Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Docente: Fred Torres Cruz
Autor : Luz Magaly Turpo Mamani
Programa web : https://optimizacion-nolineal.streamlit.app/

Trabajo Encargado - N° 09

Optimización No Lineal

Ejercicio 01

Demostrar que $f(x) = 3x + 2$ es convexa en R

1. **Seleccionar dos puntos en el dominio:** Elijamos $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

2. **Elegir un valor de λ:** Tomemos $\lambda = 0{,}5$, que representa el punto medio entre x_1 y x_2.

3. **Calcular la combinación convexa de x_1 y x_2:**

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 3 = 2$$

4. **Evaluar $f(x)$ en el punto intermedio:**

$$f(x) = f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

5. **Calcular la combinación convexa de $f(x_1)$ y $f(x_2)$:**

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(3)$$

$$= 0{,}5 \cdot (3 \cdot 1 + 2) + 0{,}5 \cdot (3 \cdot 3 + 2) = 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 11 = 8$$

6. **Comparar los resultados:**

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = 8 \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = 8$$

La desigualdad se cumple, por lo que $f(x) = 3x + 2$ es convexa en R.

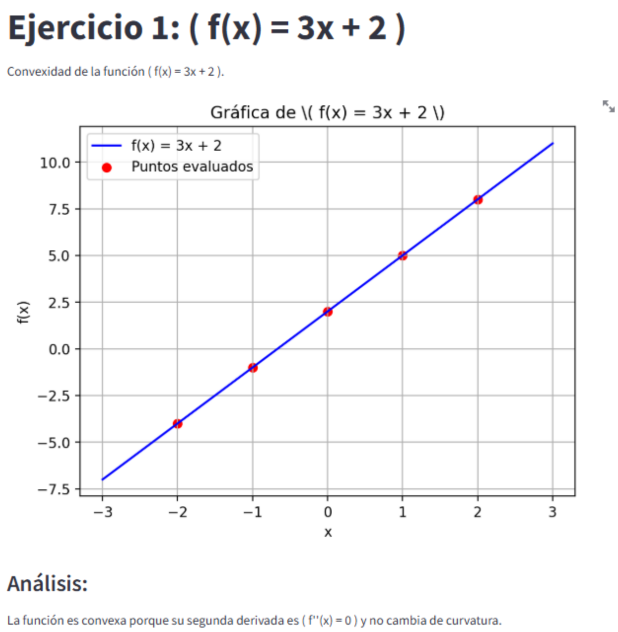

Figura 1: Gráfico

Ejercicio 02

Verificar si $f(x) = x^3$ es convexa, cóncava o ninguna de las dos en $[0, \infty)$

1. **Seleccionar dos puntos en el dominio:** Elijamos $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.
2. **Elegir un valor de λ:** Tomemos $\lambda = 0{,}5$.
3. **Calcular la combinación convexa de x_1 y x_2:**
$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 2 = 1$$
4. **Evaluar $f(x)$ en el punto intermedio:**
$$f(x) = f(1) = 1^3 = 1$$
5. **Calcular la combinación convexa de $f(x_1)$ y $f(x_2)$:**
$$\begin{aligned} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) &= 0{,}5 \cdot f(0) + 0{,}5 \cdot f(2) \\ &= 0{,}5 \cdot 0^3 + 0{,}5 \cdot 2^3 = 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$
6. **Comparar los resultados:**
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = 1 \not\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = 4$$
La desigualdad no se cumple, por lo que $f(x) = x^3$ no es convexa. **Adicionalmente:** si se intenta probar cóncavidad, tampoco se cumple, así que no es cóncava ni convexa.

