Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 12: Derivação implícita

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Funções implícitas

- Uma equação envolvendo as variáveis x e y pode definir y como função de x. Por exemplo, a equação

$$x^2 + y^2 = 25,$$

quando resolvida para y, nos dá

$$y = \sqrt{25 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{25 - x^2},$$

e conseguimos expressar y "explicitamente" como função de x.

Funções implícitas

- Nem sempre é simples, ou mesmo possível, obter essa função "explícita". Como exemplo, considere a equação

  $$x^3 + y^3 = 6xy.$$

  Essa equação define uma curva no plano conhecida como **fólio de Descartes**. No entanto, em geral, fixado um ponto $p = (a, b)$ dessa curva, a equação acima define implicitamente y como função de x. Ou seja, para pontos x próximos de a, existe uma função $f(x)$ tal que $y = f(x)$ satisfaz

  $$x^3 + (f(x))^3 = 6xf(x).$$

  Localmente, perto do ponto $p = (a, b)$, a curva definida pela equação coincide com o gráfico $y = f(x)$.

Derivação implícita

- Quando temos uma função definida implicitamente, podemos calcular sua derivada mesmo sem conhecer sua expressão explícita.

Derivação implícita

- Quando temos uma função definida implicitamente, podemos calcular sua derivada mesmo sem conhecer sua expressão explícita.
- Tomemos como exemplo o fólio de Descartes, definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Derivação implícita

- Quando temos uma função definida implicitamente, podemos calcular sua derivada mesmo sem conhecer sua expressão explícita.
- Tomemos como exemplo o fólio de Descartes, definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Sabendo que y é função de x, derivamos os dois lados da expressão acima em relação à variável x:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + y^3\right) = \frac{d}{dx}(6xy)$$

Derivação implícita

- Quando temos uma função definida implicitamente, podemos calcular sua derivada mesmo sem conhecer sua expressão explícita.
- Tomemos como exemplo o fólio de Descartes, definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Sabendo que y é função de x, derivamos os dois lados da expressão acima em relação à variável x:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + y^3\right) = \frac{d}{dx}\left(6xy\right)$$

Aplicamos as regras de derivação conhecidas, lembrando que y é uma função de x:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = 6y + 6x\frac{dy}{dx}.$$

Note que, no lado direito, usamos a regra do produto.

Derivação implícita

- Usando a regra da cadeia (lembrando que y é função de x), temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

Derivação implícita

- Usando a regra da cadeia (lembrando que y é função de x), temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

- Substituindo na fórmula anterior:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx}.$$

Derivação implícita

- Usando a regra da cadeia (lembrando que y é função de x), temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

- Substituindo na fórmula anterior:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx}.$$

- Colocando $\frac{dy}{dx}$ em evidência:

$$(3y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2.$$

Derivação implícita

- Usando a regra da cadeia (lembrando que y é função de x), temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

- Substituindo na fórmula anterior:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx}.$$

- Colocando $\frac{dy}{dx}$ em evidência:

$$(3y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2.$$

- Finalmente, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Note que a derivada $\frac{dy}{dx}$ é expressa em função tanto de x quanto de y.

Derivação implícita

- **Exemplo.** Calcule y' se $\mathrm{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

Derivação implícita

- **Exemplo.** Calcule y' se $\operatorname{sen}(x+y) = y^2 \cos x$.
- **Solução:** Derivaremos ambos os lados da igualdade com relação a x. Lembre sempre que, aqui, $y = y(x)$. Assim:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x+y) = \frac{d}{dx}(y^2 \cos x)$$

$$\Rightarrow \cos(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) = \frac{d}{dx}(y^2)\cos x + y^2 \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$\Rightarrow \cos(x+y)(1+y') = 2yy' \cos x - y^2 \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + y' \cos(x+y) = 2yy' \cos x - y^2 \operatorname{sen} x$$

