Cálculo Diferencial e Integral I

Professor: Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

6 de novembro de 2019

Substituição Trigonométrica

- Para encontrar a área de um círculo ou elipse, devemos calcular uma integral da forma

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \text{com} \quad a > 0.$$

Substituição Trigonométrica

- Para encontrar a área de um círculo ou elipse, devemos calcular uma integral da forma

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \text{com} \quad a > 0.$$

- Se fizermos a mudança de variável de x para θ pela substituição $x = asen\theta$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2sen^2\theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} \\ &= \sqrt{a^2cos^2\theta} \\ &= a|cos\theta| \end{aligned}$$

Substituição Trigonométrica

- Para encontrar a área de um círculo ou elipse, devemos calcular uma integral da forma

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \text{com} \quad a > 0.$$

- Se fizermos a mudança de variável de x para θ pela substituição $x = asen\theta$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2sen^2\theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} \\ &= \sqrt{a^2cos^2\theta} \\ &= a|cos\theta|\end{aligned}$$

- Observe que na substituição $x = asen\theta$, a variável antiga x é uma função da nova variável u.

Substituição Trigonométrica

- Em geral, pode-se fazer uma substituição da forma $x = g(t)$ usando a Regra da Substituição em sentido contrário. Nesse caso, a regra de substituição nos dá: ´

$$\int f(x)dx = \int f(\underbrace{g(t)}_{x})\underbrace{g'(t)dt}_{dx}.$$

Substituição Trigonométrica

- A seguinte tabela indicam expressões que podem ser objeto de mudança de variáveis definida por função trigonométrica:

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\text{sen}\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sen^2\theta = cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = atg\theta\ , -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tg^2\theta = sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = asec\theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\text{ou}\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$sec^2\theta - 1 = tg^2\theta$

Substituição Trigonométrica

- A seguinte tabela indicam expressões que podem ser objeto de mudança de variáveis definida por função trigonométrica:

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\text{sen}\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sen^2\theta = cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = atg\theta\ , -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tg^2\theta = sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = asec\theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\text{ou}\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$sec^2\theta - 1 = tg^2\theta$

- Aplicando essas substituições, obtemos:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\theta)} = a\sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2\theta)} = a\sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\sqrt{\tan^2\theta} = |\tan\theta|$$

Substituição Trigonométrica

- **Exemplo.** Calcule $\int \sqrt{9 - x^2}dx$.

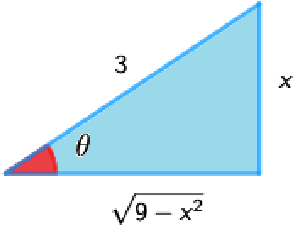
Substituição Trigonométrica

- **Exemplo.** Calcule $\int \sqrt{9-x^2}dx$.
- **Solução.** Fazendo $x = 3\ \text{sen}\theta \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, temos $dx = 3\ \cos\theta\ d\theta$. Observe que, nesse intervalo, $\cos\theta > 0$ e, portanto, $|\cos\theta| = \cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9-x^2}dx &= \int \sqrt{9-(3\text{sen}\theta)^2}\ 3\ \cos\theta\ d\theta \\
&= \int \sqrt{9(1-\text{sen}^2\theta)}\ 3\ \cos\theta\ d\theta \\
&= \int 9\sqrt{\cos^2\theta}\ \cos\theta\ d\theta \\
&= 9\int |\cos\theta|\cos\theta \quad d\theta = 9\int \cos^2\theta \quad d\theta \\
&= 9\int \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{9\ \theta}{2} + \frac{9\ \text{sen}\ 2\theta}{4} + C
\end{aligned}$$

Substituição Trigonométrica

- **Solução (continuação).**



lembre-se que sen $2\theta = 2\text{sen}\ \theta \cos\ \theta$, $\theta = \text{arcsen} x$ e pela figura acima, $\cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$. Portanto,

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \frac{9\ \text{arcsen} x}{2} + \frac{x\ \sqrt{9-x^2}}{2} + C.$$

Substituição Trigonométrica

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}dx$.
- **Solução.** Veja que

$$(4x^2+9)^{3/2} = \sqrt{(4x^2+9)^3} = \left(\sqrt{4\left(x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}\right)^3$$

Fazendo $x = \dfrac{3}{2}\text{tg}\theta$, temos que $dx = \dfrac{3}{2}\sec^2\theta d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9(\text{tg}^2+1)} = 3\ \sec\theta.$$

Temos ainda, que para $x = 0$, então $\theta = 0$.
E para $x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Substituição Trigonométrica

- **Solução (continuação).**
  Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\text{tg}^3\theta}{27\sec^3}\frac{3}{2}\sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{tg}^3\theta}{\sec\theta}d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\text{sen}\theta d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\text{sen}\theta d\theta
\end{aligned}$$

  Fazendo $u = \cos\theta$, logo $du = -\text{sen}\,\theta d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$ e quando $\theta = \pi/3$, $u = 1/2$.

Substituição Trigonométrica

- **Solução (continuação).**

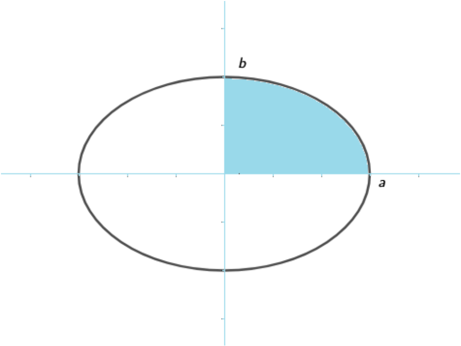
$$
\begin{aligned}
\frac{3}{16}\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta &= -\frac{3}{16}\int_1^{1/2}\frac{1-u^2}{u^2}du \\
&= -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} u^{-2}-1du \\
&= -\frac{3}{16}\left[-\frac{1}{u}-u\right]_1^{1/2} \\
&= -\frac{3}{16}\left[\left(-2-\frac{1}{2}\right)-(-1-1)\right] \\
&= \frac{3}{32}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{3}{32}.
$$

Substituição Trigonométrica

- **Exemplo.** Encontre a área limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
- **Solução.** Pela figura abaixo, vemos que basta calcularmos a área da figura em destaque e multiplicá-la por 4.



Substituição Trigonométrica

- **Solução (continuação).** Ou seja, vamos calcular a área abaixo do gráfico
$$y = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}, \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq a,$$
e multiplicá-la por 4. Assim, a área da elipse é
$$A = 4\int_0^a \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}dx = 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1 - \frac{a^2\ \text{sen}^2\theta}{a^2}}\ a\cos\theta d\theta,$$
onde fizemos a mudança de variáveis $x = a\ \text{sen}\theta$, de forma que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Substituição Trigonométrica

- **Solução (continuação).** Temos:

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1-\frac{a^2\ \text{sen}^2\theta}{a^2}}\ a\cos\theta d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\text{sen}^2\theta}\cos\theta d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta \\
&= 4ab\left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4ab\left[\frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.
\end{aligned}$$

Substituição Trigonométrica

- **Exemplo.** Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $4x^2 + y^2 \leq 1$.
- **Solução.** Veja que

$$4x^2 + y^2 = \frac{x^2}{(1/2)^2} + y^2.$$

Denotamos, como no exemplo anterior, $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 1$. Assim, a área desejada é de $\dfrac{\pi}{2}$.