

分类号: O241.82

密 级: 公开

单位代码: 10422

学 号: 201911805



山东大学  
SHANDONG UNIVERSITY

# 硕士学位论文

Thesis for Master Degree

论文题目: 半导体问题 Drift-Diffusion 模型的局部间断

Galerkin 方法

Local Discontinuous Galerkin Method for

Drift-Diffusion Model of Semiconductor Problem

作 者 姓 名	肖红单
培 养 单 位	数学学院
专 业 名 称	计算数学
指 导 教 师	刘蕴贤 教授
合 作 导 师	

2022 年 05 月 28 日

分类号: O241.82

密 级: 公开

单位代码: 10422

学 号: 201911805



山东大学  
SHANDONG UNIVERSITY

# 硕士学位论文

Thesis for Master Degree

论文题目: 半导体问题 Drift-Diffusion 模型的

局部间断 Galerkin 方法

Local Discontinuous Galerkin Method for  
Drift-Diffusion Model of Semiconductor Problem

作 者 姓 名

肖红单

培 养 单 位

数学学院

专 业 名 称

计算数学

指 导 教 师

刘燕贤 教授

合 作 导 师

2022 年 05 月 28 日

## 原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：肖红单 日期：2022.5.28

## 关于学位论文使用授权的声明

本人同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的印刷件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权山东大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名：肖红单 导师签名：刘蕴贤 日期：2022.5.28

## 摘 要

本文考虑半导体问题的 Drift-Diffusion (DD) 模型, 它是由浓度方程和电子位势方程构成的一个方程组, 浓度方程中不仅包含一阶导数对流项, 还包含二阶导数扩散项。本文给出了 DD 模型一维和二维问题的局部间断 Galerkin (LDG) 方法, 并进行了数值模拟。主要技术困难包括由 LDG 方法的不连续性引起的单元边界处理, 以及浓度方程中浓度与电场强度的非线性耦合。模拟一维问题时, 在浓度变化剧烈的区域采用细网格, 在浓度变化平缓的区域采用粗网格, 并与均匀网格的数值模拟进行了比较, 实现了在非均匀剖分下节省空间剖分单元数并加快了运行速度的目的。模拟二维问题时, 采用了 Dirichlet 和 Neumann 相结合的边界。数值结果验证了 LDG 方法的稳定性。

本文共分为四章。

第一章是引言, 简要介绍了半导体 DD 模型的由来和发展, 以及 LDG 方法的优点。

第二章是准备工作, 为了方便第四章的理论分析, 主要提出了一些基本符号表示, 投影, 插值性质以及逆性质。

第三章用 LDG 方法求解如下半导体问题 1D DD 模型:

$$n_t - (\mu E n)_x = \tau \theta n_{xx},$$

$$\phi_{xx} = \frac{e}{\varepsilon} (n - n_d),$$

其中  $x \in (0, 1)$ , 第一个浓度方程为周期边界条件, 第二个电子位势方程为 Dirichlet 边界条件:  $\phi(0, t) = 0$ ,  $\phi(1, t) = v_{bias}$ , 未知函数为电子浓度  $n$  和电子位势  $\phi$ ,  $E = -\phi_x$  表示电场。

针对 1D DD 模型构造 LDG 格式, 给出了在均匀剖分和非均匀剖下的具体算例, 实现了在非均匀剖分下节省计算空间节点数并加快了运行速度的目的。

第四章用 LDG 方法求解如下半导体问题 2D DD 模型:

$$n_t - \nabla \cdot (\mu E n) = \tau \theta \Delta n,$$

$$\Delta \phi = \frac{e}{\varepsilon} (n - n_d),$$

其中  $x \times y \in \Omega$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , 第一个浓度方程为周期边界条件, 第二个电子位势方程为 Dirichlet 边界条件, 未知函数为电子浓度  $n$  和电子位势  $\phi$ ,  $E = -\nabla \phi(x, y)$  表示电场。

针对 2D DD 模型构造 LDG 格式，证明了误差分析，最后给出了 2D DD 模型的数值算例。

最后是全文的总结与展望。

**关键词：**Drift-Diffusion 模型；局部间断 Galerkin 方法；误差估计；数值模拟

## ABSTRACT

This paper considers the Drift-Diffusion (DD) model of the semiconductor problem. DD model is described by an equation system consisting of a concentration equation and an electron potential equation. The concentration equation includes not only the first-order derivative convection term, but also the second-order derivative diffusion term. This paper presents the local discontinuous Galerkin (LDG) method for the one-dimensional and two-dimensional problems of the DD model, and carries out the numerical simulation. The main technical difficulties include cell boundary processing caused by the discontinuity of the LDG method, and the nonlinear coupling of concentration and electric field in the concentration equation. When simulating a one-dimensional problem, fine meshes are used in the parts where the concentration changes sharply, and coarse meshes are used in the places where the concentration changes gently, and compared with the numerical simulation of uniform meshes, it realizes the purpose of saving space and dividing the number of elements and speeding up the running speed under non-uniform division. When simulating two-dimensional problems, a combination of Dirichlet and Neumann boundaries is used. Numerical results verify the stability of the LDG method.

This article is divided into four chapters.

Chapter 1 is the introduction. It briefly introduces the origin and development of the semiconductor DD model, as well as the advantages of the LDG method.

Chapter 2 is the preparation. In order to facilitate the theoretical analysis of the chapter 4, some basic notation, projection, interpolation properties, and inverse properties are mainly proposed.

Chapter 3 uses the LDG method to solve the following semiconductor problem 1D DD model:

$$n_t - (\mu E n)_x = \tau \theta n_{xx},$$

$$\phi_{xx} = \frac{e}{\varepsilon} (n - n_d),$$

in which,  $x \in (0,1)$ , the first concentration equation is a periodic boundary condition, and the

second electron potential equation is Dirichlet boundary condition:  $\phi(0,t) = 0$ ,  $\phi(1,t) = v_{bias}$ ,

and the unknown functions are  $n$  and  $\phi$ ,  $E = -\phi_x$  represents the electric field.

The LDG format is constructed for the 1D DD model, and specific calculation examples under uniform and non-uniform division are given, which saves the number of computing space nodes and speeds up the operation speed under non-uniform division.

Chapter 4 uses the LDG method to solve the following semiconductor problem 2D DD model:

$$n_t - \nabla \cdot (\mu E n) = \tau \theta \Delta n,$$

$$\Delta \phi = \frac{e}{\varepsilon} (n - n_d),$$

in which,  $x \times y \in \Omega$ ,  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ , the first concentration equation is a periodic boundary condition, the second electron potential equation is Dirichlet boundary condition, and the unknown functions are  $n$  and  $\phi$ ,  $E = -\nabla \phi(x, y)$  represents the electric field.

The LDG format is constructed for the 2D DD model, and the error analysis is given. Finally, specific numerical examples are given for the 2D DD model.

Finally, the conclusion and prospect of the full text are given.

**Key words:** Drift-Diffusion Model; Local Discontinuous Galerkin Method; Error Estimation; Numerical Simulation

目 录

摘要 ..... I

ABSTRACT ..... III

1 引言 ..... 1

2 准备工作 ..... 3

    2.1 基本符号 ..... 3

        2.1.1 一维情形 ..... 3

        2.1.2 二维情形 ..... 3

    2.2 投影和插值性质 ..... 4

        2.2.1 一维情形 ..... 4

        2.2.2 二维情形 ..... 5

    2.3 逆性质 ..... 5

3 一维 Drift-Diffusion 模型 ..... 7

    3.1 弱形式和 LDG 格式 ..... 7

    3.2 一维 Drift-Diffusion 模型算例 ..... 8

4 二维 Drift-Diffusion 模型 ..... 11

    4.1 弱形式和 LDG 格式 ..... 11

    4.2 误差估计 ..... 13

    4.3 二维 Drift-Diffusion 模型算例 ..... 23

结论 ..... 27

参考文献 ..... 29

致谢 ..... 31

攻读学位期间发表的学术论文目录 ..... 33



CONTENTS

Chinese abstract..... I

English abstract ..... III

Chapter 1 Introduction..... 1

Chapter 2 Preliminaries ..... 3

    2.1 Basic Notations..... 3

        2.1.1 One-dimensional case..... 3

        2.1.2 Two-dimensional case ..... 3

    2.2 Projection and Interpolation Properties..... 4

        2.2.1 One-dimensional case..... 4

        2.2.2 Two-dimensional case ..... 5

    2.3 Inverse Properties ..... 5

Chapter 3 The One-dimensional Drift-Diffusion Model ..... 7

    3.1 Weak Form and The LDG Scheme ..... 7

    3.2 Numerical Examples of 1D Drift-Diffusion Model..... 8

Chapter 4 The Two-dimensional Drift-Diffusion Model..... 11

    4.1 Weak Form and The LDG Scheme ..... 11

    4.2 Error Estimate..... 13

    4.3 Numerical Examples of 2D Drift-Diffusion Model..... 23

Conclusion ..... 27

Reference ..... 29

Acknowledgments ..... 31

Catalogue of academic papers published during degree study ..... 33

# 1 引言

半导体宏观数学模型是现代半导体工业的重要研究课题之一，它不仅为半导体材料、微电子配件等相关领域的诸多技术问题提供了理论上必要的解释，还可以提供理论数值计算和模拟。在这些问题中，它提供了一个可靠和高效的工作框架。Drift-Diffusion (DD) 模型<sup>[1, 16-17, 23]</sup>是一种相对简单且广泛使用的半导体材料宏观数学模型。DD 模型是通过严格的数学推理从 Boltzmann 方程<sup>[2, 3]</sup>推导出来的，它通常采用蒙特卡罗方法进行数值求解，然而，在许多情况下，蒙特卡罗方法或直接确定性求解器的成本太高。人们通常想要使用更便宜的半导体模型，如 DD 模型，来近似于 Boltzmann 方程的宏观解。

Drift-Diffusion 模型<sup>[4]</sup>是由电子浓度方程和电子位势方程耦合而来的，由下面的方程给出：

$$\begin{aligned} n_t - \nabla \cdot (\mu E n) &= \tau \theta \Delta n, \\ \Delta \phi &= \frac{e}{\varepsilon} (n - n_d), \end{aligned}$$

其中  $E = -\nabla \phi(x, y)$  代表电场，未知函数为电子浓度  $n$  和电子位势  $\phi$ 。 $e$  是电子电荷； $\mu$  是迁移率； $\varepsilon$  是介电常数； $\tau = \frac{m\mu}{e}$  是弛豫参数； $\theta = \frac{k}{m} T_0$ ； $m$  是有效电子质量； $k$  是玻尔兹曼常数； $T_0$  是晶格温度； $n_d$  为给定函数的掺杂作为初值。

局部间断 Galerkin (LDG) 方法<sup>[5, 11-15, 18-22, 24]</sup>具有很多优点，它们可以很容易地设计成任何精度。精度可以在每个单元中局部确定，这允许有效的  $p$  自适应性；它们可以用于任意三角剖分，即使是那些有悬点的剖分，每个单元可根据需要做不同的网格剖分，这允许有效的  $h$  自适应性。该方法具有优良的并行效率。此外，它们通常具有良好的可证明的非线性稳定性。

