

Falling tower

Kudlankográl GCHD



Název družstva: Kudlankográl GCHD

Škola: Gymnázium Christiana Dopplera

Adresa: Zborovská 621/45, Praha 5 - Malá Strana, 150 00

FALLING TOWER

Úloha Turnaje Mladých Fyziků pro rok 2020

Obsah

Popis zadání.....	3
Překlad zadání	3
Abstrakt	4
Úvodní pozorování	4
Experimenty s nízkou věží	5
Teoretické úvahy a výpočty.....	5
Odvozování úhlu dopadu	6
Určování koeficientu tření.....	6
Korekce pro změnu výšky těžiště	8
Předpověď tvaru věže po dopadu	8
Simulace pro konečný pád věže	9
Závěrečné srovnání s experimenty.....	10
Závěr	11
Literatura	12

Popis zadání

Identical discs are stacked one on top of another to form a freestanding tower. The bottom disc can be removed by applying a sudden horizontal force such that the rest of the tower will drop down onto the surface and the tower remains standing. Investigate the phenomenon and determine the conditions that allow the tower to remain standing.

Překlad zadání

Stejné disky jsou naskládány na sobě tak, že tvoří samostatně stojící věž. Spodní disk může být odstraněn působením náhlé vodorovné síly tak, že zbytek věže klesne na podložku a věž zůstane stát. Prozkoumejte tento jev a určete podmínky, které umožní, aby věž zůstala stát.

Abstrakt

Zabývali jsme se experimenty s vysokými i nízkými věžemi. Věže jsme stavěli z válců o malé výšce. Využívali jsme mince desetikorunové i jednokorunové, ale nakonec jsme zůstali u dřevěných žetonů od dámy. Vytvořili jsme teorii, kde se nám podařilo poměrně úspěšně předvídat úhel, pod kterým dopadá věž na podložku po vytržení spodního dílu. Dále jsme vytvořili simulaci předpovídající tvar nově vzniklé věže. Teorie i simulace však fungují pouze pro nevysoké věže.

Úvodní pozorování

Naše věže jsme vždy stavěli ze stejných dílů na rovné podložce a spodní díl jsme vytrhávali provázkem. Vytržení jsme prováděli nedefinovaně. Naše experimenty jsme natáčeli na vysokorychlostní kameru.

Nejdříve jsme experimentovali s mincemi: jednokorunovými a desetikorunovými. Ovšem z důvodu nehomogenity reliéfu jsme od daných experimentů upustili. Výsledky se právě z důvodu nehomogenity povrchů dosti lišily (při pohybu mince nadskakovaly), což jsme nijak nemohli předvídat.

Následně jsme začali experimentovat s žetony, ovšem i zde nebylo bez problémů. Při vysokých věžích nejsme schopni určit, jakým způsobem se chovají jednotlivé žetony, viz Obrázek 1, kde je vidět věž před vytrhnutím, a Obrázek 2, kde je vidět věž po vytrhnutí. Navíc při dopadu se věž zvlnila. Po mnoha dalších experimentech jsme se vzdali vize spočítat, nebo jen simulovat zvlnění vysoké věže. Nejvíce jsme se obávali nelinearity síly pružnosti jednotlivých žetonů. Výsledků zvlnění je možno si povšimnout na Obrázku 3, kde vidíme věž před vytržením spodního kamene, a Obrázku 4, kde vidíme věž, která již dopadla a zvlnila se. Při větším počtu žetonů se věž



