部分习题

6.11

考虑波包

$$A(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\Delta\omega)e^{i[\Delta\omega t-\Delta k(\omega)z]}d(\Delta\omega)$$

作二阶展开

$$\Delta k(\omega)=\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}\cdot\Delta\omega+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0}\cdot(\Delta\omega)^2$$

令 $a=\frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}\Big|_{\omega=\omega_0}$ 则有

$$A(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\Delta\omega)e^{i\left[\Delta\omega t-\frac{z}{v_g}\Delta\omega+a(\Delta\omega)^2z\right]}$$

取高斯波包 $G(\Delta\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\Delta\omega^2/4\alpha}$, 其中脉冲宽度 $\tau_0=\sqrt{\frac{2\ln 2}{\alpha}}$, 带入积分计算得到

$$A(z,t)=N\exp[i\varphi(z,t)]\exp\left(\frac{\left(t-\frac{z}{vg}\right)^2}{\frac{1}{\alpha}+16\alpha a^2z^2}\right)$$

其中 N 为归一化因子, 而 $\varphi(z,t)$ 是一实函数, 由此得脉冲宽度

$$\tau(z)=\sqrt{\frac{2\ln 2}{\alpha}}\sqrt{1+16a^2\alpha^2z^2}\simeq\tau_0 4|a|\alpha z=4\ln 2\frac{L}{\tau_0}\left.\frac{d^2k}{dw^2}\right|_{w=w_0}$$

最后的 z 取 L, 而且

$$\left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0}=\frac{d}{d\omega}\frac{dk}{d\omega}=-\frac{1}{v_g^2}\frac{dv_g}{d\omega}$$

或者, 频率为 $\omega_0+\frac{1}{2}\Delta\omega$ 的部分和 $\omega_0-\frac{1}{2}\Delta\omega$ 的部分, 在不同时刻到达 L 处, 时间差为

$$\Delta\tau=\frac{L}{v_g\left(\omega+\frac{1}{2}\Delta w\right)}-\frac{L}{v_g\left(\omega-\frac{1}{2}\Delta\omega\right)}=\left(\frac{1}{v_g+\left.\frac{dv_g}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}\cdot\frac{1}{2}\Delta\omega}-\frac{1}{v_g-\left.\frac{dv_g}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}\cdot\frac{1}{2}\Delta\omega}\right)=-\frac{L}{\nu_g^2}\left.\frac{dv_g}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}\cdot\Delta\omega$$

其中 $\Delta\omega=\frac{1}{\pi\tau_0}$, 于是得到题中给出的展宽.

6.12

光斑尺寸由下式决定,

$$\omega=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(\frac{1}{nn_2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

而展宽后的总脉冲宽度为

$$\tau+\Delta\tau=\frac{L}{v_g^2}\frac{n_2/n}{k^3}(l+m+1)^2\frac{1}{\pi\tau}+\tau$$

从而每秒最多发送的脉冲数量, 由上面的脉冲宽度决定, 即 $1/(\tau+\Delta\tau)$.

6.13

令 $\psi(x,y)=f(x)g(y)$, 则分离变量可得

$$\begin{cases} \frac{f''(x)}{f(x)}-k^2\frac{n_2}{n}x^2=-\lambda_x \\ \frac{g''(y)}{g(y)}-k^2\frac{n_2}{n}y^2=-\lambda_y \\ k^2-\beta^2-\lambda_x-\lambda_y=0 \end{cases}$$

再引入下面变量进行无量纲化处理

$$\xi=\frac{\sqrt{2}x}{\omega}, \omega=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(\frac{1}{n\pi_2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

得到 $f''(\xi)+\left(\lambda'-\xi^2\right)f(\xi)=0$, 所以 $\lambda'=2l+1$, 而

$$f(x)=H\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega}\right)e^{-\left(\frac{x}{\omega}\right)^2}$$

对 y 也类似处理, 有

$$\psi(x,y)=E_{(l,m)}H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega}\right)H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega^2}}$$

