Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 33: Integrais impróprias

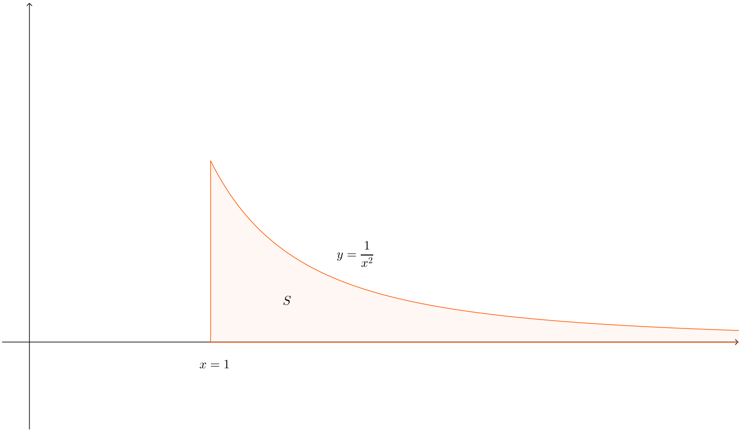
Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Integrais impróprias

- Vamos considerar o seguinte problema:
  Problema. Calcular a área da região S abaixo da curva $y = x^2$, acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$.



Integrais impróprias

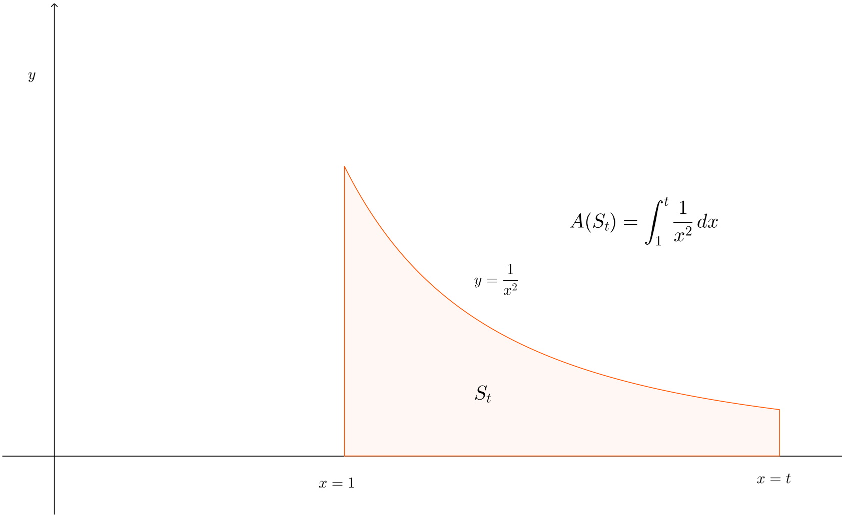
- A dificuldade é que a região S não é limitada. Mas podemos adotar a seguinte estratégia. Para um valor $t > 1$ fixado, consideramos a região S_t abaixo do gráfico, entre $x = 1$ e $x = t$, e calculamos sua área:
$$A(S_t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Integrais impróprias

- A dificuldade é que a região S não é limitada. Mas podemos adotar a seguinte estratégia. Para um valor $t > 1$ fixado, consideramos a região S_t abaixo do gráfico, entre $x = 1$ e $x = t$, e calculamos sua área:
$$A(S_t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$
- Em seguida, tomamos o limite de $A(S_t)$ quando $t \to \infty$. O resultado do limite será a área da região S:

$$A(S) = \lim_{t\to\infty} A(S_t) = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Integrais impróprias



Integrais impróprias

Temos a seguinte definição:

Definição

(a) Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para cada* $t \geq a$*, então*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista.
(b) Se $\int_t^b f(x)dx$ *existe para cada* $t \leq b$*, então*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

Integrais impróprias

Temos a seguinte definição:

Definição

(a) Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para cada* $t \geq a$*, então*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

(b) Se $\int_t^b f(x)dx$ *existe para cada* $t \leq b$*, então*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

- Na definição acima, caso os limites existam, as integrais impróprias são ditas **convergentes**. Caso os limites não existam, as integrais são ditas **divergentes**.

Integrais impróprias

Definição

No caso em que tanto $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *quanto* $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *são convergentes, então definimos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Nesse caso, a definição não depende do valor $a \in \mathbb{R}$ *escolhido.*

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

  Solução.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty.$$

Portanto, a integral imprópria é divergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$

  Solução.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left[xe^x - e^x\right]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(-1 - te^t + e^t\right) = -1,$$

pois $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, e, usando a regra de L'Hôpital,

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}} = 0.$$

Observe que $\displaystyle\int xe^x\,dx$ é calculada usando integração por partes.

Portanto, a integral imprópria é convergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

  Solução.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} [\arctan x]_t^0 + \lim_{t\to\infty} [\arctan x]_0^t$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (0-\arctan t) + \lim_{t\to\infty} (\arctan t - 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

  Portanto, a integral imprópria é convergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** Para quais valores de p a integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge?

Integrais impróprias

- **Exemplo.** Para quais valores de p a integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge?

Solução. Vamos supor inicialmente $p \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{-p+1} t^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{se} \quad p > 1 \\ \infty & \text{se} \quad p < 1 \end{cases}$$

Quando $p = 1$, já vimos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Portanto, a integral converge se, e somente se, $p > 1$.

