

# 一种求解多选择多维背包问题的多尺度量子谐振子算法

**摘要:** 针对多选择多维背包问题(MMKP)NP 难、强约束的特点, 提出了一种拉格朗日松弛(LR)的多尺度量子谐振子算法(MQHOA). 该算法以量子谐振子算法为基础, 通过求解原 MMKP 的 LR 对偶问题定义了评价物品价值的指标, 结合物品所在组的性价比定义了 MMKP 的近似核问题来降低问题难度, 并且改进了 MQHOA 核心采样函数, 可以快速找到最优解. 在标准算例库中测试的结果表明, 所提出的算法比原算法有更快的收敛速度和较强的鲁棒性, 对比其他已知算法在准确度上也有良好表现.

**关键词:** 多选择多维背包问题; 量子谐振子; 拉格朗日收敛; 核问题

中图分类号: 文献标识码: A 文章编号: 1001-2400(2XXX)0X-0-0

## A novel multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm for solving multiple-choice multidimensional knapsack problem

**Abstract:** The multiple-choice multidimensional knapsack problem(MMKP) is a NP-hard and strongly constrained combinatorial optimization problem. We present a heuristic approach which combines multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm(MQHOA) with Lagrangian relaxation(LR). This algorithm takes MQHOA as the basic framework and defines an indicator for evaluating the value of items by solving the Lagrange dual problem. An approximate core problem is also defined to reduce the problem's difficulty by combining the indicator and item's cost performance of its group. Based on the above, we improve MQHOA's core sampling function to find the optimal solution quickly. Simulation results on a standard library of benchmark instances show that the proposed algorithm is of strong robustness and speedy convergence comparing with the original algorithm, and its performance is better than other known algorithms on accuracy.

**Key word:** multiple-choice multidimensional knapsack problem; quantum harmonic oscillator; Lagrangian relaxation; core problem

背包问题(Knapsack Problem, KP)是运筹学领域中经典的组合优化问题, 被证明是 NP 难问题<sup>[1]</sup>. 如果只考虑多种资源约束, 就是多维背包问题(Multi-dimensional KP, MKP); 如果约束物品的选择, 即将物品分若干类, 每类物品只能选一种装入背包, 就是多选择背包问题(Multi-Choice KP, MCKP), 但 MCKP 中的每个物品只有单一资源限制; 如果加上多种资源限制, 就是多选择多维背包问题(Multi-choice Multi-dimensional KP, MMKP), 解决了 MMKP 自然就可以解决 MCKP、MKP 等问题. MMKP 具有广泛的工程背景, 可以处理协同运输车辆路径选择、金融和工业领域的投资决策、分布式数据库处理等实际问题<sup>[2]</sup>, 所以, 研究 MMKP 的求解方法有重要的理论意义和实际价值.

在理论上 MMKP 属于整数线性规划(Integer Linear Programming, ILP)的子问题, 该领域的求解算法主要分为精确优化算法和启发式优化算法. 精确优化算法主要包括割平面法<sup>[3]</sup>、动态规划法<sup>[4]</sup>、分支定界法<sup>[5]</sup>, 当问题的规模较小时, 精确算法能够在可接受的时间内找到最优解, 但处理大规模问题时耗时长、过程复杂. 启发式算法并不能确定的得到问题的最优解, 可能得到次优解, 其主要通过知识积累、归纳推理和实验分析来解决问题. 很多学者致力于用启发式算法来解决 MMKP, 主要包括禁忌搜索算法、模拟退火算法、遗传算法、蚁群优化算法、粒子群优化算法、人工蜂群算法等<sup>[6-9]</sup>. 近年来, 基于量子算法的智能优化算法被提出<sup>[10]</sup>, 即多尺度量子谐振子算法(Multi-scale Quantum Harmonic Oscillator Algorithm, MQHOA). 文献[11]将该算法运用到整数规划中, 与量子粒子群算法及相应改进算法相比有较好的求解精度和收敛速度, 但其解决的问题与 MMKP 相比简单的多, 对处理大规模问题时耗时长, 并不能直接应用. 0000-0003-0691-7664