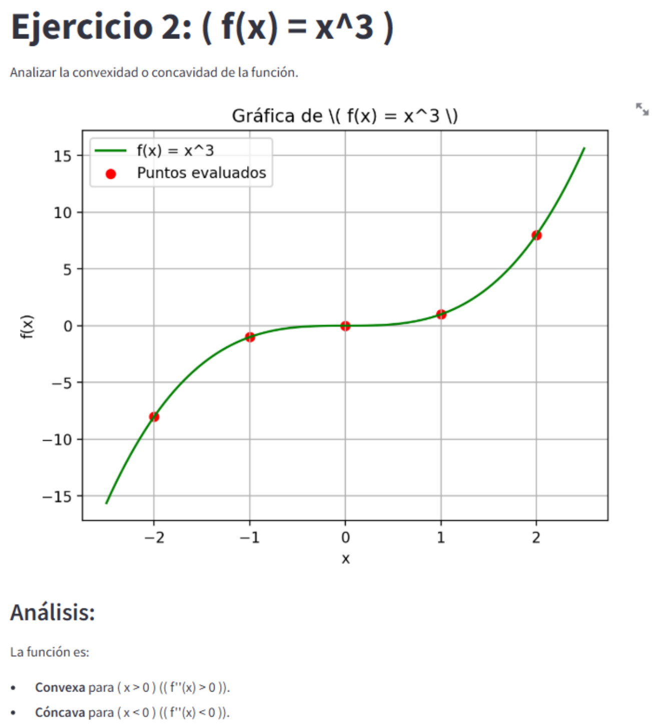

Figura 2: Gráfico

Conclusión

La función $f(x) = x^3$ no es convexa ni cóncava en el sentido matemático en ningún intervalo del dominio real.

Sin embargo, gráficamente, la función muestra un cambio de curvatura en $x = 0$, con una tendencia hacia una forma cóncava en $x < 0$ y convexa en $x > 0$.

Ejercicio 3

Sea $f(x) = e^{2x}$ Demuestre que $f(x)$ es una función convexa en R utilizando el criterio de la segunda derivada.

1. Seleccionar dos puntos en el dominio: Dado que la función $f(x) = e^{2x}$ está definida en R, podemos escoger cualquier par de puntos. Sin embargo, para el análisis de convexidad, no es necesario escoger puntos específicos en este caso, ya que vamos a usar el criterio de la segunda derivada.

2. Obtener la primera y segunda derivada de $f(x)$:
La primera derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) = 2e^{2x}.$$

La segunda derivada de $f(x)$ es:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(2e^{2x}\right) = 4e^{2x}.$$

3. Evaluar la segunda derivada en el dominio: La segunda derivada $f''(x) = 4e^{2x}$ es siempre positiva en R porque $e^{2x} > 0$ para cualquier valor de $x \in R$. Por lo tanto, $f''(x) > 0$ para todo $x \in R$.

4. Interpretación del resultado: El hecho de que $f''(x) > 0$ en todo R implica que la función $f(x) = e^{2x}$ es **convexa** en R, ya que según el criterio de la segunda derivada, si la segunda derivada de una función es positiva en un intervalo, la función es convexa en ese intervalo.

5. Verificación utilizando el criterio de la segunda derivada: Según el criterio de la segunda derivada:

- Si $f''(x) > 0$, la función es convexa.
- Si $f''(x) < 0$, la función es cóncava.
- Si $f''(x) = 0$, el criterio no proporciona información concluyente.

Como $f''(x) = 4e^{2x} > 0$ para todo $x \in R$, concluimos que $f(x) = e^{2x}$ es convexa en R.

6. Comparar con la definición de convexidad: De acuerdo con la definición formal de convexidad, una función $f(x)$ es convexa si, para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in R$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Dado que hemos demostrado que $f(x) = e^{2x}$ tiene una segunda derivada positiva en todo su dominio, esto garantiza que la función cumple con la definición de convexidad.

$f(x) = e^{2x}$ es una función convexa en R, como se demuestra utilizando el criterio de la segunda derivada.

