Cálculo I

Datas das provas:

1ª 16/4 – 33 pontos

2ª 26/5 – " "

3ª 30/6 – 34 "

Aula 1 (Revisão de números reais)

Exercícios

1. Reescreva as expressões abaixo sem usar o símbolo de valor absoluto:

(a) $|x-2|$, se $x<2$.

(b) $|x+1|$.

(c) $|1-2x^2|$.

2. Resolva

(a) $|x+5| \geq 2$, (b) $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = 3$,

(b) $4x < 2x+1 < 3x+2$, (c) $(2x+3)(x-1) \leq 0$.

(d) $\frac{ax+b}{c} \leq b$, $a, b, c < 0$.

3. Mostre que se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

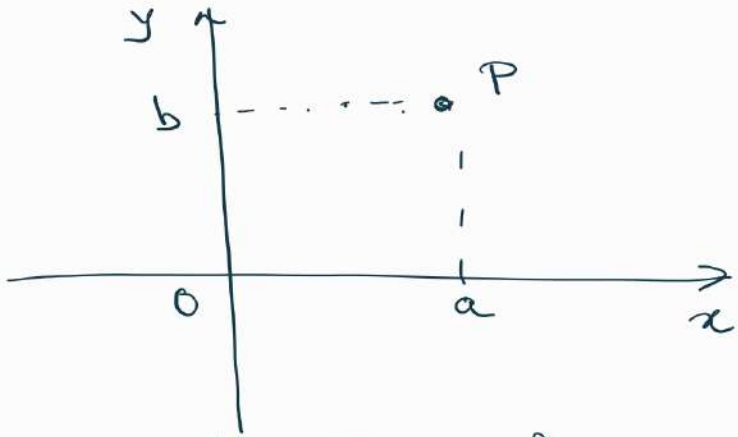
4. Mostre que a soma, a diferença e o produto de racionais é um número racional.

5. (a) A soma de dois irracionais é sempre um irracional?

(b) O produto de dois irracionais é sempre um número irracional?

Aula 2 (Revisão de Geometria Analítica)
retas e cônicas

sistema de coordenadas cartesianas

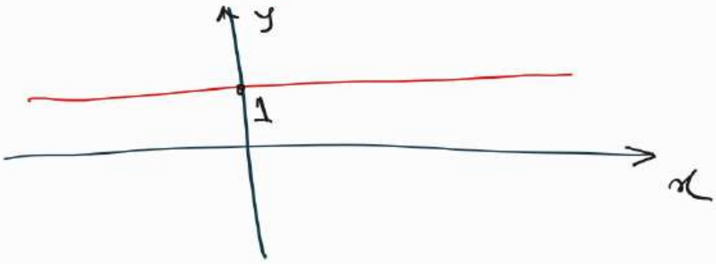


Dado um ponto P no plano associamos a ele um único par ordenado (a, b).

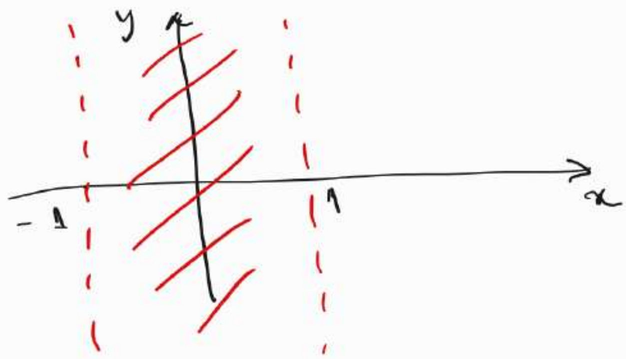
a — coordenada x de P (abscissa)

b — " y " " (ordenada)

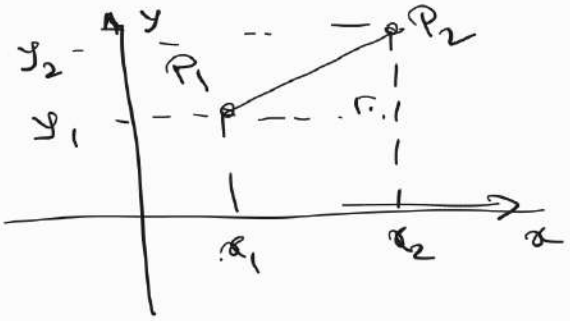
Esboce a região $\{(x, y) : y = 1\}$



Esboce a região $\{(x, y) : |x| < 1\}$



Distância entre os ponto
$P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

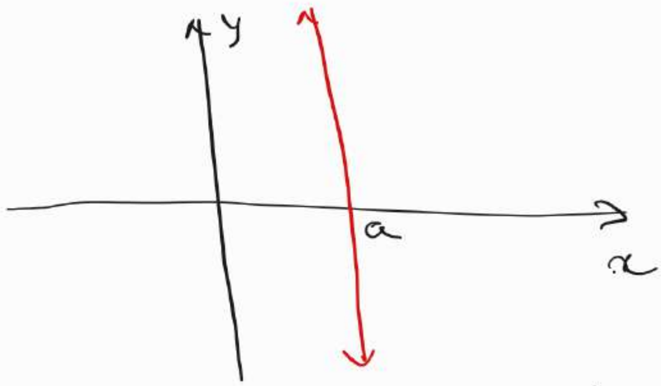


$$|P_1P_2| = \text{distância de } P_1 \text{ a } P_2$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

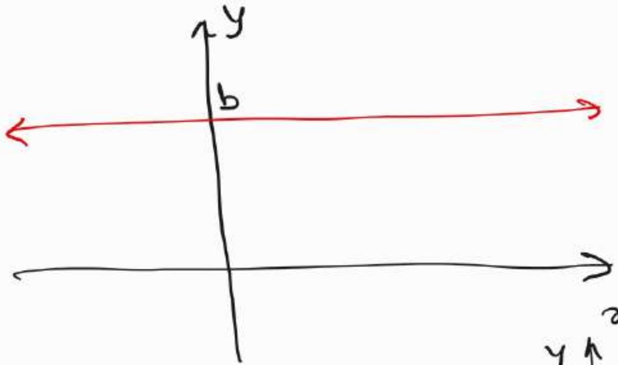
Exercício: Calcule a distância entre $(-1,2)$ e $(3,4)$.

Retas: retas verticais

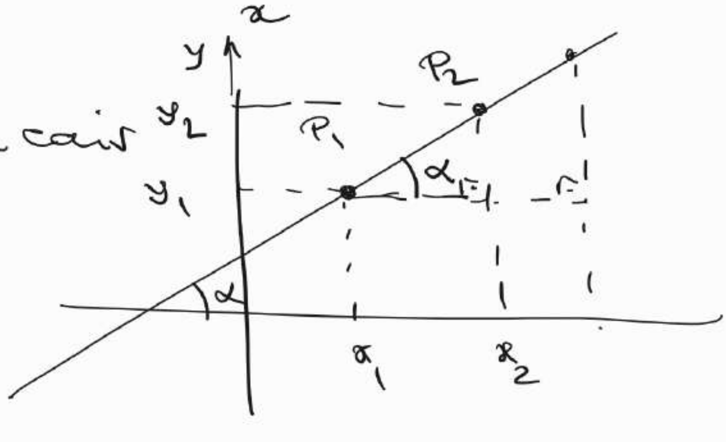
$$x = a$$



retas horizontais $y = b$



retas não verticais



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ — inclinação da reta $= \operatorname{tg} \alpha$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$ — equação da reta.

Ex. Encontre a equação da reta que passa por $(1,1)$ e $(-1,2)$.

solução:

$$m = \frac{2-1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x-1) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}}$$

Ex. Encontre a equação da reta que passa por $(2,3)$ e tem coeficiente angular 2.

Resposta: $y = 2x - 1$.

Ex. Esboce o gráfico da reta

$$3x - 5y = 15.$$

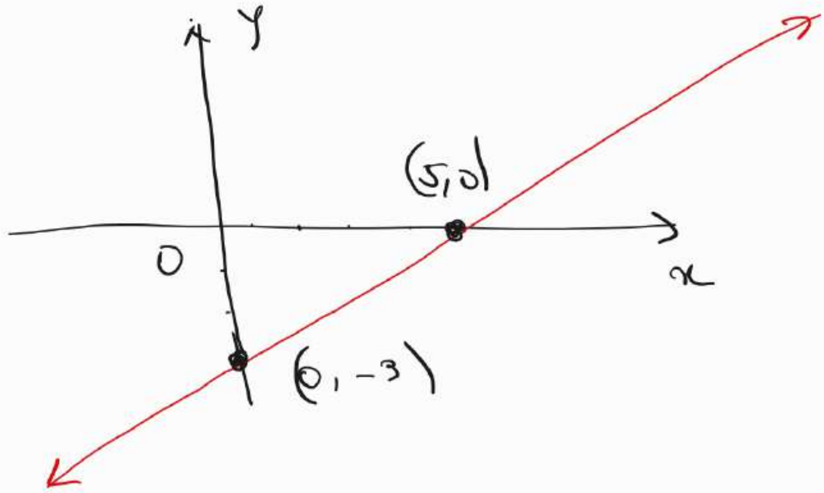
Solução: Basta encontrar dois pontos da reta.

se $x = 0 \Rightarrow y = -3$, $(0,-3)$

se $y = 0 \Rightarrow x = 5$, $(5,0)$

$$y = mx + b$$

coeficiente angular



• Duas retas não verticais são paralelas se, e somente se, tiverem os mesmos coeficientes angulares.

Ex $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 5$

$m_1 = 2$ $m_2 = 2$

$\Rightarrow$ as duas retas são paralelas.

• Duas retas com coeficientes angulares m_1 e m_2 são perpendiculares se, e somente se,

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

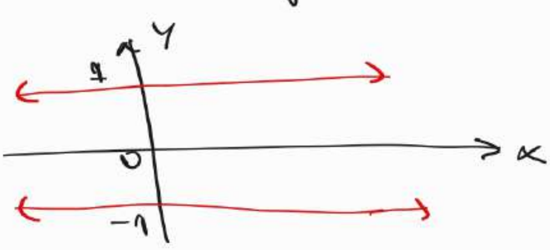
Ex As retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y + 1 = 0$ são perpendiculares.

De fato $2x + 3y = 1 \Leftrightarrow y = \overbrace{-\frac{2}{3}}^{= m_1} x + \frac{1}{3}$

$6x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \underbrace{\frac{3}{2}}_{= m_2} x + \frac{1}{4}$

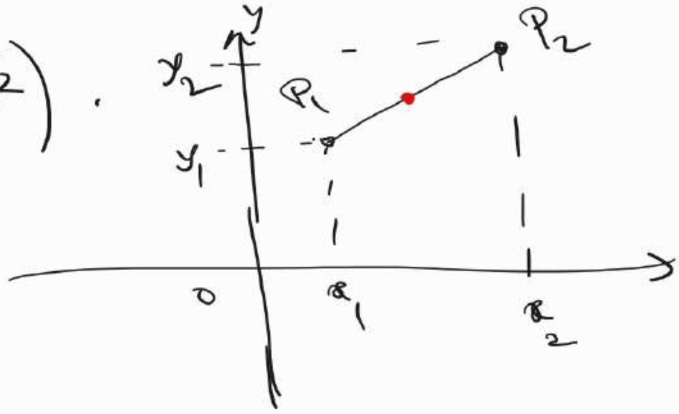
$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1.$$

Exercício Esboce a região correspondente a $|y| = 1$.



