知网个人查重服务报告单(全文标明引文)

报告编号:BC20240511204627108049915OO 检测时间:2024-05-11 20:46:27

篇名：局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
作者：鲁硕
检测类型：毕业设计
比对截止日期：2024-05-11

检测结果

去除本人文献复制比：11.5% 去除引用文献复制比：10% 总文字复制比：11.5%
单篇最大文字复制比：8.9%（一种平均场博弈的反问题模型）

重复字符数：[3961] 单篇最大重复字符数：[3078] 总字符数：[34494]

7.1%(763)	7.1%(763)	局部间断伽辽金方法的算法设计与应用_第1部分（总10812字）
0.3%(45)	0.3%(45)	局部间断伽辽金方法的算法设计与应用_第2部分（总13247字）
30.2%(3153)	30.2%(3153)	局部间断伽辽金方法的算法设计与应用_第3部分（总10435字）

（注释：无问题部分 文字复制部分 引用部分）

1. 局部间断伽辽金方法的算法设计与应用_第1部分

总字符数：10812

相似文献列表

去除本人文献复制比：7.1%(763) 去除引用文献复制比：5.1%(554) 文字复制比：7.1%(763)

1	09071105-韩伟-对流扩散方程的间断有限元方法的研究	3.2%（349）
	韩伟 - 《大学生论文联合比对库》- 2013-06-04	是否引证：否
2	半导体问题Drift-Diffusion模型的局部间断Galerkin方法	2.3%（252）
	肖红单(导师：刘蕴贤) - 《山东大学硕士论文》- 2022-05-28	是否引证：否
3	Error analysis of the semi-discrete local discontinuous Galerkin method for semiconductor device simulation models	1.2%（133）
	- 《Science China(Mathematics)》- 2010-12-01	是否引证：否
4	计算机-13120184-刘佳晨	0.9%（101）
	计算机 - 《大学生论文联合比对库》- 2017-06-01	是否引证：否
5	Development and comparison of numerical fluxes for LWDG methods.	0.8%（91）
	Jianxian Qiu - 《英文比对库》- 2008-06-15	是否引证：否

原文内容

涉密论文 □ 公开论文 □
本科生毕业论文
题目局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
姓名与学号鲁硕 3200101874
指导教师仲杏慧
年级与专业 2020级信息与计算科学
所在学院数学科学学院
递交日期递交日期局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
浙江大学本科生毕业论文（设计）承诺书
1. 本人郑重地承诺所呈交的毕业论文（设计），是在指导教师的指导下严格按照学校和学院有关规定完成的。

2. 本人在毕业论文（设计）中除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论
文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得浙江大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。
3. 与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确
的说明并表示谢意。
4. 本人承诺在毕业论文（设计）工作过程中没有伪造数据等行为。
5. 若在本毕业论文（设计）中有侵犯任何方面知识产权的行为，由本人
承担相应的法律责任。
6. 本人完全了解浙江大学有权保留并向有关部门或机构送交本论文（设
计）的复印件和磁盘，允许本论文（设计）被查阅和借阅。本人授权浙江大学可
以将本论文（设计）的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编本论文（设计）。
作者签名： 导师签名：
签字日期： 年月日签字日期年月日I
II
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
致谢
III
IV
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
摘要
本文考虑半导体模型中具有光滑解的一维漂移-扩散（DD）模型和一维高场（HF）模型，其中包含一阶导非线性对流项和二阶导线性扩散项，并耦合泊松方程。文中给出了两个模型在局部间断伽辽金（LDG）空间离散耦合全变差不增龙格-库塔法时间离散下的误差估计。此外对于 DD 模型，文中也给出了它关于隐式-显式（IMEX）龙格-库塔法时间离散的误差估计。解决这两个模型的主要难点在于数值解在单元边界处的不连续性，因此需要选择合适的数值通量来处理单元边界处的跳跃。IMEX 法的想法是采用隐式方法处理非线性对流项，采用显式方法处理扩散项。这样做在保证解无条件稳定性的同时减小时间步长，降低计算消耗。最后将给出数值算例来验证文中结论。
关键词：局部间断伽辽金法，半离散，隐式-显式格式，误差估计，半导体
V
VI
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
Abstract
We consider the one-dimensional Drift-Diffusion (DD) model and the one-dimensional high-field (HF) model with smooth solutions in the semiconductor model, which include the first-order derivative nonlinear convection term and the second-order derivative linear diffusion term, and are coupled with the Poisson's equation. The main difficulty in solving both models includes the inter-element jump caused by the discontinuous nature of LDG method, so it is necessary to choose an appropriate numerical flux to handle the jump at the boundary of the element. Error estimates for both models are given under Local Discontinuous Galerkin (LDG) spatial discretization with total variation diminishing (TVD) Runge-Kutta for time discretization. In addition, for the DD model, an error estimate is also given for its implicit-explicit (IMEX) Runge-Kutta time discretization. The idea of the IMEX method is to treat the nonlinear convection term with an implicit method and treat the diffusion term with an explicit method. It reduces the time step size, thus reducing computational consumption, while ensuring the unconditional stability of the solution. Finally, numerical examples are provided to verify the conclusions.
Keywords: Local discontinuous Galerkin method, semi-discrete, implicit-explicit scheme, error estimate, semi-conductor
VII
VIII
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
目录

局部间断伽辽金方法的算法设计与应用

III
IV
第一部分
毕业论文局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
1 绪论
1.1 引言
半导体是一种电导率在绝缘体至导体之间的物质或材料。半导体器件利用此特性在电子技术、清洁能源、制造业和自动化等许多领域具有重要意义。半导体器件模拟则是现代半导体工业的重要研究课题之一。它不仅为为半导体材料、微电子配件等相关领域的许多技术问题提供了理论上必要的解释，还能提供对器件行为和性能的预测和分析，利于半导体材料开发和优化。我们将在本节分别论述：局部间断伽辽金法（LDG）的发展历史；龙格-库塔（RK）的发展历史；对半导体器件数学模型模拟的理论研究历史；最后给出本文的主要工作。
1.2 局部间断伽辽金法的发展历史
在讲解局部间断伽辽金法（LDG）法之前，我们首先介绍 LDG 法的前身间断伽辽金法（DGM）。1973 年，Reed 和 Hill 首次提出间断伽辽金法[1]。之后，Cockburn 等发表了一系列论文极大发展了 DGM，建立了 DGM *解决非线性时间依赖问题的基本框架[1-6]，比如空气动力学的欧拉方程，使用显式非线性稳定的高阶龙格-库塔（RK）时间离散和 DG 空间离散化方法，通过精确或近似的 Riemann 求解器作为界面通量以及全变差有界（TVB）非线性*

限制器，取得了强激波下的非振荡性质。*DGM 在诸多领域中得到了迅速应用*[7]。2010 年，Zhang 和 Shu 给出了龙格-库塔间断伽辽金法（RKDG）在解决标量守恒定律的分析，其中采用三阶显式全变差不增龙格-库塔法进行时间离散，得到了对于一般数值通量的近似最优误差估计和迎风通量的最优误差估计[8]。
因为 DGM 解空间由在单元交界面上不连续的分段多项式组成，不足以处理高阶导数。
这是有限元中的典型“不相容”情况。将 DGM 直接应用于包含二阶导数的热方程可能会得到计算中表现良好但实际上是错误的方法，并且对精确解存在 O(1) 的误差[9-10]。对于包含高阶导数的时间相关偏微分方程，如对流-扩散系统耦合泊松电势方程，局部间断伽辽金
（LDG）方法的想法是将方程重写为一阶系统，然后在该系统上应用 DG 方法。这个方法成功的关键在于正确设计数值通量。这些通量必须保证稳定性和所有引入的用于近似解的导数的辅助变量的局部可解性，。这些辅助变量局部可解性解释了为什么该方法被称为“局部”间断伽辽金法[11]。DGM 可以轻松地设计为任何精度。实际上，精度的阶数可以在每个单元中进行局部确定，这允许高效的 p 自适应性。它容易处理复杂几何和边界条件。它也可以用于任意三角剖分，甚至包括具有悬点的三角剖分，这样可以实现高效的 h 自适应性。由于它的数据交互具有明显的局部性，数值解的更新只需要相邻单元的信息，且不受精度影响。因此 DGM 具有出色的并行效率。此外，这些方法具有优秀的可证明非线性稳定性。
1998 年，Cockburn 和 Shu 首次提出了解决具有二阶导的时间依赖*对流-扩散系统的LDG 法[11]。他们的工作受到了 Bassi 和 Rebay 在可压缩 Navier-Stokes 方程中成功的数值实验的启发*[12]。之后 2002 年，Yan 和 Shu 提出了具有一般 KdV 类型方程的 LDG 法[13]，同年
他们给出了处理含有四阶和五阶空间导数的偏微分方程组的 LDG 方法[14]。2002-2005 年，Eskilsson 和 Sherwin 提出了不连续谱元法来模拟一维线性博欣内斯克方程，离散浅水系统和二维博欣内斯克方程[15-17]。2010 年，Xu 等提出解决高阶时间依赖 PDE 的 LDG 方法[18]，并证明了其好的性质。cockburn 在 2002 年介绍了 LDG 法如何处理斯托克斯系统[19]。2005
年，Bustinza 等给出了对于线性和分线性扩散问题在多边形区域内基于残差的可靠的后验误差估计[20]。2007 年，cockburn 提出解决对流-扩散问题和扩散问题的最小耗散 LDG 法[21]。
2009 年，Burman 和 Stamm 考虑混合形式 LDG 法的最小化稳定问题。2015 年，Wang 和Shu 给出了关于对流扩散问题 LDG 法耦合 IMEX 时间离散的误差估计[22]。
1.3 龙格-库塔的发展历史
许多具有强非线性稳定性的方案，比如全变差有界（TVD）和本质无震荡（ENO），需要结合保持解单调性的时间离散方案，如向前欧拉。但是由于欧拉法精度与高阶空间离散结合将会导致精度丢失，因此保持空间离散稳定性的高阶时间离散逐渐发展[23]，这种方
案被称为 TVDRK 法，现在也叫做强保稳（SSP）龙格-库塔法。部分具有良好性质的三阶TVDRK 法[24]已经应用于了全离散 LDG 法并被分析[25]。这种时间离散在处理对流主导的对流扩散问题表现稳定，高效且准确，但对于非对流主导的对流扩散问题，显式时间离散对时间步长有严格的要求[24]。由于对流扩散问题等偏微分方程含有不同类型的项，其中对流项通常是非线性的，我们更期望使用显式方法来解决非线性对流项，而采用隐式方法处 2
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用理线性扩散项，因此自然我们考虑对两个项分别采用不同的处理方法，隐式-显式（IMEX）

