Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 25: Integração por substituição

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Integração por substituição

- Considere a função composta $F \circ g(x) = F(g(x))$, onde $F = F(u)$ e $g = g(x)$ $(u = g(x))$ são deriváveis, com derivadas $F'(u)$ e $g'(x)$. Pela **regra da cadeia**, sua derivada é

$$\frac{d}{dx}(F \circ g(x)) = \underbrace{F'(g(x))}_{\frac{dF}{du}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}.$$

Integração por substituição

- Considere a função composta $F \circ g(x) = F(g(x))$, onde $F = F(u)$ e $g = g(x)$ $(u = g(x))$ são deriváveis, com derivadas $F'(u)$ e $g'(x)$. Pela **regra da cadeia**, sua derivada é

$$\frac{d}{dx}\left(F \circ g(x)\right) = \underbrace{F'(g(x))}_{\frac{dF}{du}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}.$$

- Assim, pelo **teorema fundamental do Cálculo**, se g está definida em um intervalo, temos

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}\left(F \circ g(x)\right) dx = \underbrace{F \circ g(x)}_{F(g(x))} + c.$$

Integração por substituição

- Ou seja, obtivemos que

$$\int F'(\underbrace{g(x)}_{u})g'(x)dx = F(\underbrace{g(x)}_{u}) = \int F'(u)du,$$

sendo que, na última passagem, usamos novamente o teorema fundamental do cálculo para $F(u)$. Isso motiva a seguinte regra de mudança de variáveis para integrais:

$$\boxed{\text{se } u = g(x) \text{ então } du = g'(x)dx}$$

Integração por substituição

- Ou seja, obtivemos que

$$\int F'(\underbrace{g(x)}_{u})g'(x)dx = F(\underbrace{g(x)}_{u}) = \int F'(u)du,$$

sendo que, na última passagem, usamos novamente o teorema fundamental do cálculo para $F(u)$. Isso motiva a seguinte regra de mudança de variáveis para integrais:

$$\boxed{\text{se } u = g(x) \text{ então } du = g'(x)dx}$$

- Renomeando $F'(u) = f(u)$, a expressão acima nos dá então a chamada **regra de substituição** ou de **mudança de variáveis** para integrais:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du}$$

(mudança de variáveis: $u = g(x)$)

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int x^3 \cos(x^4+2)dx$

- **Solução.** Fazemos $u = x^4 + 2 \Rightarrow du = 4x^3 dx$. Assim:

$$\int x^3 \cos(x^4+2)dx = \frac{1}{4}\int \cos(\underbrace{x^4+2}_{u})\underbrace{4x^3dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos(u)du = -\frac{1}{4}\text{sen}(u) + c = -\frac{1}{4}\text{sen}(x^4+2) + c.$$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int \sqrt{2x+1}dx$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int \sqrt{2x+1}dx$
- **Solução.** Fazemos $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx$. Assim:

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int (\underbrace{2x+1}_{u})^{1/2}\underbrace{2dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{1}{3/2}u^{3/2} + c = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + c.$$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$
- **Solução.** Fazemos $u = 1 - 4x^2 \Rightarrow du = -8xdx$. Assim:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{-8}\int (\underbrace{1-4x^2}_{u})^{-1/2}\underbrace{(-8)xdx}_{du}$$

$$= -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{8}\frac{1}{1/2}u^{1/2} + c = -\frac{1}{4}(1-4x^2)^{1/2} + c.$$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int e^{5x}\,dx$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int e^{5x} dx$

- **Solução.** Fazemos $u = 5x \Rightarrow du = 5dx$. Assim:

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} \underbrace{5dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{5} \int e^{u} du = \frac{1}{5} e^{u} + c = \frac{1}{5} e^{5x} + c.$$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int \sqrt{1+x^2}x^5 dx$

Integração por substituição

- **Exemplo.** Calcule $\int \sqrt{1+x^2}x^5 dx$

- **Solução.** Escrevemos:

$$\int \sqrt{1+x^2}x^5 dx = \int \sqrt{1+x^2}(x^2)^2 x dx.$$

Fazemos então $u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2xdx$. Assim:

$$\int \sqrt{1+x^2}x^5 dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}(x^2)^2 \underbrace{2xdx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}(u-1)^2 du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}(u^2-2u+1)du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7/2}u^{7/2} - 2\frac{1}{5/2}u^{5/2} + \frac{1}{3/2}u^{3/2}\right)+c$$

$$= \frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + c.$$

Integração por substituição

- Temos

$$\boxed{\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c}$$

Integração por substituição

- Temos

$$\boxed{\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + c}$$

Cálculo:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

Fazemos

$$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x \, dx.$$

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\operatorname{sen} x| + c$$

Regra de substituição para integrais definidas

- Para uma integral definida, a **regra de substituição** tem o seguinte formato: se $g'(x)$ for contínua em $[a, b]$ e $f(u)$ for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du}$$

Regra de substituição para integrais definidas

- Para uma integral definida, a **regra de substituição** tem o seguinte formato: se $g'(x)$ for contínua em $[a, b]$ e $f(u)$ for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du}$$

Demonstração: Seja $F(u)$ uma primitiva para $f(u)$. Temos que $F(g(x))$ é uma primitiva para $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.

Regra de substituição para integrais definidas

- Para uma integral definida, a **regra de substituição** tem o seguinte formato: se $g'(x)$ for contínua em $[a, b]$ e $f(u)$ for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du}$$

Demonstração: Seja $F(u)$ uma primitiva para $f(u)$. Temos que $F(g(x))$ é uma primitiva para $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.

Pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Regra de substituição para integrais definidas

- Para uma integral definida, a **regra de substituição** tem o seguinte formato: se $g'(x)$ for contínua em $[a, b]$ e $f(u)$ for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du}$$

Demonstração: Seja $F(u)$ uma primitiva para $f(u)$. Temos que $F(g(x))$ é uma primitiva para $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.

Pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por outro lado

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Regra de substituição para integrais definidas

- **Exemplo.** Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$

Regra de substituição para integrais definidas

- **Exemplo.** Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$
- **Solução.** Fazemos $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx$. Assim:

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,2dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 u^{1/2}du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3/2}u^{3/2}\right]_1^9 = \frac{1}{3}(9^{3/2}-1) = \frac{26}{3}$$

Regra de substituição para integrais definidas

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

Regra de substituição para integrais definidas

- **Exemplo.** Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

- **Solução.** Fazemos $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$. Assim:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \ln x \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_{\ln 1}^{\ln e} u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

Integrais de funções pares e ímpares

Proposição

Suponha $f(x)$ contínua em $[-a, a]$.

(a) Se $f(x)$ é função par (ou seja, $f(-x) = f(x)\ \forall\ x$), então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

(a) Se $f(x)$ é função ímpar (ou seja, $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x$), então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Integrais de funções pares e ímpares

Demonstração. Fazemos

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Basta observar que

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{se } f \text{ é par} \\ \displaystyle -\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{se } f \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$\square$

Integrais de funções pares e ímpares

Demonstração. Fazemos

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Basta observar que

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{se } f \text{ é par} \\ \displaystyle -\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{se } f \text{ é ímpar} \end{cases}$$

□

- **Exemplo.** $f(x) = \tan x/(1 + x^2 + x^4)$ é uma função ímpar. Portanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4} dx = 0.$$