Cálculo Diferencial e Integral I

Aula 28: Volumes por cascas cilíndricas

Turma Online - Prof. Rogério Mol

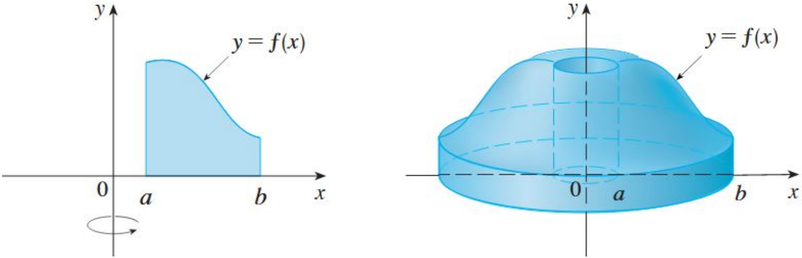
Universidade Federal de Minas Gerais

$1^{\underline{o}}$ semestre /2020

Volumes

- Considere um sólido S no espaço tridimensional, formado pela rotação em torno do eixo y, da região abaixo do gráfico da função contínua $f(x)$ (com $f > 0$) entre $x = a$ e $x = b$, onde $0 < a < b$.

Volumes



Volumes

- Como antes, tomamos uma partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = (b-a)/n$ e escolhemos como pontos intermediários os pontos médios $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Ou seja:

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Volumes

- Como antes, tomamos uma partição

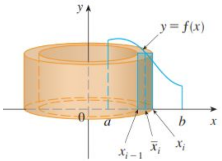
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

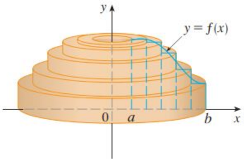
  do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos como pontos intermediários os pontos médios $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Ou seja:

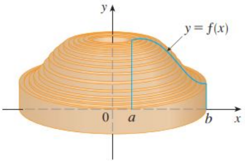
$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

- Sobre o k-ésimo intervalo, produzimos o retângulo que tem como base o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ e altura $f(\bar{x}_k)$. Giramos esse retângulo em torno do eixo y. O sólido resultante é uma "casca cilíndrica" S_k, de raio interno x_{k-1}, raio externo x_k e altura $f(\bar{x}_k)$.

Volumes







Volumes

- O volume dessa "casca cilíndrica" é:

$$\begin{aligned} V(S_k) &= \pi x_k^2 f(\bar{x}_k) - \pi x_{k-1}^2 f(\bar{x}_k) \\ &= \pi \left(x_k^2 - x_{k-1}^2 \right) f(\bar{x}_k) \\ &= 2\pi \underbrace{\frac{x_k + x_{k-1}}{2}}_{\bar{x}_k} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x} f(\bar{x}_k) \\ &= 2\pi \bar{x}_k f(\bar{x}_k) \Delta x \end{aligned}$$

Volumes

- O volume dessa "casca cilíndrica" é:

$$\begin{aligned} V(S_k) &= \pi x_k^2 f(\bar{x}_k) - \pi x_{k-1}^2 f(\bar{x}_k) \\ &= \pi \left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right) f(\bar{x}_k) \\ &= 2\pi \underbrace{\frac{x_k + x_{k-1}}{2}}_{\bar{x}_k} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x} f(\bar{x}_k) \\ &= 2\pi \bar{x}_k f(\bar{x}_k) \Delta x \end{aligned}$$

- O volume do sólido S é aproximado pelo volume da união dessas cascas cilíndricas:

$$V(S) \approx \sum_{k=1}^{n} V(S_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2\pi \bar{x}_k f(\bar{x}_k) \Delta x}_{\text{soma de Riemman}} .$$

Observe que a última expressão é a soma de Riemann da função $2\pi x f(x)$ associada à escolha da partição e de pontos intermediários.

Volumes

- Assim, o volume do sólido S é obtido como

$$\begin{aligned} V(S) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2\pi \bar{x}_k f(\bar{x}_k)\Delta x}_{\text{soma de Riemman}} \\ &= \int_a^b 2\pi x f(x)dx \end{aligned}$$

- Ou seja:

$$\boxed{V(S) = \int_a^b 2\pi x f(x)dx}$$

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

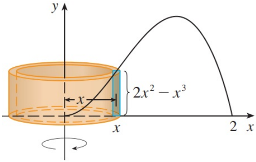
  Solução. A região considerada está entre $x = 0$ e $x = 2$. A casca cilíndrica tem raio $r = x$ e altura $h = 2x^2 - x^3$ (veja figura). Portanto

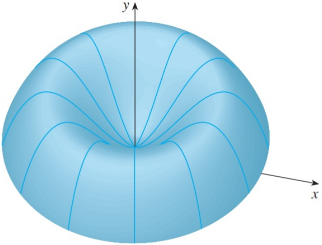
$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi \left(8 - \frac{32}{5}\right) = \frac{16}{5}\pi.$$

Volumes

Solução (continuação).





Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada entre $y = x$ e $y = x^2$.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada entre $y = x$ e $y = x^2$.

  Solução. Buscamos os pontos de interseção das duas curvas:

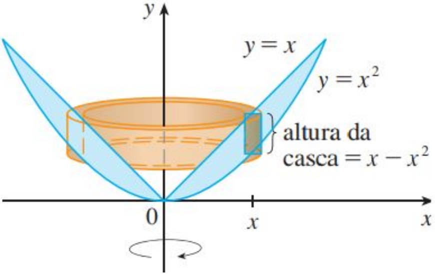
$$x = x^2 \iff x^2 - x = x(x-1) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

A casca cilíndrica tem raio $r = x$ e altura $h = x - x^2$ (veja figura). Portanto

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 2\pi \left(13 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\pi.$$

Solução (continuação).



Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

Volumes

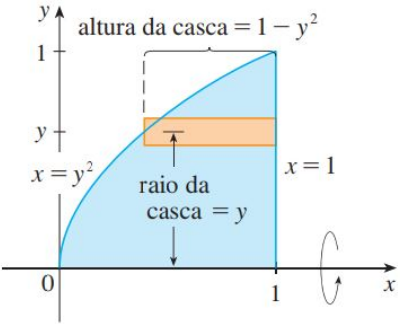
- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

  Solução. O método das cascas cilíndricas pode ser usado tomando a variável y como referência. A região em questão está entre as curvas $x = y^2$ (que corresponde a $y = \sqrt{x}$) e $x = 1$ (veja figura). A casca cilíndrica tem raio $r = y$ e altura $h = 1 - y^2$. Portanto

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 2\pi \left(12 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Solução (continuação).



Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = 2$ da região delimitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$.

Volumes

- **Exemplo.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = 2$ da região delimitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$.

  Solução. Nesse caso, a casca cilíndrica tem raio $r = 2 - x$ e altura $h = x - x^2$ (veja figura). Portanto

$$V = \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2)dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4 - 3\frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} - 1 + +1\right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Volumes

Solução (continuação).