

Obsah

1	Zadání	
	1	
	1.1	Originální znění 1
	1.2	Oficiální překlad 1
2	Abstrakt	1
3	Výsledek	2
4	Popis experimentu	3
	4.1	První měření 4
	4.2	Druhé měření 5
5	Odvození	6
	5.1	První vzorec na energii 6
	5.2	Druhý vzorec na energii 8
6	Shrnutí	
	12	
7	Reference	12

1 Zadání

1.1 Originální znění

“Wooden popsicle sticks can be joined together by slightly bending each of them so that they interlock in a so-called “cobra weave” chain. When such a chain has one of its ends released, the sticks rapidly dislodge, and a wave front travels along the chain. Investigate the phenomenon.” [1]

1.2 Oficiální překlad

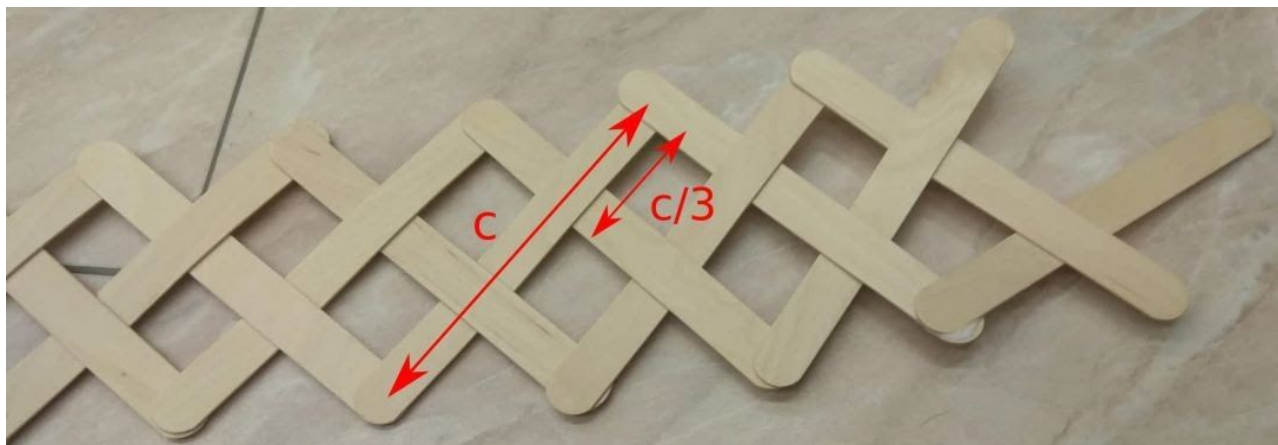
“Dřívka od nanuku mohou být při mírném prohnutí každého z nich propletena do řetězce s tzv. hadí vazbou. Když uvolníme jeden konec řetězce, dřívka se rychle rozpletou a čelo vlny se šíří podél řetězce. Prozkoumejte tento jev.” [1]

2 Abstrakt

V naší práci jsme se zabývali tím, jak je rychlost rozplétání řetězce dřívek a energie ohnutých dřívek závislá na relevantních parametrech. Na základě Euler-Bernoulliho teorie [2] jsme vytvořili vzorce pro výpočet energie v pružnosti dřívek, z níž jsme následně počítali rychlost rozplétání. Výsledky jsme porovnali s naměřenou rychlostí dvou typů dřívek.

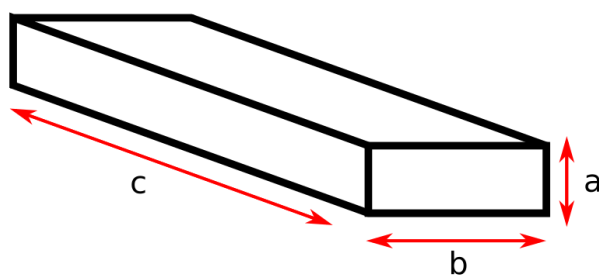
3 Výsledek

Pomocí Euler-Bernoulliho Teorie jsme vytvořili vzorce pro výpočet energie uložené v dřívku napnutém čtyřmi dalšími dřívky v jedné a druhé třetině délky a na koncích.



