Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 13: Taxas de variação

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Taxas de variação

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, descrevendo a variável y como função da variável x. Fixe $a \in I$.

Taxas de variação

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, descrevendo a variável y como função da variável x. Fixe $a \in I$.
- A **taxa de variação média** de f entre os pontos a e x (com $x \neq a$) é
$$\text{taxa de variação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
onde
$$\Delta x = x - a \qquad \text{e} \qquad \Delta y = f(x) - f(a).$$

Taxas de variação

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, descrevendo a variável y como função da variável x. Fixe $a \in I$.
- A **taxa de variação média** de f entre os pontos a e x (com $x \neq a$) é
$$\text{taxa de variação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
onde
$$\Delta x = x - a \qquad \text{e} \qquad \Delta y = f(x) - f(a).$$
- A **taxa de variação instantânea** de $f(x)$ em $x = a$ é o limite das taxas de variação médias quando $\Delta x \to 0$ (ou seja, quando $x \to a$):
$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$
(desde que o limite exista).

Velocidade e aceleração

- Se $s = f(t)$ for a posição de uma partícula se movendo em uma reta em função do tempo t, então a taxa de variação média $\Delta s/\Delta t$ é a velocidade média da partícula. A taxa de variação instantânea, ou seja, a derivada $s' = f'(t)$ é a **velocidade** (instantânea) da partícula. A derivada segunda $s'' = f''(t)$ é a **aceleração** da partícula.

Velocidade e aceleração

- **Exemplo.** A posição de uma partícula se movendo em linha reta é dada por
$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$

Velocidade e aceleração

- **Exemplo.** A posição de uma partícula se movendo em linha reta é dada por
$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$
- (a) Qual é a sua função velocidade?

Velocidade e aceleração

- **Exemplo.** A posição de uma partícula se movendo em linha reta é dada por
$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$
- (a) Qual é a sua função velocidade?

  Solução: Sabemos que $v = s' = f'(t)$ então
$$v = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

Velocidade e aceleração

- **Exemplo.** A posição de uma partícula se movendo em linha reta é dada por
$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$
- (a) Qual é a sua função velocidade?

  Solução: Sabemos que $v = s' = f'(t)$ então
$$v = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$
- (b) Quando a partícula está em repouso?

Velocidade e aceleração

- **Exemplo.** A posição de uma partícula se movendo em linha reta é dada por
$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$
- (a) Qual é a sua função velocidade?
Solução: Sabemos que $v = s' = f'(t)$ então
$$v = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$
- (b) Quando a partícula está em repouso?
Solução: A partícula está em repouso se $v = 0$, então
$$v = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0 \iff t_1 = 1, t_2 = 3.$$
Logo a partícula está em repouso em $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$ (unidades de tempo).

Velocidade e aceleração

- (c) Quando a partícula está se movendo para frente e para trás?

Velocidade e aceleração

- (c) Quando a partícula está se movendo para frente e para trás?

  Solução: Basta fazermos o estudo de sinal da função velocidade, $v(t)$, observando que o movimento é para frente se $v(t) > 0$ e para trás se $v(t) < 0$.

  vemos que $v(t) < 0$ para $1 < t < 3$ e $v(t) > 0$ para $t < 1$ ou $t > 3$.

Velocidade e aceleração

- (d) Qual é a sua função aceleração?

Velocidade e aceleração

- (d) Qual é a sua função aceleração?

  Solução: Basta derivar a função velocidade, ou seja,

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12.$$

Velocidade e aceleração

- (d) Qual é a sua função aceleração?

  Solução: Basta derivar a função velocidade, ou seja,

  $$a(t) = v'(t) = 6t - 12.$$

- (e) Quando a partícula tem aceleração positiva (velocidade aumentando) e negativa (velocidade diminuindo)?

Velocidade e aceleração

- (d) Qual é a sua função aceleração?

  Solução: Basta derivar a função velocidade, ou seja,

  $$a(t) = v'(t) = 6t - 12.$$

- (e) Quando a partícula tem aceleração positiva (velocidade aumentando) e negativa (velocidade diminuindo)?

