Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 14: Máximos e mínimos

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo absoluto *ou* máximo global *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$*. O número* $f(c)$ *é chamado de* valor máximo*.*

Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo absoluto *ou* mínimo global *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$*. O número* $f(c)$ *é chamado de* valor mínimo*.*

Máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo absoluto *ou* máximo global *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor máximo.

Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo absoluto *ou* mínimo global *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor mínimo.

Um máximo ou mínimo absoluto é chamado de **extremo absoluto** ou **global**.

Máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo absoluto *ou* máximo global *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor máximo.

Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo absoluto *ou* mínimo global *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor mínimo.

Um máximo ou mínimo absoluto é chamado de **extremo absoluto** ou **global**.

- **Exemplo.** $f(x) = x^2$ possui mínimo absoluto em $x = 0$.

Máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo absoluto *ou* máximo global *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor máximo.

Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo absoluto *ou* mínimo global *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor mínimo.

Um máximo ou mínimo absoluto é chamado de **extremo absoluto** ou **global**.

- **Exemplo.** $f(x) = x^2$ possui mínimo absoluto em $x = 0$.
- **Exemplo.** $f(x) = -x^2$ possui máximo absoluto em $x = 0$.

Máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo absoluto *ou* máximo global *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor máximo.

Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo absoluto *ou* mínimo global *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *O número* $f(c)$ *é chamado de* valor mínimo.

Um máximo ou mínimo absoluto é chamado de **extremo absoluto** ou **global**.

- **Exemplo.** $f(x) = x^2$ possui mínimo absoluto em $x = 0$.
- **Exemplo.** $f(x) = -x^2$ possui máximo absoluto em $x = 0$.
- f tem um máximo absoluto em $c \Leftrightarrow -f$ tem um mínimo absoluto em c.

Máximos e mínimos locais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo local *ou* máximo relativo *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$ *próximo de* c*, ou seja, se existe um intervalo aberto* J *contendo* c *tal que* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in J$ *(e* $x \in I$*).*
Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo local *ou* mínimo relativo *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$ *próximo de* c*, ou seja, se existe um intervalo aberto* J *contendo* c *tal que* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in J$ *(e* $x \in I$*).*

Máximos e mínimos locais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo local *ou* máximo relativo *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$ *próximo de* c, *ou seja, se existe um intervalo aberto* J *contendo* c *tal que* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in J$ *(e* $x \in I$*).*
Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo local *ou* mínimo relativo *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$ *próximo de* c, *ou seja, se existe um intervalo aberto* J *contendo* c *tal que* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in J$ *(e* $x \in I$*).*

Um máximo ou mínimo local ou relativo é chamado de **extremo local** ou **relativo**.

Máximos e mínimos locais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição

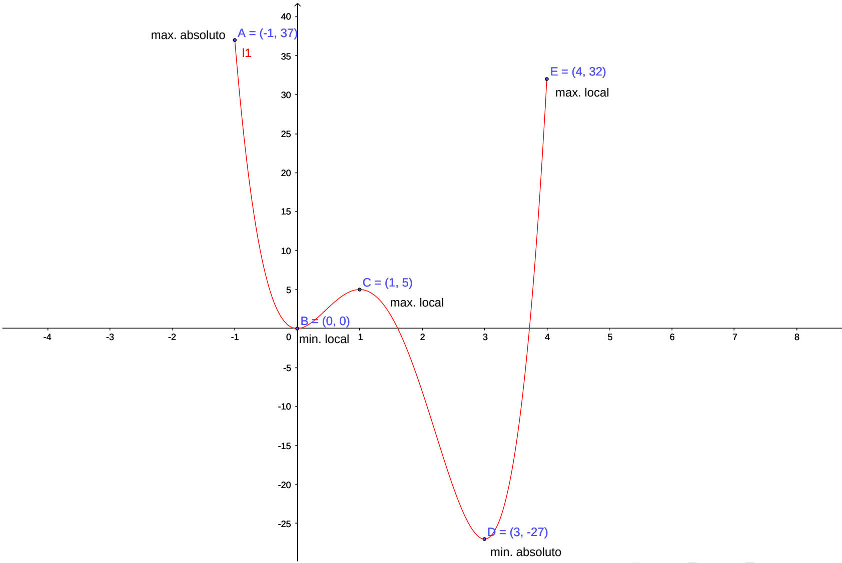
Dizemos que $c \in I$ *é um* máximo local *ou* máximo relativo *de* f *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$ *próximo de* c*, ou seja, se existe um intervalo aberto* J *contendo* c *tal que* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in J$ *(e* $x \in I$*).*
Dizemos que $c \in I$ *é um* mínimo local *ou* mínimo relativo *de* f *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in I$ *próximo de* c*, ou seja, se existe um intervalo aberto* J *contendo* c *tal que* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* $x \in J$ *(e* $x \in I$*).*

Um máximo ou mínimo local ou relativo é chamado de **extremo local** ou **relativo**.

