Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 26: Cálculo de Áreas

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

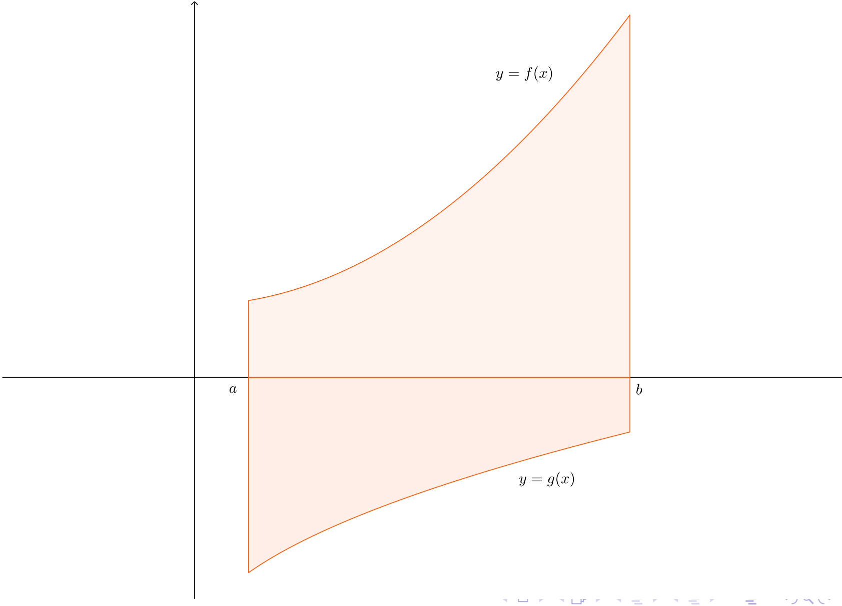
$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Área entre curvas

- Considere o seguite problema:

  Problema. Dadas duas funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $g(x) < f(x)$ para todo x, calcular a área da região S abaixo do gráfico de f, acima do gráfico de g, entre $x = a$ e $y = b$.

Área entre curvas



Área entre curvas

Usamos a mesma ideia de antes: aproximamos a região curvilínea em questão por uma poligonal.

Área entre curvas

Usamos a mesma ideia de antes: aproximamos a região curvilínea em questão por uma poligonal.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais, de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um número fixado:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Área entre curvas

Usamos a mesma ideia de antes: aproximamos a região curvilínea em questão por uma poligonal.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais, de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um número fixado:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Escolhemos um ponto qualquer $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ no k-ésimo intervalo, construímos o retângulo R_k de altura $h_k = f(x_k^*) - g(x_k^*)$.

Área entre curvas

Usamos a mesma ideia de antes: aproximamos a região curvilínea em questão por uma poligonal.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais, de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um número fixado:

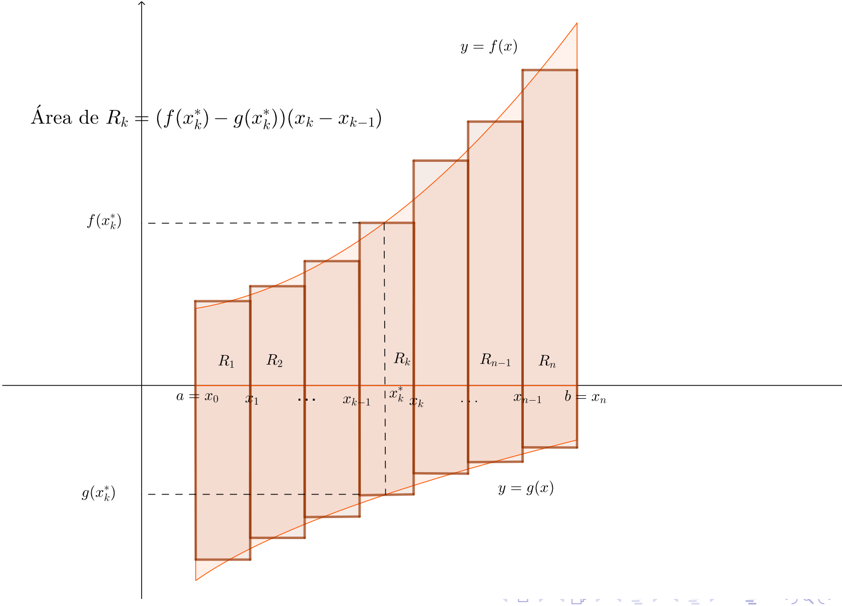
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Escolhemos um ponto qualquer $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ no k-ésimo intervalo, construímos o retângulo R_k de altura $h_k = f(x_k^*) - g(x_k^*)$.

