Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 23: Teorema fundamental do cálculo

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Teorema fundamental do cálculo

O seguinte resultado é conhecido como **teorema fundamental do cálculo**. Ele faz a conexão entre as noções de derivada e integral e, com isso, nos dá ferramentas para calcular integrais.

Teorema

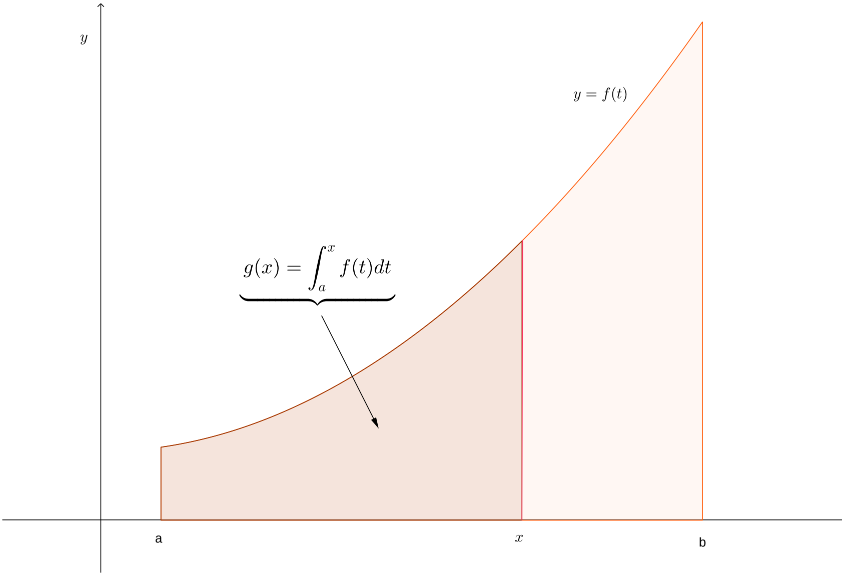
Se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e, para todo $x \in (a, b)$,

$$g'(x) = f(x).$$

Teorema fundamental do cálculo



Demonstração do teorema fundamental do cálculo

Demonstração. Dado $x \in (a, b)$, queremos mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Demonstração do teorema fundamental do cálculo

Demonstração. Dado $x \in (a, b)$, queremos mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

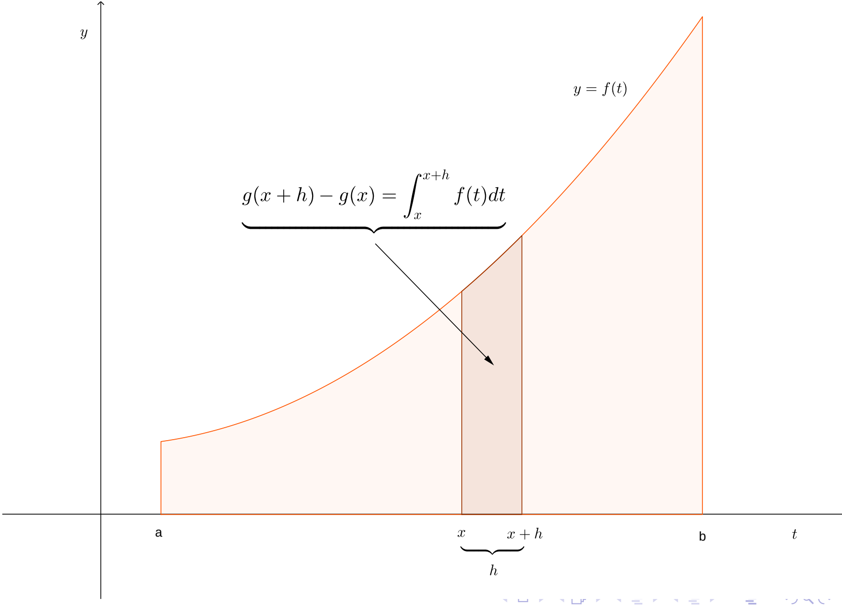
Considere h pequeno de forma que $x, x+h \in (a, b)$. Temos

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

de forma que

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Demonstração do teorema fundamental do cálculo



Demonstração do teorema fundamental do cálculo

Continuação da demonstração.

Vamos supor $h > 0$ (o caso $h < 0$ é similar). Sejam m e M, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f no interalo $[x, x+h]$. Eles existem, pois f é contínua. Tome $t_m, t_M \in [x, x+h]$ tais que $f(t_m) = m$ e $f(t_M) = M$. Temos $m \leq g(t) \leq M$ para todo $t \in [x, x+h]$.

Demonstração do teorema fundamental do cálculo

Continuação da demonstração.

Vamos supor $h > 0$ (o caso $h < 0$ é similar). Sejam m e M, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f no interalo $[x, x+h]$. Eles existem, pois f é contínua. Tome $t_m, t_M \in [x, x+h]$ tais que $f(t_m) = m$ e $f(t_M) = M$. Temos $m \leq g(t) \leq M$ para todo $t \in [x, x+h]$.

Logo,

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh \Rightarrow m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq M.$$

Ou seja:

$$f(t_m) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(t_M).$$

Demonstração do teorema fundamental do cálculo

Continuação da demonstração.