- Um extremo absoluto é, em particular, um extremo local.

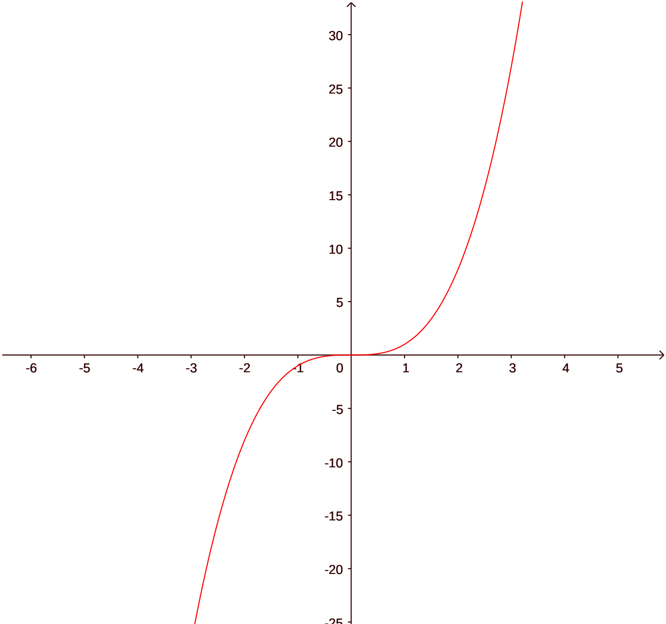
Máximos e mínimos

- **Exemplo.** $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, com $-1 \leq x \leq 4$



Máximos e mínimos

- **Exemplo.** $f(x) = x^3$ não possui extremos globais nem locais.



Existências máximos e mínimos absolutos

- O seguinte resultado assegura a existência de extremos globais para funções contínuas definidas em intervalos limitados e fechados:

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f possui máximo absoluto e mínimo absoluto.

Existências máximos e mínimos absolutos

- O seguinte resultado assegura a existência de extremos globais para funções contínuas definidas em intervalos limitados e fechados:

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f possui máximo absoluto e mínimo absoluto.

- Não podemos retirar as hipósteses sobre o intervalo.

  $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, não possui extremos absolutos (domínio é limitado mas não é fechado).

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, não possui extremos absolutos (domínio é fechado, mas não é limitado).

Existências máximos e mínimos absolutos

- O seguinte resultado assegura a existência de extremos globais para funções contínuas definidas em intervalos limitados e fechados:

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f possui máximo absoluto e mínimo absoluto.

- Não podemos retirar as hipósteses sobre o intervalo.

  $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, não possui extremos absolutos (domínio é limitado mas não é fechado).

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, não possui extremos absolutos (domínio é fechado, mas não é limitado).

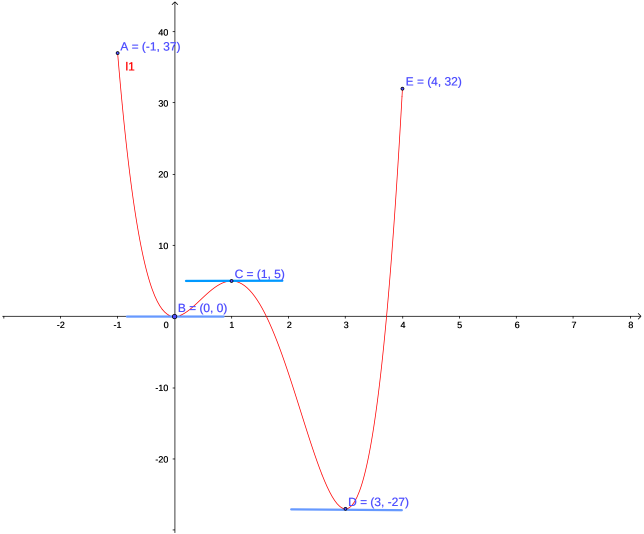
- Tampouco podemos retirar a hipóstese de continuidade. A função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \; -1 < x < 1 \\ 0, & \text{se } x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

  não possui extremos absolutos.

Encontrando máximos e mínimos locais

- Consideremos novamente a função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, com $-1 \leq x \leq 4$. Observe que nos pontos de máximo e mínimo locais, situados no interior do invervalo de definição, a reta tangente é horzontal.



Encontrando máximos e mínimos locais

- O seguinte resultado permite localizar máximos e mínimos locais para funções diferenciáveis:

Teorema

Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ *possua extremo local no ponto* c*, ponto interior do intervalo* I*. Se* f *é diferenciável em* c *então* $f'(c) = 0$*.*

Encontrando máximos e mínimos locais

- O seguinte resultado permite localizar máximos e mínimos locais para funções diferenciáveis:

Teorema

Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ possua extremo local no ponto c, ponto interior do intervalo I. Se f é diferenciável em c então $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Vamos supor que c é máximo local. Então, para todo h pequeno vale

$$f(c+h) \leq f(c) \qquad \Rightarrow \qquad f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

Consideremos as derivadas laterais:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \text{ se } h > 0 \;\Rightarrow\; f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \text{ se } h < 0 \;\Rightarrow\; f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Uma vez que $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$, necessariamente $f'(c) = 0$. $\square$

Encontrando máximos e mínimos locais

- **Observação.** Se $f'(c) = 0$, não necessariamente c é um extremo local. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, temos que $f'(0) = 0$ mas $x = 0$ não é extremo local.