方法应运而生[26]。而如果对对流项和扩散项都使用隐式时间离散，得到的代数系统会不再椭圆，并且许多迭代求解器的收敛性将会受到影响。

现在 IMEX 格式已经被广泛应用于对流-扩散问题的时间离散，特别是于谱方法结合。

1995 年，Ascher 等人对于原型线性对流-扩散方程，给出了一阶到四阶精度多步 IMEX 格

式的稳定性分析，说明了稳定格式对于更广泛的问题可以允许更大的时间步长，证明了在

扩散项强主导和一个合适的基于 BDF 格式被使用时，时间步长有着良好的限制 [27]。1997

年，Ascher 等人继续研究，给出了具有更好的稳定区间的 IMEX RK 法。2001 年，Calvo

构造了三阶和四阶的变步长线性隐式龙格-库塔法来解决对流-反应-扩散方程空间离散得到的半离散方程，并研究了这些方法的稳定性[28]。2003 年，Kennedy 等人研究 additive 龙格-库塔（ARK）法来解决空间离散的一维对流-扩散-反应方程，IMEX 法可以看作 ARK 的特例。2004 年，Pareschi 和 Russo 对于含有刚性松弛系数的守恒双曲系统，采用 SSP 格式处理显式部分，采用 L-稳定 DIRK 处理隐式部分得到了一种新的 IMEX 格式，这种格式被证明具有渐进保持（AP）性。2013 年，Wang 和 Zhang 给出了解决一维 Dirichlet 边界条件线性对流扩散问题的全离散 LDG 算法，通过适当设置数值通量和中间边界条件，得到

了时间和空间上的最优误差估计[24]。2015 年，Wang 和 Shu 等人分析了 LDG 法耦合特定IMEX 时间离散得到的 IMEX LDG 格式的稳定性和误差估计，这种 IMEX LDG 格式对于线性对流-扩散问题具有无条件稳定性，也就是时间步长 t 只要小于某个常数，那么格式就是稳定的[22]。在第二节，我们会给出这篇文章中具体用到的 IMEX 格式，并且在数值算例部分我们的数值实验将验证其无条件稳定性。

1.4 半导体器件模拟的理论研究历史

传统的离散化方法，比如有限体积法[29-32]和有限元法[33-34]过去被用于求解半导体模型。

近年来，关于这类问题的各种数值研究在文献中不断涌现。其中局部间断伽辽金 (LDG) 凭借其高度的 h-p 自适应性、良好并行性、非线性稳定性等，越来越多地被应用到半导体器材模拟上。

2004 年，Liu 和 Shu 使用 LDG 方法处理流体动力模型 (HD) 和能量传输模型 (ET)[35]。

2007 年，Liu 和 Shu 进一步利用 LDG 法模拟了二维 HD 模型[36]。2007 年，Chen 等人研究

了解决半导体器材的流体力学模型和 HF 模型 LDG 方法[37]。2010 年，Liu-Shu 给出了处理

一维 DD 和 HF 模型 LDG 法耦合 TVDRK 法格式[38]。在 DD 模型和 HF 模型中，同时存在

一阶导数对流项和二阶导数扩散（热传导）项，通过 LDG 方法对对流-扩散系统进行空间离散。但该方法仅对电子浓度方程进行离散化，对于电势方程，仍然使用连续方法，以避免在单元边界上出现两个独立解变量的不连续性。此外，由于电子浓度和电场的非线性耦合，当在 LDG 格式中使用 Pk(分段多项式，次数为 k) 时，仅获得了次优误差估计 O(hk+12)。

2016 年，Liu-Shu 继续他们的研究，给出了半离散 LDG 格式与隐式-显式时间离散化 LDG

格式光滑解的最优误差估计[39]。与之前的空间离散方法不同的是，在这篇文章中势能方程

他们也通过 LDG 方法进行空间离散。通过使用 LDG 方法进行统一离散化，充分实现了LDG 方法在简单 h-p 自适应性和并行效率方面的潜力。而 IMEX 格式相较于 TVDRK 格式大大放松了对时间步长的限制，节约了计算消耗。2020 年，Chen 和 Bagci 使用 Gummel

方法对” 解耦” 和” 线性化” 泊松方程耦合静态漂移-扩散方程组成的系统，然后再用 LDG

方法离散得到的方程组[40]。通过与基于有限元和有限体积的模拟软件相比，证明了其准确性。2024 年，Li 等研究了一种弱伽辽金有限元方法，该方法利用 k 次分段多项式近似电子

浓度和电势，同时用 k+1 次分段多项式来离散弱导数空间，最终得到了该方法再关于离散H1范数和标准 L2 范数的最优误差估计。

此外，差分法[41]，混合有限元[42]和虚拟元法[43]也被应用于解决半导体设备模拟模型。

1.5 本文的主要工作

本文主要研究半导体器件中两个重要的模型，它们分别是一维半导体器件的漂移扩散

(DD) 模型和高场 (HF) 模型。二者由泊松-玻尔兹曼方程推导得到，都含有一阶导对流项和二阶导扩散项，都可以通过耦合泊松方程可以用来计算半导体的电势分布和载流子的浓度分布。在本文的分析中，我们假设两个模型都具有光滑解。其中的主要难点在于如何处理数值解在单元边界的跳跃项，非线性和模型之间的耦合问题。第三节，我们将给出本文讨论的 DD 模型，并推导出它的 TVD 半离散 LDG 格式和 IMEX 全离散 LDG 格式，并给出其误差估计；第四节，我们将 HF 模型的方程，并推导出它的弱形式和半离散 LDG 格式；

第五节，我们将给出具体的数值算例，探讨并论证基函数和初值函数的选择，同时证明部

分误差估计的正确性；结论与展望将在第六节给出。 4

局部间断伽辽金方法的算法设计与应用

2 预备知识

在本节，我们将首先给出一些符号和定义，这些符号和定义在后文使用将不再解释，然后我们将简单介绍间断伽辽金方法的动机与想法，最后给出后文中采用的两种龙格-库塔法，全变差不增龙格-库塔法和隐式-显式龙格-库塔法。

2.1 基础符号

本文中我们考虑一维模型并假设计算域为 [a, b]，首先定义 [a, b] 的一个剖分Ij= (xj-1/2, xj+1/2), j = 1, 2, ..., N

其中 a = x1

/2< x

3/2< ... < x

N +1/2= b，N 表示网格数。接着定义

Δxj= xj

+1/2- x

j-1/2, h = max sup
j
Δxj, x
j= (xj
+1/2+ x
j-1/2)/2,
其中 Δxj表示网格大小，h 表示网格长度，x
j表示网格中点。
网格上有限维计算空间 V kh= {v : v|Ij∈ Pk(Ij); 1 ≤ j ≤ N }，其中 Pk(Ij) 表示 Ij上次数不大于 k 的多项式集合。我们的数值解和测试函数都将从 V kh中取得。注意到我们并没
有对 V kh中的元素附加额外的条件，因此 V k
h
中的函数在单元边界节点处不一定是连续的，可以出现跳跃。
为了简化标记，我们分别定义 (uh)+j +1/2
= uh(x+j +1/2
) 和 (uh)-j +1/2
= uh(x-j +1/2
)。此外我们定义 uh在单元边界节点 xj +1/2
的跳跃 [uh]j
+1/2= (uh)+j +1/2
-(uh)-j +1/2
和均值 (uh)j +1/2=
((uh)+j +1/2
+ (uh)-j +1/2)/2。
2.2 逆性质
我们会列出一些有限元空间 V kh逆性质[44]，在之后的误差估计中我们将用到这些结论。
对于任意 v ∈ Vkh，存在与 v 和 h 无关的正常数 Ci使得
||vx|| ≤ C
1h-1||v||, ||v||
Γh≤ C2h-12||v||, ||v||0,∞≤ C3h-d2||v||. (2.1)
其中 d 是空间维数。由于我们考虑的是一维模型，因此本文 d = 1。
2.3 间断伽辽金方法基本理论
在偏微分方程弱形式的理论研究中，我们有以下事实[45]：
• 许多偏微分方程组没有强解但有弱解
• 弱解更容易在线性代数表示
• 即使强解存在，证明弱解存在性再说明其具有强解的性质往往比直接找到一个强解
要简单而本文中的 DD 模型和 HF 模型的强解很难求出，因此我们期望弱化要求，求得一个对于测试函数满足我们真正关心的性质的弱解，这同时也能给我们带来编程上的便利。
求解弱解的想法来源于分布理论：由于偏微分方程组源于物理模型，而我们知道当从实际中提取一个物理模型时，我们往往不需要也难以获得某个精确时间或位置的物理量，而常常采用一小段时间或距离的均值来代替。因此我们处理偏微分方程组时也可以考虑方程的积分。此外考虑实际物理量时只需考虑物理量部分特性，我们也可以只考虑偏微分方程组中未知量与测试函数积分的性质。可以说测试函数正是我们观察物理量的维度。基于这些想法，我们求得弱解的方法是在方程两边乘上测试函数并积分得到弱形式，然后利用
数值方法求解弱形式。以
ut+ f
x= 0 (2.2)
为例，我们在(2.2)两边乘以测试函数 v 并分部积分得到
Ii
utv
hdx -
Ii
f (u)(vh)
xdx + v
hf
x
i+1 2
x
i-12 . (2.3)
这里 f 需要用到相邻单元的值，为了解决这一问题，我们可以采用数值通量^fi +1 2
=^f (uh(x-i +1 2
, t), uh(x+i +1 2

, t))
来代替 f 在单元边界处的值。具体来说，数值通量 ^f 需要满足下列要求：
1. 一致性： ^f(u, u) = f(u)。
2. 连续性： ^f 关于两个变量都是 Lipschitz 连续的。 6
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
3. 单调性： ^f 关于第一个变量单增，关于第二个单减。可以记作 ^f(↑, ↓)。
这些性质将保证间断伽辽金法的稳定性。
现在我们得到弱形式。
Ii
utv
hdx -
Ii
f (u)(vh)
xdx +^fi +1 2
vh(x-i +1 2
) -^fi-12vh(x+i-12) = 0. (2.4)
间断伽辽金法的想法就是找到独一无二的数值解 ukh∈ Vk
h
使得对于任意的测试函数 v ∈
Vkh，弱形式(2.4)都成立。但由于计算空间 V k
h
在单元边界处不连续，我们的数值解 uh无法处理高阶导数。因此对于高阶偏微分方程组，按照上述流程无法整理为形如(2.4)的弱形式，我们需要考虑改进 DGM 来解决这样的高阶偏微分方程组。
2.3.1 局部间断伽辽金法
改进的方法就是局部间断伽辽金法（LDG）。LDG 法的想法是引入一个辅助变量来使得含有高阶偏导的 PDE 降阶为只含一阶导的偏微分方程组，然后在这些一阶偏微分方程组上应用 DGM。
ut= u
xx(2.5)
令 v = ux得到
ut- v
x= 0, (2.6)
v - ux= 0. (2.7)
现在我们可以利用 DGM 来处理该高阶 PDE 了。
2.3.2 限制器
当 DGM 处理含有不连续的解的模型时，特别是对于包含强离散的问题，依然存在数值振荡，因此我们引入有限元方法中的限制器来限制震荡，同时保证全变差稳定性。限制器的想法是先对当前时间层的数值解进行一个预处理，然后再更新至下一个时间层。本文将采用一种实际中常用的满足全变差有界（TVB）的改进后的 minmod 限制器[3]。
对于 Ij上的解 u
h
，首先定义它的平均值
uj= 1
∆xj
Ij
uhdx,然后我们定义
~uj= m(u
h(x-j +1/2
) - uj, ∆
+u
j, ∆-uj),~uj= m(uj- uh(x+j-1/2), ∆+uj, ∆-uj), (2.8)
其中 ∆+和 ∆-是差分算子，定义为
∆+u
j= u
j+1- u
j, ∆-uj= uj- uj -1, (2.9)
minmod 函数 m 定义为
m(a1, ..., a
l) =
a1, |a
1| ≤ M
s min1≤i
≤l|ai|, |a1| ≤ M且s = sign(a1) = · · · = sign(al),