在之前工作中，Liu-Shu 对半导体的各种模型进行了 LDG 方法求解，并给出了相应的理论分析和数值模拟。2004 年 Liu-Shu 应用 LDG 方法对一维 hydrodynamic (HD) 模型<sup>[6]</sup>和 energy-transport (ET) 模型<sup>[6]</sup>实现了数值模拟；2007 年 Liu-Shu 继续之前的研究，对二维 HD 模型<sup>[7]</sup>也进行了数值模拟；2010 年 Liu-Shu 给出了 drift-diffusion (DD) 模型<sup>[8]</sup>和 high-field (HF) 模型<sup>[8]</sup>LDG 方法的理论分析，得到了次优阶误差估计；2016 年 Liu-Shu 进一步对一维 DD 模型<sup>[9]</sup>进行了理论分析，巧妙地利用一个不等式使误差精度达到了最优。

对于 DD 模型<sup>[8-9]</sup>，之前的文献给出了一维 DD 模型 LDG 方法的收敛性分析及数值模拟，但没有进行对非均匀剖分的数值模拟以及二维问题数值模拟的研究。本文将继续

研究 DD 模型, 首先给出一维 DD 模型的 LDG 格式, 并完成一维情况下非均匀剖分的数值模拟。由于初始浓度在小范围内变化非常剧烈, 本文在模拟一维问题时采用非均匀网格剖分, 即在浓度变化剧烈的部分采用细网格, 在浓度变化平缓的地方采用粗网格, 并与均匀网格的数值模拟进行比较。非均匀剖分大大减少了单元网格数, 加快了运行速度。之后将给出二维问题的 LDG 格式, 完成了二维情况的理论分析并进行了数值模拟。

## 2 准备工作

### 2.1 基本符号

在这一部分中, 本节将介绍一些符号和定义, 并给出一些辅助结果。

首先给出有限元空间的一些基本符号。然后定义了一些投影, 并给出了将在误差分析中使用的有限元空间的某些特定插值和逆性质。

#### 2.1.1 一维情形

令  $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ ,  $j=1, 2, \dots, N$  是计算区域  $I$  的一个剖分区域, 网格长度为  $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ , 最大网格单元为  $h = \sup_j \Delta x_j$ , 网格中心为  $x_j = \frac{(x_{j-1/2} + x_{j+1/2})}{2}$ 。有限维计算空间为

$$V_h = V_h^k = \left\{ z : z|_{I_j} \in P^k(I_j), \forall x \in I_j, j=1, 2, \dots, N \right\},$$

其中  $P^k(I_j)$  表示定义在  $I_j$  上最高次数为  $k$  次的多项式集合。数值解和检验函数都来自空间  $V_h^k$ 。

分别记  $(u^h)_{j+1/2}^+ = u^h(x_{j+1/2}^+)$ ,  $(u^h)_{j+1/2}^- = u^h(x_{j+1/2}^-)$ , 定义  $(u^h)_{j+1/2}^+$  和  $(u^h)_{j+1/2}^-$  分别是  $u^h$  在  $x_{j+1/2}$  上从右边单元  $I_{j+1}$  得到的值, 和从左边单元  $I_j$  得到的值, 通常记  $[u^h] = (u^h)^+ - (u^h)^-$ ,  $\bar{u}^h = \frac{((u^h)^+ - (u^h)^-)}{2}$ 。  $[u^h]$  和  $\bar{u}^h$  分别表示函数  $u^h$  在每个单元边界节点的跳跃和平均值。

#### 2.1.2 二维情形

令  $\Omega_{i,j} = I_i \times I_j = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ ,  $i=1, 2, \dots, N_x$ ,  $j=1, 2, \dots, N_y$  是计算区域  $\Omega$  的一个剖分区域, 网格长度定义为  $h_i^x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $h_j^y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ , 网格中心为  $x_i = \frac{1}{2}(x_{i-1/2} + x_{i+1/2})$ ,  $y_j = \frac{1}{2}(y_{j-1/2} + y_{j+1/2})$ ,  $h^x = \max_{1 \leq i \leq N_x} h_i^x$ ,  $h^y = \max_{1 \leq j \leq N_y} h_j^y$ , 定义最大网格单元为  $h = \max(h^x, h^y)$ 。有限维计算空间为

$$Z_h = Z_h^k = \left\{ z : z \in Q^k(I_i \times I_j), \forall (x, y) \in I_i \times I_j, i=1, 2, \dots, N_x, j=1, 2, \dots, N_y \right\},$$

其中  $Q^k$  表示定义在  $\Omega_{i,j} = I_i \times I_j$  上每个变量都不高于  $k$  次的多项式的张量积空间。数值解和检验函数都将来自空间  $Z_h^k$ 。

通常记  $(u^h)^-_{i+1/2,y} = u^h(x^-_{i+1/2}, y)$  和  $(u^h)^+_{i+1/2,y} = u^h(x^+_{i+1/2}, y)$ , 定义  $(u^h)^-_{i+1/2,y}$  和  $(u^h)^+_{i+1/2,y}$  分别是  $u^h$  在  $x_{i+1/2}$  上从左边网格  $I_i \times I_j$  得到的值, 和从右边网格  $I_{i+1} \times I_j$  得到的值。同样的可以定义  $(u^h)^-_{x,j+1/2}$  和  $(u^h)^+_{x,j+1/2}$  分别是  $u^h$  在  $y_{j+1/2}$  上从下边网格  $I_i \times I_j$  得到的值, 和从上边网格  $I_i \times I_{j+1}$  得到的值, 本文用常规记号表示跳跃项  $[u^h]_{i+1/2,y} = (u^h)^+_{i+1/2,y} - (u^h)^-_{i+1/2,y}$  和均值  $\bar{u}^h_{i+1/2,y} = \frac{1}{2}((u^h)^+_{i+1/2,y} + (u^h)^-_{i+1/2,y})$ , 类似的可定义  $[u^h]_{x,j+1/2}$  和  $\bar{u}^h_{x,j+1/2}$ 。

## 2.2 投影和插值性质

### 2.2.1 一维情形

在下面的内容中, 本文将考虑具有  $k+1$  阶连续导数的函数  $u$ , 将  $u$  标准  $L^2$  投影到空间  $V_h^k$  中, 用  $P$  表示, 即对于每个  $j$ ,

$$\int_{I_j} (Pu(x) - u(x))v(x)dx = 0, \quad \forall v \in P^k(I_j), \quad (2-1)$$

以及  $V_h^k$  空间中的的特殊投影  $\varphi^\pm$ , 满足对每个  $j$

$$\begin{aligned} \int_{I_j} (P^+u(x) - u(x))v(x)dx &= 0, \quad \forall v \in P^{k-1}(I_j), \quad P^+u(x^+_{j-1/2}) = u(x_{j-1/2}), \\ \int_{I_j} (P^-u(x) - u(x))v(x)dx &= 0, \quad \forall v \in P^{k-1}(I_j), \quad P^-u(x^-_{j+1/2}) = u(x_{j+1/2}), \end{aligned}$$

由上面提到的投影<sup>[10]</sup>, 很容易得到

$$\|\omega\| + h\|\omega\|_{0,\infty} + h^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{k+1}, \quad (2-2)$$

其中  $\omega = Pu - u$  或  $\omega = P^\pm u - u$ ,  $\|\cdot\|$  指的是通常的  $L^2$  范数,  $\|\cdot\|_{0,\infty}$  指的是通常的  $L^\infty$  范数并且  $\|\eta\|_{\Gamma_h} = [\sum_{j=1}^N ((\eta^+_{j+1/2})^2 + (\eta^-_{j+1/2})^2)]^{\frac{1}{2}}$ , 正常数  $C$ , 只依赖  $u$ , 独立于  $h$ 。  $\Gamma_h$  表示所有单元  $I_j$  的边界点集合。

### 2.2.2 二维情形

在误差估计中, 本文需要用到二维投影误差性质。首先定义二维特殊投影<sup>[11]</sup>。在矩形单元  $\Omega_{i,j} = I_i \times I_j = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$  上, 定义

$$Pu = P_x \otimes P_y u, \quad P^\pm u = P_x^\pm \otimes P_y^\pm u, \quad (2-3)$$

其中下标  $x$  和  $y$  分别表示一维 Gauss-Radau 投影  $P$  或  $P^\pm$  在相应变量上的应用。这里列出投影  $P^\pm$  的一些性质<sup>[11]</sup>:

$$\int_{I_i} \int_{I_j} (P^\pm u(x, y) - u(x, y)) v(x, y) dy dx = 0, \quad (2-4)$$

对于  $\forall v \in (P^{k-1}(I_i) \otimes P^k(I_j)) \cup (P^k(I_i) \otimes P^{k-1}(I_j))$ 。

而且有

$$\begin{aligned} \int_{I_j} (P^+ u(x_{i-1/2}^+, y) - u(x_{i-1/2}^+, y)) v(x_{i-1/2}^+, y) dy &= 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j), \\ \int_{I_j} (P^- u(x_{i+1/2}^-, y) - u(x_{i+1/2}^-, y)) v(x_{i+1/2}^-, y) dy &= 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j), \end{aligned} \quad (2-5)$$

和

$$\begin{aligned} \int_{I_i} (P^+ u(x, y_{j-1/2}^+) - u(x, y_{j-1/2}^+)) v(x, y_{j-1/2}^+) dx &= 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j), \\ \int_{I_i} (P^- u(x, y_{j+1/2}^-) - u(x, y_{j+1/2}^-)) v(x, y_{j+1/2}^-) dx &= 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j), \end{aligned} \quad (2-6)$$

与一维情况类似, 由(2-3)中的投影可得到性质:

$$\|\eta\| + h \|\eta\|_{0,\infty} + h^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{k+1}, \quad (2-7)$$

其中  $\eta = Pu - u$  或  $\eta = P^\pm u - u$ , 正常数仅与  $\eta$  有关, 与  $h$  无关。这里由标准  $L^2$  投影性质<sup>[12]</sup>,

可知  $\|(Pu - u)_x\| \leq Ch^k$ ,  $\|(Pu - u)_y\| \leq Ch^k$ ,  $\|\cdot\|$  指的是通常的  $L^2$  范数,  $\|\cdot\|_{0,\infty}$  指的是通常的