Přičemž a je tloušťka dřívka, b je šířka dřívka, c je délka dřívka, E je Youngův modul pružnosti dřeva, z něž je dřívko vyrobeno a α je úhel mezi dřívky.

viz. obrázek:



První vzorec je na základě aproximace, že dřívka tlačí do jednoho bodu:

$$E_p = \frac{54Eba^5}{c^3} \quad \text{viz. Odvození}$$

Druhý vzorec je založen na aproximaci, že síla ze dřívek je rozložena po sinusoidě.

$$E_{pp} = E \cdot \frac{ba^5 \pi^4}{3c^3 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{c \cdot \sin(\alpha)}\right)} \quad \text{viz. Odvození}$$

Pro ověření vzorců jsme se na jejich základě pokusili vypočítat dobu rozpletení hada na jedno dřívko a porovnat ji s naměřenými hodnotami ze záběru kamery viz. tabulka (bližší informace viz. Popis experimentu, Odvození).

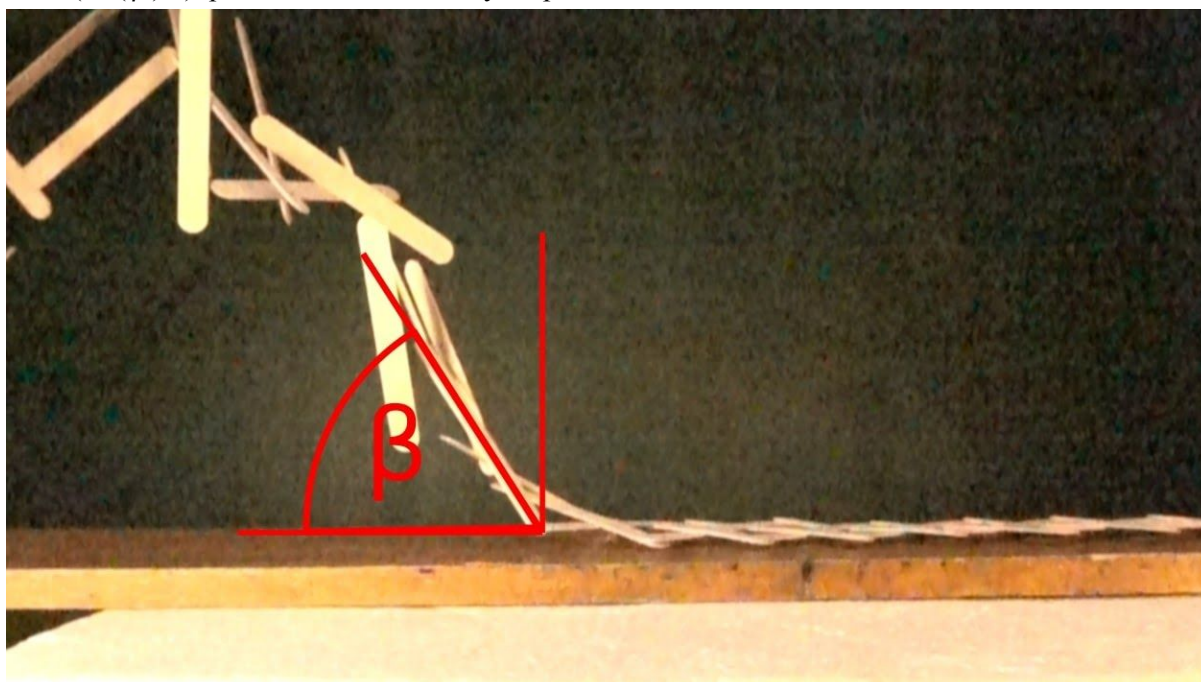
Doba rozpletení jednoho dřívka:

	Změřeno	Vypočteno iteračně	Vypočteno 1. vzorcem	Vypočteno 2. vzorcem
1. měření	13,3 ms	8,9 ms	10,3 ms	12,4 ms
2. měření	7,4 ms	-	7,07 ms	9,09 ms

Porovnáním výpočtu a měření usuzujeme, že první vzorec na energii je přesnější. Ve výpočtu úhlové rychlosti byl totiž zanedbán odpor vzduchu, což by vysvětlovalo odchylku o 3 ms v 1. měření, kde byla použita široká dřívka. Naopak u měření druhého, kde byla použita velmi úzká dřívka a odpor vzduchu nebyl tedy významný, byl výpočet prvním vzorcem velmi přesný.

