Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 8: Derivadas

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

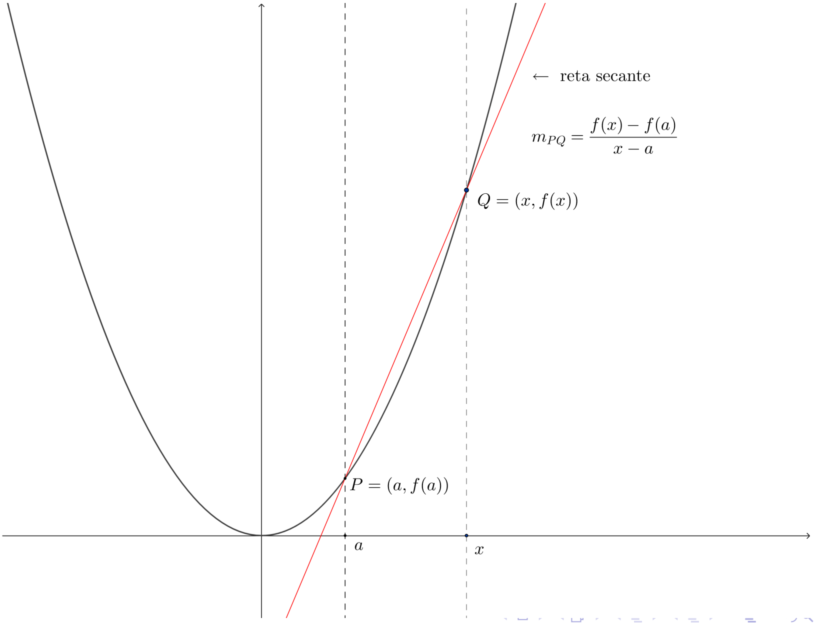
1º semestre /2020

Retas secantes

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, onde I é intervalo. Fixe $a \in I$. A **reta secante** que passa pelos pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (x, f(x))$, com $x \neq a$, tem inclinação

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Retas secantes



Retas tangentes

- Caso essas retas secantes tenham uma reta limite quando x se aproxima de a, essa reta limite é chamada de **reta tangente** ao gráfico de f.
  Isso equivale a pedir que as inclinações $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tenham um limite m quando x se aproxima de a.

Retas tangentes

- Caso essas retas secantes tenham uma reta limite quando x se aproxima de a, essa reta limite é chamada de **reta tangente** ao gráfico de f.
  Isso equivale a pedir que as inclinações $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tenham um limite m quando x se aproxima de a.
- Temos então:

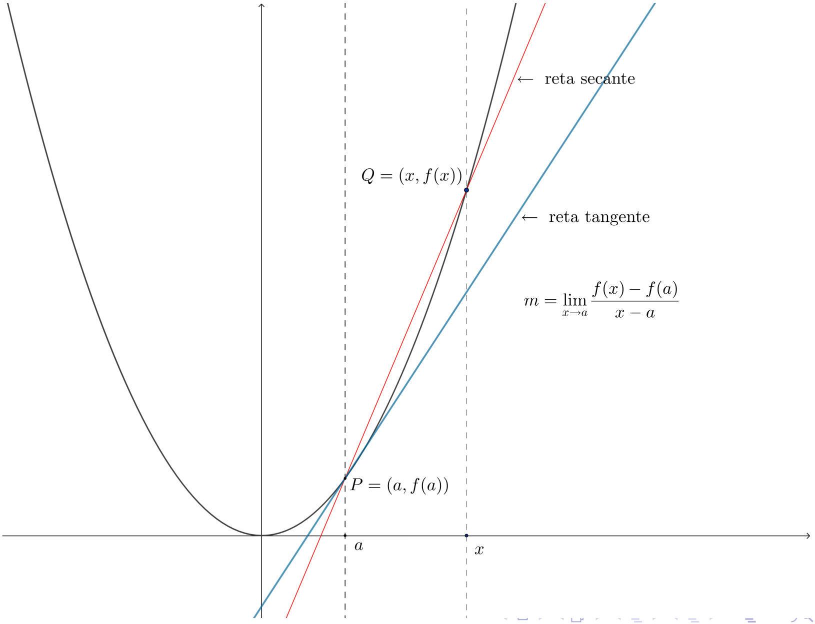
Definição

A reta tangente *ao gráfico $y = f(x)$ no ponto $P = (a, f(a))$ é a reta que passa por P com inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que o limite exista).

Retas tangentes



Retas tangentes

- **Exemplo.** Reta tangente a $y = x^2$ no ponto $P = (1, 1)$.

Retas tangentes

- **Exemplo.** Reta tangente a $y = x^2$ no ponto $P = (1, 1)$.
- **Solução.** Neste caso, temos $a = 1$ e $f(x) = x^2$. Logo, a inclinação da reta tangente é

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Portanto, a equação da reta tangente é dada por

$$y - f(a) = m(x - a) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1.$$

Retas tangentes

- **Exemplo.** Reta tangente a $y = 1/x$ no ponto $P = (1, 1)$.