$L^\infty$  范数,  $\Gamma_h$  表示所有单元  $I_i \times I_j$  上一系列边界点的集合。

### 2.3 逆性质

下面列出有限元空间  $V_h^k$  中的逆不等式。对  $\forall v \in V_h^k$ , 存在与  $V_h^k$  和  $h$  无关正常数  $C$ , 使得

$$(i) \quad \|v_x\| \leq Ch^{-1} \|v\|, \quad (2-8)$$

$$(ii) \quad \|v\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{\frac{1}{2}} \|v\|, \quad (2-9)$$

$$(iii) \quad \|v\|_{0,\infty} \leq Ch^{\frac{d}{2}} \|v\|, \quad (2-10)$$

其中， $d$  是空间维数，这里  $d=1$  或  $2$ ，更多的细节可参考文献<sup>[10]</sup>。

### 3 一维 Drift-Diffusion 模型

一维 DD 模型由下述方程描述:

$$n_t - (\mu En)_x = \tau \theta n_{xx}, \quad (3-1)$$

$$\phi_{xx} = \frac{e}{\varepsilon} (n - n_d), \quad (3-2)$$

其中  $x \in (0,1)$ , 第一个浓度方程取周期边界条件, 第二个电子位势方程取 Dirichlet 边界条件:  $\phi(0,t) = 0$ ,  $\phi(1,t) = v_{bias}$ 。  $E = -\phi_x$  表示电场。

#### 3.1 弱形式和 LDG 格式

LDG 方法的出发点是引入一个辅助变量, 将包含高阶空间导数的偏微分方程(3-1)重写为一个只包含一阶空间导数的较大的方程组。

设  $q = \sqrt{\tau \theta} n_x$ , 从而将方程(3-1)改写为

$$n_t - (\mu En)_x - \sqrt{\tau \theta} q_x = 0, \quad (3-3)$$

$$q - \sqrt{\tau \theta} n_x = 0. \quad (3-4)$$

为方便, 本文只对浓度方程采用 LDG 方法求解。对电子位势方程, 可用连续有限元方法求解。时间离散上可采用三阶 Runge-Kutta 方法<sup>[7]</sup>。

将方程(3-3) - (3-4)分别乘以检验函数  $v, w \in V_h^k$ , 并对所有涉及空间导数的项进行分部积分得到变分形式

$$\begin{aligned} \int_{I_j} n_t v dx + \int_{I_j} (\mu En + \sqrt{\tau \theta} q) v_x dx \\ - (\mu En + \sqrt{\tau \theta} q)_{j+1/2} v_{j+1/2}^- + (\mu En + \sqrt{\tau \theta} q)_{j-1/2} v_{j-1/2}^+ = 0, \end{aligned} \quad (3-5)$$

$$\int_{I_j} q w dx + \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} n w_x dx - \sqrt{\tau \theta} n_{j+1/2} w_{j+1/2}^- + \sqrt{\tau \theta} n_{j-1/2} w_{j-1/2}^+ = 0. \quad (3-6)$$

用  $V_h^k$  中的  $n^h$ 、 $q^h$  和  $E^h$  的数值近似代替上述方程中的精确解  $n$ 、 $q$  和  $E$ , 注意到数值解  $n^h$  和  $q^h$  在单元边界上是间断的, 则应该用合适的数值通量代替单元边界上的项, 得到 LDG 格式



$$\int_{I_j} (n^h)_i v dx + \int_{I_j} (\mu E^h n^h + \sqrt{\tau \theta} q^h) v_x dx - (\mu E^h \hat{n}^h + \sqrt{\tau \theta} \hat{q}^h)_{j+1/2} v_{j+1/2}^- + (\mu E^h \hat{n}^h + \sqrt{\tau \theta} \hat{q}^h)_{j-1/2} v_{j-1/2}^+ = 0, \quad (3-7)$$

$$\int_{I_j} q^h w dx + \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} n^h w_x dx - \sqrt{\tau \theta} \hat{n}^h_{j+1/2} w_{j+1/2}^- + \sqrt{\tau \theta} \hat{n}^h_{j-1/2} w_{j-1/2}^+ = 0, \quad (3-8)$$

其中“ $\hat{\cdot}$ ”项是数值通量，本文选择 $\hat{n}^h$ 和 $\hat{q}^h$ 的交替通量，即 $\hat{n}^h = (n^h)^+$ ， $\hat{q}^h = (q^h)^-$ 或者 $\hat{n}^h = (n^h)^-$ ， $\hat{q}^h = (q^h)^+$ ，对 $E^h n^h$ 选择迎风通量，即 $E^h n^h = \max(E^h, 0)(n^h)^+ + \min(E^h, 0)(n^h)^-$ 。

注意到辅助变量 $q^h$ 可以从方程(3-8)中局部求解，并代到方程(3-7)中。这就是为什么该方法被称为“局部”间断 Galerkin 方法，这也区分了 LDG 与经典混合有限元方法，其中辅助变量 $q^h$ 必须从全局方程组中求解。

### 3.2 一维 Drift-Diffusion 模型算例

本节模拟 1D DD 模型<sup>[8]</sup>，取长度为  $0.6 \mu m$ ，在其上定义掺杂函数  $n_d(x)$ ：当  $x \in [0, 0.07] \cup [0.53, 0.6]$  时， $n_d(x) = 5 \times 10^{17} cm^{-3} = 5 \times 10^5 \mu m^{-3}$ ；当  $x \in [0.13, 0.47]$  时， $n_d(x) = 2 \times 10^{15} cm^{-3} = 2 \times 10^3 \mu m^{-3}$ ；在中间过渡区域用平滑的曲线连接，如图 3-1 中(a)给出了  $n_d(x)$  的图像。

模型中的系数如下给出：取晶格温度  $T_0 = 300^\circ K$ 。常数取为  $k = 0.138 \times 10^{-4}$ ， $\varepsilon = 11.7 \times 8.85418$ ， $e = 0.1602$ ， $m = 0.26 \times 0.9109 \times 10^{-31} kg$ ， $\mu = 0.75$ 。

边界条件如下给出：在左边界， $\phi = \phi_0 = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{n_d}{n_i}\right)$ ，其中  $n_i = 1.4 \times 10^{10} cm^{-3}$ ；在右边

界， $\phi = \phi_0 + v_{bias}$ ，其中  $v_{bias} = 1.5$ 。在边界上，温度  $T = 300^\circ K$ ， $n = 5 \times 10^{17} cm^{-3}$ 。

在  $V_h^k$  中选择不同的基函数不会改变算法，本文可以选择在  $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  上的局部 Legendre 正交基：

$$v_0^{(j)}(x) = 1, \quad v_1^{(j)}(x) = x - x_j, \quad v_2^{(j)}(x) = (x - x_j)^2 - \frac{1}{12} \Delta x_j^2, \quad \dots$$

则数值解可以表示为

$$u^h(x,t)=\sum_{l=0}^k u_j^{(l)} v_l^{(j)}(x), \quad \text{对 } x \in I_j(u=n,q).$$

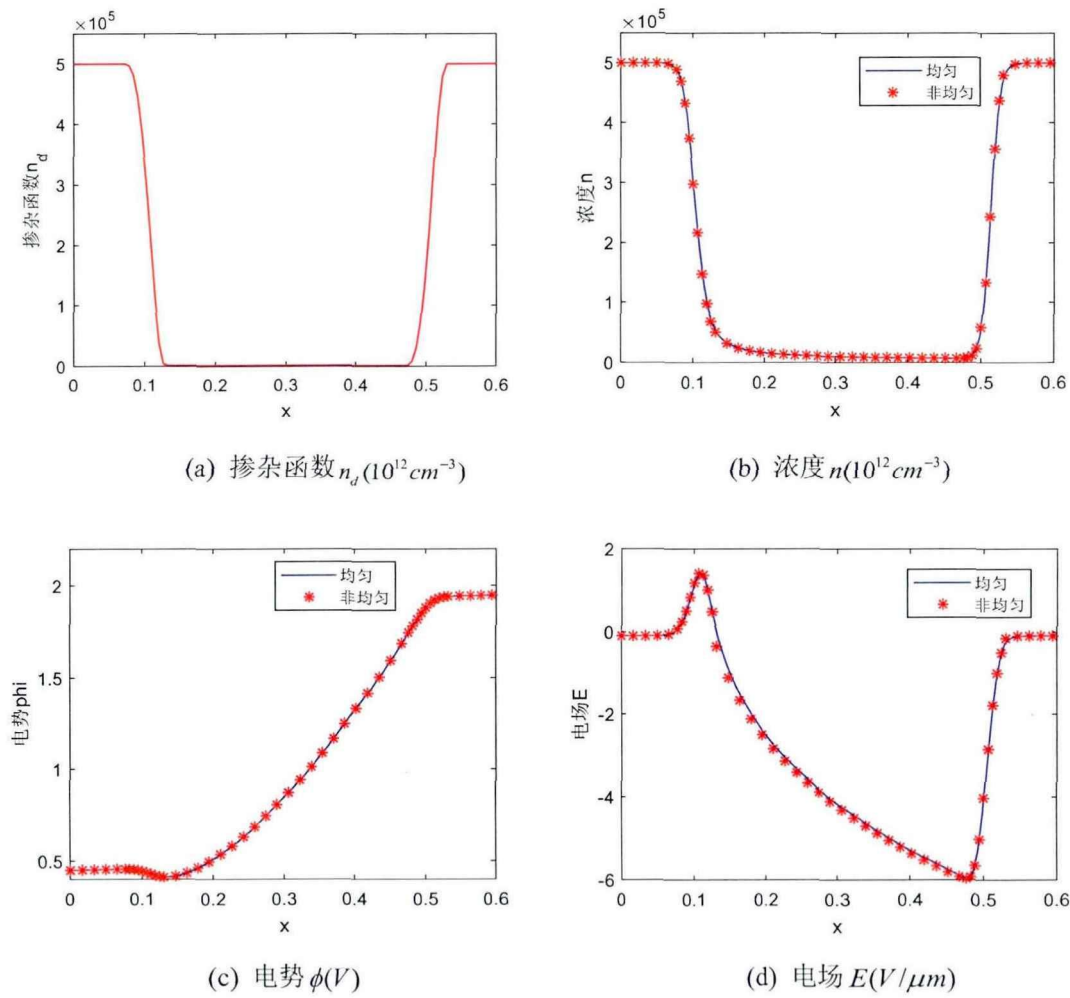


图 3-1 1D DD 模型比较：均匀剖分：100 个单元（实线）和非均匀剖分：50 个单元（星型线）

Fig. 3-1 1D DD model. Uniform division: 100 elements (solid lines), non-uniform division: 50 elements (star-shaped lines)

图 3-1 给出了利用均匀网格剖分和非均匀网格剖分进行数值模拟达到稳定状态时的比较（ $k=1, t=0.424 \text{ s}$ ）。在均匀剖分中，本文将求解区域平均分成 100 个单元；在非均匀剖分中，将求解区域分成 50 个单元：其中在解变化比较平缓的区域，即  $x \in [0, 0.07] \cup [0.13, 0.47] \cup [0.53, 0.6]$ ，剖分单元总数为 30 个单元，在解变化剧烈的区域，即  $x \in [0.07, 0.13] \cup [0.47, 0.53]$ ，剖分单元总数为 20 个单元。两种剖分相比较，在解变化剧烈区域单元数相同，在解变化平缓区域非均匀剖分单元数（30 个）比均匀剖分单元数

