Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Docente: Fred Torres Cruz
Autor : Luz Magaly Turpo Mamani
Programa web: `https://myprogram-min.streamlit.app/`

Trabajo Encargado - N° 10

Optimización No Lineal - Minimizadores

Ejercicio 01

Verifica si los puntos son minimizadores globales o locales para $f(x) = x^2 - 4x + 5$:

Para $x = 2$**:**

- Derivada de la función:
$$f'(x) = 2x - 4$$
- Igualamos $f'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos:
$$2x - 4 = 0 \implies x = 2$$
- Segunda derivada:
$$f''(x) = 2 > 0$$
La segunda derivada es positiva, lo que indica que $x = 2$ es un **mínimo local**.
- ¿Es un mínimo global?
    - La función $f(x)$ es un polinomio cuadrático con coeficiente líder positivo (x^2), lo que significa que es una parábola abierta hacia arriba. Por lo tanto, cualquier mínimo local será también un **mínimo global**.
    - Evaluamos $f(2)$:
    $$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$
    Así, el mínimo global ocurre en $x = 2$ y el valor mínimo es $f(2) = 1$.

Para $x = 0$**:**

- Evaluamos si es un punto crítico:
$$f'(0) = 2(0) - 4 = -4 \neq 0$$
Como $f'(0) \neq 0$, $x = 0$ **no es un punto crítico**, y por lo tanto no es un mínimo local ni global.

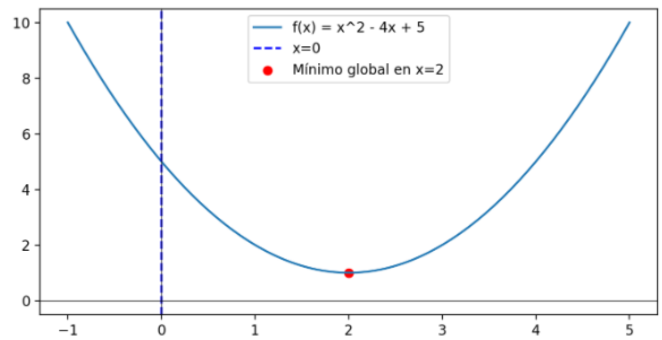

Figura 1: Gráfico

Ejercicio 02

Dibuja la función $f(x) = |x|$ y determina si tiene un mínimo global o local en $x = 0$:

- La función $f(x) = |x|$ se define como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- La gráfica de la función tiene forma de V con un vértice en el origen ($x = 0$).
- En $x = 0$, $f(0) = 0$.
- La función decrece a medida que $x \to 0^-$ y crece cuando $x \to 0^+$, lo que implica que $x = 0$ es un **mínimo global**.

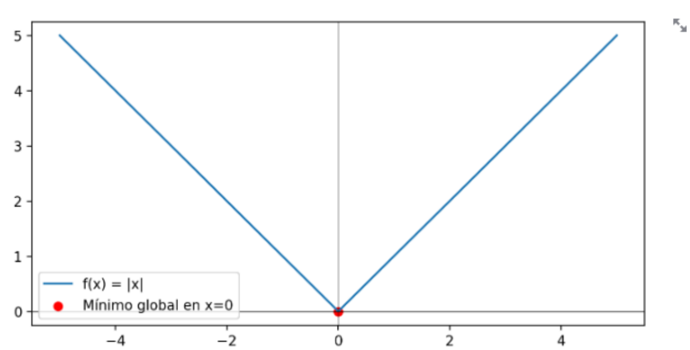

Figura 2: Gráfico

Ejercicio 03

Utilizando el Teorema de Weierstrass, explica por qué $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$ tiene un mínimo global.