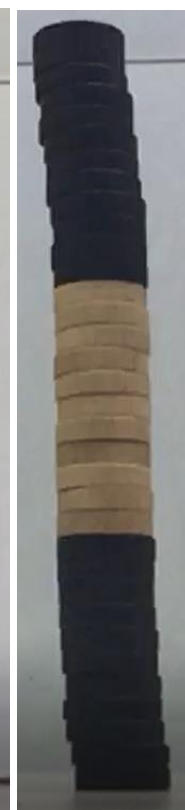
Obrázek 1



Obrázek 2



Obrázek 3



Obrázek 4

Věž z 24
kamenů
před
dopadem

Věž z 24
kamenů
při dopadu

Věž z 36
kamenů
dopadem

Věž z 36
kamenů
po dopadu



Obrázek 5



Obrázek 6



Obrázek 7

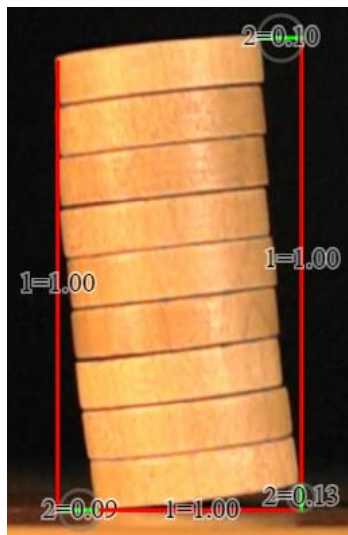
vlní ještě více. Samotná vysoká věž je ovšem nestabilní, což je způsobeno nerovnostmi na povrchu jednotlivých kamenů. U malého počtu kamenů jsou tyto nerovnosti zanedbatelné, ale ve vysokých věžích takové nerovnosti působí i v klidovém stavu velkou nestabilitu. Věž ze 48 žetonů nám vždy spadla, a tak Vám ukážeme obrázky, které vezmeme v časový okamžik bezprostředně po rozšíření celé vlny: Obrázek 5, Obrázek 6, Obrázek 7.

Proto jsme se začali zabývat nevysokými věžemi. V této oblasti se nám také podařilo dosáhnout některých výsledků.

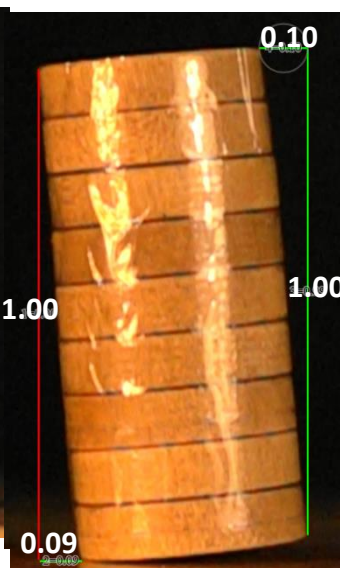
Experimenty s nízkou věží

Po několika prvních experimentech jsme dospěli k závěru, že bychom mohli nevysokou věž aproximovat za tuhé těleso a díky tomu něco počítat. Adekvátnost naší aproximace prosím posuďte na Obrázku 8 a Obrázku 9.

Na Obrázku 8 vidíte dopadající věž o devíti kamenech, které byly původně volně položené. Na Obrázku 9 vidíte dopadající věž o devíti kamenech, kterým jsme pomohli stát se tuhým tělesem užitím izolepy.



Obrázek 8



Obrázek 9

Díky naší vysokorychlostní kameře jsme schopni určit časy s přesností na milisekundy.

Vymezili jsme si 3 časy: čas t_0 , kdy se vytrháváný kámen uvede do relativního pohybu vůči zbytku věže, čas t_1 , kdy vytrháváný kámen přestane působit na zbytek věže a čas t_2 , kdy se zbytek věže dotkne země.

Teoretické úvahy a výpočty

V této části práce budeme postupovat k vyvození vztahů, jimiž se budeme snažit popsat některé veličiny, které se během našeho experimentu mění. Konkrétně se budeme zabývat úhlem, který svírají žetony s podložkou. Tento úhel budeme ověřovat v čase dopadu t_2 .

Uvažujeme tak, že jelikož se vytrháváný kámen pohybuje ve směru osy x rychleji, než zbytek věže, tak na věž působí třecí síla ve směru osy x . V celém textu uvažujeme, že třecí síla má vždy stejnou velikost a to

$$F_T = N\mu,$$

Kde N je síla reakce podložky a μ je koeficient dynamického tření (který pro dřevo zdá se být většinou dvakrát menší, než koeficient statického tření)