（80 个）大大减少，但两者得到的结果几乎相同，实现了在非均匀剖分下节省了空间单元数并加快了运行速度的目的。

## 4 二维 Drift-Diffusion 模型

二维 Drift-Diffusion 模型由以下方程描述:

$$n_t - \nabla \cdot (\mu E n) = \tau \theta \Delta n, \quad (4-1)$$

$$\Delta \phi = \frac{e}{\varepsilon} (n - n_d), \quad (4-2)$$

其中  $x \times y \in \Omega = (0,1) \times (0,1)$ , 第一个浓度方程为周期边界条件, 第二个电子位势方程为 Dirichlet 边界条件,  $E = -\nabla \phi(x, y)$  表示电场,  $E = (E_1, E_2)^T$  是一个向量。

### 4.1 弱形式和 LDG 格式

类似一维问题, 只对浓度方程采用 LDG 方法进行求解。引入辅助变量  $q_1 = \sqrt{\tau \theta} n_x$ ,  $q_2 = \sqrt{\tau \theta} n_y$ , 从而将方程(4-1)改写为

$$n_t - (\mu E_1 n)_x - (\mu E_2 n)_y - \sqrt{\tau \theta} q_{1,x} - \sqrt{\tau \theta} q_{2,y} = 0, \quad (4-3)$$

$$q_1 - \sqrt{\tau \theta} n_x = 0, \quad (4-4)$$

$$q_2 - \sqrt{\tau \theta} n_y = 0. \quad (4-5)$$

将方程(4-3) - (4-5)分别乘以检验函数  $v, w, z \in Z_h^k$ , 并对所有涉及空间导数的项进行分部积分得到变分形式

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_y} n_t v dx dy + \int_{\Omega_y} (\mu E_1 n + \sqrt{\tau \theta} q_1) v_x dx dy + \int_{\Omega_y} (\mu E_2 n + \sqrt{\tau \theta} q_2) v_y dx dy \\ & - \int_{I_j} (\mu E_1 n + \sqrt{\tau \theta} q_1) (x_{i+1/2}, y) v(x_{i+1/2}^-, y) dy \\ & + \int_{I_j} (\mu E_1 n + \sqrt{\tau \theta} q_1) (x_{i-1/2}, y) v(x_{i-1/2}^+, y) dy \\ & - \int_{I_i} (\mu E_2 n + \sqrt{\tau \theta} q_2) (x, y_{j+1/2}) v(x, y_{j+1/2}^-) dx \\ & + \int_{I_i} (\mu E_2 n + \sqrt{\tau \theta} q_2) (x, y_{j-1/2}) v(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0, \end{aligned} \quad (4-6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_y} q_1 w dx dy + \int_{\Omega_y} \sqrt{\tau \theta} n w_x dx dy \\ & - \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} n (x_{i+1/2}, y) w(x_{i+1/2}^-, y) dy + \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} n (x_{i-1/2}, y) w(x_{i-1/2}^+, y) dy = 0, \end{aligned} \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_y} q_2 z dx dy + \int_{\Omega_y} \sqrt{\tau \theta} n z_y dx dy \\ & - \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} n(x, y_{j+1/2}) z(x, y_{j+1/2}^-) dx + \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} n(x, y_{j-1/2}) z(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0. \end{aligned} \quad (4-8)$$

用  $Z_h^k$  中的  $n^h, q_1^h, q_2^h, E^h$  的数值解近似代替上述方程中的精确解  $n, q_1, q_2, E$ , 注意到数值解  $n^h, q_1^h, q_2^h$  和在单元边界上不是连续的, 则应该用合适的数值通量代替单元边界上的项, 得到 LDG 格式

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_y} (n^h)_t v dx dy + \int_{\Omega_y} (\mu E_1^h n^h + \sqrt{\tau \theta} q_1^h) v_x dx dy + \int_{\Omega_y} (\mu E_2^h n^h + \sqrt{\tau \theta} q_2^h) v_y dx dy \\ & - \int_{I_j} \left( \mu E_1^h \hat{n}^h + \sqrt{\tau \theta} \hat{q}_1^h \right) (x_{i+1/2}, y) v(x_{i+1/2}^-, y) dy \\ & + \int_{I_j} \left( \mu E_1^h \hat{n}^h + \sqrt{\tau \theta} \hat{q}_1^h \right) (x_{i-1/2}, y) v(x_{i-1/2}^+, y) dy \\ & - \int_{I_i} \left( \mu E_2^h \hat{n}^h + \sqrt{\tau \theta} \hat{q}_2^h \right) (x, y_{j+1/2}) v(x, y_{j+1/2}^-) dx \\ & + \int_{I_i} \left( \mu E_2^h \hat{n}^h + \sqrt{\tau \theta} \hat{q}_2^h \right) (x, y_{j-1/2}) v(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0, \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_y} q_1^h w dx dy + \int_{\Omega_y} \sqrt{\tau \theta} n^h w_x dx dy \\ & - \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \hat{n}^h(x_{i+1/2}, y) w(x_{i+1/2}^-, y) dy + \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \hat{n}^h(x_{i-1/2}, y) w(x_{i-1/2}^+, y) dy = 0, \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_y} q_2^h z dx dy + \int_{\Omega_y} \sqrt{\tau \theta} n^h z_y dx dy \\ & - \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \hat{n}^h(x, y_{j+1/2}) z(x, y_{j+1/2}^-) dx + \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \hat{n}^h(x, y_{j-1/2}) z(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0, \end{aligned} \quad (4-11)$$

这里对  $\hat{n}^h$ 、 $\hat{q}_1^h$  和  $\hat{q}_2^h$  选择交替数值通量, 即

$$\hat{n}^h = (n^h)^+, \hat{q}_1^h = (q_1^h)^-, \hat{q}_2^h = (q_2^h)^-,$$

或

$$\hat{n}^h = (n^h)^-, \hat{q}_1^h = (q_1^h)^+, \hat{q}_2^h = (q_2^h)^+,$$

本文采用的数值通量是

$$\hat{n}^h(x_{i+1/2}, y) = n^h(x_{i+1/2}^+, y), \hat{n}^h(x, y_{j+1/2}) = n^h(x, y_{j+1/2}^+),$$

$$\hat{q}_1^h(x_{i+1/2}, y) = q_1^h(x_{i+1/2}^-, y), \hat{q}_2^h(x, y_{j+1/2}) = q_2^h(x, y_{j+1/2}^-),$$

对  $E_1^h \hat{n}^h$  选择迎风格式, 取  $E_1^h \hat{n}^h = \max(E_1^h, 0)(n^h)^+ + \min(E_1^h, 0)(n^h)^-$ , 同理可得  $E_2^h \hat{n}^h$ 。

## 4.2 误差估计

**定理 4.1** 设  $n, q_1, q_2$  是问题(4-3) - (4-5)的精确解, 它有有界导数且足够光滑。设  $n^h, q_1^h, q_2^h$  为半离散 LDG 格式(4-9) - (4-11)的数值解, 并用  $e_u = u - u_h (u = n, q_1, q_2)$  表示相应的数值误差。如果有限元空间  $Z_h^k$  为自由度  $k \geq 1$  的分段多项式函数空间, 则对于足够小的  $h$  有如下的误差估计:

$$\|n - n^h\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|q - q^h\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq Ch^k, \quad (4-12)$$

其中  $q$  表示关于  $q_1, q_2$  的向量  $q = (q_1, q_2)^T$ , 常数  $C$  取决于最后的时间  $T$ ,  $k$ ,  $\|n\|_{L^\infty(0,T;H^{k+1})}$  和  $\|n_x\|_{0,\infty}, \|n_y\|_{0,\infty}$ 。

证明: 取(4-6)和(4-9)的差, (4-7)和(4-10)的差, 以及(4-8)和(4-11)的差, 得到以下误差方程

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{ij}} (n - n^h)_t v dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_1 n - E_1^h n^h) v_x dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} (q_1 - q_1^h) v_x dx dy \\ & - \int_{I_j} \mu \left( E_1 n - E_1^h n^h \right) (x_{i+1/2}, y) v(x_{i+1/2}^-, y) dy \\ & + \int_{I_j} \mu \left( E_1 n - E_1^h n^h \right) (x_{i-1/2}, y) v(x_{i-1/2}^+, y) dy \\ & - \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (q_1 - \hat{q}_1^h) (x_{i+1/2}, y) v(x_{i+1/2}^-, y) dy \\ & + \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (q_1 - \hat{q}_1^h) (x_{i-1/2}, y) v(x_{i-1/2}^+, y) dy \\ & + \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_2 n - E_2^h n^h) v_y dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} (q_2 - q_2^h) v_y dx dy \\ & - \int_{I_i} \mu \left( E_2 n - E_2^h n^h \right) (x, y_{j+1/2}) v(x, y_{j+1/2}^-) dx \\ & + \int_{I_i} \mu \left( E_2 n - E_2^h n^h \right) (x, y_{j-1/2}) v(x, y_{j-1/2}^+) dx \\ & - \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} (q_2 - \hat{q}_2^h) (x, y_{j+1/2}) v(x, y_{j+1/2}^-) dx \\ & + \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} (q_2 - \hat{q}_2^h) (x, y_{j-1/2}) v(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0, \end{aligned} \quad (4-13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{ij}} (q_1 - q_1^h) w dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} (n - n^h) w_x dx dy \\ & - \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (n - \hat{n}^h) (x_{i+1/2}, y) w(x_{i+1/2}^-, y) dy \\ & + \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (n - \hat{n}^h) (x_{i-1/2}, y) w(x_{i-1/2}^+, y) dy = 0, \end{aligned} \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{ij}} (q_2 - q_2^h) z dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} (n - n^h) z_y dx dy \\
 & - \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (n - \hat{n}^h) (x, y_{j+1/2}) z (x, y_{j+1/2}^-) dx \\
 & + \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} (n - \hat{n}^h) (x, y_{j-1/2}) z (x, y_{j-1/2}^+) dx = 0.
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

本文前面对  $\hat{n}^h$ 、 $\hat{q}_1^h$  和  $\hat{q}_2^h$  采取了交替数值通量，即  $\hat{n}^h = (n^h)^+$ ,  $\hat{q}_1^h = (q_1^h)^-$ ,  $\hat{q}_2^h = (q_2^h)^-$ 。

记误差  $e_u = u - u_h$  ( $u = n, q_1, q_2$ ) 即  $e_u = \xi_u - \eta_u$ ，其中  $\xi_n = P^+ n - n^h$ ， $\eta_n = P^+ n - n$ ； $\xi_{q_1} = P^- q_1 - q_1^h$ ， $\eta_{q_1} = P^- q_1 - q_1$ ； $\xi_{q_2} = P^- q_2 - q_2^h$ ， $\eta_{q_2} = P^- q_2 - q_2$ ；在方程(4-13) - (4-15)中取  $v = \xi_n$ ， $w = \xi_{q_1}$ ， $z = \xi_{q_2}$ ，则有