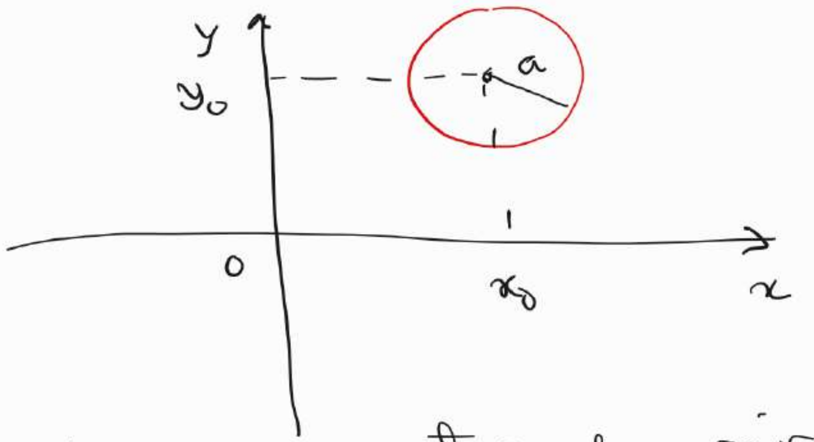
Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$ é

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$



<u>circunferência</u>

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2 \quad , \quad a>0$$



(x_0, y_0) — centro da circunferência

a — raio " "

<u>Ex</u> Encontre o centro e o raio da circunferência

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0.$$

<u>solução</u> Vamos colocar a equação na forma padrão:

$$x^2 + 2x = \underbrace{x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1}_{(x+1)^2} - 1 = (x+1)^2 - 1$$

$$y^2 - 6y = \underbrace{y^2 - 2\cdot y\cdot 3 + 3^2}_{(y-3)^2} - 3^2 = (y-3)^2 - 9$$

Portanto a equação da circunferência é

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + 7 - 1 - 9 = 0$$

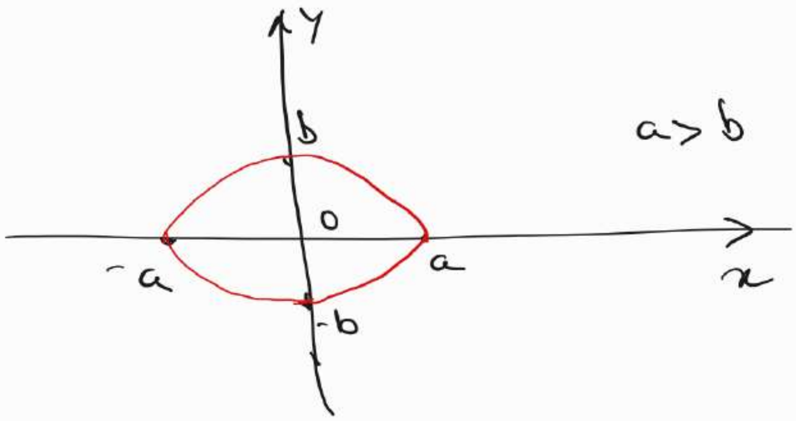
$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3$$

$$(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{3})^2$$

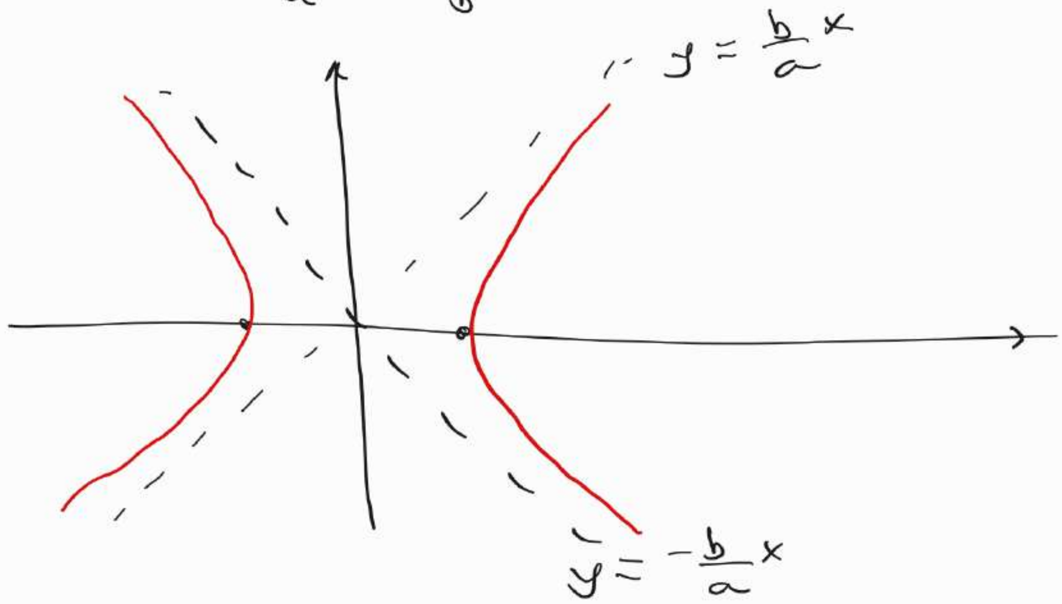
centro: $(-1, 3)$ raio: $\sqrt{3}$

<u>Elipse</u> $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$

a, b semi-eixos da elipse



<u>Hipérbole</u> $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$



Parábolas

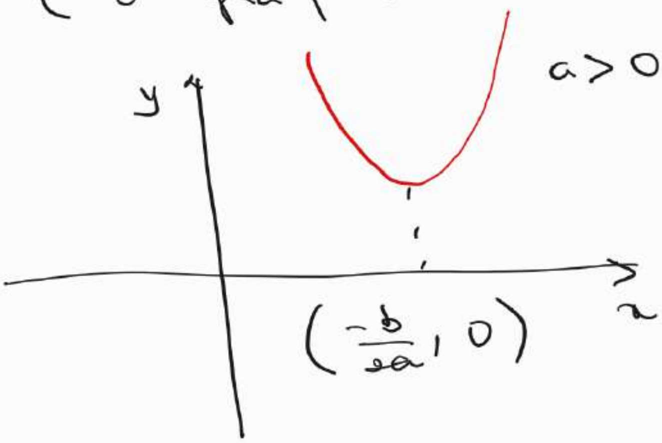
$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0.$$

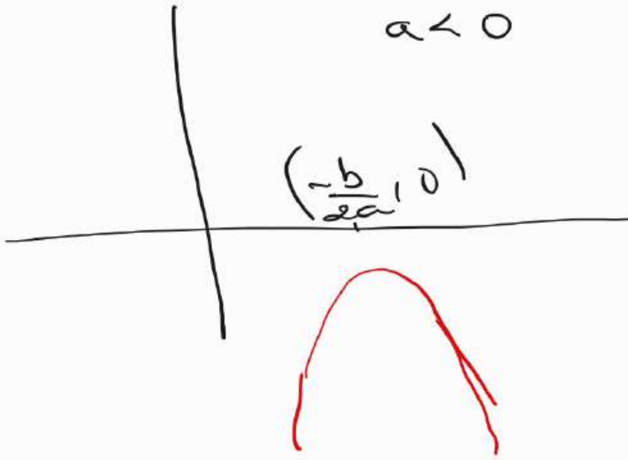
Interseção do gráfico com eixo x ($y=0$)

$$0 = ax^2 + bx + c$$

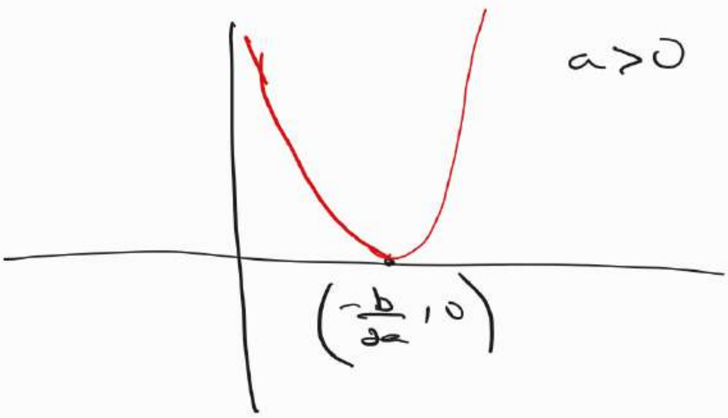
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

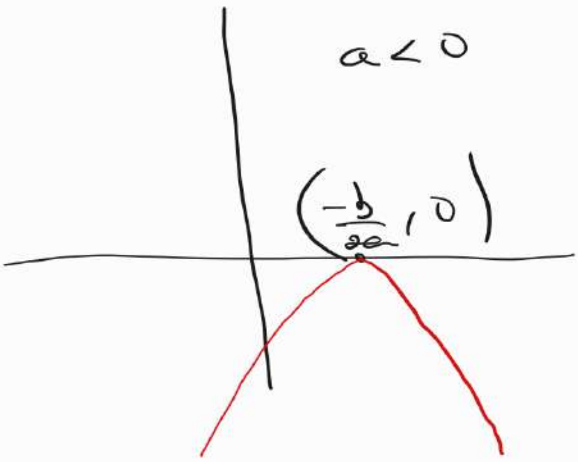
se $\Delta < 0$ não tem raiz real
(o gráfico nunca corta o eixo x)





$$\Delta = 0 \quad , \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$





Exercício Esboce o gráfico de

$$y = 2x^2 - 4x + 1.$$

Exercícios 1. Determine a equação da parábola com vértice $(1,-1)$ e que passa pelos pontos $(-1,3)$ e $(3,3)$.

2. Esboce as regiões abaixo.

(a) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

(b) $\{(x,y) \mid y \geq x^2-1\}$.

(c) $\{(x,y) \mid x^2+4y^2 > 4\}$.

3. Esboce as regiões delimitadas pelas curvas dadas.

(a) $y = 3x$ e $y = x^2$.

(b) $y = 4-x^2$, $x-2y=2$.

4. Esboce as curvas abaixo.

(a) $2x^2+2y^2-x+y=1$.

(b) $4x^2+9y^2 = 36$.

(c) $9x^2-25y^2 = 225$.

(d) $x = 4-y^2$.

Aula 3 (Funções: conceito, gráficos, operações, composição, translações, simetrias e funções compostas).

Def. Uma função f é uma lei que associa a cada elemento x num conjunto D (domínio de f) exatamente um elemento $f(x)$ num conjunto E (contradomínio de f).

Imagem de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$.

$$Im(f) = \{ y \mid y = f(x), \text{ para algum } x \in D \}$$

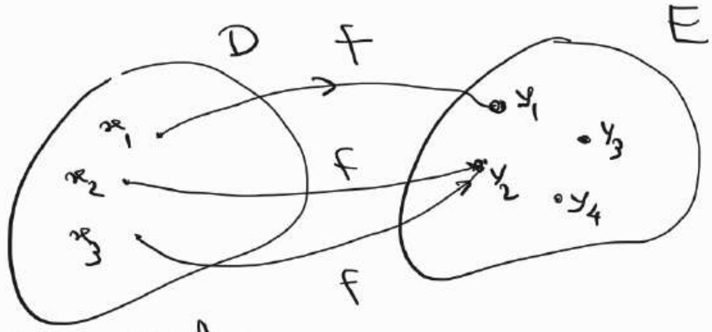


Figura 1.

$$Im(f) = \{ y_1, y_2 \}$$

Dizemos que f é injetiva (injetora) se sempre que $x_1 \neq x_2$ tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dizemos que f é sobrejetiva (sobrejetora) se $Im(f) = E$.

