# HF 模型 I

## HF 模型

$$n_t + J_x = 0, \quad x \in (0,1), \tag{22}$$

$$\phi_{xx} = \frac{e}{\epsilon}(n - n_d). \tag{23}$$

Poisson 电场方程(23)带有周期边界条件，其中 $J = J_{hyp} + J_{vis}$，而

$$J_{hyp} = -\mu n E + \tau\mu\left(\frac{e}{\varepsilon}\right) n(-\mu n E + \omega)$$

$$J_{vis} = -\tau\left(n\left(\theta + 2\mu^2 E^2\right)\right)_x + \tau\mu E(\mu n E)_x.$$

这里，$\omega = (\mu n E)|_{x=0}$ 取常数．未知量与 DD 模型中相同：电子浓度 $n$ 和电势 $\phi$．

# HF 模型 II

定义 $C_1=\frac{\tau\mu e}{\varepsilon}$， $C_2=\frac{\tau\mu^2 e}{\varepsilon}=\mu C_1$ 和 $C_3=\frac{\tau\mu e\omega}{\varepsilon}=\omega C_1$，
$q=\sqrt{\tau\theta+\tau\mu^2E^2}n_x=\left(\sqrt{\tau\theta+\tau\mu^2E^2}n\right)x-\left(\sqrt{\tau\theta+\tau\mu^2E^2}\right)xn$，我们可以将方程 (22) 改写为以下系统

$$n_t+\left(-\left(3C_2En_d+\mu E-C_3\right)n+2C_2En^2-\sqrt{\tau\theta+\tau\mu^2E^2}q\right)_x=0, \tag{24}$$

$$q=\left(\sqrt{\tau\theta+\tau\mu^2E^2}n\right)_x-\left(\sqrt{\tau\theta+\tau\mu^2E^2}\right)_x n. \tag{25}$$

# HF 模型 III

我们分别用测试函数 $v, w \in V_h^k$ 乘以方程 (24)-(25)，并对涉及空间导数的所有项进行形式上的分部积分，得到以下弱形式

$$\int_{I_j} n_t v dx + \int_{I_j} (3C_2 E n_d + \mu E - C_3) n v_x dx - (3C_2 E n_d n + \mu E n - C_3 n)_{j+\frac{1}{2}} v^-_{j+\frac{1}{2}}$$
$$+ (3C_2 E n_d n + \mu E n - C_3 n)_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} - \int_{I_j} 2C_2 E n^2 v_x dx + 2C_2 \left(E n^2\right)_{j+\frac{1}{2}} v^-_{j+\frac{1}{2}} - 2C_2 \left(E n^2\right)_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}}$$
$$+ \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 E^2} q v_x dx - \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 E^2} q\right)_{j+\frac{1}{2}} v^-_{j+\frac{1}{2}} + \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 E^2} q\right)_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} = 0 \tag{26}$$

$$\int_{I_j} q w dx + \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 E^2} n w_x dx + \int_{I_j} \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 E^2}\right)_x n w dx$$
$$- \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 E^2} n\right)_{j+\frac{1}{2}} w^-_{j+\frac{1}{2}} + \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 E^2} n\right)_{j-\frac{1}{2}} w^+_{j-\frac{1}{2}} = 0. \tag{27}$$

# HF 模型 IV

将上述方程中的精确解 $n, q$ 替换为它们在 $V_h^k$ 中的数值近似 $n^h, q^h$，注意到数值解 $n^h$ 和 $q^h$ 在单元边界上不连续，然后将单元边界上的项替换为合适的数值通量，我们得到 LDG 格式：

$$
\begin{aligned}
&\int_{I_j} n_t^h v dx + \int_{I_j} \left(3C_2E^h n_d + \mu E^h - C_3\right) n^h v_x dx \\
&- \left(3C_2E^h n_d + \mu E^h - C_3\right)_{j+\frac12} \hat{n}^h_{j+\frac12} v^-_{j+\frac12} + \left(3C_2E^h n_d + \mu E^h - C_3\right)_{j-\frac12} \hat{n}^h_{j-\frac12} v^+_{j-\frac12} \\
&- \int_{I_j} 2C_2E^h \left(n^h\right)^2 v_x dx + 2C_2 \left(\widehat{E^h \left(n^h\right)^2}\right)_{j+\frac12} v^-_{j+\frac12} - 2C_2 \left(\widehat{E^h \left(n^h\right)^2}\right)_{j-\frac12} v^+_{j-\frac12} \\
&+ \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 \left(E^h\right)^2} q^h v_x dx \\
&- \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 \left(E^h\right)^2} \hat{q}^h\right)_{j+\frac12} v^-_{j+\frac12} + \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 \left(E^h\right)^2} \hat{q}^h\right)_{j-\frac12} v^+_{j-\frac12} = 0,
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\int_{I_j} q^h w dx + \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 \left(E^h\right)^2} n^h w_x dx + \int_{I_j} \left(\sqrt{\tau\theta + \tau\mu^2 \left(E^h\right)^2}\right)_x n^h w dx \tag{29}
$$

# 误差分析 I

由于篇幅限制，具体证明过程此处不列出.