近年来, 有学者利用传统数学中的松弛技术简化原数学模型、提取内部关键信息以指导算法优化过程, 有助于求解高维 MMKP 问题<sup>[12]</sup>. 本文提出了一种拉格朗日松弛(LR)的多尺度量子谐振子算法, 本文简记为 LM. 其并不直接对原问题求解, 而是通过求原问题的拉格朗日对偶问题获得评价物品价值的信息. 利用这些信息和组的评价指标构建 MMKP 近似核问题, 然后针对近似核问题重塑了 MQHOA 工作过程, 引导算法在可信区间集中搜索, 其他区间分散搜索, 提高了搜索效率. 通过标准算例测试实验, 表明了该算法具有较好的性能; 与其他已知算法对比, 在求解精度和求解效率方面有很大提高.

## 1 问题描述与数学建模

背包问题是 Merkel 和 Hellman 提出的组合优化问题, 其引申问题中 MMKP 是最难解决的问题, 其构建在多选择背包问题和多维背包问题之上, 可描述如下:

有一些具有不同收益的物品需要放入背包, 这些物品被分在互斥的组里, 而挑选的每个物品都需要耗费一种或多种资源, MMKP 的目的就是从各组中选择且只能选择一个物品, 使得所选物品的总收益最大而每种资源的消耗不超过给定的上限 (背包约束)。

假如有  $n$  个互斥组  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ ,  $G_i \cap G_j = \emptyset, 1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  为组索引集合,  $g_i = |G_i|$  是组  $G_i$  的物品数,  $m$  为资源种类数,  $b^k$  代表第  $k$  个资源,  $1 \leq k \leq m$ ,  $p_{ij}$  为  $G_i$  组内第  $j$  个物品的收益,  $\omega_{ij}^k$  为  $G_i$  组内第  $j$  个物品, 而  $x_{ij}$  为决策变量, 当  $x_{ij} = 1$  表示  $G_i$  组内第  $j$  个物品被选中, 反之  $x_{ij} = 0$  则表示未选中, 那么 MMKP 数学模型如下:

$$Z = \max \sum_{i \in I} \sum_{j \in \{1, \dots, g_i\}} p_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i \in I} \sum_{j \in \{1, \dots, g_i\}} \omega_{ij}^k x_{ij} \leq b^k, k \in \{1, \dots, m\} \\ \sum_{j \in \{1, \dots, g_i\}} x_{ij} = 1, i \in I \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in \{1, \dots, g_i\} \end{cases} \quad (2)$$

$$\quad (3)$$

$$\quad (4)$$

KP、MCKP、MKP 等都是 MMKP 的特殊情况, 解决 MMKP 就可以解决这些子问题. 从模型上看众多的约束条件造成了 MMKP 的 NP 难, 式(3)为简单等式约束, 考虑到具体问题中物品组数  $n$  要远大于限制资源数  $k$ , 为了减少约束并简化问题, 将各组选择物品对应的索引  $c_i$  作为决策变量. 比如某组内选择物品情况为  $(0, 0, 1, 0, 0)$ , 直接用数字 3 编码表示这个组的选择情况, 而不是 5 个二进制变量. 此外, 采用拉格朗日松弛方法将不等式约束吸收到目标函数中, 仍使目标函数保持线性, 使得问题容易求解. 对于给定的拉格朗日乘子向量  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in R_+^m$ , MMKP 的拉格朗日形式可写成

$$Z_{LR}(\Lambda) = \max \left[ \sum_{i \in I} p_{c_i} + \sum_{k \in \{1, \dots, m\}} \lambda_k (b^k - \sum_{i \in I} \omega_{c_i}^k) \right] = \max \left( \sum_{i \in I} d_i + \sum_{k \in \{1, \dots, m\}} \lambda_k b^k \right) \quad \text{s. t. } c_i \in (1, \dots, g_i) \quad (5)$$

其中  $d_i(\Lambda) = p_{c_i} - \sum_{k \in \{1, \dots, m\}} \lambda_k \omega_{c_i}^k$  代表  $i$  组中第  $c_i$  个物品的拉格朗日价值, 记作 LV.  $c_i$  构成该松弛问题的决策向量  $C$ .

