Cálculo Diferencial e Integral I

Continuidade

Universidade Federal de Minas Gerais

Continuidade

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

Definição

Dizemos que f é contínua em $a \in I$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Continuidade

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

Definição

Dizemos que f é contínua em $a \in I$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- Isso quer dizer que:
  1. $f(a)$ está definida;
  2. o limite existe em a;
  3. o limite coincide com $f(a)$.

Continuidade

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

Continuidade

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

  Solução: Temos
  $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$
  Como o limite não existe em $x = 0$, $f(x)$ não é contínua nesse ponto.

Continuidade

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

  Solução: Temos

  $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

  Como o limite não existe em $x = 0$, $f(x)$ não é contínua nesse ponto.

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \text{ se } x \neq 2 \\ 1 \text{ se } x = 2 \end{cases}$ é contínua em $x = 2$?

Continuidade

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

  Solução: Temos
  $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$
  Como o limite não existe em $x = 0$, $f(x)$ não é contínua nesse ponto.

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} \text{ se } x \neq 2 \\ 1 \text{ se } x = 2 \end{cases}$ é contínua em $x = 2$?

  Solução: Temos
  $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 2.$$
  Como $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, f não é contínua em $x = 2$.

Continuidade

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que f é contínua à esquerda em $a \in I$ se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Dizemos que f é contínua à direita em $a \in I$ se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Continuidade

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

Continuidade

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

  Solução: Temos

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(1).$$

  Portanto, f é contínua à direita, mas não à esquerda, em $x = 0$. Essa função não é contínua em $x = 0$.

Continuidade

- **Exemplo.** $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

  Solução: Temos

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(1).$$

  Portanto, f é contínua à direita, mas não à esquerda, em $x = 0$. Essa função não é contínua em $x = 0$.

Proposição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$. Se a é um ponto interior do intervalo I, então f é contínua se e somente se for simultaneamente contínua à esquerda e à direita.

Continuidade

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que f é contínua se for contínua em todos os pontos do intervalo I

Continuidade

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que f é contínua se for contínua em todos os pontos do intervalo I

- **Obs.** Na definição acima, se a é uma extremidade de I, consideramos a continuidade lateral.

Propriedades da continuidade

- Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$, então as seguintes funções são contínuas em a:

Propriedades da continuidade

- Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$, então as seguintes funções são contínuas em a:
    1. $f + g$;

Propriedades da continuidade

- Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$, então as seguintes funções são contínuas em a:
  1. $f + g$;
  2. cf;

Propriedades da continuidade

- Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$, então as seguintes funções são contínuas em a:
  1. $f + g$;
  2. cf;
  3. fg;

Propriedades da continuidade

- Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$, então as seguintes funções são contínuas em a:
  1. $f + g$;
  2. cf;
  3. fg;
  4. $\frac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$.

Propriedades da continuidade

- Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$, então as seguintes funções são contínuas em a:
  1. $f + g$;
  2. cf;
  3. fg;
  4. $\frac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$.
- Todas essas propriedades são consequência direta das propriedades correspondentes para limites.

Continuidade

- O seguinte resultado é consequência da aplicação das propriedades anteriores:

Proposição

(a) Toda função polinomial é contínua;
(a) Toda função racional é contínua nos pontos onde está definida (ou seja, onde o denominador não se anula).

Continuidade

- O seguinte resultado é consequência da aplicação das propriedades anteriores:

Proposição

(a) Toda função polinomial é contínua;
(a) Toda função racional é contínua nos pontos onde está definida (ou seja, onde o denominador não se anula).

- **Exemplo.** Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

Continuidade

- O seguinte resultado é consequência da aplicação das propriedades anteriores:

Proposição

(a) Toda função polinomial é contínua;
(a) Toda função racional é contínua nos pontos onde está definida (ou seja, onde o denominador não se anula).

