Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 28: Integração por partes

Professor: Rogério Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2019

Integração por partes

- Considere duas funções diferenciáveis $f(x)$ e $g(x)$. A **regra do produto** para a derivada da função $f(x)g(x)$ se expressa da seguinte maneira:
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integração por partes

- Considere duas funções diferenciáveis $f(x)$ e $g(x)$. A **regra do produto** para a derivada da função $f(x)g(x)$ se expressa da seguinte maneira:
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
- Integrando essa expressão:

$$\int \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Integração por partes

- Considere duas funções diferenciáveis $f(x)$ e $g(x)$. A **regra do produto** para a derivada da função $f(x)g(x)$ se expressa da seguinte maneira:
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
- Integrando essa expressão:
$$\int \frac{d}{dx}(f(x)g(x))\, dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$
- Temos
$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Integração por partes

- Obtemos assim a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Integração por partes

- Obtemos assim a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

- Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ ($\Rightarrow du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$), temos

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Integração por partes

- **Exemplo.** $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \, dx$

Integração por partes

- **Exemplo.** $\int x \operatorname{sen} x \, dx$
- **Solução:** Fazendo $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, temos $du = 1dx$ e $v = -\cos x$. Logo, pela fórmula de integração por partes,

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante.

Integração por partes

- **Exemplo.** $\int \ln x \, dx$

Integração por partes

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \ln x\, dx$
- **Solução:** Fazendo $u = \ln x$ e $dv = dx$, temos $du = \frac{1}{x}\, dx$ e $v = x$. Logo, pela fórmula de integração por partes,

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x\, dx \\ &= x \ln x - \int 1\, dx \\ &= x \ln x - x + C,\end{aligned}$$

onde C é uma constante.

Integração por partes

- **Exemplo.** $\int t^2 e^t \, dt$

Integração por partes

- **Exemplo.** $\int t^2 e^t dt$
- **Solução:** Fazendo $u = t^2$ e $dv = e^t\,dt$, temos $du = 2t\,dt$ e $v = e^t$. Logo, pela fórmula de integração por partes,

$$\int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int te^t\,dt,$$

onde $\int te^t\,dt$ ainda é uma integral "complicada". O que faremos aqui será integrar este termo por partes. Assim, fazendo $u = t$ e $dv = e^t\,dt$, temos $du = dt$ e $v = e^t$. Logo,

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t + C.$$

Substituindo este resultado no que calculamos anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t\,dt &= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C)\\ &= e^t(t^2 - 2t + 2) + C_1,\end{aligned}$$

onde $C_1 = -2C$ é uma constante.

Integração por partes

- **Exemplo.** $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

Integração por partes

- **Exemplo.** $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$
- **Solução:** Fazendo $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, temos $du = e^x\, dx$ e $v = -\cos x$. Logo, pela fórmula de integração por partes,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

  Para resolver $\int e^x \cos x\, dx$, integraremos novamente por partes. Assim, fazendo $u = e^x$ e $dv = \cos x\, dx$, temos $du = e^x\, dx$ e $v = \operatorname{sen} x$. Logo,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Integração por partes

- **Solução (continuação)**
  Substituindo esta igualdade no que calculamos anteriormente, temos:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx,$$

ou seja,

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x).$$

Portanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C.$$

Integração por partes

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \arctan x \, dx$

Integração por partes

- **Exemplo.** $\displaystyle\int \arctan x\, dx$
- **Solução:** Fazendo $u = \arctan x$ e $dv = dx$, temos $du = \frac{1}{1+x^2}\, dx$ e $v = x$. Logo,

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx.$$

Para resolver o último termo, fazemos a substituição $t = 1 + x^2$. Assim, temos $dt = 2x\, dx$, ou seja, $\frac{1}{2}\, dt = x\, dx$, e

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Portanto,

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$