Odvozování úhlu dopadu

Nevysokou věž můžeme považovat za tuhé těleso. Nalezneme moment síly M působící na věž¹:

$$M(t) = N * e(t) + F_T * \frac{q}{2}$$

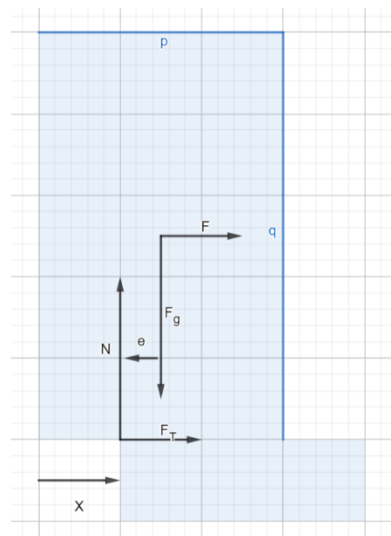
$$F_T = mg\mu$$

$$N = mg$$

$$e(t) = x(t) - \frac{p}{2}$$

$$M(t) = mg \left(x(t) - \frac{p}{2} \right) + \frac{mgq\mu}{2}$$

Problém je v určování oné funkce $x(t)$, ovšem nyní my si dovolíme tvrdit, že $p/2$ a $x(t)$ jsou velice malé, proto bychom rádi ignorovali existenci členu $mg \left(x(t) - \frac{p}{2} \right)$. Naší hypotéze o zanedbání daného členu ještě pomáhá fakt, že polovinu dráhy bude příspěvek do celkového momentu kladný, druhou část dráhy bude ovšem záporný. V takovém případě zjistíme, že M se stává, v rozmezí časů od t_0 do t_1 konstantní. Nyní jsme schopni určit úhel φ , o který se před dopadem věže na zem odkloní od vodorovné roviny:



Obrázek 10 – Náčrtek sil ve věži

$$\varphi_f = \omega(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \varepsilon (t_1 - t_0)^2$$

$$\omega_f = \frac{M}{J} (t_1 - t_0)$$

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{F_t q}{2J} = \frac{mgq\mu}{2J}$$

$$\varphi_f = \frac{mgq\mu}{2J} (t_1 - t_0)(t_2 - t_1) + \frac{mgq\mu}{4J} (t_1 - t_0)^2,$$

Kde t_0 je chvíle, ve kterou začne na těleso působit moment síly, t_1 je chvíle, ve kterou vylétá spodní kámen a přestal působit momentem na věž, t_2 je chvíle, kdy věž dopadla na podložku.

Určování koeficientu tření

Zde jsme určovali koeficient dynamického tření. Vzali jsme dva žetony a úderem jsme udělili jednomu počáteční rychlost. Dále jsme daný pohyb natočili a z uražené dráhy a doby, po kterou se těleso zastavovalo, jsme určili koeficient tření:

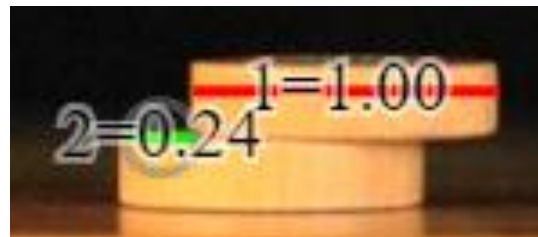
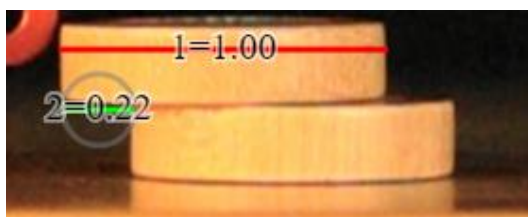
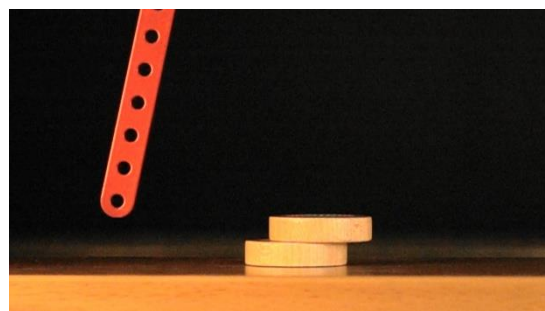
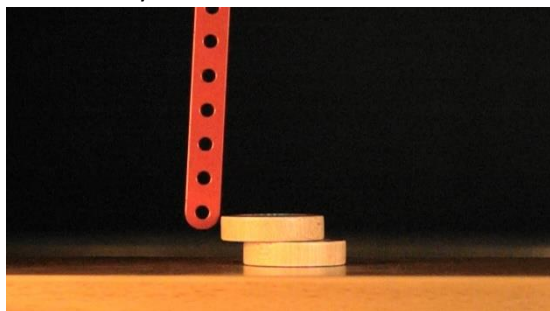
$$\ddot{s} = \mu g$$