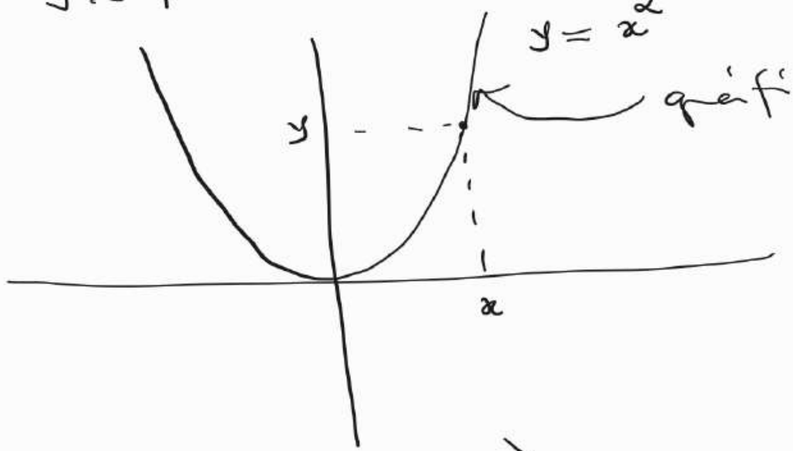
No exemplo da figura 1 f não é injetiva nem sobrejetiva.

Dizemos que f é <u>bijetiva</u> (bijetora) se f for injetiva e sobrejetiva.

O <u>gráfico</u> de f é o conjunto

$$\{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

<u>Ex</u>: $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$



$\operatorname{Im} f = [0, \infty)$

Dada uma regra $f(x)$ quando perguntamos pelo domínio de f, subentende-se em geral o maior subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ tal que

$\forall x \in D$ $f(x)$ é um número real.

Por exemplo, se $f(x) = \sqrt{x+2}$, devemos ter $x + 2 \geq 0$, ou seja $x \geq -2$.

Portanto o domínio de $f(x)$ é $[-2, \infty)$.

Por outro lado, se $g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$, o seu domínio será x tais que $x^2 - x \neq 0$. Como $x^2 - x = x(x-1) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 1$, então o domínio de g é

$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 1\}$.

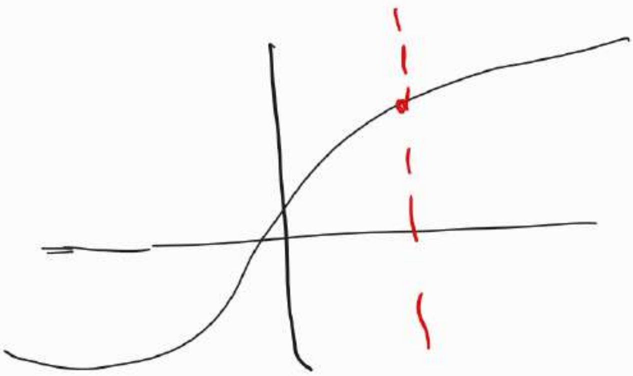
Obs.: • Se $f(x) = \dfrac{p(x)}{g(x)}$, onde p e g são polinômios, então o domínio de f é $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

• Se $f(x) = \sqrt{g(x)}$, então o domínio de f é

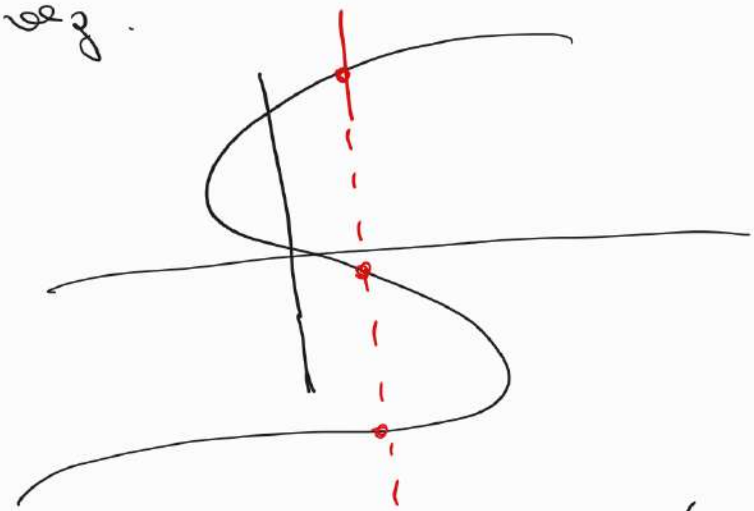
$$\{x \in D(g) \mid g(x) \geq 0\},$$

onde $D(G)$ é o domínio de g.

• O gráfico de uma curva no plano é o gráfico de uma função $y = f(x)$ se, e somente se, nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.



a curva é gráfico de uma função

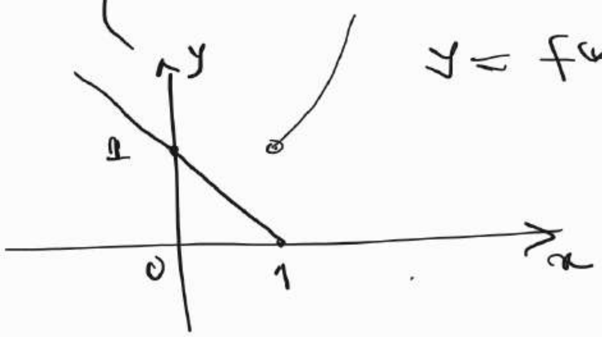


a curva não é gráfico de uma função.

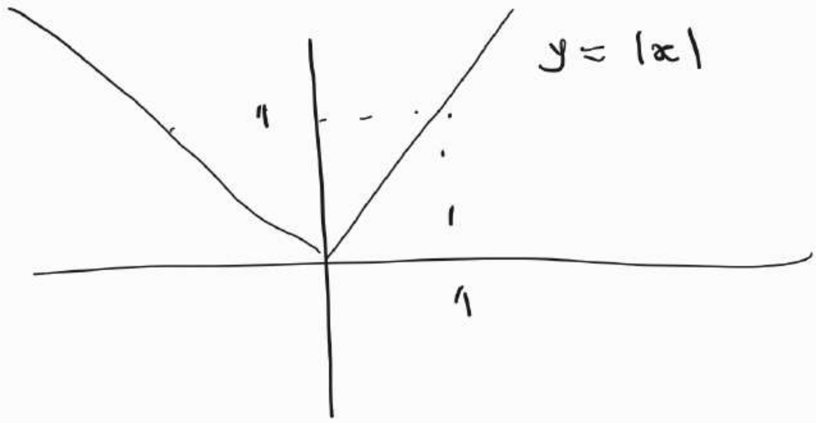
Funções definidas por partes

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$y = f(x)$



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

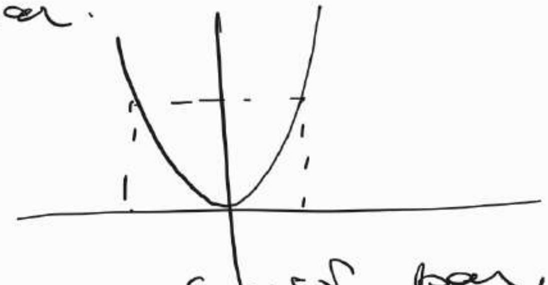


Funções pares e funções ímpares

Seja $f: D \to \mathbb{R}$, onde D é tal que se $x \in D$, então $-x \in D$.

- Dizemos que f é par se
$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Ex Se $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, então $\forall x \in \mathbb{R}$, tem $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, logo f é par.

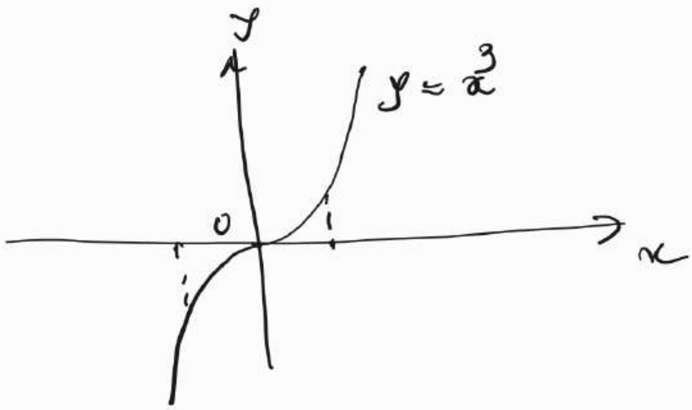


Se f é uma função par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

- Dizemos que f é ímpar, se $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Então, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ é ímpar.



<u>Exercício</u> (a) Se f e g são pares então $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ também são pares.

(b) Se f e g são ímpares, então $f \pm g$ é ímpar, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ são pares.

(c) Se f é par e g é ímpar então $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ são ímpares.

<u>Funções crescentes e decrescentes</u>

Dizemos que uma função f é <u>crescente</u> num intervalo I se

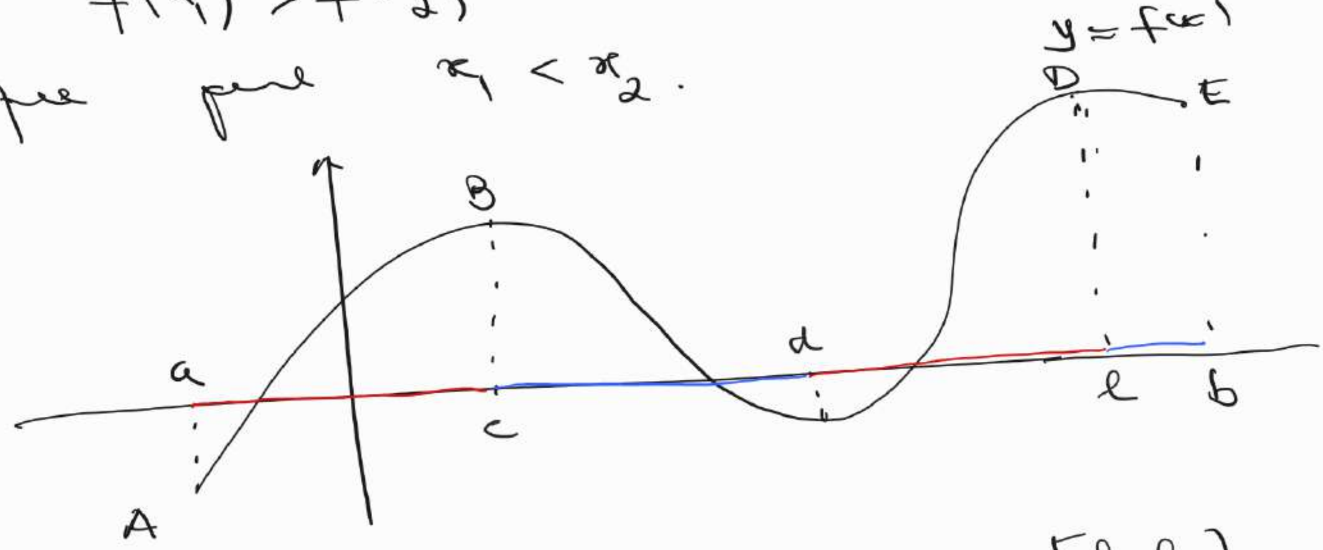
$$f(x_1) < f(x_2),$$

sempre que $x_1 < x_2$.