A área de cada retângulo é

$$A(R_k) = \underbrace{(f(x_k^*) - g(x_k^*))}_{h_k}(x_k - x_{k-1}) = (f(x_k^*) - g(x_k^*))\Delta x.$$

Área entre curvas



Área entre curvas

A área dessa poligonal é

$$
\begin{aligned}
A_n = \text{área da poligonal} &= \sum_{k=1}^{n} A(R_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k^*) - g(x_k^*))\Delta x
\end{aligned}
$$

Área entre curvas

A área dessa poligonal é

$$\begin{aligned} A_n = \text{área da poligonal} &= \sum_{k=1}^{n} A(R_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k^*) - g(x_k^*))\Delta x \end{aligned}$$

Observe que essa expressão é a **somas de Riemann** da função $f - g$ associada à partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

e à escolha dos pontos x_k^*.

Área entre curvas

A área da região S é obtida tomando o limite das áreas das poligonais quando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{n\to\infty} A_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (f(x_k^*) - g(x_k^*))\Delta x}_{\text{somas de Riemann}} \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x))dx, \end{aligned}$$

desde que o limite exista.

Área entre curvas

A área da região S é obtida tomando o limite das áreas das poligonais quando $n \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \lim_{n\to\infty} A_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (f(x_k^*) - g(x_k^*))\Delta x}_{\text{somas de Riemann}} \\
&= \int_a^b (f(x) - g(x))dx,
\end{aligned}
$$

desde que o limite exista.

Ou seja:

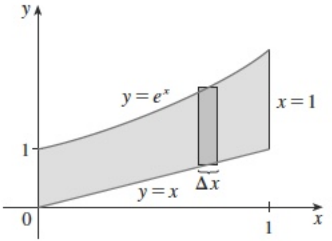
$$\boxed{A(S) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

Área entre curvas

- **Exemplo.** Calcule a área da região abaixo de $y = e^x$, acima de $y = x$, entre $x = 0$ e $x = 1$.

Área entre curvas

- **Exemplo.** Calcule a área da região abaixo de $y = e^x$, acima de $y = x$, entre $x = 0$ e $x = 1$.

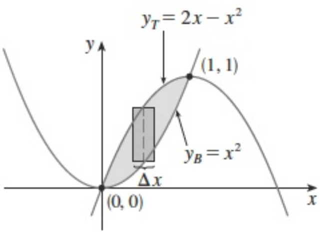


Solução. A região é limitada superiormente pela curva $y = e^x$ e limitada inferiormente pela curva $y = x$. Usamos a fórmula anterior com $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ e $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2}\right) - 1 = e - \frac{3}{2}.$$

- **Exemplo.** Calcule a área entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

- **Exemplo.** Calcule a área entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.



Solução. Primeiro encontramos os pontos de interseção das parábolas:

$$x^2 = 2x - x^2 \iff 2x^2 - 2x = 2x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Logo, os pontos de interseção são $(0,0)$ e $(1,1)$. A região é limitada superiormente por $y = 2x - x^2$ e limitada inferiormente por $y = x^2$ e está entre $x = 0$ e $x = 1$. Então a área total é

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx$$

Solução (continuação).

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = 2\int_0^1 (x - x^2)dx \\
&= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