$$s = \frac{1}{2} \mu g t^2$$

$$\mu = \frac{2s}{gt^2}$$

¹ Zde neuvažujeme fakt, že síla N nebude vždy působit ve směru kolmém na kameny, což dále v práci potvrzujeme videem (Potvrzujeme, že opravdu můžeme tyto změny zanedbat) i simulací.

Zde obrázky v časech 42ms a 115ms:



Obrázky 11 až 15

Je-li velikost jednoho žetonu $p = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ (červeně označeno), tak uražená vzdálenost $s = 0,46p = 0,0138 \text{ m}$, t je rozdíl časů, což znamená $t = 0,073 \text{ s}$. Odtud spočteme $\mu = \frac{2s}{gt^2} \cong 0,26$, což je dosti uvěřitelné (klidové tření vychází kolem 0,5, na internetu jsme dohledali klidové tření dřevo na dřevu 0,65 a dynamické tření 0,3 – asi 2krát menší, což je i náš případ)

Nyní pro výpočet finálního úhlu nám již zbývá určit moment setrvačnosti naší věže (jako tuhého tělesa) a dosadit odměřené hodnoty.

$$J = \frac{1}{12} m(3r^2 + l^2) = \frac{1}{12} m \left(\frac{3}{4} p^2 + q^2 \right) = \frac{i}{12} m_i \left(\frac{3}{4} p^2 + i^2 q_i^2 \right),$$

Kde m_i je hmotnost jednoho žetonu, p je průměr žetonu, q_i je výška kamenu a i je počet žetonů ve věži. Po dosazení pro naši věž:

m_i	0,002g
p	0,03m
q_i	0,007m
i	9

$$J = 0,00000692 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$$

$$\varphi_f = 208,98(t_1 - t_0)(t_2 - t_1) + 208,98/2(t_1 - t_0)^2$$

Z videa jsme zjistili: $t_0 = 0,017 \text{ s}$, $t_1 = 0,036 \text{ s}$, $t_2 = 0,061 \text{ s}$

$$\varphi_f = 0,13 \text{ rad}$$

Pokud nyní změříme úhel dopadu, tak zjistíme, že

$$\varphi_f \text{ skutečné} = 0,11 \text{ rad} \pm 0,02 \text{ rad}$$

Obrázky věže při t_0 :

Vidíme, že jsme dospěli k řádové shodě, což bychom považovali za úspěch.

Ovšem tímto celý proces nekončí. V další části teorie (Předpověď tvaru věže po dopadu) se snažíme předpovědět, jak se bude věž pohybovat po pádu.

Korekce pro změnu výšky těžiště

V této části textu se zabýváme změnou síly působící na vytrhávaný žeton ze strany věže jako tuhého tělesa. Tato síla by se měla měnit, za předpokladu, že se věž naklání a postupně se její těžiště spouští dolů. Proto námi odvozený vzorec je validní pouze pro věže, pro které platí, že se během vytrhávání spodního kamene jejich těžiště významně neposunulo.

Předpověď tvaru věže po dopadu

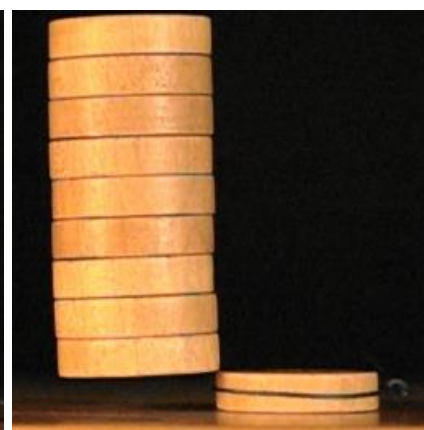
Dále jsme se zabývali dějem celkového zastavení a snažili jsme se předpovědět tvar křivky popisující polohu těžišť jednotlivých kamenů ve chvíli, kdy se veškerý pohyb ve věži zastaví.

