Cálculo Diferencial e Integral I

Limites no infinito

Universidade Federal de Minas Gerais

Limite no infinito

- Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende a infinito, e denotamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

se $f(x)$ assume valores arbitrariamente próximos a L quanto x assume valores grandes.

Também denotamos $f(x) \to L$ se $x \to \infty$.

Limite no infinito

- Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ *é o limite de* f *quando* x *tende a infinito, e denotamos*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

se $f(x)$ *assume valores arbitrariamente próximos a* L *quanto* x *assume valores grandes.*

Também denotamos $f(x) \to L$ se $x \to \infty$.

- **Exemplo.** $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Limite no infinito

- Seja $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $L\in\mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende a infinito, e denotamos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

se $f(x)$ assume valores arbitrariamente próximos a L quanto x assume valores grandes.

Também denotamos $f(x)\to L$ se $x\to\infty$.

- **Exemplo.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}$

  Solução. Temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Limite no infinito

- Analogamente, temos a definição de limite em $-\infty$. Seja $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ *é o limite de* f *quando* x *tende a menos infinito, e denotamos*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

se $f(x)$ *assume valores arbitrariamente próximos a* L *quanto* x *assume valores negativos e grandes em módulo.*

Também denotamos $f(x) \to L$ se $x \to -\infty$.

Definição formal de limite no infinito

- Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende a infinito, e denotamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

se, para todo número real $\epsilon > 0$ existir um outro número real $M > 0$ (grande) tais que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad x > M.$$

Definição formal de limite no infinito

- Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende a infinito, e denotamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

se, para todo número real $\epsilon > 0$ existir um outro número real $M > 0$ (grande) tais que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad x > M.$$

- Temos uma definição análoga para limite quando $x \to -\infty$.

Assíntota horizontal

Definição

Seja $f(x)$ *uma função. Se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *(ou ambos) dizemos que a reta* $y = L$ *é uma* **assíntota horizontal** *do gráfico de* f*.*

Assíntota horizontal

Definição

Seja $f(x)$ uma função. Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ (ou ambos) dizemos que a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** *do gráfico de f.*

- **Exemplo.**

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

As retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Limites infinitos

- Denotamos por

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

quando $f(x)$ assume valores arbitrariamente grandes quando x fica grande. Analogamente, temos as seguintes noções

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Limites infinitos

- Denotamos por
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
quando $f(x)$ assume valores arbitrariamente grandes quando x fica grande. Analogamente, temos as seguintes noções
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
- **Exemplo.** Se $n \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Limites infinitos

- O seguinte resultado segue da definição:

Proposição

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, *então*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Um resultado análogo é válido com as hipóteses $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Limites infinitos

- O seguinte resultado segue da definição:

Proposição

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, *então*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Um resultado análogo é válido com as hipóteses $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

- **Exemplo.** Se $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

  Solução. Usando que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, para todo $n \geq 1$ temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^2(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}.$$

Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

  Solução. Usando que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, para todo $n \geq 1$ temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^2(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}.$$

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$

Limites infinitos

- **Exemplo.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

  Solução. Usando que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, para todo $n \geq 1$ temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^2(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}.$$

- **Exemplo.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

  Solução. Temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x})}{x(\frac{3}{x} - 1)} = \lim_{x\to\infty} x \underbrace{\left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x} - 1}\right)}_{\text{isto tende a -1}} = -\infty.$$

Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x\right)$

Limites infinitos

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x\right)$

  Solução. Visto que $x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ e $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$,
  temos
  $$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Limites infinitos

- De um modo geral: se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau n, então

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.$$

Assim, se $a_n > 0$,

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Limites infinitos

- Para uma função racional, temos os seguinte: se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ são polinômios de graus n e m, então

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \left(\lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} \right).$$

  Esse limite vale:
  - a_n/b_m, se $n = m$;
  - $\pm\infty$, se $n > m$;
  - 0, se $n < m$.

Limites infinitos

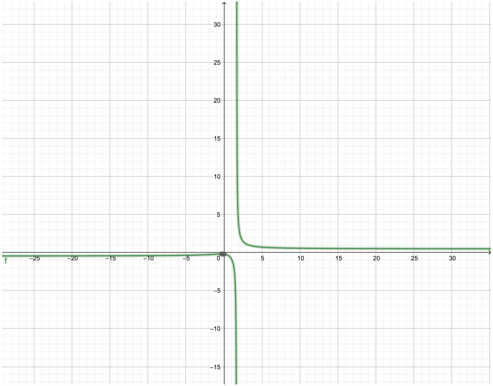
- **Exemplo.** Encontre as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}.$$

Limites infinitos

- **Exemplo.** Encontre as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}.$$
Solução. Note que o domínio de f é $\mathbb{R} - \{5/3\}$. Como
$$\lim_{x \to \frac{5}{3}^{\pm}} f(x) = \pm\infty,$$
temos que $x = \frac{5}{3}$ é uma assíntota vertical.
Por outro lado, para encontrarmos as assíntotas horizontais, calculamos $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. De fato,
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)} = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}.$$
Logo $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ são as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x)$.

Limites infinitos

Solução (continuação). Gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$:



- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

  Solução.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.\end{aligned}$$

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

  Solução.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.
\end{aligned}$$

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

  Solução.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.
\end{aligned}
$$

- **Exemplo.** $\lim_{x\to0^-} e^{1/x}$

  Solução. Seja $t=-1/x$. Note que se $x\to0^-$, então $t\to+\infty$ assim

$$\lim_{x\to0^-} e^{1/x}=\lim_{t\to+\infty} e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0,$$

uma vez que $\lim_{t\to+\infty} e^t=+\infty$.

- **Exemplo.** $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

- **Exemplo.** $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

  Solução. Este limite não existe. De fato, suponhamos que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x = L$.
  Então $L \in [-1, 1]$, pois $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ para todo x. Escolha $M \in [-1, 1]$, com $M \neq L$. Então existe $a \in [0, 2\pi)$ tal que $\operatorname{sen} a = M$. Considere os pontos da forma $x_n = a + 2\pi n$, para $n \in \mathbb{N}$.
  Esses pontos assumem valores arbitrariamente grandes quando n é grande e, sobre eles, a função seno vale

  $$\operatorname{sen}(x_n) = \operatorname{sen}(a + 2\pi n) = \operatorname{sen} a = M \neq L.$$

  Isso significa que a função $\operatorname{sen} x$ se aproxima de valores distintos quando $x \to \infty$. Isso é um absurdo. Portanto, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ não existe.