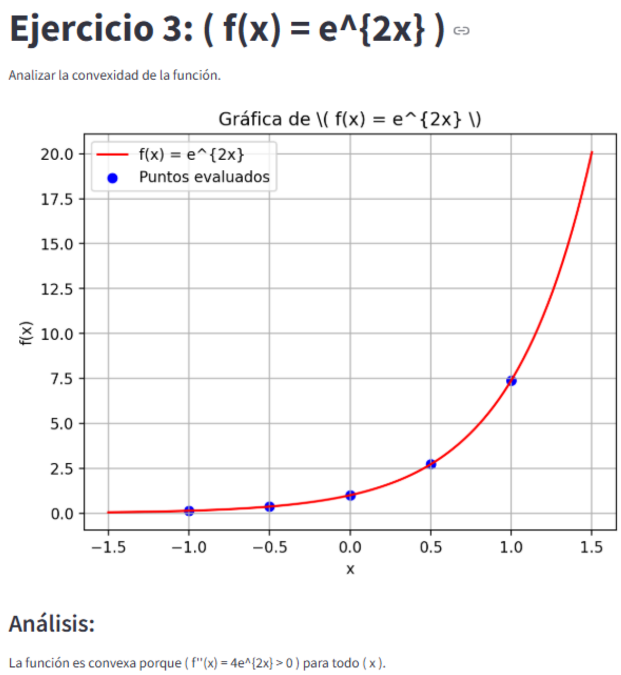

Figura 3: Gráfico

Ejercicio 4

Considera la función $f(x) = \ln(x)$ definida en $(0, \infty)$.

a) Verificar si $f(x)$ es convexa o cóncava en su dominio $(0, \infty)$:

Para verificar la convexidad o cóncavidad de la función, aplicamos el criterio de la segunda derivada.

1. Calcular la primera derivada de $f(x)$:

Sabemos que la derivada de $\ln(x)$ con respecto a x es:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}.$$

2. Calcular la segunda derivada de $f(x)$:

Derivamos nuevamente $f'(x) = \frac{1}{x}$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

3. Analizar la segunda derivada:

Observamos que la segunda derivada es:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Dado que $x > 0$ en el dominio $(0, \infty)$, la segunda derivada es siempre negativa:

$$f''(x) < 0 \quad \text{para todo}\, x \in (0, \infty).$$

4. Conclusión sobre la convexidad o cóncavidad:

Como la segunda derivada $f''(x)$ es negativa en el dominio $(0, \infty)$, esto implica que la función $f(x) = \ln(x)$ es cóncava en $(0, \infty)$, según el criterio de la segunda derivada.

b) Justificación utilizando las propiedades de la segunda derivada:

- Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, la función es **convexa** en ese intervalo.
- Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, la función es **cóncava** en ese intervalo.
- Si $f''(x) = 0$ en un intervalo, no se puede concluir la convexidad o cóncavidad sin más análisis (pero en este caso no es el caso, ya que $f''(x)$ es siempre negativa).

Como $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, podemos concluir que $f(x) = \ln(x)$ es **cóncava** en $(0, \infty)$.

Conclusión:

La función $f(x) = \ln(x)$ es **cóncava** en su dominio $(0, \infty)$. La justificación se realiza mediante el criterio de la segunda derivada, ya que $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ en todo el dominio.

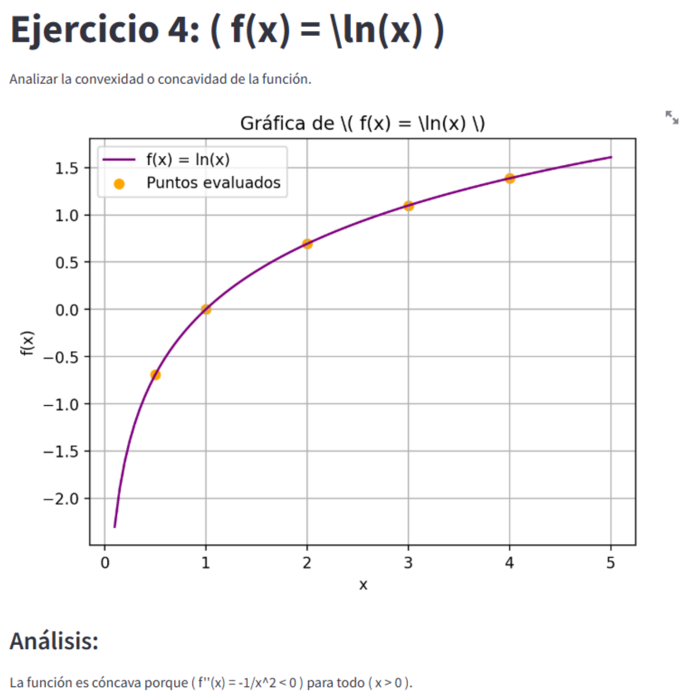

Figura 4: Gráfico

Ejercicio 5

Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$:

a) Encontrar los intervalos de convexidad y cóncavidad.

