Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 18: Esboço de gráficos

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

1º semestre /2020

Roteiro para esboçar uma curva

Seguimos os seguintes passos para esboçar a curva $y = f(x)$ (gráfico da função $f(x)$)

Roteiro para esboçar uma curva

Seguimos os seguintes passos para esboçar a curva $y = f(x)$ (gráfico da função $f(x)$)

- **A.** Determinar o **domínio** de $f(x)$, quando necessário.

Roteiro para esboçar uma curva

Seguimos os seguintes passos para esboçar a curva $y = f(x)$ (gráfico da função $f(x)$)

- **A.** Determinar o **domínio** de $f(x)$, quando necessário.
- **B. interseções com os eixos**:

  eixo x: soluções de $f(x) = 0$ (raízes de f);

  eixo y: ponto $(0, f(0))$.

Roteiro para esboçar uma curva

Seguimos os seguintes passos para esboçar a curva $y = f(x)$ (gráfico da função $f(x)$)

- **A.** Determinar o **domínio** de $f(x)$, quando necessário.
- **B. interseções com os eixos**:

  eixo x: soluções de $f(x) = 0$ (raízes de f);

  eixo y: ponto $(0, f(0))$.
- **C.** Estudar as **simetrias** do gráfico:

  Se $f(-x) = f(x)\ \forall\ x \rightsquigarrow$ **função par** $\rightsquigarrow$ simetria em relação ao eixo y;

  Se $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \rightsquigarrow$ **função ímpar** $\rightsquigarrow$ simetria em relação à origem;

  Se existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)\ \forall\ x \rightsquigarrow$ **função periódica**.

Roteiro para esboçar uma curva

- **D.** Determinar as **assíntotas**:

  Assíntota horizontal em $y = L$ se occorrer:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = L;$$

  Assíntota vertical em $x = a$ se occorrer:

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty.$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **D.** Determinar as **assíntotas**:

  Assíntota horizontal em $y = L$ se occorrer:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = L;$$

  Assíntota vertical em $x = a$ se occorrer:

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty.$$

- **E.** Determinar os **intervalos de crescimento e decrescimento**:

  crescimento $\rightsquigarrow f' > 0$;

  decrescimento $\rightsquigarrow f' < 0$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **D.** Determinar as **assíntotas**:

  Assíntota horizontal em $y = L$ se occorrer:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = L;$$

  Assíntota vertical em $x = a$ se occorrer:

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty.$$

- **E.** Determinar os **intervalos de crescimento e decrescimento**:

  crescimento $\rightsquigarrow f' > 0$;

  decrescimento $\rightsquigarrow f' < 0$.

- **F.** Determinar os **máximos e mínimos locais**. Buscar os pontos críticos (c tais que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe).
  Usar o **teste da derivada primeira** (estudar a mudança de sinal de f' em c) e/ou o **teste da derivada segunda** (mínimo local se $f''(c) > 0$, máximo local se $f''(c) < 0$).

Roteiro para esboçar uma curva

- **G.** Estudar a **concavidade**:

  concavidade para cima $\rightsquigarrow f'' > 0$;

  concavidade para baixo $\rightsquigarrow f'' < 0$;

  ponto de inflexão: ponto onde há mudança de concavidade.

Roteiro para esboçar uma curva

- **G.** Estudar a **concavidade**:

  concavidade para cima $\rightsquigarrow f'' > 0$;

  concavidade para baixo $\rightsquigarrow f'' < 0$;

  ponto de inflexão: ponto onde há mudança de concavidade.
- **H. Esboço da curva**, reunindo as informações e A. a G.

