Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 15: Teorema do valor médio

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Teorema de Rolle

Teorema

Suponha $f(x)$ *contínua no intervalo* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b). *Se* $f(a) = f(b)$, *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle

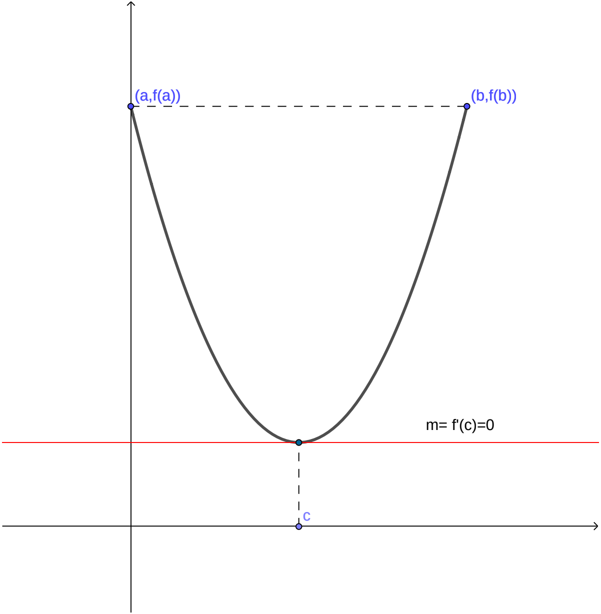
Teorema

Suponha $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Se f é função constante, não há nada a mostrar, pois $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$.
Suponha que exista $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$. A função f possui um máximo absoluto c, e nesse caso, esse máximo está em (a, b).
Como f é diferenciável em (a, b), necessariamente $f'(c) = 0$.
O caso em que existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$ é tratado de forma análoga. $\square$

Teorema de Rolle



Teorema de Rolle

- **Exemplo.** Se $s = f(t)$ é a função posição de uma partícula em movimento retilíneo e, em dois instantes distintos a e b, a partícula ocupa a mesma posição $(f(a) = f(b))$, então existe um instante c entre a e b em que a velocidade é nula $(f'(a) = 0)$.

Teorema de Rolle

- **Exemplo.** Se $s = f(t)$ é a função posição de uma partícula em movimento retilíneo e, em dois instantes distintos a e b, a partícula ocupa a mesma posição ($f(a) = f(b)$), então existe um instante c entre a e b em que a velocidade é nula ($f'(a) = 0$).
- **Exemplo.** Demonstre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma solução real.

Teorema de Rolle

- **Exemplo.** Se $s = f(t)$ é a função posição de uma partícula em movimento retilíneo e, em dois instantes distintos a e b, a partícula ocupa a mesma posição $(f(a) = f(b))$, então existe um instante c entre a e b em que a velocidade é nula $(f'(a) = 0)$.
- **Exemplo.** Demonstre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma solução real.

  Solução. Considere $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.
  $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$ pelo Teorema do valor intermediário.
  Se existissem dois pontos c_1 e c_2 tais que $f(c_1) = f(c_2) = 0$, o Teorema de Rolle garantiria a existência de um ponto entre c_1 e c_2 onde $f'(x)$ se anula.
  Porém, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ para todo valor de x.

Teorema de valor médio

Teorema

Suponha $f(x)$ *contínua no intervalo* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b)*.*
Então existe $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema de valor médio

Teorema

Suponha $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que

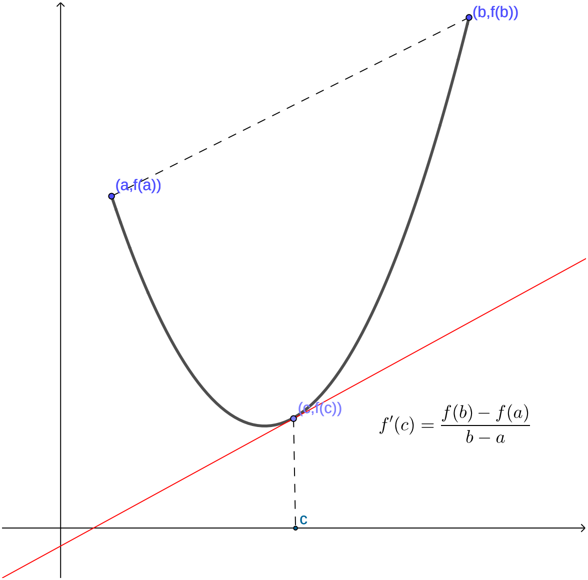
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Em outras palavras:

• existe um ponto $c \in (a, b)$ onde a taxa de variação instantânea coincide com a taxa de variação média de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

• existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante ao gráfico pelos pontos $(a, f(a))$ $(b, f(b))$.

Teorema de valor médio



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema de valor médio

Demonstração.

Considere a função h definida como

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

(ou seja, estamos fazendo a diferença entre $f(x)$ e a função linear cujo gráfico é a reta secante por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$).
A função $h(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).
Além disso, $h(a) = h(b) = 0$.
Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$.
Porém

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Portanto

$$h'(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Teorema do valor médio

- **Exemplo.** Suponha que $s = f(t)$ seja a função posição de um objeto em movimento retilíneo. Dados dois instantes distintos a e b, o Teorema do valor médio diz que para algum intante c entre a e b, a velocidade instantânea em c será igual à velocidade média entre os tempos a e b. Por exemplo, se o objeto percorre 180 km em 2 h, então em algum instante sua velocidade será de 90 km/h.

Teorema do valor médio

Teorema

Se $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *então* f *é constante em* (a, b).

Teorema do valor médio

Teorema

Se $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*, então* f *é constante em* (a, b)*.*

Demonstração.

Sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$, com $x_1 < x_2$.
Pelo Teorema do valor médio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Porém, $f'(c) = 0$ e, portanto, $f(x_1) = f(x_2)$.
Provamos que f assume o mesmo valor em quaisquer dois pontos de (a, b). Portanto, f é função constante. $\square$

Teorema do valor médio

Como consequência do teorema anterior, temos:

Corolário

Se $g'(x) = f'(x)$ *para todo* $x \in (a, b)$*, então existe uma constante* c *tal que* $g(x) = f(x) + c$ *para todo* $x \in (a, b)$*.*

Teorema do valor médio

Como consequência do teorema anterior, temos:

Corolário

Se $g'(x) = f'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então existe uma constante c tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração.

Considere a função $h(x) = g(x) - f(x)$.
Temos

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0 \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Pelo teorema, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = c$ para todo $x \in (a, b)$, o que demonstra o resultado. $\square$

Teorema do valor médio

- **Exemplo.** Demonstre a identidade

$$\operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \text{ para todo } x \in [-1, 1].$$

Teorema do valor médio

- **Exemplo.** Demonstre a identidade

$$\text{arcsen}(x) + \text{arccos}(x) = \frac{\pi}{2} \text{ para todo } x \in [-1, 1].$$

Demonstração.

Defina $f(x) = \text{arcsen}(x) + \text{arccos}(x)$.
Temos

$$f'(x) = \text{arcsen}'(x) + \text{arccos}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Portanto, $f(x)$ é constante.
Por outro lado, $f(0) = \text{arcsen}(0) + \text{arccos}(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$ $\square$