4 Popis experimentu

Abychom určili rychlost rozpletení jednoho dřívka, potřebujeme znát úhel zvednutí (β) dřívka, ve kterém je dřívko již “rozpletené”. Při jeho “rozpletení” je už ovšem další dřívko v úhlu $\arcsin(\sin(\beta)/3)$, protože tlačilo do třetiny rozpleteného dřívka..



Doba rozpletení dřívka je tedy doba, kterou dřívko stráví v úhlu mezi $\arcsin(\sin(\beta)/3)$ až β .

Rozpletené dřívko je takové dřívko, jež se již nedotýká žádného dalšího dřívka v řetězci.

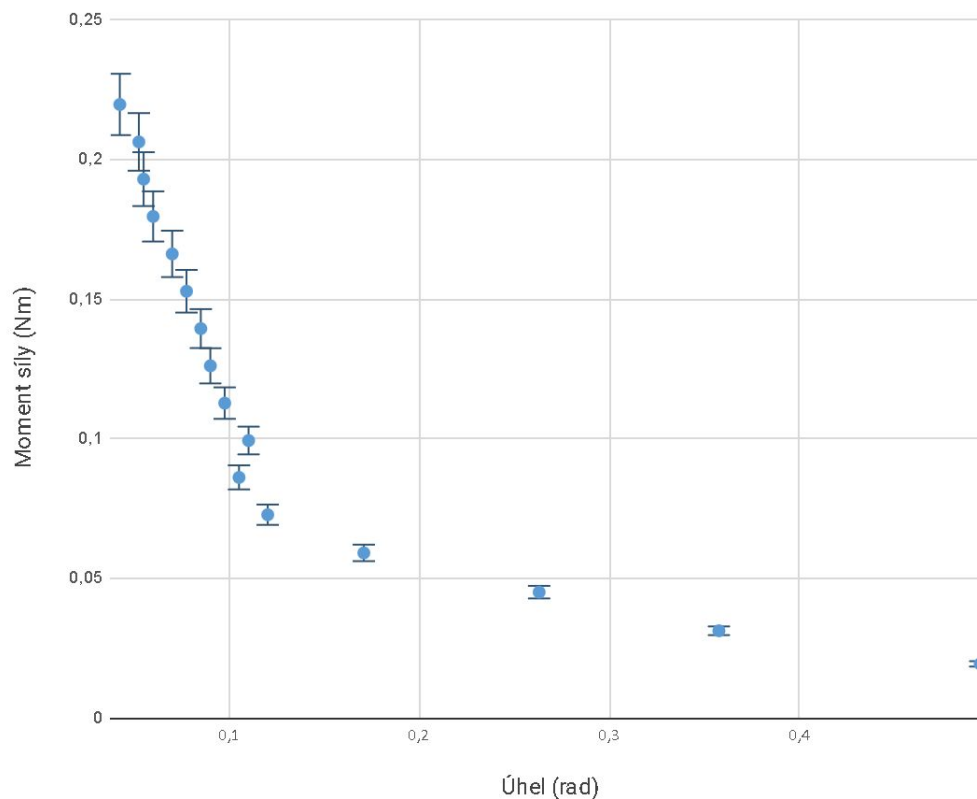
4.1 První měření

V prvním měření jsme použili dřívka o tloušťce 1,35 mm, šířce 1,701 cm, délce 15 cm a hmotnosti 2,45 g. Youngův modul jsme při ohýbání podél délky naměřili 13 GPa. Hada jsme sestavili tak, aby dřívka měla mezi sebou úhel 90°. Úhel rozpletení jsme vypožorovali ze záběru kamery jako $\pi/3$ radiánů. Rychlost snímání kamery byla 1000 FPS.

viz. tabulka:

a	0,00135	m	...tloušťka
b	0,01701	m	...šířka
c	0,15	m	...délka
E	13,47	GPa	...modul pružnosti
α	1,57	rad	...úhel mezi dřívky
m	0,00245	kg	...hmotnost dřívka
úhel (rad)	0,29 až 1,05	rad	...interval rozpletení dřívka

Dále jsme siloměrem měřili sílu na konci dřívka, jež je stále zapleteno do dvou dřívek, v závislosti na výšce zvednutí. Což jsme následně převedli na závislost momentu síly a úhlu zvednutí viz. graf č.1.



