# Cálculo Diferencial e Integral I

## Limites

Universidade Federal de Minas Gerais

# Limites

- Considere a função $f(x) = x^2 - x + 2$. Vamos calcular valores de $f(x)$ quando $x$ se aproxima do ponto fixado $a = 2$, com $x \neq 2$:

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1,5 | 2,75 |
| 1,9 | 3,71 |
| 1,95 | 3,8525 |
| 1,99 | 3,9701 |
| 1,999 | 3,997001 |

| x | f(x) |
|---|---|
| 3 | 8 |
| 2,5 | 5,75 |
| 2,1 | 4,31 |
| 2,05 | 4,1525 |
| 2,01 | 4,0301 |
| 2,001 | 4,003001 |

# Limites

- Considere a função $f(x) = x^2 - x + 2$. Vamos calcular valores de $f(x)$ quando $x$ se aproxima do ponto fixado $a = 2$, com $x \neq 2$:

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1,5 | 2,75 |
| 1,9 | 3,71 |
| 1,95 | 3,8525 |
| 1,99 | 3,9701 |
| 1,999 | 3,997001 |

| x | f(x) |
|---|---|
| 3 | 8 |
| 2,5 | 5,75 |
| 2,1 | 4,31 |
| 2,05 | 4,1525 |
| 2,01 | 4,0301 |
| 2,001 | 4,003001 |

- Observamos que, a medida que $x$ se aproxima de $a = 2$, $f(x)$ se aproxima do valor 4.

# Limites

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, e $a$ um ponto de $I$ (ou uma extremidade de I).

## Definição

*Dizemos que que o número $L \in \mathbb{R}$ é o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao valor $a$, e denotamos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

*se $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de $L$ quando $x$ se aproxima de $a$ (com $x \neq a$).*

# Limites

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, e $a$ um ponto de $I$ (ou uma extremidade de I).

## Definição

*Dizemos que que o número $L \in \mathbb{R}$ é o **limite** de $f(x)$ quando $x$ tende ao valor $a$, e denotamos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

*se $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de $L$ quando $x$ se aproxima de $a$ (com $x \neq a$).*

- Denotamos também

$$f(x) \to L \quad \text{se} \quad x \to a.$$

# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$
- **Solução.** Observe que $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ não está definida quando $x = 1$. Isso não é relevante, pois estamos interessados nos valores $f(x)$ para $x$ próximo de 1, mas diferente de 1. Vamos calcular alguns desses valores:

| $x < 1$ | $f(x)$ | $x > 1$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 0,666667 | 1,5 | 0,4 |
| 0,9 | 0,526316 | 1,1 | 0,476190 |
| 0,99 | 0,502513 | 1,01 | 0,497512 |
| 0,999 | 0,500250 | 1,001 | 0,499750 |
| 0,9999 | 0,500025 | 1,0001 | 0,499975 |

Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5.$$

# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$

# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

- **Solução.** A tabela fornece uma lista de valores da função para vários valores de t próximos de 0:

| $t$ | $\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ |
|---|---|
| $\pm 1,0$ | $0,16228$ |
| $\pm 0,5$ | $0,16553$ |
| $\pm 0,1$ | $0,16662$ |
| $\pm 0,05$ | $0,16666$ |
| $\pm 0,01$ | $0,16667$ |

À medida que $t$ tende a 0, os valores da função parecem se aproximar de 0,1666666... Assim, podemos conjecturar que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}.$$

# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$
- **Solução.** Novamente, $f(x) = \text{sen}(x)/x$ não está definida quando $x = 0$. Usando uma calculadora, construímos a tabela abaixo:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $\pm 1,0$ | 0,84147098 |
| $\pm 0,5$ | 0,95885108 |
| $\pm 0,4$ | 0,97354586 |
| $\pm 0,3$ | 0,98506736 |
| $\pm 0,2$ | 0,99334665 |
| $\pm 0,1$ | 0,99833417 |
| $\pm 0,05$ | 0,99958339 |
| $\pm 0,01$ | 0,99998333 |
| $\pm 0,005$ | 0,99999583 |
| $\pm 0,001$ | 0,99999983 |

Dos valores apresentados na tabela, podemos conjecturar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

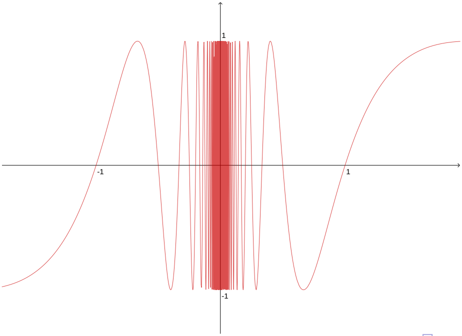
# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$

# Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

- **Solução.** Este limite não existe. Observe que nos pontos da forma $x = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$ (ou seja, $1, 1/2, 1/3, \ldots$), temos $\operatorname{sen}(\pi/x) = 0$. Por outro lado, nos pontos da forma $x = 1/(1/2 + 2n)$, onde $n \in \mathbb{N}$ (ou seja, $1/(1/2+2), 1/(1/2+4), 1/(1/2+6), \ldots$), temos $\operatorname{sen}(\pi/x) = 1$. Ou seja, dependendo da forma como nos aproximamos de $x = 0$, $f(x)$ se aproxima de valores diferentes. Veja o gráfico dessa função:



# Limites

- **Exemplo.** Defina

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

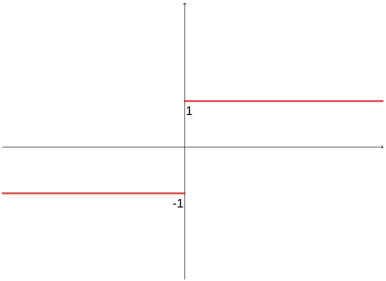
# Limites

- **Exemplo.** Defina

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

  Não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

- **Solução.** De fato, quando $x$ se aproxima de zero pela direita, $f(x) \to 1$. Quando $x$ se aproxima de zero pela esquerda, $f(x) \to -1$.



# Limites laterais

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, e $a$ um ponto de $I$ (ou uma extremidade de I), que contenha pontos $x$ menores do que $a$ (dizemos que $a$ é acumulado "à esquerda" por pontos de $I$).

## Definição

*Dizemos que o número $L \in \mathbb{R}$ é o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$* **pela esquerda**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

*se $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de $L$ quando $x$ se aproxima do ponto $a$ por valores $x < a$.*

# Limites laterais

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, e $a$ um ponto de $I$ (ou uma extremidade de I), que contenha pontos $x$ menores do que $a$ (dizemos que $a$ é acumulado "à esquerda" por pontos de $I$).

## Definição

*Dizemos que o número $L \in \mathbb{R}$ é o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$* **pela esquerda**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

*se $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de $L$ quando $x$ se aproxima do ponto $a$ por valores $x < a$.*

- Denotamos também

$$f(x) \to L \quad \text{se} \quad x \to a^-.$$

e dizemos "$x$ tende ao ponto $a$ por valores menores que $a$".

# Limites laterais

- Analogamente, se $a$ é acumulado "à direita " por pontos de $I$, definimos

## Definição

*Dizemos que o número $L \in \mathbb{R}$ é o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$* **pela direita**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

*se $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de $L$ quando $x$ se aproxima do ponto $a$ por valores $x > a$.*

# Limites laterais

- Analogamente, se $a$ é acumulado "à direita " por pontos de $I$, definimos

## Definição

*Dizemos que o número $L \in \mathbb{R}$ é o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$* **pela direita**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

*se $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de $L$ quando $x$ se aproxima do ponto $a$ por valores $x > a$.*

- Denotamos também

$$f(x) \to L \quad \text{se} \quad x \to a^+$$

e dizemos "$x$ tende ao ponto $a$ por valores maiores que $a$".

# Limites laterais

- **Exemplo.** Defina

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Temos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

# Limites laterais

- **Exemplo.** Defina

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Temos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a$ é um ponto do interior do intervalo $I$ (portanto, faz sentido falar em ambos os limites laterais). Temos o seguinte:

## Proposição

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \;\; \textit{se, e somente se} \;\; \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \textit{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

# Limites infinitos

- Suponha $f$ uma função definida em $I \setminus \{a\}$, onde $a$ é um ponto interior do intervalo $I$ (ou seja, $f$ está definida em ambos os lados de $a$).

## Definição

*Dizemos que o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$ é* **infinito**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

*se $f(x)$ se assume valores arbitrariamente grandes quando $x$ se aproxima do ponto $a$ (com $x \neq a$).*

# Limites infinitos

- Suponha $f$ uma função definida em $I \setminus \{a\}$, onde $a$ é um ponto interior do intervalo $I$ (ou seja, $f$ está definida em ambos os lados de $a$).

## Definição

*Dizemos que o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$ é* **infinito**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

*se $f(x)$ se assume valores arbitrariamente grandes quando $x$ se aproxima do ponto $a$ (com $x \neq a$).*

- Denotamos também

$$f(x) \to \infty \quad \text{se} \quad x \to a.$$

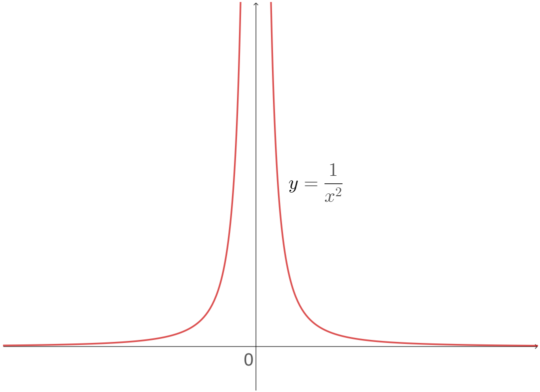
e dizemos "$f(x)$ tende a infinito quando $x$ tende ao ponto $a$".

# Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

# Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
- **Solução.** À medida que $x$ se aproxima de zero, $x^2$ também se aproxima de zero e $1/x^2$ se torna arbitrariamente grande. Veja o gráfico:



# Limites infinitos

- Analogamente, definimos:

## Definição

*Dizemos que o o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$ é* **menos infinito**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

*se $f(x)$ se assume valores negativos, arbitrariamente grandes em módulo, quando $x$ se aproxima do ponto $a$ (com $x \neq a$).*

# Limites infinitos

- Analogamente, definimos:

## Definição

*Dizemos que o o* **limite** *de $f(x)$ quando $x$ tende ao ponto $a$ é* **menos infinito**, *e denotamos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

*se $f(x)$ se assume valores negativos, arbitrariamente grandes em módulo, quando $x$ se aproxima do ponto $a$ (com $x \neq a$).*

- Denotamos também

$$f(x) \to -\infty \quad \text{se} \quad x \to a.$$

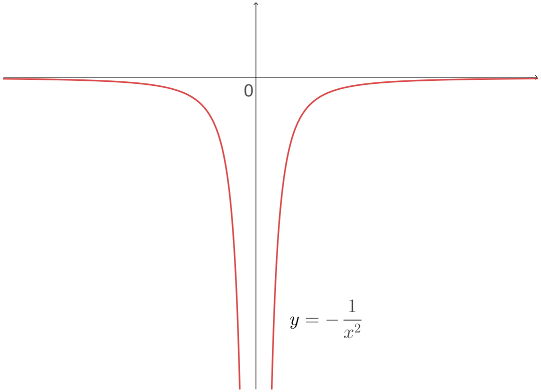
e dizemos "$f(x)$ tende a menos infinito quando $x$ tende ao ponto $a$".

# Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$

# Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$
- **Solução.** De maneira análoga ao exemplo anterior, temos que $x^2$ tende a zero quando $x$ se aproxima de 0. Assim, $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ assume valores negativos, porém arbitrariamente grandes em módulo, quando $x$ se aproxima de 0. Veja o gráfico:



## Limites laterais infinitos

- De forma similar, podemos definir:

# Limites laterais infinitos

- De forma similar, podemos definir:
- Se $a$ é acumulado à esquerda por pontos de $I$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

- Se $a$ é acumulado à direita por pontos de $I$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

# Limites laterais infinitos

- De forma similar, podemos definir:
- Se $a$ é acumulado à esquerda por pontos de $I$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

- Se $a$ é acumulado à direita por pontos de $I$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

- Uma observação importante: $\infty$ e $-\infty$ não são números reais. Expressões da forma $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ indicam que os limites não existem (como números reais). Porém, dão informações qualitativas importantes sobre $f(x)$ em pontos próximos de $x = a$.

# Limites laterais infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$

# Limites laterais infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$ e $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$
- **Solução.** Quando $x$ se aproxima de 3 por valores *maiores* que 3, o numerador se aproxima de 6, enquanto o denominador se aproxima de zero por valores *positivos*. Assim, temos que $f(x) \to +\infty$ quando $x \to 3^+$.

  Analogamente, quando $x$ se aproxima de 3 por valores *menores* que 3, o numerador se aproxima de 6 e o denominador se aproxima de zero, mas agora por valores *negativos*. Logo, temos que $f(x) \to -\infty$ quando $x \to 3^-$.

# Limites infinitos

## Definição

*Dizemos que que o gráfico de $f(x)$ tem a reta $x = a$ como* **assíntota vertical** *se ocorrer algum dos seguintes limites infinitos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

# Limites infinitos

- **Exemplo.** Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \tan x$.

# Limites infinitos

- **Exemplo.** Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \tan x$.
- **Solução.** Como $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, é natural supor que existam assíntotas nos pontos em que $\cos x = 0$. De fato, como

$$\begin{aligned} \cos(x) \to 0^+, &\quad \text{quando } x \to \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^- \\ \cos(x) \to 0^-, &\quad \text{quando } x \to \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^+ \end{aligned}$$

e $\operatorname{sen}(x)$ é positivo e próximo de 1 quando $x$ está próximo de $\pi/2$, temos que

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty.$$

Logo, a reta $x = \pi/2$ é *uma* assíntota vertical.

Um raciocínio análogo mostra que as retas $x = (2n+1)\pi/2$, com $n \in \mathbb{Z}$, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \tan x$.