对于任意  $\Lambda \in R_+^m$  对应的  $Z_{LR}(\Lambda)$  均是 MMKP 问题的上界, 其对应的最优解记作  $C^*$  而为了获得与最优解最近的上界, 可以定义 MMKP 的对偶问题:

$$\min \{Z_{LR}(\Lambda) | \Lambda \in R_+^m\} \quad (6)$$

该问题以  $\Lambda$  为优化变量, 求解最紧凑上界, 该类问题求解方法比较成熟, 一般采取次梯度算法<sup>[13]</sup>获得最优解  $\Lambda^*$ , 其对应的决策向量为  $C(\Lambda^*)$ , 这不一定是原问题的最优解, 但和原问题的最优解共享一部分<sup>[14]</sup>, 也就是说二者会同时选择同一组中的同一个物品, 因而可以把这些相同部分固定住, 通过局部搜索将  $C(\Lambda^*)$  转化为原问题的最优解<sup>[15]</sup>. 此外从式(5)可知, 在  $\Lambda$  固定下  $Z_{LR}(\Lambda)$  的求解由物品的 LV 值决定, 在实践中可以发现共享物品的 LV 值都较大, 是衡量物品价值的一个重要因素.

## 2 LM 算法

### 2.1 MMKP 近似核

实践证明核大大提高了求解背包问题的效率, 但在国内对其研究的较少, 尤其对 MMKP 更少, 本文根据实践提出 MMKP 近似核.

Balas 等[16]在实验中观察到 0-1 背包问题与该问题的线性松弛问题的最优解仅有少量元素不同, 他们将包含这些元素的区间作为核. 也就是说可以找到一种方法固定一部分可信元素, 接下来将求解剩下的不可信元素作为核问题. 对 MMKP 问题, 难度在于不仅要固定组, 还需要固定组内的元素, 本文从较大概率上确定了核, 统一叫做近似核.

以 MMKPPLB 数据库中的算例为例, 该算例可以表示成  $(g, i, r)$ , 分别代表组数、每组物品数和限制资源数. 将每组内的物品按照  $d_i(\Lambda^*)$  从大到小排序, 找出每组中 LV 值最大的物品, 这些物品所在索引构成了向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_g)$ , 与已知最优解  $X^*$  比较后计算解元素的命中率, 得到下表 1.

表 1. LV 策略下命中率

算例	(10,5,5)	(20,10,10)	(30,10,10)	(50,10,10)	(100,10,10)	(200,10,10)
命中率(%)	50	38	75	56	41	36

从表中可见直接按照 LV 值比较可以确定一部分最优解元素值，如果锁定这些元素所在组就可以确定这些最优解元素为可信元素. 式(7)用来估计组的性价比：

$$e_i = \frac{\sum_{j \in \{1, \dots, g_i\}} p_{ij}}{\sum_{k \in \{1, \dots, m\}} (\lambda_k \sum_{j \in \{1, \dots, g_i\}} \omega_{ij})}$$

(7)

其中 $\lambda_k$ 为 $\Lambda^*$ 中的元素，用来表示资源的相对重要性，把组内所有物品的收益与相对资源耗费总和的比作为组的性价比. 以算例(100,10,10)为例，计算 100 个组的性价比，按照降序生成排序列表，找出命中的 41 个元素所在组在排序列表中对应的排名，统计如图 1 所示.

