Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 27: Volumes

Turma Online - Prof. Rogério Mol

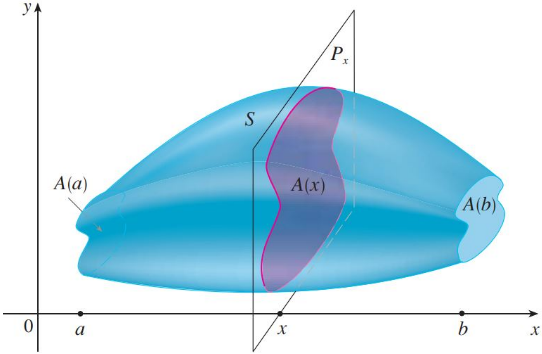
Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Volumes

- Considere um sólido S no espaço tridimensional, disposto ao longo de um eixo x, entre $x = a$ e $x = b$. Para cada $x \in [a, b]$, consideramos a região plana obtida pela interseção do sólido com o plano perpendicular a esse eixo passando por x. Essa **seção plana** será denotada por S_x e sua área, que supomos ser conhecida, por $A(x)$. Temos, assim, uma função $A(x)$, definida para $x \in [a, b]$, que vamos supor contínua.

Volumes



Volumes

- A ideia para calcular o volume de S é aproximar o sólido por uma união de cilindros, da maneira descrita a seguir. Tomamos uma partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos, em cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, um ponto x_k^*, para $k = 1, \ldots, n$.

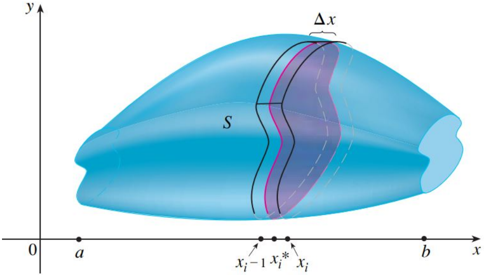
Volumes

- A ideia para calcular o volume de S é aproximar o sólido por uma união de cilindros, da maneira descrita a seguir. Tomamos uma partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

  do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos, em cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, um ponto x_k^*, para $k = 1, \ldots, n$.
- A porção de S sobre o k-ésimo intervalo (ou seja, entre os planos $x = x_{k-1}$ e $x = x_{k-1}$) é aproximada pelo **cilindro** C_k que tem como base a seção plana $S_{x_k^*}$ e como altura o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de comprimento Δx.

Volumes



Volumes

- O volume de do C_k é:

$$V(C_k) = (\text{área da base}) \times (\text{altura}) = A(x_k^*)\Delta x.$$

Volumes

- O volume de do C_k é:

$$V(C_k) = (\text{área da base}) \times (\text{altura}) = A(x_k^*)\Delta x.$$

- A união dos cilindros C_k forma uma região sólida cujo volume aproxima o volume da região sólida S:

$$V(S) \approx \sum_{k=1}^{n} V(C_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x}_{\text{soma de Riemann}}.$$

Observe que expressão do lado direito é a **soma de Riemann** da função $A(x)$ associada à partição e à escolha dos pontos intermediários x_k^*.

Volumes

- Essa aproximação é tanto melhor quanto mais fina for a partição do intervalo $[a, b]$. Assim

$$V(S) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*) \Delta x.$$

Volumes

- Essa aproximação é tanto melhor quanto mais fina for a partição do intervalo $[a, b]$. Assim

$$V(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x.$$

- Portanto

$$\boxed{V(S) = \int_a^b A(x)dx}$$

Volumes

- **Exemplo: volume da esfera.**

Volumes

- **Exemplo: volume da esfera.**

  Consideramos a esfera de raio r produzida pela revolução do círculo de equação $x^2 + y^2 = r^2$ em torno do eixo x.

