Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 9: Regras de derivação

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Derivadas

- Seja $f : I \subset R \to \mathbb{R}$ uma função. A **derivada** de f no ponto $a \in I$, caso exista, é calculada da seguinte forma:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivadas

- Seja $f : I \subset R \to \mathbb{R}$ uma função. A **derivada** de f no ponto $a \in I$, caso exista, é calculada da seguinte forma:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Assim, podemos calcular a função derivada fazendo

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Cálculo de derivadas

- **Função constante** $f(x) = c$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} c = 0}$$

Cálculo de derivadas

- **Função constante** $f(x) = c$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} c = 0}$$

- **Função potência** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Já vimos que $(x)' = 1$ e $(x^2)' = 2x$. De mode geral, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}}$$

Cálculo de derivadas

- **Função constante** $f(x) = c$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}c = 0}$$

- **Função potência** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Já vimos que $(x)' = 1$ e $(x^2)' = 2x$. De mode geral, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$$

- **Exemplo.** (a) $f(x) = x^6$ (a) $g(x) = x^{1000}$

Cálculo de derivadas

- **Função constante** $f(x) = c$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}c = 0}$$

- **Função potência** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Já vimos que $(x)' = 1$ e $(x^2)' = 2x$. De mode geral, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$$

- **Exemplo.** (a) $f(x) = x^6$ (a) $g(x) = x^{1000}$
- **Solução:**

(a) $f(x) = x^6 \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}x^6 = 6x^{6-1} = 6x^5$.

(b) $g(x) = x^{1000} \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}x^{1000} = 1000x^{1000-1} = 1000x^{999}$.

Cálculo de derivadas

- **Função potência, em geral:** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$ (e $x > 0$). Provaremos, mais adiante, que também vale a fórmula:

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$$

Cálculo de derivadas

- **Função potência, em geral:** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$ (e $x > 0$). Provaremos, mais adiante, que também vale a fórmula:

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$$

- **Exemplo.** (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (a) $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- **Solução:**

  (a)$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

  (b) $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow g'(x) = \frac{d}{dx}x^{-2} = -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$.

Cálculo de derivadas

- **Multiplicação por constante.** Se $f(x)$ é derivável e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)}$$

Cálculo de derivadas

- **Multiplicação por constante.** Se $f(x)$ é derivável e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)}$$

- **Exemplo.** (a) $f(x) = 3x^4$ (a) $g(x) = -x$

Cálculo de derivadas

- **Multiplicação por constante.** Se $f(x)$ é derivável e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)}$$

- **Exemplo.** (a) $f(x) = 3x^4$ (a) $g(x) = -x$
- **Solução:**

(a) $f(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}x^4 = 12x^3.$

(b) $g(x) = -x \Rightarrow g'(x) = \dfrac{d}{dx}(-x) = -\dfrac{d}{dx}x = -1.$

Cálculo de derivadas

- **Regra da soma.** Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)}$$

Cálculo de derivadas

- **Regra da soma.** Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)}$$

- Como consequência, temos a **regra da diferença**: se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)}$$

Cálculo de derivadas

- **Exemplo.** $f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$

Cálculo de derivadas

- **Exemplo.** $f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$
- **Solução:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\
&= \frac{d}{dx}x^8 + \frac{d}{dx}(12x^5) - \frac{d}{dx}(4x^4) + \frac{d}{dx}(10x^3) - \frac{d}{dx}(6x) + \frac{d}{dx}5 \\
&= \frac{d}{dx}x^8 + 12\frac{d}{dx}x^5 - 4\frac{d}{dx}x^4 + 10\frac{d}{dx}x^3 - 6\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}5 \\
&= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6 \\
&= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6
\end{aligned}$$

Cálculo de derivadas

- **Exemplo.** Ache os pontos onde a reta tangente à curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ é horizontal

Cálculo de derivadas

- **Exemplo.** Ache os pontos onde a reta tangente à curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ é horizontal
- **Solução:** A inclinação da reta tangente a $y = x^4 - 6x^2 + 4$ no ponto (x, y) é dada por $\dfrac{dy}{dx}$.
  Uma reta é horizontal tem inclinação $m = 0$.
  Procuramos então os valores de x tais que $\dfrac{dy}{dx} = 0$. Ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 6x^2 + 4) = 4x^3 - 12x = 0.$$

$$\iff 4x(x^2 - 3) = 0 \iff x = 0, \pm\sqrt{3}.$$

  Para $x = 0 \to y = 0^4 - 6.0^2 + 4 = 4.$

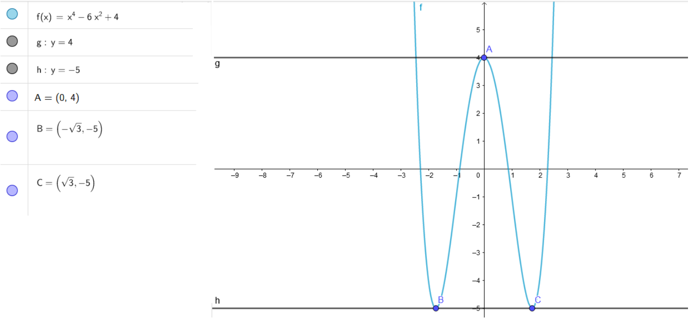
  Para $x = -\sqrt{3} \to y = (-\sqrt{3})^4 - 6(-\sqrt{3})^2 + 4 = -5.$

  Para $x = \sqrt{3} \to y = -5.$

  Portanto, os pontos são $(0, 4), (-\sqrt{3}, -5), (\sqrt{3}, -5)$.