Retas tangentes

- **Exemplo.** Reta tangente a $y = 1/x$ no ponto $P = (1, 1)$.
- **Solução.** Como no exemplo anterior, agora com $f(x) = 1/x$, calculamos a inclinação da reta tangente:

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{1-x}{x}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1 - x}{-x(1 - x)} = \lim_{x\to1} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$y - f(a) = m(x - a) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -1(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x.$$

Velocidade

- Suponha que $f(t)$ descreva a posição em função do tempo de uma partícula se deslocando em uma reta. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ (correspondendo a uma variação no tempo igual a $h \neq 0$), a variação da posição será de $f(a+h) - f(a)$. A **velocidade média** dessa partícula nesse intervalo será

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Velocidade

- Suponha que $f(t)$ descreva a posição em função do tempo de uma partícula se deslocando em uma reta. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ (correspondendo a uma variação no tempo igual a $h \neq 0$), a variação da posição será de $f(a+h) - f(a)$. A **velocidade média** dessa partícula nesse intervalo será

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- A **velocidade instantânea** dessa partícula em $t = a$ é o limite dessas velocidades médias quando o comprimento h do intervalo de tempo tende a zero:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(caso o limite exista).

Velocidade

- Suponha que $f(t)$ descreva a posição em função do tempo de uma partícula se deslocando em uma reta. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ (correspondendo a uma variação no tempo igual a $h \neq 0$), a variação da posição será de $f(a+h) - f(a)$. A **velocidade média** dessa partícula nesse intervalo será
$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
- A **velocidade instantânea** dessa partícula em $t = a$ é o limite dessas velocidades médias quando o comprimento h do intervalo de tempo tende a zero:
$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
(caso o limite exista).
- Fazendo $t = a + h$ ($\Rightarrow h = t - a$), podemos também escrever esse limite como
$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$
Assim, a velocidade instantânea coincide com a inclinação da reta tangente ao gráfico $y = f(t)$ da função deslocamento.

Derivadas

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

Definição

A derivada *de f no ponto $a \in I$ é o número*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

caso o limite exista.

Nesse caso, dizemos que f é **derivável** ou **diferenciável** em $x = a$.

Derivadas

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

Definição

A derivada *de f no ponto $a \in I$ é o número*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

caso o limite exista.

Nesse caso, dizemos que f é **derivável** ou **diferenciável** em $x = a$.

- Também usamos as seguinte notações:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{dy}{dx}(a).$$

Derivadas

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

Definição

A derivada *de f no ponto $a \in I$ é o número*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

caso o limite exista.

Nesse caso, dizemos que f é **derivável** ou **diferenciável** em $x = a$.

- Também usamos as seguinte notações:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{dy}{dx}(a).$$

- Note que, fazendo $h = x - a$, podemos também calcular a derivada da seguinte maneira:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Derivadas

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

Definição

A derivada *de f no ponto $a \in I$ é o número*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

caso o limite exista.

Nesse caso, dizemos que f é **derivável** ou **diferenciável** em $x = a$.

- Também usamos as seguinte notações:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{dy}{dx}(a).$$

- Note que, fazendo $h = x - a$, podemos também calcular a derivada da seguinte maneira:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Interpretação geométrica para a derivada: $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

Derivadas

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x = a$.

Derivadas

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x = a$.
- **Solução.** Por definição, esta derivada é o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x + a) = a + a = 2a.$$

Logo,

$$f'(a) = 2a.$$

Derivadas

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $f(x) = 1/x$ no ponto $x = a$.

Derivadas

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $f(x) = 1/x$ no ponto $x = a$.
- **Solução.** Novamente, temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{a-x}{ax}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{a - x}{-ax(a - x)} = \lim_{x \to a} \left(-\frac{1}{ax} \right) = -\frac{1}{a^2}.$$

Logo,

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

Derivadas

- **Exemplo.** $f(x) = |x|$ é diferenciável em $x = 0$?

Derivadas

- **Exemplo.** $f(x) = |x|$ é diferenciável em $x = 0$?
- **Solução.** Não. De fato, temos

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

Logo, não existe $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ e, portanto, $f(x)$ não é diferenciável em $x = 0$.

Taxas de variação

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, descrevendo a variável y como função da variável x. Fixe $a \in I$. A cada **incremento** na variável x

$$\Delta x = x - a \quad (\text{com } \Delta x \neq 0)$$

corresponde um **incremento** na variável y,

$$\Delta y = f(x) - f(a).$$

Taxas de variação

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, descrevendo a variável y como função da variável x. Fixe $a \in I$. A cada **incremento** na variável x

$$\Delta x = x - a \quad (\text{com } \Delta x \neq 0)$$

corresponde um **incremento** na variável y,

$$\Delta y = f(x) - f(a).$$

- A razão entre esses incrementos é chamada de taxa de variação média:

$$\text{taxa de variação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Taxas de variação

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, descrevendo a variável y como função da variável x. Fixe $a \in I$. A cada **incremento** na variável x

$$\Delta x = x - a \quad (\text{com } \Delta x \neq 0)$$

corresponde um **incremento** na variável y,

$$\Delta y = f(x) - f(a).$$

- A razão entre esses incrementos é chamada de taxa de variação média:

$$\text{taxa de variação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- A taxa de variação média corresponde:
  - à inclinação da reta secante ao gráfico de $f(x)$ que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, com $x \neq a$;
  - à velocidade média, quando f é a função deslocamento, em relação ao tempo x, de uma partícula se movendo em uma reta.