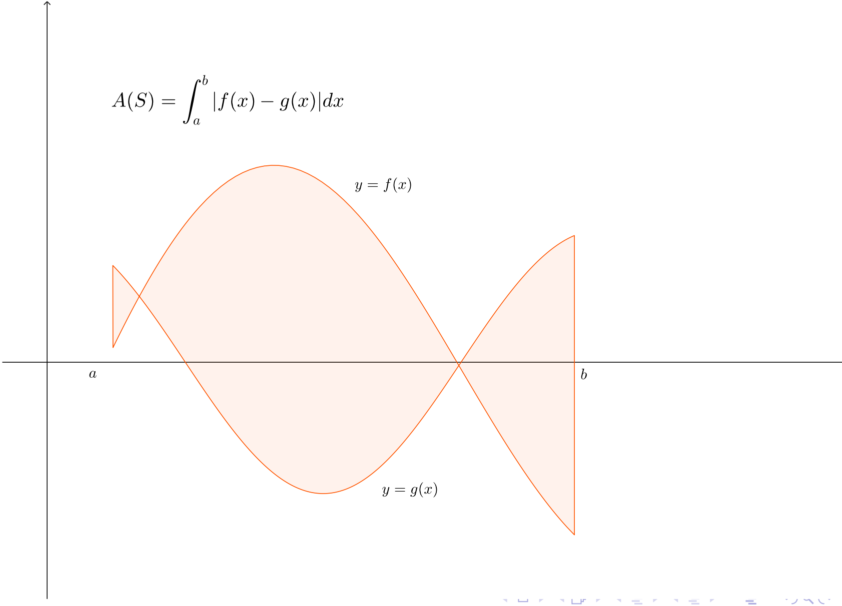
Área entre curvas

De uma modo geral, a área da região S limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, entre $x = a$ e $x = b$ (a princípio, não temos $f > g$ ou $g > f$ em todo intervalo $[a, b]$) é calculada como

$$\boxed{A(S) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx}$$

Área entre curvas

$$A(S) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

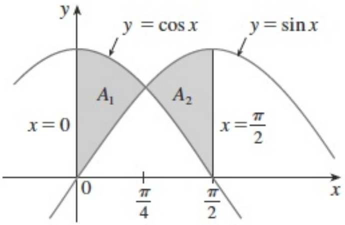


Área entre curvas

- **Exemplo.** Calcule a área da região entre $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, entre $x = 0$ e $x = \pi/2$.

Área entre curvas

- **Exemplo.** Calcule a área da região entre $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, entre $x = 0$ e $x = \pi/2$.



Solução. O único ponto de interseção ocorre quando $\operatorname{sen} x = \cos x$, isto é, quando $x = \pi/4$. Observe que $\cos x \geq \operatorname{sen} x$ quando $0 \leq x \leq \pi/4$ e $\operatorname{sen} x \geq \cos x$ quando $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$.

Solução (continuação). Portanto, a área requerida é

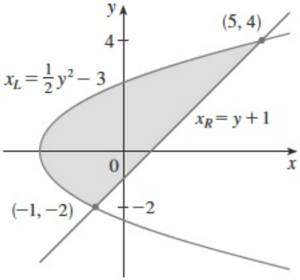
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x| dx = A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x) dx \\
&= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}$$

Note que, pela simetria da região, também poderíamos calcular a área como

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x) dx.$$

- **Exemplo.** Calcule a área entre a reta $y = x - 1$ e a parábola $y^2 = 2x + 6$.

▶ **Exemplo.** Calcule a área entre a reta $y = x - 1$ e a parábola $y^2 = 2x + 6$.



Solução. Os pontos de interseção da reta e da parábola satisfazem a equação

$$(x-1)^2 = 2x + 6.$$

Resolvendo, obtemos $x = -1$ e $x = 5$. Logo os pontos de interseção são $(-1, -2)$ e $(5, 4)$.

Solução (continuação). Em seguida, isolamos a variável x das duas equações, para obter x como função de y:

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 3$$

e

$$x = y + 1.$$

A região de interesse está entre as curva $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$, $x = y + 1$ onde $2 \leq y \leq 4$. Portanto, a área é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} [(y+1) - (\frac{1}{2}y^2 - 3)]dy \\ &= \int_{-2}^{4} (-\frac{1}{2}y^2 + y + 4)dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\right]_{-2}^{4} \\ &= -\frac{1}{6}64 + 8 + 16 - (\frac{4}{3} + 2 - 8) = 18. \end{aligned}$$

Solução (continuação).

Note que poderíamos calcular a área da região do exemplo anterior integrando com respeito a x, em vez de y, mas os cálculos seriam mais complicados.

É possível dividir a região em duas partes e calcular separadamente as áreas A_1 e A_2 (veja a figura abaixo). Observe que o método usado anteriormente é muito mais simples.