Graf č.1:

Z grafu č.1 je vidět, že do úhlu zhruba 0,105 radiánů klesá moment síly prudce a poté klesá významně pomaleji. V obou částech se zdá být funkce momentu síly na úhlu téměř lineární. Proto jsme následně závislost momentu síly na úhlu zvednutí aproximovali na dvě lineární funkce (první do úhlu 0,105 rad, druhou od úhlu 0,105 rad).

Pomocí těchto funkcí jsme iteračním výpočtem s krokem 0,1 ms získali dobu rozpletení jednoho dřívka: 8,9 ms.

Dále jsme rychlost rozpletení dřívka zjistili ještě ze záběru kamery: 13,3 ms.

Z grafu č.1 je také patrné, že moment síly z počátku prudce klesá a dále je již téměř zanedbatelný.

-> Aproximujeme, že na začátku intervalu rozplétání je již veškerá energie dřívka přeměněná na úhlovou rychlost (E je energie dřívka, J je moment setrvačnosti dřívka).

$$\omega = \sqrt{\frac{2E}{J}}$$

Při dosazení získáváme dobu rozpletení dřívka:

při použití 1. vzorce na energii: 10,3 ms

při použití 2. vzorce na energii: 12,4 ms

4.2 Druhé měření

U těchto dřevků jsme naměřili tloušťku 1,3 mm, šířku 0,5 cm, délku 19 cm a hmotnosti 0,8g. Hada jsme sestavili tak, aby dřívka měla mezi sebou úhel 90° . Úhel rozpletení jsme vypočítávali ze záběru kamery jako $\pi/8,5$ radiánů.

viz. tabulka:

a	0,0013	m	...tloušťka
b	0,005	m	...šířka
c	0,19	m	...délka
E	13,47	GPa	...modul pružnosti
α	1,57	rad	...úhel mezi dřívky
m	0,00079	kg	...hmotnost dřívka
úhel (rad)	0,12 až 0,37	rad	...interval rozpletení dřívka

Ze záběru kamery jsme změřili dobu rozpletení jednoho dřívka: 7,4 ms

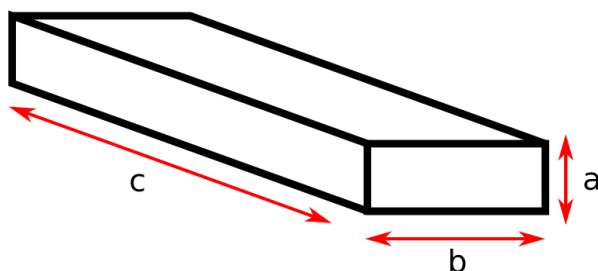
Z energie jsme vypočítali dobu rozpletení jednoho dřívka:

při použití 1. vzorce na energii: 7,07 ms

při použití 2. vzorce na energii: 9,09 ms

5 Odvození

Označení:



