Cálculo Diferencial e Integral I

Propriedades de limites

Universidade Federal de Minas Gerais

Definição formal de limite

- Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende ao ponto a, e denotamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo número real $\epsilon > 0$ existir um outro número real $\delta > 0$ tais que

$$|f(x) - L| < \epsilon \ \ \textit{sempre que} \ \ |x - a| < \delta \ \ \textit{(com } x \neq a\textit{)} \ \ .$$

Intuitivamente, damos um erro $\epsilon > 0$ em torno do valor L. Então, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para valores de x a uma distância menor que δ de a (com $x \neq a$), $f(x)$ está a uma distância de L menor que o erro ϵ.

Definição formal de limite

- Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende ao ponto a, e denotamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo número real $\epsilon > 0$ existir um outro número real $\delta > 0$ tais que

$$|f(x) - L| < \epsilon \;\; \textit{sempre que} \;\; |x - a| < \delta \;\; \textit{(com } x \neq a\textit{)} \;\; .$$

Intuitivamente, damos um erro $\epsilon > 0$ em torno do valor L. Então, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para valores de x a uma distância menor que δ de a (com $x \neq a$), $f(x)$ está a uma distância de L menor que o erro ϵ.

- Temos definições análogas para limite à esquerda (considerando apenas pontos $x < a$) e à direita (considerando apenas pontos $x > a$).

Definição formal de limite

- Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a.

Definição

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende ao ponto a, e denotamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo número real $\epsilon > 0$ existir um outro número real $\delta > 0$ tais que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad |x - a| < \delta \quad (\textit{com } x \neq a) \quad .$$

Intuitivamente, damos um erro $\epsilon > 0$ em torno do valor L. Então, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para valores de x a uma distância menor que δ de a (com $x \neq a$), $f(x)$ está a uma distância de L menor que o erro ϵ.

- Temos definições análogas para limite à esquerda (considerando apenas pontos $x < a$) e à direita (considerando apenas pontos $x > a$).
- Essa definição formal de limite não será usada ao longo desse curso.

Propriedades de Limites

- Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x).$$

Então valem as seguintes propriedades:

Propriedades de Limites

- Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x).$$

Então valem as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

Propriedades de Limites

- Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x).$$

Então valem as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a}(cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x)$

Propriedades de Limites

- Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x).$$

Então valem as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a}(cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

Propriedades de Limites

- Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x).$$

Então valem as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a}(cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Propriedades de Limites

- Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x).$$

  Então valem as seguintes propriedades:

  1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
  2. $\lim_{x \to a}(cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x)$
  3. $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
  4. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

- Em resumo: o limite comuta com as operações matemáticas elementares.

Propriedades de Limites

- Supondo ainda que existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$, temos:

Propriedades de Limites

- Supondo ainda que existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$, temos:
  5. $\lim_{x\to a} c = c$

Propriedades de Limites

- Supondo ainda que existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$, temos:
  5. $\lim_{x \to a} c = c$
  6. $\lim_{x \to a} x = a$

Propriedades de Limites

- Supondo ainda que existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$, temos:
  5. $\lim_{x \to a} c = c$
  6. $\lim_{x \to a} x = a$
  7. $\lim_{x \to a} x^n = a^n \;\;$ onde $a \in \mathbb{N}$

Propriedades de Limites

- Supondo ainda que existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$, temos:
  5. $\lim_{x\to a} c = c$
  6. $\lim_{x\to a} x = a$
  7. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ onde $a \in \mathbb{N}$
  8. De um modo mais geral: $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$

Propriedades de Limites

- Supondo ainda que existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$, temos:
  5. $\lim_{x \to a} c = c$
  6. $\lim_{x \to a} x = a$
  7. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde $a \in \mathbb{N}$
  8. De um modo mais geral: $\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$
  9. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $a \geq 0$ se n é par.

Propriedades de Limites

- Supondo ainda que existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$, temos:

5. $\lim_{x\to a} c = c$
6. $\lim_{x\to a} x = a$
7. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ onde $a \in \mathbb{N}$
8. De um modo mais geral: $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$
9. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $a \geq 0$ se n é par.
10. De um modo mais geral: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$ se n é par.

