Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 22: Integral definida

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

O problema da área

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0 \;\forall\; x$. A área da região S abaixo do gráfico de f, acima do eixo x, entre $x = a$ e $x = b$, é calculada através do limite

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

A expressão

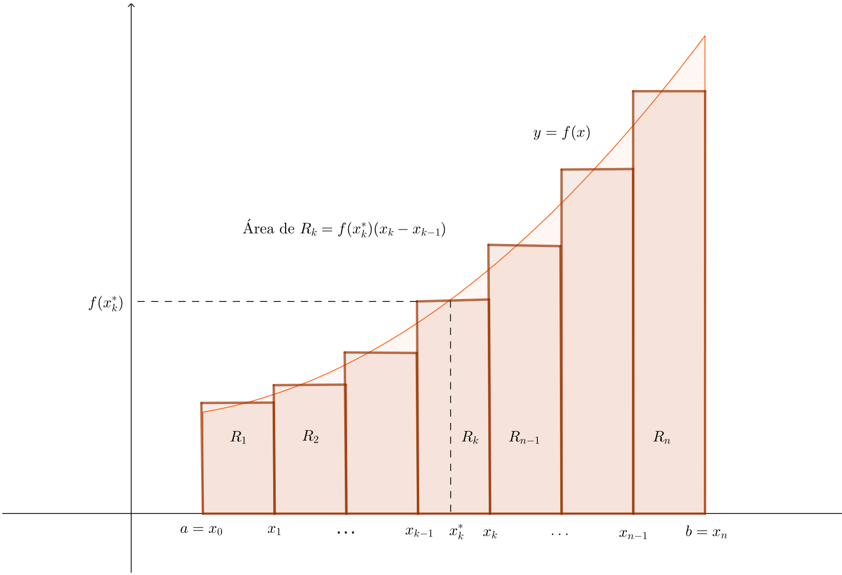
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

é a **soma de Riemann** associada à partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$, sendo x_k^* um ponto escolhido no k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \ldots, n$.

O problema da área



A integral definida

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função (não necessariamente positiva). A* integral definida de f no intervalo [a,b] *é*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x,$$

desde que esse limite exista. Nesse caso, dizemos que f *é* integrável *em* $[a, b]$*.*

A integral definida

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função (não necessariamente positiva). A* integral definida de f no intervalo [a,b] *é*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x,$$

desde que esse limite exista. Nesse caso, dizemos que f é integrável *em* $[a, b]$*.*

A expressão

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

é chamada de **soma de Riemann** de $f(x)$ associada à partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$, sendo x_k^* um ponto escolhido no k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \dots, n$.

A integral definida

Na expressão $\int_a^b f(x)dx$:

- a é o limite inferior da integral;
- b é o limite superior da integral;
- $f(x)$ é o integrando;
- x é a variável de integração.

A integral definida

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for contínua então* f *é integrável em* $[a, b]$.

O teorema continua verdadeiro se f tiver um número finito de pontos de descontinuidade, todos eles do **tipo salto**. Uma descontinuidade do tipo salto é um ponto de $[a, b]$ em que f não é contínua e onde todos limites laterais que fazem sentido existem.

A integral definida

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- Segue da definição de integral que, se f é **positiva** em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = A(S),$$

onde S é a região abaixo do gráfico de f, acima do eixo x, entre $x = a$ e $x = b$.

A integral definida

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

- Segue da definição de integral que, se f é **positiva** em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = A(S),$$

onde S é a região abaixo do gráfico de f, acima do eixo x, entre $x = a$ e $x = b$.

- No caso em que f é **negativa** em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = -A(S),$$

