Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 20: Primitivas

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Primitivas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função.*
Uma primitiva *de* f *é uma função* $F : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Primitivas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.
Uma primitiva *de f é uma função $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

- **Exemplo.** $f(x) = x \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$,

Primitivas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função.*
Uma primitiva *de* f *é uma função* $F : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$*.*

- **Exemplo.** $f(x) = x \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$,
  pois $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}(2x) = x$.

Primitivas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.
Uma primitiva *de f é uma função $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

- **Exemplo.** $f(x) = x \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$,
  pois $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}(2x) = x$.
- **Exemplo.** De um modo mais geral:
  $f(x) = x^n$, com $n \neq -1 \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$,

Primitivas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.
Uma primitiva *de f é uma função $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

- **Exemplo.** $f(x) = x \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$,
  pois $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}(2x) = x$.
- **Exemplo.** De um modo mais geral:
  $f(x) = x^n$, com $n \neq -1 \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$,
  pois $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$.

Primitivas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.
Uma primitiva *de f é uma função $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

- **Exemplo.** $f(x) = x \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$,
  pois $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}(2x) = x$.
- **Exemplo.** De um modo mais geral:
  $f(x) = x^n$, com $n \neq -1 \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$,
  pois $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$.
- **Exemplo.** $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x} \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \ln|x|$,

Primitivas

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.
Uma primitiva *de f é uma função $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

- **Exemplo.** $f(x) = x \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$,
  pois $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}(2x) = x$.
- **Exemplo.** De um modo mais geral:
  $f(x) = x^n$, com $n \neq -1 \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$,
  pois $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$.
- **Exemplo.** $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x} \rightsquigarrow$ primitiva: $F(x) = \ln|x|$,
  pois $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

Primitivas

Proposição

Se F é uma primitiva para f em um intervalo I, então todas as primitivas de f em I são da forma $F + c$, onde c é constante real

Primitivas

Proposição

Se F é uma primitiva para f em um intervalo I, então todas as primitivas de f em I são da forma $F + c$, onde c é constante real

Demonstração.

Suponha que G seja outra primitiva para f em I. Então:

$$G'(x) = f(x) \qquad \text{e} \qquad F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I.$$

Logo,

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in I.$$

Portanto, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) - F(x) = c$, donde $G(x) = F(x) + c$, como queríamos. $\square$

Primitivas

Proposição

Sejam F e G primitivas para funções f e g em um intervalo I e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

(a) $F + G$ é uma primitiva para $f + g$;

(b) αF é uma primitiva para αf.

Primitivas

Proposição

Sejam F e G primitivas para funções f e g em um intervalo I e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

(a) $F + G$ é uma primitiva para $f + g$;

(b) αF é uma primitiva para αf.

Demonstração.

Basta observar que:

(a) $(F + G)' = F' + G' = f + g$;

(b) $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$. $\square$

Lista de primitivas

função $f(x)$	primitiva $F(x)$	função $f(x)$	primitiva $F(x)$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\sec^2 x$	$\tan x$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$
e^x	e^x		

Primitivas

- **Exemplo.** Encontre uma primitiva de

$$f(x) = 4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}.$$

Primitivas

- **Exemplo.** Encontre uma primitiva de

$$f(x) = 4\text{sen}x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}.$$

Solução. Temos:

$$f(x) = 4\underbrace{\text{sen}x}_{-\cos x} + 2\underbrace{x^4}_{\frac{1}{5}x^5} - \underbrace{x^{-1/2}}_{2x^{1/2}}.$$

Portanto, a primitiva procurada é qualquer função da forma

$$-4\cos x + \frac{2}{5}x^5 - 2x^{1/2} + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Primitivas

- **Exemplo.** Encontre a primitiva $F(x)$ de

$$f(x) = e^x + 20(x^2 + 1)^{-1}$$

tal que $F(0) = -2$.

Primitivas

- **Exemplo.** Encontre a primitiva $F(x)$ de

$$f(x) = e^x + 20(x^2+1)^{-1}$$

tal que $F(0) = -2$.

Solução. Temos que

$$(e^x)' = e^x \qquad \text{e} \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Portanto, as primitivas de f são da forma

$$F(x) = e^x + 20 \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para determinar a constante c, fazemos $F(0) = -2$:

$$-2 = F(0) = e^0 + 20 \arctan 0 + c = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = -3.$$

Primitivas

- **Exemplo.** Encontre $f(x)$, sabendo que

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 4, \quad f(0) = 4 \text{ e } f(1) = 1.$$

Primitivas

- **Exemplo.** Encontre $f(x)$, sabendo que

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 4, \quad f(0) = 4 \ \text{ e } \ f(1) = 1.$$

Solução. Temos que $f'(x)$ é uma primitiva de $f''(x)$. Assim:

$$f'(x) = 12\frac{1}{3}x^3 + 6\frac{1}{2}x^2 - 4x + c = 4x^3 + 3x^2 - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Agora, $f(x)$ é uma primitiva de $f'(x)$:

$$f(x) = 4\frac{1}{4}x^4 + 3\frac{1}{3}x^3 - 4\frac{1}{2}x^2 + cx + d = x^4 + x^3 - 2x^2 + cx + d, \ \ c, d \in \mathbb{R}.$$

Usamos as condições iniciais para determinar c e d:

$$f(0) = d = 4 \qquad \text{e} \qquad f(1) = c + d = 1.$$

Encontramos $c = -3$ e $d = 4$.

Movimento retilíneo

- **Exemplo.** Uma bola é lançada para cima com uma velocidade de 15 m/s da borda de um penhasco a 140 m acima do solo. Encontre a posição da bola (altura acima do solo) t segundos após o lançamento.
  (a) Quando ela atinge a altura máxima?
  (b) Quando ela atinge o solo?

Movimento retilíneo

- **Exemplo.** Uma bola é lançada para cima com uma velocidade de 15 m/s da borda de um penhasco a 140 m acima do solo. Encontre a posição da bola (altura acima do solo) t segundos após o lançamento.
  (a) Quando ela atinge a altura máxima?
  (b) Quando ela atinge o solo?

  Solução. Vamos denotar por g a aceleração da gravidade em m/s^2. Suponhamos que o eixo y esteja orientado verticalmente de baixo para cima, com a origem ao nível do solo. Sela $y = f(t)$ a posição do objeto no instante t.
  Portanto, a aceleração do objeto é $a(t) = f''(t) = -g$.
  Sua velocidade é $v(t) = f'(t) = -gt + c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Temos $v(0) = 15$, portanto $c = 15$.
  Sua posição é $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 15t + d$, onde $d \in \mathbb{R}$. Temos $f(0) = 140$, portanto $d = 140$. Portanto

$$f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 15t + 140.$$

Movimento retilíneo

Solução (continuação).
(a) A altura máxima é atingida quando $v(t) = f'(t) = 0$, ou seja, quando $t = 15$ s.

(b) o objeto atinge o solo quando $f(t) = 0$, ou seja, quando

$$-\frac{1}{2}gt^2 + 15t + 140 = 0.$$

As raízes dessa equação são

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 2g \times 140}}{g}.$$

A única raiz positiva é

$$t = \frac{15 + \sqrt{15^2 + 2g \times 140}}{g}.$$