  Solução: Basta fazermos o estudo de sinal de $a(t)$:

Vemos que $a(t) < 0$ para $t < 2$ e $a(t) > 0$ para $t > 2$.

Densidade linear

- Considere uma barra linear, cuja massa não é homogênea, disposta sobre o eixo x, a partir de $x = 0$ no sentido positivo. A massa da barra, entre 0 e $x > 0$ é dada pela função $m = f(x)$ (essa função tem que ser crescente!)

Densidade linear

- Considere uma barra linear, cuja massa não é homogênea, disposta sobre o eixo x, a partir de $x = 0$ no sentido positivo. A massa da barra, entre 0 e $x > 0$ é dada pela função $m = f(x)$ (essa função tem que ser crescente!)
- Sua **densidade média**, entre dois pontos a e x, é dada por

$$\text{densidade média} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Densidade linear

- Considere uma barra linear, cuja massa não é homogênea, disposta sobre o eixo x, a partir de $x = 0$ no sentido positivo. A massa da barra, entre 0 e $x > 0$ é dada pela função $m = f(x)$ (essa função tem que ser crescente!)
- Sua **densidade média**, entre dois pontos a e x, é dada por

$$\text{densidade média} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Sua **densidade linear** no ponto a é a taxa de variação instantânea da função massa nesse ponto:

$$\text{densidade linear} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Densidade linear

- **Exemplo.** Suponha que $m = f(x) = \sqrt{x}$.
- (a) Qual é a densidade média no intervalo $1 \leq x \leq 1,2$?

Densidade linear

- **Exemplo.** Suponha que $m = f(x) = \sqrt{x}$.
- (a) Qual é a densidade média no intervalo $1 \leq x \leq 1,2$?

  Solução.

  densidade média$=\dfrac{f(1,2) - f(1)}{1,2 - 1} = \dfrac{\Delta m}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{1,2} - 1}{1,2 - 1} \approx 0,477$

Densidade linear

- **Exemplo.** Suponha que $m = f(x) = \sqrt{x}$.
- (a) Qual é a densidade média no intervalo $1 \leq x \leq 1,2$?

  Solução.

  densidade média$=\dfrac{f(1,2) - f(1)}{1,2 - 1} = \dfrac{\Delta m}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{1,2} - 1}{1,2 - 1} \approx 0,477$
- (b) Qual é a densidade linear em $x = 1$?

Densidade linear

- **Exemplo.** Suponha que $m = f(x) = \sqrt{x}$.
- (a) Qual é a densidade média no intervalo $1 \leq x \leq 1,2$?

  Solução.

  densidade média$= \dfrac{f(1,2) - f(1)}{1,2 - 1} = \dfrac{\Delta m}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{1,2} - 1}{1,2 - 1} \approx 0,477$
- (b) Qual é a densidade linear em $x = 1$?

  Solução. Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ então, a densidade linear em $x = 1$ é $f'(1) = 1/2$.

Custo marginal

- Suponha que uma empresa produza x ($x \geq 0$) unidades de um produto ao custo $C(x)$. Esta será chamada de **função custo**. Se a produção salta de x_1 unidades para x_2 unidades, o custo sofrerá uma variação de $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ e a taxa de variação média será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Custo marginal

- Suponha que uma empresa produza x ($x \geq 0$) unidades de um produto ao custo $C(x)$. Esta será chamada de **função custo**. Se a produção salta de x_1 unidades para x_2 unidades, o custo sofrerá uma variação de $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ e a taxa de variação média será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Quando $\Delta x \to 0$ (ou seja, quando $x_2 \to x_1$), temos a taxa de variação instantânea do custo, que em economia é chamada de **custo marginal**:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = C'(x_1)$$

Custo marginal

- Suponha que uma empresa produza x $(x \geq 0)$ unidades de um produto ao custo $C(x)$. Esta será chamada de **função custo**. Se a produção salta de x_1 unidades para x_2 unidades, o custo sofrerá uma variação de $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ e a taxa de variação média será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Quando $\Delta x \to 0$ (ou seja, quando $x_2 \to x_1$), temos a taxa de variação instantânea do custo, que em economia é chamada de **custo marginal**:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = C'(x_1)$$

- É claro que x assume valores em $\mathbb{N}$, mas, supondo que o número de itens produzidos é muito grande, podemos supor, por aproximação, $C(x)$ definida para valores de x não negativos em $\mathbb{R}$.