- DD 模型 LDG 格式

## 定理

设 $n, q$ 是问题(8)-(9)的精确解，具有足够光滑且有界导数．设 $n^h, q^h$ 是半离散 *LDG* 格式(18)-(19)的数值解，并将相应的数值误差记为 $e_u = u - u_h (u = n, q)$．如果有限元空间 $V_h^k$ 是 $k \geq 1$ 次分段多项式，则对于足够小的 $h$，有以下误差估计成立：

$$\left\| n - n^h \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\| q - q^h \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C h^{k+\frac{1}{2}}$$

其中常数 $C$ 依赖于最终时间 $T$、$k$、$\|n\|_{L^\infty(0,T;H^{k+1})}$、$\|n_x\|_{0,\infty}$、$\|n_d\|_{0,\infty}$.

# 误差分析 II

- HF 模型 LDG 格式

## 定理

设 $n, q$ 是问题 (24)-(25)的精确解，具有足够光滑且有界导数．设 $n^h, q^h$ 是半离散 *LDG* 格式 (28)-(28)的数值解，并将相应的数值误差记为 $e_u = u - u_h (u = n, q)$．如果有限元空间 $V_h^k$ 是 $k \geq 2$ 次分段多项式，则对于足够小的 $h$，有以下误差估计成立：

$$\left\|n - n^h\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\|q - q^h\right\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}}$$

其中常数 $C$ 依赖于最终时间 $T$、$k$、$\|n\|_{L^\infty(0,T;H^{k+1})}$、$\|n_x\|_{0,\infty}$、$\|n_d\|_{0,\infty}$ 以及导数 $|a'|$ 和 $|b'|$ 的界．

# 误差分析 III

- DD 模型三阶 IMEX LDG 格式

## 定理

令 $n^m, q^m$ 是问题 (14)-(17)在时间层级 *m* 的精确解，它们足够光滑且有有界导数．令 $n_h^m, q_h^m$ 是三阶 *IMEX LDG* 格式．如果有限元空间 $V_h^k$ 是 *k*$(k \geq 0)$ 阶间断多项式，那么对于足够小的 *h*，存在正常数 *C* 与 *h* 无关，使得下列误差估计成立

$$||n - n_h||_{L^\infty(0,T;L^2)} + ||q - q_h||_{L^2(0,T;L^2)} \leq C(h^{k+1} + (\Delta t)^3) \tag{31}$$

其中 *C* 依赖于最终时间 *T*，*k*，反常数 $C_2$，$||n||_{L^\infty(0,T;H^{k+1})}$，$||n_x||_{L^\infty}$ 和 $||E||_{L^\infty}$.

# 误差分析 IV

- DD 模型 Dirichlet 边界条件

## 定理

令 $n, q$ 是问题 (14)-(17)的精确解，它们足够光滑且导数有界．令 $n_h, q_h$ 是半离散 *LDG* 格式的数值解．定义对应的数值误差 $e_h = u - u_h(u = n, q)$．如果有限元空间 $V_h^k$ 是 $k(k \geq 0)$ 阶间断多项式，那么对于足够小的 $h$，下列误差估计成立

$$||n - n_h||_{L^\infty(0,T;L^2)} + ||q - q_h||_{L^2(0,T;L^2)} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \tag{32}$$

其中 $C$ 依赖于最终时间 $T$，$k$，反常数 $C_2$，$||n||_{L^\infty(0,T;H^{k+1})}$，$||n_x||_{L^\infty}$ 和 $||E||_{L^\infty}$．

如果我们选择边界处的数值通量

$$(\hat{q}_h)_{\frac{1}{2}} = (q_h^+)_{\frac{1}{2}} + c_0[n_h]_{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

# 误差分析 V

我们可以得到下列最优误差估计.

$$||n - n_h||_{L^\infty(0,T;L^2)} + ||q - q_h||_{L^2(0,T;L^2)} \leq Ch^{k+1} \tag{34}$$

其中 C 依赖于最终时间 T，k，反常数 $C_2$，$||n||_{L^\infty(0,T;H^{k+1})}$，$||n_x||_{L^\infty}$ 和 $||E||_{L^\infty}$.

# 数值模拟 I

具体参数受限于篇幅省略.

图1描绘出 DD 和 HF 模型的模拟结果，上面两张图片比较了 DD 模型的模拟结果，$\mu = \mu(n_d)$ with $\mu = 0.75$. 下面两张图比较 DD 模型和 HF 模型的结果，$\mu = \mu(n_d)$.