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{ij}} (\xi_n - \eta_n)_i \xi_n dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_1 n - E_1^h n^h) \xi_{n,x} dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} (\xi_{q_1} - \eta_{q_1}) \xi_{n,x} dx dy \\
 & - \int_{I_j} \mu (E_1 n - E_1^h n^h) (x_{i+1/2}, y) \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) dy \\
 & + \int_{I_j} \mu (E_1 n - E_1^h n^h) (x_{i-1/2}, y) \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) dy \\
 & - \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (\xi_{q_1} - \eta_{q_1}) (x_{i+1/2}^-, y) \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) dy \\
 & + \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (\xi_{q_1} - \eta_{q_1}) (x_{i-1/2}^+, y) \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) dy \\
 & + \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_2 n - E_2^h n^h) \xi_{n,y} dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} (\xi_{q_2} - \eta_{q_2}) \xi_{n,y} dx dy \\
 & - \int_{I_i} \mu (E_2 n - E_2^h n^h) (x, y_{j+1/2}) \xi_n (x, y_{j+1/2}^-) dx \\
 & + \int_{I_i} \mu (E_2 n - E_2^h n^h) (x, y_{j-1/2}) \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) dx \\
 & - \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} (\xi_{q_2} - \eta_{q_2}) (x, y_{j+1/2}^-) \xi_n (x, y_{j+1/2}^-) dx \\
 & + \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} (\xi_{q_2} - \eta_{q_2}) (x, y_{j-1/2}^+) \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) dx \\
 & = 0,
 \end{aligned} \tag{4-16}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{ij}} (\xi_{q_1} - \eta_{q_1}) \xi_{q_1} dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} (\xi_n - \eta_n) \xi_{q_1,x} dx dy \\
 & - \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (\xi_n - \eta_n) (x_{i+1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) dy \\
 & + \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} (\xi_n - \eta_n) (x_{i-1/2}^-, y) \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^+, y) dy = 0,
 \end{aligned} \tag{4-17}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{ij}} (\xi_{q_2} - \eta_{q_2}) \xi_{q_2} dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} (\xi_n - \eta_n) \xi_{q_2, y} dx dy \\
 & - \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} (\xi_n - \eta_n) (x, y_{j+1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) dx \\
 & + \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} (\xi_n - \eta_n) (x, y_{j-1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^-) dx = 0.
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

将以上三式(4-16) - (4-18)相加, 并关于  $i, j$  求和得到

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \xi_{n,i} \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \xi_{q_1}^2 dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \xi_{q_2}^2 dx dy \\
 & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \eta_{n,i} \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \eta_{q_1} \xi_{q_1} dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \eta_{q_2} \xi_{q_2} dx dy \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \eta_{q_1} \xi_{n,x} dx dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \eta_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) dy \right. \\
 & \left. - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \eta_{q_1} (x_{i-1/2}^-, y) \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) dy \right) \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \eta_{q_2} \xi_{n,y} dx dy - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \eta_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) \xi_n (x, y_{j+1/2}^-) dx \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \eta_{q_2} (x, y_{j-1/2}^-) \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) dx \right) \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N \left( \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \eta_n \xi_{q_1,x} dx dy + \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \eta_n \xi_{q_2,y} dx dy \right) \right. \\
 & - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \eta_n (x_{i+1/2}^-, y) \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \eta_n (x_{i-1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^+, y) dy \\
 & - \sum_{j=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \eta_n (x, y_{j+1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) dx + \sum_{j=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \eta_n (x, y_{j-1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^-) dx \left. \right) \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N \left( - \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \xi_{q_1} \xi_{n,x} dx dy - \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \xi_n \xi_{q_1,x} dx dy \right) \right. \\
 & + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^+, y) dy \\
 & - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^-, y) \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau \theta} \xi_n (x_{i+1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) dy \left. \right) \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N \left( - \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \xi_{q_2} \xi_{n,y} dx dy - \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau \theta} \xi_n \xi_{q_2,y} dx dy \right) \right. \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) \xi_n (x, y_{j+1/2}^-) dx - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^+) dx \\
 & - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^-) \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) dx + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau \theta} \xi_n (x, y_{j+1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) dx \left. \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N - \left( \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 n - E_1^h n^h) \xi_{n,x} dx dy \right) \right. \\
 & + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1 n - E_1^h n^h) (x_{i+1/2}, y) \xi_n(x_{i+1/2}^-, y) dy \\
 & - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1 n - E_1^h n^h) (x_{i-1/2}, y) \xi_n(x_{i-1/2}^+, y) dy \Big) \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N - \left( \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_2 n - E_2^h n^h) \xi_{n,y} dx dy \right) \right. \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu(E_2 n - E_2^h n^h) (x, y_{j+1/2}) \xi_n(x, y_{j+1/2}^-) dx \\
 & - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu(E_2 n - E_2^h n^h) (x, y_{j-1/2}) \xi_n(x, y_{j-1/2}^+) dx \Big) \\
 & = \sum_{s=1}^{10} T_s,
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

接下来, 估计  $T_s$  项。由投影性质(2-7), Schwartz 不等式以及 Young's 不等式, 可以得到

$$T_1 = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \eta_{n,i} \xi_n dx dy \leq C \int_{\Omega} \eta_{n,i}^2 dx dy + C \int_{\Omega} \xi_n^2 dx dy \leq Ch^{2k+2} + C \|\xi_n\|^2, \tag{4-20}$$

$$T_2 = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \eta_{q_1} \xi_{q_1} dx dy \leq C \int_{\Omega} \eta_{q_1}^2 dx dy + \tilde{\varepsilon} \int_{\Omega} \xi_{q_1}^2 dx dy \leq Ch^{2k+2} + \tilde{\varepsilon} \|\xi_{q_1}\|^2, \tag{4-21}$$

$$T_3 = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \eta_{q_2} \xi_{q_2} dx dy \leq C \int_{\Omega} \eta_{q_2}^2 dx dy + \tilde{\varepsilon} \int_{\Omega} \xi_{q_2}^2 dx dy \leq Ch^{2k+2} + \tilde{\varepsilon} \|\xi_{q_2}\|^2, \tag{4-22}$$

显然, 由投影(2-4) - (2-6), 有

$$\int_{\Omega_{ij}} \eta_n v(x, y) dx dy = 0, \quad \int_{\Omega_{ij}} \eta_{q_1} v(x, y) dx dy = 0, \quad \int_{\Omega_{ij}} \eta_{q_2} v(x, y) dx dy = 0,$$

对  $\forall v \in (P^{k-1}(I_i) \otimes P^k(I_j)) \cup (P^k(I_i) \otimes P^{k-1}(I_j))$ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{I_j} \eta_n v(x_{i+1/2}^-, y) dy = 0, \quad \int_{I_j} \eta_{q_1} v(x_{i+1/2}^-, y) dy = 0, \quad \int_{I_j} \eta_{q_2} v(x_{i+1/2}^-, y) dy = 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j), \\
 & \int_{I_j} \eta_n v(x_{i-1/2}^+, y) dy = 0, \quad \int_{I_j} \eta_{q_1} v(x_{i-1/2}^+, y) dy = 0, \quad \int_{I_j} \eta_{q_2} v(x_{i-1/2}^+, y) dy = 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j),
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 & \int_{I_i} \eta_n v(x, y_{j+1/2}^-) dx = 0, \quad \int_{I_i} \eta_{q_1} v(x, y_{j+1/2}^-) dx = 0, \quad \int_{I_i} \eta_{q_2} v(x, y_{j+1/2}^-) dx = 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j), \\
 & \int_{I_i} \eta_n v(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0, \quad \int_{I_i} \eta_{q_1} v(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0, \quad \int_{I_i} \eta_{q_2} v(x, y_{j-1/2}^+) dx = 0, \quad \forall v \in Q^k(I_i \otimes I_j),
 \end{aligned}$$

则可以得到

$$T_4 = 0, \quad T_5 = 0, \quad T_6 = 0, \quad (4-23)$$

而且有

$$\begin{aligned} T_7 &= \sum_{i,j=1}^N \left( -\int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_1} \xi_{n,x} dx dy - \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} \xi_n \xi_{q_1,x} dx dy \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^+, y) dy \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^-, y) \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i+1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) dy \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} -\sqrt{\tau\theta} \frac{d}{dx} (\xi_n \xi_{q_1}) dx dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^+, y) dy \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^-, y) \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i+1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) dy \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^+, y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) \xi_n (x_{i+1/2}^-, y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^+, y) dy \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_1} (x_{i-1/2}^-, y) \xi_n (x_{i-1/2}^+, y) dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x_{i+1/2}^+, y) \xi_{q_1} (x_{i+1/2}^-, y) dy \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4-24)$$

$$\begin{aligned} T_8 &= \sum_{i,j=1}^N \left( -\int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_2} \xi_{n,y} dx dy - \int_{\Omega_{ij}} \sqrt{\tau\theta} \xi_n \xi_{q_2,y} dx dy \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) \xi_n (x, y_{j+1/2}^-) dx - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^+) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^-) \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) dx + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x, y_{j+1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} -\sqrt{\tau\theta} \frac{d}{dy} (\xi_n \xi_{q_2}) dx dy \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) \xi_n (x, y_{j+1/2}^-) dx - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^+) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_2} (x, y_{j-1/2}^-) \xi_n (x, y_{j-1/2}^+) dx + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n (x, y_{j+1/2}^+) \xi_{q_2} (x, y_{j+1/2}^-) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n(x, y_{j-1/2}^+) \xi_{q_2}(x, y_{j-1/2}^+) dx - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n(x, y_{j+1/2}^-) \xi_{q_2}(x, y_{j+1/2}^-) dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_2}(x, y_{j+1/2}^-) \xi_n(x, y_{j+1/2}^-) dx - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n(x, y_{j-1/2}^+) \xi_{q_2}(x, y_{j-1/2}^+) dx \\
 &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_{q_2}(x, y_{j-1/2}^-) \xi_n(x, y_{j-1/2}^-) dx + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sqrt{\tau\theta} \xi_n(x, y_{j+1/2}^+) \xi_{q_2}(x, y_{j+1/2}^+) dx \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

以上两式(4-24) - (4-25)对 $T_7, T_8$ 的估计使用了 $n, n^h$ 和 $q_1, q_1^h$ 和 $q_2, q_2^h$ 的周期边界条件。关于(4-19)的最后两项 $T_9$ 和 $T_{10}$ ，可同理分析，下面先分析 $T_9$

$$\begin{aligned}
 T_9 &= \sum_{i,j=1}^N - \left( \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 n - E_1^h n^h) \xi_{n,x} dx dy \right) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1 n - E_1^h n^h)(x_{i+1/2}, y) \xi_n(x_{i+1/2}^-, y) dy \\
 &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1 n - E_1^h n^h)(x_{i-1/2}, y) \xi_n(x_{i-1/2}^+, y) dy \\
 &= \sum_{i,j=1}^N - \left( \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 n - E_1^h n^h) \xi_{n,x} dx dy \right) - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1 n - E_1^h n^h)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n]_{i+1/2,y} dy,
 \end{aligned}$$