Dizemos que f é decrescente num intervalo I se

$$f(x_1) > f(x_2)$$

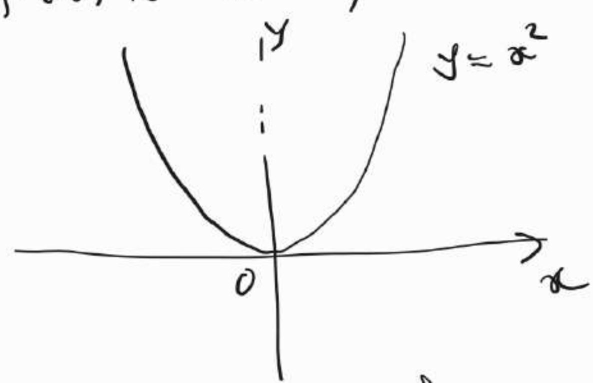
sempre que $x_1 < x_2$.



f é crescente em $[a, c]$ e em $[d, l]$

f é decrescente em $[c, d]$ e em $[l, b]$

Ex Seja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.



Então f é crescente em $[0, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0]$.

De fato, se $0 \leq x_1 < x_2$, devemos mostrar que

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 < 0$$

mas $$x_1^2 - x_2^2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} < 0.$$

Por outro lado, se $x_1 < x_2 \leq 0$, devemos mostrar que

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 > 0.$$

mas

$$x_1^2 - x_2^2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{<0} > 0.$$

Em geral, é difícil mostrar que uma função é crescente ou decrescente num intervalo, mas como veremos, o sinal da derivada nos dará tal informação.

Exercício Seja $f(x) = 4 + 3x - x^2$.

Calcule $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exercício Encontre os domínios das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$, (b) $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2+3x+2}$

(c) $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$, (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$.

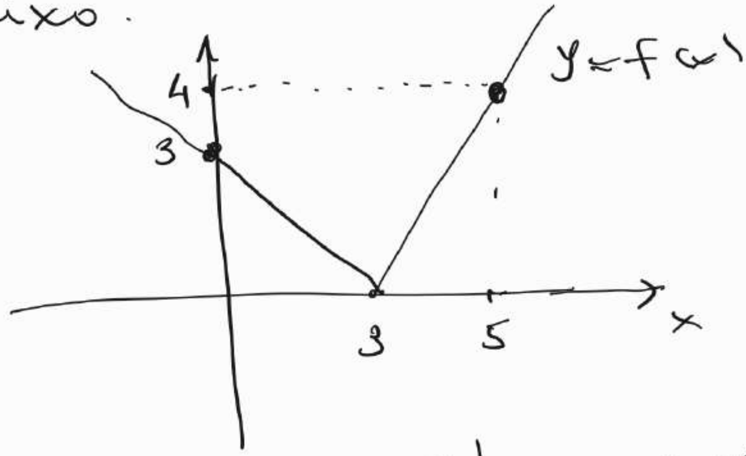
Exercício Encontre os domínios e esboce os gráficos das funções.

(a) $g(x) = \sqrt{x-5}$, (b) $f(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

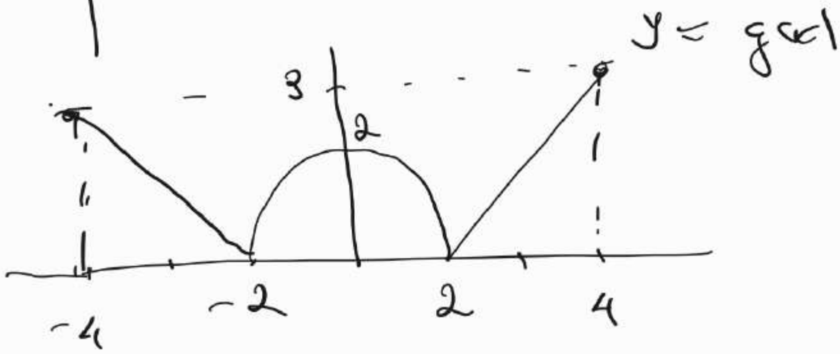
(c) $h(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$.

Exercício Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo.

(a)



(b)



Funções potências

Uma função da forma
$$f(x) = x^a \text{, onde } a \text{ uma constante}$$
é chamada de <u>função potência</u>.

- Se $a = n$, inteiro positivo, temos
$$x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ vezes}}$$
- Se $a = \frac{1}{n}$, n inteiro positivo
$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \text{ raiz } n\text{-ésima}$$
de x. Se n for par devemos ter $x \geq 0$. Se n for ímpar, x pode ser qualquer real.

• se $a = -n$, onde n é um inteiro positivo,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Polinômio $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, seu domínio é $\mathbb{R}$.

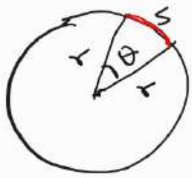
uma função f é racional se

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

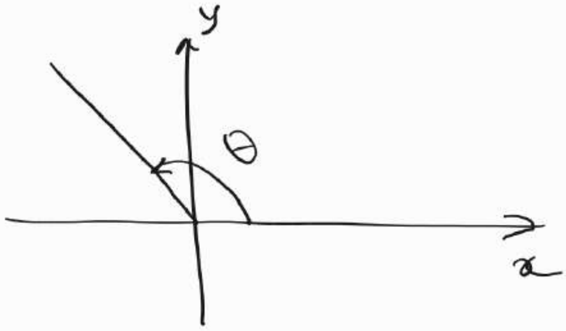
onde P e Q são polinômios. O seu domínio é $\{x \mid Q(x) \neq 0\}$.

Trigonometria

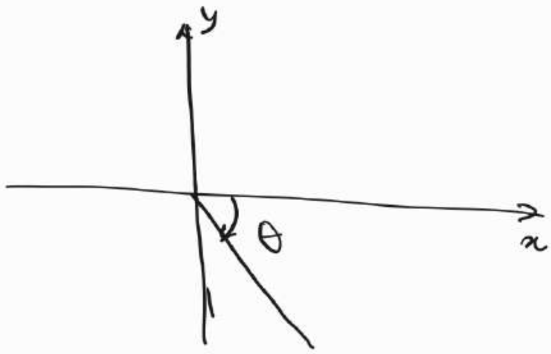
$\pi \text{ rad} = 180°$



$2\pi r$ — 2π
s — θ $\therefore$ $\boxed{s = r\theta}$

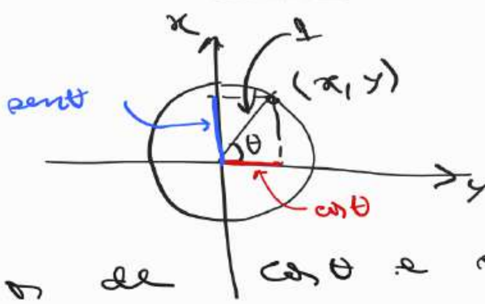


$\theta > 0$



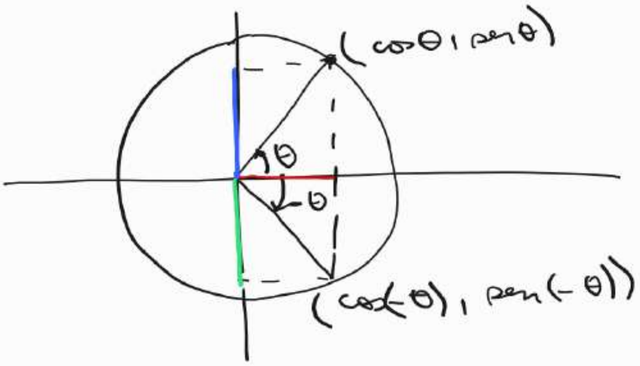
$\theta < 0$

Funções trigonométricas



$x = \cos\theta$
$y = \operatorname{sen}\theta$

Domínio de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ é $\mathbb{R}$.



$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

Identidades Trigonométricas:

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \forall\theta$ (1)

Dividindo esta relação por $\cos^2\theta$, obtemos

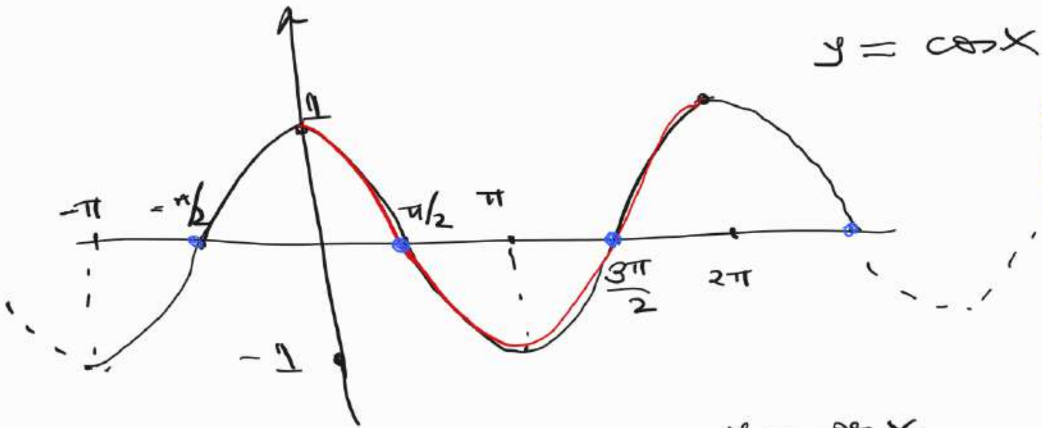
$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$.

De maneira análoga, se dividirmos (1) por $\operatorname{sen}^2\theta$, temos

$1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta$.

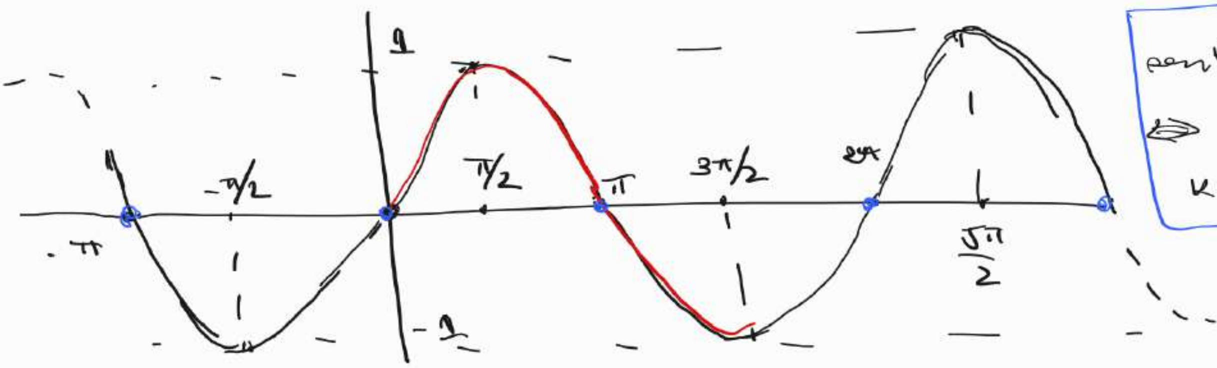
As funções seno e cosseno são periódicas com período 2π, ou seja, $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$ e $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$, $\forall\theta$.