- atloušťka dřívka
- bšířka dřívka
- cdélka dřívka

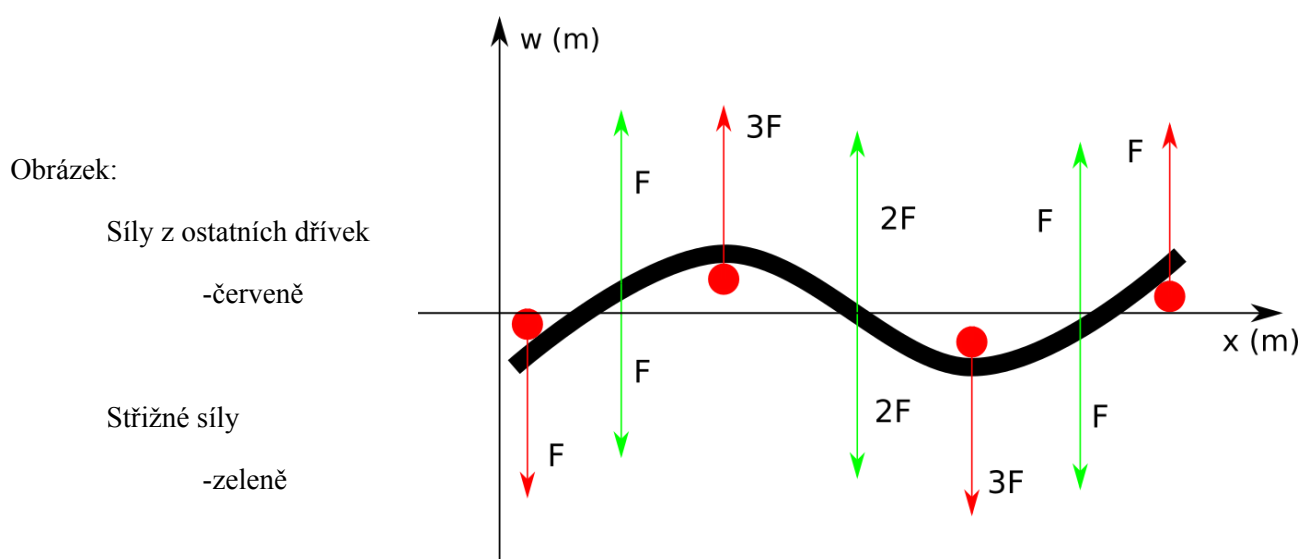
$q(x)$ rozložení síly.... $\frac{N}{m}$

E modul pružnosti

$w(x)$...křivka tělesa (zakřivení dřívka)
I	...kvadratický moment průřezu
α	...úhel mezi dřívky

5.1 První vzorec na energii dřívka

Působí-li dřívka na konci silou F , měla by dřívka “uprostřed” působit silou $3F$. Střížná síla bude tedy v prvním a posledním úseku (první třetina a třetí třetina) F a v úseku uprostřed (druhá třetina) $2F$. viz. obrázek



V první třetině má střížná síla velikost F . Funkce ohybového momentu je v tomto úseku proto Fx .

$$M_1(x) = F \cdot x$$

Z Euler-Bernoulliho teorie [2] víme, že:

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

kde w je funkce zakřivení, E je modul pružnosti a I je kvadratický moment průřezu [3].

$$\Rightarrow Fx = EI \frac{d^2 w_1}{dx^2}$$

Při upravení získáváme (konstanty při integraci pokládáme rovny 0, podle jejich fyzikálního významu):

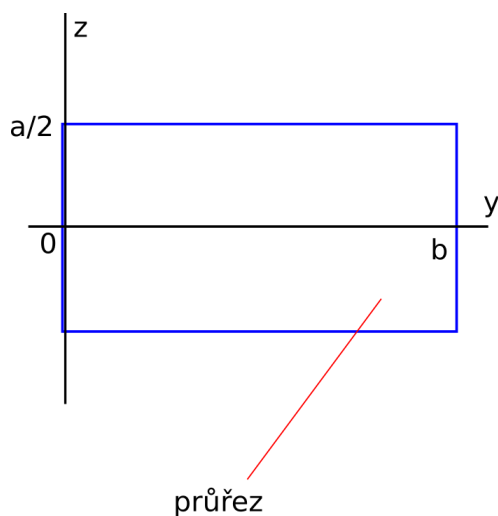
$$\Rightarrow F \frac{x^3}{6} = EI w_1$$

Víme, že v jedné třetině délky ($c/3$) je dřívko podepřeno jiným dřívkem, jež má tloušťku a , dřívko je tedy v této pozici ohnuto o velikost a , zatím si ale tuto výchylku označíme obecně $w \Rightarrow$

$$\frac{F\left(\frac{c}{3}\right)^3}{6EI} = w$$

$$F = \frac{162EIw}{c^3}$$

Dále si potřebujeme vyjádřit kvadratický moment průřezu [3]:



$$I = \int \int z^2 dy dz$$

$$I = b \cdot 2 \int_0^{\frac{a}{2}} z^2 dz$$

$$I = b \cdot 2 \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} = \frac{ba^3}{12}$$

Dosadíme za I :

$$F = \frac{162Eba^3w}{12c^3}$$

Nyní známe závislost síly F na výchylce. Víme, že počáteční výchylka má velikost a . A výchylka nenapnutého dřívka je samozřejmě 0. Energii dřívka tedy získáme tím, že spočítáme jakou práci by dřívko vykonalo, kdyby se vrátilo do nenapnuté polohy. (Práce je síla po dráze) :

$$E = 8 \cdot \int_0^a \frac{13.5Eba^3w}{c^3} dw$$

$$E = 8 \cdot \frac{13.5Eba^5}{2c^3}$$

Upravením získáváme finální vzorec:

