Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Docente: Fred Torres Cruz
Autor : Luz Magaly Turpo Mamani
Código : 227325
Link github: https://github.com/luz897/ACTIVIDAD-03

Trabajo Encargado - N° 003

Actividad N° 3 - El lenguaje de la optimización

Ejercicio 2.2

Sea $f : R^n \to R$ y $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in R^n$. Demuestra que $f(x^*)$ es un máximo de f si y solo si $-f(x^*)$ es un mínimo de $-f$.

Demostración

- Definición de máximo: Decimos que $f(x^*)$ es un *máximo* de f en R^n si:

  $$\forall x \in R^n,\ f(x) \leq f(x^*)$$

  Esto significa que $f(x^*)$ es el valor más grande que f puede tomar en todo R^n.

- Definición de mínimo: Decimos que $-f(x^*)$ es un *mínimo* de $-f$ en R^n si:

  $$\forall x \in R^n,\ -f(x) \geq -f(x^*)$$

  Esto significa que $-f(x^*)$ es el valor más pequeño que $-f$ puede tomar en todo R^n.

- Relación entre máximo y mínimo: Si $f(x^*)$ es un máximo de f, entonces para todo $x \in R^n$, tenemos:

  $$f(x) \leq f(x^*)$$

  Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por -1 (invirtiendo la desigualdad), obtenemos:

  $$-f(x) \geq -f(x^*)$$

  Lo cual implica que $-f(x^*)$ es un mínimo de $-f$.

  Si $-f(x^*)$ es un mínimo de $-f$, entonces para todo $x \in R^n$, tenemos:

  $$-f(x) \geq -f(x^*)$$

  Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por -1, obtenemos:

  $$f(x) \leq f(x^*)$$

  Lo cual implica que $f(x^*)$ es un máximo de f.

Conclusión

Hemos demostrado que $f(x^*)$ es un máximo de f si y solo si $-f(x^*)$ es un mínimo de $-f$. Esto establece la equivalencia entre los máximos de una función y los mínimos de su opuesto.

Ejercicio 2.3

Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de algún conjunto $S \subseteq R$. Demuestra que $s_1 = s_2$, estableciendo que el supremo de un conjunto es único.

Demostración

Definición de supremo

El *supremo* de un conjunto $S \subseteq R$, denotado por $\sup S$, cumple las siguientes dos propiedades:

1. s_1 es una *cota superior* de S, es decir, para todo $x \in S$:
$$x \in S \implies x \leq s_1.$$
2. s_1 es la *mínima cota superior*, lo que significa que si M es cualquier otra cota superior de S (es decir, $x \leq M$ para todo $x \in S$), entonces:
$$s_1 \leq M.$$

De manera similar, s_2 también es un supremo de S, por lo que se cumple que:

1. s_2 es una cota superior de S, es decir, para todo $x \in S$:
$$x \in S \implies x \leq s_2.$$
2. s_2 es la mínima cota superior, lo que implica que si M es una cota superior de S, entonces:
$$s_2 \leq M.$$

Relación entre s_1 y s_2

Ya que tanto s_1 como s_2 son supremos de S, vamos a demostrar que $s_1 = s_2$.

- Dado que s_1 es una cota superior de S y s_2 es la cota superior mínima de S, por la propiedad de minimalidad del supremo, tenemos que:
$$s_1 \leq s_2.$$
- De manera similar, dado que s_2 es una cota superior de S y s_1 es la cota superior mínima de S, también se cumple que:
$$s_2 \leq s_1.$$

Conclusión

Dado que hemos demostrado que $s_1 \leq s_2$ y $s_2 \leq s_1$, por la propiedad de antisimetricidad de las desigualdades, podemos concluir que:

$$s_1 = s_2.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que si s_1 y s_2 son supremos de un conjunto $S \subseteq R$, entonces $s_1 = s_2$, lo que establece que el supremo de un conjunto es único:

$$\boxed{s_1 = s_2}.$$

Nota

Una demostración similar se puede utilizar para el *ínfimo* de un conjunto $S \subseteq R$, mostrando que, si ínf S existe, también es único.