Lista de Exercícios - Cálculo I
Seção 2.2: O limite de uma função

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer

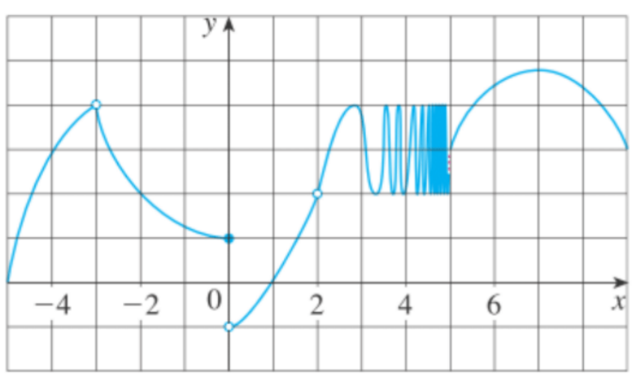
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7.$$

Nesta situação, é possível que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

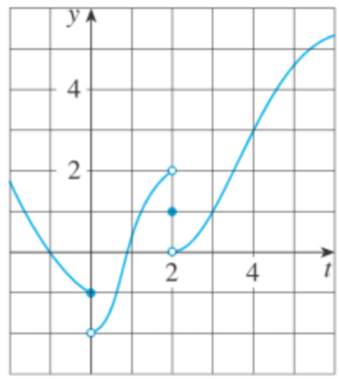
(a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



(a) $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} h(x)$	(b) $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} h(x)$	(c) $\displaystyle\lim_{x\to -3} h(x)$
(d) $h(-3)$	(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} h(x)$	(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x)$
(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$	(h) $h(0)$	(i) $\displaystyle\lim_{x\to 2} h(x)$
(j) $h(2)$	(k) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} h(x)$	(l) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} h(x)$

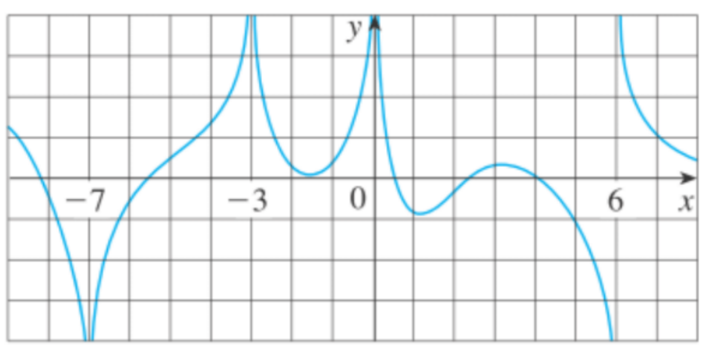
7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



$(a)\ \lim_{t\to 0^-} g(t)$ $(b)\ \lim_{t\to 0^+} g(t)$ $(c)\ \lim_{t\to 0} g(t)$
$(d)\ \lim_{t\to 2^-} g(t)$ $(e)\ \lim_{t\to 2^+} g(t)$ $(f)\ \lim_{t\to 2} g(t)$
$(g)\ g(2)$ $(h)\ \lim_{t\to 4} g(t)$

9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

$(a)\ \lim_{x\to -7} f(x)$ $(b)\ \lim_{x\to -3} f(x)$
$(c)\ \lim_{x\to 0} f(x)$ $(d)\ \lim_{x\to 6^-} f(x)$
$(e)\ \lim_{x\to 6^+} f(x)$ (f) As equações das assíntotas verticais.



12. Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x \text{ se } & x < -1 \\ x \text{ se } & -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2 \text{ se } & x \geq 1 \end{cases}$$

15. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça todas as condições dadas.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4, \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to -2} f(x) = 2, \quad f(3) = 3, \quad f(-2) = 1.$$

Enunciado para as questões 25 e 26: Determine o limite infinito.

25. $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{6}{x-5}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{6}{x-5}$

Gabarito

1. A expressão significa que os valores da função se tornam tão próximos de 5 quanto quisermos para valores de x suficientemente próximos de 2. Sim, pois, tomando o limite, nos aproximamos de $x = 2$, mas sempre com $x \neq 2$, logo o limite da função não é necessariamente igual ao valor da imagem em um dado ponto.

2. No primeiro caso, os valores da função se tornam arbitrariamente próximos de 3 para valores de x suficientemente próximos de 1 pela esquerda, isto é, próximos e menores do que 1. No segundo caso, os valores da função se tornam arbitrariamente próximos de 7 para valores de x suficientemente próximos de 1 pela direita, isto é, próximos e maiores do que 1. O limite neste ponto não existe, pois os limites laterais diferem.

3. (a) Para valores de x próximos de -3 a função se torna tão grande quanto quisermos. Isto é, existe um número real positivo M_0 tal que para qualquer $M \geq M_0$, existe um valor x_0 tal que $f(x_0) > M$.

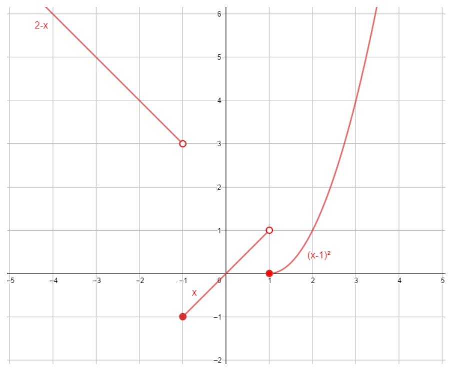
(b) Para valores de x próximos de 4 pela direita, ou seja, maiores do que 4, a função se torna tão grande quanto quisermos em módulo, mas negativa. Isto é, existe um número real positivo M_0 tal que para qualquer $M \geq M_0$, existe um $x_0 > 4$ (pela direita) tal que $f(x_0) < -M$.

6. (a) 4
(b) 4
(c) 4
(d) Não existe, pois a função não está definida em $x = -3$.
(e) 1
(f) -1
(g) Não existe, pois os limites laterais são distintos.
(h) 1
(i) 2
(j) Não existe, pois a função não está definida para $x = 2$.
(k) 3
(l) Não existe, pois a função oscila infinitamente para valores de x próximos de 5 pela esquerda, não tendendo, assim, para um valor real único.

7. (a) -1
(b) -2
(c) Não existe, pois os limites laterais são distintos.
(d) 2
(e) 0
(f) Não existe, pois os limites laterais são distintos.
(g) 1
(h) 3

9. (a) $-\infty$
(b) $+\infty$
(c) $+\infty$
(d) $-\infty$
(e) $+\infty$
(f) $x = -7$, $x = -3$, $x = 0$, $x = 6$.

12. O limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe para qualquer valor de a diferente de -1 e 1.



15. Um exemplo de gráfico para esse exercício é:

25. $+\infty$

26.$-\infty$