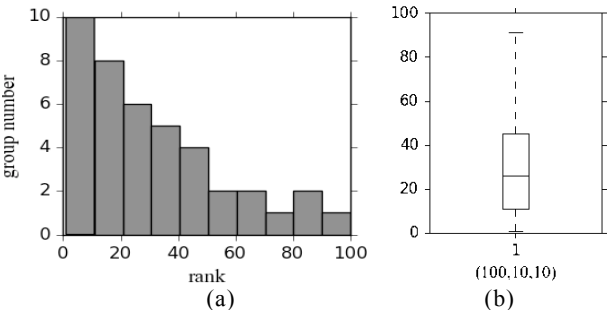


图 1 算例(100, 10, 10)命中元素对应组性价比排行分布图

图 1(a)中组性价比排行前 10 的组全部被命中，排行越往后，其命中的概率也越低. (b)中为这 41 个元素对应组的排名箱线图，可知 50%的命中组均是排名约前 25%的，而排名越往后越分散. 可以看出式(7)对固定组起到很大作用，但并不能确切保证组性价比排名靠前的元素都能被命中，比如在算例(200,10,10)中排行前 10 的组只命中 8 个，而且并没有一个确切的界限能够保证在这个界限内的组全部命中. 因此只能认为排名靠前的组是可信组的概率比较大，这对寻找最优解具有启发意义.

从上面讨论可以得出两点：1)通过比较组内 LV 值最大的物品可以选出一部分最优解元素值 2)通过估计组的性价比可以较大概率确定这部分最优解元素值的位置. 剩下的未确定元素就构成了 MMKP 问题的近似核，智能算法主要集中对近似核的搜索.

2.2 MQHOA 基本原理

多尺度量子谐振子算法是近年提出的一种用于全局优化的算法，其近似模拟分子运动规律，利用微粒动态振动时在振子平衡位置达到势能最低点来解决全局优化问题. 在理论中利用谐振子物理模型及量子谐振子波函数的概率解释构造算法核心，并利用量子隧道效应保证全局最优区域采样数目足够大以避免陷入局部最优位置. 通过与其他算法进行对比，实验结果进一步说明了其具有更好的计算速度和计算精度[17].

其核心是利用描述量子系统的薛定谔方程的解得到如下概率密度函数：

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} |H_n(\alpha x)|^2$$

(8)

其中： $\psi$  表示波函数， $m$  表示粒子的广义质量， $\omega$ 表示粒子的振动频率， $\hbar$ 为普朗克常量， $H$ 为哈密顿算符， $n$ 表示能级数. 式(8)随着能级的减少量子谐振子从高能态到低能态逐渐收敛，直到收敛到基能态： $\psi_0(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}} e^{-\alpha^2(x-x_0)^2/2}$ ，因此定义 MQHOA 算法在尺度 $\sigma_s$  下的波函数为 $k$ 个以 $k_i$ 为中心的高斯概率密度函数的迭加：

$$\psi_{QHO}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{(x-k_i)^2}{2\sigma_s^2}}$$

(9)

$\psi_{QHO}(x)$ 近似代表了以  $k$  个最优解为中心的目标函数在可行域上的概率分布，通过引入多尺度优化函数二进信息采样模型，把高斯函数作为二进小波尺度函数按照不同尺度和不同精度要求进行聚焦搜索，可以保证信息的不遗漏采样，从而获得全局最优解.

2.3 针对 MMKP 的 MQHOA

MQHOA 的核心是对  $k$  个中心点进行高斯采样，是基于一种完全随机的策略，虽然能够找到最优解，但需要较多的迭代时间. 这里针对原 MMKP 求解，为加快求解速度，使用前面 MMKP 近似核分析的结论，对非近似核重新构造单个元素的混合高斯模型：

$$f(x) = \theta \left[ (1 - \alpha) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} + \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\gamma^2}} \right]$$

(10)

其中  $a$  为目前 MQHOA 找到的最优解元素,  $b$  为非近似核中的可信组,  $\sigma_1$  为当前 MQHOA 采样收敛尺度,  $\gamma$  为常数,  $\gamma$  越小概率越向  $b$  点倾斜,  $\theta$  为满足概率公理的归一化处理常数, 由括号内式子决定. 对某个可信组采样, 如果该可信组确定的最优元素  $b = 8$ , 真实最优元素和当前采样最优元素均等于 4, 设置  $\gamma = 1$ , 绘制  $\sigma_1$  取不同值的采样点概率分布图, 如图 2 所示. 图中实线为混合高斯模型的概率密度曲线, 虚线为单个高斯概率密度曲线, 为描述方便这里用连续域替代离散域.