Cálculo de derivadas

- **Solução (continuação):**



Cálculo de derivadas

- **Derivada da exponencial.** Considere a função exponencial na base $e = 2,7182...$, ou seja, $f(x) = e^x$. Temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

Cálculo de derivadas

- **Derivada da exponencial.** Considere a função exponencial na base $e = 2,7182...$, ou seja, $f(x) = e^x$. Temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

- Note que $f'(0) = e^0 = 1$. A função exponencial é caracterizada como sendo a única função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f'(x) = f(x)$ para todo x e $f(0) = 1$.

Cálculo de derivadas

- **Derivada da exponencial.** Considere a função exponencial na base $e = 2,7182...$, ou seja, $f(x) = e^x$. Temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

- Note que $f'(0) = e^0 = 1$. A função exponencial é caracterizada como sendo a única função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f'(x) = f(x)$ para todo x e $f(0) = 1$.
- **Exemplo.** Em que ponto da curva $y = e^x$ sua tangente é paralela à reta $y = 2x$?

Cálculo de derivadas

- **Derivada da exponencial.** Considere a função exponencial na base $e = 2,7182...$, ou seja, $f(x) = e^x$. Temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

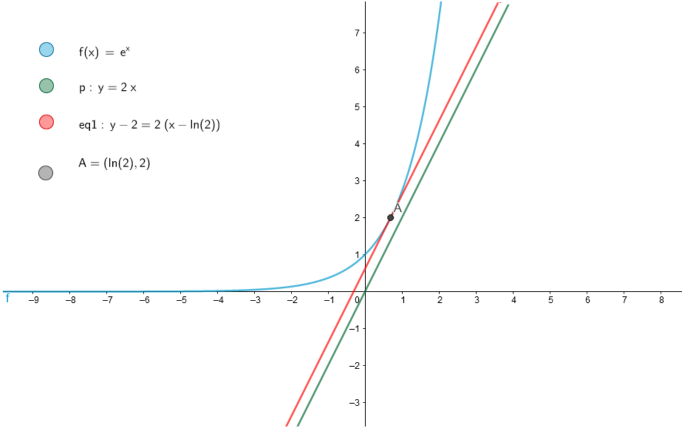
- Note que $f'(0) = e^0 = 1$. A função exponencial é caracterizada como sendo a única função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f'(x) = f(x)$ para todo x e $f(0) = 1$.
- **Exemplo.** Em que ponto da curva $y = e^x$ sua tangente é paralela à reta $y = 2x$?
- **Solução:** Duas retas são paralelas se e somente se suas inclinações são iguais. Temos:

$$\frac{d}{dx}e^x = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2.$$

Assim, $y = e^{\ln 2} = 2$ e o ponto procurado é $(\ln 2, 2)$.

Cálculo de derivadas

- **Solução (continuação):**



Regra do produto

- **Regra do produto.** Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}$$

Regra do produto

- **Exemplo.** Se $f(x) = xe^x$, calcule $f'(x)$. Encontre também uma expressão para $f^{(n)}(x)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Regra do produto

- **Exemplo.** Se $f(x) = xe^x$, calcule $f'(x)$. Encontre também uma expressão para $f^{(n)}(x)$, com $n \in \mathbb{N}$.
- **Solução:**
  - **n=1:** $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(xe^x) = (\dfrac{d}{dx}x)e^x + x(\dfrac{d}{dx}e^x) = e^x + xe^x$
  - **n = 2:**
    $f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x + xe^x) = e^x + \underbrace{\dfrac{d}{dx}(xe^x)}_{f'(x)} = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$
  - **n= 3:** $f'''(x) = \frac{d}{dx}(2e^x + xe^x)$

    $= \frac{d}{dx}(2e^x) + \underbrace{\dfrac{d}{dx}(xe^x)}_{f'(x)} = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x.$

  Em cada etapa, adicionamos e^x à etapa anterior. Vemos então que

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Regra do produto

- **Exemplo.** Se $f(x) = \sqrt{x}g(x)$, calcule $f'(4)$, sabendo que $g(4) = 2$ e $g'(4) = 3$.

Regra do produto

- **Exemplo.** Se $f(x) = \sqrt{x}g(x)$, calcule $f'(4)$, sabendo que $g(4) = 2$ e $g'(4) = 3$.
- **Solução:** Aplicamos a regra do produto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)g(x) + \sqrt{x}\frac{d}{dx}g(x) \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}g(x) + \sqrt{x}g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}g(x) + \sqrt{x}g'(x) \end{aligned}$$

Assim,

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}}g(4) + \sqrt{4}g'(4) = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}.$$

Regra do quociente

- **Regra do quociente.** Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) - f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{g(x)^2}}$$

Regra do quociente

- **Regra do quociente.** Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) - f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{g(x)^2}}$$

- **Exemplo.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$

Regra do quociente

- **Regra do quociente.** Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) - f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{g(x)^2}}$$

- **Exemplo.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$
- **Solução**

  Pela regra do quociente temos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\frac{d}{dx}(x^2 + x - 2)\right)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\left(\frac{d}{dx}(x^3 + 6)\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2x + 1)(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{2x^4 + x^3 + 12x + 6 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}
\end{aligned}$$

Regra do quociente

- **Exemplo.** $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$ (não vale a pena usar a regra do quociente!)

Regra do quociente

- **Exemplo.** $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$ (não vale a pena usar a regra do quociente!)
- **Solução**

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = 3x + 2x^{-\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x + 2x^{-\frac{1}{2}}) = 3 + 2.(-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} = 3 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Resumo das regras de derivação

$(c)' = 0$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^x)' = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(fg)' = f'g + fg'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	