再利用 $k^2-\beta^2-\lambda_x-\lambda_y=0$ 可得

$$\beta_{l,m}=k\sqrt{1-\frac{2}{k}\sqrt{\frac{n_2}{n}}(l+m+1)}$$

7.1 由 PPT 知

$$Q=\omega t_c \tag{1}$$

$$t_c=\frac{nl}{c\left[\alpha l+\left(1-\sqrt{R_1R_2}\right)\right]} \tag{2}$$

假设对光学腔和微波腔均有

$$\alpha=0, n=1, R_1=R_2=R$$

则

$$t_c=\frac{l}{c(1-R)}$$

所以差异仅仅在 ω 上. 因此光学腔的 Q 值比微波腔高 3 到 6 个数量级.

7.2 Design a resonator with $R_1=-20$ cm, $R_2=32$ cm, $l=16$ cm, $\lambda=10^{-4}$ cm. Determine

1. the minimum spot sizeω_0
2. Its location
3. The spot size ω_1 and ω_2 at the mirrors
4. the ratios of ω_0, ω_1, and ω_2 to their respective confocal $(-R_1=R_2=l)$ values.

1. 由 PPT 知

$$\begin{cases} z_0^2 = \dfrac{l(R_2 - R_1 - l)(l + R_1)(l - R_2)}{(2l + R_1 - R_2)^2} \\ z_0 = \dfrac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \end{cases}$$

将数值代入公式得

$$\begin{aligned} z_0^2 &= \frac{l(R_2 - R_1 - l)(l + R_1)(l - R_2)}{(2l + R_1 - R_2)^2} \\ &= \frac{16 \cdot 36(-4)(-16)}{(-20)^2} \\ &= \frac{2304}{25} \\ z_0 &= 9.6 \text{ cm} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{10^{-4} \cdot 9.6}{\pi}} \\ &= 1.75 \times 10^{-2} \text{ cm} \end{aligned}$$

2. 由 PPT 知

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2}\left(R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 4z_0^2}\right) \\ z_2 = \dfrac{1}{2}\left(R_2 \pm \sqrt{R_2^2 - 4z_0^2}\right) \end{cases}$$

Note that z_1, z_2 will have two value from which we choose the value exactly satisfying $z_2 - z_1 = l$ and that is the expected result.

代入数值得

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\left(R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 4z_0^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 9.6^2}\right) = \frac{1}{2}(-20 \pm 5.6) = -7.2 \text{ or } -12.8 \text{ cm} \\ z_2 &= \frac{1}{2}\left(32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 9.6^2}\right) = \frac{1}{2}(32 \pm 25.6) = 28.8 \text{ or } 3.2 \text{ cm} \end{aligned}$$

so

$$z_1 = -12.8 \text{ cm}, \quad z_2 = 3.2 \text{ cm}$$

3.use the Gaussian parameter relation

$$\omega(z) = \omega_0 \left(1 + z^2/z_0^2\right)^{1/2}$$

代入数值得

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \left(1 + z_1^2/z_0^2\right)^{1/2} = \omega_0(1 + 12.8^2/9.6^2)^{1/2} = \frac{5}{3}\omega_0 \ (= 2.92 \times 10^{-2} \text{ cm}) \\ \omega_2 &= \omega_0 \left(1 + z_2^2/z_0^2\right)^{1/2} = \omega_0(1 + 3.2^2/9.6^2)^{1/2} = \frac{\sqrt{10}}{3}\omega_0 \ (= 1.84 \times 10^{-2} \text{ cm}) \end{aligned}$$

4. 由 PPT 知

$$\begin{cases} \omega_{0,\text{conf}} = \sqrt{l/k} \\ \omega_{1,2,\text{conf}} = \sqrt{2}\omega_{0,\text{conf}} \end{cases}$$