Custo marginal

- Se x_2 é próximo de x_1, então a taxa de variação média do custo é próxima do custo marginal $C'(x_1)$.

Custo marginal

- Se x_2 é próximo de x_1, então a taxa de variação média do custo é próxima do custo marginal $C'(x_1)$.
- Assim, se $x_1 = n$ e $x_2 = n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$ grande, temos

$$C'(n) \approx \frac{C(n+1) - C(n)}{(n+1) - n} = C(n+1) - C(n).$$

Isso permite interpretar o custo marginal como a variação de custo resultante da produção de uma unidade a mais do produto.

Custo marginal

- **Exemplo.** Suponha que a função custo de uma empresa seja

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0.01x^2 \quad \text{(em R\$)}.$$

- (a) Qual é a função custo marginal?

Custo marginal

- **Exemplo.** Suponha que a função custo de uma empresa seja
$$C(x) = 10.000 + 5x + 0.01x^2 \quad \text{(em R\$)}.$$
- (a) Qual é a função custo marginal?

  Solução. Basta calcularmos $C'(x)$. Ou seja, a função custo marginal é
$$C'(x) = 5 + 0.02x.$$

Custo marginal

- **Exemplo.** Suponha que a função custo de uma empresa seja
$$C(x) = 10.000 + 5x + 0.01x^2 \quad \text{(em R\$)}.$$
- (a) Qual é a função custo marginal?
Solução. Basta calcularmos $C'(x)$. Ou seja, a função custo marginal é
$$C'(x) = 5 + 0.02x.$$
- (b) Qual é o custo para elevar a produção de 500 para 501 unidades?

Custo marginal

- **Exemplo.** Suponha que a função custo de uma empresa seja

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0.01x^2 \quad \text{(em R\$)}.$$

- (a) Qual é a função custo marginal?

  Solução. Basta calcularmos $C'(x)$. Ou seja, a função custo marginal é

$$C'(x) = 5 + 0.02x.$$

- (b) Qual é o custo para elevar a produção de 500 para 501 unidades?

  Solução. $C(501) - C(500) = 15.01$ que é aproximadamente o custo marginal de produção de 500 itens, ou seja,

$$C'(500) = 5 + 0.02 \times 500 = 15.$$

Decaimento radioativo

- Seja $m(t)$ a massa de uma substância, em função do tempo t, sofrendo decaimento radioativo. É determinado experimentalmente que a taxa de decaimento é proporcional à massa:

$$\frac{dm}{dt} \propto m \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dm}{dt} = km$$

para alguma constante $k < 0$ (a massa está diminuindo, logo $dm/dt < 0$, pois $m > 0$).

Decaimento radioativo

- Seja $m(t)$ a massa de uma substância, em função do tempo t, sofrendo decaimento radioativo. É determinado experimentalmente que a taxa de decaimento é proporcional à massa:

$$\frac{dm}{dt} \propto m \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dm}{dt} = km$$

para alguma constante $k < 0$ (a massa está diminuindo, logo $dm/dt < 0$, pois $m > 0$).

- A solução para essa **equação diferencial** (equação envolvendo uma função, sua variável e suas derivadas) é da forma

$$m(t) = m_0 e^{kt},$$

onde $m_0 > 0$ é a massa no instante inicial $t = 0$.

Decaimento radioativo

- A **meia-vida** de uma substância que sofre decaimento radioativo é o tempo necessário para o decaimento da metade da quantidade inicial da substância.