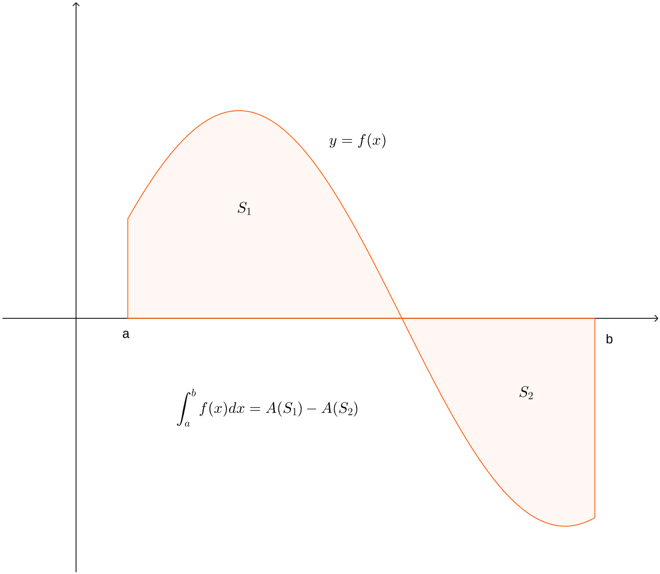
onde S é a região acima do gráfico de f, abaixo do eixo x, entre $x = a$ e $x = b$.

A integral definida

- Em geral, se f assume **tanto valores postivos como negativos**, dividimos a região entre o gráfico de de f e o eixo x, entre $x = a$ e $x = b$, em duas regiões:
  - S_1, acima do eixo x, abaixo do gráfico de f, onde $f \geq 0$.
  - S_2, abaixo do eixo x, acima do gráfico de f, onde $f \leq 0$.

  Nesse caso
$$\int_a^b f(x)dx = A(S_1) - A(S_2).$$

A integral definida



A integral definida

- **Exemplo.** Calcule as integrais, interpretando cada uma delas em termos de áreas:

$$(a)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \qquad (b)\ \int_0^3 (x-1)dx$$

A integral definida

- **Exemplo.** Calcule as integrais, interpretando cada uma delas em termos de áreas:

$$(a) \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \qquad (b) \int_0^3 (x-1)dx$$

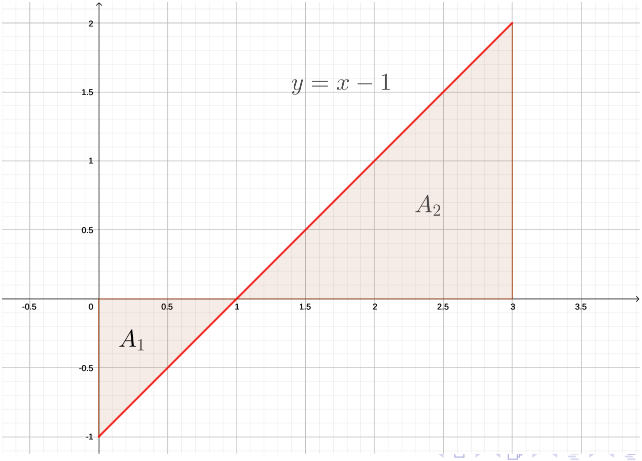
- **Solução.**
(a) A região considerada é a região do primeiro quadrante delimitada pelo círculo de equação $x^2+y^2=1$. Portanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

A integral definida

- **Solução (continuação).**
  (b) Temos

$$\int_0^3 (x-1)dx = -A_1 + A_2 = -\frac{1}{2}\times 1^2 + \frac{1}{2}\times 2^2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$



A integral definida

- Na definição da integral definida $\int_a^b f(x)dx$, assumimos que $a < b$. Quando o limite inferior é maior que o limite superior, podemos estender essa definição fazendo

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

A integral definida

- Na definição da integral definida $\int_a^b f(x)dx$, assumimos que $a < b$. Quando o limite inferior é maior que o limite superior, podemos estender essa definição fazendo

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

- Quando o limite inferior é igual ao limite superior, definimos

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

Propriedades da integral definida

A integral definida tem as seguintes propriedades:

- **1.** $\int_a^b c dx = c(b-a)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante.

Propriedades da integral definida

A integral definida tem as seguintes propriedades:

- **1.** $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante.
- **2.** $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Propriedades da integral definida

A integral definida tem as seguintes propriedades:

- **1.** $\displaystyle\int_a^b c dx = c(b-a)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante.
- **2.** $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- **3.** $\displaystyle\int_a^b [cf(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx$, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante.

Propriedades da integral definida

A propriedade 1 é evidente. As propriedades 2 e 3 seguem de fato de que propriedades análogas são válidas para as somas de Riemann.

Propriedades da integral definida

A propriedade 1 é evidente. As propriedades 2 e 3 seguem de fato de que propriedades análogas são válidas para as somas de Riemann.