- **Teorema de Weierstrass:** Establece que una función continua definida en un intervalo cerrado alcanza un mínimo y un máximo global en dicho intervalo.
- La función $f(x) = \sin(x)$ es continua en $[0, \pi]$.
- Calculamos los valores en los extremos y derivamos:

$$f(0) = \sin(0) = 0, \quad f(\pi) = \sin(\pi) = 0$$

- Derivada:

$$f'(x) = \cos(x), \quad f'(x) = 0 \implies x = \frac{\pi}{2}$$

- Evaluamos en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

- Los valores en los extremos son $f(0) = 0$ y $f(\pi) = 0$.
- Por lo tanto, el mínimo global es $f(x) = 0$ en $x = 0$ y $x = \pi$.

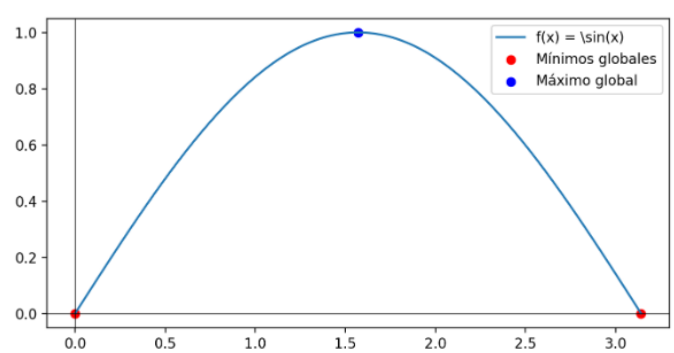

Figura 3: Gráfico

Ejercicio 04

Considera $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$. ¿Dónde se encuentra el mínimo global?

- La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es una parábola en tres dimensiones con un vértice en el origen.

- La restricción $x^2 + y^2 \leq 1$ describe un círculo en el plano x, y con centro en el origen y radio 1.
- El valor de $f(x, y)$ es mínimo cuando $x^2 + y^2$ es mínimo.
- En el origen $(x = 0, y = 0)$:
$$f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$$
  Por lo tanto, el **mínimo global** es $f(0, 0) = 0$ en el origen.

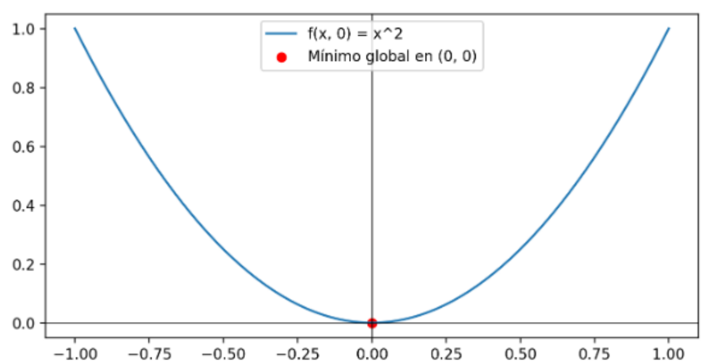

Figura 4: Gráfico

Ejercicio 05

Diseña un ejemplo donde un mínimo global no sea único.

- Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$:
$$f(x) = \cos(x)$$
- Los mínimos globales ocurren donde $\cos(x) = -1$:
$$x = \pi \text{ y } x = 3\pi$$
- Por lo tanto, los mínimos globales no son únicos, ya que ocurren en $x = \pi$ y $x = 3\pi$ con valor $f(x) = -1$.

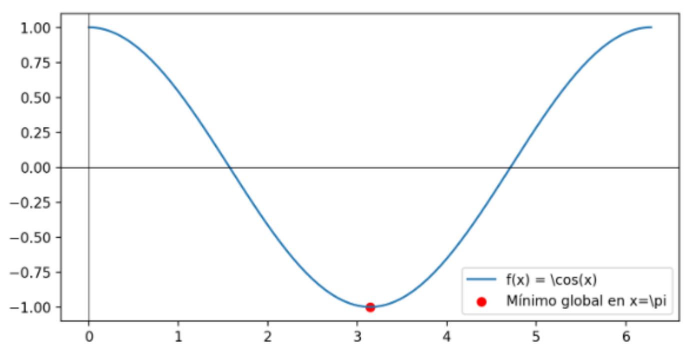

Figura 5: Gráfico