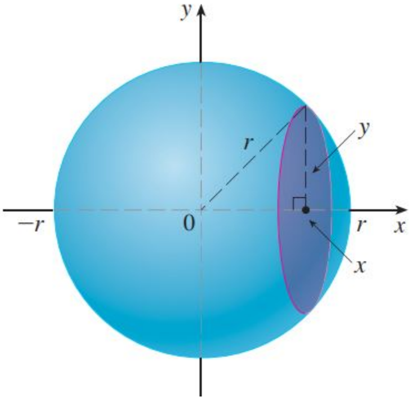
Volumes

- **Exemplo: volume da esfera.**

  Consideramos a esfera de raio r produzida pela revolução do círculo de equação $x^2 + y^2 = r^2$ em torno do eixo x.

  Para cada x, com $-r < x < r$, a seção transversal correspondente S_x é um círulo com raio $r_x = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Volumes



Volumes

Assim, a área da seção plana é

$$A(x) = \pi r_x^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V = \int_{-r}^{r} A(x)dx &= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= 2\int_{0}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r \\ &= 2\pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1.

  Solução: A área da seção transversal é (veja a figura):

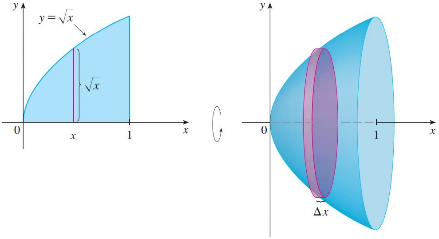
$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

  Assim,

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi x dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Volumes

Solução (continuação):



Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = x^3$ de $y = 8$ e $x = 0$ em torno do eixo y.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = x^3$ de $y = 8$ e $x = 0$ em torno do eixo y.

  Solução: Vamos considerar seções transversais ao longo do eixo y. A área $A(y)$ de uma tal seção é (veja figura)

$$A(y) = \pi(\sqrt[3]{x})^2 = \pi y^{2/3}.$$

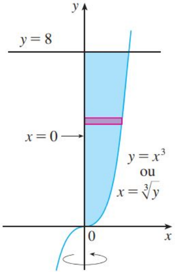
  Assim,

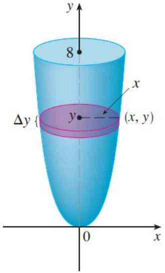
$$V = \int_0^8 A(y)dy = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy$$

$$= \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^8 = \pi \frac{3}{5} 8^{5/3} = \frac{96}{5}\pi.$$

Volumes

Solução (continuação):





Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região $\mathcal{R}$, limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região $\mathcal{R}$, limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

  Solução: As duas curvas se interceptam nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$. As seções transversais ao eixo x são anéis com raio interno $r_i = x^2$ e raio externo $r_e = x$ (veja figura). A área $A(x)$ de uma tal seção é

  $$A(x) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi(x^2 - x^4).$$

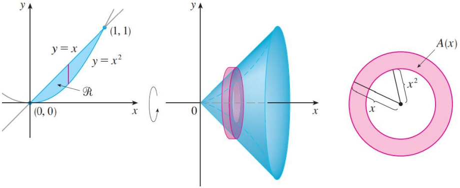
  Portanto,

  $$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx$$

  $$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}.$$

Volumes

Solução (continuação):



Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 2$ da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 2$ da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

  Solução: As seções transversais ao eixo x são anéis com raio interno $r_i = 2 - x$ e raio externo $r_e = 2 - x^2$ (veja figura). A área $A(x)$ de uma tal seção é

$$A(x) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2.$$

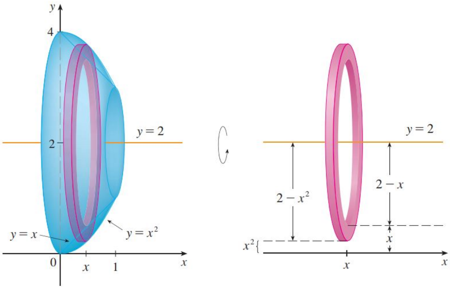
  Portanto,

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - 5\frac{1}{3}x^3 + 4\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}.$$

Volumes

Solução (continuação):



Volumes

- Os exemplos considerados anteriormente são chamados **sólidos de revolução**. As seções transversais S_x (quando consideramos a rotação em torno do eixo x) são círculos ou anéis.

