Introducción a la Programación

Prof. Agustín Gravano

Primer semestre de 2022

Clase teórica 8: Lógica proposicional

Condicionales

if *CONDICIÓN1*:
  BLOQUE1
elif *CONDICIÓN2*:
  BLOQUE2
else:
  BLOQUE3

CONDICIÓN1/2 son expresiones de tipo `bool`.
BLOQUE1/2/3 son bloques de código.

BLOQUE1 se ejecuta sii *CONDICIÓN1* es verdadera.

BLOQUE2 se ejecuta sii *CONDICIÓN1* es falsa y además *CONDICIÓN2* es verdadera.

BLOQUE3 se ejecuta sii *CONDICIÓN1* y *CONDICIÓN2* son falsas.

Ejemplo:

```
def f(n:int):
    ''' Imprime una descripción del número n. '''
    if n > 5:
        print(n, 'es mayor que 5.')
    elif n == 5:
        print(n, 'es igual a 5.')
    else:
        print(n, 'es menor que 5.')
```

Tipo de datos `bool`

La condición de los condicionales es una expresión de tipo `bool` (o una expresión *booleana*, o de tipo *lógico*).

Hay dos valores de verdad posibles: verdadero (`True`) y falso (`False`).

Operaciones: Negación (`not`), conjunción (`and`) y disyunción (`or`).

Estas operaciones se definen mediante **tablas de verdad:**

p	not p
True	False
False	True

p	q	p and q	p or q
True	True	True	True
True	False	False	True
False	True	False	True
False	False	False	False

Ejemplo: `len('hola')>1 and not (1+1==3)`

Lógica proposicional

Si <u>es martes o es jueves, y además no está lloviendo</u>, salgo a correr.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{es martes}\\ \textit{es jueves}\\ \textit{está lloviendo}\end{array}\right\}\text{ Proposiciones que toman valor Verdadero o Falso.}$$

Las representamos mediante variables proposicionales $(p, q, r, s, t, ...)$:

$$\underbrace{\textit{es martes}}_{p}\ \textit{o}\ \underbrace{\textit{es jueves}}_{q}\textit{, y además no}\ \underbrace{\textit{está lloviendo}}_{r}$$

Por último, usamos los operadores lógicos $(\vee, \wedge, \neg)$ para obtener una fórmula en lógica proposicional:

$$(p \vee q) \wedge \neg r$$

Símbolos:

	Verdadero	Falso	Negación	Conjunción	Disyunción
Python	`True`	`False`	**`not`**	**`and`**	**`or`**
Lógica	V	F	$\neg$	$\wedge$	$\vee$

Lógica proposicional · Gramática

Símbolos: $\mathrm{V}, \mathrm{F}, \neg, \wedge, \vee, (,), p, q, r, s, ...$

Reglas para construir expresiones o fórmulas bien formadas (FBF):

1. Los valores V y F y las variables proposicionales $p, q, r, ...$ son FBF.
2. Si ϕ es una FBF, entonces también lo son: $\neg\phi$ y (ϕ)
3. Si ϕ y ψ son FBF, entonces también lo son: $\phi \wedge \psi$ y $\phi \vee \psi$
4. Solo son FBF aquellas expresiones que puedan generarse mediante las reglas anteriores en un número finito de pasos.

Ejemplos:

p ✓

$\neg\neg\neg p$ ✓

$((p)$ ✗ (falta paréntesis)

$p \vee \neg p$ ✓

$\neg\phi$ ✗ (ϕ no es un símbolo válido)

$(p \vee q) \wedge \neg\mathrm{F}$ ✓

$(((F)))$ ✓

$(p \vee q) \wedge \neg(r \vee \neg q)$ ✓

Precedencia de operadores lógicos: Al evaluar una expresión, cuando no haya paréntesis para desambiguar, se resuelve en este orden: $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Lógica proposicional

Las **tablas de verdad** <u>definen</u> el comportamiento de los operadores lógicos. Determinan qué devuelven a partir de cada entrada posible.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Lógica proposicional · Propiedades

A partir de las definiciones de los operadores lógicos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, podemos demostrar que se cumplen ciertas propiedades en la lógica proposicional.

