TÍCH PHÂN KÉP

(TÍCH PHÂN BỘI 2)

Tích phân kép

Bài toán mở đầu

Cho vật thể được giới hạn trên bởi mặt bậc hai $f(x, y)$

giới hạn dưới bởi miền D (đóng, bị chặn)

giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song oz, tựa trên biên D

Tìm thể tích vật thể.

1) Chia D một cách tùy ý ra thành n miền không dẫm nhau: D_1, D_2, ..., D_n.

Có diện tích tương ứng là $S_{D_1}, S_{D_2}, \ldots, S_{D_n}$.

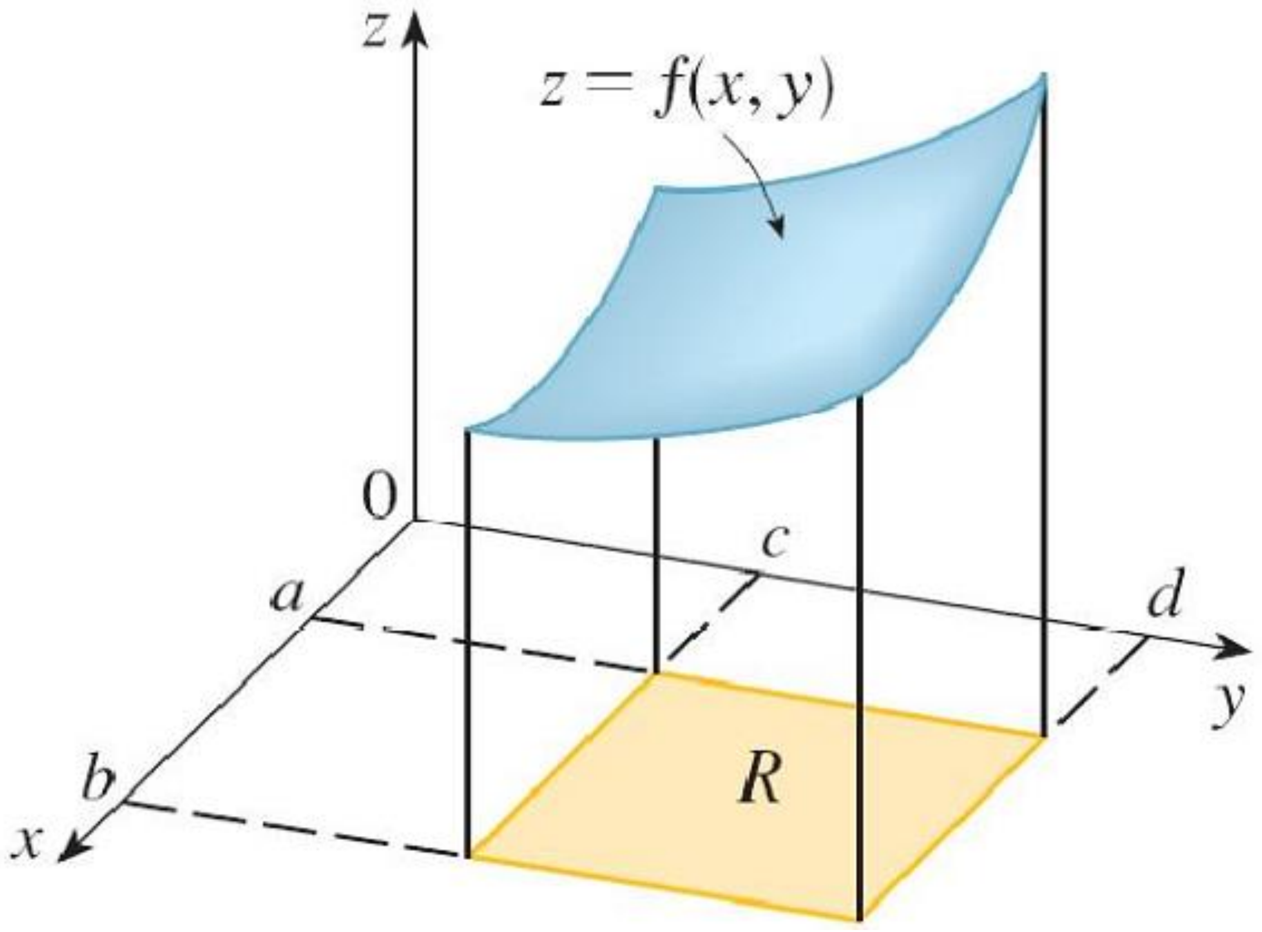
2) Trên mỗi miền lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i) \in S_{D_i}$

3) Thể tích của vật thể: $V \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot S_{D_i} = V_n$

