Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 16: Derivadas e gráficos de funções

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Funções crescentes e decrescentes

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função.*
*Dizem*os *que* f *é* crescente *se, sempre que* $x_1, x_2 \in I$ *com* $x_1 < x_2$, *vale* $f(x_1) < f(x_2)$.
Dizemos que f *é* decrescente *se, sempre que* $x_1, x_2 \in I$ *com* $x_1 < x_2$, *vale* $f(x_1) > f(x_2)$.

Funções crescentes e decrescentes

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função.*
Dizem os que f *é* crescente *se, sempre que* $x_1, x_2 \in I$ *com* $x_1 < x_2$, *vale* $f(x_1) < f(x_2)$.
Dizemos que f *é* decrescente *se, sempre que* $x_1, x_2 \in I$ *com* $x_1 < x_2$, *vale* $f(x_1) > f(x_2)$.

- Oberve que f é crescente se, e somente se, $-f$ é decrescente.

Funções crescentes e decrescentes

Proposição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável.*

(a) Se $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, então* f *é crescente.*

(b) Se $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in I$*, então* f *é decrescente.*

Funções crescentes e decrescentes

Proposição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente.

Demonstração.

Vamos mostrar o caso (a).
Sejam $x_1, x_2 \in I$ quaisquer satisfazendo $x_1 < x_2$.
O Teorema do valor médio nos diz que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Porém, da hipótese temos que $f'(c) > 0$. Da fórmula acima concluímos então que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2).$$

O caso (b) se demonstra de forma análoga. $\square$

Funções crescentes e decrescentes

- **Exemplo.** Encontre os intervalos onde a funçao $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e decrecente.

Funções crescentes e decrescentes

- **Exemplo.** Encontre os intervalos onde a funçao $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e decrecente.
- **Solução.** Devemos encontrar os intervalos onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x \underbrace{\left(x^2 - x - 2\right)}_{(x+1)(x-2)}.$$

Portanto,

$$f'(x) = 0 \iff \quad x = 0, \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Temos o seguinte diagrama de sinais para $f'(x)$:

$$- - - - (\ -1\ ) + + + + (\ 0\ ) - - - - (\ 2\ ) + + + +$$

Portanto,

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 0) \quad \text{ou} \quad x \in (2, \infty) \quad \longrightarrow f \text{ é crescente.}$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \quad \text{ou} \quad x \in (0, 2) \quad \longrightarrow f \text{ é decrescente.}$$

Teste da derivada primeira

Proposição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Seja* $c \in I$ *um ponto crítico. Suponha que* f *seja derivável para pontos próximos de* c*, à esquerda e à direita de* c*.*

(a) Se o sinal de $f'(x)$ *mudar de positivo para negativo em* c*, então* c *é um máximo local de* f*.*

(b) Se o sinal de $f'(x)$ *mudar de negativo para positivo em* c*, então* c *é um mínimo local de* f*.*

(c) Se o sinal de $f'(x)$ *não mudar em* c*, então* c *não é nem máximo nem mínimo local de* f*.*

Teste da derivada primeira

Proposição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $c \in I$ um ponto crítico. Suponha que f seja derivável para pontos próximos de c, à esquerda e à direita de c.

(a) Se o sinal de $f'(x)$ mudar de positivo para negativo em c, então c é um máximo local de f.

(b) Se o sinal de $f'(x)$ mudar de negativo para positivo em c, então c é um mínimo local de f.

(c) Se o sinal de $f'(x)$ não mudar em c, então c não é nem máximo nem mínimo local de f.

Demonstração.

No caso (a), basta observar que f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita c. Portanto, c é necessariamente um ponto de máximo local.
Os casos (b) e (c) são tratados de forma similar. $\square$

Funções crescentes e decrescentes

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Funções crescentes e decrescentes

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.
- **Solução.** Obtivemos, no exemplo anterior, o seguinte diagrama de sinais para $f'(x)$:

$$- - - - (\ -1 \ ) + + + + (\ 0 \ ) - - - - (\ 2 \ ) + + + +$$

Portanto:
$x = -1$ e $x = 2$ são pontos de mínimo local, pois f é decrescente à esquerda e crescente à direita.
$x = 0$ é ponto de máximo local, pois f é crescente à esquerda e decrescente à direita.

Funções crescentes e decrescentes

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos locais da função $g(x) = x + 2\text{sen}(x)$.

Funções crescentes e decrescentes

- **Exemplo.** Encontre os máximos e mínimos locais da função $g(x) = x + 2\text{sen}(x)$.
- **Solução.** Temos $g'(x) = 1 + 2\cos(x)$. Assim

$$g'(x) = 0 \iff \cos(x) = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$$

Fazemos o diagrama de sinais de f', no intervalo $[0, 2\pi]$:

$$(\ 0\ ) + + + + (\ 2\pi/3\ ) - - - - (\ 4\pi/3\ ) + + + + (\ 2\pi\ )$$

Portanto:
$x = 2\pi/3 + k2\pi$ são pontos de máximo local, pois f é crescente à esquerda e decrescente à direita.
$x = 4\pi/3 + k2\pi$ são pontos de mínimo local, pois f é decrescente à esquerda e crescente à direita.

Concavidade de uma função

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável.*
Se o gráfico de f *estiver acima de todas as suas tangentes em* I*, dizemos que o gráfico é* côncavo para cima*.*
Se o gráfico de f *estiver abaixo de todas as suas tangentes em* I*, dizemos que o gráfico é* côncavo para baixo*.*

Concavidade de uma função

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável.*
Se o gráfico de f *estiver acima de todas as suas tangentes em* I*, dizemos que o gráfico é* côncavo para cima*.*
Se o gráfico de f *estiver abaixo de todas as suas tangentes em* I*, dizemos que o gráfico é* côncavo para baixo*.*

- Observe que o gráfico de f é côncavo para cima se, e somente se, o gráfico de $-f$ é côncavo para baixo.