为方便起见，注意到 $E^h$ 在单元间是连续的，则可表示为： $E_1^h \hat{n}^h = E_1^h n^h =$

$\max(E_1^h, 0)(n^h)^+ + \min(E_1^h, 0)(n^h)^-$ 。对 $T_9$ 采取加一项减一项处理，则有

$$\begin{aligned}
 T_9 &= \sum_{i,j=1}^N - \left( \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 n - E_1^h n^h) \xi_{n,x} dx dy \right) - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1 n - E_1^h n^h)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h (n^h - n) \xi_{n,x} dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1^h - E_1) n \xi_{n,x} dx dy \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) (\hat{n}^h - n)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1^h - E_1)(x_{i+1/2}, y) n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h (\eta_n - \xi_n) \xi_{n,x} dx dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) (\hat{\eta}_n - \hat{\xi}_n)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1^h - E_1) n \xi_{n,x} dx dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1^h - E_1)(x_{i+1/2}, y) n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 &= \left( - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h \xi_n \xi_{n,x} dx dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) \hat{\xi}_n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) \hat{\eta}_n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h \eta_n \xi_{n,x} dx dy \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_1^h - E_1) n \xi_{n,x} dx dy \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu (E_1^h - E_1)(x_{i+1/2}, y) n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \right) \\
 & = \sum_{s=1}^4 T_{9s},
 \end{aligned} \tag{4-26}$$

其中  $\hat{\xi}_n = \xi_n^+$  和  $\hat{\eta}_n = \eta_n^+(E_1^h > 0)$ ,  $\hat{\xi}_n = \xi_n^-$  和  $\hat{\eta}_n = \eta_n^-(E_1^h < 0)$ 。

同理可得  $T_{10}$  的推导结果:

$$\begin{aligned}
 T_{10} = & \left( - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_2^h \xi_n \xi_{n,y} dx dy - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu E_2^h(x, y_{j+1/2}) \hat{\xi}_n(x, y_{j+1/2}) [\xi_n](x, y_{j+1/2}) dx \right) \\
 & + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu E_2^h(x, y_{j+1/2}) \hat{\eta}_n(x, y_{j+1/2}) [\xi_n](x, y_{j+1/2}) dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_2^h \eta_n \xi_{n,y} dx dy \\
 & + \left( \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_2^h - E_2) n \xi_{n,y} dx dy \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu (E_2^h - E_2)(x, y_{j+1/2}) n(x, y_{j+1/2}) [\xi_n](x, y_{j+1/2}) dx \right) \\
 & = \sum_{s=1}^4 T_{10,s},
 \end{aligned} \tag{4-27}$$

其中  $\hat{\xi}_n = \xi_n^+$  和  $\hat{\eta}_n = \eta_n^+(E_2^h > 0)$ ,  $\hat{\xi}_n = \xi_n^-$  和  $\hat{\eta}_n = \eta_n^-(E_2^h < 0)$ 。

接下来先逐一估计  $T_{9s}$  项, 可同理分析  $T_{10,s}$ 。

首先, 做一个先验假设<sup>[8]</sup>

$$\|n - n^h\| \leq h, \tag{4-28}$$

先验假设意味着  $\|n^h\|_{0,\infty} \leq C$ , 而且有  $\|E_{1,x}\|_{0,\infty} \leq C$ ,  $\|E_{2,y}\|_{0,\infty} \leq C$  和  $\|E_1^h\|_{0,\infty} \leq C$ ,  $\|E_2^h\|_{0,\infty} \leq C$ 。

本文稍后会证明这一先验假设。

$$\begin{aligned}
 T_{91} = & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h (\xi_n^2)_x dx dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) \hat{\xi}_n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_{1,x}^h \xi_n^2 dx dy + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) [\xi_n^2](x_{i+1/2}, y) dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) \hat{\xi}_n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_{1,x}^h \xi_n^2 dx dy - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu |E_1^h|(x_{i+1/2}, y) [\xi_n]^2(x_{i+1/2}, y) dy, \\
 T_{10,1} & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_{2,y}^h \xi_n^2 dx dy - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu |E_2^h|(x, y_{j+1/2}) [\xi_n]^2(x, y_{j+1/2}) dx,
 \end{aligned}$$

利用 Young's 不等式, 有

$$\begin{aligned}
 T_{92} & = \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu E_1^h(x_{i+1/2}, y) \hat{\eta}_n(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & \leq C \|\eta_h\|_{\Gamma_h}^2 + \tilde{\varepsilon} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu |E_1^h|^2(x_{i+1/2}, y) [\xi_n]^2(x_{i+1/2}, y) dy, \\
 T_{10,2} & \leq C \|\eta_h\|_{\Gamma_h}^2 + \tilde{\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu |E_2^h|^2(x, y_{j+1/2}) [\xi_n]^2(x, y_{j+1/2}) dx,
 \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
 T_{91} + T_{92} & \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_{1,x}^h \xi_n^2 dx dy + C \|\eta_h\|_{\Gamma_h}^2 \\
 & \quad - \left( \frac{1}{2} - \tilde{\varepsilon} \right) \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu |E_1^h|^2(x_{i+1/2}, y) [\xi_n]^2(x_{i+1/2}, y) dy \\
 & \leq C \|\xi_n\|^2 + Ch^{2k+1},
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

$$T_{10,1} + T_{10,2} \leq C \|\xi_n\|^2 + Ch^{2k+1}, \tag{4-30}$$

上式利用了先验假设(4-28)的结论以及投影性质(2-7)。

$$\begin{aligned}
 T_{93} + T_{10,3} & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h \eta_n \xi_{n,x} dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_2^h \eta_n \xi_{n,y} dx dy \\
 & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_1^h \eta_n)_x \xi_n dx dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu (E_1^h \eta_n)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & \quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu (E_2^h \eta_n)_y \xi_n dx dy - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu (E_2^h \eta_n)(x, y_{j+1/2}) [\xi_n](x, y_{j+1/2}) dx \\
 & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_{1,x}^h \eta_n \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h \eta_{n,x} \xi_n dx dy \\
 & \quad - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu (E_1^h \eta_n)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & \quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_{2,y}^h \eta_n \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_2^h \eta_{n,y} \xi_n dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu(E_2^h \eta_n)(x, y_{j+1/2}) [\xi_n](x, y_{j+1/2}) dx \\
 & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_{1,x}^h + E_{2,y}^h) \eta_n \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h \eta_{n,x} \xi_n dx dy \\
 & \quad - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1^h \eta_n)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & \quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_2^h \eta_{n,y} \xi_n dx dy - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu(E_2^h \eta_n)(x, y_{j+1/2}) [\xi_n](x, y_{j+1/2}) dx \\
 & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu \left( \frac{e}{\varepsilon} (n^d - n^h) \right) \eta_n \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_1^h \eta_{n,x} \xi_n dx dy \\
 & \quad - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1^h \eta_n)(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & \quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu E_2^h \eta_{n,y} \xi_n dx dy - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \mu(E_2^h \eta_n)(x, y_{j+1/2}) [\xi_n](x, y_{j+1/2}) dx \\
 & = C \|\eta_n\|^2 + C \|\xi_n\|^2 + C \|\eta_{n,x}\|^2 + C \|\eta_{n,y}\|^2 \\
 & \leq Ch^{2k+2} + Ch^{2k} + C \|\xi_n\|^2 \leq Ch^{2k} + C \|\xi_n\|^2, \tag{4-31}
 \end{aligned}$$

上式利用到电势  $E_1$  和  $E_2$  的定义及性质, (2-7)式的推论, 标准  $L^2$  投影性质和 Schwartz 不等式。

最后估计  $T_{94}$  和  $T_{10,4}$ , 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
 T_{94} & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1^h - E_1) \eta \xi_{n,x} dx dy + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1^h - E_1)(x_{i+1/2}, y) \eta(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & = - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu((E_1^h - E_1)_x) \xi_n dx dy - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1^h - E_1)(x_{i+1/2}, y) \eta(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & \quad + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \mu(E_1^h - E_1)(x_{i+1/2}, y) \eta(x_{i+1/2}, y) [\xi_n](x_{i+1/2}, y) dy \\
 & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu((E_1 - E_1^h)_x) \xi_n dx dy \\
 & = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_{1,x} - E_{1,x}^h) \eta \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 - E_1^h) \eta_x \xi_n dx dy,
 \end{aligned}$$

同理

$$T_{10,4} = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_{2,y} - E_{2,y}^h) \eta \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_2 - E_2^h) \eta_y \xi_n dx dy,$$

故有

$$\begin{aligned}
 T_{94} + T_{10,4} &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_{1,x} - E_{1,x}^h) n \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 - E_1^h) n_x \xi_n dx dy \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_{2,y} - E_{2,y}^h) n \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_2 - E_2^h) n_y \xi_n dx dy \\
 &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_{1,x} + E_{2,y}) - (E_{1,x}^h + E_{2,y}^h) n \xi_n dx dy \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 - E_1^h) n_x \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_2 - E_2^h) n_y \xi_n dx dy \\
 &\leq \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \frac{e\mu}{\varepsilon} (n^h - n) n \xi_n dx dy \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_1 - E_1^h) n_x \xi_n dx dy + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(E_2 - E_2^h) n_y \xi_n dx dy \\
 &\leq \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \frac{e\mu}{\varepsilon} (\eta_n - \xi_n) n \xi_n dx dy + Ch^{2k+2} + C\|\xi_n\|^2 \\
 &\leq C\|\eta_n\|^2 + Ch^{2k+2} + C\|\xi_n\|^2 \leq Ch^{2k+2} + C\|\xi_n\|^2,
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

上式分析利用了 Schwartz 不等式和电势  $E_1$  和  $E_2$  的定义和逼近性质<sup>[8]</sup>, 其中  $C$  依赖于  $\|n_x\|_{0,\infty}$ ,  $\|n_y\|_{0,\infty}$  和  $\|n\|_{0,\infty}$ 。

然后将(4-29) - (4-32)代入到(4-26)和(4-27)中有

$$T_9 + T_{10} \leq Ch^{2k} + C\|\xi_n\|^2, \tag{4-33}$$

最后将(4-20) - (4-25), (4-33)代到(4-19)中得到

$$\frac{d}{dt} \|\xi_n\|^2 + \|\xi_{q_1}\|^2 + \|\xi_{q_2}\|^2 \leq Ch^{2k} + C\|\xi_n\|^2, \tag{4-34}$$

利用 Gronwall 不等式, 可得

$$\|\xi_n\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\xi_q\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq Ch^k \tag{4-35}$$

其中  $\xi_q$  是个向量,  $\xi_q = (\xi_{q_1}, \xi_{q_2})$ 。由上述不等式(4-35)和投影性质(2-7)得到误差估计(4-12)。