Por ejemplo, intentemos demostrar que $p = \neg\neg p$ es cierto para todo valor de p (esto se conoce como doble negación).

Construimos la tabla de verdad para estas expresiones:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V	F	V
F	V	F
$\uparrow$		$\uparrow$

Las columnas correspondientes a p y a $\neg\neg p$ son idénticas.

Por lo tanto, concluimos que esas dos expresiones son equivalentes. $\square$

Lógica proposicional · Propiedades

Ahora queremos demostrar que $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ vale para todo valor de p y q.

Construimos la tabla de verdad para estas expresiones:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V
			$\uparrow$			$\uparrow$

Las columnas correspondientes a $\neg(p \wedge q)$ y a $\neg p \vee \neg q$ son idénticas.

Por lo tanto, concluimos que esas dos expresiones son equivalentes. $\square$

La propiedad $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$, junto con la propiedad muy parecida $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$, se conocen como Leyes de De Morgan.

Lógica proposicional · Propiedades de la conjunción $\wedge$

Identidad: $p \wedge \mathrm{V} = p$

Nulo: $p \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$

Idempotencia: $p \wedge p = p$

Inverso: $p \wedge \neg p = \mathrm{F}$ (Contradicción)

Conmutatividad: $p \wedge q = q \wedge p$

Asociatividad: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

Distributividad: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Absorción: $p \wedge (p \vee q) = p$

De Morgan: $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

Lógica proposicional · Propiedades de la disyunción $\vee$

Identidad: $p \vee \mathrm{F} = p$

Nulo: $p \vee \mathrm{V} = \mathrm{V}$

Idempotencia: $p \vee p = p$

Inverso: $p \vee \neg p = \mathrm{V}$ (Tercero excluido)

Conmutatividad: $p \vee q = q \vee p$

Asociatividad: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

Distributividad: $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Absorción: $p \vee (p \wedge q) = p$

De Morgan: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Lógica proposicional · Reducción de expresiones

Queremos reducir la siguiente expresión usando las propiedades vistas:
$(\neg(\neg p \wedge q) \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \vee \neg(q \vee r)$

$(\neg(\neg p \wedge q) \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$	(por De Morgan)
$(\neg(\neg p \wedge q) \wedge r) \vee ((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$	(por propiedad distributiva)
$((p \vee \neg q) \wedge r) \quad \vee ((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$	(por De Morgan)
$(p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)$	(por propiedad distributiva)
$(p \vee \neg q) \wedge \mathrm{V}$	(por tercero excluido)
$(p \vee \neg q)$	(por identidad)

Concluimos así que $(\neg(\neg p \wedge q) \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \vee \neg(q \vee r)$ y $(p \vee \neg q)$ son dos expresiones equivalentes.

Identidad	$p \wedge \mathrm{V} = p$	$p \vee \mathrm{F} = p$
Nulo	$p \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$	$p \vee \mathrm{V} = \mathrm{V}$
Idempotencia	$p \wedge p = p$	$p \vee p = p$
Inverso	$p \wedge \neg p = \mathrm{F}$	$p \vee \neg p = \mathrm{V}$
Conmutatividad	$p \wedge q = q \wedge p$	$p \vee q = q \vee p$
Asociatividad	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
Distributividad	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Absorción	$p \wedge (p \vee q) = p$	$p \vee (p \wedge q) = p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Repaso de la clase de hoy

- Lógica proposicional: símbolos, fórmulas bien formadas.
- Demostración de propiedades mediante tablas de verdad.
- Propiedades; reducción de expresiones.

Bibliografía complementaria:

- "Las Raíces y los Frutos: Temas de Filosofía de la Ciencia", J. Paruelo & H. Miguel. **Sección 4: Lógica** (páginas 12-15). Disponible digitalmente en la Biblioteca UTDT: https://elibro.net/es/ereader/utdt/165568?page=12 Describe la lógica proposicional como una herramienta útil para representar el razonamiento humano.

Con lo visto, ya pueden resolver toda la Guía de Ejercicios 3.

Presten atención a cómo funciona la evaluación por cortocircuito de expresiones lógicas en Python, tema explicado en la guía.