0, 其他, (2.10)
这里面的 TVB 参数 M 选择有多种选择方式，本文采用相对简便的一种[4]
M = 2 3
max
Ω
ux
x, (2.11)
其中 Ω 表示 u 所有驻点的附近的集合。最后我们有
u(
mod)
h
(x-j +1/2
) = uj+ ~u
j, u(
mod)
h
(x+j-1/2) = uj-~uj. (2.12)
上述限制限制器本质上是在满足单元平均值 uj不变的前提下重新计算单元边界处的值。最终，我们能够得到单元平均值以及左右单元边界的值，因此我们可以唯一求出一个 k ≤ 2
的多项式。但是对于 k > 2 的情况需要更复杂的分析，简单地把更二次多项式看作更高次多项式可能会导致损失精度。
2.4 龙格-库塔法案例
龙格-库塔法 (RK) 是一种重要的迭代法。一般的显示龙格-库塔法可以表示为
u(
i) =
i-1
l=0
[αi
,lu(
l)
+ βi
,l∆tL(u(
l)
)], i = 1, ..., m, u(
0)
= un, u
(m)
= un +1 . (2.13)
由 [46]，我们有得到
引理 2.1. 当 ai
k≥ 0, β
ik≥ 0 时，在时间步长 ∆t ≤βikαi
k
∆t1的条件下，龙格-库塔法(2.13)满足全变差不增。 8
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
c A
b
cˆA
b
表 2.1 IMEX 格式的一般形式
特别地对于三阶 TVD RK 法，[46] 给出了最优形式
u(
1)
= un+ ∆tL(u
n),
u(
2) = 1 2
un+ 1 4
u(
1) + 1 4
∆L(u(
1))),

un +1 = 1 3
un+ 2 3
u(
2) + 2 3
∆tL(u(
2)),CF L = 1. (2.14)
在给出本文采用的 IMEX 格式前，我们首先介绍 IMEX 格式的基本形式。根据 [28]，
考虑常微分系统：
dy
dt
= Ly(t, y) + N (t, y), y(t0) = y
0, (2.15)
其中 y = [y1, y
2, ..., y
d]T，L 是一个 d × d 的矩阵，来源于扩散项的空间离散，N(t, y) 来源
于对流项的离散。从时间层 tn到时间层 t
n+1= t
n+ h，我们的求解过程为：
Y1= y
n,
Yi= y
n+ h(
i
j=2
ai
,jLY
j+
i-1
j=1
ˆai
,jN (t
n+ hc
j, Y
j)), 2 ≤ i ≤ s + 1,
yn
+1= y
n+ h(
s+1
i=2
biLY
i+
s+1
i=1
ˆbiN (t
n+ hc
i, Y
i)),
其中 Yj是过程量。定义 A = (a
i,j),ˆA = (ˆa
i,j), bT= [0, b
2, ..., b
s+1],ˆbT= [ˆb
1, ...,ˆb
s+1] 和
cT0
,c2,...,cs+1
，然后我们将 s 阶段 IMEX 格式表示为 Butcher 表表 2.1：在上表中 (A|b) 表示DIRK 法，(ˆA|ˆb) 表示 ERK 法，二者分别应用于对流项和扩散项。
对于一阶 IMEXRK 法，考虑向后欧拉和向前欧拉[26]，它的 Butcher 表如表 2.2所示；L-稳定二阶段二阶精度 DIRK 耦合二阶 ERK 法[26]，Butcher 表如表 2.3所示，其中 γ =
1 - √

2/2, δ = 1 - 1/(2γ)；三阶精度的四阶段 L-稳定对角隐式龙格-库塔（DIRK）耦合四阶段显式龙格-库塔（ERK）法[26]，它们的 Butcher 表如表 2.4所示。

0 0 0
1 0 1
0 1
0 0 0
1 1 0
1 0 .
表 2.2 DIRK 耦合 ERK 得到的二阶 IMEX 格式。左：向后欧拉；右：向前欧拉。
0 0 0 0
γ 0 γ 0
1 0 1 - γ γ
0 1 - γ γ
0 0 0 0
γ γ 0 0
1 δ 1 - δ 0
δ 1 - δ 0 .
表 2.3 DIRK 耦合 ERK 得到的二阶 IMEX 格式。左：DIRK；右：ERK。
0 0 0 0 0 0 1 2 0120 0 0 2 3 016 1 2
0 0 1 2
0 -12 1 2 1 2 0
1 032- 3 2 1 2 1 2 032- 3 2 1 2 1 2
0 0 0 0 0 0 1 2 1 2
0 0 0 0 2 3 11 18 1 18
0 0 0 1 2 5 6 -56 1 2
0 0 114 7 4 3 4 -740 1 4 7 4 3 4 -740 .
表 2.4 DIRK 耦合 ERK 得到的三阶 IMEX 格式。左：DIRK；右：ERK。 10
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
3 DD 模型
本文采用的 DD 模型表示为
nt- (μEn)
x= τ θn
xx, (3.1)
ϕx
x=
e
ϵ
(n - nd), (3.2)
其中 x ∈ (0, 1)，第一个电子浓度方程取周期边界条件，第二个电势方程取 Dirichlet 边界条件：ϕ(0, t) = 0, ϕ(1, t) = vb
ias
。在系统(3.1)-(3.2)中，未知量是电子浓度 n 和电势 ϕ。m0表示电子有效质量，k 是玻尔兹曼常数，e 是电子电荷，μ 代表迁移率，T0是晶格温度， τ =m0
μ
e
是松弛参数， θ =km0T0，ϵ 是介电常量，nd是一个给定的掺杂函数。
3.1 TVDRK LDG 格式
取 q = √

τ θ nx，那么式 3.1可以写作
nt- (μEn)
x- √
τ θ qx= 0, (3.3)
q - √
τ θ nx= 0. (3.4)
而对于泊松方程，本文直接通过积分得到。
令 E = -ϕx表示电势，通过引入辅助变量易证 E 具有周期性[38]。在方程(3.3)-(3.4)两
边分别乘以测试函数 v, w ∈ Vkh，分部积分得到
Ij
ntvdx +
Ij
(μEn + √
τ θ q)vxdx
- (μEn + √
τ θ q)j +1 2
v-
j+1 2
+ (μEn + √
τ θ q)j-12v+j-12= 0, (3.5)
Ij
qwdx +
Ij √
τ θ nwxdx - √
τ θ nj +1 2
w-
j+1 2 + √
τ θ nj-12w+j-12= 0, (3.6)
Ex= -
e
ε
(n - nd) . (3.7)
将上述方程中的精确解 n, q 和 E 替换为它们在 V kh中的数值近似解 nh, qh。由于数值解 nh
和 qh在单元边界上不连续性，将单元边界上的项替换为适当的数值通量，我们得到 LDG
格式：
Ij
(nh)tvdx +
Ij
μEhn
h+ √
τ θ qh
vxdx -
μ Ehn
h+ √
τ θ ˆqh
j+1 2
v-
j+1 2 +
μ Ehn
h+ √
τ θ ˆqh
j-12
v+
j-12 = 0, (3.8)
Ij
qhwdx +
Ij √
τ θ nhw
xdx - √
τ θ ˆnhj +1 2
w-

j+1 2 + √
τ θ^nhj-12w+j-12= 0, (3.9)
Eh=
x 0 -
e
ε
(nh- n
d) dx + E
0- vb
ias, (3.10)
其中，E0= E
h(0) = 1 0
x 0
e
ε
(nh- n
d) ds
dx。这里的“^”项表示数值通量。^nh和 ^q
h
选择
交替通量，即 ^nh= (n
h)+，^q
h= (q
h)-，E
hn
h
采用上风通量，即 E hn
h= max (E
h, 0) (n
h)++
min (Eh, 0) (n
h)-。

从 LDG 格式可知，只要有 m 时间层的信息，我们可以仅从(3.9)求得辅助变量 q，进而求得 m + 1 时间层的数值解。这种只需要系统中一个方程求得辅助变量，因此我们这种方法为“局部”间断伽辽金法。这也是与过去需要全局系统才能求出 q 的方法的不同之处。

对于时间离散，我们采用三阶全变差不增（TVD）龙格库塔法。

u(
1)
= un+ ΔtL(u
n), (3.11)
u(
2) = 3 4
un+ 1 4
u(
1) + 1 4
ΔtL(u(
1)), (3.12)
un +1 = 1 3
un+ 2 3
u(
2) + 2 3
ΔtL(u(
2)). (3.13)

该方法保证 TV (un+1) ≤ TV (un)，其中 T V (u) =
j
|uj
+1- u
j|。

3.2 IMEX 全离散 LDG 格式

本小节，我们将考虑 LDG 空间离散耦合 IMEX 时间离散格式。这种 IMEX 时间离散的想法是显式处理二阶非线性对流项和隐式处理线性扩散项，来减弱对两项都使用显式时间离散所要求的严格的时间步长。这样做可以大量节省我们的算力，同时保

持无条件稳定性。

与讨论 TVDRK 时间离散相比，对于电子浓度方程(3.1)，我们有相同的弱形式。而对于泊松方程(3.2)，与 TVDRK 格式中直接积分不同的是，我们在此处也对它进行空间离散， 12

局部间断伽辽金方法的算法设计与应用

即对于电势方程组：

Ex= -

e

ϵ

(n - nd), (3.14)

E = -ϕx. (3.15)

在等式(3.14)-(3.15)两边分别乘上测试函数 r, z ∈ Vkh得到 -

Ij

Erxdx + Ej +1 2

r-

j+1 2

- Ej-12r+j-12= -

e

ϵIj

(n - nd)rdx, (3.16)

Ij

Ezdx -

Ij

ϕzxdx + ϕj +1 2

z-

j+1 2

- ϕj-12z+j-12= 0, (3.17)

将单元边界的量替换为对应的数值通量，结合电子浓度方程的 LDG 格式(3.8)-(3.9)，我们

得到另一种 LDG 格式：

Ij

(nh)tvdx +

Ij

μEhn

h+ √

τ θ qh

vxdx -

μ Ehn

h+ √

τ θ ^qh

j+1 2

v-

j+1 2 +

μ Ehn

h+ √

τ θ ^qh

j-12

v+

j-12 = 0, (3.18)

