定义 3-1.1 设A、B是任意两个集合，假如A的每一个元素是B的成员，则称A是B的子集，记作 $A\subseteq B$，即有

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\to x\in B)$$

$$A\subseteq A \qquad (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$$

定理 3-1.1 集合A和集合B相等的充分必要条件是这两个集合互为子集。

定义 3-1.2 如果集合A的每一个元素都属于B，但集合B中至少有一个元素不属于A，称A是B的真子集，记作 $A\subset B$。

$$A\subset B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\to x\in B)\wedge \exists x(x\in B\wedge x\notin A)$$

$$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$$

定义 3-1.3 不包含任意元素的集合是空集，记作 $\varnothing$。

$\varnothing=\{x\mid p(x)\wedge\neg p(x)\}$，$p(x)$是任意谓词

注意 $\varnothing\neq\{\varnothing\}$ 但 $\varnothing\in\{\varnothing\}$

定理 3-1.2 对于任意一个集合A，$\varnothing\subseteq A$。

定义 3-1.4 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，称该集合为全集，记作E。$\forall x\ x\in A$，因 $A\subseteq E$，$\therefore x\in E$

$\forall x(x\in E)$ 恒真

定义 3-1.5 给定集合A，由A的所有子集为元素组成的集合，称为A的幂集 $\wp(A)$

定理 3-1.3 如果有限集合A有n个元素，则其幂集 $\wp(A)$ 有 2^n 个元素

集合的运算

(1) 集合的交

$$S=A\cap B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

集合交运算的性质

a) $A\cap A=A$

b) $A\cap\varnothing=\varnothing$

c) $A\cap E=A$

d) $A\cap B=B\cap A$

e) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(2) 集合的并

$$S=A\cup B=\{x\mid(x\in A)\vee(x\in B)\}$$

集合并的运算具有以下性质：

a) $A\cup A=A$

b) $A\cup E=E$

c) $A\cup\varnothing=A$

d) $A\cup B=B\cup A$

e) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$

设 $A\subseteq B$，$C\subseteq D$，则 $A\cup C\subseteq B\cup D$

同理可证 $A\subseteq B\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

定理 3-2.1 设A,B,C为三个集合，则下列分配律成立。

a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

b) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

定理 3-2.2 a) $A\cup(A\cap B)=A$

b) $A\cap(A\cup B)=A$

定理 3-2.3 $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup B=B$ 或 $A\cap B=A$

集合的补

$S = A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\} = \{x \mid x \in A \land \neg(x \in B)\}$.

A-B 也称集合A和B的差

设E为全集，对任一集合A关于E的补 E-A. 称为 $\sim A$.

a) $\sim(\sim A) = A$

b) $\sim E = \varnothing$

c) $\sim\varnothing = E$

d) $A \cup \sim A = E$

e) $A \cap \sim A = \varnothing$.

$\sim(A \cup B) = \sim A \cap (\sim B)$

$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

$A - B = A \cap \sim B$

$A - B = A - (A \cap B)$

$A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$

若 $A \subseteq B$ 则 $\sim B \subseteq \sim A$.

$(B - A) \cup A = B$

集合的对称差

$S = A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$.

a) $A \oplus B = B \oplus A$

b) $A \oplus \varnothing = A$

c) $A \oplus A = \varnothing$.

d) $A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$

e) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

包容排斥原理

设A_1, A_2为有限集合，其元素的个数分别记为$|A_1|$, $|A_2|$

$|A_1 \cup A_2| \le |A_1| + |A_2|$

$|A_1 \cap A_2| \le \min(|A_1|, |A_2|)$.

$|A_1 - A_2| \ge |A_1| - |A_2|$

$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$.

定理3-3.1. $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 可以推广至n个集合情况

序偶与笛卡尔积

在集合中$\{a,b\} = \{b,a\}$ 但序偶$\langle a,b \rangle \ne \langle b,a \rangle$

令A和B是任意两个集合，若序偶的第一个成员是A的元素第二个成员是B的元素，所有这样的序偶集合，称为集合A和B的笛卡尔积或直积，记作$A \times B$.

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

若$C \ne \varnothing$，则

$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$

设A,B,C,D为四个非空集合，则

$A \times B \subseteq C \times D$

的充要条件时 $A \subseteq C$, $B \subseteq D$.

关系及其表示.

定义3-5.1 任一序偶的集合确定了一个二元关系R，R中任一序偶$\langle x,y \rangle$可记作$\langle x,y \rangle \in R$，或$xRy$。不在R中的任一序偶$\langle x,y \rangle$可记作$\langle x,y \rangle \notin R$，$x \not R y$

例如在实数关系$>$可记作$> = \{\langle x,y \rangle \mid x,y$是实数且$x>y\}$.

定义3-5.2 令R为二元关系，由$\langle x,y \rangle \in R$的所有x组成的集合dom R称为R的前域，即

$$\mathrm{dom}\, R = \{x \mid (\exists y)(\langle x,y \rangle \in R)\}.$$

~~使所有~~ 使$\langle x,y \rangle \in R$的所有y组成的集合ranR称作R的值域

即 $\mathrm{ran}\, R = \{y \mid (\exists x)(\langle x,y \rangle \in R)\}$.

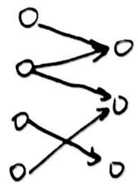
定义3-5.4. 设I_X是X上的二元关系且满足$I_X = \{\langle x,x \rangle \mid x \in X\}$则称$I_X$是X上的恒等关系

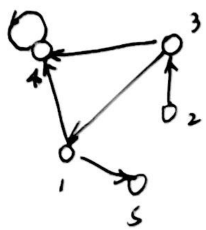
定义3-5.1. 若Z和S是从集合X到集合Y的两个关系，则Z,S的并，交，补，差仍是X到Y的关系.