$y = \cos x$



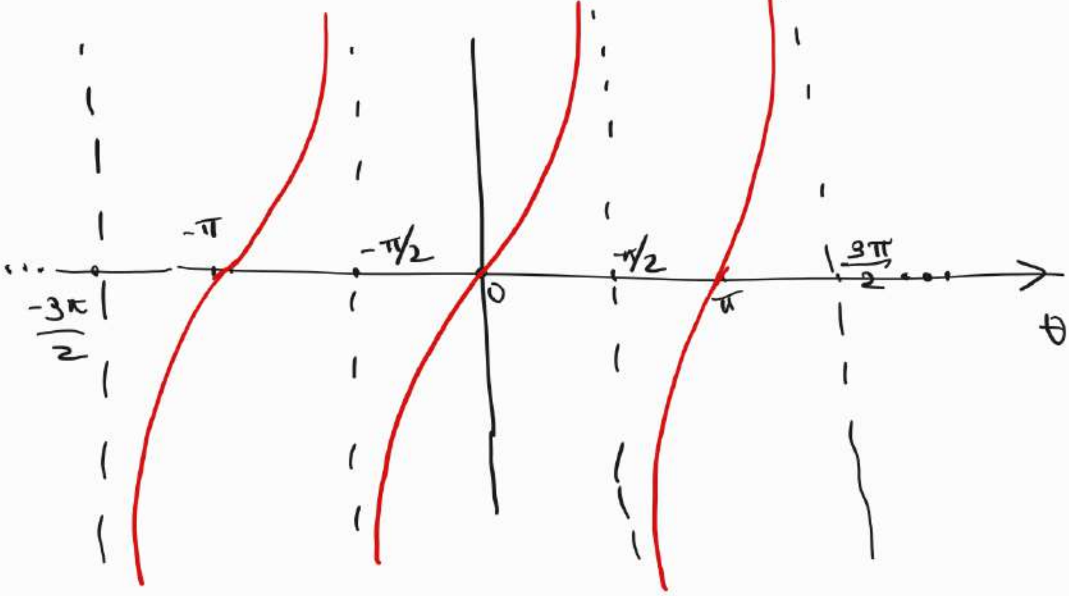
$\cos\theta = 0$
$\Leftrightarrow \theta = (2k+1)\pi/2$,
$k \in \mathbb{Z}$

$y = \operatorname{sen} x$



$\operatorname{sen}\theta = 0$
$\Leftrightarrow \theta = k\pi$,
$k \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \text{domínio } \{\theta \mid \cos\theta \neq 0\} = \{\theta : \theta \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$



$$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$$

fórmulas de adição:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x. \quad (2)$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y. \quad (3)$$

fórmulas de subtração:

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}x\cos y - \operatorname{sen}y\cos x \quad (4)$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y. \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y - \operatorname{sen}y\operatorname{sen}x}{\cos x\cos y}} = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

<u>Fórmulas do produto</u>

somando (3) e (5):

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cos y$$

ou seja,

$$\boxed{\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]} \quad (6)$$

se $x = y$, temos

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2x)\right]}$$

Subtraindo (3) de (5), temos

$$\boxed{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]}$$

Em particular, se $x = y$, temos

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right]}$$

Somando (2) e (4), temos

$$\boxed{\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right]}$$

As funções seno e cosseno são periódicas com período 2π, ou seja,

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta,$$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$.

<u>Exercício</u> Mostre a função $\operatorname{tg}\theta$ é periódica com período π, ou seja,

$$\operatorname{tg}(\theta + \pi) = \operatorname{tg}\theta,$$

para todo $\theta \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funções exponenciais

$$f(x) = a^x \quad , \quad \underline{a > 0} \; , \; a \neq 1.$$

- Se $x = n$, inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$$

- Se $x = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.
- Se $x = -n$, n inteiro positivo,

então $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

- Se x for racional, $x = p/q$, onde p, q são inteiros e $q > 0$,

então, $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.

Se x for irracional, o que significa a^x?

Por exemplo, o que significa 2^π?

$\pi = 3,14159265 35\ldots$

A sequência numérica
$3;\ 3,1;\ 3,14;\ 3,141;\ 3,1415,\ 3,14159, \ldots$
converge para π.

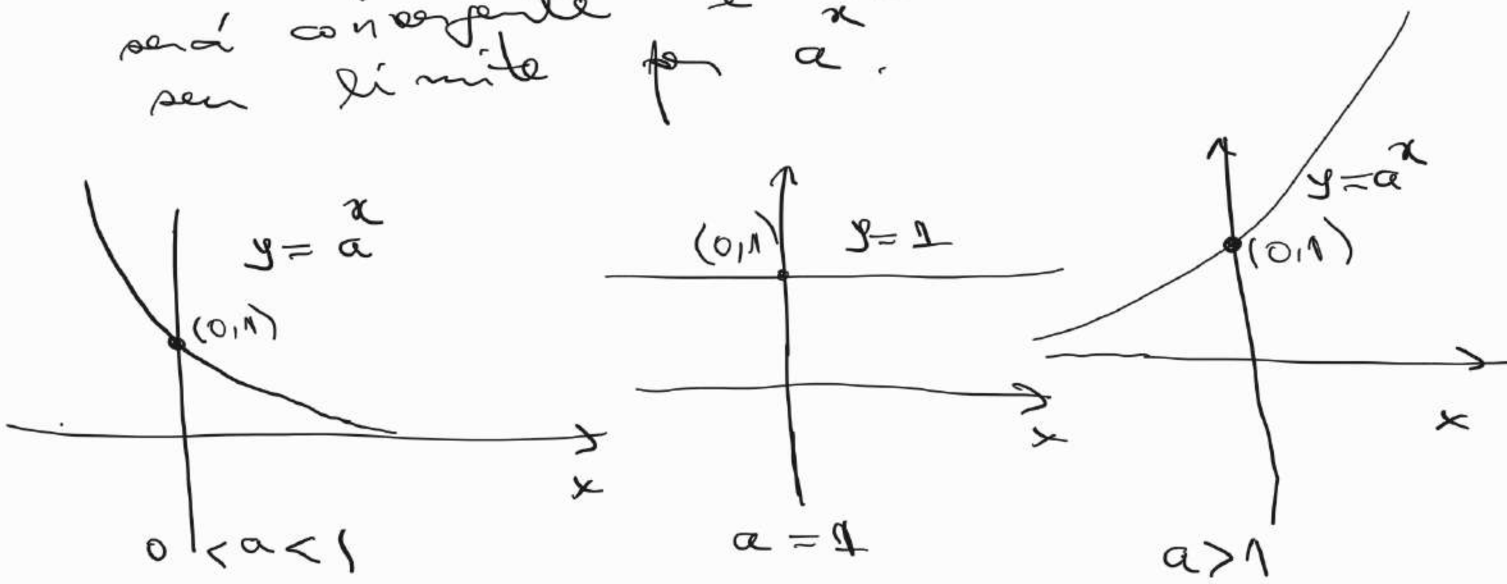
Considere a sequência

$$2^{3}, \quad 2^{3,1}, \quad 2^{3,14}, \quad 2^{3,141}, \quad 2^{3,1415}, \quad 2^{3,14159}, \ldots$$

mostra-se que esta sequência é convergente e o seu limite será <u>denotado por 2^{π}</u>.

Em geral, se x for irracional, como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, podemos tomar uma sequência de racionais r_n com r_n convergindo para x.

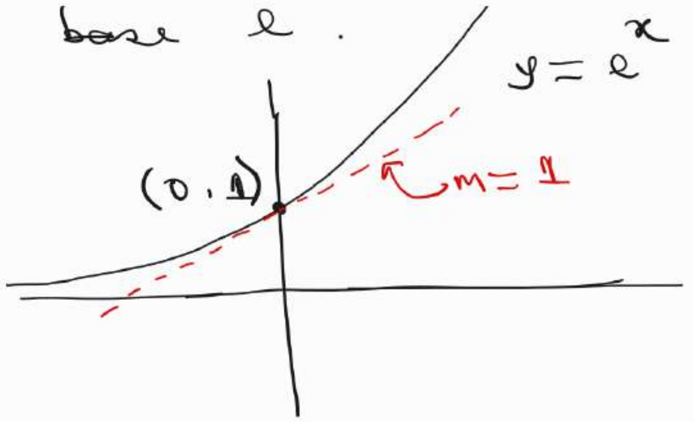
A sequência $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ será convergente e denotamos o seu limite por a^x.



O domínio de a^x é $\mathbb{R}$.

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a imagem de a^x é $(0, \infty)$.

a base e.



Os gráficos das exponenciais a^x com $a > 0$ todos passam pelo ponto $(0,1)$.
A base e corresponde à escolha de a tal que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = a^x$ no ponto $(0,1)$ seja 1.

O número e é irracional

$$e = 2{,}71828\ldots$$

Propriedades dos expoentes:

$a, b, x, y \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0$

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$.

Combinações de funções

Dadas duas funções f e g cujos domínios são $D(f)$ e $D(g)$, definimos as funções

$f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e

$\frac{f}{g}$,

onde $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$,

$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$D(f+g)$, $D(f-g)$, $D(fg)$ são iguais a $D(f) \cap D(g)$.

Além disso, $D\left(\frac{f}{g}\right)$ é

$\{ x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0 \}$.

Composição de funções

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$D(f \circ g) = \{ x \in D(g) \mid g(x) \in D(f) \}$.

Ex Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$.
calcule $f \circ g$, $g \circ f$ e $f \circ f$.

Solução

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3.$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4.$$

Ex Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x^2}$.
calcule $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ e encontre os seus domínios.

Solução $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x^2}\right)$

$$= \sqrt{\sqrt{2 - x^2}} = (2 - x^2)^{1/4} = \sqrt[4]{2 - x^2}$$

$$D(f \circ g) = \{x \mid 2 - x^2 \geq 0\}$$

$$2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{2}$$

$$|x| \leq \sqrt{2}, \quad [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$D(f \circ g) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - (\sqrt{x})^2}$$

Devemos ter $x \geq 0$ de modo que $\sqrt{x}$ esteja bem definida. Neste caso temos

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \text{e}$$

$$\sqrt{2 - (\sqrt{x})^2} = \sqrt{2 - x}$$

e devemos ter $2 - x \geq 0$

ou seja $\underline{x \leq 2}$.

Portanto, devemos ter $0 \leq x \leq 2$.

$D(g \circ f) = [0, 2]$.

<u>Exercício</u> Encontre $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ e os seus domínios.

(a) $f(x) = x^2 - 1$, $\quad g(x) = 2x + 1$.

(b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $\quad g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{1-x}$

<u>Exercício</u> Se $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$ e $h(x) = x - 1$. Encontre $f \circ g \circ h$, onde $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$.