4) $V = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

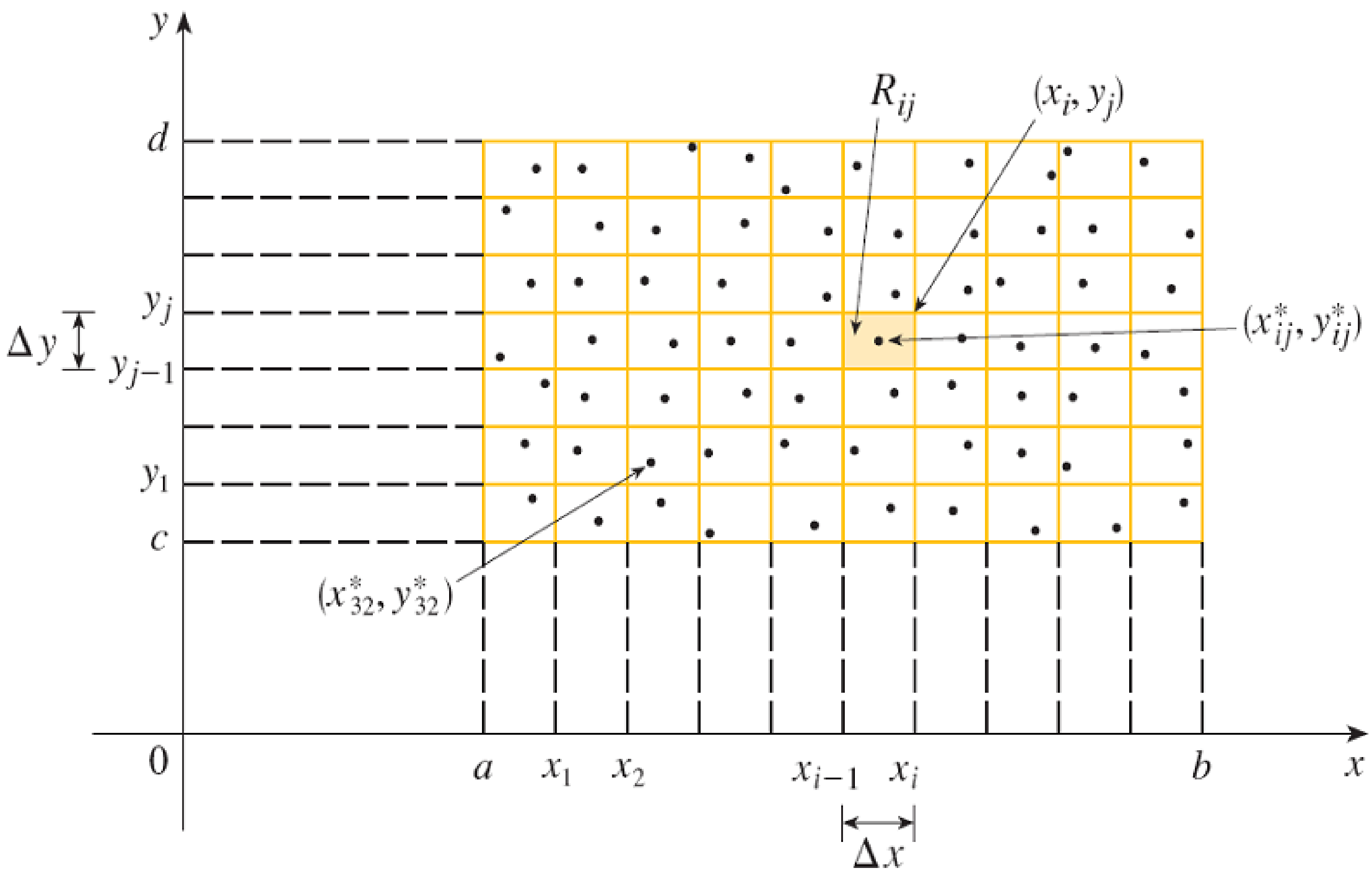
Tích phân kép

Bài toán mở đầu



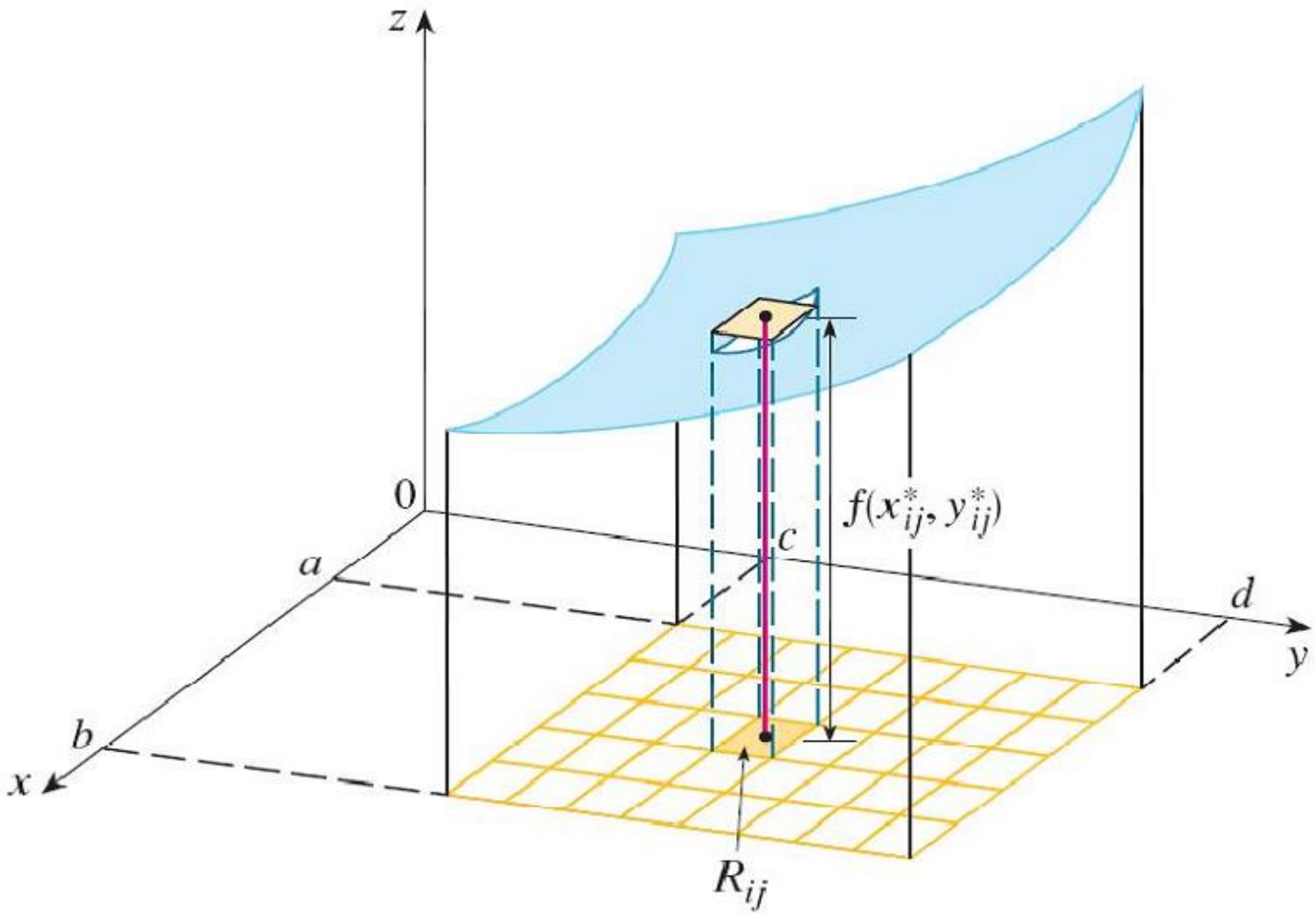
Tích phân kép

Bài toán mở đầu



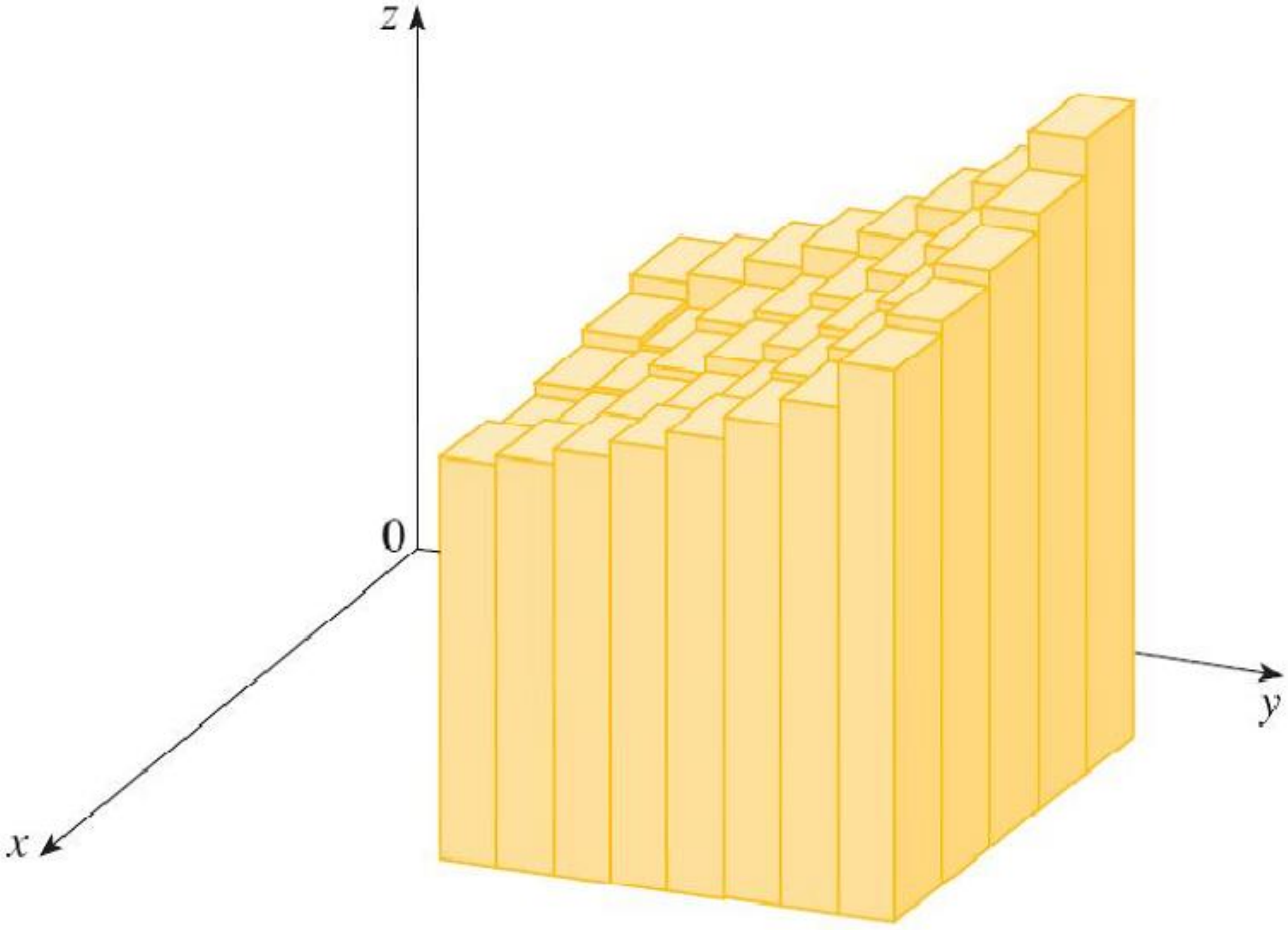
Tích phân kép

Bài toán mở đầu



Tích phân kép

Bài toán mở đầu



Tích phân kép

Định nghĩa tích phân kép

Cho $f = f(x,y)$ xác định trên miền đóng và bị chặn D.

Tích phân kép của f trên miền D là giới hạn (nếu có)

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot S_{D_i}\right)$$

Nếu I tồn tại, ta nói f khả tích trên D.

Tích phân kép

Tính chất của tích phân kép

1) Hàm liên tục trên một miền đóng, bị chặn, có biên trơn từng khúc thì khả tích trên miền này.

2) $S_D = \iint\limits_D 1dxdy$

3) $\iint\limits_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

4) $\iint\limits_D \left[f(x,y) + g(x,y) \right] dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

5) Nếu D được chia làm hai miền D_1 và D_2 không dẫm lên nhau:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

6) $\forall (x,y) \in D, f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D fdxdy \le \iint\limits_D gdxdy$

Tích phân kép

Ví dụ (Bài toán mở đầu – Định nghĩa)

Cho vật thể được giới hạn trên bởi mặt bậc hai $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$

giới hạn dưới bởi hình vuông: $R = [0,2] \times [0,2]$

giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song oz, tựa trên biên R.

