Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 21: Integrais — áreas e distâncias

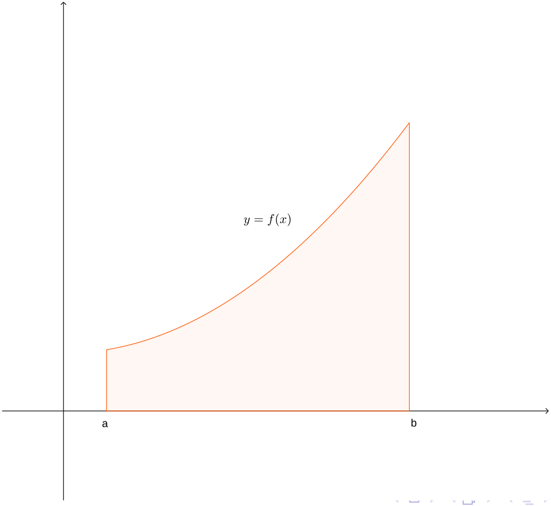
Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

O problema da área

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0 \ \forall \ x$.
Temos o seguinte:
Problema. Calcular a área da região S abaixo do gráfico de f, acima do eixo x, entre $x = a$ e $x = b$.



O problema da área

A ideia é apróximar a região curvilínea abaixo do gráfico por uma poligonal. Procedemos da seguinte maneira.

O problema da área

A ideia é apróximar a região curvilínea abaixo do gráfico por uma poligonal. Procedemos da seguinte maneira.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais, de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um número fixado:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

O problema da área

A ideia é apróximar a região curvilínea abaixo do gráfico por uma poligonal. Procedemos da seguinte maneira.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais, de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um número fixado:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Uma subdivisão como essa é chamada de **partição** do intervalo $[a, b]$.

O problema da área

A ideia é apróximar a região curvilínea abaixo do gráfico por uma poligonal. Procedemos da seguinte maneira.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais, de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um número fixado:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Uma subdivisão como essa é chamada de **partição** do intervalo $[a, b]$.

O k-ésimo intervalo $(k = 1, \ldots, n)$ é $[x_{k-1}, x_k]$.

O problema da área

A ideia é apróximar a região curvilínea abaixo do gráfico por uma poligonal. Procedemos da seguinte maneira.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais, de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um número fixado:

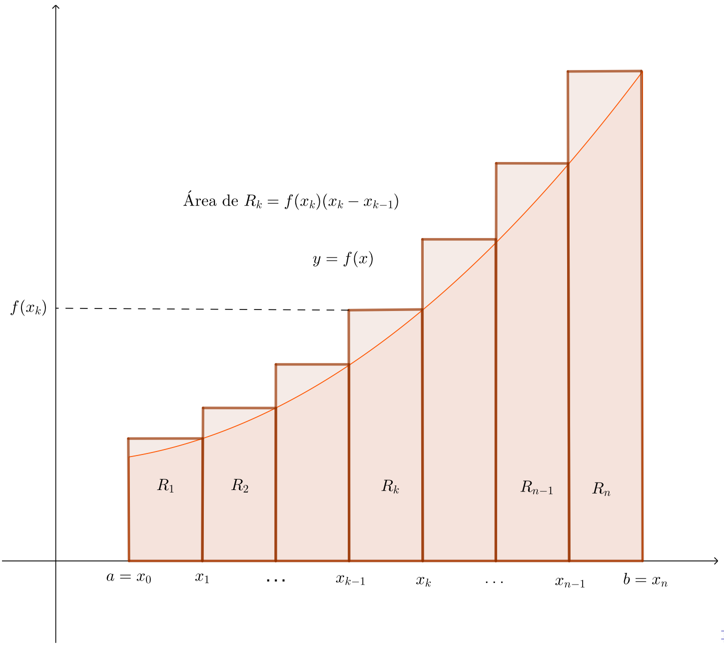
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Uma subdivisão como essa é chamada de **partição** do intervalo $[a, b]$.

O k-ésimo intervalo $(k = 1, \ldots, n)$ é $[x_{k-1}, x_k]$.

Com base no k-ésimo intervalo, construímos o retântulo R_k de altura $f(x_k)$.

O problema da área



O problema da área

A área da poligonal é dada pela soma das áreas de todos os retângulos:

$$
\begin{aligned}
A_n = \text{Área da poligonal} = \sum_{k=1}^{n} A(R_k) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x,
\end{aligned}
$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ é o comprimento de cada intervalo da partição.

O problema da área

A área da poligonal é dada pela soma das áreas de todos os retângulos:

$$\begin{aligned} A_n = \text{Área da poligonal} = \sum_{k=1}^{n} A(R_k) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x, \end{aligned}$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ é o comprimento de cada intervalo da partição.

A ideia é que quanto maior n (ou seja, quanto maior for o número de subintervalos da partição), mais próxima é A_n da área $A(S)$ da região curvilínea S. Ou seja, se n é grande

$$A(S) \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

O problema da área

Poderíamos também, na construção anterior, produzir os retângulos R_k com altura igual a $f(x_{k-1})$ (f calculada no ponto inicial do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$).

