Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 32: Integração por frações parciais

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Frações parciais

- Considere a identidade:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Frações parciais

- Considere a identidade:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

- Poderíamos usá-la para calcular $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ da seguinte forma:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) = 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + c.$$

Frações parciais

- Considere a identidade:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

- Poderíamos usá-la para calcular $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ da seguinte forma:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) = 2 \ln |x-1| - \ln |x+2| + c.$$

- A ideia por trás desse exemplo pode ser usada para calcular integrais do tipo

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx,$$

onde $f(x)$ e $g(X)$ são polinômios.

Divisão de polinômios

- Dados $f(x)$ e $g(x)$ polinômios, com $g(x) \neq 0$. Então, existem únicos polinômios $q(x)$ (o **quociente**) e $r(x)$ (o **resto**), com $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(g(x))$ ou $r(x) = 0$, tais que

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Divisão de polinômios

- Dados $f(x)$ e $g(x)$ polinômios, com $g(x) \neq 0$. Então, existem únicos polinômios $q(x)$ (o **quociente**) e $r(x)$ (o **resto**), com $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(g(x))$ ou $r(x) = 0$, tais que

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

  ou, equivalentemente,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

- Observe que, no lado direito, temos uma soma envolvendo o polinômio $q(x)$ e a função racional $r(x)/g(x)$, cujo grau do numerador é **menor** que o grau do denominador.

Divisão de polinômios

- Dados $f(x)$ e $g(x)$ polinômios, com $g(x) \neq 0$. Então, existem únicos polinômios $q(x)$ (o **quociente**) e $r(x)$ (o **resto**), com $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(g(x))$ ou $r(x) = 0$, tais que

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

- Observe que, no lado direito, temos uma soma envolvendo o polinômio $q(x)$ e a função racional $r(x)/g(x)$, cujo grau do numerador é **menor** que o grau do denominador.
- **Exemplo.** Divida os polinômios $\dfrac{x^3 + x}{x - 1}$.

Frações parciais

- Para calcular uma integral do tipo $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios, o primeiro passo é proceder a divisão de $f(x)$ por $g(x)$, no caso em que $\mathrm{grau}(f(x)) \geq \mathrm{grau}(g(x))$.

Frações parciais

- Para calcular uma integral do tipo $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios, o primeiro passo é proceder a divisão de $f(x)$ por $g(x)$, no caso em que grau$(f(x)) \geq$ grau$(g(x))$.
- Assim
$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx.$$
Do lado direito, aparece a integral de uma função polinomial (que é simples) e uma integral de uma função racional tal que o grau do numerador é menor que o grau do denominador. A seguir, vamos descrever como calcular integrais desse último tipo.

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$

  Cálculo: Dividindo o numerador pelo denominador:

$$\frac{x^3+x}{x-1} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}.$$

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$

  Cálculo: Dividindo o numerador pelo denominador:

  $$\frac{x^3+x}{x-1} = x^2+x+2+\frac{2}{x-1}.$$

  Assim,

  $$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x}{x-1}dx &= \int (x^2+x+2)dx + \int \frac{2}{x-1}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+2\ln|x-1|+c.\end{aligned}$$

Fatoração de polinômios

- Lembramos o seguinte resultado sobre a **fatoração de polinômios**:

Teorema

Todo polinômio $p(x)$ se fatora como um produto de fatores lineares e quadráticos. Ou seja, podemos escrever

$$p(x) = L_1(x) \cdots L_k(x) Q_1(x) \cdots Q_\ell(x),$$

onde, para todos i e j,

$$L_i(x) = r_i x + s_i \qquad e \qquad Q_j(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j,$$

onde $r_i \neq 0$ e $a_j \neq 0$.

Fatoração de polinômios

- Na fatoração de um polinômio, dois fatores são considerados equivalentes se um for mútiplo do outro por uma constante não nula. A menos de equivalência e da ordem dos fatores, a fatoração dada pelo teorema é única.

Fatoração de polinômios

- Na fatoração de um polinômio, dois fatores são considerados equivalentes se um for mútiplo do outro por uma constante não nula. A menos de equivalência e da ordem dos fatores, a fatoração dada pelo teorema é única.
- Os fatores podem se repetir. O número de vezes que um fator repete é sua **multiplicidade**.