Isolando y', obtemos:

$$y' = -\frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y \cos x}$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- Temos que $y = \text{arcsen}(x)$ (com $-1 \leq x \leq 1$ e $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) se e somente se
$$\text{sen} y = x.$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- Temos que $y = \text{arcsen}(x)$ (com $-1 \leq x \leq 1$ e $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) se e somente se
$$\mathrm{sen} y = x.$$
- Derivando essa expressão dos dois lados em relação a x:
$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen} y = \frac{d}{dx}x \qquad \Rightarrow \qquad (\cos y)\frac{dy}{dx} = 1,$$
donde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- Temos que $y = \operatorname{arcsen}(x)$ (com $-1 \leq x \leq 1$ e $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) se e somente se
$$\mathrm{sen} y = x.$$
- Derivando essa expressão dos dois lados em relação a x:
$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen} y = \frac{d}{dx}x \qquad \Rightarrow \qquad (\cos y)\frac{dy}{dx} = 1,$$
donde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$
- Como $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, temos $\cos y \geq 0$, donde
$$\cos y = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- Temos que $y = \text{arcsen}(x)$ (com $-1 \leq x \leq 1$ e $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) se e somente se
$$\operatorname{sen} y = x.$$
- Derivando essa expressão dos dois lados em relação a x:
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{d}{dx}x \qquad \Rightarrow \qquad (\cos y)\frac{dy}{dx} = 1,$$
donde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$
- Como $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, temos $\cos y \geq 0$, donde
$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$
- Portanto,
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- **Exemplo.** Calcule $\frac{d}{dx} \arccos x$.

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- **Exemplo.** Calcule $\frac{d}{dx} \arccos x$.
- **Solução:** Seguindo os mesmos passos anteriores, temos:

$$y = \arccos x \iff \cos y = x,$$

com $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$.
Derivando implicitamente a segunda igualdade, obtemos:

$$\frac{d}{dx} \cos y = \frac{d}{dx} x \quad \Rightarrow \quad -y' \mathrm{sen} y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\mathrm{sen} y}.$$

Mas, como $y \in [0, \pi]$, temos $\mathrm{sen} y \geq 0$. Assim,

$$\mathrm{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- **Exemplo.** Calcule $\frac{d}{dx} \arctan x$.

Derivadas das funções trigonométricas inversas

- **Exemplo.** Calcule $\frac{d}{dx} \arctan x$.
- **Solução:** Como no exemplo anterior:

$$y = \arctan x \iff \tan y = x.$$

Derivando a segunda igualdade com relação a x, obtemos

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x \quad \Rightarrow \quad y' \sec^2 y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Usamos a identidade trigonométrica:

$$\sec^2 y = \tan^2 y + 1 = x^2 + 1.$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Derivadas das funções logarítmicas

- Considere a função logaritmo natural (base e). Temos:

$$y = \ln x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = e^y.$$

- Derivando em relação a x:

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}e^y,$$

donde

$$1 = e^y \frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Portanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

Derivadas das funções logarítmicas

- Para derivar a função logarítmica na base a ($a > 0$ e $a \neq 1$), usamos a fórmula de mudança de base:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Derivadas das funções logarítmicas

- Para derivar a função logarítmica na base a ($a > 0$ e $a \neq 1$), usamos a fórmula de mudança de base:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

- Basta então derivar essa expressão:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$$

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.
- **Solução:** Pela regra da cadeia, e usando o que acabamos de mostrar:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x^3 + 1)) = \frac{1}{x^3 + 1}\frac{d}{dx}(x^3 + 1) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.
- **Solução:** Pela regra da cadeia, e usando o que acabamos de mostrar:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x^3 + 1)) = \frac{1}{x^3 + 1}\frac{d}{dx}(x^3 + 1) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.
- **Solução:** Pela regra da cadeia, e usando o que acabamos de mostrar:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x^3 + 1)) = \frac{1}{x^3 + 1}\frac{d}{dx}(x^3 + 1) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
- **Solução:** Mais uma vez:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln x)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{d}{dx}\ln x\right) = \frac{1}{2x}(\ln x)^{-\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \text{sen}x)$.
- **Solução:**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2+\mathrm{sen}x) = \frac{1}{(2+\text{sen}x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2+\mathrm{sen}x) \\
&= \frac{cosx}{(2+\text{sen}x)\ln 10}.
\end{aligned}
$$

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \text{sen}x)$.
- **Solução:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2+\mathrm{sen}x) = \frac{1}{(2+\text{sen}x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2+\mathrm{sen}x) \\ &= \frac{cosx}{(2+\text{sen}x)\ln 10}. \end{aligned}$$

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \ln|x|$.