代入数值得

$$\omega_{0,\mathrm{conf}} = \sqrt{\frac{\lambda l}{2\pi}} = \sqrt{\frac{10^{-4}\cdot 16}{2\pi}} = 1.60\times 10^{-2}\ \mathrm{cm}$$
$$\omega_{1,2,\mathrm{conf}} = \sqrt{2}\omega_{0,\mathrm{conf}} = 2.26\times 10^{-2}\ \mathrm{cm}$$

7.5

见图，计算 $1\to 2$ 这一个周期的传输矩阵 T

在二元周期透镜中令 $f_2 = f, f_1 = -f$

得

$$T = \begin{pmatrix} 1 - l/f & 2l - l^2/f \\ -l/f^2 & l/f - l^2/f^2 + 1 \end{pmatrix}$$
$$b = \frac{1}{2}(A+D) = 2 - l^2/f^2$$

最后是正弦震荡, 题目说的“净聚焦”有误导性

7.6 对于对称腔, 束腰位于腔中心, 因此有

$$z_2 = -z_1 = \frac{l}{2}, \quad R_2 = -R_1 = R$$

代入

$$z_0^2 = \frac{l(R_2 - R_1 - l)(l + R_1)(l - R_2)}{(2l + R_1 - R_2)^2}$$

得

$$z_0^2 = \frac{1}{4} l(2R - l)$$

再由高斯光束的参数关系

$$\omega_0^2 = \frac{2z_0}{k} = \frac{2}{k}\sqrt{l(2R-l)}$$
$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(1 + z_{1,2}^2/z_0^2\right)^{1/2} = \omega_0 \left(1 + \frac{l}{2R - l}\right)^{1/2} = \omega_0 \left(\frac{2R}{2R-l}\right)^{1/2}$$

7.7

由

$$\begin{cases} R_1 = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1} \\ R_2 = z_2 + \frac{z_0^2}{z_2} \end{cases}$$

代入

$$g_1 g_2 = \left(1 - \frac{l}{R_1}\right)\left(1 - \frac{l}{R_2}\right)$$

时注意 R_1 要变号，得到

$$g_1 g_2 = \frac{\left(z_0^2 + z_1 z_2\right)^2}{\left(z_1^2 + z_0^2\right)\left(z_2^2 + z_0^2\right)} \geqslant 0$$

再设 $g_1 g_2 \leqslant 1$, 并展开消项, 得到 $2z_1 z_2 \leqslant z_1^2 + z_2^2$, 所以确实有 $g_1 g_2 \leqslant 1$.

7.9

以第二面反射镜处为参考面, 则传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4l^2+R_1R_2-2l(2R_1+R_2)}{R_1R_2} & l\left(2-\frac{2l}{Rl}\right) \\ -2\frac{(-2l+R_1+R_2)}{R_1R_2} & l-\frac{2l}{Rl} \end{pmatrix}$$

由 7.2-7 式可得

$$R(z=\text{第二面反射镜处})=\frac{2B}{D-A}$$

将矩阵元带入化简得 $\frac{2B}{D-A}=R_2$.

对于 R_1 镜面, 选取参考面在 R_1 处, 也可以得到类似证明.

7.10

由 7.2-3 可得

$$\frac{1}{q}=\frac{C+D/q}{A+B/q}$$

设函数

$$f(x)=\frac{C+Dx}{A+Bx},\delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\simeq\frac{\Delta x}{(A+Bx)^2}$$

在上式右边的 x 中带入稳态解 7.2-5 得

$$\delta f=e^{\mp i2\theta}\Delta x$$

其中 Δx 代表 $\Delta(1/q)$, 而 δf 代表 $\delta(1/q)$. 显然当满足稳定条件的时候, 即 θ 是实数, 则有

$$\left|\delta\left(\frac{1}{q}\right)\right|=\left|\Delta\left(\frac{1}{q}\right)\right|$$

8.3

按照 $r=r_0\cos(\omega t)$ 简谐振动的电子, 能量为

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\omega^2r^2=\frac{1}{2}m\omega^2r_0^2$$