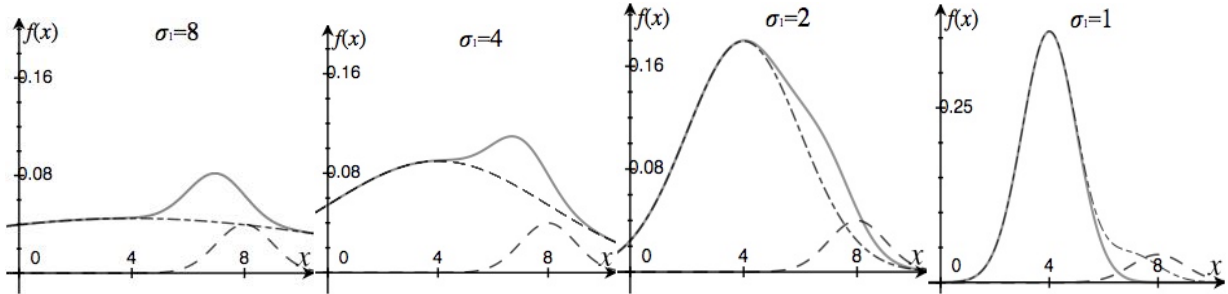


图 2  $\sigma_1$  取不同值的采样点概率分布

若真实最优元素为 8, 初始时  $\sigma_1$  较大, 这时候可信组确定的最优元素被采样到的可能性比较大, 而优化过程中  $\sigma_1$  的减小将使聚集在这个元素上的概率得到增大; 若真实最优元素为 4, 虽然初始时采到 4 的概率没 8 大, 但多个中心点一次也没采到 4 的概率也不大, 因此优化过程中  $\sigma_1$  仍会减小, 随着  $\sigma_1$  的减小 4 被采到的可能性也就越来越大.

对近似核问题仍然采用式(9)进行采样, 对比原算法, 针对 MMKP 的 MQHOA 主要有以下不同: 1) 针对整数规划问题采用了离散高斯分布函数. 2) 按照近似核与非近似核划分不同的采样过程, 对近似核在区间内均匀搜索, 对非近似核在区间内集中搜索. 3) 原算法在能级转移机制中用  $k$  个中心点的均值向量替代最差中心点, 考虑整数依赖性, 这里使用排名在最中间的点来替代. 4) 原算法以收敛尺度作为迭代停止条件, 这里使用当前最优解对应的函数值与求解拉格朗日对偶问题获得的最紧上界  $Z_{LR}(\Lambda^*)$  的差值百分比  $gap$  作为算法终止条件. 算法具体描述与说明如下:

begin

1: 初始化  $k, gap, \sigma_s \leftarrow \max\text{-}\min, cg$

2: 在可行域内随机生成  $k$  个中心点, 其中  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_{g_i})$ ,  $i = (1, 2, \dots, k)$

3: 计算  $k$  个中心点的标准差向量  $\sigma_k$

4: do

5: do

6: do

7:  $\forall x \in x_i,$

8: if  $x \in cg$ , then 根据式(11)生成  $x'$

9: else 生成  $x' \sim IN(x, \sigma_{s,x}^2)$

10: 由  $x$  组成  $x'_i$ , if  $f(x'_i) > f(x_i)$ , then  $x_i \leftarrow x'_i$

11: 计算  $k$  个新中心点的标准差向量  $\sigma_k$

12:  $\Delta = \min(\sigma_k - \sigma_k')$

13: while( $\Delta > \max(\sigma_s)$ )

14: 更新最差解:  $x^{worst} \leftarrow x^{median}$

15: while( $\min(\sigma_k) > \max(\sigma_s)$ )

16: 更新  $\sigma_s \leftarrow \sigma_s/2$ , 更新目前最好函数值  $v^{best}$

17: while( $(Z_{LR}(\Lambda^*) - v^{best}) / v^{best} < gap$ )