Derivadas das funções logarítmicas

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \text{sen}x)$.
- **Solução:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2+\operatorname{sen}x) = \frac{1}{(2+\text{sen}x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2+\operatorname{sen}x) \\ &= \frac{cosx}{(2+\text{sen}x)\ln 10}. \end{aligned}$$

- **Exemplo.** Derive $f(x) = \ln|x|$.
- **Solução:**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{|x|}\underbrace{\frac{d}{dx}|x|}_{\substack{-1 \text{ se } x<0; \\ 1 \text{ se } x>0}} = \frac{1}{|x|}\frac{x}{|x|} = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{x^2},$$

logo,

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Derivação logarítmica

- A derivação de funções que envolvem produtos e potências pode ser simplificada tomando logaritmos e derivando em seguida. Esse método é chamdo de **derivação logarítmica**.

Derivação logarítmica

- A derivação de funções que envolvem produtos e potências pode ser simplificada tomando logaritmos e derivando em seguida. Esse método é chamdo de **derivação logarítmica**.
- Consideramos o seguinte exemplo:

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

Derivação logarítmica

- A derivação de funções que envolvem produtos e potências pode ser simplificada tomando logaritmos e derivando em seguida. Esse método é chamdo de **derivação logarítmica**.
- Consideramos o seguinte exemplo:

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

- Tomando logaritmos dos dois lados,

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right),$$

e simplificando o lado direito, obtemos

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2).$$

Derivação logarítmica

- Derivando a expressão

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2),$$

Derivação logarítmica

- Derivando a expressão

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2),$$

obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}2x - 5\frac{1}{3x+2}3,$$

ou seja

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right).$$

Derivação logarítmica

- Derivando a expressão

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2),$$

obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}2x - 5\frac{1}{3x+2}3,$$

ou seja

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right).$$

- Finalizamos substituindo a expressão de y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right).$$

Regra da potência

- Seja $f(x) = x^n$ onde $n \in \mathbb{R}$ (e $x > 0$). Vamos usar a derivação logarítmica para calcular sua derivada.

Regra da potência

- Seja $f(x) = x^n$ onde $n \in \mathbb{R}$ (e $x > 0$). Vamos usar a derivação logarítmica para calcular sua derivada.
- $$y = x^n \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \ln x^n = n \ln x$$

Regra da potência

- Seja $f(x) = x^n$ onde $n \in \mathbb{R}$ (e $x > 0$). Vamos usar a derivação logarítmica para calcular sua derivada.
- $$y = x^n \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \ln x^n = n \ln x$$
- Derivando:
  $$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}(n \ln x),$$
  de onde obtemos
  $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ny}{x} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1}.$$

Regra da potência

- Seja $f(x) = x^n$ onde $n \in \mathbb{R}$ (e $x > 0$). Vamos usar a derivação logarítmica para calcular sua derivada.
- $$y = x^n \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \ln x^n = n \ln x$$
- Derivando:
$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}(n \ln x),$$
de onde obtemos
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ny}{x} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1}.$$
- Portanto, para qualquer $n \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}}$$

Derivação logarítmica

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $y = x^{\sqrt{x}}$.

Derivação logarítmica

- **Exemplo.** Calcule a derivada de $y = x^{\sqrt{x}}$.
- **Solução:** Calculando o logaritmo em ambos os lados da igualdade, temos

$$\ln y = \ln(x^{\sqrt{x}}).$$

Recordando que $\ln a^b = b \ln a$, temos

$$\ln y = \sqrt{x} \ln x.$$

Derivando ambos os lados com relação a x, obtemos:

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Isolando y' e utilizando a expressão de y em função de x, finalmente concluímos:

$$y' = y \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

O número e

- Temos os seguinte limite:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

O número e

- Temos os seguinte limite:

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$$

- De fato, se $f(x) = \ln(1+x)$, então

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = (\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 1$$

Portanto

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}.$$