- **Exemplo.** Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

  Solução: Essa função é racional e o denominador não se anula em $x = 2$. Portanto, é contínua nesse ponto. Seu limite em $x = 2$ é igual ao seu valor nesse ponto. Temos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1}{5 - 3 \cdot 2} = \frac{15}{-1} = -15.$$

Continuidade - funções trigonométricas

- Segue da definição das funções seno e cosseno que

$$\lim_{\theta\to 0} \mathrm{sen}\theta = 0 = \mathrm{sen}0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0.$$

Portanto, as funções $\mathrm{sen}x$ e $\cos x$ são contínuas em $x = 0$.

Continuidade - funções trigonométricas

- Segue da definição das funções seno e cosseno que

$$\lim_{\theta \to 0} \mathrm{sen}\theta = 0 = \mathrm{sen}0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0.$$

  Portanto, as funções $\mathrm{sen}x$ e $\cos x$ são contínuas em $x = 0$.

- Usando as fórmulas do seno e do cosseno da soma de dois ângulos, podemos mostrar que $\mathrm{sen}x$ e $\cos x$ são contínuas $\forall\ x \in \mathbb{R}$:

Continuidade - funções trigonométricas

- Segue da definição das funções seno e cosseno que

$$\lim_{\theta\to 0} \mathrm{sen}\theta = 0 = \mathrm{sen}0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0.$$

  Portanto, as funções $\mathrm{sen}x$ e $\cos x$ são contínuas em $x = 0$.
- Usando as fórmulas do seno e do cosseno da soma de dois ângulos, podemos mostrar que $\mathrm{sen}x$ e $\cos x$ são contínuas $\forall\ x \in \mathbb{R}$:
- Usando

$$\mathrm{sen}(\alpha+\theta) = \mathrm{sen}\alpha\cos\theta + \mathrm{sen}\theta\cos\alpha$$

  temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha} \mathrm{sen}x &= \lim_{\theta\to 0} \mathrm{sen}(\alpha+\theta) \quad \text{(fazendo } x = \alpha+\theta\text{)} \\
&= \lim_{\theta\to 0} (\mathrm{sen}\alpha\underbrace{\cos\theta}_{\to 1} + \underbrace{\mathrm{sen}\theta}_{\to 0}\cos\alpha) = \mathrm{sen}\alpha
\end{aligned}$$

  Portanto, $\mathrm{sen}x$ é contínua em $x = \alpha$.

Continuidade - funções trigonométricas

- Analogamente, usando

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \text{sen}\alpha\text{sen}\theta$$

temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha}\cos x &= \lim_{\theta\to 0}\cos(\alpha+\theta) \quad (\text{fazendo } x=\alpha+\theta) \\
&= \lim_{\theta\to 0}(\cos\alpha\underbrace{\cos\theta}_{\to 1} - \text{sen}\alpha\underbrace{\text{sen}\theta}_{\to 0}) = \cos\alpha
\end{aligned}$$

Portanto, $\cos x$ é contínua em $x=\alpha$.

Continuidade - funções trigonométricas

- Analogamente, usando

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\theta$$

temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha}\cos x &= \lim_{\theta\to 0}\cos(\alpha+\theta) \quad (\text{fazendo } x=\alpha+\theta) \\
&= \lim_{\theta\to 0}(\cos\alpha\underbrace{\cos\theta}_{\to 1} - \mathrm{sen}\alpha\underbrace{\mathrm{sen}\theta}_{\to 0}) = \cos\alpha
\end{aligned}$$

Portanto, $\cos x$ é contínua em $x=\alpha$.

- A função tangente,

$$\mathrm{tg}x = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$$

é contínua onde está definida (ou seja, em $\{x \neq \pi/2 + k\pi;\, k\in\mathbb{Z}\}$).