18: 输出  $x^{best}, v^{best}$

19: end

算法首先根据可行域边界  $\max$ 、 $\min$  确定初始尺度向量  $\sigma_s$ ,  $cg$  是非近似核中的可信组, 对于近似核与非近似核中的元素按照不同的公式在不同尺度下采样, 其中  $\sigma_{s,x}$  表示元素  $x$  在尺度向量中对应的尺度元素. 当新旧中心点所对应的标准差向量之差完全大于原尺度向量, 这意味着式(8)所对应的波函数处在能级稳定状态, (13)这个过程叫做能级迭代过程. 当能级稳定后使用  $k$  个中心点中排名最中间的点来替代最差中心点, 代表能级由高能态像低能态跃迁, 这个过程被称为能级转移机制. 能级转移后量子退火, 收敛尺度衰减, 这个过程被称为尺度收敛过程. 这三个过程仿照了量子从高能态到能级稳定全过程, 而稳定状态即零势能点, 对应要找的最优解.

#### 2.4 LM 算法过程

综合以上讨论, LM 算法的具体实现步骤如下:

**Step1** 求解原 MMKP 问题的拉格朗日对偶问题, 获得各物品的拉格朗日价值;

- Step2 根据式(7)计算组性价比并提取近似核;
- Step3 初始化参数( $k$ 、 $\gamma$ 、 $gap$ );
- Step4 按照近似核与非近似核的划分采用不同的采样过程, 进行能级迭代;
- Step5 判断是否达到能级稳定状态, 若达到, 进行下一步, 否则跳回 Step4;
- Step6 判断是否达到能级转移条件, 若达到, 进行下一步, 否则跳回 Step4;
- Step7 判断是否达到尺度收敛条件, 若达到, 进行下一步, 否则跳回 Step4;
- Step8 输出原问题的最优解与最优值.

3 实验与分析

LM 采用 python 编程实现, 实验硬件为 i5 2.9GHZ, 8GB RAM, 软件为 OSX10.10 和 python2.7. 为了评估 ML 算法性能, 采用 MMKPLB 中的经典算例集合(ftp://cermse.univ-paris1.fr/pub/ CERMSEM/hifi/MMKP), 该集合从 I01 的(5,5,5)到 I10 的(250,10,10), 求解难度逐步提升. 式(10)中 $\gamma$ 不宜太小的也不宜太大, 太小容易指引算法收敛次优解, 太大会使收敛时间太长, 根据反复试验, 这里设置 $\gamma = 1$ 为较优选择. 此外设置中心点数  $k$  为 10.

下表 2 为 LM 算法与原 MQHOA 运行结果比较. 算法设置适应度函数迭代次数(Number of Fitness Function Evaluations, NFFEs)为 10000, 差值百分比  $gap$  在 I01~I06 为 1%, 在 I07~I10 为 2%, 算法在满足 NFFEs 或  $gap$  后将终止. 独立重复 30 次实验, 统计平均最优解、标准差与平均时间. 从纵向看, MQHOA 所花时间与问题难度呈正比, 而 LM 的统计结果有部分不呈正比, 比如 I05、I06, 所花时间比 I04 要少. 这是由于 I05 与 I06 LV 策略下的命中率相对 I04 很高, 使得其近似核的求解难度降低不少. 从横向上看, LM 算法对 MMKP 的求解性能要好于原 MQHOA, 包括找到最优解的准确度、鲁棒性和平均耗时均有显著提高. LM 算法在当前条件下对所有算例的求解过程中均在未达到 NFFEs 而终止, 其在短时间内即满足了  $gap$  条件, 解决了原 MQHOA 收敛时间相对较慢的问题.

表 2 ML 与原 MQHOA 比较

算例	MQHOA			LM		
	平均最优解	标准差	平均时间/s	平均最优解	标准差	平均时间/s
I01	173.0	0.00	0.02	173.0	0.00	0.02
I02	363.6	0.04	0.02	364.0	0.00	0.02
I03	1502.3	3.12	0.16	1590.0	0.00	0.10
I04	3512.4	6.02	1.72	3556.0	0.00	0.35
I05	3801.7	5.30	2.01	3905.7	0.00	0.27
I06	4704.2	6.14	2.21	4799.3	0.00	0.30
I07	23602.5	34.5	3.92	24172.0	5.14	0.72
I08	35412.0	37.0	4.74	36002.0	7.04	1.08
I09	47242.6	48.2	5.67	48232.0	6.27	1.56
I10	58845.0	46.0	6.76	60282.0	7.26	2.13