Ước lượng thể tích của vật thể trong các trường hợp sau:

a) Chia R thành 4 phần bằng nhau;

b) Chia R thành 16 phần bằng nhau;

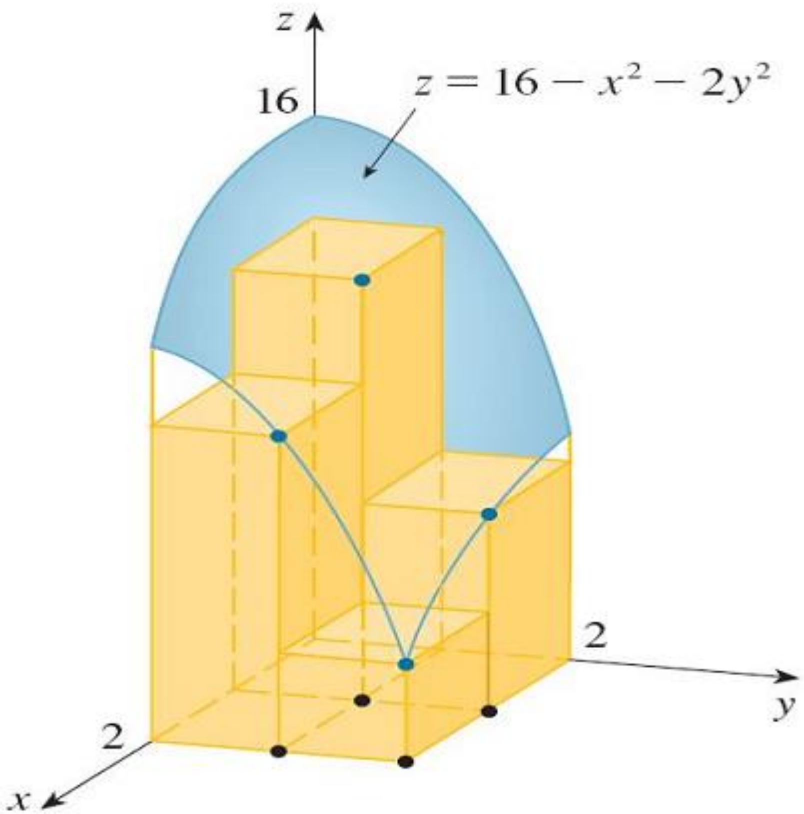
c) Chia R thành 64 phần bằng nhau;

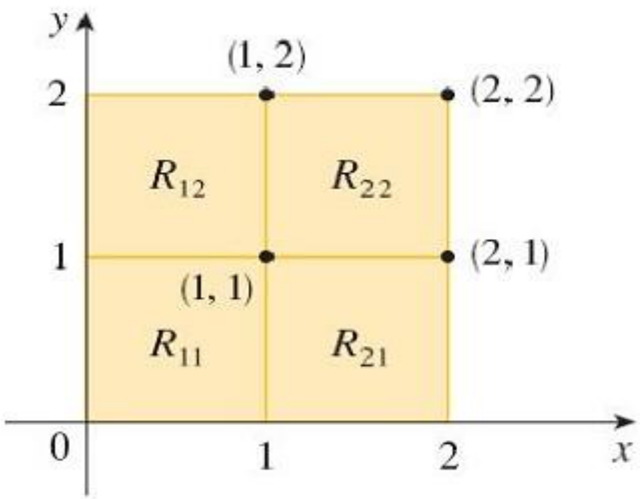
d) Chia R thành 256 phần bằng nhau;

e) Tính thể tích của vật thể.

Tích phân kép

Ví dụ (Bài toán mở đầu – Định nghĩa)





$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{4} f(M_i) \cdot S_{D_i}$$

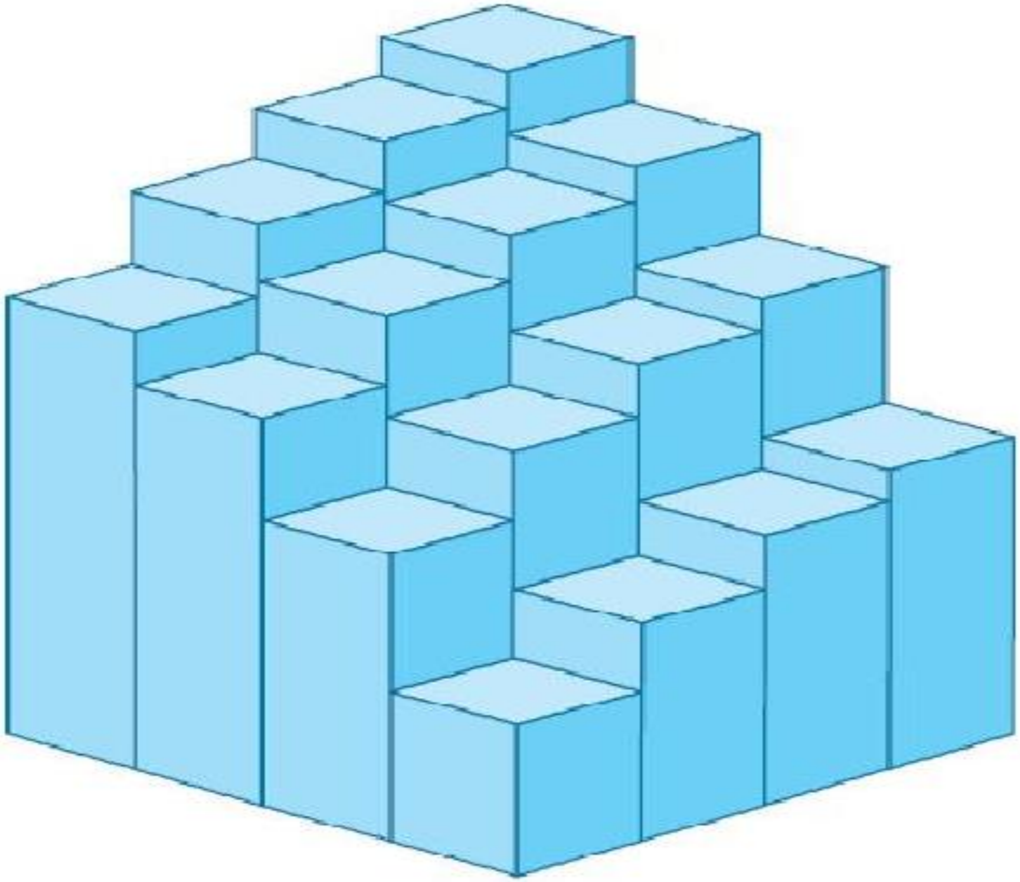
$S_{D_i} = 1, \forall i = 1, \ldots, 4.$

$$V \approx f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2)$$

$$V \approx 13 + 7 + 10 + 4 = 34.$$

Tích phân kép

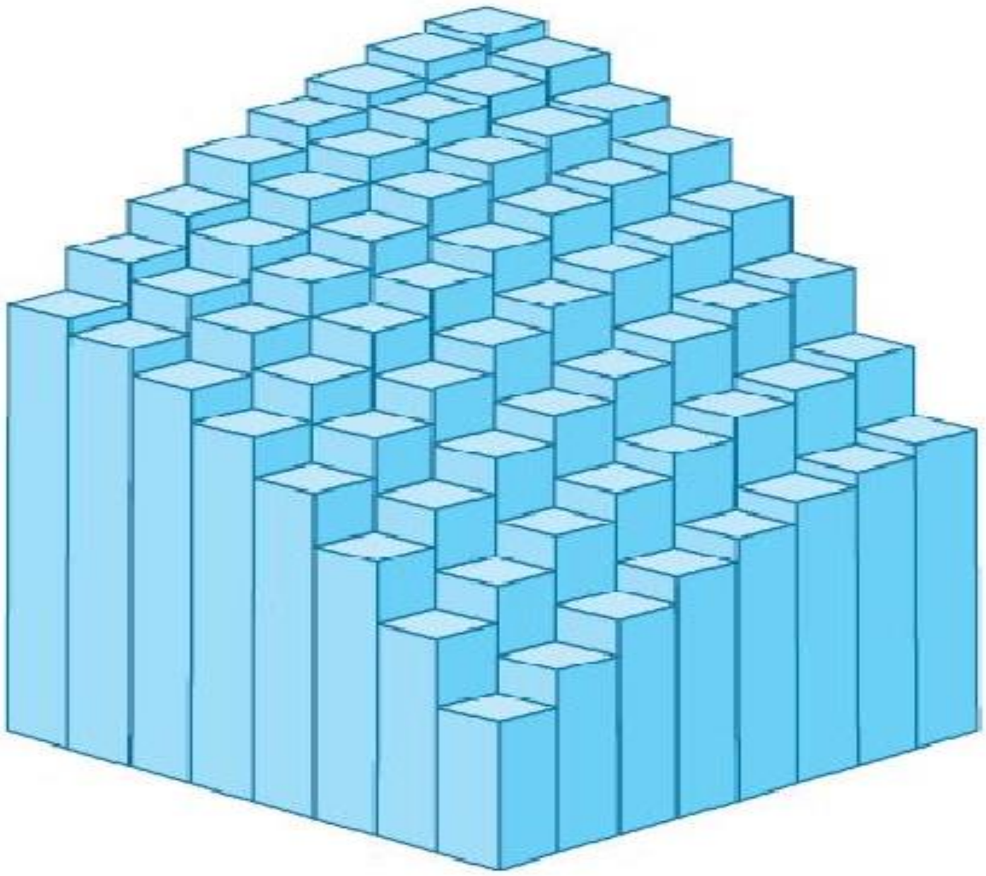
Ví dụ (Bài toán mở đầu – Định nghĩa)