- No caso 2:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^*)+g(x_k^*)]\Delta x}_{\text{soma de Riemann de } f+g} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x}_{\text{s. de R. de } f} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\Delta x}_{\text{s. de R. de } g}$$

A propriedade segue tomando $\lim_{n\to\infty}$.

Propriedades da integral definida

A propriedade 1 é evidente. As propriedades 2 e 3 seguem de fato de que propriedades análogas são válidas para as somas de Riemann.

- No caso 2:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^*)+g(x_k^*)]\Delta x}_{\text{soma de Riemann de } f+g} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x}_{\text{s. de R. de } f} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\Delta x}_{\text{s. de R. de } g}$$

A propriedade segue tomando $\lim_{n\to\infty}$.

- No caso 3:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}[cf(x_k^*)]\Delta x}_{\text{soma de Riemann de } cf} = c\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x}_{\text{s. de R. de } f}$$

Mais uma vez, a propriedade segue tomando $\lim_{n\to\infty}$.

Propriedades da integral definida

- **Exemplo.** Usando as propriedades de integral, calcule:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx.$$

Propriedades da integral definida

- **Exemplo.** Usando as propriedades de integral, calcule:

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)dx.$$

- **Solução.** Temos

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)dx = \int_0^1 4dx + 3\int_0^1 x^2dx.$$

Sabemos que

$$\int_0^1 4dx = 4 \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

Portanto

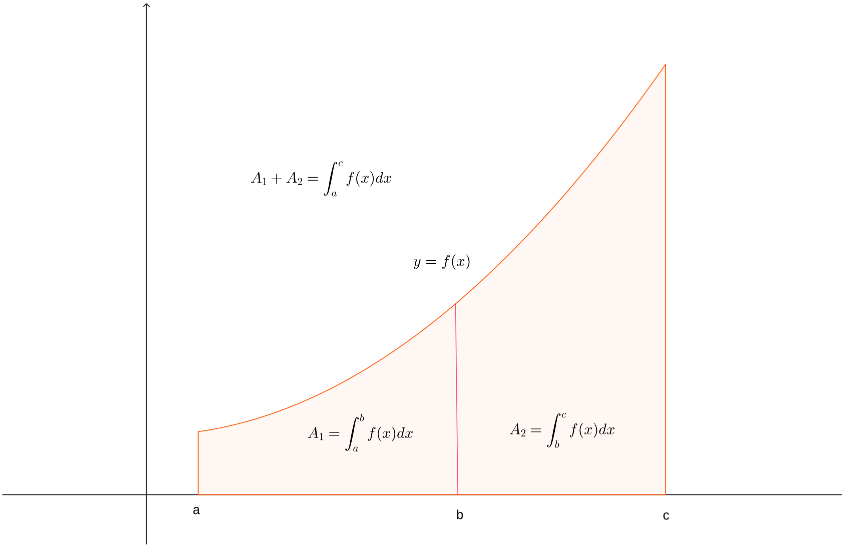
$$\int_0^1 (4 + 3x^2)dx = 4 + 3\frac{1}{3} = 5.$$

Propriedades da integral definida

Temos a seguinte propriedade para a integração de uma função em intervalos adjacentes:

- **4.** $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$

A integral definida



Propriedades da integral definida

As seguintes propriedades envolvem comparações de integrais:

- **6.** Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Propriedades da integral definida

As seguintes propriedades envolvem comparações de integrais:

- **6.** Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

  Isso vem do fato que, como $f \geq 0$, a integral é uma área. Portanto, é ≥ 0.

Propriedades da integral definida

As seguintes propriedades envolvem comparações de integrais:

- **6.** Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

  Isso vem do fato que, como $f \geq 0$, a integral é uma área. Portanto, é ≥ 0.

- **7.** Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Propriedades da integral definida

As seguintes propriedades envolvem comparações de integrais:

- **6.** Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

  Isso vem do fato que, como $f \geq 0$, a integral é uma área. Portanto, é ≥ 0.

- **7.** Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

  Isso segue da propriedade anterior, pois $f - g \geq 0$. Portanto

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{\geq 0} dx \geq 0.$$

Propriedades da integral definida

- **8.** Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Propriedades da integral definida

- **8.** Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Isso segue da Propriedade 7 aplicada a f e às funções constantes m e M:

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \underbrace{\int_a^b mdx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b Mdx}_{M(b-a)}$$