Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Docente: Fred Torres Cruz
Autor : Luz Magaly Turpo Mamani
Código : 227325
Link github: https://github.com/luz897/ACTIVIDAD-03

Trabajo Encargado - N° 003

Actividad N° 003 - Complejidad computacional

Ejercicio 3.2

Demuestre que $x^2 + x + 1$ is $O(x^2)$ pero no $O(x)$.

- **Demostración de que $x^2 + x + 1$ es $O(x^2)$ pero no es $O(x)$**

  Para demostrar que $x^2 + x + 1$ es $O(x^2)$, debemos encontrar una constante $c > 0$ y un valor x_0 tal que:

  $$|x^2 + x + 1| \leq c \cdot |x^2| \quad \text{para todo} \quad x \geq x_0.$$

  Tomamos $x \geq 1$. Para estos valores de x, el término dominante en $x^2 + x + 1$ es x^2. Podemos ver que:

  $$x^2 + x + 1 \leq x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2.$$

  Por lo tanto, podemos tomar $c = 3$ y $x_0 = 1$. Así, la función $x^2 + x + 1$ es $O(x^2)$, ya que para $x \geq 1$, se cumple la desigualdad:

  $$x^2 + x + 1 \leq 3x^2.$$

  Ahora, probemos que x^2+x+1 no es $O(x)$. Si lo fuera, entonces existiría una constante c' tal que:

  $$x^2 + x + 1 \leq c' \cdot x \quad \text{para todo} \quad x \geq x_0.$$

  Pero para valores grandes de x, el término x^2 crece mucho más rápido que x. De hecho, la desigualdad no se cumple para valores grandes de x. Esto significa que $x^2 + x + 1$ no es $O(x)$.

- **Resolución del Sistema de Ecuaciones**

Consideramos el sistema de ecuaciones dado por la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & -3 & -8 & -14 \\ 6 & 0 & -7 & -15 \end{pmatrix}$$

Realizamos las operaciones de fila necesarias para triangularizar la matriz.

1. Primera operación:

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

Esto nos da la nueva matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -7 & -15 \end{pmatrix}$$

2. Segunda operación:

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

Esto nos da la matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Tercera operación:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$$

Esto nos da la matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora que tenemos la matriz triangular superior, usamos sustitución hacia atrás para encontrar los valores de las incógnitas.

- **Sustitución hacia atrás**

1. De la última ecuación obtenemos:

$$2x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{6}{2} = 3.$$

2. Sustituimos $x_3 = 3$ en la segunda ecuación:

$$3x_2 + 2(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-6}{3} = -2.$$

3. Sustituimos $x_2 = -2$ y $x_3 = 3$ en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3(-2) + 5(3) &= 7 \\ -2x_1 - 6 + 15 &= 7 \\ -2x_1 + 9 &= 7 \\ -2x_1 &= -2 \\ x_1 &= 1. \end{aligned}$$

- **Respuesta**

  La solución del sistema de ecuaciones es:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3.$$

Prueba de escritorio de Complejidad $f(x) = x^2 + x + 1$

En la expresión $f(x) = x^2 + x + 1$, tenemos:

Paso	Multiplicaciones	Sumas
1	1(para x^2)	2(para $x^2 + x + 1$)

La función $f(x) = x^2 + x + 1$ requiere una multiplicación y dos sumas. Para grandes valores de x, el término x^2 domina, por lo que $f(x)$ es $O(x^2)$.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Para grandes x, $f(x) = x^2$. El error relativo es:

$$\text{Error relativo} = \frac{x+1}{x^2}.$$

El error tiende a 0 a medida que $x \to \infty$.

x	# operaciones	$\frac{x^2+x+1}{x^2}$	% error
1	3	3	200 %
2	3	1,75	75 %
3	3	1,5555	55,55 %
4	3	1,375	37,5 %
5	3	1,24	24 %
10	3	1,11	11 %
100	3	1,01	1 %
1000	3	1,001	0,1 %
10000	3	1,0001	0,01 %

Codigo.py > ...

```python
import numpy as np
import streamlit as st
import matplotlib.pyplot as plt

A = np.array([
    [-2, 3, 5],
    [0, 3, 2],
    [0, 0, 2]
])

b = np.array([7, 0, 6])

def back_substitution(A, b):
    n = len(b)
    x = np.zeros(n)

    x[n-1] = b[n-1] / A[n-1, n-1]

    for i in range(n-2, -1, -1):
        sum_ax = 0
        for j in range(i+1, n):
            sum_ax += A[i, j] * x[j]
        x[i] = (b[i] - sum_ax) / A[i, i]

    return x

x_values = back_substitution(A, b)

st.write(f"Solución del sistema:")
st.write(f"x1 = {x_values[0]:.2f}")
st.write(f"x2 = {x_values[1]:.2f}")
st.write(f"x3 = {x_values[2]:.2f}")

def f1(x):
    return x**2 + x + 1

def f2(x):
    return x**2

x = np.linspace(0, 10, 400)
y1 = f1(x)
y2 = f2(x)

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x, y1, label=r'$x^2 + x + 1$', color='purple')
plt.plot(x, y2, label=r'$x^2$', color='green', linestyle='--')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('Comparación entre $x^2 + x + 1$ y $x^2$')
plt.legend()

st.pyplot(plt)
```

Figura 1: Código en python

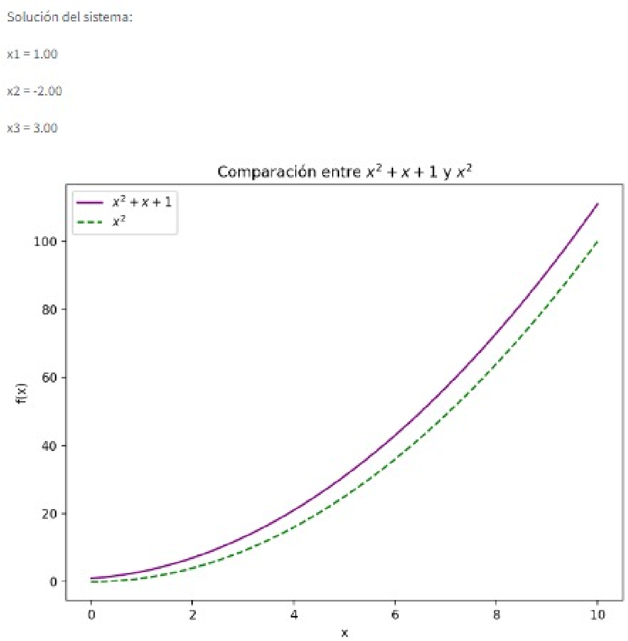

Figura 2: Gráfico