Encontrando máximos e mínimos locais

- **Observação.** Se $f'(c) = 0$, não necessariamente c é um extremo local. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, temos que $f'(0) = 0$ mas $x = 0$ não é extremo local.
- **Exemplo.** $f(x) = |x|$ tem um mínimo em $x = 0$, porém $f'(0)$ não existe.

Encontrando máximos e mínimos locais

- **Observação.** Se $f'(c) = 0$, não necessariamente c é um extremo local. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, temos que $f'(0) = 0$ mas $x = 0$ não é extremo local.
- **Exemplo.** $f(x) = |x|$ tem um mínimo em $x = 0$, porém $f'(0)$ não existe.
- O teorema anterior sugere que os candidatos a máximos e mínimos locais de $f : I \to \mathbb{R}$ no interior de I são pontos onde a derivada se anula e aqueles onde a derivada não existe. Fazemos então a seguinte definição:

Definição

Um ponto crítico *da função $f : I \to \mathbb{R}$ é um número $c \in I$ tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Encontrando máximos e mínimos locais

- **Observação.** Se $f'(c) = 0$, não necessariamente c é um extremo local. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, temos que $f'(0) = 0$ mas $x = 0$ não é extremo local.
- **Exemplo.** $f(x) = |x|$ tem um mínimo em $x = 0$, porém $f'(0)$ não existe.
- O teorema anterior sugere que os candidatos a máximos e mínimos locais de $f : I \to \mathbb{R}$ no interior de I são pontos onde a derivada se anula e aqueles onde a derivada não existe. Fazemos então a seguinte definição:

Definição

Um ponto crítico *da função $f : I \to \mathbb{R}$ é um número $c \in I$ tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Ou seja: os candidatos a máximos e mínimos locais de $f : I \to \mathbb{R}$ no interior de I são seus pontos críticos.

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabemos que f possui extremos absolutos em $[a, b]$. Para encontrá-los, procedemos da seguinte forma:

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabemos que f possui extremos absolutos em $[a, b]$. Para encontrá-los, procedemos da seguinte forma:

  • Encontramos todos os pontos críticos de f no interior (a, b). Esses são candidatos a extremos locais e, portanto, candidatos a extremos absolutos. Calculamos o valor de f nesses pontos.

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabemos que f possui extremos absolutos em $[a, b]$. Para encontrá-los, procedemos da seguinte forma:

  • Encontramos todos os pontos críticos de f no interior (a, b). Esses são candidatos a extremos locais e, portanto, candidatos a extremos absolutos. Calculamos o valor de f nesses pontos.

  • Calculamos $f(a)$ e $f(b)$ (os extremos também são cadidatos a extremo absoluto).

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabemos que f possui extremos absolutos em $[a, b]$. Para encontrá-los, procedemos da seguinte forma:

  • Encontramos todos os pontos críticos de f no interior (a, b). Esses são candidatos a extremos locais e, portanto, candidatos a extremos absolutos. Calculamos o valor de f nesses pontos.

  • Calculamos $f(a)$ e $f(b)$ (os extremos também são cadidatos a extremo absoluto).

  • Comparamos os valores de f encontrados. O maior valor corresponde aos máximos absolutos e o menor valor, aos mínimos absolutos.

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, com $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, com $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.
- **Solução.** No intervalo $-\frac{1}{2} < x < 4$, devemos procurar pelos pontos críticos.
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$
Logo,
$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$
Esses são os candidatos a extremos absolutos no interior do intervalo de definição. Devemos comparar o valor de f nesses dois pontos com seu valor nas extremidades $x = -1/2$ e $x = 4$. Temos:
$$f(0) = 1 \qquad \underbrace{f(2) = -3}_{\text{mínimo absoluto}} \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \qquad \underbrace{f(4) = 17}_{\text{máximo absoluto}}.$$

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x - 2\text{sen}x$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.

Encontrando máximos e mínimos absolutos

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x - 2\text{sen}x$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.
- **Solução.** No interior do intervalo, $0 < x < 2\pi$, procuramos pelos pontos críticos.

$$f'(x) = 1 - 2\cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Calculamos f nesses dois pontos e nas extremidades do intervalo:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,68 \quad \leftarrow \text{mínimo abs.}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6,96 \quad \leftarrow \text{máximo abs.}$$

$$f(0) = 0 \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6,28.$$