按照拉莫尔公式, 辐射功率为

$$P=\frac{e^2\dot{r}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$$

于是寿命为

$$t_{\text{经典}}=\frac{E}{P}=\frac{6\pi\varepsilon_0c^3m}{e^2\omega^2}=\frac{3\varepsilon_0c^3m}{2\pi e^2\nu^2}$$

8.5

令 $\dot{\sigma}_{21}=0,\dot{\rho}_{11}-\dot{\rho}_{22}=0$ 得到关于 σ_{21} 和 $\rho_{11}-\rho_{22}$ 达到稳态时的方程组

$$\mathrm{i}\left(\omega-\omega_0\right)\sigma_{21}+\mathrm{i}\Omega\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)-\frac{\sigma_{21}}{T_2}=0 \quad ①$$

$$2\mathrm{i}\Omega\left(\sigma_{21}-\sigma_{21}^*\right)-\frac{\rho_{11}-\rho_{22}-\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)_0}{\tau}=0 \quad ②$$

Theorem 0.1. *上述方程组的解为*

$$Im\left[\sigma_{21}\right]=\frac{\Omega T_2\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)_0}{1+\left(\omega-\omega_0\right)^2T_2^2+4\Omega^2T_2\tau}$$

$$Re\left[\sigma_{21}\right]=\frac{-\left(\omega-\omega_0\right)\Omega T_2^2\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)_0}{1+\left(\omega-\omega_0\right)^2 T_2^2+4\Omega^2 T_2\tau}$$
$$\rho_{11}-\rho_{22}=\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)_0\frac{1+\left(\omega-\omega_0\right)^2 T_2^2}{4\Omega^2 T_2\tau+1+\left(\omega-\omega_0\right)^2 T_2^2}$$

证明. 由①解出 σ_{21}

$$\sigma_{21}=\frac{\mathrm{i}\Omega\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)}{\frac{1}{T_2}-\mathrm{i}\left(\omega-\omega_0\right)} \quad ③$$

把③代回②解得

$$\rho_{11}-\rho_{22}=\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)_0\frac{1+\left(\omega-\omega_0\right)^2 T_2^2}{4\Omega^2 T_2\tau+1+\left(\omega-\omega_0\right)^2 T_2^2} \quad ④$$

把④代回①解得

$$\mathrm{Im}\left[\sigma_{21}\right]=\frac{\Omega T_2\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)_0}{1+\left(\omega-\omega_0\right)^2 T_2^2+4\Omega^2 T_2\tau}$$
$$\mathrm{Re}\left[\sigma_{21}\right]=\frac{-\left(\omega-\omega_0\right)\Omega T_2^2\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)_0}{1+\left(\omega-\omega_0\right)^2 T_2^2+4\Omega^2 T_2\tau}$$

□

8.6

$$\chi(\omega)=\chi'(\omega)-i\chi''(\omega)=\frac{\mu\Delta N_0}{\varepsilon_0\hbar}\frac{\omega-\left[\omega_0-\left(i/T_2\right)\right]}{\left\{\omega-\left[\omega_0-\left(i/T_2\right)\sqrt{(1+s^2)}\right]\right\}\left\{\omega-\left[\omega_0+\left(i/T_2\right)\sqrt{1+s^2}\right]\right\}}$$

在 $s^2=\mu^2E_0^2T_2\tau/\hbar^2\propto E_0^4=0$ 时,

$$\chi(\omega)=-\frac{\mu\Delta N_0}{\varepsilon_0\hbar}\frac{1}{\omega-\left[\omega_0+\left(i/T_2\right)\right]}$$

在 ω 下半平面有单极点, 满足 Kramers-Kronig 定理的条件.

9.2

由 9.1-21 式, 当有横向约束时, 内部损耗 α 增大, 由

$$\nu=\nu_m-\left(\nu-\nu_0\right)\frac{c\left[\alpha-1/l\ln\left(r_1r_2\right)\right]}{2\pi n\Delta\nu}$$

可知, 激光共振频率将会稍稍远离无源腔共振频率.