Fatoração de polinômios

- Na fatoração de um polinômio, dois fatores são considerados equivalentes se um for mútiplo do outro por uma constante não nula. A menos de equivalência e da ordem dos fatores, a fatoração dada pelo teorema é única.
- Os fatores podem se repetir. O número de vezes que um fator repete é sua **multiplicidade**.
- Os fatores lineares correspondem às **raízes reais** do polinômio (fator $L_i(x) = r_i x + s_i \rightsquigarrow$ raiz: $-s_i/r_i$),

Fatoração de polinômios

- Na fatoração de um polinômio, dois fatores são considerados equivalentes se um for mútiplo do outro por uma constante não nula. A menos de equivalência e da ordem dos fatores, a fatoração dada pelo teorema é única.
- Os fatores podem se repetir. O número de vezes que um fator repete é sua **multiplicidade**.
- Os fatores lineares correspondem às **raízes reais** do polinômio (fator $L_i(x) = r_i x + s_i \rightsquigarrow$ raiz: $-s_i/r_i$),
- Os fatores quadráticos correspondem às **raízes complexas** do polinômio. Nesse caso, cada fator $Q_j(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$ tem discriminante $\Delta = b_j^2 - 4a_j c_j < 0$. Suas raízes (complexas) são $(-b_j \pm \mathrm{i}\sqrt{\Delta})/(2a_j)$, onde $\mathrm{i}^2 = -1$.

Frações parciais

- Vamos agora considerar funções racionais da forma $f(x)/g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios com $\text{grau}(f(x)) < \text{grau}(g(x))$, e calcular a integral
$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx.$$
O primeiro passo é fatorar o denominador $g(x)$.

Frações parciais

- **Caso 1.** $g(x)$ possui apenas fatores lineares, todos de multiplicidade um. Ou seja, escrevemos

$$g(x) = (r_1x + s_1)\cdots(r_kx + s_k),$$

onde não aparecem fatores equivalentes repetidos. Nesse caso, temos uma igualdade da forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{r_1x + s_1} + \cdots + \frac{A_k}{r_kx + s_k},$$

onde $A_1, \ldots, A_k$ são constantes a serem determinadas. Elas são calculadas tomando o denominador comum do lado direito e comparando os coeficientes do numerador obtido com os de $f(x)$.

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

Cálculo: Como o grau do numerador é menor do que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2)$$

Logo, a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Portanto,

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

Igualando coeficientes, temos o sistema

Frações parciais

Cálculo (continuação):

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10} \frac{1}{x + 2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln |2x - 1| - \frac{1}{10} \ln |x + 2| + c. \end{aligned}$$

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ onde $a \neq 0$.

Frações parciais

- **Exemplo.** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ onde $a \neq 0$.

  Cálculo: O método de frações parciais nos dá

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

e, portanto,

$$A(x+a) + B(x-a) = 1$$

Resolvendo, temos $A = 1/2a$ e $B = -1/2a$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\
&= \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + c \\
&= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.
\end{aligned}$$

Frações parciais

- **Caso 2.** $g(x)$ possui apenas fatores lineares, alguns deles com multiplicidade maior que um. Nesse caso, se o fator $rx + s$ tem multiplicidade $n > 1$, então a ele associamos um termo da forma

$$\frac{B_1}{rx+s} + \frac{B_2}{(rx+s)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(rx+s)^n}.$$

As constantes $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são determinadas como no caso anterior.

Frações parciais

- **Caso 2.** $g(x)$ possui apenas fatores lineares, alguns deles com multiplicidade maior que um. Nesse caso, se o fator $rx + s$ tem multiplicidade $n > 1$, então a ele associamos um termo da forma

$$\frac{B_1}{rx+s} + \frac{B_2}{(rx+s)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(rx+s)^n}.$$

  As constantes $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são determinadas como no caso anterior.
- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$

Frações parciais

- **Caso 2.** $g(x)$ possui apenas fatores lineares, alguns deles com multiplicidade maior que um. Nesse caso, se o fator $rx+s$ tem multiplicidade $n>1$, então a ele associamos um termo da forma

$$\frac{B_1}{rx+s}+\frac{B_2}{(rx+s)^2}+\cdots+\frac{B_n}{(rx+s)^n}.$$

  As constantes $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são determinadas como no caso anterior.

