Cálculo Diferencial e Integral I

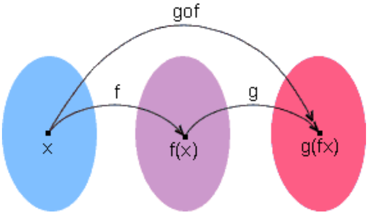
Aula 11: Regra da Cadeia

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

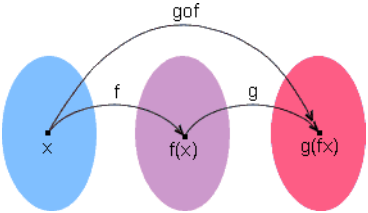
$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Regra da cadeia



- Considere duas funções reais f e g tais que a função composta $g \circ f$ está definida (ou seja, o conjunto imagem de f está contido no domínio de g). Seja x um ponto no domínio de f e considere $u = f(x)$ no domínio de g. Temos $g(u) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Regra da cadeia



- Considere duas funções reais f e g tais que a função composta $g \circ f$ está definida (ou seja, o conjunto imagem de f está contido no domínio de g). Seja x um ponto no domínio de f e considere $u = f(x)$ no domínio de g. Temos $g(u) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.
- A **regra da cadeia** diz que se f é derivável em x e g é derivável em $u = f(x)$, então a função composta $g \circ f$ é derivável em x.

Regra da Cadeia

- Um outro ponto da regra da cadeia diz respeito ao cálculo da derivada da função composta:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x).$$

Regra da Cadeia

- Um outro ponto da regra da cadeia diz respeito ao cálculo da derivada da função composta:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x).$$

- Lembrando que $u = f(x)$, temos a seguinte expressão para o cálculo da derivada da função composta:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{dg}{du}(f(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x)}.$$

Ou seja, devivamos g em relação à sua variável u (essa derivada é calculada em $f(x)$) e multiplicamos pela derivada de $u = f(x)$ em relação à variável x (calculada no ponto x).

Regra da Cadeia

- Essencialmente, a fórmula anterior nos diz que a derivada da função composta $g \circ f$ é o produto das derivadas das duas funções g e f, cada uma delas calculada no ponto apropriado:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{dg}{du}(f(x)) \cdot \frac{df}{dx}}$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}.$$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Se $F(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, calcule $F'(x)$.

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Se $F(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, calcule $F'(x)$.
- **Solução:** Fazemos $u = x^2 + 1$. Então $\frac{du}{dx} = 2x$ e

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}u^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{du}u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}u = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Se $F(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, calcule $F'(x)$.
- **Solução:** Fazemos $u = x^2 + 1$. Então $\frac{du}{dx} = 2x$ e

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}u^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{du}u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}u = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

- **Exemplo.** Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ e (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Se $F(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, calcule $F'(x)$.
- **Solução:** Fazemos $u = x^2 + 1$. Então $\frac{du}{dx} = 2x$ e

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}u^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{du}u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}u = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

- **Exemplo.** Derive (a) $y = \mathrm{sen}(x^2)$ e (b) $y = \mathrm{sen}^2 x$
- **Solução:** (a) Fazemos $u = x^2$. Então $\frac{du}{dx} = x$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\mathrm{sen}(u) = \frac{d}{du}\mathrm{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx} = cos(u) \cdot (2x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

(b) Nesse caso $y = (\mathrm{sen} x)^2$. Fazemos $u = \mathrm{sen} x$. Assim $\frac{du}{dx} = \cos x$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}u^2 = \frac{d}{du}u^2 \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot \cos x = 2\mathrm{sen} x \cos x$$

Regra da cadeia

- Se $g(u) = u^n$ for uma função potência, de forma que $F(x) = g \circ f(x) = (f(x))^n$, temos, fazendo $u = f(x)$:

  $$\frac{d}{dx}(f(x))^n = \frac{d}{du}u^n \cdot \frac{d}{dx}u = nu^{n-1}f'(x) = n[f(x)]^{n-1}f'(x).$$

  Temos a seguinte regra:

  $$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x))^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x)}$$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$
- **Solução:** Fazendo $u = x^3 - 1$, temos $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}u^{100} \cdot \frac{du}{dx} = 100u^{99}3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}.$$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$
- **Solução:** Fazendo $u = x^3 - 1$, temos $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}u^{100} \cdot \frac{du}{dx} = 100u^{99}3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}.$$

- **Exemplo.** Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$
- **Solução:** Fazendo $u = x^3 - 1$, temos $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} u^{100} \cdot \frac{du}{dx} = 100u^{99} 3x^2 = 300x^2 (x^3 - 1)^{99}.$$

- **Exemplo.** Derive $y = (2x + 1)^5 (x^3 - x + 1)^4$.
- **Solução:** Devemos primeiro usar a regra do produto para depois usar a regra da cadeia:

$$y' = \left[(2x+1)^5\right]' (x^3 - x + 1)^4 + (2x+1)^5 \left[(x^3 - x + 1)^4\right]'.$$

Calculando as derivadas na expressão anterior:

$$y' = \left[5(2x+1)^4 2\right] (x^3 - x + 1)^4 + (2x+1)^5 \left[4(x^3 - x + 1)^3 (3x^2 - 1)\right].$$

Regra da cadeia

- Seja $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ é uma constante com $a \neq 1$. Lembramos que $a^x = e^{x \ln a}$. Fazendo $u = x \ln(a)$:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = \underbrace{e^{x \ln a}}_{\frac{d}{du} e^u} \underbrace{\ln a}_{\frac{du}{dx}} .$$

Regra da cadeia

- Seja $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ é uma constante com $a \neq 1$. Lembramos que $a^x = e^{x \ln a}$. Fazendo $u = x \ln(a)$:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = \underbrace{e^{x \ln a}}_{\frac{d}{du} e^u} \underbrace{\ln a}_{\frac{du}{dx}}.$$

- Portanto

$$\boxed{\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a}$$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \mathrm{sen}(\cos(\tan x))$.

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$.
- **Solução:** Devemos aplicar a regra da cadeia duas vezes:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}(\cos(\tan x)) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}\tan x \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $f(\theta) = e^{\sec(3\theta)}$.

Regra da cadeia

- **Exemplo.** Derive $f(\theta) = e^{\sec(3\theta)}$.
- **Solução:** Novamente, aplicamos a regra da cadeia duas vezes:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec(3\theta)} \frac{d}{d\theta}(\sec(3\theta)) \\
&= e^{\sec(3\theta)} \sec(3\theta) \tan(3\theta) \frac{d}{d\theta}(3\theta) \\
&= e^{\sec(3\theta)} \sec(3\theta) \tan(3\theta) 3
\end{aligned}$$