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$
- **Solução:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) &\overset{\text{P.1 \& P.2}}{=} 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \\
&\overset{\text{P.5, P.6 \& P.7}}{=} 2(5^2) - 3(5) + 4 \\
&= 39
\end{aligned}$$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$
- **Solução:** Como $\lim\limits_{x \to -2} (5 - 3x) = 5 - 3(-2) = 11 \neq 0$. Então podemos usar P.4:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim\limits_{x \to -2} x^3 + 2x^2 - 1}{\lim\limits_{x \to -2} 5 - 3x} \\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \quad \text{(P.1, P.2, P.5, P.6 e P.7)} \\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}
$$

Propriedades de Limites

- De uma maneira mais geral, temos a seguinte propriedade:

  Se $f(x)$ é uma função polinomial ou racional então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

  (a no domínio de f, no caso de função racional)

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$
- **Solução:** Seja $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$.
  Como o denominador se anula, não podemos usar P.4 e nem P.11. Porém, podemos fazer operações algébricas de modo a cancelar o denominador:

  $$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \quad \text{se} \quad x \neq 1.$$

  Temos então:

  $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Propriedades de Limites

- Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ desde que os limites existam.

Propriedades de Limites

- Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ desde que os limites existam.
- **Exemplo.**

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Propriedades de Limites

- Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ desde que os limites existam.
- **Exemplo.**

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

onde

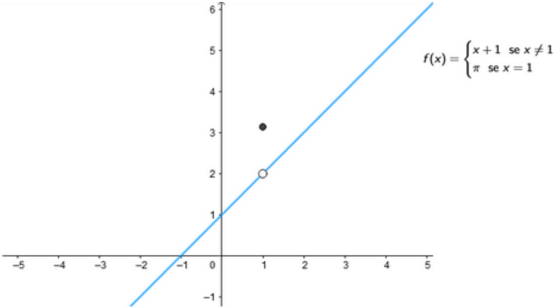
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

- **Solução:** Seja $g(x) = x + 1$. Temos que $f(x) = g(x)$ quando $x \neq 1$. Pela propriedade acima,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

Propriedades de Limites

- **Solução (continuação):** Veja no gráfico abaixo que, apesar de $f(1) = \pi$, temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, pois o limite quando $x \to 1$ não depende do valor da função em $x = 1$.



Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$
- **Solução:** Como o denominador de $f(h) = \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$ se anula, não podemos usar P.4.
  Fazendo uma simplificação algébrica:
  $$\frac{(3+h)^2-9}{h} = \frac{(9+6h+h^2)-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h \text{ se } h \neq 0.$$
  Portanto:
  $$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6.$$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
- **Solução:** Como no exemplo anterior, o denominador se anula e não podemos usar a P.4.
  Fazemos uma simplificação algébrica:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} &= \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \underbrace{\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3}}_{1} \\ &= \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}-3)} = \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} \text{ se } t \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{6}.$$

Propriedades de Limites

- Recordamos o seguinte resultado:

Proposição

Se $x = a$ pode ser acumulado, pelos dois lados, por pontos do domínio de $f(x)$, vale o seguinte:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \textit{se, e somente se,} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \textit{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Propriedades de Limites

- Recordamos o seguinte resultado:

Proposição

Se $x = a$ pode ser acumulado, pelos dois lados, por pontos do domínio de $f(x)$, vale o seguinte:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

Propriedades de Limites

- Recordamos o seguinte resultado:

Proposição

Se $x = a$ pode ser acumulado, pelos dois lados, por pontos do domínio de $f(x)$, vale o seguinte:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \textit{se, e somente se,} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \textit{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} |x| = 0$
- **Solução:** Como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

temos:

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0.$$

Pela proposição, temos $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Propriedades de Limites