Integrais impróprias

Temos a seguinte definição:

Definição

(a) Suponha que $f(x)$ seja contínua em $[a, b)$ e descontínua em b. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista.
(b) Suponha que $f(x)$ seja contínua em $(a, b]$ e descontínua em a. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a} \int_t^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

Integrais impróprias

Temos a seguinte definição:

Definição

(a) Suponha que $f(x)$ seja contínua em $[a,b)$ e descontínua em b. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx,$$

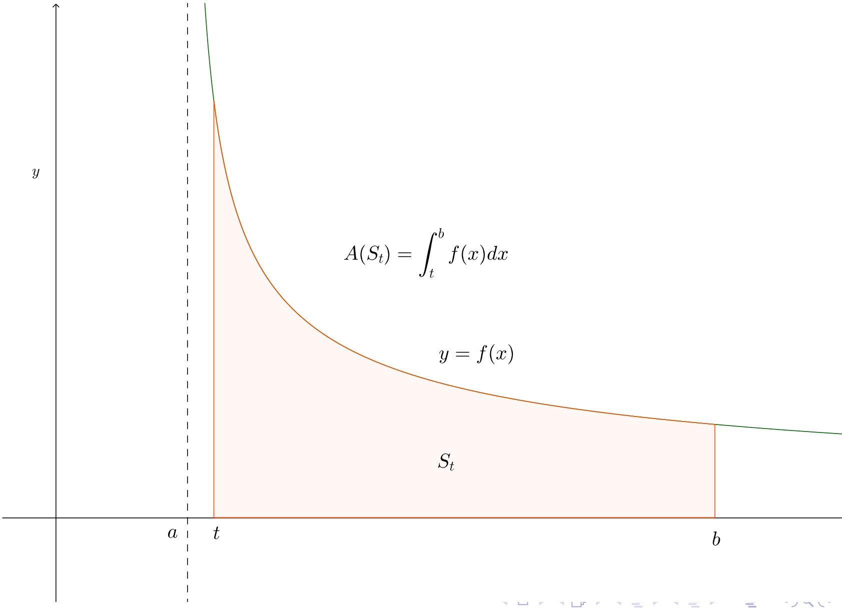
desde que o limite exista.
(b) Suponha que $f(x)$ seja contínua em $(a,b]$ e descontínua em a. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a} \int_t^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

- Novamente, caso os limites existam, as integrais impróprias são ditas **convergentes**. Caso os limites não existam, as integrais são ditas **divergentes**.

Integrais impróprias



Integrais impróprias

Definição

No caso em que $f(x)$ *é contínua em* (a,b) *e existe* $c \in (a,b)$ *para o qual tanto* $\int_c^b f(x)dx$ *quanto* $\int_a^c f(x)dx$ *são convergentes, então definimos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

A definição não depende do número $c \in (a,b)$.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

  Solução.

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2} \left[2(x-2)^{1/2}\right]_t^5$$

$$= \lim_{t\to 2} \left(2\sqrt{3} - 2(t-2)^{1/2}\right) = 2\sqrt{3}$$

  Portanto, a integral imprópria é convergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$

  Solução.

  $$\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} [\ln|\sec x + \tan x|]_0^t$$

  $$= \lim_{t \to (\pi/2)^-} (\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1) = \infty,$$

  pois

  $$\sec t \to \infty \quad \text{e} \quad \tan t \to \infty \quad \text{se} \quad x \to \infty.$$

  Portanto, a integral imprópria é divergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

  Solução. Como $1/(1-x)$ não está definida em $x = 1$, devemos decompor essa integral imprópria como

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Temos

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \left[\ln|x-1|\right]_0^t$$

$$\lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) = \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty.$$

Portanto, a integral imprópria é divergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\int_0^1 \ln x dx$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** $\int_0^1 \ln x dx$

  Solução.

  $$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} [x \ln x - x]_t^1$$

  $$= \lim_{t\to 0^+} (1 \ln 1 - 1 - t \ln t + t) = -1,$$

  pois, usando a regra de L'Hôpital,

  $$\lim_{t\to 0^+} t \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0.$$

  A integral $\int \ln x dx$ é calculada por partes.
  Portanto, a integral imprópria é convergente.

Testes de comparação para integrais impróprias

Testes de comparação: Suponha que f e g sejam funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x > a$.

(a) Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ é convergente.

(a) Se $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ é divergente.

Testes de comparação para integrais impróprias

Testes de comparação: Suponha que f e g sejam funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x > a$.

(a) Se $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente.

(a) Se $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente.

- **Observação.** O teste de comparação tem formulações análogas para integrais impróprias dos tipos $\int_{-\infty}^b$, $\int_{-\infty}^\infty$ e $\int_a^b$.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** A integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** A integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente.

  De fato, escrevemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx.$$

  Usamos a seguinte comparação:

$$e^{-x^2} < e^{-x} \quad \text{se} \quad x > 1.$$

  Portanto,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx \quad \text{converge,}$$

  uma vez que

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1}.$$

Integrais impróprias

- **Exemplo.** A integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ é divergente.

Integrais impróprias

- **Exemplo.** A integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}dx$ é divergente.

  De fato, temos a seguinte comparação:

  $$\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} \quad \text{se} \quad x \geq 1.$$

  O resultado segue, uma vez que

  $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx \quad \text{diverge.}$$