Volumes

- Os exemplos considerados anteriormente são chamados **sólidos de revolução**. As seções transversais S_x (quando consideramos a rotação em torno do eixo x) são círculos ou anéis.

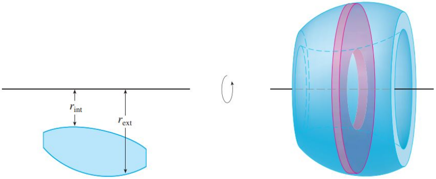
  Assim, área de S_x será:
  • se as seções são **círculos**:

  $$A(x) = \pi(\text{raio})^2;$$

  • se as seções são **anéis**:

  $$A(x) = \pi(\text{raio interno})^2 - \pi(\text{raio externo})^2.$$

Volumes



Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ em torno da reta $x = -1$.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ em torno da reta $x = -1$.

  Solução: Tomamos agora seções transversais ao eixo y. Elas são anéis com raio interno $r_i = 1 + y$ e raio externo $r_e = 1 + \sqrt{y}$ (veja figura). A área $A(y)$ de cada anel é

  $$A(y) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi(1 + \sqrt{y})^2 - \pi(1 + y)^2.$$

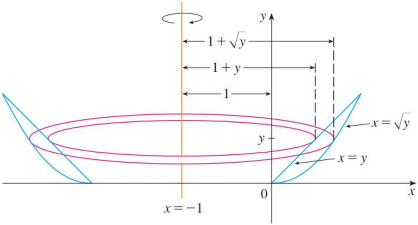
  Assim,

  $$V = \int_0^1 A(y)dy = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2]dy$$

  $$= \pi \int_0^1 (2\sqrt{y} - y - y^2)dy = \pi \left[\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Volumes

Solução (continuação):



Volumes

- **Exemplo: volume da pirâmide.** Vamos calcular o volume da pirâmide de base quadrada de lado L e altura h.

Volumes

- **Exemplo: volume da pirâmide.** Vamos calcular o volume da pirâmide de base quadrada de lado L e altura h.

  Colocamos o eixo x ao longo do eixo da pirâmide com a origem em seu vértice. Para cada x, com $0 < x < h$, temos que a seção transversal S_x é um quadrado de lado $s = s_x$.

Volumes

- **Exemplo: volume da pirâmide.** Vamos calcular o volume da pirâmide de base quadrada de lado L e altura h.

  Colocamos o eixo x ao longo do eixo da pirâmide com a origem em seu vértice. Para cada x, com $0 < x < h$, temos que a seção transversal S_x é um quadrado de lado $s = s_x$.

  Por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{s_x/2}{L/2} = \frac{x}{h} \quad \Rightarrow \quad s_x = \frac{Lx}{h}$$

Volumes

- **Exemplo: volume da pirâmide.** Vamos calcular o volume da pirâmide de base quadrada de lado L e altura h.

  Colocamos o eixo x ao longo do eixo da pirâmide com a origem em seu vértice. Para cada x, com $0 < x < h$, temos que a seção transversal S_x é um quadrado de lado $s = s_x$.

  Por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{s_x/2}{L/2} = \frac{x}{h} \quad \Rightarrow \quad s_x = \frac{Lx}{h}$$

  Logo,

$$A(x) = \frac{L^2}{h^2} x^2.$$

Volumes

- **Exemplo: volume da pirâmide.** Vamos calcular o volume da pirâmide de base quadrada de lado L e altura h.

  Colocamos o eixo x ao longo do eixo da pirâmide com a origem em seu vértice. Para cada x, com $0 < x < h$, temos que a seção transversal S_x é um quadrado de lado $s = s_x$.

  Por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{s_x/2}{L/2} = \frac{x}{h} \quad \Rightarrow \quad s_x = \frac{Lx}{h}$$

  Logo,

$$A(x) = \frac{L^2}{h^2}x^2.$$

  Temos então

$$\begin{aligned} V = \int_0^h A(x)dx &= \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2 dx \\ &= \frac{L^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{L^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3\right) = \frac{L^2 h}{3} \end{aligned}$$

Volumes