Decaimento radioativo

- A **meia-vida** de uma substância que sofre decaimento radioativo é o tempo necessário para o decaimento da metade da quantidade inicial da substância.
- Assim, se $t_{1/2}$ é o tempo de meia-vida,

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{kt_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{kt_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{kt_{1/2}}\right) = kt_{1/2},$$

de onde concluímos que

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{k}.$$

Decaimento radioativo

- **Exemplo.** A meia-vida do radio-226 é 1.590 anos.
  (a) Sabendo que no instante inicial uma amostra possuia 100 g de radio-226, encontre a expressão para a massa em função do tempo.

Decaimento radioativo

- **Exemplo.** A meia-vida do radio-226 é 1.590 anos.
  (a) Sabendo que no instante inicial uma amostra possuia 100 g de radio-226, encontre a expressão para a massa em função do tempo.

  Solução.
  Informações:
  1. $t_{1/2} = 1590 \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{1590}$
  2. $m_0 = 100$

  $$m(t) = m_0 e^{kt} \Rightarrow m(t) = 100e^{-\frac{\ln 2}{1590}t}$$

Decaimento radioativo

- (b) Quando a massa será reduzida para 30 g?

Decaimento radioativo

- (b) Quando a massa será reduzida para 30 g?

  Solução. Queremos a solução para a equação $m(t) = 30$, ou seja,

$$30 = 100e^{-\frac{\ln 2}{1590}t} \Rightarrow e^{-\frac{\ln 2}{1590}t} = 0,3$$

  Aplicando o logaritmo natural temos que

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0,3$$

  Portanto,

$$t = -1590\frac{\ln 0,3}{\ln 2} \approx 2762\text{anos}$$

Taxas relacionadas

- **Exemplo.** Ar está sendo bombeado para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de 100 cm^3/s. Qual é a velocidade de crescimento do raio do balão quando seu diâmetro é de 50 cm?

Taxas relacionadas

- **Exemplo.** Ar está sendo bombeado para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de 100 cm^3/s. Qual é a velocidade de crescimento do raio do balão quando seu diâmetro é de 50 cm?

  Solução. Lembramos que o volume de uma esfera de raio r é
  $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

  O volume do balão é então dado pela função $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, onde o raio é função do tempo, ou seja, $r = r(t)$.

  1. **O que temos?** $\dfrac{dV}{dt} = 100\text{cm}^3/\text{s}$.
  2. **O que queremos?** $\dfrac{dr}{dt}$ quando $r = 25$.

  Aplicando a regra da cadeia:

  $$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3}3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow 100 = 4\pi 25^2\frac{dr}{dt}.$$

  Portanto, $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{25\pi}\text{cm}/\text{s}$.

Taxas relacionadas

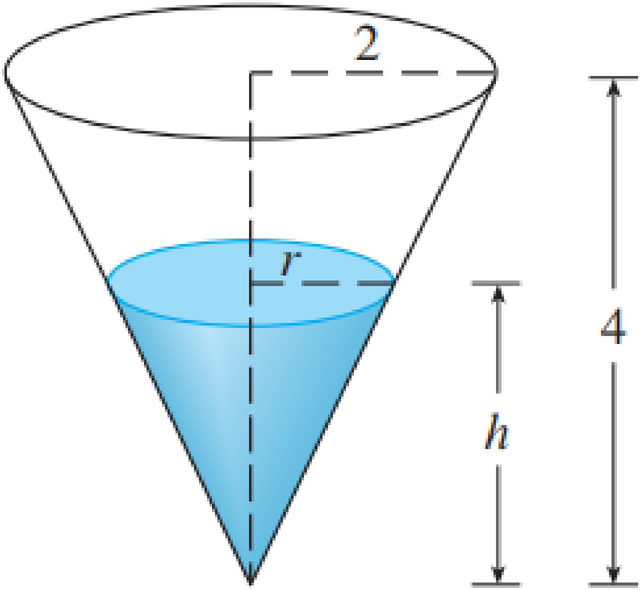
- **Exemplo.** Um tanque de água tem formato de cone circular invertido, com base de raio 2 m e altura igual a 4 m. Água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Calcule a taxa de variação do nível da água quando ela tiver 3 m de profundidade.

Taxas relacionadas

- **Exemplo.** Um tanque de água tem formato de cone circular invertido, com base de raio 2 m e altura igual a 4 m. Água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Calcule a taxa de variação do nível da água quando ela tiver 3 m de profundidade.