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$

Tích phân kép

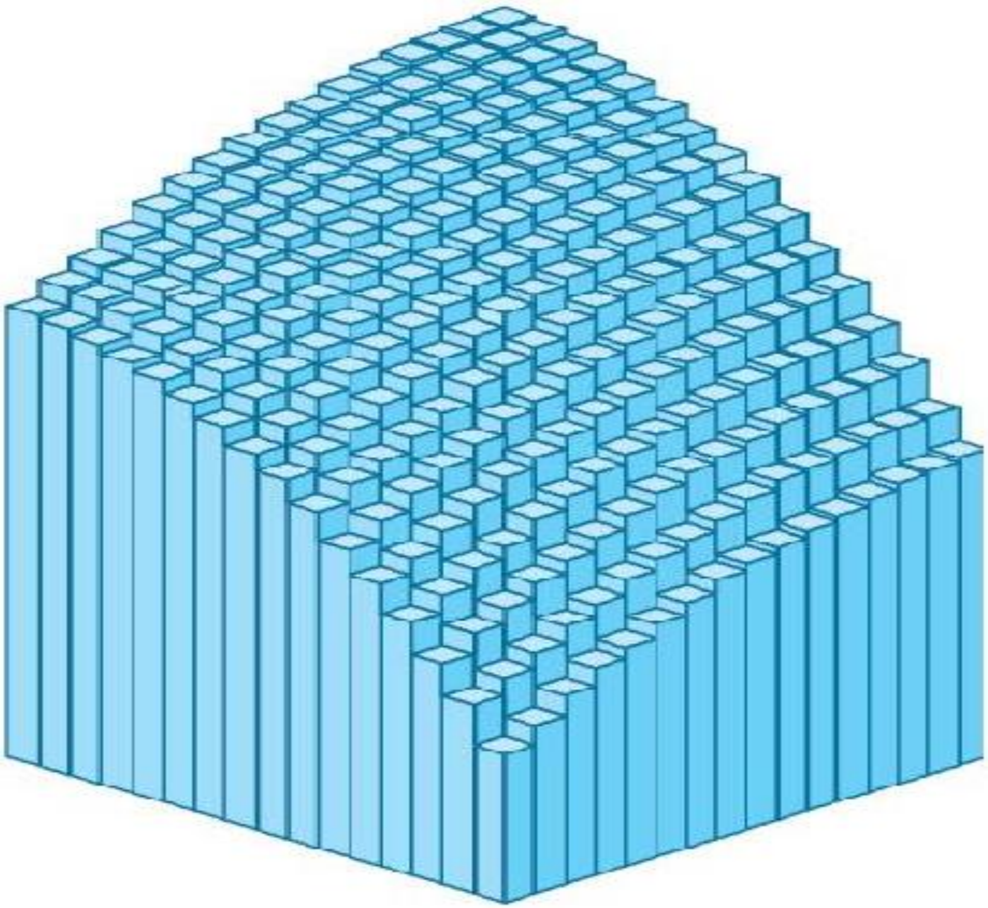
Ví dụ (Bài toán mở đầu – Định nghĩa)



(b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$

Tích phân kép

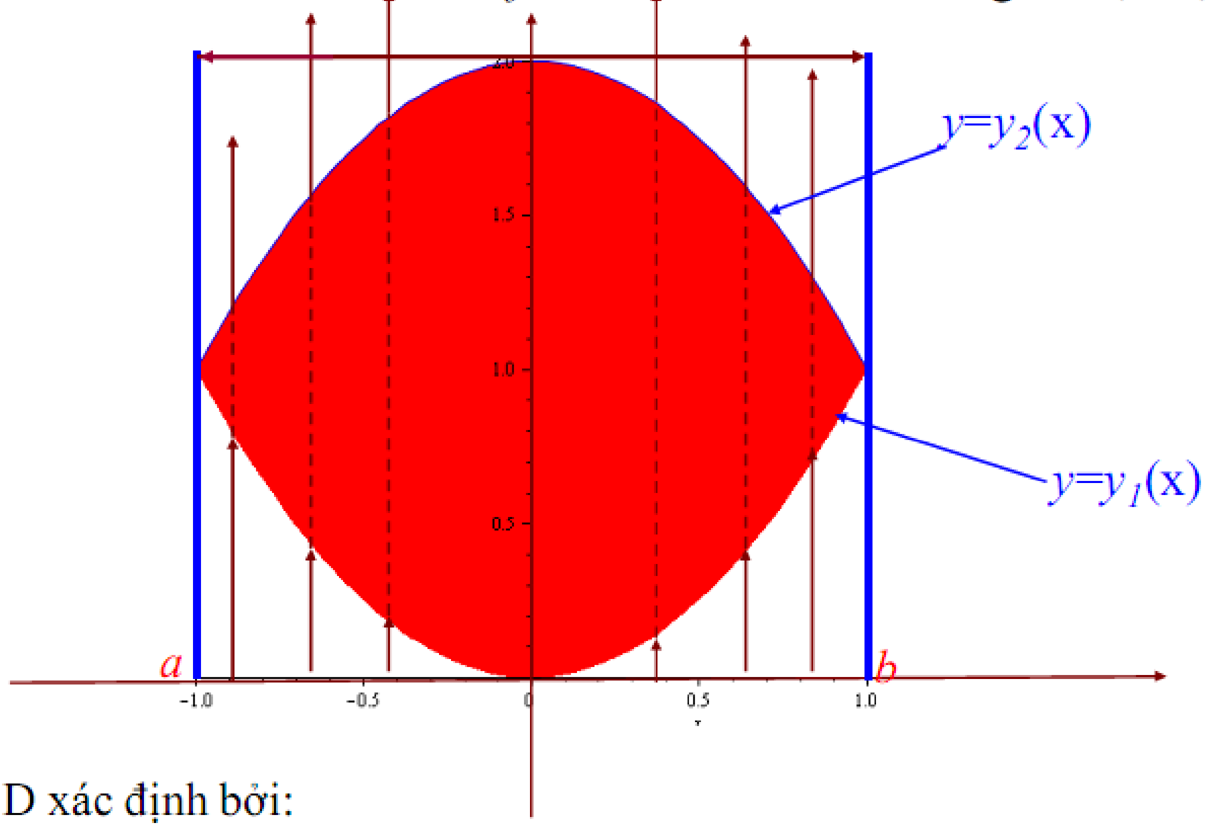
Ví dụ (Bài toán mở đầu – Định nghĩa)



(c) $m = n = 16, V \approx 46.46875$

Tích phân kép

Cách tính (Định lý Fubini)   Cho f liên tục trên miền đóng và bị chặn D.



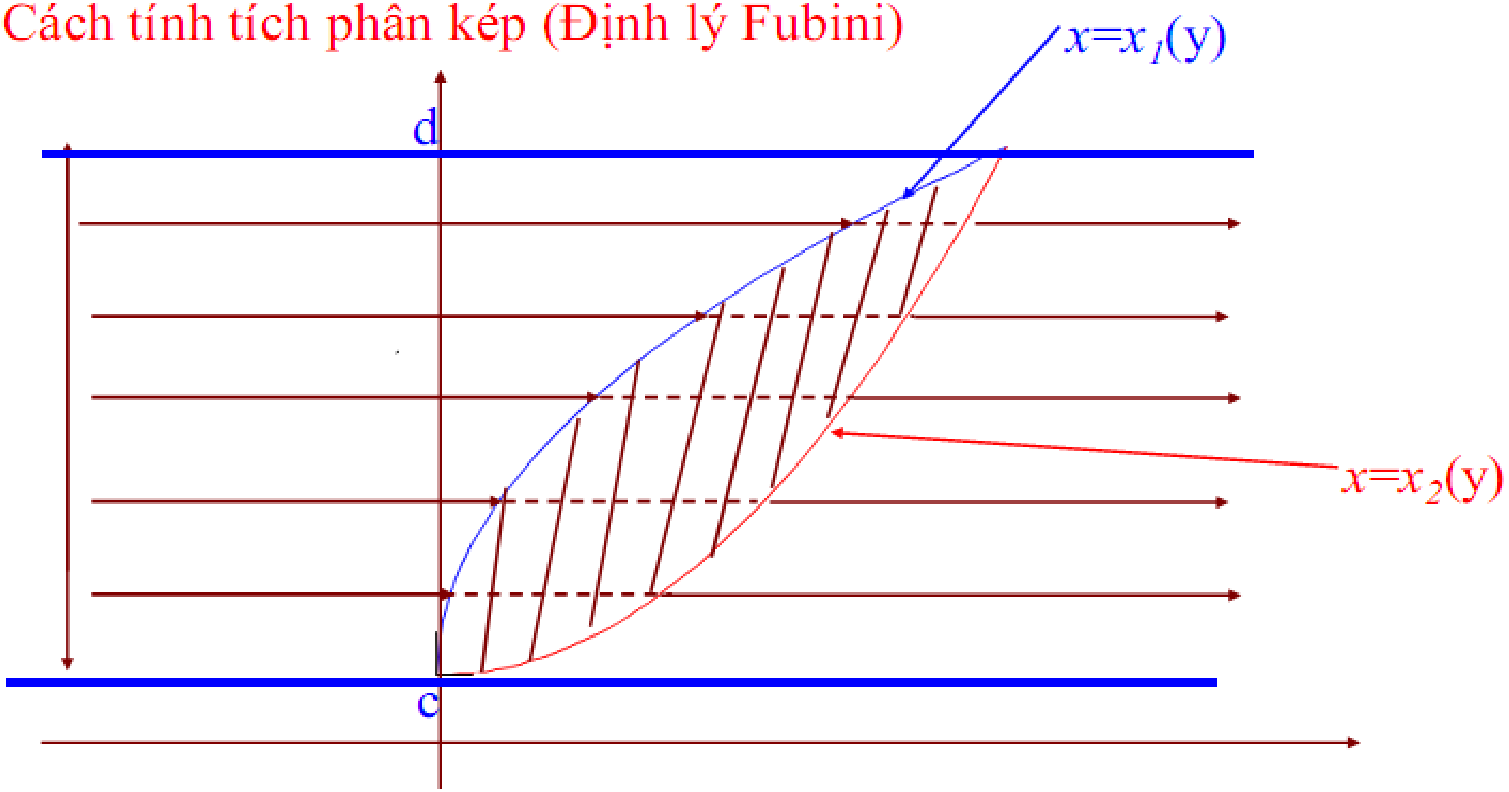
1) Giả sử D xác định bởi:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \boxed{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}$$