将 LM 算法与其他算法的最好仿真结果比较, 统计结果于表 3. 表 3 中已知最好解来源于 MMKPLB 数据库, 目前关于 MMKP 的研究, 只有小规模实例已经证明能获得最优解, “\*”表示目前还未找到精确解, 取该算例的上界代之. KLMA 算法数据来源于文献[18], Moser 的数据来源于文献[19], HEU 来源于文献[20], 这三个是比较经典的启发式算法, 另外还有混合蚁群算法与线路重连算法的 ACO&PR<sup>[9]</sup>, 与模糊技术结合的模糊蜂群算法 FABC<sup>[8]</sup>. 为获得更精确解, 这里对所有算例设置 LM 算法参数  $gap$  为 1%, NFFEs 限制为 20000 次, 统计结果如表 3 所示.

表 3 LM 算法与其他算法对比

算例	已知最好解	KLMA	Moser	HEU	ACO&PR	FABC	LM
I01	173.0	167.0	151.0	167.0	<b>173.0</b>	<b>173.0</b>	<b>173.0</b>
I02	364.0	354.0	291.0	354.0	<b>364.0</b>	<b>364.0</b>	<b>364.0</b>
I03	1602.0	1533.0	1464.0	1533.0	1556.0	<b>1602.0</b>	<b>1602.0</b>
I04	3597.0	3437.0	3375.0	3437.0	3452.0	<b>3597.0</b>	<b>3597.0</b>
I05	3905.7	3899.1	3905.7	3899.1	<b>3905.7</b>	<b>3905.7</b>	<b>3905.7</b>
I06	4799.3	<b>4799.3</b>	4115.2	<b>4799.3</b>	<b>4799.3</b>	<b>4799.3</b>	<b>4799.3</b>
I07	24607.9*	23912.0	23556.0	23912.0	23938.2	23980.1	<b>24472.0</b>
I08	36904.4*	35979.0	35373.0	35979.0	35997.0	36005.6	<b>36752.0</b>
I09	49193.9*	47901.0	47205.0	47901.0	47928.0	47968.0	<b>48888.0</b>
I10	61486.3*	59811.0	58648.0	59811.0	59846.0	59879.0	<b>60545.0</b>

实验结果表明, ACO&PR 算法与 FABC 算法在问题规模较小时要优与前三种算法, 但随着问题规模的扩大, 其求解质量明显下降, 而 LM 算法却可以得到较优的解. 其计算结果偏离上界百分比从 I07 到 I10 分别为 0.5%,0.4%,0.6%,1.5%, 说明只有对 I10 的计算 NFFEs 达到了 20000, 其余均在  $gap$  范围内达

到终止条件,所花时间较少.整体上 LM 对求解 MMKP 问题的效果要比其他五种算法好,对大规模问题来说求解效果尤为明显.

## 4 结论

本文针对 MMKP 的 NP 难、约束变量多的特点提出了一种高效的拉格朗日松弛的多尺度量子谐振子算法.首先针对原问题模型建立了拉格朗日松弛对偶模型,大大减少了约束条件,并利用拉格朗日价值来评价组内物品价值,在此基础上引入 MMKP 近似核问题,对寻找最优解具有启发作用,并且减少了问题规模.此外基于近似核问题构建了混合高斯采样模型,引导算法在可信区域强化搜索,在不可信区域均匀搜索,提高求解精度和收敛速度.通过算例测试,验证了 LM 算法对 MMKP 问题求解效果好,在求解质量和效率方面具有优势,为 MMKP 问题的研究提供了一种有效方法.