O problema da área

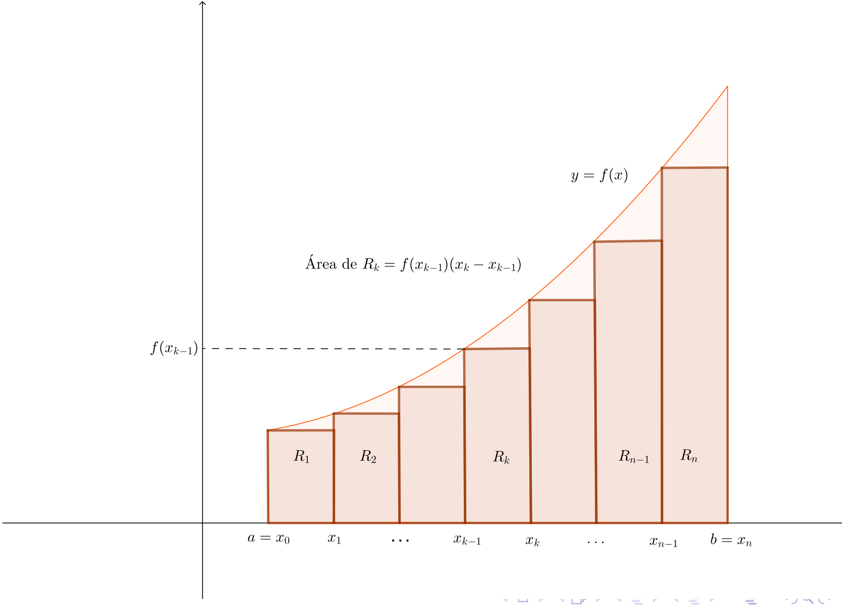
Poderíamos também, na construção anterior, produzir os retângulos R_k com altura igual a $f(x_{k-1})$ (f calculada no ponto inicial do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$).

Nesse caso, a área da poligonal seria:

$$\begin{aligned} A_n = \text{Área da poligonal} &= \sum_{k=1}^{n} A(R_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x, \end{aligned}$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ é o comprimento de cada intervalo da partição.

O problema da área



O problema da área

De um modo mais geral, poderíamos escolher um ponto qualquer $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, e produzir retângulos R_k com altura igual a $f(x_k^*)$.

O problema da área

De um modo mais geral, poderíamos escolher um ponto qualquer $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, e produzir retângulos R_k com altura igual a $f(x_k^*)$. Nesse caso, a área da poligonal seria:

$$\begin{aligned} A_n = \text{Área da poligonal} &= \sum_{k=1}^{n} A(R_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x, \end{aligned}$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ é o comprimento de cada intervalo da partição.

O problema da área

De um modo mais geral, poderíamos escolher um ponto qualquer $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, e produzir retângulos R_k com altura igual a $f(x_k^*)$.

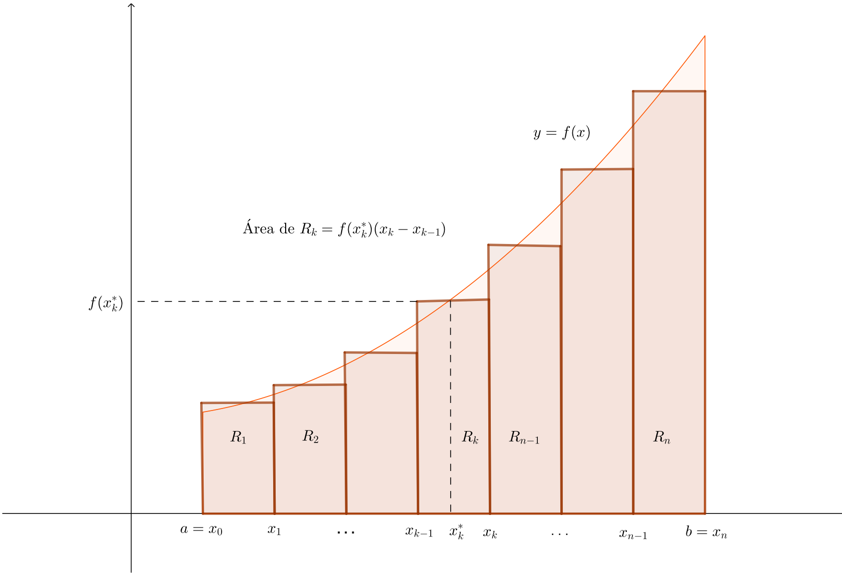
Nesse caso, a área da poligonal seria:

$$
\begin{aligned}
A_n = \text{Área da poligonal} &= \sum_{k=1}^{n} A(R_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x,
\end{aligned}
$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ é o comprimento de cada intervalo da partição.

Somas do tipo acima são chamadas de **somas de Riemann** da função f.