Ij

qhwdx +

Ij √

τ θ nhw

xdx - √

τ θ^nhj +1 2

w-

j+1 2 + √

τ θ^nhj-12w+j-12= 0, (3.19) -

Ij

Ehr

xdx + (^E

h)j +1 2

r-

j+1 2
- (ˆEh)j-12r+j-12= -eϵIj
(nh- n
d)rdx, (3.20)
Ij
Ehzdx -
Ij
ɸhz
xdx + (ˆɸ
h)j +1 2
z-
j+1 2
- (ˆɸh)j-12z+j-12= 0, (3.21)
其中 j = 1, ..., N，带“ ”的项是数值通量。我们选择数值通量 E hn
h=12((Ehnh)++(Ehnh)-),
ˆnh和 ˆq
h
选择交替通量，即
ˆnh= (n
h)+, ˆq
h= (q
h)-or ˆn
h= (n
h)-, ˆq
h= (q
h)+, (3.22)
对 ˆɸh和 ˆE
h
选择带边界条件的交替通量，即
(ˆɸh)1 2
= (ɸ-h)12= 0, (ˆɸh)j-1 2
= (ɸ+h)j-12, j = 2, • • • , N, (ˆɸh)N -1 2
= (ɸ+h)N -12= vbias,(ˆEh)1 2
= (E+h)12+ c0[ɸ]1 2
, (ˆEh)j-12= (E-h)j-1 2
+ c0[ɸ]j-12, j = 2, • • • , N + 1, (3.23)
或
(ˆɸh)1 2
= (ɸ-h)12= 0, (ˆɸh)j-1 2
= (ɸ-h)j-12, j = 2, • • • , N, (ˆɸh)N -1 2
= (ɸ+h)N -12= vbias,(ˆEh)j-12= (E+h)j-1 2
+ c0[ɸ]j-12, j = 2, • • • , N, (ˆEh)N +1 2
= (E-h)N +12+ c0[ɸ]N +1 2 . (3.24)
在数值模拟中我们选择第一种。
3.2.1 一阶 IMEX LDG 格式
为了简化表达，我们定义辅助算子
Hj(E
h, n
h, v) = -(μE
hn
h, v
x)
Ij+ (μˆEhnh)j +1 2
v-
j+1 2
- (μˆEhn
h)j-12v+j-12, (3.25)
H±j(uh, v) = - √
τ θ(uh, v
x)
Ij+ √

τ θ (u±h) j+12v0j+12- √
τ θ (u±h) j-12v+j-12, u = n, q. (3.26)
这些辅助算子将同样应用于二阶和三阶格式。通过分别对(3.18)-(3.19)中的对流项和扩散项使用向前欧拉法和向后欧拉法，我们可以得到最简单的一阶 IMEX LGD 格式：找到数值解
nm +1
h
, qm +1
h
∈ Vh，使得 (
nm +1
h
- nmh
∆t
, v)Ij= -(µEmhn
m
h
, vx)I
j+ (µˆEmhnm
h
)j +1 2
v-
j-12
- (µˆEmhnm
h
)j-12v+j-12 - (√
τ θ qm +1
h
, vx)
Ij+ (√
τ θ ˆqm +1
h
)j +1 2
v-
j+1 2 - (√
τ θ ˆqm +1
h
)j-12v+j-12, (3.27)
(qm +1
h
, w)Ij= -(√
τ θ nm +1
h
, wx)
Ij+ (√
τ θˆnm +1
h
)j +1 2
w-
j+1 2 - (√
τ θˆnm +1
h
)j-12w+j-12, (3.28)
其中 j = 1, • • • , N; r, z ∈ Vh。
电势方程的 LDG 格式是：找到 Emh, ϕm
h
∈ Vh，使得 -
Ij
Emhrxdx + (ˆEm
h
)j +1 2
r-

j+1 2
- (^Emh)j-12r+j-12= -eϵIj
(nmh- nd)rdx, (3.29)
Ij
Emhzdx -
Ij
ϕmhzxdx + (^ϕm
h
)j +1 2
z-
j+1 2
- (^ϕmh)j-12z+j-12= 0, (3.30)
中 j = 1, · · · , N; r, v ∈ Vh并且 l = 0, 1, um,0 = um。
3.2.2 二阶 IMEX LDG 格式
将表 2.3对应的二阶阶 IMEX 时间离散分别应用到(3.18)-(3.19)中得到二阶 IMEX LDG
格式：找到数值解 nm +1
h
, qm +1
h
∈ Vh，使得 (
nm ,1
h
- nmh
∆t
, v)Ij= γHj(Emh, n
m
h
, v) + γH-j(qm ,1
h
, v), (3.31) (
nm +1
h
- nmh
∆t
, v)Ij= δHj(Emh, n
m
h
, v) + (1 - δ)Hj(Em ,1
h
, nm ,1
h
, v)
+ (1 - γ)H-j(qm ,1
h
, v) + γH-j(qm+1h, v), (3.32)
(qm
,l
h
, w)Ij= H+j(nm
,l
h
, w), l = 1, 2, qm ,2
h
= qm +1
h , (3.33) 14
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用其中 j = 1, · · · , N; v, w ∈ Vh并且 γ = 1 - √ 2 2
, δ = 1 -12
γ 。
电势方程的 LDG 格式是：找到 Em
,l
h

, ϕm
,l
h
∈ Vh，使得 -
Ij
Em
,l
h
rxdx + (ˆEm,lh)j+12r-j+12- (
ˆEm,lh)j-12r+j-12= -eϵIj
(nm
,l
h
- nd)rdx, (3.34) -
Ij
Em
,l
h
zdx -
Ij
ϕm
,l
h
zxdx + (ˆϕm,lh)j+12z-j+12- (
ˆϕm,lh)j-12z+j-12= 0, (3.35)
其中 j = 1, ・ ・ ・ , N; r, v ∈ Vh, l = 0, 1, um,0= um。带“ ”的项代表数值通量，取值可以
取(3.23)或者(3.24)，在后续的数值算例中，对于所有 IMEX 格式如未加声明，我们都默认
取前者。
3.2.3 三阶 IMEX LDG 格式
将表 2.4对应的三阶 IMEX 时间离散分别应用到(3.18)-(3.21)中得到三阶 IMEX LDG 格式：找到数值解 nm +1
h
, qm +1
h
∈ Vkh使得 (
nm ,1
h
- nmh
∆t
, v)Ij= 1 2
Hj(Emh, n
m
h
, v) + 1 2
H-j(qm ,1
h
, v), (3.36) (
nm ,2
h
- nmh
∆t
, v)Ij= 1 18
Hj(Emh, n
m
h
, v) + 1 18
Hj(Em ,1
h
, nm ,1
h
, v) + 1 6
H-j(qm ,1

h
, v) + 1 2
H-j(qm ,2
h
, v), (3.37) (
nm ,3
h
- nmh
∆t
, v)Ij= 5 6
Hj(Emh, n
m
h
, v) - 5 6
Hj(Em ,1
h
, nm ,1
h
, v) + 1 2
Hj(Em ,2
h
, nm ,2
h
, v) - 1 2
H-j(qm ,1
h
, v) + 1 2
H-j(qm ,2
h
, v) + 1 2
H-j(qm ,3
h
, v), (3.38) (
nm +1
h
- nmh
∆t
, v)Ij= 1 4
Hj(Emh, n
m
h
, v) + 7 4
Hj(Em ,1
h
, nm ,1
h
, v) + 3 4
Hj(Em ,2
h
, nm ,2
h
, v) - 7 4
Hj(Em ,3
h
, nm ,3
h
, v) + 3 2
H-j(qm ,1
h
, v) - 3 2
H-j(qm ,2

h
, v) + 1 2
H-j(qm ,3
h
, v) + 1 2
H-j(qm+1h, v), (3.39)
(qm ,1
h
, w)Ij= H+j(nm
,l
h
, w), l = 1, 2, 3, 4, qm ,4
h
= qm +1
h , (3.40)
其中 j = 1, · · · , N; v, w ∈ Vh，H
j和 H±j定义如(3.25)-(3.26)所示。
电势方程的 LDG 格式是：找到 Em
,l
h
, ɸm
,l
h
∈ Vh，使得 -
Ij
Em
,l
h
rxdx + (^Em,lh)j+12r-j+12- (
^Em,lh)j-12r+j-12= -eϵIj
(nm
,l
h
- nd)rdx, (3.41)
Ij
Em
,l
h
zdx -
Ij
ɸm
,l
h
zxdx + (^ɸm,lh)j+12z-j+12- (
^ɸm,lh)j-12z+j-12= 0, (3.42)
其中 j = 1, · · · , N; r, z ∈ Vh且 l = 0, 1, 2, 3, um,0 = um，数值通量的选择和之前相同。

3.3 误差估计

3.3.1 DD 模型三阶 TVD LDG 格式

对于 DD 模型的三阶 TVD LDG 格式，我们有以下误差估计[38]：
定理 3.1. 设 n, q 是问题(3.3)-(3.4)的精确解，它们足够光滑且有有界导数。设 nh, qh 是半离
散 LDG 格式(3.8)-(3.9)的数值解。相应的数值误差记为 eu= u - u
h(u = n, q)。如果有限元
空间 V kh是 k ⩾ 1 次分段多项式，则对于足够小的 h，有以下误差估计成立：
n - nh
L∞(0,T ;L2) +
q - qh
L2(0,T ;L
2)
⩽ Chk +1
2, (3.43)
其中常数 C 依赖于最终时间 T, k, ∥n∥L∞(0,T ;Hk+1

)，// nx // 0, ∞ // nd // 0, ∞。
3.3.2 一阶 IMEX LDG 格式
我们在关于 IMEX LDG 格式中我们有定义：||u||L∞
(0,T ;L2)= max
0≤t≤T
||um||l2
(I)
和 ||u||L2
(0,T ;L2)= (
T 0
||um|| 2
L2(I)
∆t)1
/2对于一阶 IMEX LDG 格式，我们有以下误差估计[39]：
定理 3.2. 令 nm, qm 是问题(3.5)-(3.6)和(3.16)-(3.17)在时间层级 m 的精确解，它们足够光滑
且有有界导数。令 nmh, qm
h
是一阶 IMEX LDG 格式(3.27)-(3.30)的数值解。如果有限元空间Vkh是 k(k ≥ 0) 阶间断多项式，那么对于足够小的 h，存在与 h 无关的正常数 C，使得下列误差估计成立
||n - nh||L∞
(0,T ;L2)+ ||q - qh||
L2(0,T ;L
2)≤ C(hk +1
+ (∆t)2), (3.44)
其中 C 依赖于最终时间 T, k, Cμ，反常数 C
2, ||n||L∞
(0,T ;Hk
+1), ||nx||L∞和 ||E||L∞。 16
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
3.3.3 二阶 IMEX LDG 格式
对于二阶 IMEX LDG 格式，我们有以下误差估计[39]：
定理 3.3. 令 nm, qm 是问题(3.5)-(3.6)和(3.16)-(3.17)在时间层级 m 的精确解，它们足够光滑
且有有界导数。令 nmh, qm
h
是二阶 IMEX LDG 格式(3.31)-(3.35)的数值解。如果有限元空间Vkh是 k(k ≥ 0) 阶间断多项式，那么对于足够小的 h，存在与 h 无关的正常数 C，使得下面的误差估计成立
||n - nh||L∞
(0,T ;L2)≤ C(hk +1
+ (∆t)2), (3.45)
其中 C 依赖于最终时间 T, k, Cμ，反常数 C
2, ||n||L∞
(0,T ;Hk+1), ||nx||L∞和 ||E||L∞。
3.3.4 三阶 IMEX LDG 格式
对于三阶 IMEX LDG 格式，我们有以下误差估计[39]：
定理 3.4. 令 nm, qm 是问题(3.5)-(3.6)和(3.16)-(3.17)在时间层级 m 的精确解，它们足够光
滑且有有界导数。令 nmh, qm
h
是三阶 IMEX LDG 格式(3.36) -(3.40)。如果有限元空间 V kh是
k(k ≥ 0) 阶间断多项式，那么对于足够小的 h，存在与 h 无关的正常数 C，使得下面的误差估计成立
||n - nh||L∞
(0,T ;L2)≤ C(hk +1
+ (∆t)3), (3.46)
其中 C 依赖于最终时间 T, k, Cμ，反常数 C
2, ||n||L∞
(0,T ;Hk+1), ||nx||L∞和 ||E||L∞。
4 HF 模型
高场模型由以下方程以及带有周期边界条件的 Poisson 电场方程 (3.2)表示
nt+ J
x= 0, x ∈ (0, 1) (4.1)
其中
J = Jh