Teste da concavidade

Proposição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função duas vezes diferenciável.*

(a) Se $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, então o gráfico de* f *tem concavidade para cima.*

(b) Se $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in I$*, então o gráfico de* f *tem concavidade para baixo.*

Teste da concavidade

Demonstração.

Vamos mostrar o caso (a).
Fixe $a \in I$. Devemos mostrar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \text{ para todo } x \in I, \text{ com } x \neq a.$$

Vamos considerar $x > a$ ($x < a$ é similar). Essa desigualdade equivale a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(a) \text{ para todo } x \in I, \text{ com } x \neq a.$$

Pelo Teorema do valor médio,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

para algum $c \in (a, x)$.
Como $f'' = (f')' > 0$, a função derivada é crescente e, portanto, $f'(a) < f'(c)$, o que nos dá a desigualdade procurada.
O caso (b) é análogo. $\square$

Concavidade

Definição

Um ponto de inflexão *do gráfico de* $y = f(x)$ *é um ponto onde há mudança de concavidade.*

Concavidade

- **Exemplo.** Analise a concavidade do gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Concavidade

- **Exemplo.** Analise a concavidade do gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.
- **Solução.** Temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x \Rightarrow f''(x) = 36x^2 - 24x - 24.$$

$$f''(x) = 0 \iff 3x^2 - 2x - 2 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

O diagrama de sinais de f'' é:

$$++++(\ \frac{1-\sqrt{7}}{3}\ )----(\ \frac{1+\sqrt{7}}{3}\ )++++$$

Portanto:
Concavidade para cima em $(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3})$ e $(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty)$.
Concavidade para baixo em $(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3})$.
Pontos de inflexão: $\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$.

Teste da derivada segunda

Proposição

Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ *possua derivada segunda contínua nas proximidades de* $c \in I$ *e que* c *seja um ponto crítico de* f *(ou seja,* $f'(c) = 0$*).*

(a) Se $f''(c) > 0$*, então* f *tem um mínimo local em* c*.*

(b) Se $f''(c) < 0$*, então* f *tem um máximo local em* c*.*

Teste da derivada segunda

Proposição

Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ *possua derivada segunda contínua nas proximidades de* $c \in I$ *e que* c *seja um ponto crítico de* f *(ou seja,* $f'(c) = 0$*).*

(a) Se $f''(c) > 0$*, então* f *tem um mínimo local em* c*.*

(b) Se $f''(c) < 0$*, então* f *tem um máximo local em* c*.*

Demonstração.

Vamos considerar o caso (a). Como a função $f''(x)$ é contínua nas proximidades de c e $f''(c) > 0$, temos que $f''(x) > 0$ para todo x em uma vizinhança de c.
Logo, nessa vizinhança, o gráfico de f tem concavidade para cima.
Isso significa que $f(x)$ está acima da reta tangente ao gráfico no ponto $(c, f(c))$, que é a reta horizontal $y = f(c)$ (pois $f'(c) = 0$).
Ou seja, $f(x) > f(c)$ para pontos x nessa vizinhança e c é mínimo local.
O caso (b) é análogo. $\square$

Teste da derivada segunda

- **Observação.** O teste da derivada segunda é inconclusivo quando esta se anula. Por exemplo, as funções

$$y = x^3, \quad y = x^4 \quad \text{e} \quad y = -x^4$$

são tais que $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$. No primeiro caso, $x = 0$ não é máximo nem mínimo (é um ponto de inflexão), no segundo, é um mínimo e, no terceiro, é um máximo.

Teste da derivada segunda

- **Exemplo.** Encontre os extremos locais e os pontos de inflexão de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Teste da derivada segunda

- **Exemplo.** Encontre os extremos locais e os pontos de inflexão de $f(x) = x^4 - 4x^3$.
- **Solução.**

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } \ x = 3.$$

Sinal de f':

$$----(\ 0\ )----(\ 3\ )++++$$

mínimo local: $x = 3$.

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Sinal de f'':

$$++++(\ 0\ )----(\ 2\ )++++$$

Pontos de inflexão: $x = 0$ e $x = 2$. Observe que $f''(3) > 0$ (mínimo local, pelo teste da derivada segunda).

Teste da derivada segunda

- **Exemplo.** Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

Teste da derivada segunda

- **Exemplo.** Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.
- **Solução.**

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(6-x)^{1/3} + \frac{1}{3}x^{2/3}(6-x)^{-2/3}(-1) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$

$f'(x) = 0$ apenas em $x = 4$. Não existe $f'(x)$ em $x = 0$ e $x = 6$.
Sinal de f':

$$- - - - (\ 0\ ) + + + + (\ 4\ ) - - - - (\ 6\ ) - - - -$$

$x = 0$ é ponto de mínimo local.
$x = 4$ é ponto de máximo local.
f é crescente em $(0, 4)$.
f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(4, \infty)$

Teste da derivada segunda

- **Solução (continuação).**

$$f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Sinal de f'':

$$- - - - (\ 0\ ) - - - - (\ 6\ ) + + + +$$

$x = 6$ é um ponto de inflexão.
concavidade para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(0, 6)$.
concavidade para cima em $(6, \infty)$.
Desenhe o gráfico usando o Geogebra!