Roteiro para esboçar uma curva

- **G.** Estudar a **concavidade**:

  concavidade para cima $\rightsquigarrow f'' > 0$;

  concavidade para baixo $\rightsquigarrow f'' < 0$;

  ponto de inflexão: ponto onde há mudança de concavidade.
- **H. Esboço da curva**, reunindo as informações e A. a G.
- **I.** Desenhar o gráfico usando uma **ferramenta computacional** (Geogebra) e comparar o resultado obtido.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.
- **Solução.** Para isto, seguiremos os passos que descrevemos anteriormente:

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.
- **Solução.** Para isto, seguiremos os passos que descrevemos anteriormente:
- **Passo A:** O domínio de nossa função é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.
- **Solução.** Para isto, seguiremos os passos que descrevemos anteriormente:
- **Passo A:** O domínio de nossa função é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$$

- **Passo B:**
  - Interseção com eixo y:

$$f(0) = \frac{2.0^2}{0^2 - 1} = 0.$$

  - Interseção com eixo x:

$$f(x) = 0 \iff 2x^2 = 0 \iff x = 0$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = f(x),$$

logo, temos uma *função par*. Isto nos diz que o gráfico será *simétrico em relação ao eixo y*.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = f(x),$$

  logo, temos uma *função par*. Isto nos diz que o gráfico será *simétrico em relação ao eixo y*.

- **Passo D:** Assíntotas:
  - Horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2 \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 2 \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2.$$

    Pelo que verificamos no Passo C, já sabemos que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2.$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **(Continuação Passo D)**
  - Vertical: As candidatas a assíntotas verticais são as retas $x = -1$ e $x = 1$, pois nestes pontos o denominador vai a zero. Calculamos os limites:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2}{x^2-1} = 2\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2}{x^2-1} = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = -\infty.$$

Como o gráfico é simétrico em relação ao eixo y (Passo C), temos também

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

e

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty.$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo E:** Calculamos $f'(x)$ e estudamos seu sinal:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Como o denominador é sempre positivo, o sinal da derivada depende apenas do sinal do numerador. Temos então:

$$f'(x) > 0 \iff -4x > 0 \iff x < 0$$

e

$$f'(x) < 0 \iff -4x < 0 \iff x > 0,$$

ou seja, a função *cresce* quando $x < 0$ e *decresce* quando $x > 0$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo F:** Do passo anterior,

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Logo

$$f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

Este é um ponto de *máximo local*, pois f cresce quando $x < 0$ e decresce quando $x > 0$.
Os pontos nos quais a derivada não existe são os pontos onde temos assíntotas verticais, como vimos no Passo D.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo G:** Calculamos $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2-1)^2 - (-4x)[2(x^2-1)(2x)]}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-1)^2 + 16x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{(x^2-1)[-4(x^2-1) + 16x^2]}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **(Continuação Passo G)** Como o numerador é sempre positivo, para estudar o sinal de $f''(x)$ basta olhar para o denominador. Logo:

  $$f''(x) > 0 \iff (x^2-1)^3 > 0 \iff x^2-1 > 0 \iff x < -1 \text{ ou } x > 1$$

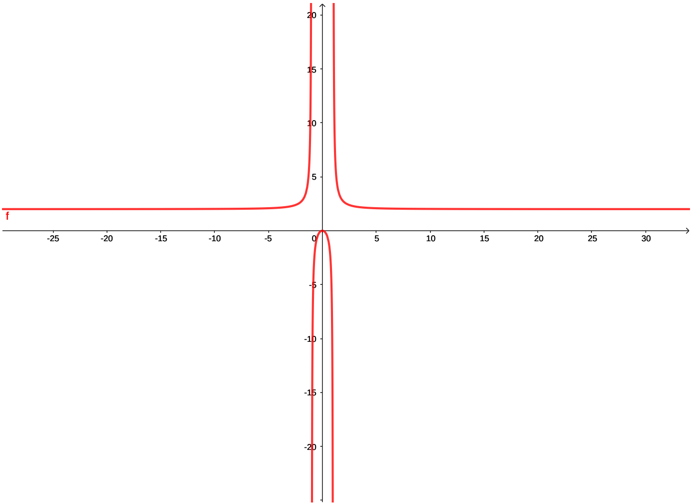
  e

  $$f''(x) < 0 \iff (x^2-1)^3 < 0 \iff x^2-1 < 0 \iff -1 < x < 1.$$

  Logo, o gráfico terá concavidade voltada para baixo quando $-1 < x < 1$ e para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo H:**



Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.
- **Solução.** Mais uma vez, seguiremos o roteiro:

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.
- **Solução.** Mais uma vez, seguiremos o roteiro:
- **Passo A:** O domínio da função é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; x > -1\}$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.
- **Solução.** Mais uma vez, seguiremos o roteiro:
- **Passo A:** O domínio da função é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; x > -1\}$$

- **Passo B:**
  - Interseção com eixo y:

$$f(0) = \frac{0^2}{\sqrt{0+1}} = 0.$$

  - Interseção com eixo x:

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)+1}} = \frac{x^2}{\sqrt{-x+1}},$$

ou seja, $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$. A função não é nem par nem ímpar.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)+1}} = \frac{x^2}{\sqrt{-x+1}},$$

  ou seja, $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$. A função não é nem par nem ímpar.

- **Passo D:** Assíntotas:
  - Horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt{x+1}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt{x+1}}{x+1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x+1}}{1+\frac{1}{x}} = \infty.$$

    Para $x \to -\infty$ não faz sentido calcular o limite, pois $x < -1$ não está no domínio da função. Logo, não temos assíntota horizontal.

Roteiro para esboçar uma curva

- **(Continuação Passo D)**
  - Vertical: A candidata a assíntota vertical é a reta $x = -1$, pois neste ponto o denominador vai a zero. Calculamos o limite:

    $$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = +\infty.$$

    Note que, outra vez, o limite quando $x \to -1^-$ não faz sentido, uma vez que pontos $x < -1$ estão fora do domínio da função.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo E:** Calculamos $f'(x)$ e estudamos seu sinal:

$$f'(x) = \left(2x(\sqrt{x+1}) - x^2\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\frac{1}{x+1} = \frac{4x(x+1)-x^2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Como $x > -1$, o denominador é sempre maior que zero. Logo, o sinal da derivada dependerá apenas do numerador. Assim, basta estudar o sinal da equação quadrática $3x^2+4x=0$. Esta é uma parábola com concavidade voltada para cima e raízes em $x=0$ e $x=-\frac{4}{3}$, o que nos dá

$$f'(x) > 0 \iff x < -\frac{4}{3} \text{ ou } x > 0,$$

$$f'(x) < 0 \iff -\frac{4}{3} < x < 0.$$

Restringindo os intervalos acima ao domínio de $f(x)$, temos que f é *crescente* em $(0,\infty)$ e *decrescente* em $(-1,0)$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo F:** Vimos no passo anterior que

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}},$$

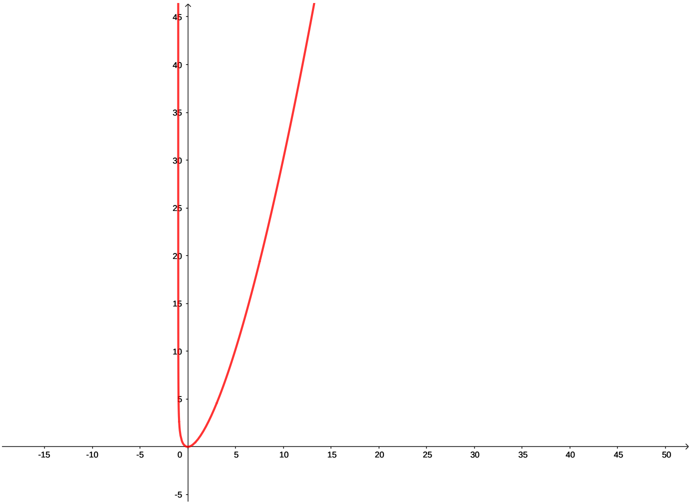
e que $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$. Este último não está no domínio da função, pois $-\frac{4}{3} < -1$, logo só nos preocupamos com $x = 0$. Evidentemente este é um ponto de *mínimo* da função, pois também vimos que f decresce quando $-1 < x < 0$ e cresce quando $x > 0$.
Com o ponto $x = -1$, onde a derivada não está definida, não precisamos nos preocupar, pois este ponto não está no domínio de f.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo G:** Temos:
$$f''(x) = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x+1)^{5/2}}.$$
Como o denominador é sempre positivo, para estudar o sinal de $f''(x)$ basta olhar para o numerador. Este, por sua vez, é um polinômio de grau 2, cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima e sem raízes reais *(verifique!)*. Logo,
$$3x^2 + 8x + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f''(x) > 0, \forall x > -1,$$
ou seja, o gráfico tem concavidade voltada para cima para todo x no domínio de f.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo H:**



Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = xe^x$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = xe^x$.
- **Solução. Passo A:** A função está definida para todo x em $\mathbb{R}$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = xe^x$.
- **Solução. Passo A:** A função está definida para todo x em $\mathbb{R}$.
- **Passo B:**
  - Interseção com eixo y:

$$f(0) = 0.e^0 = 0.$$

  - Interseção com eixo x:

$$f(x) = 0 \iff xe^x = 0 \iff x = 0$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que

$$f(-x) = -xe^{-x}.$$

Logo, f não é nem par nem ímpar, pois $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que

$$f(-x) = -xe^{-x}.$$

  Logo, f não é nem par nem ímpar, pois $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.
- **Passo D:** Assíntotas:
  - Horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} xe^{x} = \infty$$

    e, usando L'Hospital,

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^{x} = 0.$$

    Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.
  - Vertical: Como $f(x)$ é contínua em toda a reta (pois é o produto de funções contínuas), não há assíntota vertical.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo E:** Calcularemos $f'(x)$ e estudaremos seu sinal:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1).$$

Como $e^x > 0$ para todo x, o sinal da derivada f' depende do sinal de $x+1$. Logo,

$$f'(x) > 0 \iff x+1 > 0 \iff x > -1$$

e

$$f'(x) < 0 \iff x+1 < 0 \iff x < -1,$$

ou seja, a função *cresce* quando $x > -1$ e *decresce* quando $x < -1$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo F:** Vimos no passo anterior que

$$f'(x) = e^x(x+1),$$

donde temos que

$$f'(x) = 0 \iff x = -1.$$

Ainda, evidentemente este é um ponto de *mínimo* de $f(x)$, pois também vimos que f decresce quando $x < -1$ e cresce quando $x > -1$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo G:** Calculamos $f''(x)$:

$$f''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2).$$

Fazendo a mesma análise que fizemos para $f'(x)$, podemos verificar que

$$f''(x) > 0 \iff x+2 > 0 \iff x > -2$$

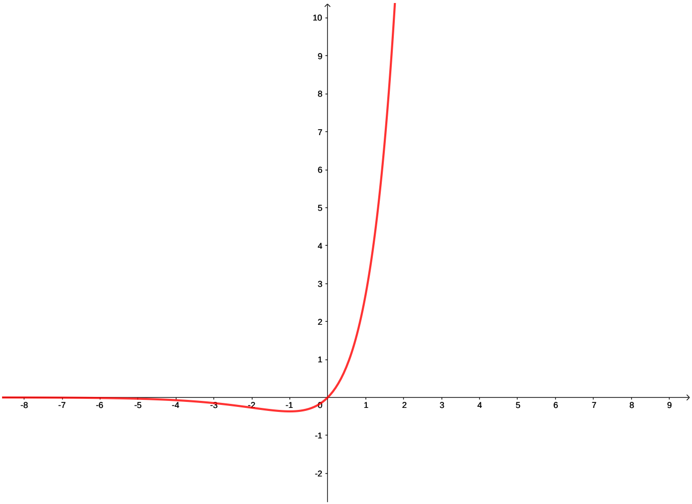
e

$$f''(x) < 0 \iff x+2 < 0 \iff x < -2.$$

Logo, o gráfico de f apresenta concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, -1)$ e para cima no intervalo $(-1, \infty)$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo H:**



Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$
- **Solução.**

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$
- **Solução.**
- **Passo A:** Como $2 + \operatorname{sen} x \neq 0$ para todo x, o domínio da função dada é toda a reta real.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$
- **Solução.**
- **Passo A:** Como $2 + \operatorname{sen} x \neq 0$ para todo x, o domínio da função dada é toda a reta real.
- **Passo B:**
  - Interseção com eixo y:
$$f(0) = \frac{\cos 0}{2 + \operatorname{sen} 0} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$
  - Interseção com eixo x:
$$f(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{2+\operatorname{sen}(-x)} = \frac{\cos x}{2-\operatorname{sen} x},$$

Logo, a função não é par nem ímpar, pois $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$. Mas, note que

$$f(x+2\pi) = \frac{cos(x+2\pi)}{2+\operatorname{sen}(x+2\pi)} = \frac{\cos(x)}{2+\operatorname{sen}(x)} = f(x),$$

ou seja, f tem período 2π. Então, basta considerarmos $0 \leq x \leq 2\pi$ e, no passo H, estender a curva por translação.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{2+\operatorname{sen}(-x)} = \frac{\cos x}{2-\operatorname{sen} x},$$

  Logo, a função não é par nem ímpar, pois $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$. Mas, note que

$$f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{2+\operatorname{sen}(x+2\pi)} = \frac{\cos(x)}{2+\operatorname{sen}(x)} = f(x),$$

  ou seja, f tem período 2π. Então, basta considerarmos $0 \leq x \leq 2\pi$ e, no passo H, estender a curva por translação.

- **Passo D:** Uma vez que a função é contínua em $\mathbb{R}$ e periódica, não possui assíntotas verticais nem horizontais.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo E:** Calculamos $f'(x)$ e estudamos seu sinal:

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)(2+\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cos(x)}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)+1}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}.$$

Como o denominador é sempre positivo, o sinal de f' depende apenas do numerador. Assim, f é crescente quando

$$f'(x) > 0 \iff -(2\operatorname{sen}(x)+1) > 0 \iff 2\operatorname{sen}(x)+1 < 0$$

$$\iff \operatorname{sen}(x) < -\frac{1}{2} \iff \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

e, analogamente, f é decrescente quando

$$f'(x) > 0 \iff \operatorname{sen}(x) > -\frac{1}{2} \iff x \in \left(0, \frac{7\pi}{6}\right) \text{ ou } x \in \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right).$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo F:** Vimos que

$$f'(x) = -\frac{2\,\mathrm{sen}(x) + 1}{(2 + \mathrm{sen}(x))^2}.$$

Logo, $f'(x) = 0 \iff \mathrm{sen}(x) = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$. Combinando isto com o estudo de sinal da derivada feito no item anterior, temos que $x = \frac{7\pi}{6}$ é ponto de *mínimo local*, enquanto $x = \frac{11\pi}{6}$ é ponto de *máximo local*.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo G:** Temos:

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1 - \text{sen}(x))}{(2 + \text{sen}(x))^3},$$

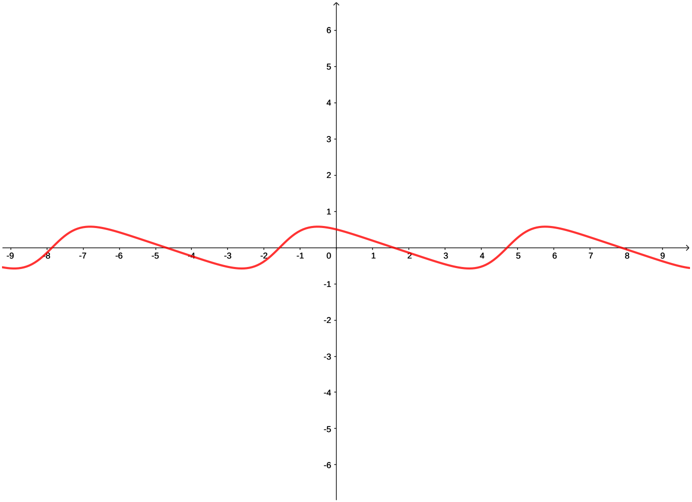
onde tanto o denominador quanto $1 - \text{sen}(x)$ são sempre positivos. Logo,

$$f''(x) > 0 \iff -2\cos(x) > 0 \iff \cos(x) < 0 \iff \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