yp+ J
vis
Jh
yp= -μnE + τ μ
e
ε
n(-μnE + ω)
Jv
is= - τ
n
θ + 2μ2E 2
x
+ τ μE(μnE)x.
这里，ω = (μnE)|x =0
取常数。
4.1 TVDRK LDG 格式
未知量与 DD 模型中相同：电子浓度 n 和电势 φ。由于 -2
nE2
x
+ E(nE)x= -3nEE
x- E2n
x
上述方程可以写作
nt+
-μnE - τ μ2
e
ε
n2E + τ μ
e
ε
ωn - 3τ μ2EnEx
x -
τ θ + τ μ2E 2
nx
x = 0. (4.2)
利用 Ex= -eε(n - nd)，定义 C1=τμe
ε
，C2=τμ2e
ε
= μC1和 C
3=τ
μeω ε
= ωC1，方程 (4.2)可
以简写为
nt+
- (3C2En
d+ μE - C
3) n + 2C
2En2
x -
τ θ + τ μ2E 2
nx
x = 0. (4.3)
设 q =
τ θ + τ μ2E
2nx=
τ θ + τ μ2E
2n
x -
τ θ + τ μ2E 2
x

n，我们可以将方程 (4.3)
按照 LDG 的方法改写为更大的一阶 PDE 系统
nt+
- (3C2En
d+ μE - C
3) n + 2C
2En2-
τ θ + τ μ2E
2q
x = 0, (4.4)
q =
τ θ + τ μ2E
2n
x -
τ θ + τ μ2E 2
x
n. (4.5) 18
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用分别用测试函数 v, w ∈ Vkh乘以方程 (4.4)-(4.5)，并对所有涉及空间导数的项分部积分，得
到以下弱形式
Ij
ntvdx +
Ij
(3C2En
d+ μE - C
3) nv
xdx
- (3C2En
dn + μEn - C
3n)j +1 2
v-
j+1 2
+ (3C2En
dn + μEn - C
3n)j-12v+j-12 -
Ij
2C2En2v
xdx + 2C 2
En2
j+1 2
v-
j+1 2
- 2C2
En2
j-12
v+
j-12 +
Ij
τ θ + τ μ2E
2qvxdx -
τ θ + τ μ2E
2q
j+1 2
v-
j+1 2 +
τ θ + τ μ2E
2q
j-12
v+
j-12 = 0 (4.6)
Ij

qwdx +
Ij
τ θ + τ μ2E
2nwxdx +
Ij
τ θ + τ μ2E 2
x
nwdx -
τ θ + τ μ2E
2n
j+1 2
w-
j+1 2 +
τ θ + τ μ2E
2n
j-12
w+
j-12 = 0. (4.7)
将上述方程中的精确解 n, q 替换为它们在 V kh中的数值近似 nh, qh。注意到数值解 nh和 qh
在单元边界上不连续，我们需要将单元边界上的项替换为合适的数值通量。为了简化，我们定义 ah:=
τ θ + τ μ2
(Eh)2，b
h:= 3C
2E
hn
d+ μE
h- C 3
，最终得到 LDG 格式：
Ij
nhtvdx +
Ij
(bh) n
hv
xdx - (b
h)j +1 2
ˆnhj +1 2
v-
j+1 2
+ (bh)j-12
ˆnhj-12v+j-12 -
Ij
2C2E
h(n
h)2v
xdx + 2C 2
Eh (
nh)2
j+1 2
v-
j+1 2
- 2C2
Eh (
nh)2
j-12
v+
j-12 +
Ij
ahq
hv
xdx - (a
hˆq

h)j +1 2
v-
j+1 2
+ (ahˆq
h)j-12
v+
j-12 = 0, (4.8)
Ij
qhwdx +
Ij
ahn
hw
xdx +
Ij
(ah)xnhwdx
- (ahˆn
h)j +1 2
w-
j+1 2
+ (ahˆn
h)j-12
w+
j-12 = 0. (4.9)
数值电场 Eh的与之前一样直接通过积分来求解。这里的“ ”项表示数值通量。a
hˆn
h
和
ahˆq
h
选择交替通量，即 ahˆn
h= a
h(n
h)+，a
hˆq
h= a
h(q
h)-；对于 b
hˆn
h
，我们选择上风通量，
即如果 bh> 0，则 b
hˆn
h= b
h(n
h)+，否则 b
hˆn
h= b
h(n
h)-；对于通量 (n
h)2，有两种选择：（
nh)2=(nh-
)2+(nh)-(nh)++(nh-) 2 3
或（
nh)2=(nh-
)2+(nh)-(nh)++(nh-) 2 3
- α [nh]（如果 E
h> 0，则 α = 1；否则 α = -1）。在本文数值模拟中，我们实现前者。
4.2 误差估计
对于 HF 模型的三阶 TVD LDG 格式，同样为了简便我们定义 a :=
τ θ + τ μ2
(E)2, b :=

3C2En
d+ μE - C 3
，然后我们有误差估计[38]：
定理 4.1. 设 n, q 是问题(4.4)-(4.5)的精确解，具有足够光滑且有界导数。设 nh, qh 是半离散
LDG 格式 (4.8)-(4.9)的数值解，并将相应的数值误差记为 eu= u - u
h(u = n, q)。如果有限
元空间 V kh是 k ≥ 2 次分段多项式，则对于足够小的 h，有以下误差估计成立：
n - nh
L∞(0,T ;L2) +
q - qh
L2(0,T ;L
2)
≤ Chk +1 2
其中常数 C 依赖于最终时间 T, k, ∥n∥L∞(0,T ;Hk+1
), ∥nx∥0,∞, ∥nd∥0,∞以及导函数 |a′ | 和 |b ′ |
的界。
5 数值算例
本节将讨论 DD 模型和 HF 模型关于 TVDRK 时间离散的 LDG 格式和 DD 模型关于IMEX 时间离散的 LDG 格式具体实现。本文算例均在 windows 10 系统上 R2021a 64bit 版本学术版 matlab 实现。
本节具体安排如下：在第一小节，我们将介绍算例选取的物理模型参数、初值函数和基函数的选取；在第二小节，我们将给出 DD 模型和 HF 模型在 TVDRK 时间离散下的数值
模拟的结果，针对网格数，迁移率，模型，限制器多维度对比模拟的结果，同时给出 TV 随
着迭代次数的变化图像；最后一小节则会给出 IMEX LDG 格式的模拟结果，并于 TVDRK
的结果进行比较，同时验证前文中给出误差估计。
5.1 算例模型
5.1.1 物理模型参数
DD 和 HF 模型选取相同的物理模型参数：T0= 300, k = 0.138 × 10-4, ϵ = 11.7 ×
8.85418, e = 0.1602, m = 0.26 × 0.9109 × 10-31, μ = 0.75 或 0.0088(1 + 14.2273/(1 +
nd/143200))。左边界条件 ϕ = ϕ
0= kT e-1ln(n
d/n
i)；右边界条件 ϕ = ϕ
0+ v
bias, v
bias= 1.5。 20
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用两个边界处都有 T0= 300, n = 5 × 105。它们的单位如表 5.1所示[47]。简洁起见，后文中我们也将省略这些物理参数的单位。
参数名 ndm e k ϵ vbias E T 0
单位 μm-3 Kg 10
-18C 10
-18J/Kelvin 10
-18F/μm V volts/μm
◦K
表 5.1 物理模型参数单位此外，尽管 LDG 的网格不要求必需是均匀的，每个单元上计算空间的次数也不要求相同，本文算例均采用均匀网格和相同最高次计算空间。此外对于同一个算例，时间步长也是取均匀时间步长。
5.1.2 基函数
本文算例采用了两种不同的基函数，第一种基函数选择 Ij= (xj-1/2, xj+1/2) 上的正交归一化的勒让德多项式基
ϕ(
j) 0
(x) = 1
∆xj
, ϕ(
j) 1
(x) = 2 3
∆xj
x - xj
∆xj
, ϕ(
j) 2 = 1 2 5
∆xj (12(
x - xj

Δxj)2- 1), ・ ・ ・ ,这样选的好处是质量矩阵恰好为单位阵，从而简化运算。在具体的代码实现中，我们选择经典的正交归一化勒让德多项式基

ϕ(
j) 0
(x) = 1 2
, ϕ(
j) 1
(x) = 3 2
ξ, ϕ(
j) 2 = 5 8
(3ξ2- 1), ・ ・ ・ ,
其中 ξ = (2x - 2xj)/Δx
j
。此时我们的数值解可以写作
uh(x, t) =
k
l=0
cj
,l(t)ϕ
l(ξ), ∀x ∈ I
j, j = 1, 2, ..., N, (u = n, q),
ξ = 2
x - xj
Δxj .
第二种基函数选择 Ij= (xj-1/2, xj+1/2) 上正交勒让德多项式基
ϕ(
j) 0
(x) = 1, ϕ(
j) 1
(x) = x - xj, ϕ(
j) 2
= (x - xj)2- 1 12
Δx2j, ・ ・ ・ ,在具体的代码实现中，我们选择放缩后的正交勒让德多项式基
ϕ(
j) 0
(x) = 1, ϕ(
j) 1
(x) = ξ, ϕ(
j) 2
= ξ2- 1 12 , ・ ・ ・ ,
其中 ξ = (2x - 2xj)/Δx
j
。此时我们的数值解可以写作
uh(x, t) =
k
l=0
cj
,l(t)ϕ
l(ξ), ∀x ∈ I
j, j = 1, 2, ..., N, (u = n, q),
ξ =
x - xj
Δxj .
在算法中，本文用到了经典勒让德多项式基一个不常见的二级结论，下给出并证明
公式 5.1. 令 Pk表示经典勒让德多项式，定义 I(n, m) :=
PnP′ mdx。

3. 局部间断伽辽金方法的算法设计与应用_第3部分 总字符数：10435

相似文献列表

去除本人文献复制比：30.2%(3153)	去除引用文献复制比：27.3%(2849)	文字复制比：30.2%(3153)