1. Calcular la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x.$$

2. Calcular la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = 12x^2 - 4.$$

3. Resolver $f''(x) = 0$:

$$12x^2 - 4 = 0 \implies x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \implies x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Dividir el dominio en intervalos:

Los puntos críticos dividen el dominio en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}), \quad (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), \quad (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty).$$

5. Analizar el signo de $f''(x)$ en cada intervalo:

- Para $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, tomamos $x = -1$:

$$f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \quad \text{(convexa)}.$$

- Para $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, tomamos $x = 0$:

$$f''(0) = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0 \quad \text{(cóncava)}.$$

- Para $x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$, tomamos $x = 1$:

$$f''(1) = 12(1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \quad \text{(convexa)}.$$

6. Conclusión de los intervalos:

- $f(x)$ es convexa en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$.
- $f(x)$ es cóncava en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

b) Determinar los puntos de inflexión.

1. Los puntos de inflexión ocurren donde $f''(x) = 0$:

De la solución de $f''(x) = 0$, encontramos que los puntos críticos son:

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Evaluar $f(x)$ en estos puntos:

- Para $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1$$
$$= \frac{9}{81} - 2\left(\frac{3}{9}\right) + 1 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = \frac{4}{9}.$$

- Para $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, como $f(x)$ es simétrica, el resultado es el mismo:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{9}.$$

3. Conclusión de los puntos de inflexión:

Los puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right).$$

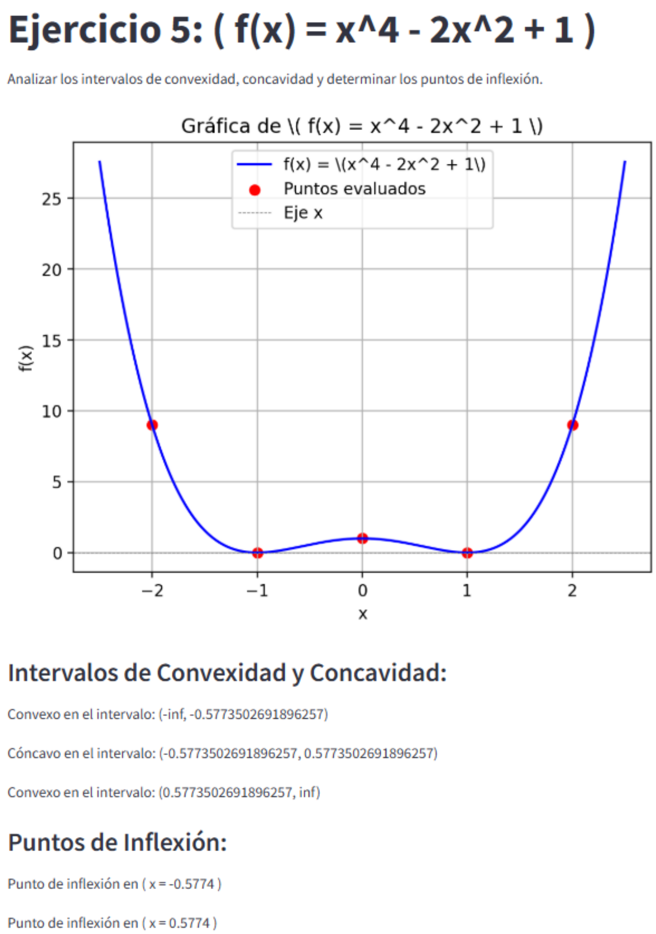

Figura 5: Gráfico