Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 19: Problemas de otimização

Turma Online - Prof. Rogério Mol

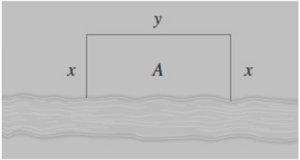
Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Otimização

- **Exemplo.** Um fazendeiro tem 1200 m de cerca. Ele quer cercar um campo retangular à margem de um rio retilíneo. Ele não precisa cercar ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem a maior área?

Solução:



Sejam x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Então expressamos a área A do retângulo como

$$A = xy$$

Desejamos maximizar A. Vamos expressar A como função de uma única variável. Usando a informação de que o comprimento total é de 1 200 m, temos

$$2x + y = 1200.$$

Logo

$$A(x) = x(1200 - 2x) = 1200x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 600.$$

Devemos encontrar o valor máximo de $A(x)$ com $x \in [0, 600]$.
Temos $A'(x) = 1200 - 4x$. Os pontos críticos são dados por

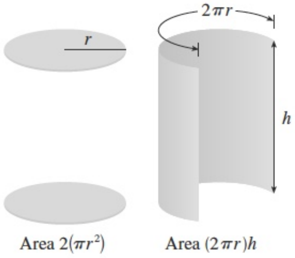
$$1200 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 300.$$

O valor máximo deve ocorrer ou nesse ponto crítico ou em uma extremidade do intervalo. Uma vez que $A(0) = 0$, $A(300) = 180000$ e $A(600) = 0$, o valor máximo será $A(300) = 180000$. Assim, o campo retângular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão.

Otimização

- **Exemplo.** Uma lata cilíndrica tem a capacidade de armazenar 1 litro de óleo. Quais são as dimensões que minimizam o custo do material para a fabricação da lata?

Solução: Sejam r o raio e h a altura (ambos em centímetros). A fim de minimizar o custo do material, minimizamos a área da superfície total do cilindro (tampa, base e lado).



Da figura, temos que área da superfície é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Para eliminar h usamos o fato que o volume é $1L = 1000cm^3$. Assim

$$\pi r^2 h = 1000 \Longrightarrow h = 1000/(\pi r^2).$$

Logo temos

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \qquad r > 0.$$

Para achar os pontos críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Então $A'(r) = 0$ quando $\pi r^3 = 500$ e o ponto crítico é $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Observamos que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ e $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$. Portanto, A 'e decrescente à esquerda de $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ e crescente à direita. Assim, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ deve ser o mínimo absoluto. O valor de h correspondente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é

$$h = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

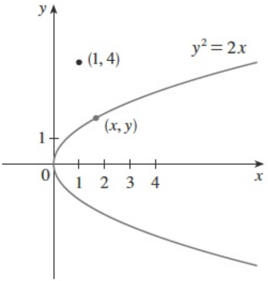
Dessa forma, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm e altura, igual a duas vezes o raio, isto é, o diâmetro.

Otimização

- **Exemplo.** Qual é o ponto da parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$?

Solução: A distância entre os pontos $(1, 4)$ e (x, y) é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$



Como (x, y) está sobre a parábola, então $x = y^2/2$; logo, a expressão para d fica

$$d = \sqrt{(\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y-4)^2}.$$

Em vez de d, minimizamos seu quadrado:

$$d^2 = f(y) = (\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y-4)^2.$$

Derivando f, temos

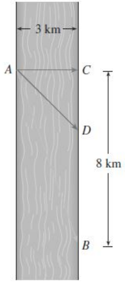
$$f'(y) = 2(\frac{1}{2}y^2 - 1)y + 2(y-4) = y^3 - 8.$$

Portanto, $f'(y) = 0$ quando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ quando $y < 2$ e $f'(y) > 0$ quando $y > 2$; logo, pelo *Teste de Primeira Derivada* para os valores extremos absolutos, o mínimo absoluto ocorre quando $y = 2$. O valor correspondente de x é $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Assim, o ponto sobre $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$ é $(2, 2)$.

Otimização

- **Exemplo.** Um rio retilíneo tem 3 km de largura. Um homem atravessará o rio em um bote, que parte de um ponto A de sua margem e segue em linha reta até um ponto D da outra margem. O objetivo do homem é atingir, no menor tempo possível, um ponto B situado a 8 km rio abaixo. Ele pode remar a 6 km/h e caminhar a 8 km/h. Qual é a trajetória a ser seguida?