Tích phân kép

Cách tính tích phân kép (Định lý Fubini)



2) Giả sử D xác định bởi:

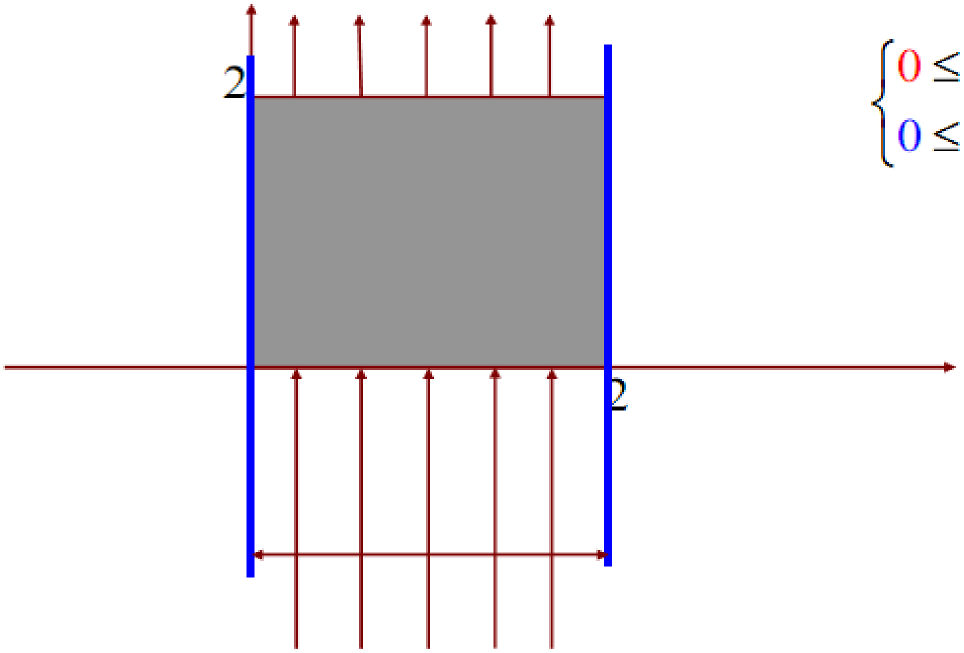
$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \boxed{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx}$$

Tích phân kép

Ví dụ (Bài toán mở đầu – Định nghĩa)

Giải câu e)



$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Tính thể tích của vật thể. $V = \iint\limits_R \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dy$

$$= \int_0^2 \left[(16 - x^2) y - 2\frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \frac{16}{3} \right) dx = 48$$

Tích phân kép

Ví dụ

Tính tích phân kép $I = \iint_D xydxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

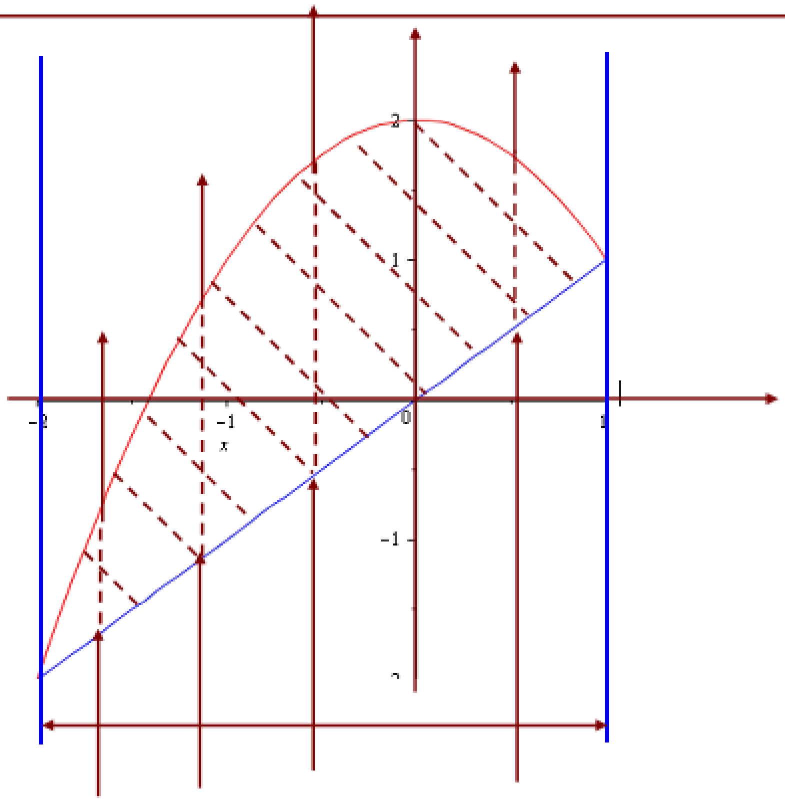
$y = 2 - x^2, y = x.$

Tích phân kép

Ví dụ

Tính tích phân kép $I = \iint\limits_D xydxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

$y = 2 - x^2, y = x.$



$$\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2 - x^2 \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D (xy)\, dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} (xy) dy$$

$$= \int_{-2}^{1} \left[x \frac{y^2}{2} \right]_x^{2-x^2} dx$$

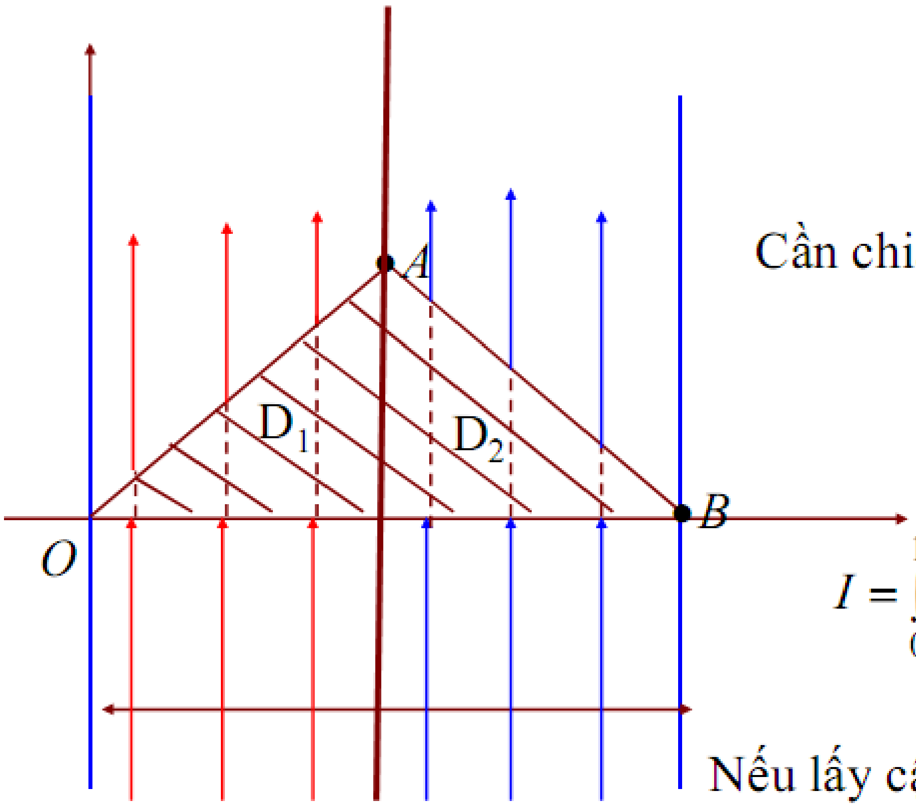
$$= \int_{-2}^{1} \left(x \frac{(2-x^2)^2}{2} - x \frac{x^2}{2} \right) dx$$