V tuto chvíli jsme již neuvažovali pohyb celé věže jako tuhého tělesa, ale počítali jsme pohyb jednotlivých kamenů. Je zřejmé, že jsme museli vytvořit číselnou simulaci, jelikož tento problém nejsme schopni popsat analyticky. Během vytrhávání spodního kamene na věž působí síla, která se přenesla na všechny kameny a způsobí jakousi rychlost v_v , kterou při dopadu bude mít každý kámen a

která bude mít pro všechny kameny stejný směr. Ovšem jelikož uvažujeme, že věž před dopadem rotuje, tak každý kámen bude mít nějakou další rychlost v_k , která závisí od polohy kamene vůči těžišti věže, kolem kterého věž rotuje. Uvažujeme, že po dopadu se vyrovná vertikální pohyb kamenů a zbyde jen pohyb horizontální, který můžeme zjistit pro každý kámen. Ilustrujeme na obrázcích 21 a 22. Nazvěme to Hypotézou o Vertikální rychlosti.



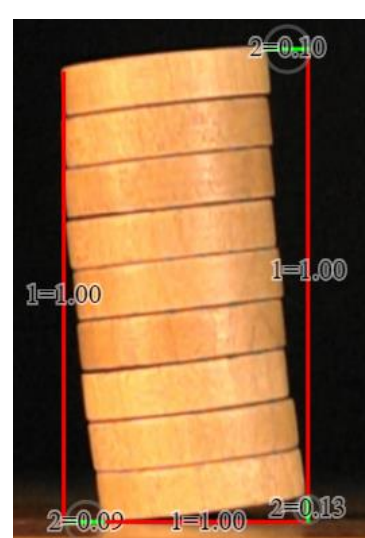
Obrázek 16 – věž v čase t_0



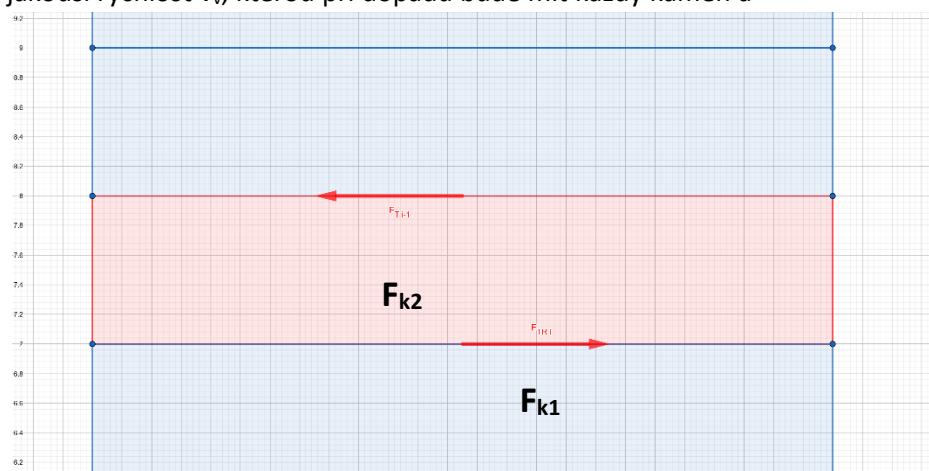
Obrázek 17 – věž v čase t_1



Obrázek 18 – věž v čase t_2

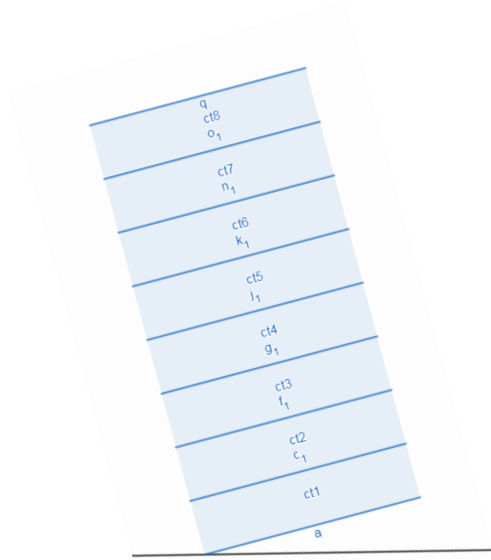


Obrázek 19 – věž v čase t_2 s naměřenými hodnotami

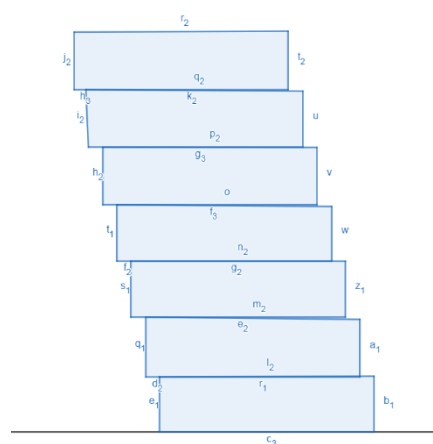


Obrázek 20 – Kámen ve věži a jeho nejbližší okolí

Proto kámen číslo k se bude pohybovat v horizontálním směru rychlostí $v_v + v_k$. Věž ovšem, po dlouhém čase, se nehýbe, tudíž veškeré tyto rychlosti se mění a po čase se změní v nulu. Položili jsme si otázku, proč se to děje a dospěli jsme k závěru, že chceme udělat simulaci pro konečný tvar věže.



Obrázek 21 - Věž bezprostředně před dopadem



Obrázek 22 - Věž bezprostředně po dopadu

Simulace pro konečný pád věže