Solução: Seja x a distância de C a D, então a distância percorrida a pé será $|DB| = 8 - x$. O Teorema de Pitágoras implica que $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$.



Usando o fato que tempo $= \frac{\text{distância}}{\text{taxa}}$, temos que o tempo gasto remando é $\sqrt{x^2+9}/6$ e o tempo gasto andando é $(8-x)/8$. Assim, o tempo total T como função de x é

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}, \qquad x \in [0,8].$$

A derivada de T é

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}.$$

Logo

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 7x^2 = 81 \iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}.$$

O único ponto crítico é $x = 9/\sqrt{7}$. Para calcular o mínimo absoluto, calculamos:

$$T(0) = 1,5 \qquad T(9/\sqrt{7}) = 1 + \sqrt{7}/9 \approx 1,33 \qquad T(8) = \sqrt{73}/8 \approx 1,42.$$

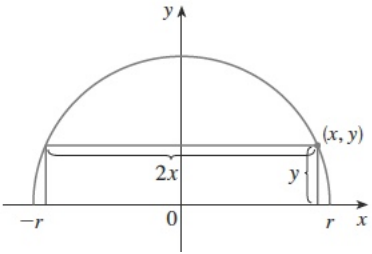
Assim, o valor mínimo absoluto de T ocorre em $x = 9/\sqrt{7}$. Dessa forma o homem deve aportar o bote no ponto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3,4 km) rio abaixo a partir do ponto inicial.

Otimização

- **Exemplo.** Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

Solução: Considere o semicírculo como a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ com o centro na origem. Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante, então o retângulo tem lados de comprimento $2x$ e y, e sua área é

$$A = 2xy.$$



Desejamos eliminar y, para isto usamos o fato que (x, y) está sobre o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim,

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq r.$$

Sua derivada é

$$A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

logo

$$A'(x) = 0 \iff 2x^2 = r^2 \iff x = \sqrt{2}r \quad (\text{pois } x \geq 0).$$

Esse valor de x fornece o valor máximo de A, visto que $A(0) = 0$ e $A(r) = 0$. Portanto, a área do maior retângulo inscrito é

$$A(\frac{r}{\sqrt{2}}) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2.$$

Aplicações à economia

- $p(x)$: preço que uma empresa pode cobrar se vender x unidades do produto. Essa função é chamada de **função preço** ou **função demanda**. Em geral, essa função é decrescente.

Aplicações à economia

- $p(x)$: preço que uma empresa pode cobrar se vender x unidades do produto. Essa função é chamada de **função preço** ou **função demanda**. Em geral, essa função é decrescente.
- A **receita** obtida será

$$R(x) = \text{quantidade} \times \text{preço} = xp(x).$$

Aplicações à economia

- $p(x)$: preço que uma empresa pode cobrar se vender x unidades do produto. Essa função é chamada de **função preço** ou **função demanda**. Em geral, essa função é decrescente.
- A **receita** obtida será

$$R(x) = \text{quantidade} \times \text{preço} = xp(x).$$

- O **lucro** será

$$L(x) = R(x) - C(x),$$

onde $C(x)$ é a **função custo**.

Aplicações à economia

- $p(x)$: preço que uma empresa pode cobrar se vender x unidades do produto. Essa função é chamada de **função preço** ou **função demanda**. Em geral, essa função é decrescente.
- A **receita** obtida será

$$R(x) = \text{quantidade} \times \text{preço} = xp(x).$$

- O **lucro** será

$$L(x) = R(x) - C(x),$$

  onde $C(x)$ é a **função custo**.
- **Exemplo.** Uma loja vende 200 aparelhos de TV por semana a \$ 350 cada. Para cada \$ 10 de desconto oferecidos, o número e aparelhos vendidos aumenta em 20 unidades por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual é o desconto que deve ser oferecido para que a loja maximize sua receita?

Solução: Se x é o número de aparelhos de TV vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$.
Para cada aumento de 20 unidades, o preço diminui \$ 10. Assim, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x.$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2.$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo teste da primeira derivada. O preço correspondente é $p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de \$ 125.