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

  Cálculo: A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Frações parciais

Cálculo (continuação): A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$,

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1).$$

Logo a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando pelo denominador comum, $(x-1)^2(x+1)$, temos

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \end{aligned}$$

Igualamos coeficientes

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

Frações parciais

Cálculo (continuação): Resolvendo, temos $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\
&= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + c \\
&= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.
\end{aligned}$$

Frações parciais

- **Caso 3.** $g(x)$ possui fatores quadráticos, cada um deles com multiplicidade um. Nesse caso, a cada fator quadrático $ax^2 + bx + c$, associamos um termo da forma

$$\frac{A + Bx}{ax^2 + bx + c}.$$

Calculamos, como antes, as constantes A e B.

Frações parciais

- **Caso 3.** $g(x)$ possui fatores quadráticos, cada um deles com multiplicidade um. Nesse caso, a cada fator quadrático $ax^2 + bx + c$, associamos um termo da forma

$$\frac{A + Bx}{ax^2 + bx + c}.$$

Calculamos, como antes, as constantes A e B.

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

Frações parciais

- **Caso 3.** $g(x)$ possui fatores quadráticos, cada um deles com multiplicidade um. Nesse caso, a cada fator quadrático $ax^2 + bx + c$, associamos um termo da forma
$$\frac{A + Bx}{ax^2 + bx + c}.$$
Calculamos, como antes, as constantes A e B.
- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

Cálculo: Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, escrevemos
$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$
Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos
$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Frações parciais

Cálculo (continuação): Igualando coeficientes, obtemos $A+B=2$, $C=-1$, $4A=4$. Então $A=1$, $B=1$ e $C=-1$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan(x/2) + c.
\end{aligned}
$$

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx.$

Frações parciais

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx.$

  Cálculo: Fazendo a divisÃ£o com resto, temos

  $$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3}$$

  Observe que o termo quadrático $4x^2-4x+3$ é irredutível, porque seu discriminante é $b^2-4ac=-32<0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica da frações parciais.
  Completamos o quadrado do denominador:

  $$4x^2-4x+3 = (2x-1)^2+2$$

  Isso sugere a substituição $u=2x-1$. Então, $du=2dx$ e $x=\frac{1}{2}(u+1)$, assim

Frações parciais

Cálculo (continuação):

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx &= \int \left(1+\frac{x-1}{4x^2-4x+3}\right) dx \\
&= x+\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u+1)-1}{u^2+2}du \\
&= x+\frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}du \\
&= x+\frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+4}du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}du \\
&= x+\frac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{2}}) + c \\
&= x+\frac{1}{8}\ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}) \\
&\quad +c.
\end{aligned}$$

Frações parciais

- **Caso 4.** $g(x)$ possui fatores quadráticos com multiplicidade maior que um. Nesse caso, se o fator quadrático $ax^2 + bx + c$ tem multiplicidade n, a ele associamos um termo da forma

$$\frac{A_1 + B_1 x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2 x}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_n + B_n x}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Calculamos, como antes, todas as constantes envolvidas.

Frações parciais

- **Caso 4.** $g(x)$ possui fatores quadráticos com multiplicidade maior que um. Nesse caso, se o fator quadrático $ax^2 + bx + c$ tem multiplicidade n, a ele associamos um termo da forma

$$\frac{A_1 + B_1 x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2 x}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_n + B_n x}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

  Calculamos, como antes, todas as constantes envolvidas.

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx$

Frações parciais

- **Caso 4.** $g(x)$ possui fatores quadráticos com multiplicidade maior que um. Nesse caso, se o fator quadrático $ax^2 + bx + c$ tem multiplicidade n, a ele associamos um termo da forma

$$\frac{A_1 + B_1x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2x}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_n + B_nx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

  Calculamos, como antes, todas as constantes envolvidas.

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\, dx$

  Cálculo: A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Frações parciais

Cálculo (continuação): Multiplicando por $x(x^2+1)$, temos

$$\begin{aligned} -x^3+2x^2-x+1 &= A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x \\ &= (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x \end{aligned}$$

Igualando coeficientes e resolvendo o sistema, temos $A=1$, $B=-1$, $C=-1$, $D=1$ e $E=0$. Então

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} &= \int \left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx \\ &= \int \frac{dx}{x}-\int \frac{x}{x^2+1}dx \\ &\quad -\int \frac{dx}{x^2+1}+\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) \\ &\quad -\arctan(x)-\frac{1}{2(x^2+1)}+c \end{aligned}$$