1	一种平均场博弈的反问题模型	29.5%（3078）
	丁李桑 - 《大学生论文联合比对库》- 2020-06-01	是否引证：否
2	基于APM模型的球员评价	29.2%（3046）
	斯子来 - 《大学生论文联合比对库》- 2021-05-24	是否引证：否
3	3150104399_张懿_基于激光雷达的多目标追踪	28.1%（2934）
	张懿 - 《大学生论文联合比对库》- 2019-05-28	是否引证：否
4	最优混合的数值仿真及其应用	27.7%（2895）
	黎治圻 - 《大学生论文联合比对库》- 2023-05-19	是否引证：否
5	3160102061_董平	26.9%（2803）
	董平 - 《大学生论文联合比对库》- 2021-01-19	是否引证：否
6	氟对橄榄石中水的稳定性的影响	7.8%（813）
	高程 - 《大学生论文联合比对库》- 2022-06-13	是否引证：否
7	3160105662_石俊	6.2%（649）
	石俊 - 《大学生论文联合比对库》- 2021-01-18	是否引证：否
8	146010318_姓名_韩中文化产业竞争力研究	6.0%（623）
	姓名 - 《大学生论文联合比对库》- 2018-05-24	是否引证：否
9	电视剧卷入度和植入广告的配置方式对广告效果的影响——以韩国大学生观看Netflix平台上的电视剧为例	4.1%（427）
	金宰熙 - 《大学生论文联合比对库》- 2022-05-26	是否引证：否
10	3160102965_朱斯杰	3.2%（336）
	朱斯杰 - 《大学生论文联合比对库》- 2021-01-14	是否引证：否
11	如何写好论文摘要	1.0%（104）
	- 《机械设计与研究》- 2010-12-20	是否引证：否
12	如何写好论文摘要	1.0%（104）
	- 《机械研究与应用》- 2011-02-28	是否引证：否
13	CUMCM答卷的撰写要求	1.0%（104）
	崔志明;白学清; - 《教育与职业》- 2006-11-11	是否引证：否
14	我国影子银行对系统性风险的影响	0.9%（89）
	霍逸轩 - 《大学生论文联合比对库》- 2023-04-23	是否引证：否
15	姜雪-201711030230-四川学院学生体质健康现状与对策研究	0.6%（66）
	姜雪 - 《大学生论文联合比对库》- 2021-03-19	是否引证：否
16	本刊来稿要求	0.4%（40）
	- 《中国流通经济》- 2019-09-15	是否引证：否

原文内容

那么我们有I(n, n + 1 + 2k) = 2, ∀n ⩾ 0, k ⩾ 0.
证明. 由罗德里格公式，我们有
pn(x) = 1
2nn!
dn
dxn
(x2- 1)
n .
对于任意光滑函数 f(x)， 1 -1
Pnf dx = 1
2nn!
dn
dxn
(x2- 1)
n

f (x) 1 -1 - 1 -1 1
2nn!
dn
dxn
(x2- 1)
n
f(
1)
(x) dx.
首项等于零而第二项可以再次分部积分，最后可以得到Pn(x)f (x) dx = 1
2nn!
f(
n)
(x)(1 - x2)
n
dx
现在取 f(x) = P′ m(x), m ≤ n，那么 p(
n+1)
m= 0，所以积分为零。另外当 m - n 是奇数，p(
n+1)
m
是一个奇函数。因此，Pn(x)P′ m(x) dx = 0.
如果注意到 P(
n+1)
n+1 =(
2n+2)!
2n
+1(n+1)!
。因此我们有I(n, n + 1) =
(2n + 2)! 22
n+1n!(n + 1)!
(x2- 1)
n
dx = 2.
下面我们证明 I(n, n + 1 + 2k) = 2, k ≥ 1。
由
d
dx
pn
+1(x) = (n + 1)p
n(x) + x
d
dx
pn(x). 22
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
我们得到
I(n, n + 1 + 2k) =
Pn((n + 1 + 2k)P
n+2k+ xP
n+2k) dx =
xPnP′ n
+2k
dx
= xPnP
n+2k|1-1-
Pn
+2k(P
n+ xP′ n) dx,
又由于 Pn(1) = 1, P
n(-1) = (-1)n以及 xP′ n可以由 P0, ..., Pn表示，我们得到I(n, n + 1 + 2k) = 2, k ≥ 1.
5.1.3 初值函数

我们的初值函数就是定义在 [0, 0.6] 的掺杂函数 nd，它满足

nd(x) =

5×105, $x \in [0, 0.1] \cup [0.5, 0.6]$

2×103, $x \in [0.15, 0.45]$

在中间过渡区域选择光滑的函数连接。在本文中我们考虑光滑过渡函数 g(x)，满足

f (x) =

e-1x, $x > 0$

0, $x \leqslant 0$,

g(x) :=

f (x)

f (x) + f (1 - x)

$x \in R$.

为了得到区间 [a, b] 上的光滑过渡，我们只需要考虑函数

g(

x - a

b - a).

注意到它任意阶导函数在 [a, b] 外都为零，结合掺杂函数我们容易得到电子浓度一个具有任意阶连续导函数的初值函数。

n(x, 0) = nd(x) = 103×

500, $x \in [0, 0.1]$,498g(20(0.15 - x)) + 2, $x \in (0.1, 0.15)$,

2, $x \in [0.15, 0.45]$,

498g(20(x - 0.45)) + 2, $x \in (0.45, 0.5)$,500, $x \in [0.5, 0.6]$. (5.1)

这不是唯一可选择的过渡函数，但由于初值函数的光滑性与计算空间的维数有关，选择这样一个绝对光滑的初值函数可以简化后续分析。

为了让初值函数落在我们的计算空间中，我们需要对其进行处理。本文选择的是向计

算空间 V kh的分段 L2 投影，表示为 P。对于任意函数 $u \in Ck+1$，它满足Ij

(Pu(x) - u(x)v(x))dx = 0, $\forall v \in Pk(Ij)$. (5.2)

5.2 TVDRK 时间离散

我们通过相邻时间层电子浓度的变化量来判断算法是否已经收敛，即如果满足

||nm- n

m+1

||L2< ϵ,其中 ϵ 是一个足够小的数，那么我们认为这时算法已经收敛。在此处的数值模拟中，$\epsilon = 0.01$。

图 5.1给出了 DD 模型和 HF 模型的数值模拟结果。最上方的两图比较 DD 模型关于网格

数 N 等于 100 和 200 的数值模拟结果。中间两幅图比较 DD 模型关于迁移率 $\mu = 0.75$ 和

$\mu = \mu(nd)$ 的模拟结果。最下方的两幅图比较了 DD 模型和 HF 模型的结果。在我们的收敛

条件下，图 5.1中所有图对应的模型都基本符合 TVD，且数值解逐渐收敛。

由于篇幅限制，这里只给出 DD 模型在网格数 N = 100 和 N = 200 情况下的全变差变化图，如图 5.2所示，可以看到在一定误差范围内，总变差基本满足总变差不增。

图 5.3是添加了改进后的 minmod 限制器和无添加 minmode 限制器的图像，由于我们的解具有良好光滑性，同时计算空间选择为 V 2，因此是否添加限制器基本上不会产生影 24

局部间断伽辽金方法的算法设计与应用

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6

x 0 100000 200000 300000 400000 500000 600000

n

N=100

N=200

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6

x -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2

E

N=100

N=200

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6

x 0 100000 200000 300000 400000 500000 600000

n

7 = 7(n

d)

7 = 0.75

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6

x -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2

E

7 = 7(n

d)
7 = 0.75
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6
x 0 100000 200000 300000 400000 500000 600000
n
HF
DD
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6
x -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2
E
HF
DD
图 5.1 默认值：DD 模型三阶 TVDRK，计算空间 V 2，网格数 N = 100，迁移率 μ = 0.75。左：电子浓度 n；右：电势 E。参数：上，网格数 N；中，迁移率 μ；下，模型类型。
0 2000 4000 6000 8000 10000 12000
nt 986000 988000 990000 992000 994000 996000 998000
T
V
N=100
0 5000 10000 15000 20000 25000 30000 35000 40000
nt 986000 988000 990000 992000 994000 996000 998000
T
V
N=100
图 5.2 默认值：DD 模型三阶 TVDRK，计算空间 V 2，网格数 N = 100 和 N = 200，迁移率 μ = 0.75。
nt：时间层；TV：全变差。
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6
x 0 100000 200000 300000 400000 500000 600000
n
limiter
without limiter
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6
x -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2
E
limiter
without limiter
图 5.3 默认值：DD 模型三阶 TVDRK，计算空间 V 2，网格数 N = 100，迁移率 μ = 0.75。左：电子浓度 n；右：电势 E。 26

局部间断伽辽金方法的算法设计与应用响。但如果我们的计算空间选择 V k, k ⩾ 3，如果直接让三次基函数项的系数直接取零，在数值模拟过程中仅在数个时间层后就出现了明显的误差。一般来讲，直接让三次项的系数保持不变即可，但考虑到本文模型假定了解具有良好的光滑性，又构造出了足够光滑的初始函数，不需要限制器也可以正确模拟。因此对于限制器更深入的讨论，可以在未来分析具有强震荡解的模型时再详细研究。

5.3 IMEX LDG 格式

由于没有准确解的显式表达式，我们采取细网格上的数值解来代替真实解。我们取网格数 N = 3200、时间步长 t = 1.2e - 3 和计算空间 V2h的数值解作为真实解，我们

有表 5.2和表 5.3的误差估计，其中，我们有几点要说明的地方，表中所有案例的时间步长

均选择 Δt = 1.2e - 3，由于(3.46)中时间项相对于空间项很小，因此我们在计算精度时忽略了时间项，表 5.3中第一列采用的真实解取的是网格数 N = 3200、时间步长 t = 1.2e - 3

和计算空间 V 2h的数值解，以增加更多方面的对比。在从表中数据我们可以看到，对于计算空间 V 0, V 1, V 2 我们分别得到了一阶、二阶、三阶精度。而对于从网格数 N = 25 到网格数 N = 50 这两个网格上求得误差明显差于更细的网格，可能的原因是因为当网格过粗时，投影得到的初值函数误差过大。此外注意到，对于随着网格加密，我们的时间步长保持不

变，但依然可以得到收敛的结果，这证明了 IMEX 方法的无条件稳定性。在我们的验证中，

t = 1.2e - 3 是一个接近临界的时间步长，当选取更大的时间步长如 t = 3.0e - 3 时，我们的数值解随着迭代的进行很快就发散了，更精确的时间步长可以通过二分法逐渐求出，这不是本文讨论的重点，同时为了节省算力，此处不做过多展开。

表 5.4和表 5.5分别给出了在网格数 N = 100 和 N = 200 的条件下，TVD LDG 格式和 IMEX LDG 格式达到稳态时的时间步长 Δt，经过的时间层数 nt 以及到达稳态的时间 t。