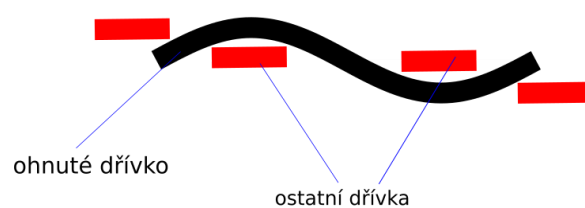
$$E_p = \frac{54Eba^5}{c^3}$$

5.2 Druhý vzorec na energii dřívka

Energii ohnutého dřívka získáme tím, že zjistíme jakou práci by jednotlivé průřezy dřívka vykonali, vrátilo by-li se dřívko do své původní polohy. Práci získáme integrací síly po dráze. Nejdříve si tedy vyjádříme funkci rozložení síly pomocí Euler Bernoulliho teorie [2]:

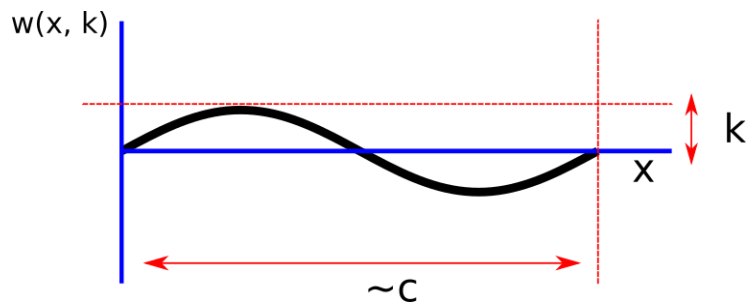
$$q(x) = E \cdot I \cdot \frac{d^4w}{dx^4}$$

Dle obrázku aproximujeme, že křivka (w) dřívka bude sinusoida



k....amplituda sinusoidy

c....délka dřívka (aproximujeme, že je rovna periodě sinusoidy)



$$w(x, k) = k \cdot \sin\left(x \cdot \frac{2\pi}{c}\right)$$

$$\frac{d^4 w(x, k)}{dx^4} = \frac{16\pi^4 \cdot k \cdot \sin\left(x \cdot \frac{2\pi}{c}\right)}{c^4}$$

Kvadratický moment průřezu dřívka (I) již máme vyjádřený z minulého odvození.

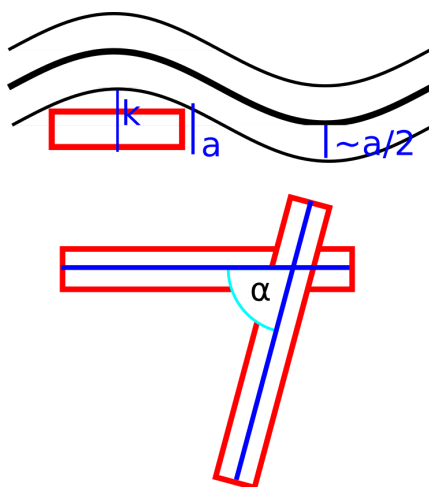
Dosazení do vzorce:

$$q(x) = E \cdot \frac{ba^3 16\pi^4 k \cdot \sin\left(x \cdot \frac{2\pi}{c}\right)}{12c^4}$$

Úprava:

$$q(x) = E \cdot \frac{ba^3 4\pi^4 k \cdot \sin\left(x \cdot \frac{2\pi}{c}\right)}{3c^4}$$

Také si vyjádříme původní amplitudu zakřivení dřívka (k_0) viz obrázek:



$$k_0 \cdot \sin\left[\left(\frac{c}{4} - \frac{b}{2\sin(\alpha)}\right) \cdot \frac{2\pi}{c}\right] = a$$

$$k_0 = \frac{a}{\sin\left[\left(\frac{c}{4} - \frac{b}{2\sin(\alpha)}\right) \cdot \frac{2\pi}{c}\right]}$$

$$k_0 = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{c \cdot \sin(\alpha)}\right)}$$

Počítáme s tím, že práce, kterou dřívko vykoná, když se ze sinusoidy vrátí do úsečky je rovna její počáteční energii.

Energie bude tedy rovna integrálu od 0 do c rozložení energie ve dřívku ($E_r(x)$) podle derivace z x:

$$E_{pp} = \int_0^c E_r(x) dx$$

Pro vypočtení rozložení energie musíme zjistit jakou práci vykonají jednotlivé body na cestě od jejich výšky do osy x.