Continuidade da função inversa

Teorema

Se $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ *é uma função contínua bijetiva (*I *e* J *intervalos), então sua inversa* $f^{-1} : J \to I$ *também é contínua.*

Continuidade da função inversa

Teorema

Se $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ é uma função contínua bijetiva (I e J intervalos), então sua inversa $f^{-1} : J \to I$ também é contínua.

- Segue do teorema que, se $n \in \mathbb{N}$, então a função raiz n-ésima $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (definida em $\mathbb{R}$, se n é ímpar, e em $[0, \infty)$, se n é par) também é contínua, pois é a inversa da função contínua $f(x) = x^n$.

Continuidade da função inversa

Teorema

Se $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ é uma função contínua bijetiva (I e J intervalos), então sua inversa $f^{-1} : J \to I$ também é contínua.

- Segue do teorema que, se $n \in \mathbb{N}$, então a função raiz n-ésima $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (definida em $\mathbb{R}$, se n é ímpar, e em $[0, \infty)$, se n é par) também é contínua, pois é a inversa da função contínua $f(x) = x^n$.
- Também segue do teorema ques as funções trigonométricas inversas $\mathrm{arcsen} x$, $\mathrm{arccos} x$ $\mathrm{arcstg} x$ são contínuas.

Continuidade da função inversa

Teorema

Se $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ é uma função contínua bijetiva (I e J intervalos), então sua inversa $f^{-1} : J \to I$ também é contínua.

- Segue do teorema que, se $n \in \mathbb{N}$, então a função raiz n-ésima $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (definida em $\mathbb{R}$, se n é ímpar, e em $[0, \infty)$, se n é par) também é contínua, pois é a inversa da função contínua $f(x) = x^n$.
- Também segue do teorema ques as funções trigonométricas inversas $\mathrm{arcsen} x$, $\mathrm{arccos} x$ $\mathrm{arcstg} x$ são contínuas.
- Admitindo que a função exponencial a^x ($a > 0$ e $a \neq 1$) é contínua, então a função logaritmo na base a, $\log_a x$, também é contínua.

Continuidade

Teorema

Os seguintes tipos de funções são contínuas em todos os pontos de seus domínios:

- *polinômios;*
- *funções racionais;*
- *função raiz n-ésima;*
- *funções trigonométricas;*
- *funções trigonométricas inversas;*
- *funções exponenciais;*
- *funções logarítmicas.*

Continuidade

- **Exemplo.** Onde a função

$$f(x) = \frac{\ln x + \mathrm{arctg} x}{x^2 - 1}$$

é contínua?

Continuidade

- **Exemplo.** Onde a função

$$f(x) = \frac{\ln x + \operatorname{arctg} x}{x^2 - 1}$$

é contínua?

Solução: Como a expressão dessa função envolve operações com funções contínuas, esta função é contínua onde ela está definida. Para sua definição, temos as seguintes condições:

  - $x > 0$, para que $\ln x$ esteja definido;
  - $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$, para que o denominador não se anule.

Portanto, ela é contínua em $D = \{x > 0; x \neq 1\}$.

Continuidade

- **Exemplo.** Onde a função

$$f(x) = \frac{\ln x + \mathrm{arctg} x}{x^2 - 1}$$

é contínua?

Solução: Como a expressão dessa função envolve operações com funções contínuas, esta função é contínua onde ela está definida. Para sua definição, temos as seguintes condições:

  - $x > 0$, para que $\ln x$ esteja definido;
  - $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$, para que o denominador não se anule.

Portanto, ela é contínua em $D = \{x > 0; x \neq 1\}$.

- **Exemplo.** Calcule $\lim_{x \to \pi} \frac{\mathrm{sen} x}{3 + \cos x}$.

Continuidade

- **Exemplo.** Onde a função

$$f(x) = \frac{\ln x + \mathrm{arctg} x}{x^2 - 1}$$

é contínua?

Solução: Como a expressão dessa função envolve operações com funções contínuas, esta função é contínua onde ela está definida. Para sua definição, temos as seguintes condições:

  - $x > 0$, para que $\ln x$ esteja definido;
  - $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$, para que o denominador não se anule.

