Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 30: Integrais trigonométricas

Professor: Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

30 de outubro de 2019

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \cos^3 x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \cos^3 x \, dx$
- **Cálculo:** Escreva

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x.$$

Temos:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \cos^3 x\, dx$
- **Cálculo:** Escreva

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x.$$

Temos:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx.$$

Fazendo $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\, dx &= \int (1 - u^2) du = u - \frac{1}{3}u^3 + c \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + c. \end{aligned}$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$
- **Cálculo:** Escreva

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x.$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$
- **Cálculo:** Escreva

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x.$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Fazendo $u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx &= \int \underbrace{(1-u^2)^2}_{1-2u^2+u^4} u^2 (-du) \\
&= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\
&= -\frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + c \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + c.
\end{aligned}$$

Integrais trigonométricas

- Temos a seguinte relação:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Integrais trigonométricas

- Temos a seguinte relação:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Fazendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, temos

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Portanto:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$$

Integrais trigonométricas

- Temos a seguinte relação:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Fazendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, temos

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Portanto:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$$

Fazendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos

$$\cos 2x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x.$$

Portanto:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$
- **Cálculo:** Usando a expressão anterior, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$
- **Cálculo:** Usando a expressão anterior, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(x - \int \cos 2x dx) \\
&= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x dx) + c \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x dx + c.
\end{aligned}$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$
- **Cálculo:** Fazemos

$$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^2.$$

Substituindo

$$(1 - \cos 2x)^2 = 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x,$$

temos

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$
- **Cálculo:** Fazemos

$$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^2.$$

Substituindo

$$(1 - \cos 2x)^2 = 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x,$$

temos

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx.$$

Para calcular $\int \cos^2 2x dx$, fazemos

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

e obtemos

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$
- **Cálculo:** Nesse caso, usamos a relação

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

e fazemos a substituição:

$$u = \tan x \quad \Rightarrow \quad du = \sec^2 x dx.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$
- **Cálculo:** Nesse caso, usamos a relação

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

e fazemos a substituição:

$$u = \tan x \quad \Rightarrow \quad du = \sec^2 x dx.$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^6 x \underbrace{\sec^2 x}_{1+\tan^2 x} \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{du} \\
&= \int u^6 (1 + u^2) du \\
&= \int (u^6 + u^8) du = \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + c
\end{aligned}$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^5 x \sec^7 x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^5 x \sec^7 x \, dx$
- **Cálculo:** Nesse caso, usamos a relação

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

e fazemos a substituição:

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x \, dx.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^5 x \sec^7 x \, dx$
- **Cálculo:** Nesse caso, usamos a relação

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

e fazemos a substituição:

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x \, dx.$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^7 x \, dx &= \int \underbrace{\tan^4 x}_{(\sec^2 x - 1)^2} \sec^6 x \underbrace{\sec x \tan x \, dx}_{du} \\
&= \int \underbrace{(u^2 - 1)^2}_{u^4 - 2u^2 + 1} u^6 du \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) du \\
&= \frac{1}{11} u^{11} - 2\frac{1}{9} u^9 + \frac{1}{7} u^7 + c
\end{aligned}$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^3 x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \tan^3 x \, dx$
- **Cálculo:** Vamos usar a seguinte integral:

$$\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + c.$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \tan^3 x \, dx$
- **Cálculo:** Vamos usar a seguinte integral:

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c.$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \, dx &= \int \tan x \underbrace{\tan^2 x}_{\sec^2 x - 1} \, dx \\
&= \underbrace{\int \underbrace{\tan x}_{u} \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{du}}_{=\frac{1}{2}u^2} - \int \tan x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + c.
\end{aligned}$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \sec x \, dx$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \sec x \, dx$
- **Cálculo:** Temos

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx\end{aligned}$$

Integrais trigonométricas

- **Exemplo.** $\int \sec x \, dx$
- **Cálculo:** Temos

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx\end{aligned}$$

Fazemos

$$u = \sec x + \tan x \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx.$$

Temos

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + c\end{aligned}$$