Taxas de variação

- A **taxa de variação instantânea** de uma função $f(x)$ em $x = a$ é o limite das taxas de variação média quando $\Delta x \to 0$ (ou seja, quando $x \to a$):

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que o limite exista).

Taxas de variação

- A **taxa de variação instantânea** de uma função $f(x)$ em $x = a$ é o limite das taxas de variação média quando $\Delta x \to 0$ (ou seja, quando $x \to a$):

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  (desde que o limite exista).
- A taxa de variação instantânea é igual à derivada $f'(a) = \dfrac{df}{dx}(a)$

Taxas de variação

- A **taxa de variação instantânea** de uma função $f(x)$ em $x = a$ é o limite das taxas de variação média quando $\Delta x \to 0$ (ou seja, quando $x \to a$):

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  (desde que o limite exista).
- A taxa de variação instantânea é igual à derivada $f'(a) = \dfrac{df}{dx}(a)$
- A taxa de variação instantânea corresponde:
  - à inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(a, f(a))$;
  - à velocidade instantânea, quando f é a função deslocamento, em relação ao tempo x, de uma partícula se movendo em uma reta.

Derivada e continuidade

Proposição

Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a

Derivada e continuidade

Proposição

Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a

Demonstração.

Para $x \neq a$, temos $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$. Logo

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Portanto

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

o que equivale a dizer que f é contínua em a. □

Derivada e continuidade

Proposição

Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a

Demonstração.

Para $x \neq a$, temos $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$. Logo

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Portanto

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

o que equivale a dizer que f é contínua em a. □

- A recíproca desse resultado não é verdadeira: uma função $f(x)$ contínua em $x = a$ pode não ser diferenciável nesse ponto. Esse é o caso, por exemplo, de $f(x) = |x|$ em $x = 0$.

A função derivada

- A função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **derivável** ou **diferenciável** se existir a derivada $f'(a)$ para todo $a \in I$. Nesse caso, temos uma nova função $f' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a **função derivada**, definida como

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

A função derivada

- A função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **derivável** ou **diferenciável** se existir a derivada $f'(a)$ para todo $a \in I$. Nesse caso, temos uma nova função $f' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a **função derivada**, definida como

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Segue da proposição anterior que uma função diferenciável é contínua.

A função derivada

- **Exemplo.** Pelos exemplos anteriores, temos:
  - $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
  - $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$.

A função derivada

- **Exemplo.** Encontre $f'(x)$ para $f(x) = x^3$.

A função derivada

- **Exemplo.** Encontre $f'(x)$ para $f(x) = x^3$.
- **Solução.** Calculamos o seguinte limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$

Logo,

$$f'(x) = 3x^2.$$

A função derivada

- **Exemplo.** Encontre $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$.

A função derivada

- **Exemplo.** Encontre $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$.
- Calculamos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} . \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right)$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivadas de ordem superior

- Se a função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável, podemos perguntar se a função derivada $f' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é derivável. Em caso afirmativo, sua derivada é a **derivada segunda** de f.
  Ela é denotada por

$$f''(x) \quad \rightsquigarrow \quad \text{que corresponde a } (f'(x))'$$

  ou por

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \quad \rightsquigarrow \quad \text{que corresponde a } \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) .$$

Derivadas de ordem superior

- **Exemplo.** Encontre $f''(x)$ para $f(x) = x^3$

Derivadas de ordem superior

- **Exemplo.** Encontre $f''(x)$ para $f(x) = x^3$
- **Solução.** Queremos calcular $(f'(x))'$, onde $f'(x) = 3x^2$ é a função derivada, que já calculamos. Temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{3x^2 - 3a^2}{x - a} = 3. \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 3(2a) = 6a.$$

Logo,

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2)' = 6x.$$

Derivadas de ordem superior

- De modo similar, podemos definir, caso existam, as **derivadas de ordem superior** de f. Elas são denotadas por

$$f'''(x) = f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x), \dots,\ f^{(n)}(x), \dots$$

ou por

$$\frac{d^3 f}{dx^3}(x),\ \frac{d^4 f}{dx^4}(x), \dots, \frac{d^n f}{dx^n}(x), \dots.$$

São definidas de forma recursiva, fazendo

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x)\right).$$

Derivadas de ordem superior

- **Exemplo.** Encontre $f'''(x)$ para $f(x) = x^3$

Derivadas de ordem superior

- **Exemplo.** Encontre $f'''(x)$ para $f(x) = x^3$
- **Solução.** Queremos calcular agora $f'''(x) = (f''(x))' = (6x)'$. Assim, pela definição de derivada,

$$\lim_{x \to a} \frac{f''(x) - f''(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{6x - 6a}{x - a} = 6. \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 6. \lim_{x \to a} 1 = 6.1 = 6.$$

Portanto,

$$f'''(x) = 6.$$