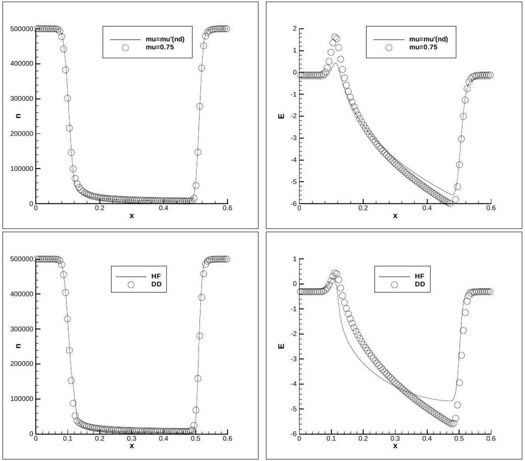


图 1: [0,0.6] with 100 mesh cells. Left: density

# 数值模拟 II

阶 IMEX LDG 方案的模拟结果与 TVD RK 时间离散化的结果以供比较．基选择缩放的 Legendre 多项式基．
数值模拟显示，无论选择 $h$ 的值如何（在 $[0, 0.6]$ 中的 100 或 200 网格单元格），方案都是稳定的．代码在网格细化期间产生数值收敛结果（为节省空间，未显示网格细化结果），正如本文所示的理论结果所预期的．
从表1和表2中，我们可以看到，使用第三阶 IMEX LDG 方案，我们可以使用更大的时间步长，从而显著节省 CPU 时间．IMEX 方案因此是研究像 DD 这样的模型描述正确物理规律的适用性的一个可靠而有效的工具．

表 1: 在 $[0, 0.6]$ 中具有 100 个网格单元的第三阶 RK LDG 和第三阶 IMEX LDG 方法达到稳态所需的时间步长 $\Delta t$，时间步数 $nt$，时间 $t$，和 CPU 时间

| | Third order EX-RK | Third order IMEX | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta t$ | $1.688E-5$ | $1.2E-3$ | $1.8E-3$ | $2.4E-3$ | $3.0E-3$ | $3.6E-3$ |
| $nt$ | 44063 | 711 | 476 | 356 | 286 | 239 |
| $t$ | 0.7436 | 0.8532 | 0.8568 | 0.8544 | 0.8580 | 0.8604 |
| CPU time | 58.8904 | 4.6332 | 3.4008 | 2.5272 | 2.0592 | 1.482 |

# 数值模拟 III

表 2: 在 $[0, 0.6]$ 中具有 200 个网格单元的三阶 RK LDG 法和三阶 IMEX LDG 方法达到稳态所需的时间步长 $\Delta t$，时间步数 $nt$，时间 $t$，和 CPU 时间.

| | Third order EX-RK | Third order IMEX | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta t$ | $4.22\text{E}-6$ | $1.2\text{E}-3$ | $1.8\text{E}-3$ | $2.4\text{E}-3$ | $3.0\text{E}-3$ | $3.6\text{E}-3$ |
| $nt$ | 176081 | 727 | 480 | 360 | 298 | 249 |
| $t$ | 0.7431 | 0.8724 | 0.864 | 0.864 | 0.894 | 0.8964 |
| CPU time | 202.3957 | 7.5349 | 5.5224 | 4.3680 | 3.4476 | 3.276 |

# 数值模拟 IV

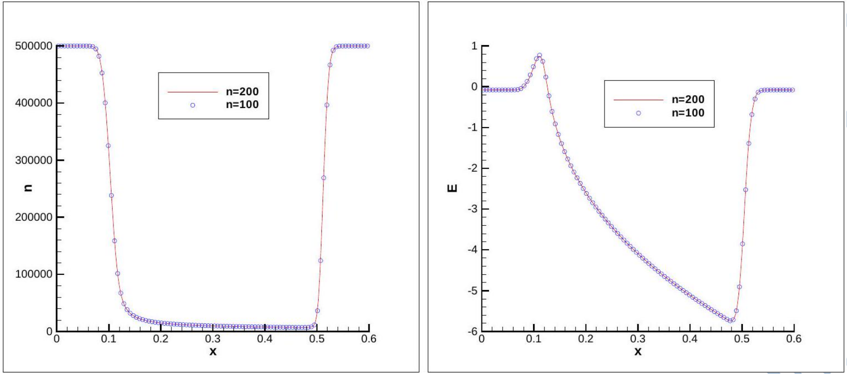


图 2: 在 $[0, 0.6]$ 有 100 或 200 个网格单元，$\Delta t = 1.2E - 3$．左边：密度 $n\left(10^{12}\ \mathrm{cm}^{-3}\right)$；右边：电场 $E$ (V/um)．

# 鸣谢

谢谢！