Vamos supor $h > 0$ (o caso $h < 0$ é similar). Sejam m e M, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f no interalo $[x, x+h]$. Eles existem, pois f é contínua. Tome $t_m, t_M \in [x, x+h]$ tais que $f(t_m) = m$ e $f(t_M) = M$. Temos $m \leq g(t) \leq M$ para todo $t \in [x, x+h]$.

Logo,

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh \Rightarrow m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq M.$$

Ou seja:

$$f(t_m) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(t_M).$$

Mas, quando $h \to 0$, temos que $t_m, t_M \to x$ e $f(t_m), f(t_M) \to f(x)$, pois f é contínua. Aplicando o teorema do sanduíche, concluímos que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \to f(x) \quad \text{se} \quad h \to 0.$$

Demonstração do teorema fundamental do cálculo

Continuação da demonstração.

Em $x = a$ e $x = b$, o argumento anterior mostra que exitem derivadas laterais nesses pontos (à direita, em $x = a$, à esquerda, em $x = b$). Portanto, $g(x)$ é contínua nesses pontos.

Teorema Fundamental do Cálculo - Exemplos

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

Teorema Fundamental do Cálculo - Exemplos

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$.
- **Solução:** Como $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$g'(x) = f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Teorema Fundamental do Cálculo - Exemplos

- **Exemplo.** Calcule
$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^4} \sec t \, dt.$$

Teorema Fundamental do Cálculo - Exemplos

- **Exemplo.** Calcule
$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^4} \sec t \, dt.$$
- **Solução:** Observe que o limite superior de integração, neste caso, não é x, mas a função x^4. Inicalmente, fazemos a substituição $u = x^4$. Assim,
$$g(u) = \int_0^{u} \sec t \, dt.$$
Finalmente, aplicando a Regra da Cadeia, obtemos
$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx} = \sec(u)(4x^3) = 4x^3 \sec(x^4).$$

Teorema fundamental do cálculo, $2^{\underline{a}}$ versão

O **teorema fundamental do cálculo** também pode ser enunciado na seguinte versão:

Teorema

Se $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja, uma função tal que $F'(x) = f(x)$.

Demonstração do teorema fundamental do cálculo, 2ª versão

Demonstração. Da primeira versão do teorema fundamental do cáculo, temos que $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Ou seja: $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Demonstração do teorema fundamental do cálculo, 2ª versão

Demonstração. Da primeira versão do teorema fundamental do cáculo, temos que $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Ou seja: $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Temos, para a primitiva $g(x)$,

$$g(b) - \underbrace{g(a)}_{=0} = g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Demonstração do teorema fundamental do cálculo, 2ª versão

Demonstração. Da primeira versão do teorema fundamental do cáculo, temos que $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Ou seja: $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Temos, para a primitiva $g(x)$,

$$g(b) - \underbrace{g(a)}_{=0} = g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Se $F(x)$ é outra primitiva de $f(x)$, temos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração do teorema fundamental do cálculo, 2ª versão

Demonstração. Da primeira versão do teorema fundamental do cáculo, temos que $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Ou seja: $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Temos, para a primitiva $g(x)$,

$$g(b) - \underbrace{g(a)}_{=0} = g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Se $F(x)$ é outra primitiva de $f(x)$, temos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (g(b) + c) - (g(a) + c) = g(b) - g(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema fundamental do cálculo

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int_1^3 e^x\,dx$.

Teorema fundamental do cálculo

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int_1^3 e^x dx$.
- **Solução:** Observe que $f(x) = e^x$ é contínua em $[1, 3]$. Além disso, $F(x) = e^x$ é uma primitiva de f. Logo, pela segunda versão do TFC, temos:

$$\int_1^3 e^x \, dx = F(3) - F(1) = e^3 - e.$$

Teorema fundamental do cálculo

- **Exemplo.** Calcule a área abaixo da parábola $y = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

Teorema fundamental do cálculo

- **Exemplo.** Calcule a área abaixo da parábola $y = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.
- **Solução:** A área procurada é

$$A = \int_0^1 x^2\,dx.$$

Temos que $f(x) = x^2$ é contínua em $[0, 1]$ e $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de f. Logo, pela segunda versão do TFC,

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1^2}{3} - \frac{0^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Teorema fundamental do cálculo

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$.

Teorema fundamental do cálculo

- **Exemplo.** Calcule $\int_3^6 \frac{1}{x} dx$.
- **Solução:** A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $[3, 6]$. Como sabemos, $F(x) = \ln x$ $(x > 0)$ é uma primitiva desta função. Então, pela segunda versão do TFC,

$$\int_3^6 \frac{1}{x} dx = F(6) - F(3) = \ln 6 - \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2.$$

Teorema fundamental do cálculo

- **Observação.** O seguinte cálculo está errado:

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}.$$

Observe que $f(x) = 1/x^2$ é uma função positiva e, portanto, a integral deveria ser positiva. Onde está o erro?

Teorema fundamental do cálculo

- **Observação.** O seguinte cálculo está errado:

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}.$$

Observe que $f(x) = 1/x^2$ é uma função positiva e, portanto, a integral deveria ser positiva. Onde está o erro?

Resposta: $f(x)$ não é contínua no intervalo $[-1, 3]$.