Uvažujeme, že na každý kámen působí dvojice sil (Moment těchto sil můžeme zanedbat): Síla působící na kámen, která je způsobena relativní rychlostí kamene o jeden níže, a síla působící na kámen, která je způsobena relativní rychlostí kamene o jeden výše (viz Obrázek 20). Kameny si očíslováme: Pro kámen, který je nejnižší máme připravené číslo 0, a pro kámen, který je nejvyšší máme číslo $n-1$, kde n je počet kamenů ve věži. Velikosti sil mezi žetony se liší:

$$F_{k1} = (n - k)m_i g \mu$$

$$F_{k2} = (n - k - 1)m_i g \mu$$

Nyní jsme se zabývali tím, jak relativní rychlost kamenu ovlivňuje směr působení jednotlivých sil, a dospěli jsme k této rovnici:

$$F_k = (n - k)m_i g \mu * \text{sgn}(v_{k-1} - v_k) + (n - k - 1)m_i g \mu * \text{sgn}(v_{k+1} - v_k)$$

Rozeberme tuto rovnici. Rovnice se skládá z několika částí:

$$F_k = (n - k)m_i g \mu * \text{sgn}(v_{k-1} - v_k) + (n - k - 1)m_i g \mu * \text{sgn}(v_{k+1} - v_k)$$

Žlutá část reprezentuje velikost síly výše popsané a to velikost síly F_{k1} . Modrá část rovnice popisuje velikost druhé síly F_{k2} . Ovšem my nevíme kdy a v jakém okamžiku bude v jakém směru působit daná síla F_{k1} a F_{k2} (proto děláme onu simulaci). Z toho důvodu máme v naší rovnici červenou a zelenou. My totiž směr působení síly určíme z relativního posunu kamene (jenž způsobuje právě danou sílu). Vyšetřujeme kámen číslo k . Červená část rovnice nám říká, že pokud je absolutní rychlost v_{k-1} ve směru osy x menší, než absolutní rychlost v_k zkoumaného kamene, tak (spodní kámen zaostává a strhává zkoumaný kámen dozadu) směr dané třecí síly bude ve směru záporném. Zelená část analogicky popisuje chování směru třecí síly ze strany horního kamene.