Portanto, ela é contínua em $D = \{x > 0; x \neq 1\}$.

- **Exemplo.** Calcule $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\mathrm{sen} x}{3 + \cos x}$.

Solução: Essa função é contínua em $x = \pi$ (é obtida por operações com as funções contínuas sen e cos, sendo que o denominador não se anula em $x = \pi$). Portanto,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\mathrm{sen} x}{3 + \cos x} = \frac{\mathrm{sen} \pi}{3 + \cos \pi} = \frac{0}{3 - 1} = 0.$$

Continuidade

Teorema

Sejam f e g funções tais que a composta $f \circ g$ está definida. Suponha que f é contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$. Então

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(b).$$

Continuidade

Teorema

Sejam f e g funções tais que a composta $f \circ g$ está definida. Suponha que f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b).$$

- **Exemplo.** Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Continuidade

Teorema

Sejam f e g funções tais que a composta $f \circ g$ está definida. Suponha que f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b).$$

- **Exemplo.** Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

  Solução: Vamos usar o fato que a função $\operatorname{arcsen} x$ é contínua. Temos

  $$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

  Portanto

  $$\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Continuidade da função composta

- A composta de funções contínuas é contínua:

Teorema

Sejam f e g funções tais que a composta $f \circ g$ está definida. Suponha g contínua em a e f é contínua em $g(a)$. Então $f \circ g(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Continuidade da função composta

- A composta de funções contínuas é contínua:

Teorema

Sejam f e g funções tais que a composta $f \circ g$ está definida. Suponha g contínua em a e f é contínua em $g(a)$. Então $f \circ g(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

- **Exemplo.** Onde as seguintes funções são contínuas?

$$\text{(a) } h(x) = \operatorname{sen}(x^2) \qquad \text{(b) } \ell(x) = \ln(1 + \cos x)$$

Continuidade da função composta

- A composta de funções contínuas é contínua:

Teorema

Sejam f e g funções tais que a composta $f \circ g$ está definida. Suponha g contínua em a e f é contínua em $g(a)$. Então $f \circ g(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

- **Exemplo.** Onde as seguintes funções são contínuas?

$$\text{(a) } h(x) = \mathrm{sen}(x^2) \qquad \text{(b) } \ell(x) = \ln(1 + \cos x)$$

Solução: Por se tratarem de compostas de funções contínuas, essas funções são contínuas em seus domínios.
(a) $h(x) = \mathrm{sen}(x^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$.
(b) $\ell(x) = \ln(1 + \cos x)$ é contínua desde que $1 + \cos x > 0$, ou seja, desde que $\cos x > -1$. O conjunto desses pontos é
$\{x \in \mathbb{R}; x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema do valor intermediário

- O seguinte resultado é conhecido como Teorema do valor intermediário:

Teorema

Suponha que f seja contínua no intervalo $[a, b]$ e que $f(a) \neq f(b)$. Suponha que d seja um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Teorema do valor intermediário

- O seguinte resultado é conhecido como Teorema do valor intermediário:

Teorema

Suponha que f seja contínua no intervalo $[a, b]$ e que $f(a) \neq f(b)$. Suponha que d seja um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

- **Exemplo.** Mostre que a seguinte equação possui raiz entre $x = 1$ e $x = 2$:

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Teorema do valor intermediário

- O seguinte resultado é conhecido como Teorema do valor intermediário:

Teorema

Suponha que f seja contínua no intervalo $[a, b]$ e que $f(a) \neq f(b)$. Suponha que d seja um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

- **Exemplo.** Mostre que a seguinte equação possui raiz entre $x = 1$ e $x = 2$:

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Solução: Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Temos

$f(1) = 4-6+3-2 = -1 < 0$ e $f(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 12 > 0$.

Pelo Teorema do valor intermediário, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.