<u>Funções Inversas</u>

<u>Def</u>. Seja $f: A \to B$ bijetiva. Então existe sua inversa $f^{-1}: B \to A$, definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$

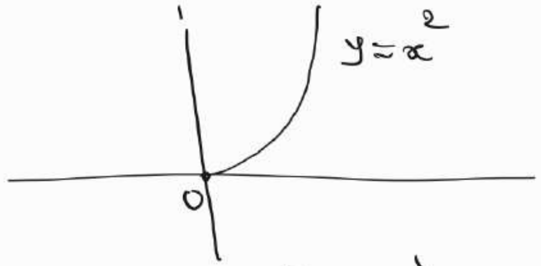
$\forall y \in B$.

<u>obs</u> $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ são ambas indentidades e $f \circ f^{-1}: B \to B$ e $f^{-1} \circ f: A \to A$.

Ex. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$. Então $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. De fato,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ex



Seja $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$. Então $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Ex Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 2$. Encontre $f^{-1}(x)$.

Solução $y = x^3 + 2 \iff x^3 = y - 2$,

logo,

$$x = \sqrt[3]{y-2}.$$

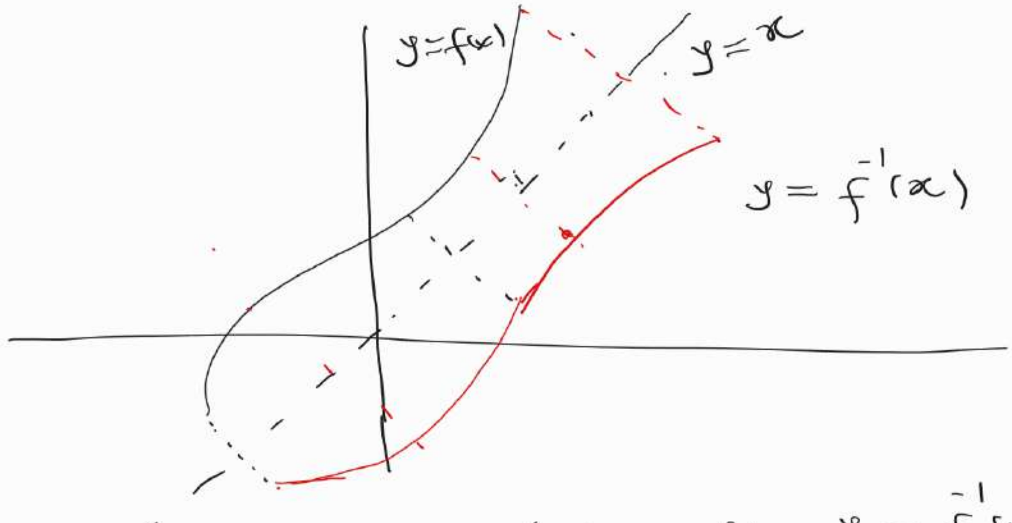
Trocando x por y, temos

$$y = \sqrt[3]{x-2},$$

ou seja,

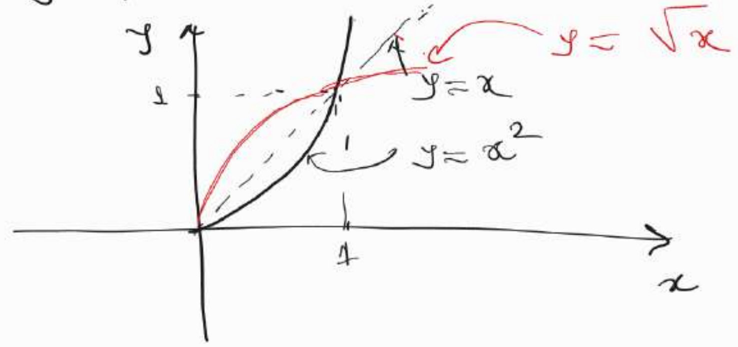
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como obter o gráfico de $y = f^{-1}(x)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$?



obtemos o gráfico de $y = f^{-1}(x)$ refletindo o gráfico de $y = f(x)$ em torno da reta $y = x$.

Ex $\quad y = f(x) = x^2 \; , \quad x \geq 0$



Funções logarítmicas $\quad (a > 0 \, , \; a \neq 1)$

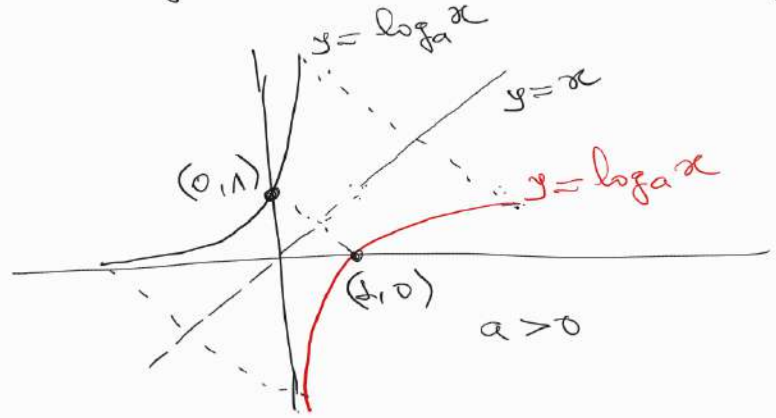
$$f : \mathbb{R} \to (0, \infty) \, , \quad f(x) = a^x$$

sua inversa é

$$f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R} \, , \quad f^{-1}(x) = \log_a x$$

"logaritmo na base a de x"

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$



Como $a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$

$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$.

Propriedades dos logaritmos

Seja $x, y > 0$. Então

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

(2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

(3) se $r \in \mathbb{R}$ é qualquer,

$$\log_a x^r = r \log_a x.$$

Ex $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5}$

$= \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2$

$= 4 \cdot 1 = 4$.

Logaritmo natural

se $a = e$, então

temos $y = e^x$

cuja inversa é

$$y = \log_e x = \ln x.$$

" logaritmo natural de x "

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y.$$

Exercício Encontre x tal que

$$\ln x = 5.$$

Solução Tomando a exponencial na base e dos dois lados da equação, temos

$$x = e^5.$$

Mudança de base $\forall\, a > 0$ e $a \neq 1$, temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Prova Seja

$$y = \log_a x$$

então

$$a^y = x.$$

Logo

$$\ln a^y = \ln x \Rightarrow y \ln a = \ln x,$$

portanto,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad \square$$

Exercício Encontre o valor da expressão.

(a) $\log_5 125$. (b) $\log_3 \frac{1}{27}$.

Exercício Resolva cada equação para x.

(a) $2 \ln x = 1$.

(b) $e^{2x+3} - 7 = 0$.

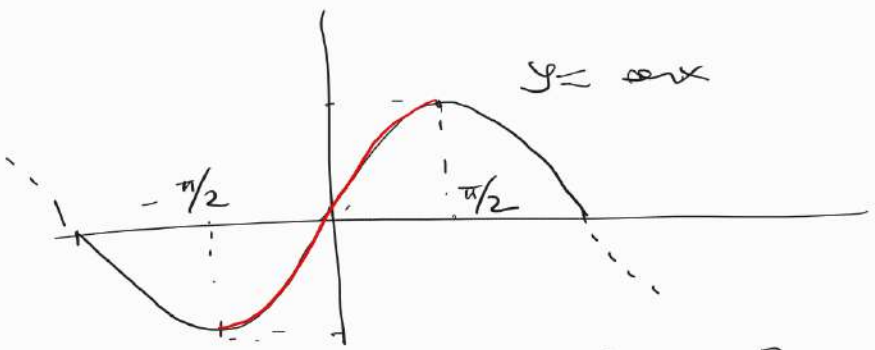
(c) $2^{x-5} = 3$.

<u>Exercício</u>. Determine de f e de f^{-1}.

(a) $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$.

(b) $f(x) = \ln(2 + \ln x)$.

<u>Funções trigonométricas Inversas</u>

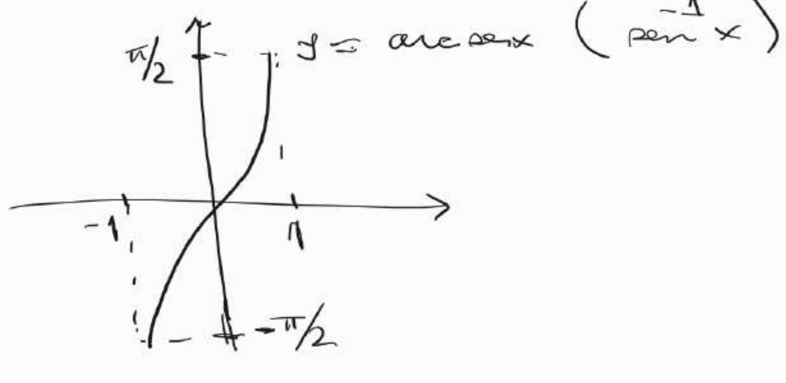


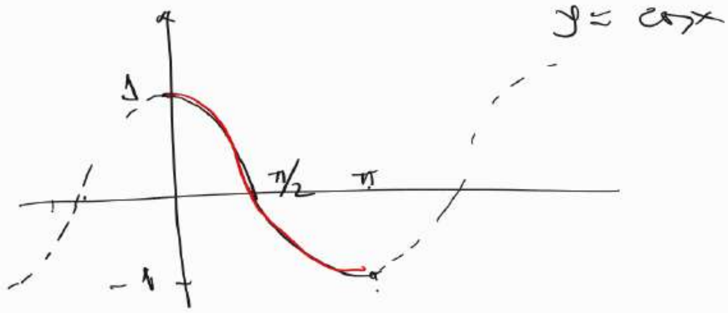
$f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$

é bijetiva. Sua inversa

$f^{-1} [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$



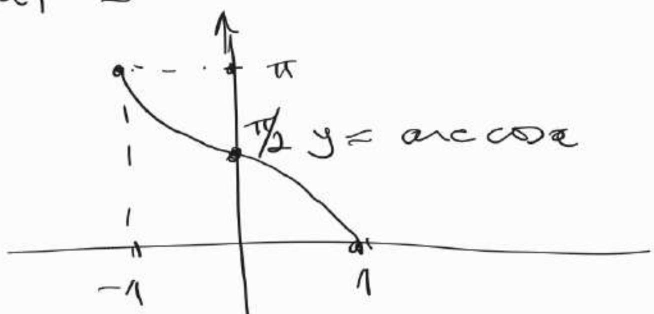


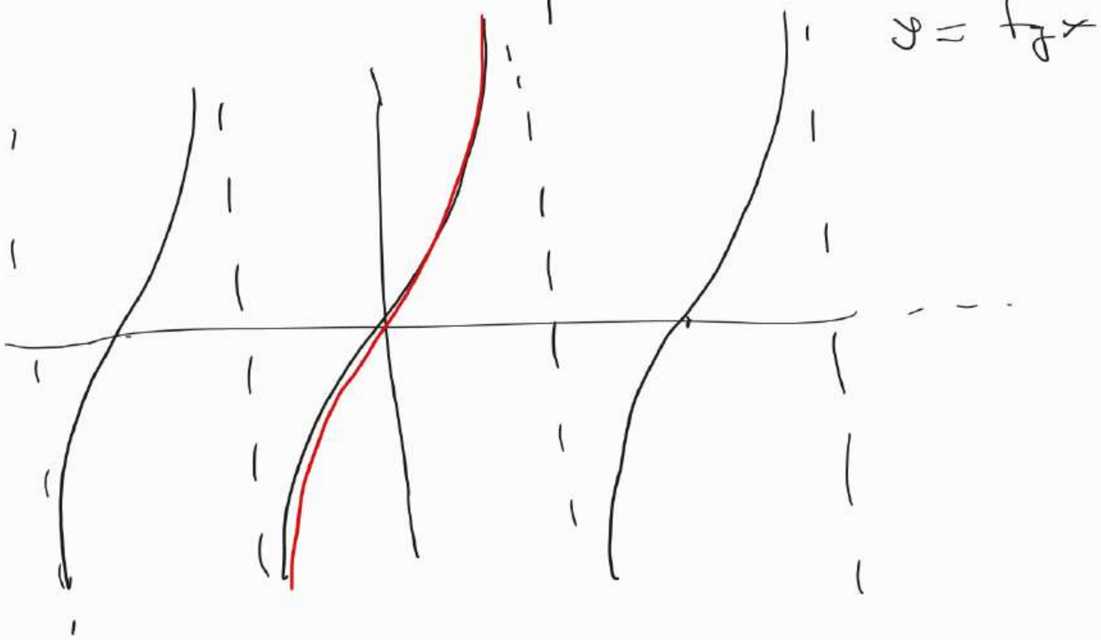
$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$

tem inversa

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi] ,$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x \quad (= \cos^{-1} x)$$