利用 9.1-18 式,

$$\nu_m=\frac{mc}{2nl}+\frac{c}{2\pi nl}\left(\tan^{-1}\frac{z_2}{z_0}-\tan^{-1}\frac{z_1}{z_0}\right)$$

再利用 $\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab}$ 可以化简. 对于共焦腔, 利用 6.6-13 和 7.1-10 可得 $z_0=l/2$, 所以有

$$\nu_m=\frac{mc}{2nl}+\frac{c}{2\pi nl}\arctan\frac{lz_0}{z_0^2+z_1z_2}$$

利用

$$z_1=-\frac{l}{2},z_2=\frac{l}{2}$$

代入可得

$$\arctan\frac{lz_0}{z_0^2+z_1z_2}=\arctan\frac{\frac{1}{2}l^2}{\frac{1}{4}l^2-\frac{1}{4}l^2}=\frac{\pi}{2}$$

所以共焦腔有

$$\nu_m=\frac{mc}{2nl}+\frac{c}{4nl}$$

而当 $z_0\gg l$ 时, $\arctan\frac{lz_0}{z_0^2+z_1z_2}=0$, 所以,

$$\nu_m=\frac{mc}{2nl}$$

9.3

在 F-P 腔中, 即考虑特例 $\omega_0\to\infty$, 则有 $\varphi(z_1),\varphi(z_2)\to 0$

这时

$$\begin{cases}\nu_{m,\text{dead}}=\dfrac{c}{2nl}\left[m-\dfrac{1}{2\pi}(\theta_1+\theta_2)\right]\\ \nu_m\left[1+\dfrac{\chi'(\nu_m)}{2n^2}\right]=\nu_{m,\text{dead}}\end{cases}$$

则

$$\frac{c}{2nl}\left[m-\square\right]=\nu_m\left[1+\frac{\chi'(\nu_m)}{2n^2}\right]$$
$$\frac{c}{2nl}\left[m+1-\square\right]=\nu_{m+1}\left[1+\frac{\chi'(\nu_{m+1})}{2n^2}\right]$$

作差得到

$$\frac{c}{2nl}=\nu_{m+1}-\nu_m+\frac{1}{2n^2}\left[\nu_{m+1}\chi'(\nu_{m+1})-\nu_m\chi'(\nu_m)\right]$$

计算其中的项

$$\begin{aligned}\nu_{m+1}\chi'(\nu_{m+1})-\nu_m\chi'(\nu_m)&=(\nu_{m+1}-\nu_m)\chi'(\nu_{m+1})+\nu_m\left[\chi'(\nu_{m+1})-\chi'(\nu_m)\right]\\&=(\nu_{m+1}-\nu_m)\chi'(\nu_{m+1})+\nu_m(\nu_{m+1}-\nu_m)\frac{\mathrm{d}\chi'(\nu)}{\mathrm{d}\nu}|_{\nu=\nu_m}\\&=(\nu_{m+1}-\nu_m)\left[\chi'(\nu_{m+1})+\nu_m\frac{\mathrm{d}\chi'(\nu)}{\mathrm{d}\nu}|_{\nu=\nu_m}\right]\end{aligned}$$

所以

$$\frac{c}{2nl}=(\nu_{m+1}-\nu_m)\left[1+\frac{1}{2n^2}\chi'(\nu_{m+1})+\frac{1}{2n^2}\nu_m\frac{\mathrm{d}\chi'(\nu)}{\mathrm{d}\nu}|_{\nu=\nu_m}\right]$$

移项即得答案 (跟答案比多了一项, 答案错了吧)

9.4

式 9.2-14 中, ω_l 是无源腔的振荡频率, 而 ω 是实际激光频率. 因此实际上 ω_l 对应 9.1-17 中令 $\chi'=0$ 的 ω, 而 ω 则直接就是 9.1-17 中的 ω. 二者作差得到

$$\omega_l - \omega\left[1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2}\right] = 0$$