## 参考文献

- [1] Kellerer H, Pferschy U, Pisinger D. Introduction to NP-Completeness of knapsack problems[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2004: 449-482.
- [2] Hu T C, Kahng A B. The Knapsack Problem[M]//Linear and Integer Programming Made Easy. Springer International Publishing, 2016: 87-101.
- [3] Könnnyü N, Tóth S F. A cutting plane method for solving harvest scheduling models with area restrictions[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 228(1): 236-248.
- [4] Chebil K, Khemakhem M. A dynamic programming algorithm for the Knapsack Problem with Setup[J]. Computers & Operations Research, 2015, 64: 40-50.
- [5] Yenipazarli A, Benson H P, Erenguc S. A branch-and-bound algorithm for the concave cost supply problem[J]. International Journal of Production Research, 2016, 54(13): 3943-3961.
- [6] Hembecker F, Lopes H S, Godoy Jr W. Particle swarm optimization for the multidimensional knapsack problem[C]//International Conference on Adaptive and Natural Computing Algorithms. Springer Berlin Heidelberg, 2007: 358-365.
- [7] Rasmy M H, El-Beltagy M A, Tharwat A A, et al. A comparative study on the performance of Genetic Algorithm, Artificial Immune System and hybrid intelligent approach to Multiple-choice Multidimensional Knapsack Problem[C]//Informatics and Systems (INFOS), 2012 8th International Conference on. IEEE, 2012: BIO-20-BIO-26.
- [8] Liu Y, Liang M A. Fuzzy artificial bees colony algorithm for solving traveling salesman problem[J]. Application Research of Computers, 2013, 30(9):2694-2696.  
(柳寅, 马良, 黄钰. 模糊人工蜂群算法的多选择多维背包问题求解[J]. 运筹与管理, 2013(05):98-103.)
- [9] Zhang X X, Tang L X. A new ACO&PR algorithm for multiple-choice multidimensional knapsack problem[J]. Control & Decision, 2009(5):729-733.  
(张晓霞, 唐立新. 一种新的求解 MMKP 问题的 ACO&PR 算法[J]. 控制与决策, 2009, 24(05):729-733.)
- [10] Wang Peng, Huang Yan, Ren Chao, et al. Multi-Scale quantum harmonic oscillator for High-Dimensional function global optimization algorithm. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(12): 2468-2473(in chinese)  
(王鹏, 黄焱, 任超, 郭又铭. 多尺度量子谐振子高维函数全局优化算法[J]. 电子学报, 2013, 41(12): 2468-2473)
- [11] Yuan Y, Wang P, Liu F. Performance analysis of multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm[J]. Journal of Computer Applications, 2015.  
(袁亚男, 王鹏, 刘峰. 多尺度量子谐振子算法性能分析[J]. 计算机应用, 2015, 6: 1600-1604.)
- [12] Crévits I, Hanafi S, Mansi R, et al. Iterative semi-continuous relaxation heuristics for the multiple-choice multidimensional knapsack problem[J]. Computers & Operations Research, 2012, 39(1): 32-41.
- [13] Fisher M L. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems[J]. Management science, 2004, 50(12\_supplement): 1861-1871.
- [14] Chen Y, Hao J K. A “reduce and solve” approach for the multiple-choice multidimensional knapsack problem[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 239(2): 313-322.
- [15] Wolsey L A. Integer Programming[M]. New York: Wiley-Interscience, 1998: 167-181.
- [16] Balas E, Zemel E. An algorithm for large zero-one knapsack problems[J]. operations Research, 1980, 28(5): 1130-1154.
- [17] Wang Peng, Huang Yan. Physical model of multi-scale quantum harmonic oscillator optimization algorithm[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(10):1271-1280.(in chinese)  
(王鹏, 黄焱. 多尺度量子谐振子优化算法物理模型. 计算机科学与探索[J], 2015, 9(10): 1271-1280)
- [18] Khan S, Li K F, Manning E G, et al. Solving the knapsack problem for adaptive multimedia systems[J]. Stud. Inform. Univ., 2002, 2(1): 157-178.
- [19] Moser M, Jokanovic D P, Shiratori N. An algorithm for the multidimensional multiple-choice knapsack problem[J]. IEICE transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences, 1997, 80(3): 582-589.
- [20] Alam M S, Hasan M, Hossain M, et al. Heuristic solution of MMKP in different distributed admission control and QoS adaptation architectures for video on demand service[C]//kamal. Broadb and Applications/Service Symposium: 124. Boston, MA: IEEE, 2005:896-903.