Tích phân kép

Ví dụ

Tính tích phân kép $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$, trong đó D là tam giác OAB, với

$$O(0,0), A(1,1), B(2,0).$$



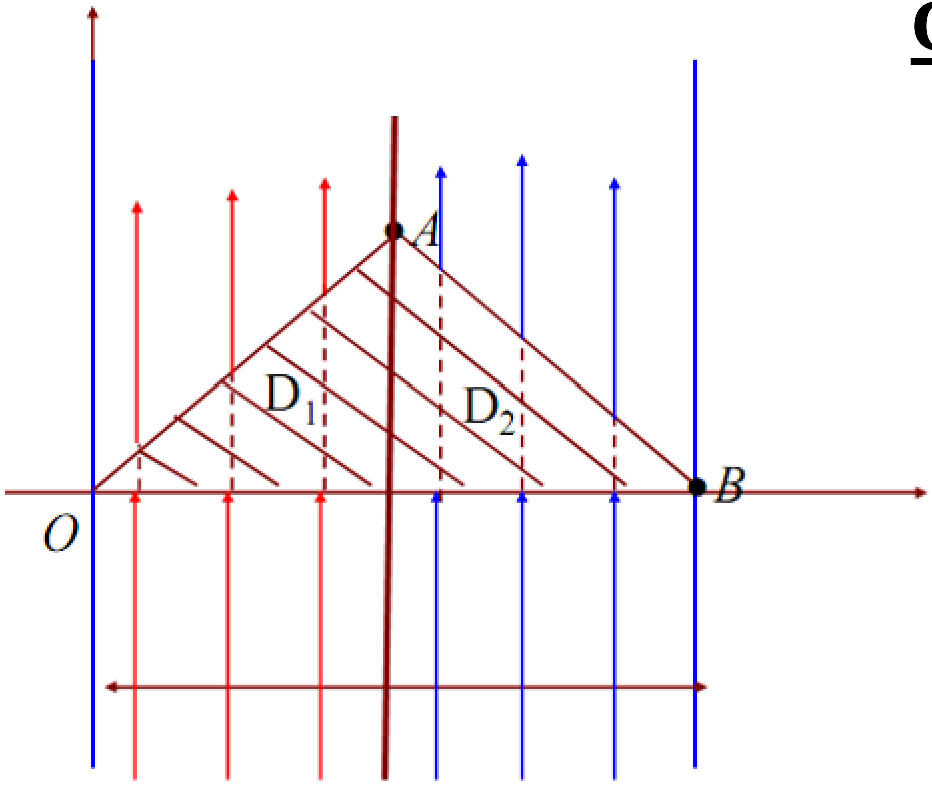
$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le ? \end{cases}$$

Cần chia D ra thành hai miền: D_1 và D_2

$$I = \iint\limits_D = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)dy$$

Nếu lấy cận y trước, x sau thì không cần chia D

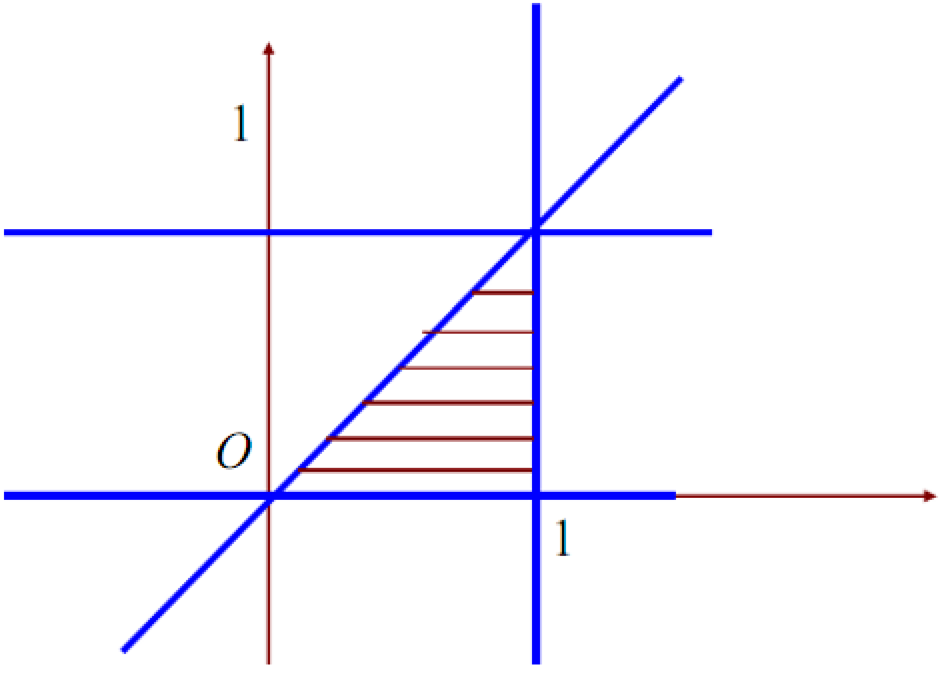


Cách 2:

Ví dụ 3: Tính tích phân: $\mathrm{I} = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$

Tích phân $\int_y^1 e^{x^2} dx$ không tính được.

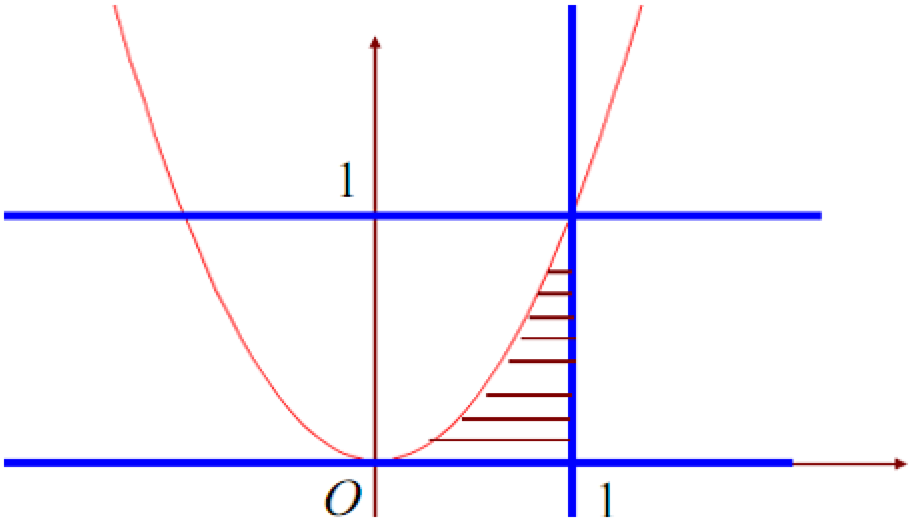
$$\mathrm{D}: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$$



$$I = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy \;= \int_0^1 e^{x^2}\, y\Big|_0^x dx \;= \int_0^1 x e^{x^2} dx \;= \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Ví dụ 4: Tính tích phân: $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sin\left(x^3 - 1\right)dx$

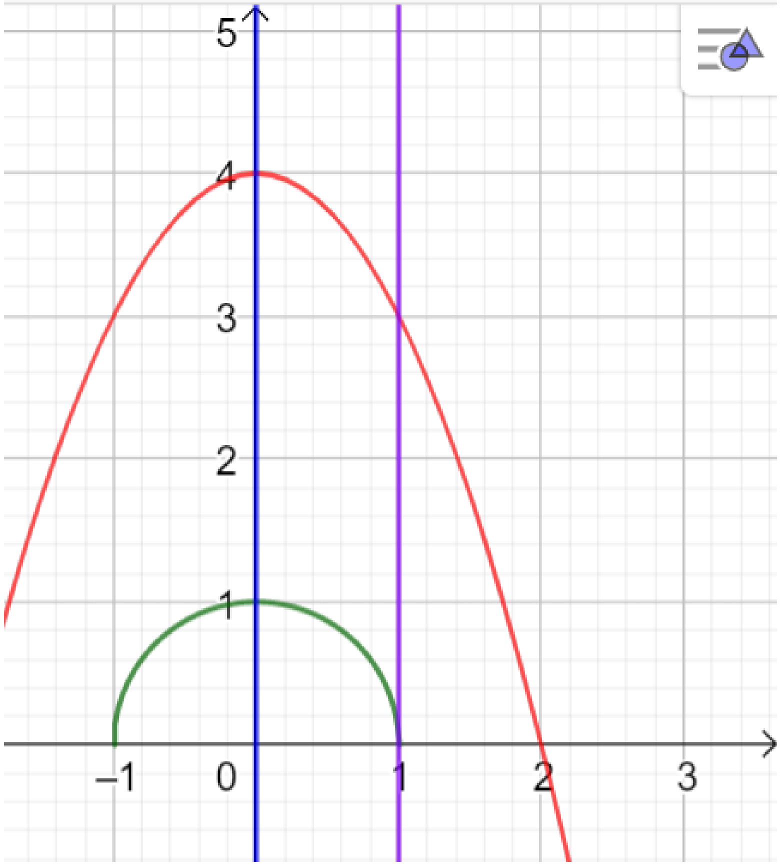
Tích phân $\int_{\sqrt{y}}^1 \sin\left(x^3 - 1\right)dx$ không tính được.



