Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 24: Integrais indefinidas

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Teorema fundamental do cálculo

Vamos recordar o enunciado do **teorema fundamental do cálculo**:

Teorema

Se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e, para todo $x \in (a, b)$,

$$g'(x) = f(x).$$

Teorema fundamental do cálculo

Vamos recordar o enunciado do **teorema fundamental do cálculo**:

Teorema

Se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e, para todo $x \in (a, b)$,

$$g'(x) = f(x).$$

Ou seja, a função $g(x)$ é uma **primitiva** para o integrando $f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo, 2ª versão

A segunda versão do **teorema fundamental do cálculo** deixa claro como usar primitivas para calcular integrais definidas:

Teorema

Se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja, uma função tal que $F'(x) = f(x)$.

Integrais indefinidas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, onde* I *é um intervalo.*
A integral indefinida *de* $f(x)$ *é a família de todas as suas primitivas no intervalo* I. *Ela é denotada por*

$$\int f(x)dx.$$

Integrais indefinidas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, onde* I *é um intervalo.*
A integral indefinida *de* $f(x)$ *é a família de todas as suas primitivas no intervalo* I*. Ela é denotada por*

$$\int f(x)dx.$$

Assim,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

onde $F(x)$ é tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$ e $c \in \mathbb{R}$.

Integrais indefinidas

Ou seja:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) = x^2$$

Integrais indefinidas

Ou seja:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) = x^2$$

Ou ainda:

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(\tan x + c) = \sec^2 x.$$

Propriedades de integrais indefinidas

Segue de um resultado já provado para primitivas os seguintes:

Proposição

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

(a) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

(b) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

Propriedades de integrais indefinidas

Segue de um resultado já provado para primitivas os seguintes:

Proposição

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

(a) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

(b) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

- Evidentemente

$$\boxed{\int 0dx = c}$$

Propriedades de integrais indefinidas

Segue de um resultado já provado para primitivas os seguintes:

Proposição

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

(a) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

(b) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

- Evidentemente

$$\boxed{\int 0dx = c}$$

- Temos, se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante,

$$\boxed{\int dx = \int 1dx = x + c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int \alpha dx = \alpha \int dx = \alpha x + c}$$

Tabela de integrais indefinidas

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (*)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \mathrm{sen} x \, dx = -\cos x + c$	$\int \cos x \, dx = \mathrm{sen} x + c$
$\int \sec^2 x \, dx = \mathrm{tan} x + c$	$\int \mathrm{cossec}^2 x \, dx = -\mathrm{cotan} x + c$
$\int \sec x \, \mathrm{tan} x \, dx + c = \sec x$	$\int \mathrm{cossec} x \, \mathrm{cotan} x \, dx = -\mathrm{cossec} x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctan} x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsen} x + c$

(*) $n \neq -1$

Integrais indefinidas

- **Exemplo.** Calcule $\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx$

- **Solução.**

$$
\begin{aligned}
\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx &= 10\int x^4 dx - 2\int \sec^2 x dx \\
&= \frac{10}{5}x^5 - 2\mathrm{tanx} + C \\
&= 2x^5 - 2\mathrm{tanx} + C.
\end{aligned}
$$

Integrais indefinidas

- **Exemplo.** Calcule $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$.
- **Solução.** Temos que

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\text{arctan x}$$

é uma primitiva para $f(x) = 2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}$. Como f é contínua no intervalo $[0, 2]$, segue pelo teorema fundamental do cálculo (TFC):

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx &= F(2) - F(0) \\ &= -4 + 3\text{arctan}(2) \end{aligned}$$

Integrais indefinidas

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2}\,dx$.
- **Solução.** Seja $f(x) = \dfrac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2}$. Veja que

$$\frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2} = 2+\sqrt{t}-\frac{1}{t^2}$$

Logo,

$$F(x) = 2x+\frac{2}{3}t^{3/2}+\frac{1}{t}$$

é uma primitiva para f. Como f é contínua em $[1,9]$, então pelo TFC:

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2}\,dx &= F(9)-F(1)\\ &= \frac{292}{9}\end{aligned}$$

Variação total

Dada uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, sua **variação total** no intervalo $[a, b]$ é $F(b) - F(a)$.