为了验证先验假设(4-28)。对  $k \geq 1$ , 本文可以考虑  $h$  足够小, 使  $Ch^{k+1} < \frac{1}{2}h$ , 其中  $C$  是(4-12)中的常数, 它是由最终时间  $T$  确定的。如果  $t^* = \sup\{t: \|n(t) - n^h(t)\| \leq h\}$ , 则如果  $t$  是有限的, 由连续性应有  $\|n(t^*) - n^h(t^*)\| = h$ 。另一方面, 这里的证明意味着(4-12)对  $t \leq t^*$  是

成立的，特别是  $\|n(t^*) - n^h(t^*)\| \leq Ch^{\frac{k+1}{2}} < \frac{1}{2}h$ 。如果  $t^* < T$ ，这是矛盾的。因此， $t^* \geq T$  并且先验假设(4-28)是正确的。

**备注 4.2** 如果使用连续 Galerkin 方法来求解泊松方程，这里对一维情况简要介绍，二维可同理分析。例如对混合有限元方法：寻找  $(E^h, \phi^h) \in W_h^{k+1} \times Z_h^k$  满足

$$\begin{cases} (E^h, v) - (\phi^h, v_x) = 0, & \forall v \in W_h^{k+1}, \\ (E_x^h, z) = \left( -\frac{e}{\varepsilon}(n - n_d), z \right), & \forall z \in Z_h^k, \end{cases}$$

其中  $Z_h^k = \{z \in L^2(I) : z|_{I_j} \in P^k(I_j)\}$ ,  $W_h^{k+1} = \{v \in C^0(I) : v|_{I_j} \in P^{k+1}(I_j)\}$ ，那么我们有<sup>[8]</sup>

$$\begin{aligned} |\xi_E| &\leq C \|n - n^h\|, \quad \|E^h\|_{0,\infty} \leq |E|_1 + C \|n - n^h\| + Ch \|E|_1, \\ \|E - E^h\| + |E - E^h| &\leq Ch^{k+1} + C \|n - n^h\|, \\ \|E - E^h\|_{0,\infty} &\leq Ch^{k+1} + C \|n - n^h\|. \end{aligned} \quad (4-36)$$

这里， $\xi_E = P^h E - E^h$  和  $P^h E$  是  $E$  的投影，详见<sup>[8]</sup>。

### 4.3 二维 Drift-Diffusion 模型算例

本节模拟 2D DD 模型<sup>[7]</sup>，取大小为  $0.6 \times 0.2 \mu m^2$  的二维 MESFET 器件模型。在其上定义掺杂函数  $n_d(x, y)$ ：当  $x \times y \in [0, 0.1] \times [0.15, 0.2]$  和  $x \times y \in [0.5, 0.6] \times [0.15, 0.2]$  时， $n_d(x, y) = 3 \times 10^{17} cm^{-3} = 3 \times 10^5 \mu m^{-3}$ ；在其他地方， $n_d(x, y) = 1 \times 10^{17} cm^{-3} = 1 \times 10^5 \mu m^{-3}$ ；中间过渡地方直接相互连接即可，如图 4-1 给出了  $n_d(x, y)$  的图像。

模型中系数及常数的具体取值见 1D DD 算例中。边界条件如下给出：

- 当  $0 \leq x \leq 0.1, y = 0.2$  时： $\phi = \phi_0$ ； $n = 3 \times 10^{17} cm^{-3}$ ； $T = 300^\circ K$ ；
- 当  $0.5 \leq x \leq 0.6, y = 0.2$  时： $\phi = \phi_0 + 2$ ； $n = 3 \times 10^{17} cm^{-3}$ ； $T = 300^\circ K$ ；
- 当  $0.2 \leq x \leq 0.4, y = 0.2$  时： $\phi = \phi_0 - 0.8$ ； $n = 3.9 \times 10^5 cm^{-3}$ ； $T = 300^\circ K$ ；
- 在边界上的所有其他部分，所有的变量均为齐次 Nuemann 边界条件。



在  $Z_h^k$  中选择不同的基函数不会改变算法，本文可以选择在  $\Omega_{ij} = I_i \times I_j = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  上的局部 Legendre 正交基：

$$v_0^{ij}(x, y) = 1, \quad v_1^{ij}(x, y) = x - x_i, \quad v_2^{ij}(x, y) = y - y_j, \quad v_3^{ij}(x, y) = (x - x_i)(y - y_j),$$

$$v_4^{ij}(x, y) = (x - x_i)^2 - \frac{1}{12} \Delta x_i^2, \quad v_5^{ij}(x, y) = (y - y_j)^2 - \frac{1}{12} \Delta y_j^2, \quad \dots$$

如果表示  $m(k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$ ，则数值解可以表示为：

$$u^h(x, y, t) = \sum_{l=0}^{m(k)} u_{ij}^{(l)} v_l^{(ij)}(x, y), \quad \text{对 } x \in \Omega_{ij} (u = n, q_1, q_2),$$

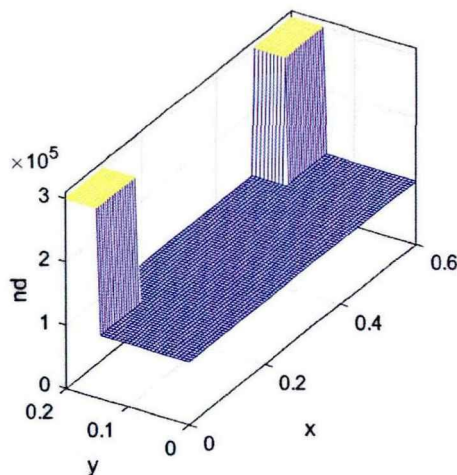


图 4-1 2D 区域  $[0, 0.6] \times [0, 0.2] (\mu\text{m}^2)$  上的掺杂函数  $n_d (10^{12} \text{cm}^{-3})$

Fig. 4-1 2D doping  $n_d (10^{12} \text{cm}^{-3})$  in  $[0, 0.6] \times [0, 0.2] (\mu\text{m}^2)$

在图 4-2 中，本文使用 LDG 方法在  $96 \times 32$  均匀网格单元上绘制了浓度  $n$ 、电势  $\phi$ 、电场  $E_x$  和电场  $E_y$  在达到稳定状态的图像 ( $t = 0.226 \text{ s}$ )，这里注意到，虽然初始值掺杂函数  $n_d$  在某些区域变化剧烈，从浓度的图像可以看出 LDG 方法依然能很好的模拟半导体问题的解。电场  $E_x$  和电场  $E_y$  在达到稳态时图像出现一些奇点，这是由 Dirichlet 边界和 Neumann 边界的跳跃性导致。

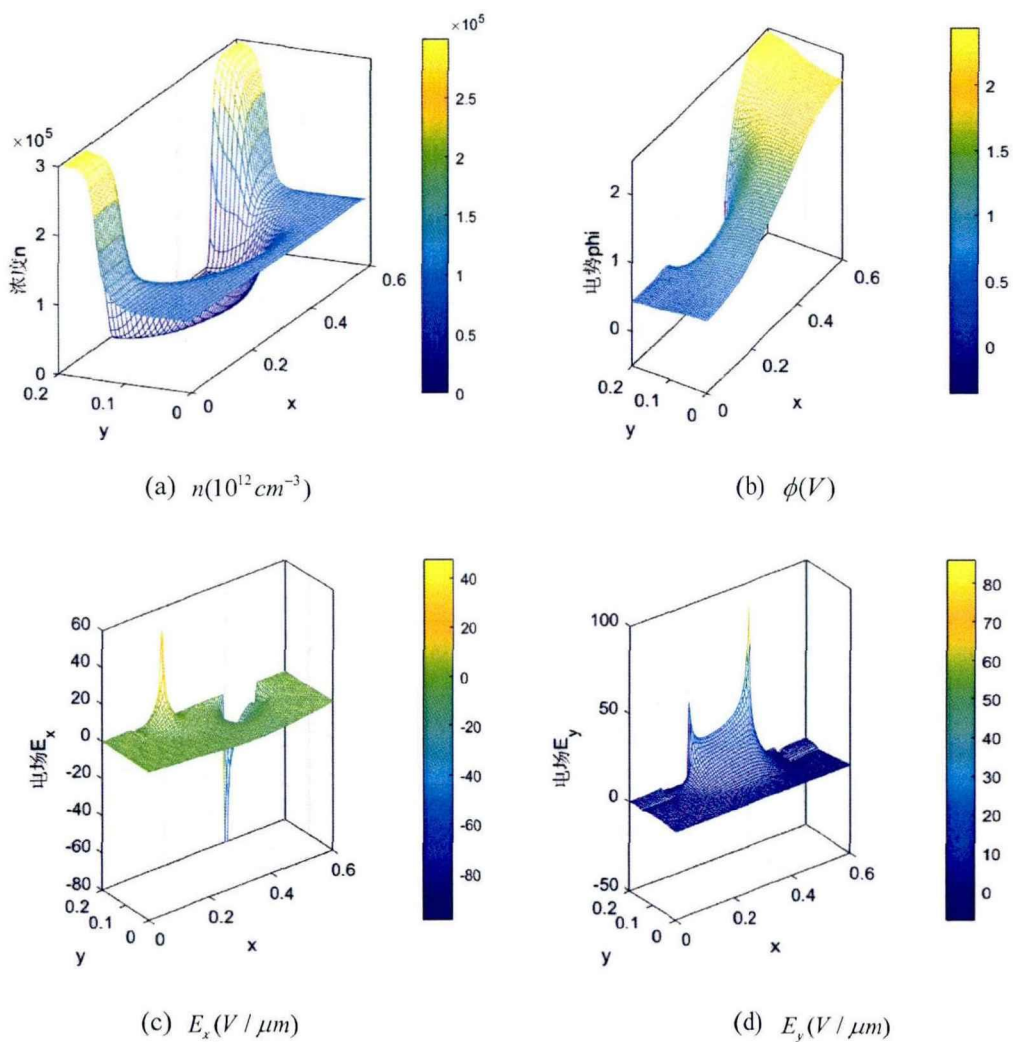


图 4-2 2D DD 模型，均匀剖分 $96 \times 32$ 个网格单元

Fig. 4-2 2D DD model, uniform division  $96 \times 32$  mesh elements

为了评估 LDG 方法的分辨率，在图 4-3 中，本文使用 LDG 方法分别在  $96 \times 32$  均匀网格单元上和  $72 \times 24$  均匀网格单元上绘制了浓度  $n$ 、电势  $\phi$ 、电场  $E_x$  和电场  $E_y$  达到稳定状态时在  $y = 0.175$  的一维切割图像，这里观察到，除了解有很大变化的区域，较为粗糙的  $72 \times 24$  网格已经产生了合理分辨率的结果。