Víme, že práce je rovna síle po dráze. => Rozložení energie získáme integrací rozložení síly, podle derivace z w, v intervalu od 0 do $w(x, k_0)$.

$$E_r(x) = \int_0^{w(x, k_0)} q(x) dw$$

Dosazení výrazů:

$$E_r(x) = \int_0^{k_0 \cdot \sin(x \cdot \frac{2\pi}{c})} E \cdot \frac{ba^3 4\pi^4 k \cdot \sin(x \cdot \frac{2\pi}{c})}{3c^4} dw$$

Vytknutí w z $q(x)$:

$$E_r(x) = \int_0^{k_0 \cdot \sin(x \cdot \frac{2\pi}{c})} E \cdot \frac{ba^3 4\pi^4 w}{3c^4} dw$$

Upravíme:

$$E_r(x) = E \cdot \frac{ba^3 4\pi^4 k_0^2 \cdot \sin(x \cdot \frac{2\pi}{c})^2}{6c^4}$$

Dosadíme do výpočtu energie:

$$E_{pp} = \int_0^c E \cdot \frac{ba^3 4\pi^4 k_0^2 \cdot \sin(x \cdot \frac{2\pi}{c})^2}{6c^4} dx$$

Nejdříve si vyjádříme neurčitý integrál $\sin^2(x \cdot \frac{2\pi}{c})$, kde použijeme substituci $u = \frac{2\pi}{c} \cdot x \Rightarrow dx = \frac{c}{2\pi} \cdot du$

$$\int \sin^2(x \cdot \frac{2\pi}{c}) dx = \frac{c}{2\pi} \int \sin^2(u) du = \frac{c}{2\pi} \int \frac{1 - \cos(2u)}{2} du$$

Zvolíme další substituci $2u = y \Rightarrow du = \frac{dy}{2}$

$$\int \frac{1 - \cos(2u)}{2} (u) du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4} \int \cos(y) dy = \frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin(2u)$$

Dosadíme do u :

$$\frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin(2u) = \frac{x \cdot \frac{2\pi}{c}}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x \cdot \frac{2\pi}{c})$$

Upravíme:

$$\int \sin^2(x \cdot \frac{2\pi}{c}) dx = \frac{c}{2\pi} \cdot (\frac{x \cdot \pi}{c} - \frac{1}{4} \sin(\frac{4\pi \cdot x}{c}))$$

Upravíme:

$$\frac{c}{2\pi} \cdot (\frac{x \cdot \pi}{c} - \frac{1}{4} \sin(\frac{4\pi \cdot x}{c})) = \frac{x}{2} - \frac{c}{8\pi} \sin(\frac{4\pi \cdot x}{c})$$

Nyní vyjádříme energii:

$$E_{pp} = E \cdot \frac{ba^3 4\pi^4 k_0^2}{6c^4} \cdot [\frac{c}{2} - \frac{c}{8\pi} \sin(\frac{4\pi \cdot c}{c})]$$

Upravíme:

$$E_{pp} = E \cdot \frac{ba^3 \pi^4 k_0^2}{3c^3}$$

Dosadíme za k_0 :

$$E_{pp} = E \cdot \frac{ba^3 \pi^4}{3c^3} \cdot \frac{a^2}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{c \cdot \sin(\alpha)})}$$

Upravíme a máme finální vzorec:

$$E_{pp} = E \cdot \frac{ba^5 \pi^4}{3c^3 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{c \cdot \sin(\alpha)})}$$

6 Shrnutí

Vytvořili jsme dva modely k výpočtu energie ohnutých dřívek, jež jsou zapleteny v takzvanou hadí vazbu, na základě dvou různých aproximací. Pro ověření modelů jsme na jejich základě vypočetli rychlost rozplétání řetězce, jež jsme porovnali s naměřenou rychlostí rozplétání.

Oba modely ukázaly řádovou shodu. Model, kde byla síla dřívek aproximována jako směřující do jednoho bodu, ovšem ukázal mimořádnou shodu a to obzvláště s druhým měřením. Přičemž odchylka u prvního měření byla způsobena odporem vzduchu, kvůli velké šířce dřívka.

7 Reference

- [1] Zadání úloh | JČMF. *JČMF | Jednota českých matematiků a fyziků* [online]. Dostupné z: <https://jcmf.cz/?q=cz/node/1255>
- [2] Euler–Bernoulli beam theory - Wikipedia. [online]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory
- [3] Second moment of area - Wikipedia. [online]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Second_moment_of_area