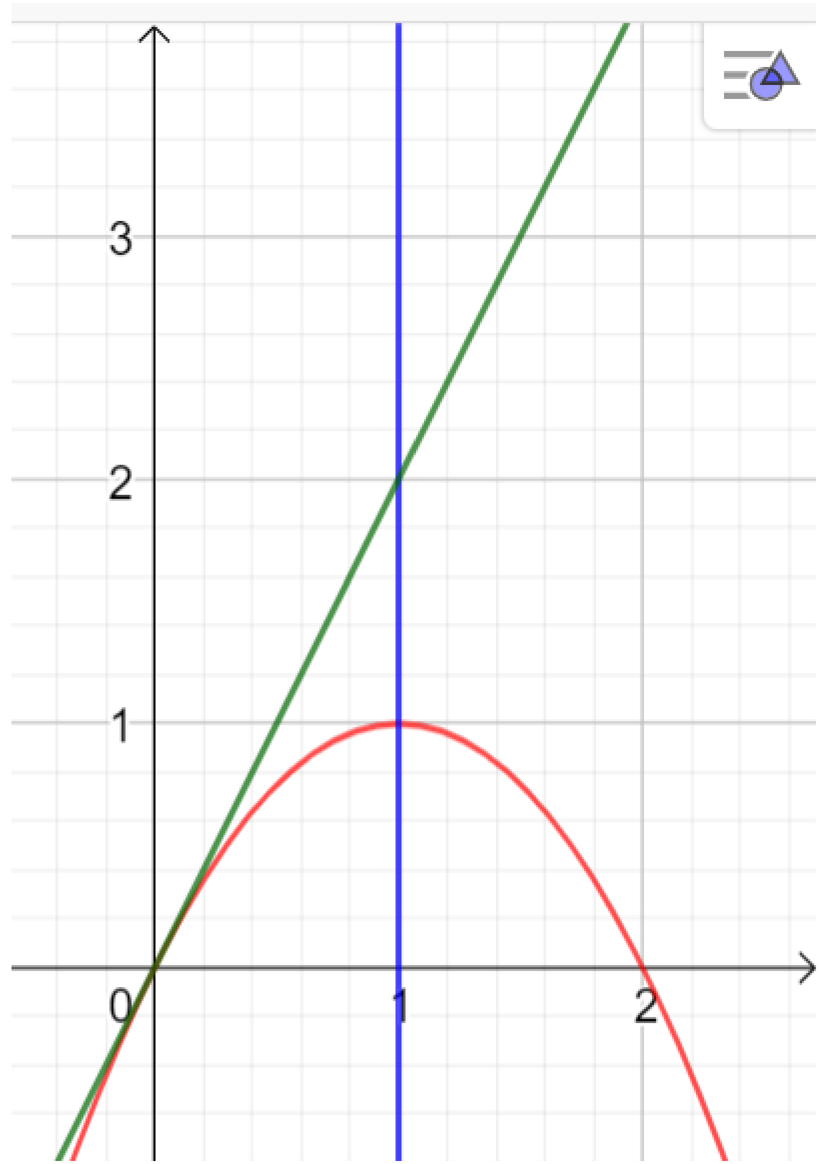
$I = \iint\limits_D (x^2 + 2y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1, y = x + 1$.

Bài 2. Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$(1)\quad I = \int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{4-x^2} f(x,y)dy$$



$$(2)\quad I = \int_0^1 dx \int_{2x-x^2}^{2x} f(x,y)dy$$

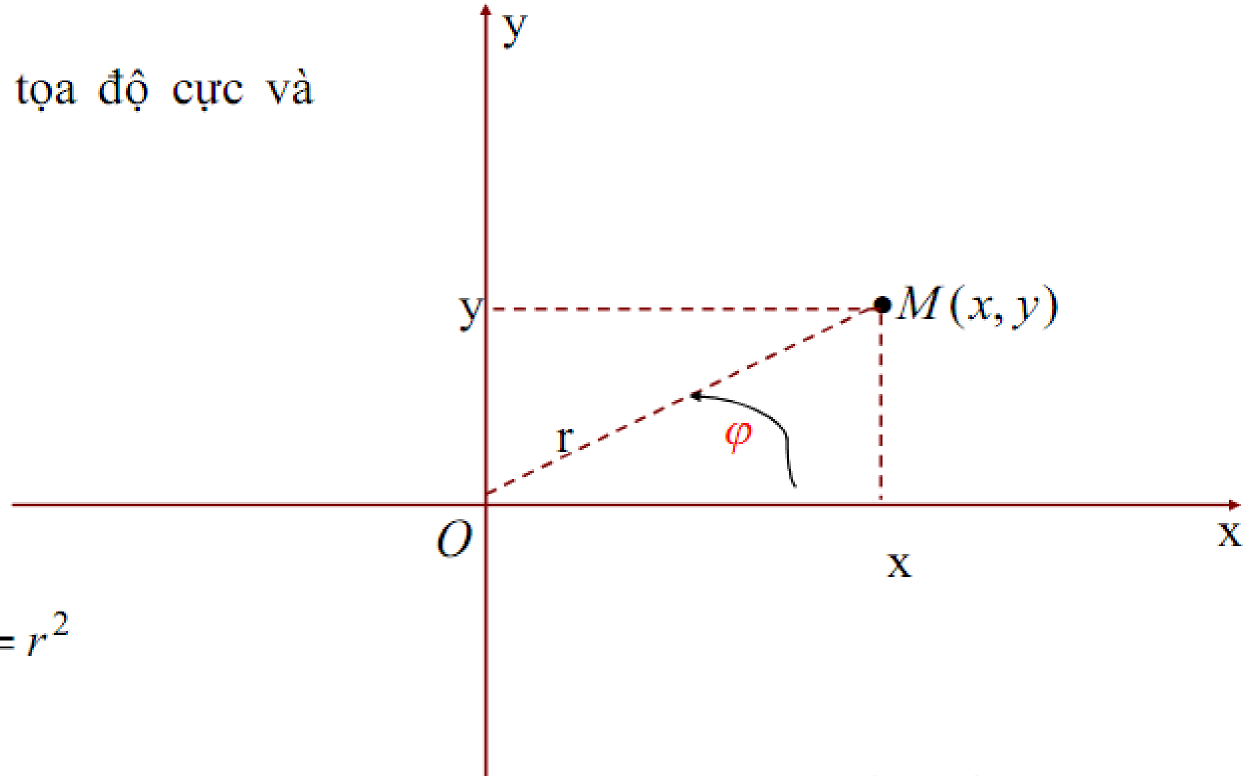


Tích phân kép

Cách tính (Đổi sang tọa độ cực)

Mối liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



Chú ý: $x^2 + y^2 = r^2$

Ví dụ. Phương trình đường tròn tâm 0, bán kính bằng 2: $x^2 + y^2 = 4$

Phương trình đường tròn này trong tọa độ cực là: $r = 2$.

Tích phân kép

Cách tính (Đổi sang tọa độ cực)

Ví dụ. Phương trình đường tròn tâm (1,0), bán kính bằng 1: $x^2 + y^2 = 2x$

Phương trình đường tròn này trong tọa độ cực là: $r^2 = 2r\cos\varphi \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$

Ví dụ. Phương trình đường tròn tâm (0,1), bán kính bằng 1: $x^2 + y^2 = 2y$

Phương trình đường tròn này trong tọa độ cực là: $r^2 = 2r\sin\varphi \Leftrightarrow r = 2\sin\varphi$

Ví dụ. Phương trình đường tròn thẳng x = 2 (trong tọa độ Descartes)

Phương trình đường thẳng này trong tọa độ cực là: $r\cos\varphi = 2 \Leftrightarrow r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$

Tích phân kép

Cách tính (Đổi sang tọa độ cực)