Assim, f é côncava para cima se $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$ e, para baixo, nos intervalos $(0, \pi/2)$ e $(3\pi/2, 2\pi)$. Os pontos de inflexão são $(\pi/2, 0)$ e $(3\pi/2, 0)$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo H:**



Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \ln(4 - x^2)$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \ln(4 - x^2)$.
- **Solução.**

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \ln(4 - x^2)$.
- **Solução.**
- **Passo A:** A função ln está definida apenas em números positivos. Logo, nosso domínio é:

$$\{x; 4 - x^2 > 0\} = \{x; x^2 < 4\} = (-2, 2).$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Exemplo.** Esboce a curva $y = \ln(4 - x^2)$.
- **Solução.**
- **Passo A:** A função ln está definida apenas em números positivos. Logo, nosso domínio é:
$$\{x; 4 - x^2 > 0\} = \{x; x^2 < 4\} = (-2, 2).$$
- **Passo B:**
  - Interseção com eixo y:
  $$f(0) = \ln(4).$$
  - Interseção com eixo x:
  $$ln(4 - x^2) = 0 \iff 4 - x^2 = 1 \iff x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}.$$

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

$$f(-x) = \ln(4 - (-x)^2) = \ln(4 - x^2) = f(x),$$

logo, a fução é *par* e seu gráfico será *simétrico em relação ao eixo* y.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo C:** Temos que:

  $$f(-x) = \ln(4 - (-x)^2) = \ln(4 - x^2) = f(x),$$

  logo, a fução é *par* e seu gráfico será *simétrico em relação ao eixo* y.
- **Passo D:** Assíntotas:
  - Horizontal: Como o domínio é limitado, não faz sentido tomar o limite quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$. Logo, não há assíntotas horizontais.
  - Vertical: Procuramos por assíntotas verticais nas extremidades do domínio. Note que, quando $x \to -2^+$ ou $x \to 2^-$, temos $4 - x^2 \to 0^+$. Logo

    $$\lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = \lim x \to 2^- \ln(4 - x^2) = -\infty.$$

    Assim, as assíntotas verticais são as retas $x = -2$ e $x = 2$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo E:** Calculamos $f'(x)$ e estudamos seu sinal:

$$f'(x) = \frac{1}{4-x^2}(-2x) = \frac{-2x}{4-x^2}.$$

Como $-2 < x < 2$, o denominador é sempre positivo. Logo,

$$f'(x) > 0 \iff -2x > 0 \iff x < 0$$

e, analogamente,

$$f'(x) < 0 \iff x > 0.$$

Logo, f é crescente em $(-2, 0)$ e decrescente em $(0, 2)$.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo F:** Do passo anterior,

$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}.$$

Assim,

$$f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

Este é um ponto de *máximo local* da função, pois f cresce quando $x < 0$ e decresce quando $x > 0$.
Os pontos nos quais a derivada não existe são os pontos onde temos assíntotas verticais, como vimos no Passo D.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo G:** Temos:

$$f''(x) = \frac{-2(4-x^2) - (-2x)(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{-2x^2-8}{(4-x^2)^2}.$$

Note que o numerador é sempre negativo, enquanto o denominador é sempre positivo. Logo, $f''(x) < 0$ para todo x no domínio de f. Ou seja, a concavidade é sempre para baixo e não há pontos de inflexão.

Roteiro para esboçar uma curva

- **Passo H:**