设给定两个有限集合$X = \{x_1, x_2, \cdots x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots y_n\}$，R为从X到Y的一个二元关系，则对应于R有一个关系矩阵 $M_R = [r_{ij}]_{m \times n}$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & 当\langle x_i, y_j \rangle \in R \\ 0 & 当\langle x_i, y_j \rangle \notin R \end{cases}$$

关系图





1. 证明 $rts(R) \subseteq tsr(R)$

假设 $(x,y) \in rts(R)$ 根据传递自反闭包的定义，存在 $x=x_0, x_1, x_2 - x_n = y$ 使得

对于所有 $i=1,2,-n$，要么 $(x_{i-1}, x_i) \in R$，要么 $x_{i-1} = x_i$

由自反性，对每一对 $(x_{i-1}, x_i) \in R$. 有 $(x_i, x_{i-1}) \in R$.

因此对于 (x,y) 同样可以构造 $x=x_0, x_1 - x_n = y$ 使 $(x_i, x_{i-1}) \in s(R)$

由于 $s(R)$ 对称 $(x_{i-1}, x_i) \in s(R)$。构造 $tsr(R)$ 时. 由于 $s(R)$ 已经包含了 R 的所有元素 并且 $s(R)$ 是对称的. 传递闭包 $t(s(R))$ 将包含所有通过 $s(R)$ 可以推导出的元素对. $(x,y) \in tsr(R)$.

从而 $rts(R) \subseteq tsr(R)$

证 $tsr(R) \subseteq rts(R)$

假设 $(x,y) \in tsr(R)$. x,y 是 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 中元素

$(x_{i-1}, x_i) \in R$ $(x_i, x_{i-1}) \in R$

(x,y) 可以通过 $r(R)$ 中的自反元素和 $t(r(R))$ 中的传递性质推导出来.

因此 $(x,y) \in rts(R)$. 从而 $tsr(R) \subseteq rts(R)$.

综上 $rts(R) = tsr(R)$

$r(R) = R \cup \{\langle \text{海棠花}, \text{海棠花} \rangle, \langle \text{烟花}, \text{烟花} \rangle\}.$

$s(R) = R \cup \{\langle \text{桃花}, \text{爆米花} \rangle\}.$

$t(R) = R \cup \{\langle \text{爆米花}, \text{烟花}\}$

1. 自反性：由于R是自反的 对于$\forall a\in A$. $(a,a)\in R$. $(a,a)\in R^{-1}$

对称性：

设$(b,a)\in R^{-1}$, $(a,b)\in R$ 由于$(b,a)\in R$. $\therefore (a,b)\in R^{-1}$

传递性：设$(b,a)\in R^{-1}$ $(c,b)\in R^{-1}$，则$(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$

$(a,c)\in R$，则$(c,a)\in R^{-1}$. 证明R^{-1}的传递性.

由于R^{-1}具有自反,对称,传递性. 则如果证明R是A上一个等价关系

那么R^{-1}也是A上一个等价关系

2. $\forall a\in A$. $(a,a)\in R$且$(a,a)\in S$. $\therefore (a,a)\in R\cap S$.

设$(a,b)\in R\cap S$ 则$(b,a)\in R$且$(b,a)\in S$. 因此$(b,a)\in R\cap S$.

$(a,b)\in R\cap S$ 且 $(b,c)\in R\cap S$. $(a,c)\in R$且$(a,c)\in S$. $(a,c)\in R\cap S$.

$R\cap S$满足自反性,传递性与对称性. 所以$R\cap S$也是A上的等价关系

关系的性质

$(T\circ S)^c = S^c \circ T^c$

1. 自反 $(\forall x)(x\in X \to xRx)$ $\langle x,x\rangle \in R$ 关系矩阵对角元素为1

2. 对称 $(\forall x)(\forall y)(x\in X \wedge y\in X \wedge xRy \to yRx)$ 关系矩阵对称

$\langle x,y\rangle \in R$ 则 $\langle y,x\rangle \in R$

3. 传递 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in X \wedge y\in X \wedge z\in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$

$\langle x,y\rangle \in R$. $\langle y,z\rangle \in R$. 则 $\langle x,z\rangle \in R$.

4. 反自反. $(\forall x)(x\in X \to \langle x,x\rangle \notin R)$ 对角线为0

5. 反对称 $(\forall x)(\forall y)(x\in X \wedge y\in X \wedge x\neq y \wedge xRy \to y\not R x)$

$\langle x,y\rangle \in R$. $\langle y,x\rangle \notin R$. 以主对角线对称元素不同时为1

$(\forall x)(\forall y)(x\in X \wedge y\in X \wedge xRy \wedge yRx \to x=y)$

R为X到Y的关系 S为Y到Z的关系

$R\circ S = \{\langle x,z\rangle \mid x\in X \wedge z\in Z \wedge (\exists y)(y\in Y \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)\}$

$M_{R\circ S} = M_R \circ M_S = [w_{ik}]$

$w_{ik} = \bigvee_{j=1}^{n} (u_{ij} \wedge v_{jk})$

$R^c = \{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$

$(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$

$(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$

$(A\times B)^c = B\times A$

$(\overline{R})^c = \overline{R^c}$ $\overline{R} = A\times B - R$. $\langle x,y\rangle \in (\overline{R})^c \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \overline{R} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \notin R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \notin R^c$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \overline{R^c}$

$(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$ $R_1 - R_2 = R_1 \cap \overline{R_2}$

$(R_1-R_2)^c = (R_1 \cap \overline{R_2})^c = R_1^c \cap (\overline{R_2})^c$

$= R_1^c \cap \overline{R_2^c} = R_1^c - R_2^c$