  Solução. Lembramos que volume de um cone de raio r e altura h é $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$. O volume de água no tanque é uma função da profundidade h e do raio r (veja a figura) dada por $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, onde h e r variam com o tempo, ou seja, $h = h(t)$, $r = r(t)$.

  1. **O que temos?** $\dfrac{dV}{dt} = 2\text{m}^3/\text{min}$
  2. **O que queremos?** $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 3\text{m}$


2
r
h
4

Taxas relacionadas

- **Continuação da solução.** Por semelhança de Triângulos, temos:

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Então

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\pi h^3}{12}$$

Logo,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi 3h^2}{12}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \Rightarrow 2 = \frac{3^2\pi}{4}\frac{dh}{dt}$$

Portanto, $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{8}{9\pi}\mathrm{m/min}$

Taxas relacionadas

- **Exemplo.** Um homem anda ao longo de um caminho retilíneo a uma velocidade de 1,5 m/s. Uma fonte de luz fixada ao chão, a 6 m do caminho, gira, focalizando no homem. A que taxa a fonte de luz está girando quando o homem está a 8 m do ponto do caminho mais próximo dela?

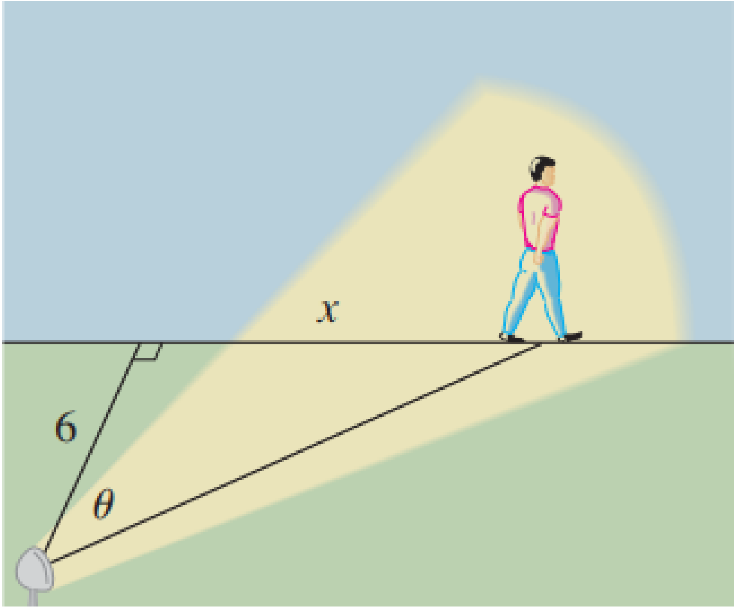
Taxas relacionadas

- **Exemplo.** Um homem anda ao longo de um caminho retilíneo a uma velocidade de 1,5 m/s. Uma fonte de luz fixada ao chão, a 6 m do caminho, gira, focalizando no homem. A que taxa a fonte de luz está girando quando o homem está a 8 m do ponto do caminho mais próximo dela?

  Solução. Veja a figura a seguir, onde x é a distância entre o homem e o ponto do caminho mais próximo ao holofote. Seja θ o ângulo entre o feixe do holofote e a perpendicular ao caminho.

  1. **O que temos?** $\dfrac{dx}{dt} = 1,5\text{m/s}$
  2. **O que queremos?** $\dfrac{d\theta}{dt}$ quando $x = 8\text{m}$

Taxas relacionadas



Taxas relacionadas

- **Continuação da Solução.** Pela figura temos que

$$\frac{x}{6} = \tan\theta \Rightarrow x = 6\tan\theta$$

Derivando em relação a t temos que:

$$\frac{dx}{dt} = 6\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Logo

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}\frac{1}{\sec^2\theta}(1,5) = \frac{1}{4}\cos^2(\theta)$$

Para $x = 8$, o comprimento do feixe é 10 (use Teorema de Pitágoras), logo $\cos\theta = \frac{4}{5}$.
Portanto,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$