Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 17: Regra de L'Hôpital

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Regra de L'Hôspital

- Suponha que f e g sejam diferenciáveis e que $g'(x) \neq 0$ próximo a $x = a$ (exceto possivelmente em $x = a$). Suponha que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

(em outras palavras, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ possui uma indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞ em $x = a$).

Regra de L'Hôspital

- Suponha que f e g sejam diferenciáveis e que $g'(x) \neq 0$ próximo a $x = a$ (exceto possivelmente em $x = a$). Suponha que:

  $$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

  ou

  $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

  (em outras palavras, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ possui uma indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞ em $x = a$).

  Então

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  se o limite do lado direito existir (ou se for $\pm\infty$).

Regra de L'Hôspital

- A Regra de L'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de duas derivadas, desde ocorra inderteminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

Regra de L'Hôspital

- A Regra de L'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de duas derivadas, desde ocorra inderteminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞.
- A Regra de L'Hôspital é válida também para limites laterais e para os limites em $\pm\infty$.

Regra de L'Hôspital

- A Regra de L'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de duas derivadas, desde ocorra indertеminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞.
- A Regra de L'Hôspital é válida também para limites laterais e para os limites em $\pm\infty$.
- Essa regra foi apresentada no livro *Analyse des Infiniment Petits*, publicado pelo marquês de L'Hôspital em 1696, considerado o primeiro texto de Cálculo Diferencial e Integral. O seguinte exemplo foi usado no livro:

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \quad \text{quando} \quad x \to a, \quad a > 0.$$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
- **Solução.** Temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Pela Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1.$$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo 2** $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \cos x}{x}$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo 2** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x \cos x}{x}$
- **Solução.** Temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Pela Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} 2x \cos x)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} (2\cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \cos x) = 2.$$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

- **Solução.** Temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Continuamos a ter uma indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Aplicamos novamente a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$
- **Solução.** Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Continuamos ter uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Usamos novamente a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 x \tan^2 x + 2sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}.$$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

Regra de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$
- **Solução.** Observe que

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \frac{\operatorname{sen}\pi}{1-\cos\pi} = 0$$

Mas

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} \neq \lim_{x\to\pi^-} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

Não se pode aplicar a Regra de L'Hôspital nesse exemplo, pois não temos indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

Produtos indeterminados

- Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, então $f(x)g(x)$ possui uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$, quando $x \to a$.

Produtos indeterminados

- Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, então $f(x)g(x)$ possui uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$, quando $x \to a$.
- Podemos transformar fg em um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{ou} \qquad fg = \frac{g}{1/f}.$$

Assim, a indeterminação é transformada em uma tipo $0/0$ ou ∞/∞ e podemos usar a Regra de L'Hôspital.

Produtos indeterminados

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

Produtos indeterminados

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
- **Solução.** Usando a Regra de L'Hôspital, temos:

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} x \ln x}_{\text{tipo} \quad 0 \cdot \infty} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}}_{\text{tipo} \quad \infty/\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Diferenças indeterminadas

- Se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, então $f(x) - g(x)$ possui uma ideterminação do tipo $\infty - \infty$ em $x = a$.

Diferenças indeterminadas

- Se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, então $f(x) - g(x)$ possui uma ideterminação do tipo $\infty - \infty$ em $x = a$.
- Para calcular $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x))$, tentamos converter a diferença em um quociente, através de manipulações algébricas, de forma a obter uma indetermināção do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

Diferenças indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$

Diferenças indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$
- **Solução.** Temos uma indeterminação $\infty - \infty$. Fazemos:

$$\sec x - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Assim temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ em $x = \pi/2$. Pela Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$$

Potências Indeterminadas

- Várias formas indeterminadas surgem do limite:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	Indeterminação
0	0	0^0
∞	0	∞^0
1	$\pm\infty$	1^∞

Potências Indeterminadas

- Várias formas indeterminadas surgem do limite:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	Indeterminação
0	0	0^0
∞	0	∞^0
1	$\pm\infty$	1^∞

- Tomando o logaritmo natural temos:

$$y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln(f(x)),$$

donde

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}.$$

Potências Indeterminadas

- Várias formas indeterminadas surgem do limite:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	Indeterminação
0	0	0^0
∞	0	∞^0
1	$\pm\infty$	1^∞

- Tomando o logaritmo natural temos:

$$y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x)\ln(f(x)),$$

donde

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}.$$

- Calculamos $\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))$ e obtemos

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}.$$

Potências Indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotan} x}$

Potências Indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotan} x}$
- **Solução.** Essa é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$.
  Fazendo $y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotan} x}$, temos

  $$\ln y = \operatorname{cotan} x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x) \;\Rightarrow\; y = e^{\operatorname{cotan} x \ln(1+\operatorname{sen} 4x)}.$$

  Temos:

  $$\operatorname{cotan} x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x) = \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x}.$$

  Temos agora uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Por L'Hôspital:

  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{1+\operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

  Logo,

  $$\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotan} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{cotan} x \ln(1+\operatorname{sen} 4x)} = e^4.$$

Potências Indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0^+} x^x$

Potências Indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 0^+} x^x$
- **Solução.** Fazendo $y = x^x$, então

$$\ln y = x \ln x \Rightarrow y = e^{x \ln x}.$$

Já calculamos $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. Assim

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

Potências Indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

Potências Indeterminadas

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
- **Solução.** Fazendo $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ então

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Fazendo $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$ teremos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Logo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/x^2}{(1+1/x)}}{-1/x^2}=1$$

Portanto, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

Exemplo de L'Hôspital

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$

  Solução. Temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Por L'Hôspital:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \lim_{x \to a^+} \frac{\dfrac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{\dfrac{-3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{a^3 - 2a^3}{\sqrt{2a^3a - a^4}} - \dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{aa^2}}}{\dfrac{-3a}{4\sqrt[4]{a^3a}}} = \frac{\dfrac{-4a}{3}}{\dfrac{-3}{4}} = \frac{16a}{9}.$$