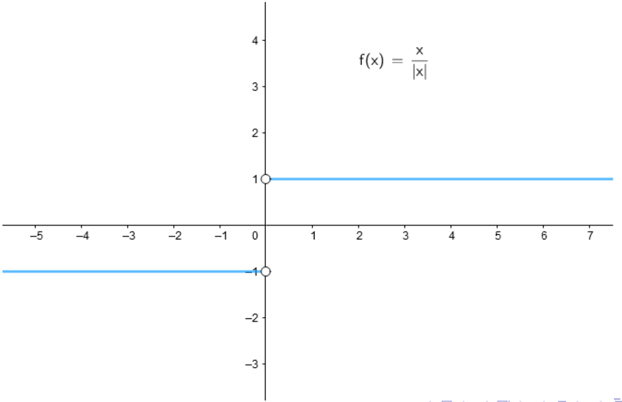
- **Exemplo.** $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.
- **Solução:** Temos

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \text{ se } x > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \text{ se } x < 0.$$

Veja o gráfico:



Propriedades de Limites

- **Solução (continuação):** Logo,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Pela proposição anterior, $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Propriedades de Limites

- **Exemplo** Determine se existe $\lim_{x \to 4} f(x)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

Propriedades de Limites

- **Exemplo** Determine se existe $\lim_{x\to 4} f(x)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

- **Solução:** Veja que

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = 0$$

e

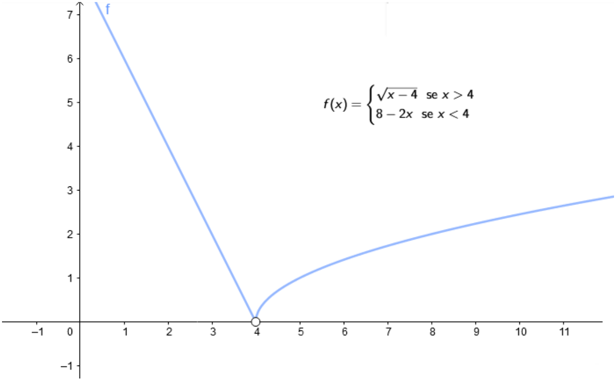
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8-2x) = 0.$$

Logo, pela proposição anterior,

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0.$$

Propriedades de Limites

- **Solução (continuação):** Veja o gráfico:



Temos $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 0$ e, portanto, $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$.

Propriedades de Limites

Proposição

Se $f(x) \leq g(x)$ *para todo* x *próximo de* a *(excetuando, eventualmente, o ponto* a*), então vale*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x),$$

desde que os limites existam.

Propriedades de Limites

Proposição

Se $f(x) \leq g(x)$ *para todo* x *próximo de* a *(excetuando, eventualmente, o ponto* a*), então vale*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x),$$

desde que os limites existam.

Teorema

(do confronto ou sanduíche) Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para todo* x *próximo de* a *(excetuando, eventualmente, o ponto* a*) e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Propriedades de Limites

- **Exemplo.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$
- **Solução:** Sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall\ x$. Assim

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1.$$

Como $x^2 > 0\ \forall\ x \neq 0$, multiplicando a desigualdade por x^2, obtemos

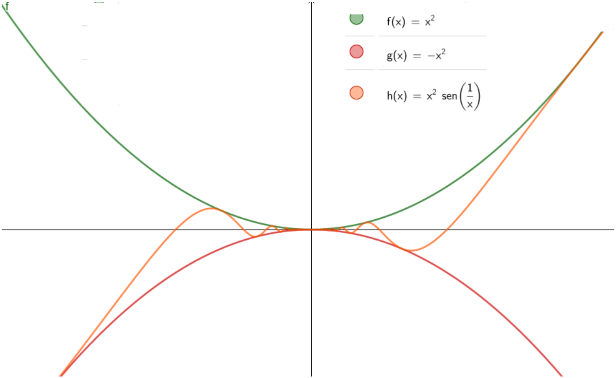
$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Faça, $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ e $h(x) = x^2$.
Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} h(x)$, pelo **teorema do confronto**, segue que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Propriedades de Limites

- **Solução (continuação):** Observe o gráfico:



$$\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0}(-x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$