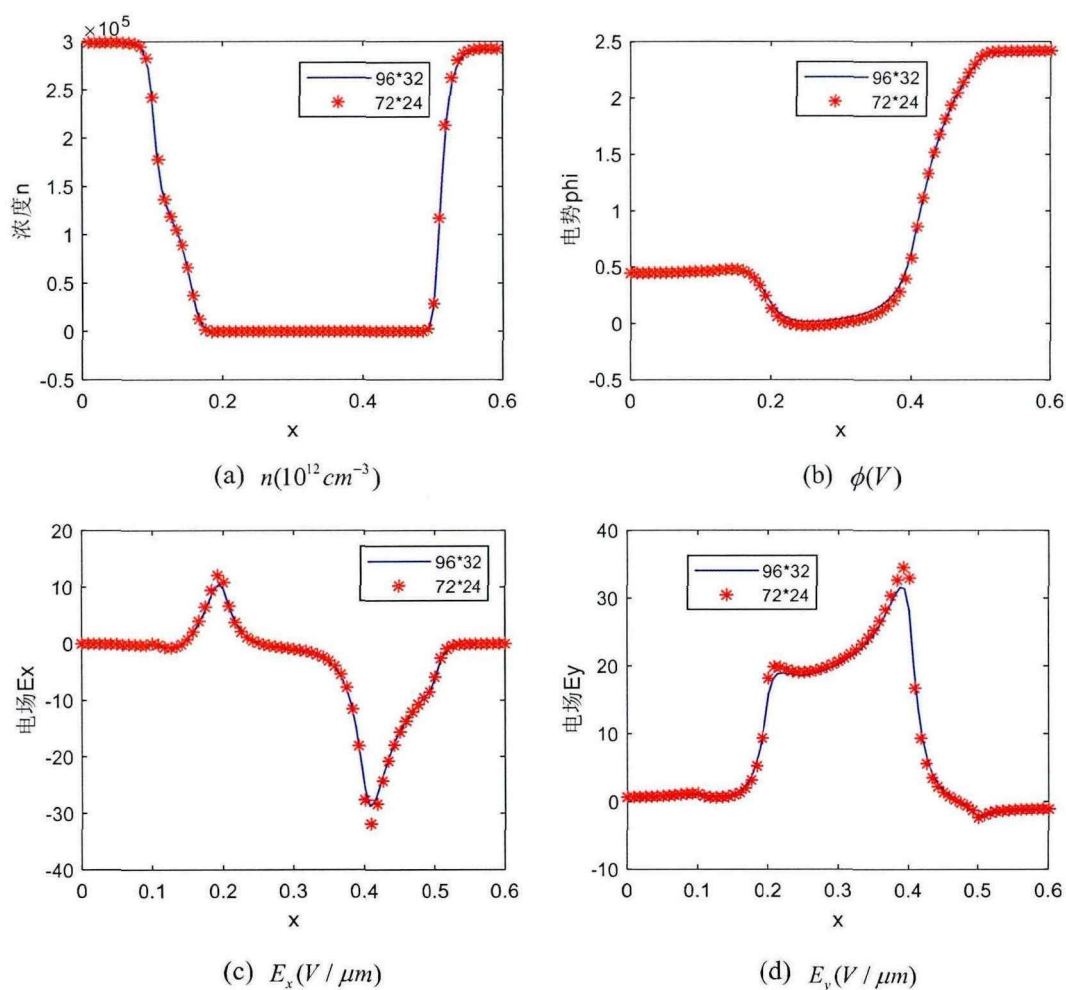


图 4-3 2D DD 模型在  $y=0.175$  的一维切割比较图。96×32 个网格单元（实线），72×24 个网格单元（星型线）

Fig. 4-3 2D DD model, Cuts at  $y=0.175$ . Results obtained with 96×32 uniform mesh(solid lines) versus those obtained with 72×24 uniform mesh(star-shaped lines)

## 结 论

本文利用 LDG 方法研究了半导体 DD 模型的一维和二维问题，其中都包括一阶导数对流项和二阶导数扩散项。首先给出了一维 DD 模型的 LDG 格式并进行了数值模拟，由于初始浓度在空间小范围内变化非常剧烈，本文用非均匀网格剖分一维问题，在浓度变化剧烈的区域采用细网格、在变化平缓的区域采用粗网格进行数值模拟，大大减少了剖分单元网格数，实现了在非均匀剖分下节省了空间单元数并加快了运行速度的目的。然后给出了二维 DD 模型的 LDG 格式并进行了误差分析和数值模拟，在二维误差分析中，由于非线性项的难以处理，本文的误差阶在次最优  $O(h^{k+\frac{1}{2}})$  基础上降低了半阶，得到了  $O(h^k)$  的误差估计，在今后的工作中，理论分析有待改进和完善之处。模拟二维问题时，采用了 Dirichlet 和 Neumann 相结合的边界条件，数值模拟结果验证了 LDG 方法对求解变化剧烈以及具有复杂边界的问题的数值稳定性。

从本文的研究中可以看出，局部间断 Galerkin 方法具有很多优点，相信它会有更加广泛的应用和更加充分的研究。



## 参考文献

- [1] MQRKOWICH P A, RINGHOFER C, SCHMEISER C. Semiconductor equation[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [2] GOLSE F. Knudsen layers from a computational viewpoint[J]. Transport theory and statistical physics, 1992, 21(3):211-236.
- [3] POUPAUD F. Diffusion approximation of the linear semiconductor boltzmann equation: analysis of boundary layers[J]. Asymptotic analysis, 1991, 4(4):293-317.
- [4] JEROME J W. Analysis of charge transport[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [5] YAN Jue, SHU Chiwang. A local discontinuous Galerkin method for KdV type equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, 40(2): 769-791.
- [6] LIU Yunxian, SHU Chiwang. Local discontinuous Galerkin methods for moment models in device simulations: formulation and one-dimensional results[J]. Journal of Computational Electronics, 2004, 3(3/4): 263-267.
- [7] LIU Yunxian, SHU Chiwang. Local discontinuous Galerkin methods for moment models in device simulations: performance assessment and two-dimensional results[J]. Applied Numerical Mathematics, 2007, 57(5): 629-645.
- [8] LIU Yunxian, SHU Chiwang. Error analysis of the semi-discrete local discontinuous Galerkin method for semiconductor device simulation models[J]. Science China Mathematics, 2010, 53(12): 3255-3278.
- [9] LIU Yunxian, SHU Chiwang. Analysis of the local discontinuous Galerkin method for the drift-diffusion model of semiconductor devices[J]. Science China Mathematics, 2016, 59(1): 115-140.
- [10] CIARLET P. The finite element method for elliptic problem[M]. Amsterdam: ScienceDirect, 1975.
- [11] XU Yan, SHU Chiwang. Error estimates of the semi-discrete local discontinuous Galerkin method for nonlinear convection diffusion and KdV equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(37/40): 3805-3822.
- [12] XU Yan, SHU Chiwang. Local discontinuous Galerkin methods for two classes of two dimensional nonlinear wave equations[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2005, 208(1): 21-58.
- [13] CHEN Z X, COCKBURN B. Analysis of a finite element method for the drift-diffusion semiconductor device equations: the multidimensional case[J]. Numerische Mathematik,

- 1995, 71(1): 1-28.
- [14] COCKBURN B, SHU Chiwang. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2001, 16(3): 173-261.
- [15] COCKBURN B, SHU Chiwang The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(6): 2440-2463.
- [16] GAMB I M, SQUEFF M C J. Simulation of the transient behavior for a one-dimensional semiconductor device II[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1989, 26(3): 539-552.
- [17] CHEN Zhangxin, COCKBURN B, JEROME J, and SHU Chiwang. Mixed-RKDG finite element methods for the 2-D hydrodynamic model for semiconductor device simulation[J]. VLSI Design, 1995, 3(2):145-158.
- [18] COCKBURN B, DONG B, GUZMAN J. Optimal convergence of the original discontinuous Galerkin method for the transport-reaction equation on special meshes[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008, 46(3): 1250-1265.
- [19] YAN Jue, SHU Chiwang. A local discontinuous Galerkin method for KdV type equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 40(2): 769-791.
- [20] YAN Jue, SHU Chiwang. Local discontinuous Galerkin methods for partial differential equations with higher order derivatives[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 17(1/2/3/4): 27-47.
- [21] ZHANG Qiang, SHU Chiwang. Error estimates to smooth solutions of Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for scalar conservation laws[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2004, 42(2): 641-666.
- [22] ZHANG Qiang, SHU Chiwang. Error estimates to smooth solutions of Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for symmetrizable systems of conservation laws[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, 44(4): 1703-1720.
- [23] 仝佩. 半导体问题 Drift-Diffusion 模型的配置方法及误差估计[D]. 山东:山东大学, 2014.
- [24] CHEN HS. Pointwise error estimates of the local discontinuous Galerkin method for a second order elliptic problem[J]. Mathematics of computation, 2005, 74(251): 1097-1116.

## 致 谢

时光荏苒，光阴如梭，三年的硕士生涯即将结束。回首三年的研究生时光，目光所及，皆是回忆，执笔至此，心中满是不舍和感激。

桃李不言，下自成蹊。首先，我要衷心感谢尊敬的导师刘蕴贤教授。我的3年研究生学习是在刘蕴贤教授的严格要求、悉心指导、热情鼓励下完成的。她不仅教我们如何做学问，还教我们如何做人。我所取得的每一点进步，都离不开刘老师的辛勤培育。从论文开题到定稿，几个月来，每当我有疑问时，刘老师都给予我耐心的指导和帮助，使我不会迷失方向，从刘老师身上我学到了严谨认真的学术态度，并发现了自身的许多不足。借此机会，我谨向刘老师表示最崇高的敬意和最诚挚的谢意。

学得贵师，亦得贵友。其次，还要感谢所有帮助过我的老师和同学们，尤其感谢李旭师兄对我程序上的指导和帮助。

春晖寸草，山高海深。此外，感谢我的父母二十多年来对我的支持和付出，感谢我的家人们对我的呵护与关爱。初见乍惊欢，久处仍怦然。感谢我的男朋友对我的关心、陪伴和理解，许我安稳护我周全，始于初见止于终老。

气有浩然，学无止境。最后，感谢山东大学数学学院对我的培养和教育。





## 攻读学位期间发表的学术论文目录

肖红单, 刘蕴贤. 半导体 Drift-Diffusion 模型的局部间断 Galerkin 方法及数值模拟, 山东大学学报 (理学版), 2022. (已录用)



学位论文评阅及答辩情况表

论文评阅人	姓 名		专业技术 职 务	是否博导 (硕导)	所 在 单 位		总体评价
	匿名评阅						良好
	匿名评阅						优秀
	匿名评阅						良好
答辩委员会成员	姓 名		专业技术 职 务	是否博导 (硕导)	所 在 单 位		
	主席	陈焕贞	教授	博导	山东师范大学		
	委 员	芮洪兴	教授	博导	山东大学数学学院		
		杜宁	教授	博导	山东大学数学学院		
		付树军	教授	博导	山东大学数学学院		
		程爱杰	教授	博导	山东大学数学学院		
	答辩委员会对论文的 总体评价		优秀	答辩秘书	赵文举	答辩日期	2022.05.20
备注							