O problema da área



O problema da área

Definição

A área da região S abaixo do gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $f \geq 0$, é dada por

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x,$$

ou seja, é calculada como limite das somas de Riemann associadas a partições de $[a, b]$ em n subintervalos iguais e à escolha de um ponto x_k^* no k-ésimo subintervalo.

O problema da área

Definição

A área da região S abaixo do gráfico de uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, com $f \geq 0$, é dada por

$$A(S) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x,$$

ou seja, é calculada como limite das somas de Riemann associadas a partições de $[a,b]$ em n subintervalos iguais e à escolha de um ponto x_k^* no k-ésimo subintervalo.

Quando a função f é contínua, prova-se que esse limite existe e não depende da escolha dos pontos x_k^*.

O problema da área

- **Exemplo.** Use aproximações poligonais para estimar a área abaixo da parábola $y = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

O problema da área

- **Exemplo.** Use aproximações poligonais para estimar a área abaixo da parábola $y = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

  `https://www.geogebra.org/m/RCVce5W4`

O problema da área

- Cálculo a área da região S abaixo de $y = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$:
  Fazemos a partição do intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \underbrace{\frac{k-1}{n}}_{x_{k-1}} < \underbrace{\frac{k}{n}}_{x_k} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1.$$

  O k-ésimo intervalo é $[x_{k-1}, x_k] = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, para $k = 1, \ldots, n$.
  A área do retângulo R_k é

$$A(R_k) = f(x_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{k^2}{n^3}$$

O problema da área

- Portanto, a aproximação da área é dada por

$$A(s) \approx \sum_{k=1}^{n} A(R_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Temos a seguinte fórmula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Logo

$$A(s) \approx \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Portanto

$$A(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

O problema da distância

Suponha que uma partícula se mova em uma reta com função velocidade $v(t) \geq 0$, entre os tempos $t = a$ e $t = b$. Queremos calcular a distância percorrida nesse intervalo de tempo.

O problema da distância

Suponha que uma partícula se mova em uma reta com função velocidade $v(t) \geq 0$, entre os tempos $t = a$ e $t = b$. Queremos calcular a distância percorrida nesse intervalo de tempo.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de comprimento $\Delta t = (b - a)/n$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

O problema da distância

Suponha que uma partícula se mova em uma reta com função velocidade $v(t) \geq 0$, entre os tempos $t = a$ e $t = b$. Queremos calcular a distância percorrida nesse intervalo de tempo.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de comprimento $\Delta t = (b - a)/n$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Em cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ escolhemos um ponto t_k^*.
Se $v(t)$ é contínua e n é grande, podemos supor, por aproximação, que a velocidade no intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ é constante igual a $v(t_k^*)$.

O problema da distância

Suponha que uma partícula se mova em uma reta com função velocidade $v(t) \geq 0$, entre os tempos $t = a$ e $t = b$. Queremos calcular a distância percorrida nesse intervalo de tempo.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de comprimento $\Delta t = (b - a)/n$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Em cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ escolhemos um ponto t_k^*.
Se $v(t)$ é contínua e n é grande, podemos supor, por aproximação, que a velocidade no intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ é constante igual a $v(t_k^*)$.

Assim, a distância d_k percorrida entre os tempos t_{k-1} e t_k é aproximadamente

$$d_k \approx \underbrace{v(t_k^*)}_{\text{velocidade}} \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{\text{tempo}} = v(t_k^*)\Delta t.$$

O problema da distância

A ditância total percorrida entre $t = a$ e $t = b$ será aproximadamente:

$$d \approx \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)\Delta t.$$

Essa aproximação é tanto melhor quanto maior o número n de subintervalos da partição.
Observe que lado direito dessa expressão é uma **soma de Riemann** da função $v(t)$.

O problema da distância

A ditância total percorrida entre $t = a$ e $t = b$ será aproximadamente:

$$d \approx \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)\Delta t.$$

Essa aproximação é tanto melhor quanto maior o número n de subintervalos da partição.
Observe que lado direito dessa expressão é uma **soma de Riemann** da função $v(t)$.

Assim, temos

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)\Delta t.$$

O problema da distância

A ditância total percorrida entre $t = a$ e $t = b$ será aproximadamente:

$$d \approx \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)\Delta t.$$

Essa aproximação é tanto melhor quanto maior o número n de subintervalos da partição.
Observe que lado direito dessa expressão é uma **soma de Riemann** da função $v(t)$.

Assim, temos

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)\Delta t.$$

Prova-se que esse limite existe quando $v(t)$ é contínua e não depende da escolha dos pontos t_k^*.

O problema da distância

A ditância total percorrida entre $t = a$ e $t = b$ será aproximadamente:

$$d \approx \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)\Delta t.$$

Essa aproximação é tanto melhor quanto maior o número n de subintervalos da partição.
Observe que lado direito dessa expressão é uma **soma de Riemann** da função $v(t)$.

Assim, temos

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k^*)\Delta t.$$

Prova-se que esse limite existe quando $v(t)$ é contínua e não depende da escolha dos pontos t_k^*.

Segue da discussão feita a respeito de áreas que a distância percorrida é igual à área abaixo do gráfico da função velocidade.