Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 10: Derivadas de funções trigonométricas

Turma Online - Prof. Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Limite fundamental trigonométrico

- O seguinte é conhecido como **limite fundamental trigonométrico**:

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{sen}\theta}{\theta} = 1}$$

Limite fundamental trigonométrico

- O seguinte é conhecido como **limite fundamental trigonométrico**:

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{sen}\theta}{\theta} = 1}$$

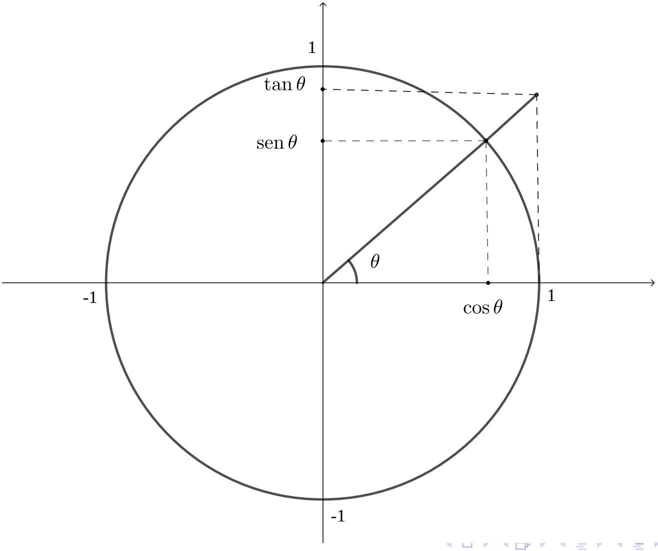
- Ele é consequência da seguinte desigualdade, válida para $\theta > 0$ pequeno ($0 < \theta < \pi/2$):

$$\frac{1}{2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

  Ela é obtida, comparando, no círculo trigonométrico, a área do setor circular definido pelo ângulo θ ($= \frac{1}{2}\theta$) com as àreas de dois triângulos retângulos, um inscrito e outro circunscrito ao setor.

Limite fundamental trigonométrico

- $$\frac{1}{2}\cos\theta \mathrm{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}.$$



Limite fundamental trigonométrico

- Temos:

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\mathrm{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Limite fundamental trigonométrico

- Temos:
$$\cos\theta < \frac{\theta}{\text{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$
- O limite fundamental trigonométrico segue do Teorema do sanduíche, uma vez que $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$.

Limite fundamental trigonométrico

- Temos:
$$\cos\theta < \frac{\theta}{\mathrm{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$
- O limite fundamental trigonométrico segue do Teorema do sanduíche, uma vez que $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$.
- **Exemplo.** Calcule $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}7\theta}{4\theta}$

Limite fundamental trigonométrico

- O seguinte limite é consequência do limite fundamental trigonométrico:
$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}.$$

Limite fundamental trigonométrico

- O seguinte limite é consequência do limite fundamental trigonométrico:

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}.$$

- Basta usar o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right) \\
&= \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} \\
&= \frac{-\mathrm{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} \\
&= -\underbrace{\left(\frac{\mathrm{sen}\theta}{\theta}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta + 1}\right)}_{\to 0} \to 0 \quad (\text{se } \theta \to 0)
\end{aligned}$$

Derivada da função seno

- Temos
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{sen} x) = \cos x}.$$

Derivada da função seno

- Temos
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{sen} x) = \cos x}.$$

- Se $f(x) = \mathrm{sen} x$, aplicando a fórmula do seno da soma, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x+h) - \mathrm{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\mathrm{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \frac{\mathrm{sen} h}{h} \right) \\ &= \mathrm{sen} x \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right)}_{=0} + \cos x \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen} h}{h} \right)}_{=1} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

- Seno da soma:

$$\mathrm{sen}(x+h) = \mathrm{sen} x \cos h + \cos x \,\mathrm{sen} h.$$

Derivadas das funções trigonométricas

- De maneira análoga, podemos demonstrar que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\mathrm{sen} x}$$

Nesse caso, usamos na demonstração a fórmula do cosseno da soma:

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \mathrm{sen} x \mathrm{sen} h.$$

Derivadas das funções trigonométricas

- De maneira análoga, podemos demonstrar que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\mathrm{sen} x}$$

Nesse caso, usamos na demonstração a fórmula do cosseno da soma:

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \mathrm{sen} x \mathrm{sen} h.$$

- **Exemplo.** Um objeto preso na extremidade de uma mola vertical tem seu movimento em relação ao tempo t descrito pela função $f(t) = 4\cos t$. Calcule, em função de t, a velocidade e a aceleração desse objeto.

Derivadas das funções trigonométricas

- De maneira análoga, podemos demonstrar que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\mathrm{sen} x}$$

  Nesse caso, usamos na demonstração a fórmula do cosseno da soma:

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \mathrm{sen} x \mathrm{sen} h.$$

- **Exemplo.** Um objeto preso na extremidade de uma mola vertical tem seu movimento em relação ao tempo t descrito pela função $f(t) = 4\cos t$. Calcule, em função de t, a velocidade e a aceleração desse objeto.
- **Exemplo.** Seja $f(x) = \cos x$. Calcule $f^{(27)}(x)$.

Derivadas das funções trigonométricas

- Usando a regra do quociente, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

- Lembrando:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \mathrm{cossec} x = \frac{1}{\mathrm{sen} x}$$

  são as funções **secante** e **cossecante**

Derivadas das funções trigonométricas

- Usando a regra do quociente, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

- Lembrando:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \mathrm{cossec} x = \frac{1}{\mathrm{sen} x}$$

  são as funções **secante** e **cossecante**

- Vale a seguinte identidade:

$$\boxed{\tan^2 x + 1 = \sec^2 x}$$

Derivadas das funções trigonométricas

- Usando a regra do quociente, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

- Lembrando:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \mathrm{cossec} x = \frac{1}{\mathrm{sen} x}$$

  são as funções **secante** e **cossecante**
- Vale a seguinte identidade:

$$\boxed{\tan^2 x + 1 = \sec^2 x}$$

- Definimos ainda a função **cotangente**:

$$\mathrm{cotan} x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen} x} \quad (= 1/\tan x \text{ quando } \quad \tan x \neq 0).$$

Derivadas das funções trigonométricas

Temos as seguinte fórmulas:

- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$$

Derivadas das funções trigonométricas

Temos as seguinte fórmulas:

- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$$
- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{cossec} x) = -\mathrm{cossec} x \, \mathrm{cotan} x}$$

Derivadas das funções trigonométricas

Temos as seguinte fórmulas:

- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$$
- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{cossec} x) = -\mathrm{cossec} x\, \mathrm{cotan} x}$$
- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{cotan} x) = -\mathrm{cossec}^2 x}$$

Derivadas das funções trigonométricas

Temos as seguinte fórmulas:

- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$$
- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{cossec} x) = -\mathrm{cossec} x \, \mathrm{cotan} x}$$
- $$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{cotan} x) = -\mathrm{cossec}^2 x}$$
- **Exemplo.** Seja $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. Para quais valores de x o gráfico de f tem tangente horizontal?

Resumo — derivadas das funções trigonométricas

$(\mathrm{sen} x)' = \cos x$	$(\mathrm{cossec} x)' = -\mathrm{cossec} x \,\mathrm{cotan} x$
$(\cos x)' = -\mathrm{sen} x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\mathrm{cotan} x)' = -\mathrm{cossec}^2 x$