Lista de Exercícios- Cálculo I

Seção 2.5: Continuidade

Enunciado para os exercícios 19 e 20: Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboçe o gráfico da função.

19. $a = 0$ e $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$;

20. $a = 3$ e $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$.

41. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

42. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

45. Se $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1000$.

47. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

$$x^4 + x - 3 = 0, \ (1, 2)$$

62. Se a e b são números positivos, demonstre que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$

Gabarito

19. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ e $f(0) = 0$, então f é descontínua em $a = 0$.

20. $\lim_{x \to 3} f(x) = 7$ e $f(3) = 6$, então f é descontínua em $a = 3$.

41. $c = \frac{2}{3}$.

42. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

45. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ e $f(40\pi) = 1600\pi^2 > 1000$, temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 1000$.

47. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, $f(1) = -1$ e $f(2) = 15$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

62. É importante notar que a função $f(x) = \frac{a}{x^3+2x^2-1} + \frac{b}{x^3+x-2}$ não é contínua no intervalo $(-1, 1)$ e portanto não podemos utilizar o Teorema do Valor Intermediário diretamente nesse intervalo. Além disso, temos que $\lim_{x \to -1^+} \frac{a}{x^3+2x^2-1} + \frac{b}{x^3+x-2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{a}{x^3+2x^2-1} + \frac{b}{x^3+x-2} = -\infty$, o que não nos daria muita informação para utilizar o TVI. O que temos que fazer é notar que $x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 1)(x - x_1)(x - x_2)$, sendo $x_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$ e $x_2 = (-1 - \sqrt{5})/2$. Como $x_1 \in (-1, 1)$, percebemos que a função não será contínua em $x = x_1$. Mais ainda, temos que $\lim_{x \to x_1^+} f(x) = +\infty$ e, como $\lim_{x \to 1^-} = -\infty$ e f é contínua no intervalo $(x_1, 1)$, agora podemos aplicar o TVI e concluir que há uma raiz no intervalo $(x_1, 1) \subset (-1, 1)$.

Referência: James Stewart; Cálculo - Volume 1; 6a edição. Exercícios 19, 20, 41, 42, 45, 47, 62 da seção 2.5.