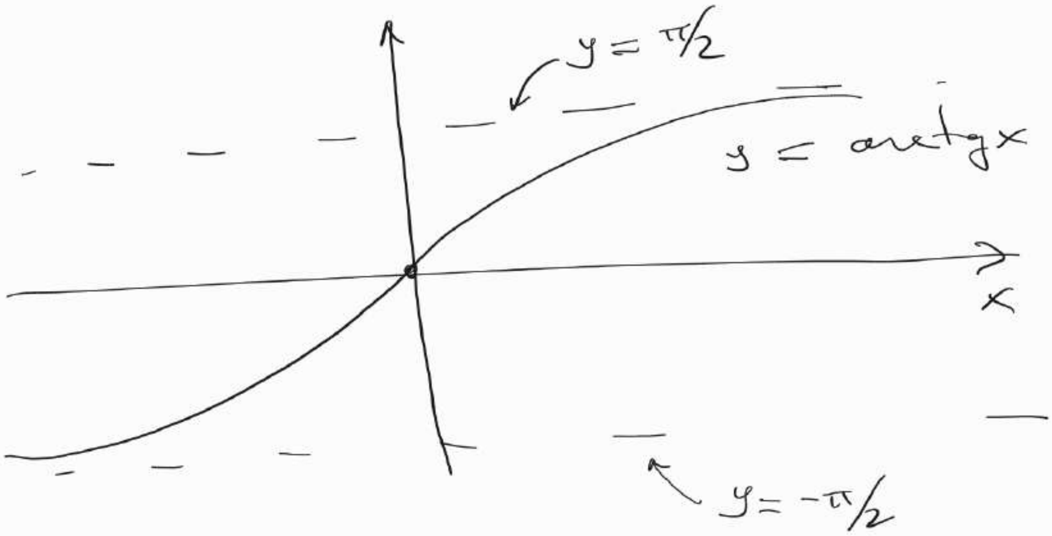




$f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

tem inversa

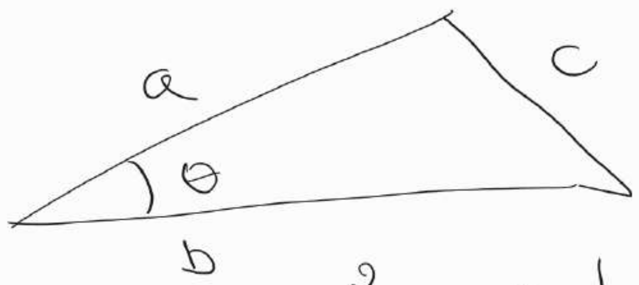
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2) .$$



Obs: valores de seno e cosseno para alguns valores de ângulos:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$	0	-1

Lei dos Cossenos



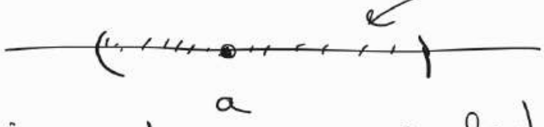
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

FIM DA REVISÃO

Limites

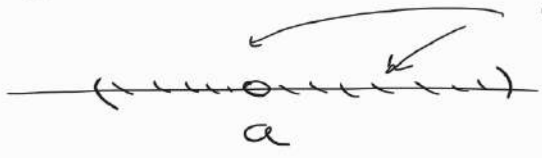
Uma vizinhança de um ponto a é um intervalo aberto contendo a.

vizinhança de a



Uma vizinhança deletada de a é uma vizinhança de a menos o ponto a.

vizinhança deletada de a.



Dada uma função f definida numa vizinhança deletada de a, podemos perguntar o que acontece com f(x) à medida em que x se aproxima de a. Será que existe um número real L tal que f(x) fique tão próximo de L quanto quisermos quando x fica suficientemente próximo de a (mas diferente de a)?

Por exemplo, seja

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Embora f não esteja definida em $x=1$, será que existe um número real L, tal que f(x) fique tão próximo de L quanto quisermos se tomarmos x, suficientemente próximo de $x=1$, porém diferente de 1?

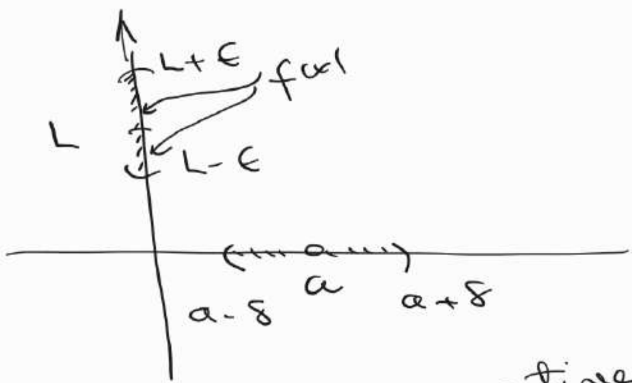
Com isto temos o conceito de limite que será dado a seguir.

Note que no exemplo acima tem duas noções de proximidades: falamos em x próximo de $x = a$ e $f(x)$ próxima de L. Tais proximidades serão medidas usando-se dois números reais positivos, δ e ε.

<u>Def</u> Seja f definida numa vizinhança de $x = a$. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

onde L é um número real, se $\forall \varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.



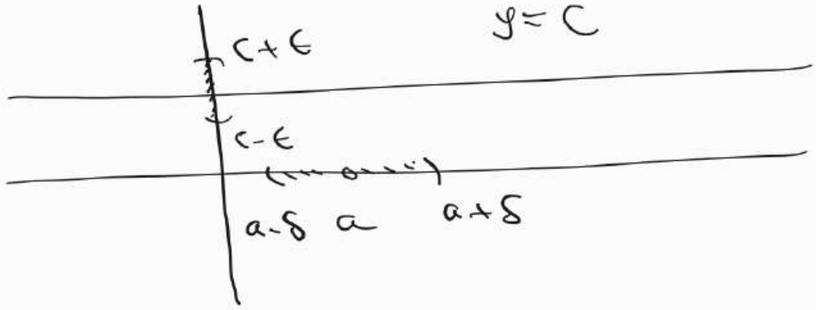
sempre que x estiver em $(a-\delta, a) \cup (a, a+\varepsilon)$, temos $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

<u>Ex</u> Seja $f(x) = c$, onde c é uma constante. Mostraremos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = c.$$

<u>Solução</u> Dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Então tome $\delta > 0$ qualquer. Se $0 < |x-a| < \delta$, temos $|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = c.$$



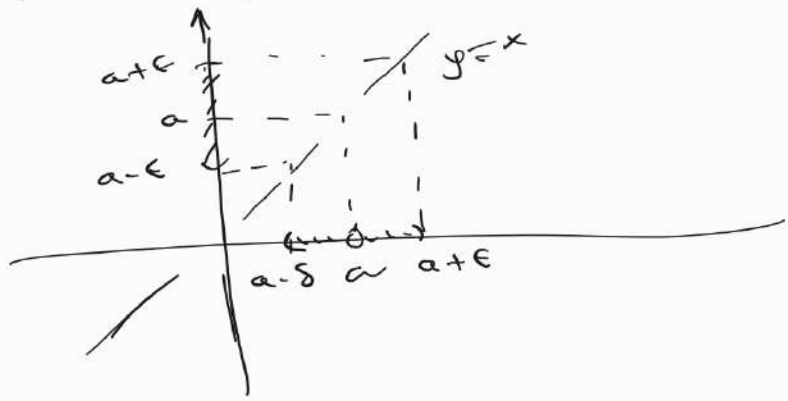
__Ex__ Seja $f(x) = x$, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = a.$$

__Solução__ Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$.

Se $0 < |x-a| < \delta$, temos

$$|f(x) - a| = |x-a| < \delta = \epsilon.$$



Portanto,

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Em geral, é difícil calcularmos limites diretamente a partir da definição, ao invés disso usamos as propriedades de limites.

Propriedades dos limites

Seja c uma constante e suponha que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

Então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$.

3. $\lim_{x \to a} [c\, f(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$.

4. $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

A seguir, veremos como a partir destas propriedades podemos obter limites de funções mais complicadas a partir de limites de funções mais simples.

<u>Ex</u> Vimos que

$$\lim_{x \to a} x = a$$

logo,

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} [x \cdot x]$$

propriedade 4

$$= \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a$$

$$= a^2.$$

Da propriedade 4, se $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ forem funções definidas numa vizinhança deletada de $x = a$ e

$$\lim_{x\to a} f_1(x), \ldots, \lim_{x\to a} f_n(x)$$

existirem, então

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdots f_n(a)] = [\lim_{x\to a} f_1(x)]\cdots[\lim_{x\to a} f_n(x)] \quad (5)$$

Como $x^n = \underbrace{x \ldots x}_{n \text{ fatores}}$,

então

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n. \quad (6)$$

Além disso, combinando (1), (3) e 5, se $c_1, \ldots, c_n$ forem constantes,

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to a}[c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)] \\ &= c_1 \lim_{x\to a} f_1(x) + \cdots + c_n \lim_{x\to a} f_n(x)\end{aligned}} \quad (7)$$

De (6) e (7), se

$$P(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

então

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x\to a} P(x) &= b_n a^n + \cdots + b_1 a + b_0 \\ &= P(a).\end{aligned}} \quad (8)$$

De (8) e da propriedade (5), se $P(x)$ e $Q(x)$ forem polinômios e $Q(a) \neq 0$, então

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.}$$

<u>Ex</u> $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ existe?