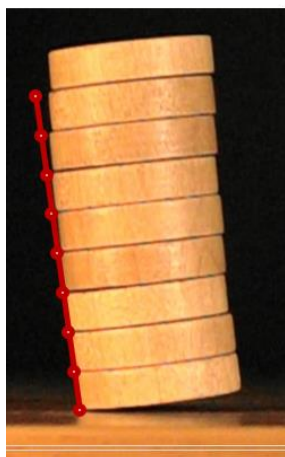
Pro sílu působící na spodní kámen bude platit trochu jiný vzorec, kde budeme uvažovat tření o podložku a absolutní rychlost v_0 .

Dále jsme vždy na konci určovali, zda-li je věž stabilní (Nemá spadnout) nebo není stabilní (Má spadnout).

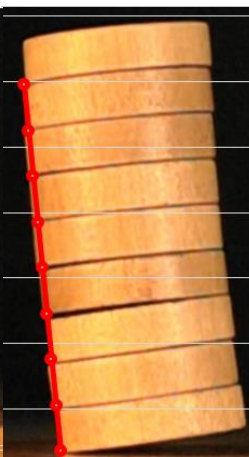
Dále jsme se pokusili aplikovat naše poznatky a porovnat s experimenty:

Závěrečné srovnání s experimenty

Podtrhávali jsme věže a natáčeli na rychloběžnou kameru. Z videa jsme určili tři již zmíněné časy a určili úhel dopadu. Pomocí něj jsme předpověděli přímku, na níž musí ležet levé spodní hrany kamenů po úplném dopadu a zastavení. Zde Vás žádáme si prohlédnout Obrázky 23, 24, 25, 26, na kterých vidíte čtyři různé věže dopadající na dřevo, sklo a gumu:



Obrázek 23 – Dopad rychle podtržené věže na dřevo



Obrázek 24 – Dopad rychle podtržené věže na dřevo



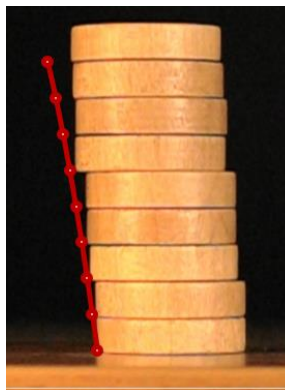
Obrázek 25 – Dopad pomalu podtržené věže na sklo



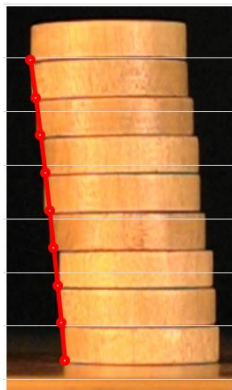
Obrázek 26 – Dopad pomalu podtržené věže na gumu

Jak vidíme, u rychle podtržené věže náš výpočet funguje dobře, ale u pomalu podtržených věží je chybný. Je to způsobeno tím, že při pomalém podtrhávání věže věž stíhá padat, což způsobuje změnu vertikální síly a ta způsobuje změnu velikosti síly tření (Je ve skutečnosti menší). S touto změnou ovšem náš výpočet nepočítá, proto se nám tu vyskytují chyby.

Dále jsme srovnávali plně zastavenou věž s předpovědí simulace, viz Obrázky 27, 28, 29, 30, na kterých vidíte výše ukázané věže, ale poté, co úplně zastavily:



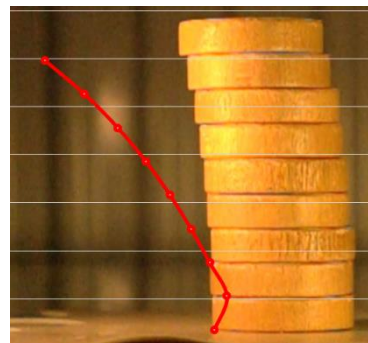
Obrázek 27 – Dojezd věže z Obrázku 23



Obrázek 28 – Dojezd věže z Obrázku 24



Obrázek 29 – Dojezd věže z Obrázku 25 (sklo)