Variação total

Dada uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, sua **variação total** no intervalo $[a, b]$ é $F(b) - F(a)$.

O Teorema fundamental do cálculo também tem a seguinte interpretação: a **variação total** de uma função é a **integral de sua taxa de variação**. Ou seja:

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{onde } f(x) = F'(x).}$$

Variação total

- Se $s(t) = F(t)$ é a função posição de um objeto que se move ao longo de uma reta, o **deslocamento**, ou seja, a **variação da posição**, entre os tempos $t = a$ e $t = b$, é a integral da função velocidade $v(t) = s'(t) = F'(t)$:

$$s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)dt.$$

Variação total

- Se $s(t) = F(t)$ é a função posição de um objeto que se move ao longo de uma reta, o **deslocamento**, ou seja, a **variação da posição**, entre os tempos $t = a$ e $t = b$, é a integral da função velocidade $v(t) = s'(t) = F'(t)$:

$$s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)dt.$$

A **distância total percorrida** não é necessariamente igual à variação da posição. Para calculá-la, temos que considerar os intervalos onde a velocidade é positiva e negativa. Ela será igual à área entre o gráfico e o eixo x, calculada como

$$\text{distância percorrida} = \int_a^b |v(t)|dt.$$

Variação total

- Se $s(t) = F(t)$ é a função posição de um objeto que se move ao longo de uma reta, o **deslocamento**, ou seja, a **variação da posição**, entre os tempos $t = a$ e $t = b$, é a integral da função velocidade $v(t) = s'(t) = F'(t)$:

$$s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)dt.$$

  A **distância total percorrida** não é necessariamente igual à variação da posição. Para calculá-la, temos que considerar os intervalos onde a velocidade é positiva e negativa. Ela será igual à área entre o gráfico e o eixo x, calculada como

$$\text{distância percorrida} = \int_a^b |v(t)|dt.$$

- A **variação da velocidade** entre os tempos $t = a$ e $t = b$ é a integral da função aceleração $a(t) = v'(t)$:

$$v(b) - v(a) = \int_a^b a(t)dt.$$

Variação total

- **Exemplo.** Uma partícula se move ao longo de uma reta com função velocidade $v(t) = t^2 - t - 6$ (em m/s).
  (a) Qual é o deslocamento da partícula no intervalo de tempo $1 \leq t \leq 4$.

Variação total

- **Exemplo.** Uma partícula se move ao longo de uma reta com função velocidade $v(t) = t^2 - t - 6$ (em m/s).
  (a) Qual é o deslocamento da partícula no intervalo de tempo $1 \leq t \leq 4$.
- **Solução.**

$$\begin{aligned}
\int_1^4 v(t)dt &= \int_1^4 t^2 - t - 6dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6 \cdot 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 6 \cdot 1\right) \\
&= -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Isso significa que a partícula moveu-se $4,5$m no sentido negativo da reta.

Variação total

- (b) Qual é a distância percorrida neste intervalo de tempo?

Variação total

- (b) Qual é a distância percorrida neste intervalo de tempo?
- **Solução.** Veja que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$, então $v(t) > 0$ se $t \in (3,4]$ e $v(t) < 0$ se $t \in [1,3)$.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 |v(t)|dt &= \int_1^3 -v(t)dt + \int_3^4 v(t)dt \\
&= \int_1^3 -t^2 + t + 6dt + \int_3^4 t^2 - t - 6dt \\
&= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\
&= \frac{61}{6}
\end{aligned}$$

Variação total

- Suponha que uma barra linear tenha sua massa, medida a partir de uma das extremidades, igual a $m(x) = F(x)$. Então a **massa** dos segmento da barra entre $x = a$ e $x = b$ é a integral da função **densidade linear** $\rho(x) = m'(x) = F'(x)$:

$$m(b) - m(a) = \int_a^b \rho(x)dx.$$

- Se $C(x) = F(x)$ é o **custo** para se produzir x unidades de um produto, então a variação do custo para se aumentar a produção de x_1 para x_2 unidades é a integral do **custo marginal** $C'(x) = F'(x)$:

$$C(x_2) - C(x_1) = \int_a^b C'(x)dx.$$