从表中我们可以清楚地看到 IMEX LDG 要求的时间步长远小于 TVD LDG 格式，更大的时间步长大大减少了算力消耗。

图 5.4直观地给出了在网格数 N = 100 和 N = 200 的条件下，IMEX LDG 法的结果。

可以看到在两个网格上我们均取得良好的结果。综合上述数值算例结果，我们可以认为

IMEX 格式在处理如 DD 模型的类似的物理模型时能取得良好的结果，并有望应用于其他

物理模型当中。

VOV
1V 2
N|
|nh-n||
||n||
Order|
|nh-n||
||n||
Order|
|nh-n||
||n||
Order
25 9.94e-02 —— 3.24e-02 —— 4.46e-03 ——
50 5.50e-02 0.85 9.48e-03 1.77 1.24e-03 1.84
100 2.80e-02 0.97 2.56e-03 1.89 1.77e-04 2.81
200 1.41e-02 0.99 6.78e-04 1.92 2.43e-05 2.87
400 6.97e-03 1.02 1.54e-04 2.14 2.47e-06 3.30
800 3.54e-03 0.98 3.52e-05 2.13 2.79e-07 3.15
表 5.2 二阶 IMEX LDG 格式误差估计。网格数 N，收敛阶 Order，计算空间 V k, k = 0, 1, 2，相对误差 (||nh- n||)/||n||。
VOV
1V 2
N|
|nh-n||
||n||
Order|
|nh-n||
||n||
Order|
|nh-n||
||n||
Order
25 9.94e-02 —— 3.24e-02 —— 4.46e-03 ——
50 5.50e-02 0.85 9.48e-03 1.77 1.24e-03 1.84
100 2.80e-02 0.97 2.56e-03 1.89 1.77e-04 2.81
200 1.43e-02 0.97 6.78e-04 1.92 2.43e-05 2.87
400 7.07e-03 1.02 1.54e-04 2.14 2.47e-06 3.30
800 3.44e-03 1.04 3.52e-05 2.13 2.78e-07 3.15
表 5.3 三阶 IMEX LDG 格式误差估计。网格数 N，收敛阶 Order，计算空间 V k, k = 0, 1, 2，相对误差 (||nh- n||)/||n||。
TVDRK3 IMEX3
Δt 1.6e-05 4.0e-04 6.0e-04 8.0e-04 1.0e-03 1.2e-03
nt 11457 414 354 307 255 217
t 0.1833 0.1656 0.2124 0.2456 0.2550 0.2604
表 5.4 TVDRK LDG 格式和 IMEX LDG 格式达到稳态的时间步长 Δt，时间层数 nt，时间 t。网格数N = 100，计算空间 V 2。
28
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用TVDRK3 IMEX3
Δt 4.2e-06 4.0e-04 6.0e-04 8.0e-04 1.0e-03 1.2e-03
nt 39892 416 353 307 255 217
t 0.1675 0.1664 0.2118 0.2456 0.2550 0.2604
表 5.5 TVDRK LDG 格式和 IMEX LDG 格式达到稳态的时间步长 Δt，时间层数 nt，时间 t。网格数N = 100，计算空间 V 2。
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6
x 0 100000 200000 300000 400000 500000
n
N=100
N=200
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6
x -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2
E
N=100

N=200

图 5.4 默认值：DD 模型三阶 IMEXRK，计算空间 V 2，网格数 N = 100 和 N = 200，迁移率 μ = 0.75。

左：电子浓度 n；右：电势 E。

6 结论与展望

在本文，我们给出了一维漂移-扩散模型（DD）和高场模型（HF）的半离散半局部间断伽辽金（semi-LDG）格式，即对于电子浓度方程采用 LDG 格式，而对于电势方程采用直接积分法或者连续伽辽金有限元方法。两个模型中都包含一阶导对流项和二阶导扩散项。时间离散上我们采用全变差不增龙格-库塔法（TVDRK）。当使用 k 次分段多项式函数

（Pk）作为我们的计算空间，我们有对于一维 DD 模型（k ≥ 1）和 HF 模型（k ≥ 2）都有O(hk

+1/2) 的误差估计[38]，这里我们假设我们的模型都有光滑解。我们的数值算例验证了数值解的稳定性并验证了 TVD LDG 格式的全变差不增性质。由于我们采用的计算空间是间断的，我们需要采用合适的数值通量来处理网格单元边界的跳跃项。尽管这种格式具有良好的稳定性，但是对于时间步长有着严格的要求，这将带来大量的计算消耗。这一问题主要来源于显式处理具有二阶导的扩散项使得我们的时间步长只能有 O(h2) 的长度。一个方法是采用隐式法来处理扩散项中的二阶导。在本文中我们给出了一阶到三阶的隐式-显式（IMEX）龙格-库塔法，该方法的想法是采用隐式方法处理线性扩散项，采用显式方法处理非线性对流项。与讨论 TVD LDG 格式时相同，我们采用同样的一维 DD 模型，但不同的是前者只对电子浓度方程使用 LDG 空间离散，而讨论 IMEX LDG 格式时，我们对电子浓度方程和电势方程都采用 LDG 空间离散。对于三种精度的 IMEX RK 法，我们分别得到对应的 IMEX LDG 格式。可以证明，IMEX 方法具有无条件稳定性，且对于光滑解和小于某个固定常数的时间步长都收敛。我们有与 Δt 有关的 O(hk+1) 的误差估计[39]。在我们的数值算例中，我们验证了二阶和三阶 IMEX LDG 格式的收敛阶，无条件稳定性和收敛性。

在本文的数值算例中，我们采用的都是均匀网格，因此，且每个单元上的数值近似都采用的时相同的 Pk，这没有充分利用 LDG 方法的 h-p 自适应性。未来可以考虑对于变化剧烈的区域采用更细的网格以及更高阶的多项式近似，以期在不增加太多计算量的情况下提高我们的计算精度和效率。同时，我们也计划将这种方法推广到其他半导体模型。

7 参考文献

[1] REED W H, HILL T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973.

[2] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta local projection-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws[J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1991, 25(3): 337-361.

[3] COCKBURN B, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework[J]. Mathematics of computation, 1989, 52(186): 411-435.

[4] COCKBURN B, LIN S Y, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems[J]. Journal of computational Physics, 1989, 84(1): 90-113.

[5] COCKBURN B, HOU S, SHU C W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. The multidimensional case[J]. Mathematics of Computation, 1990, 54(190): 545-581.

[6] COCKBURN B, SHU C W. The Runge - Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems[J]. Journal of computational physics, 1998, 141(2): 199-224.

[7] COCKBURN B, KARNIADAKIS G E, SHU C W. The development of discontinuous Galerkin methods[G]//Discontinuous Galerkin methods theory, computation and applications. Springer, 2000: 3-50.

[8] ZHANG Q, SHU C W. Stability Analysis and a Priori Error Estimates to the Third Order Explicit Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Scalar Conservation Laws[J]. SIAM J Numer Anal, 2010, 48. DOI: 10.1137/090771363.

[9] COCKBURN B, SHU C W. Runge - Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[J]. Journal of scientific computing, 2001, 16: 173-261.

[10] ZHANG M, SHU C W. An analysis of three different formulations of the discontinuous Galerkin method for diffusion equations[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2003, 13(03): 395- 413.

[11] COCKBURN B, SHU C W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems[J]. SIAM journal on numerical analysis, 1998, 35(6): 2440-2463.

[12] BASSI F, REBAY S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier - Stokes equations[J]. Journal of computational physics, 1997, 131(2): 267-279.

[13] YAN J, SHU C W. A Local Discontinuous Galerkin Method for KdV Type Equations[J]. SIAM J Numer Anal, 2002, 40. DOI: 10.1137/S0036142901390378.

[14] YAN J, SHU C W. Local discontinuous Galerkin methods for partial differential equations with higher order derivatives[J]. Journal of Scientific Computing, 2002, 17: 27-47.

[15] ESKILSSON C, SHERWIN S J. A discontinuous spectral element model for Boussinesq-type equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2002, 17: 143-152.

[16] ESKILSSON C, SHERWIN S J. Discontinuous Galerkin spectral/hp element modelling of dispersive shallow water systems[J]. Journal of Scientific Computing, 2005, 22: 269-288.

[17] ESKILSSON C, SHERWIN S J. Discontinuous Galerkin spectral/hp element modelling of dispersive

shallow water systems[J]. Journal of Scientific Computing, 2005, 22: 269-288.
[18] XU Y, SHU C W. Local discontinuous Galerkin methods for high-order time-dependent partial differential equations[J]. Communications in Computational Physics, 2010, 7(1): 1.
[19] COCKBURN B, KANSCHAT G, SCHÖTZAU D, et al. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 40(1): 319-343.
[20] BUSTINZA R, GATICA G N, COCKBURN B. An a posteriori error estimate for the local discontinuous Galerkin method applied to linear and nonlinear diffusion problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2005, 22: 147-185.
[21] COCKBURN B, DONG B. An analysis of the minimal dissipation local discontinuous Galerkin method for convection - diffusion problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2007, 32: 233-262.
[22] WANG H, SHU C W, ZHANG Q. Stability and error estimates of local discontinuous Galerkin methods with implicit-explicit time-marching for advection-diffusion problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2015, 53(1): 206-227.
[23] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. Journal of computational physics, 1988, 77(2): 439-471.
[24] XIA Y, XU Y, SHU C W. Efficient time discretization for local discontinuous Galerkin methods[J/OL]. Discrete and Continuous Dynamical Systems - B, 2007, 8(3): 677-693. https://www.aimsciences.org/article/id/547a34a0-eba5-43df-9e6f-ca0378ffe601. DOI: 10.3934/dcdsb.2007.8.677.
[25] WANG H, ZHANG Q. Error Estimate on a Fully Discrete Local Discontinuous Galerkin Method for Linear Convection-Diffusion Problem[J]. J Comput Math, 2013, 31. DOI: 10.4208/jcm.1212-m4174.
[26] ASCHER U M, RUUTH S J, SPITERI R J. Implicit-Explicit Runge-Kutta Methods for Time-Dependent Partial Differential Equations[J]. Appl Numer Math, 1997, 25. DOI: 10.1016/S0168-9274(97)00056-1.
[27] ASCHER U M, RUUTH S J, WETTON B T R. Implicit-Explicit Methods for Time-Dependent Partial Differential Equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1995, 32(3): 797-823. DOI: 10.1137/07 32037.
[28] CALVO M, DE FRUTOS J, NOVO J. Linearly implicit Runge - Kutta methods for advection - reaction - diffusion equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2001, 37(4): 535-549.
[29] BANK R E, ROSE D J, FICHTNER W. Numerical methods for semiconductor device simulation[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1983, 4(3): 416-435.
[30] BANK R E, COUGHRAN W, Jr, COWSAR L C. The finite volume Scharfetter-Gummel method for steady convection diffusion equations[J]. Computing and Visualization in Science, 1998, 1(3): 123-136.
[31] CHAINAIS-HILLAIRET C, LIU J G, PENG Y J. Finite volume scheme for multi-dimensional drift-diffusion equations and convergence analysis[J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2003, 37(2): 319-338.
[32] BESSEMOULIN-CHATARD M. A finite volume scheme for convection - diffusion equations with nonlinear diffusion derived from the Scharfetter - Gummel scheme[J]. Numerische Mathematik, 2012, 121: 637-670.
[33] BREZZI F, MARINI L D, PIETRA P. Two-dimensional exponential fitting and applications to drift-diffusion models[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1989, 26(6): 1342-1355.
[34] MAURI A, BORTOLOSSI A, NOVIELLI G, et al. 3D finite element modeling and simulation of industrial semiconductor devices including impact ionization[J]. Journal of Mathematics in Industry, 2015, 5(1): 1-18.
[35] LIU Y, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Methods for Moment Models in Device Simulations: Formulation and One Dimensional Results[J]. J Comput Electronics, 2004, 3. DOI: 10.1007/s10825-004 -7058-5.
[36] LIU Y, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Methods for Moment Models in Device Simulations: Performance Assessment and Two-Dimensional Results[J]. Appl Numer Math, 2007, 57. DOI: 10.1016 /j.apnum.2006.07.027.
[37] CHEN S, WEINAN E, LIU Y, et al. A discontinuous Galerkin implementation of a domain decomposition method for kinetic-hydrodynamic coupling multiscale problems in gas dynamics and device simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(2): 1314-1330.
[38] LIU Y, SHU C W. Error analysis of the semi-discrete local discontinuous Galerkin method for semiconductor device simulation models[J]. Science China Mathematics, 2010, 53: 3255-3278.
[39] LIU Y, SHU C W. Analysis of the local discontinuous Galerkin method for the drift-diffusion model of semiconductor devices[J]. Science China Mathematics, 2016, 59: 115-140.
[40] CHEN L, BAGCI H. Steady-state simulation of semiconductor devices using discontinuous Galerkin methods[J]. IEEE Access, 2020, 8: 16203-16215.
[41] DING J, WANG C, ZHOU S. Optimal rate convergence analysis of a second order numerical scheme for the Poisson-Nernst-Planck system[J]. Numer. Math. Theor. Meth. Appl, 2019, 12(607-626): 1.
[42] GAO H, SUN P. A linearized local conservative mixed finite element method for Poisson - Nernst - Planck equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2018, 77: 793-817. 32
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
[43] LIU Y, SHU S, WEI H, et al. A virtual element method for the steady-state Poisson-Nernst-Planck equations on polygonal meshes[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2021, 102: 95-112.