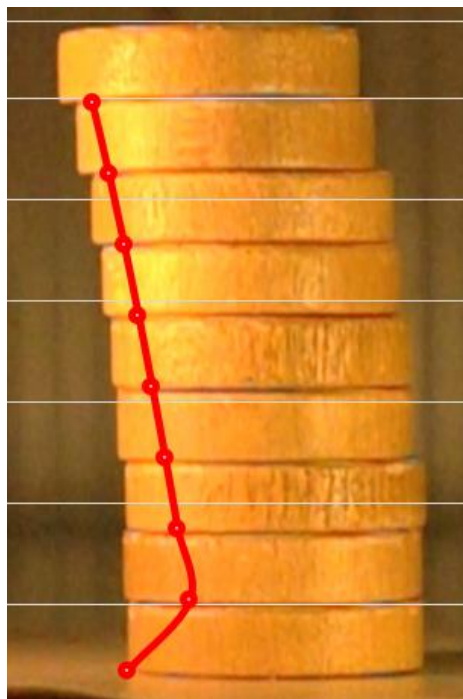


Obrázek 30 – Dojezd věže z Obrázku 26 (guma)

Jak vidíme, dvě první věže se shodují se simulací dobře. Věže padající na sklo a na gumu se ovšem se simulací neshodují. Jak jsme již viděli, nepodařilo se u nich vypočíst dopadový úhel to napravíme odečtením z videa dopadového úhlu, dále jiného úhlu o nějaký čas t dříve, odtud dopočteme úhlovou rychlost a dále rychlost pohybu těžiště určíme obdobným způsobem. Když budeme následně simulovat dopad a následný pohyb věže vyjdou nám křivky, které se můžeme opět srovnat s experimentem, viz Obrázky 31, 32:



Obrázek 31 – Dojezd z Obrázku 29 s upravenými počátečními podmínkami (sklo)



Obrázek 32 – Dojezd z Obrázku 30 s upravenými počátečními podmínkami (guma)

Jak vidíme, úprava počátečních podmínek pomohla pouze v jednom případě – a to když věž dopadala na sklo. Domníváme se, že je to způsobeno tím, že samotná dynamika dopadu věže na gumu se neslučuje s naší Hypotézou o Vertikální rychlosti (viz sekce Předpověď tvaru věže po dopadu). Gumová podložka mění hybnost věže pomaleji, což způsobí působení větší třecí síly po delší dobu, navíc jelikož dopadá levá část dříve, vytváří se vlna, která popostrkuje horní kostky doprava (To vše z našeho úhlu pohledu). Proto předpokládáme, že naše simulace dojezdu funguje pouze pro nepružné povrchy.

Ani jednou za celou dobu využívání simulace nám simulace nevypočetla, že by věž byla nestabilní, což se nám i potvrzovalo. Video, kde věž po vytržení spadla máme, ale rychlost vytrhávání je natolik nízká, že náš výpočet ani naše simulace nejsou schopni cokoliv při takovém podtržení předpovědět. Věž totiž dopadne na podložku ještě v době, kdy podtrhávaný kámen nepřestal působit na věž. (Kámen jsme ani nestihli vytrhnout, ale věž už spadla.

Závěr

Jedná se o komplexní problém, ale i přes to se nám podařilo předvídat úhel, pod kterým dopadá věž na podložku, za předpokladu, že je spodní díl věže vytržen vysokou rychlostí. Dále se nám podařilo vytvořit simulaci, která dokáže předpovědět tvar věže po dopadu a úplném zastavení na základě úhlu dopadu, úhlové rychlosti věže a rychlosti těžiště věže.

Literatura

[1] Zadání úloh | JČMF. JČMF | Jednota českých matematiků a fyziků [online]. Dostupné z: <https://www.jcmf.cz/?q=cz/node/1255>

[2] 403 Forbidden. 403 Forbidden [online]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/0710.2357.pdf>

[3] [online]. Copyright © [cit. 20.12.2019]. Dostupné z: <https://graphics.stanford.edu/courses/cs468-03-winter/Papers/ibsr.pdf>

[4] School of Computer Science and Statistics - Trinity College Dublin [online]. Copyright © [cit. 20.12.2019]. Dostupné z: <https://www.scss.tcd.ie/~manzkem/CS7057/cs7057-1516-09-CollisionResponse-mm.pdf>

[5] Součinitel smykového tření - fyzikální tabulky součinitelů smykového tření. conVERTER - převody jednotek [online]. Copyright © 2002 [cit. 20.12.2019]. Dostupné z: <http://www.converter.cz/tabulky/smykove-treni.html>