<u>solução</u> note que

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)},$$

portanto, para $x \neq 1$, tem

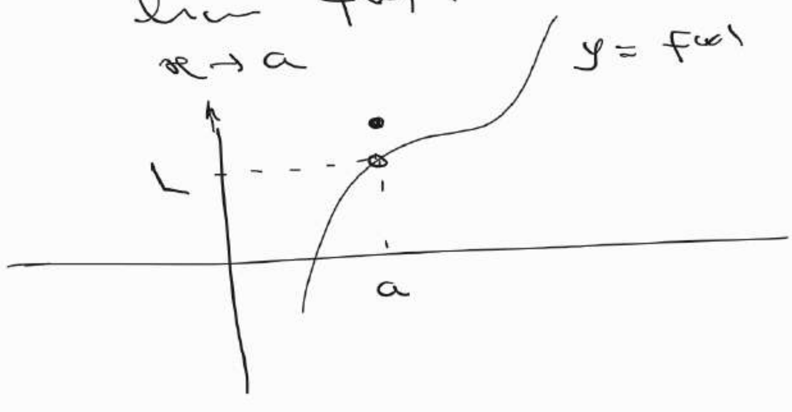
$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$$

logo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

É interessante ressaltar que mesmo que f esteja definida para $x = a$, o valor de f neste ponto é irrelevante no que diz respeito ao

$$\lim_{x \to a} f(x).$$



Na figura acima, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e este limite não mudaria se mudarmos o valor de f em $x = a$.

Se $\lim_{x\to a} f_1(x), \ldots, \lim_{x\to a} f_n(x)$ existirem, segue da propriedade 4 que

$$\boxed{\lim_{x\to a} [f_1(x) \cdots f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdots \lim_{x\to a} f_n(x)}$$

Em particular, se $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = f(x)$, então

$$\boxed{\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n}.$$

Se n for inteiro positivo,

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

(se n for par, supomos $a > 0$).

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Então

$$\boxed{\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}}$$

(se n for par, vamos supor que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$)

Ex Calcule

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}.$$

Vimos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}>0.$$

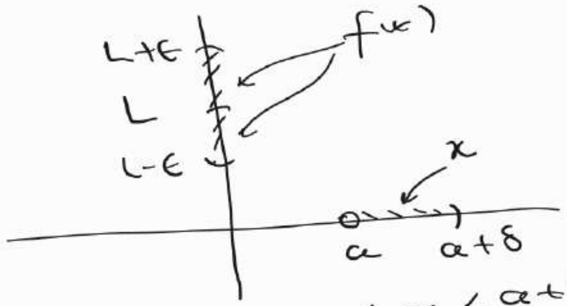
Portanto,

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Limites laterais

• limite lateral de f à direita de $x=a$.

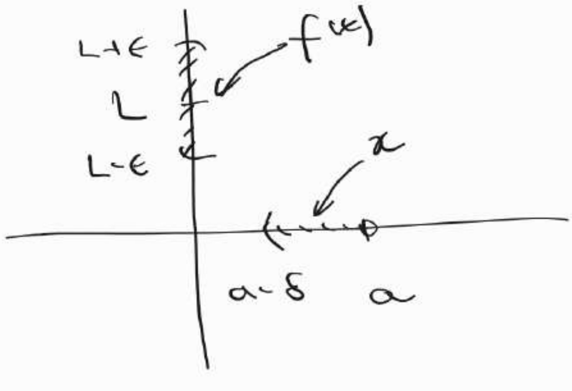
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$



$\forall \epsilon>0\ \exists\ \delta>0$ tal que se $a<x<a+\delta$,
$|f(x)-L|<\epsilon$.

• limite lateral à esquerda

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$



$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $a - \delta < x < a$ então

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

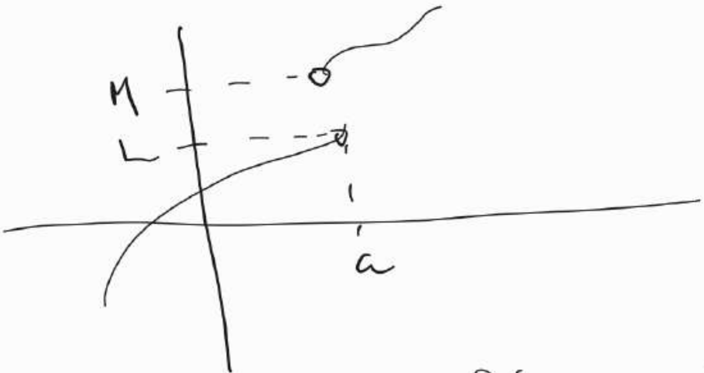
<u>Exercício</u> Seja f definida numa vizinhança deletada de $x = a$. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

<u>Ex</u>



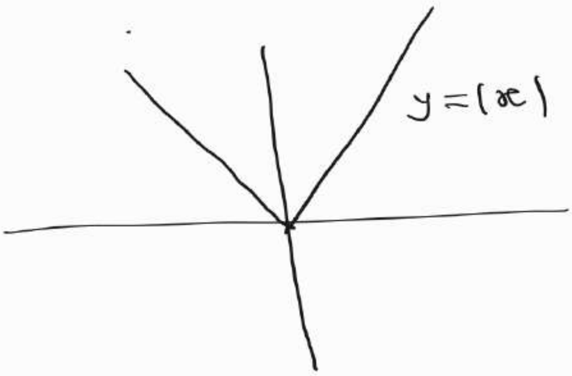
$L \neq M$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = M$$

como $M \neq L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

<u>Ex</u> Seja $f(x) = |x|$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$



<u>Solução</u>

Note que

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

polinômio

Então

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} (x) = \lim_{x \to 0} (x)$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} x = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

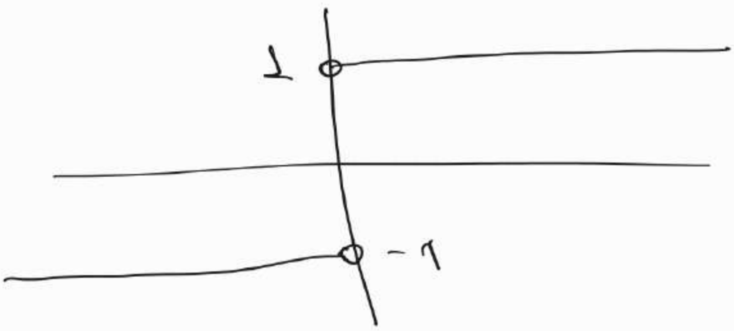
<u>Ex</u> Mostre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \text{ não existe.}$$

<u>Solução</u> Note que

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$y = \frac{|x|}{x}$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = \lim_{x\to 0} (-1) = -1.$$

Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, então

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

<u>Teorema</u> Se $f(x) \le g(x)$ numa vizinhança deletada de a. se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existirem,

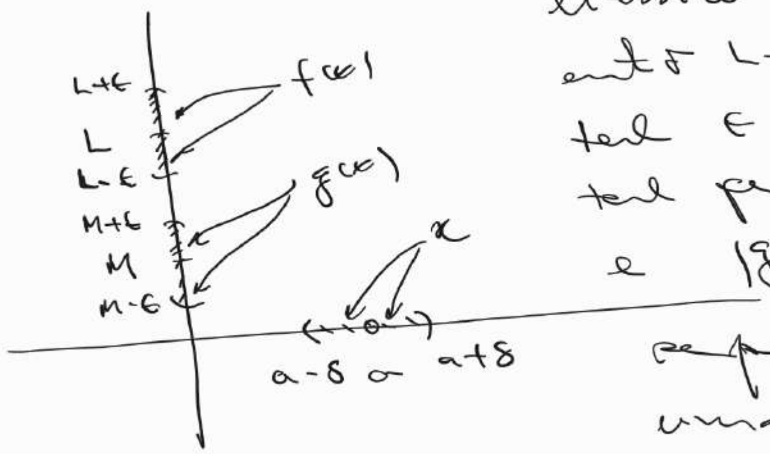
então $$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

<u>Prova</u> Seja

$L = \lim_{x\to a} f(x)$ e $M = \lim_{x\to a} g(x)$.

Mostraremos que não podemos ter $L > M$.

De fato, se $L > M$, na definição de limite tome $\epsilon = \frac{L+M}{4}$, para então $L-\epsilon > M+\epsilon$. existe $\delta > 0$ tal ϵ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - M| < \epsilon$, ~~para~~ para que $0 < |x-a| < \delta$. uma contradição, pois $f(x) \le g(x)$. $\boxminus$



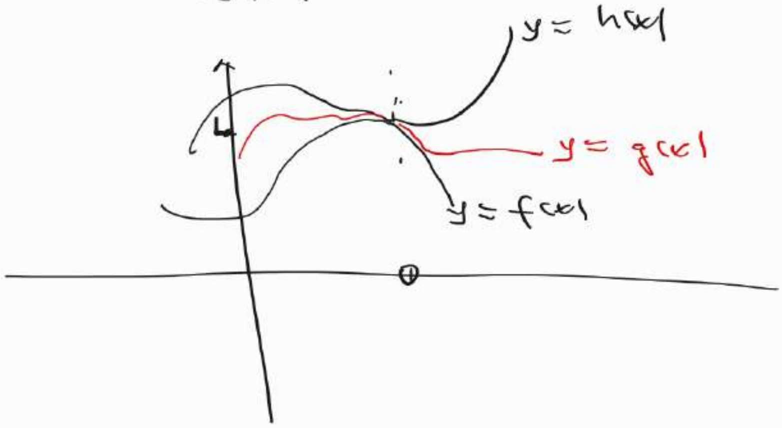
Teorema do confronto (sandwich)

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ numa vizinhança deletada de $x = a$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



Exercício Mostre que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

se, e somente se

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0.$$

Ex Mostre que

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Solução

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| = |x| \overbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right|}^{\leq 1} \leq |x|.$$

Portanto

$$\underbrace{0}_{f(x)} \le \underbrace{\left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|}_{g(x)} \le \underbrace{|x|}_{h(x)} \quad , \quad x \neq 0$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

então, pelo Teorema do confronto,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| = 0$$

e do exercício anterior, concluímos que

$$\lim_{x\to 0} \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0 .$$

Exercício Calcule o limite se existir.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} (5x^2 - 2x + 3)$, (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$, (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$, (f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x+6}{x-2}$,

(g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$, (h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$,

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$, (j) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$,

(k) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$, (l) $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+t} \right)$

Exercício Se $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ $\forall x$, calcule $\lim_{x \to 1} g(x)$.

Exercício Mostre que

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0.$$

Ex Mostre que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

onde L é real. Então existem constantes positivas δ e K tais que se $0 < |x-a| < \delta$, então

$$|f(x)| \leq K.$$

Prova Na definição de limite, tome $\epsilon = 1$, então existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon = 1$. Portanto, da desigualdade triangular,

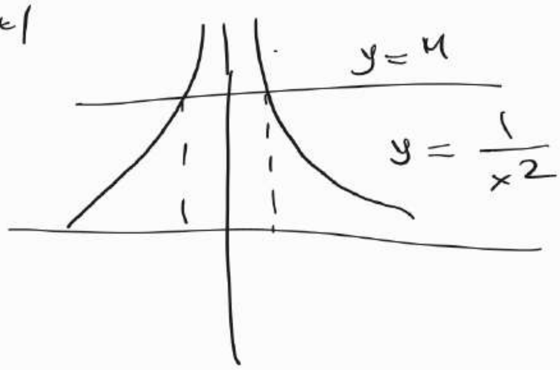
$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L|$$

$$\leq 1 + |L| = K.$$

deste resultado, se f ficar ilimitada quando x se aproxima de a, então

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

não existirá.



Por exemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

não existe (como um número real).