因此

$$\omega_l^2 - \omega^2 \simeq \omega^2 \frac{\chi'(\nu)}{n^2} \tag{*}$$

将 9.1-14 带入 9.1-14a 中, 得到

$$e^{\left(-k\frac{\chi''(\nu)}{n^2} - \alpha\right)\cdot l} = \frac{1}{r_1 r_2}$$

即

$$\frac{\omega n}{c} \cdot \frac{x''(\nu)}{n^2} = -\alpha + \frac{1}{l}\ln(r_1 r_2)$$

令

$$\sigma = \left[\alpha - \frac{1}{l}\ln\left(r_1 r_2\right)\right]\frac{c}{n} \cdot \varepsilon$$

则有

$$\frac{\omega\chi''(\nu)}{n^2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

以 $(-i)$ 乘以上式并加上 $(*)$ 式可得

$$\omega_c^2 - \omega^2 + i\frac{\sigma\omega}{\varepsilon} = \omega^2 \frac{1}{n^2}\left(\chi'(\nu) - i\chi''(\nu)\right)$$

9.6

稳态时有 $\frac{d}{dt}N_i = 0$,

$$\begin{cases} R_2 - \frac{N_2}{t_1} - \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1\right)W_i(\nu) = 0 \\ R_1 - \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_{21}} + \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1\right)W_i(\nu) = 0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\left(\frac{1}{t_2} + W_i\right)N_2 - R_2}{\frac{g_2}{g_1}W_i} \\ N_2 = \frac{t_2 R_2 + (R_1 + R_2)t_1 t_2 \frac{g_2}{g_1}W_i}{1 + W_i\left[t_2 + (1-\delta)\frac{g_2}{g_1}\right]} \end{cases}$$

所以

$$\Delta N \equiv N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1 = \frac{R_2 t_2 - \left(R_1 + \delta R_2\right)t_1\frac{g_2}{g_1}}{1 + \left[t_2 + (1-\delta)t_1\frac{g_2}{g_1}\right]W_i(\nu)}$$

11.1 (a): A 显示强度调制的基本分量，可看到基频信号。B 显示强度调制的功率谱，可看到一个峰值很高的拍频信号。C 显示光场功率谱，可看到不同谱线对应的强度，中间高，两边低。D 显示光强，可看到多个等强度等间隔的高峰值脉冲。

(b): 锁模可使拍频信号功率增加 N 倍。

14.2 对于横向电光调制器，双折射会产生附加的相位差 $\varphi=(n_o-n_e)k_0l$, 因为温度变化时，n_o, n_e 会变化，所以附加相位也会随温度发生漂移，影响调制器的正常工作

14.3 利用公式

$$\sin[a\sin t]=2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n-1}(a)\sin[(2n-1)t]$$

则

$$\frac{I_o}{I_i}=\frac{1}{2}\left[1+\sin\left(\Gamma_m\sin\omega_m t\right)\right]=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n-1}(\Gamma_m)\sin[(2n-1)\omega_m t]$$

$$I_3=\mathrm{J}_3(\Gamma_m)\sin(3\omega_m t)\rightarrow\frac{1}{2}\mathrm{J}_3(\Gamma_m)$$

$$I_1=\mathrm{J}_1(\Gamma_m)\sin(\omega_m t)\rightarrow\frac{1}{2}\mathrm{J}_1(\Gamma_m)$$

则

$$\frac{I_3}{I_1}=\frac{\mathrm{J}_3(\Gamma_m)}{\mathrm{J}_1(\Gamma_m)}$$

要使

$$f(\Gamma_m)=\frac{\mathrm{J}_3(\Gamma_m)}{\mathrm{J}_1(\Gamma_m)}<0.01$$

则要求

$$\Gamma_m<0.5$$

$$\big(f(0.48)=0.0097404, f(0.5)=0.0105822\big)$$