[44] CIARLET P. The Finite Element Method for Elliptic Problem[M]. Amsterdam-New York: NorthHolland, 1978.
[45] SULLIVAN T. A brief introduction to weak formulations of PDEs and the finite element method[J]. University of Warwick, 2020.
[46] GOTTLIEB S, SHU C W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes[J/OL]. Mathematics of Computation, 1998, 67(221): 73-85 [2024-05-08]. http://www.jstor.org/stable/2584973.
[47] CERCIGNANI C, GAMBA I M, JEROME J W. Device Benchmark Comparisons via Kinetic, Hydrodynamic, and High-Field Models[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2000, 181. DOI: 10.1016/S0045 - 7825(99)00186-3. 34
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
附录
A 一个附录Image
图 A.1 附录中的图片
E = mc2(A.1)
B 另一个附录
xn+ y
n
= zn(B.1) 36
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用作者简历 38
本科生毕业论文（设计）任务书
一、题目：
二、指导教师对毕业论文（设计）的进度安排及任务要求：
起讫日期 20 年月日至 20 年月日指导教师（签名） 职称
三、系或研究所审核意见：
负责人（签名）
年月日
本科生毕业论文（设计）考核
一、指导教师对毕业论文（设计）的评语：
指导教师（签名）
年月日
二、答辩小组对毕业论文（设计）的答辩评语及总评成绩：
成绩比例文献综述 （10%）
开题报告 （15%）
外文翻译 （5%）
毕业论文质量及答辩（70%）
总评成绩分值负责人（签名）
年月日
第二部分
毕业论文开题报告本科生毕业论文文献综述和开题报告姓名与学号鲁硕 3200101874
指导教师仲杏慧年级与专业 2020级信息与计算科学
所在学院数学科学学院
一、题目：局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
二、指导教师对文献综述、开题报告、外文翻译的具体要求：
指导教师（签名）
年月日
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
一、文献综述
1 背景介绍
正文格式与具体要求[1]

1.1 小节
1.1.1 小节
2 国内外研究现状
2.1 研究方向及进展
2.2 存在问题
3 研究展望
4 参考文献
[1] 浙江大学本科生院. 浙江大学本科生毕业论文（设计）编写规则[EB/OL]. 2024. http://www.math.zju.edu.cn/_upload/article/files/ae/61/a639defe42d0a434381f50a6d44a/60434260-bfb8-4c65-8201-4d869ca8216f.pdf. 2
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用

二、开题报告
1 问题提出的背景
正文格式与具体要求[1]

1.1 背景介绍
1.1.1 项目提出的原因
1.2 本研究的意义和目的
2 项目的主要内容和技术路线
2.1 主要研究内容
2.2 技术路线
2.3 可行性分析
3 研究计划进度安排及预期目标
3.1 进度安排
3.2 预期目标
4 参考文献
[1] 浙江大学本科生院. 浙江大学本科生毕业论文（设计）编写规则[EB/OL]. 2024. http://www.math.zju.edu.cn/_upload/article/files/ae/61/a639defe42d0a434381f50a6d44a/60434260-bfb8-4c65-8201-4d869ca8216f.pdf. 4
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
三、外文翻译 6
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
摘要
1 节标题
1.1 小节标题 8
局部间断伽辽金方法的算法设计与应用
四、外文原文 9 1
浙江大学本科生毕业论文（设计）编写规则为规范我校本科生毕业论文（设计）编写格式，根据《学位论文编写规则》(GB/T 7713.1
- 2006)，结合我校实际情况，制定本本科生毕业论文（设计）编写规则。
1 本科生毕业论文（设计）工作文档
本科生毕业论文（设计）工作文档分两大部分。
第一部分（论文（设计）材料）编排顺序依次是前置部分、主体部分、结尾部分、《浙江大学本科生毕业论文（设计）任务书》、《浙江大学本科生毕业论文（设计）考核表》。
第二部分（开题材料）编排顺序依次是文献综述和开题报告封面、指导教师对文献综述和开题报告具体要求、目录、文献综述、开题报告、外文翻译和外文原文、《浙江大学本科生文献综述和开题报告考核表》。
本科生毕业论文（设计）工作文档的纸质版，可作为院（系）教学资料存档保存，参照上述编排顺序，打印装订成册，其中封面、题名页、承诺书、致谢、摘要、《浙江大学*本科生毕业论文（设计）任务书》、《浙江大学本科生毕业论文（设计）考核表》、指导教师对文献综述和开题报告具体要求、《浙江大学本科生文献综述和开题报告考核表》应单面打印，其它部分内容应双面打印；*主体部分各章之间应分页。论文检测报告、浙江大学本科生毕业论文（设计）专家评阅意见、浙江大学本科生毕业论文（设计）现场答辩记录表等文档可作为附件单面打印装订在最后面。
本科生毕业论文（设计）工作文档的电子版，其内容中应不包含指导性、评价性及成绩考核等内容，如：《浙江大学本科生毕业论文（设计）任务书》、《浙江大学本科生毕业论文（设计）考核表》、指导教师对文献综述和开题报告具体要求、《浙江大学本科生文献综述和开题报告考核表》、论文检测报告、浙江大学本科生毕业论文（设计）专家评阅意见、浙江大学本科生毕业论文（设计）现场答辩记录表等。
1.1 前置部分
(1) 封面
(2) 题名页（可根据需要）
(3) 承诺书
(4) 勘误页(可根据需要)
(5) 致谢
(6) 摘要页
10 2
(7) 序言或前言(可根据需要)
(8) 目次页
(9) 图和附表清单（可根据需要）
(10) 符号、标志、缩略词、首字母缩写、计量单位、术语等的注释表（可根据需要）
1.2 主体部分
(1) 引言（绪论）
(2) 正文

(3) 结论

1.3 结尾部分

(1) 参考文献

(2) 附录(可根据需要)

(3) 分类索引、关键词索引(可根据需要)

(4) 作者简历

2 编写规范与要求

2.1 语种要求

论文撰写语种，对于国际学生，参照 2017 年教育部、外交部、公安部联发的第 42 号令《学校招收和培养国际学生管理办法》执行；非国际学生遵照国家相关法律法规执行。

2.2 前置部分

2.2.1 封面

作者学号：全日制学生需要填写学号。

论文题目：应准确概括整个论文的核心内容，简明扼要，一般不能超过 25 个汉字，英文题目翻译应简短准确，一般不应超过 150 个字母，必要时可以加副标题。

2.2.2 承诺书

见浙江大学本科生毕业论文（设计）承诺书。

2.2.3 致谢

致谢对象限于对课题工作、毕业论文（设计）完成等方面有较重要帮助的人员。

2.2.4 摘要

包括中文摘要和英文摘要两部分。摘要应具有独立性和自含性，即不阅读论文全文就

能获得必要信息。摘要的内容应包含与论文等同量的主要信息，供读者确定有无必要阅读

局部间断伽辽金方法的算法设计与应用 11 3

全文，也可供二次文献采用。摘要应说明研究目的、方法、结果和结论等，重点是结果和

结论。不宜使用图、表、化学结构式、非公知公用的符号和术语。中文摘要的字数一般为

300-600字以内，英文摘要实词在300个左右。英文摘要应与中文摘要内容相对应。摘要最

后另起一行，列出3-8个关键词。关键词应体现论文特色，具有语义性，在论文中有明确

的出处，并应尽量采用《汉语主题词表》或各专业主题词表提供的规范词。

2.2.5 序言或前言

毕业论文（设计）的序言或前言，一般是作者对本篇论文基本特征的简介，如说明研

究工作缘起、背景、主旨、目的、意义、编写体例，以及资助、支持、协作经过等。这些

内容也可在正文引言中说明。

2.2.6 目次页

论文中内容标题的集合。

2.2.7 图和附表清单

论文中如图表较多，可以分别列出清单置于目次页之后。图的清单应有序号、图题和

页码。表的清单应有序号、表题和页码。

2.2.8 符号、标志、缩略词、首字母缩写、计量单位、术语等的注释表。

2.3 主体部分

包括引言（绪论）、正文和结论。

2.3.1 一般要求

2.3.1.1 引言（绪论）

应包括论文的研究目的、流程和方法等。论文研究领域的历史回顾、文献回溯、理论

分析等内容，应独立成章，用足够的文字叙述。

2.3.1.2 正文

主体部分由于涉及不同的学科，在选题、研究方法、结果表达方式等有很大的差异，

不能作统一的规定。但是，必须实事求是、客观真切、准备完备、合乎逻辑、层次分明、

简练可读。

图：图包括曲线图、构造图、示意图、框图、流程图、记录图、地图、照片等。图应具有“自明性”；图宜有图题，即名称，置于图的编号后。图的编号和图题置于图下方；照片图要求主题和主要显示部分的轮廓鲜明，便于制版。如用放大缩小的复制品，必须清

晰，反差适中。照片上应有表示目的物尺寸的标度。

表：表应具有“自明性”。表宜有表题，即表的名称，置于表的编号之后。表的编号和表题应置于表上方。表的编排，一般是内容和测试项目由左至右横读，数据依序竖读。 12

毕业论文（设计）文献综述和开题报告考核对文献综述、外文翻译和开题报告评语及成绩评定：

成绩比例文献综述开题报告外文翻译占（10%） 占（15%） 占（5%）

分值开题报告答辩小组负责人（签名）

年月日

2. 去除引用文献复制比:去除系统识别为引用的文献后,计算出来的重合字符数在总字符数中所占的比例

3. 去除本人文献复制比:去除系统识别为作者本人其他文献后,计算出来的重合字符数在总字符数中所占的比例

4. 单篇最大文字复制比:被检测文献与所有相似文献比对后,重合字符数占总字符数比例最大的那一篇文献的文字复制比

5. 复制比按照“四舍五入”规则,保留1位小数;若您的文献经查重检测，复制比结果为0，表示未发现重复内容，或可能存在的个别重复内容较少不足以作为判断依据

6. 红色文字表示文字复制部分;*绿色文字*表示引用部分(包括系统自动识别为引用的部分);*棕灰色文字*表示系统依据作者姓名识别的本人其他文献部分

7. 系统依据您选择的检测类型(或检测方式)、比对截止日期(或发表日期)等生成本报告

8. 知网个人查重唯一官方网站:https://cx.cnki.net