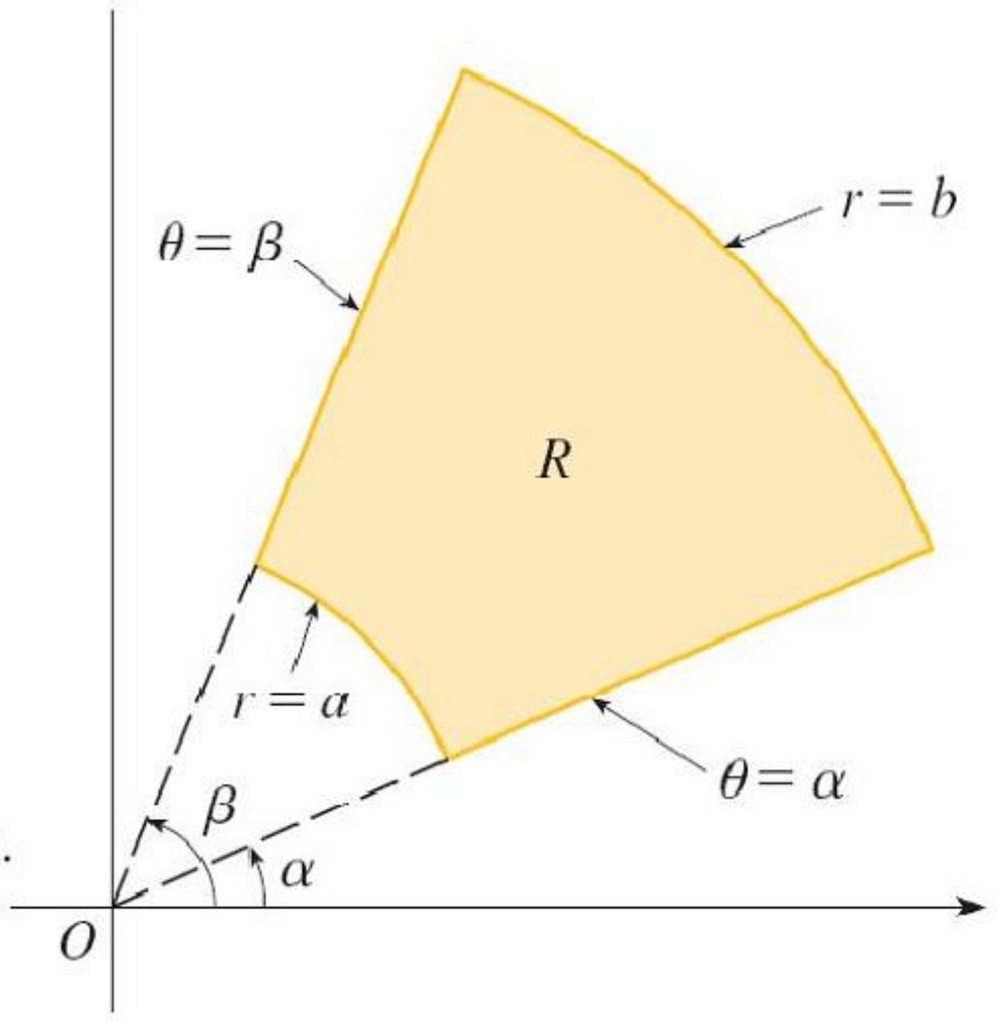
$$I = \iint\limits_R f(x,y)dxdy$$

Qua phép đổi biến:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Chia [a,b] thành m phần.

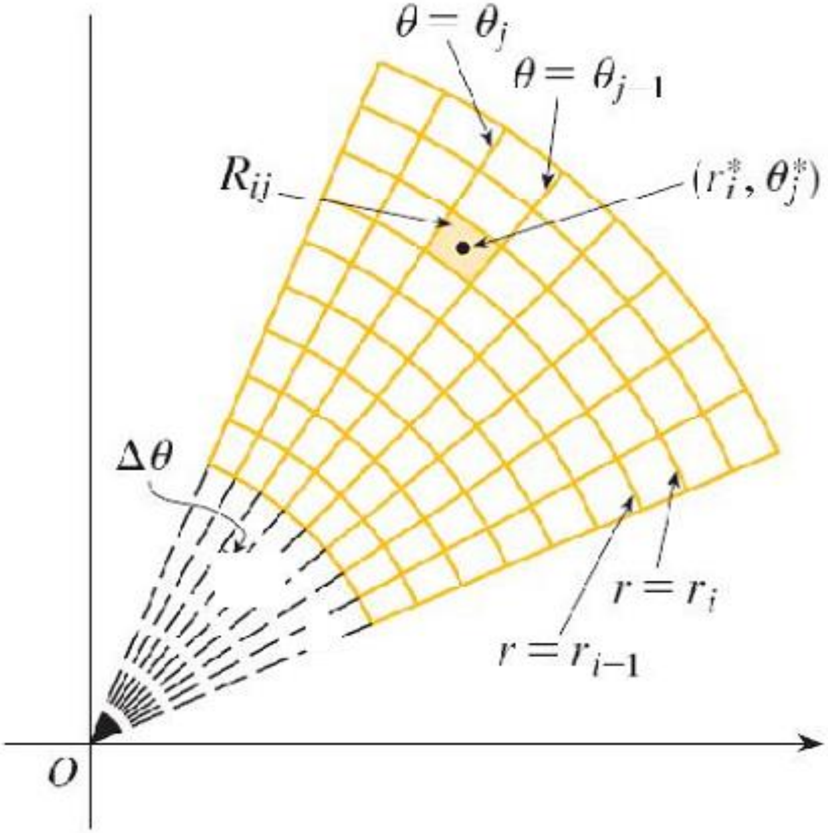
Chia $[\alpha,\beta]$ thành n phần.



Tích phân kép

Cách tính (Đổi sang tọa độ cực)

Miền $R_{ij}: \begin{cases} r_{i-1} \le r \le r_i \\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j \end{cases}$



Trên R_{ij} lấy một điểm (r_i^*, θ_j^*)

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i); \theta_i^* = \frac{1}{2}(\theta_{i-1} + \theta_i)$$

Diện tích miền R_{ij} là:

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} r_i^2 \cdot \Delta\theta - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \cdot \Delta\theta;$$

$$\Delta\theta = (\theta_j - \theta_{j-1})$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}\Delta\theta \cdot \left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right) = \frac{1}{2}\Delta\theta \cdot (r_i + r_{i-1}) \cdot (r_i - r_{i-1}) = r_i^* \cdot \Delta r \cdot \Delta\theta$$

Tích phân kép

Cách tính (Đổi sang tọa độ cực)

Tọa độ cực của điểm R_{ij} là: $(r_i^* \cdot \cos\theta_j^*, r_i^* \cdot \sin\theta_j^*)$

Tổng Riemann $V_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cdot \cos\theta_j^*, r_i^* \cdot \sin\theta_j^*) \cdot \Delta A_i$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cdot \cos\theta_j^*, r_i^* \cdot \sin\theta_j^*) \cdot r_i^* \cdot \Delta r \cdot \Delta\theta$$

Đặt $g(r,\theta) = r \cdot f(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$ $\quad V_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*) \cdot \Delta r \cdot \Delta\theta$

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cdot \cos\theta_j^*, r_i^* \cdot \sin\theta_j^*) \cdot \Delta A_i\right)$$

$$= \lim_{m,n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*) \cdot \Delta r \cdot \Delta\theta\right) = \int_\alpha^\beta\int_a^b g(r,\theta)drd\theta$$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_a^b f(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot r \cdot dr}$$

Tích phân kép

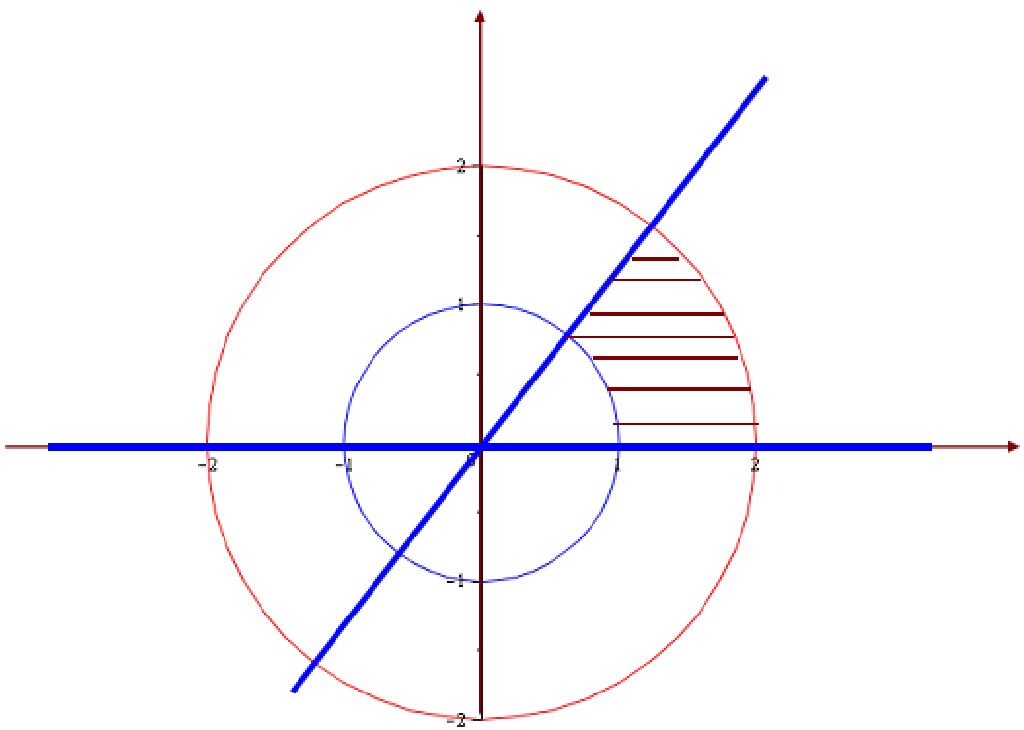
Ví dụ (Đổi sang tọa độ cực)

Tính tích phân kép $I = \iint_D (x+y)\,dxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

$$x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, \mathrm{y} \geq 0, y \leq x$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\boldsymbol{D}: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$



Tích phân kép

Ví dụ (Đổi sang tọa độ cực)

$$I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$$

$$I = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\cdot r \cdot dr = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot r^2 \cdot dr$$

$$I = \int_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 d\varphi$$

$$I = \int_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) d\varphi$$

Tích phân kép

Ví dụ (Đổi sang tọa độ cực)

Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

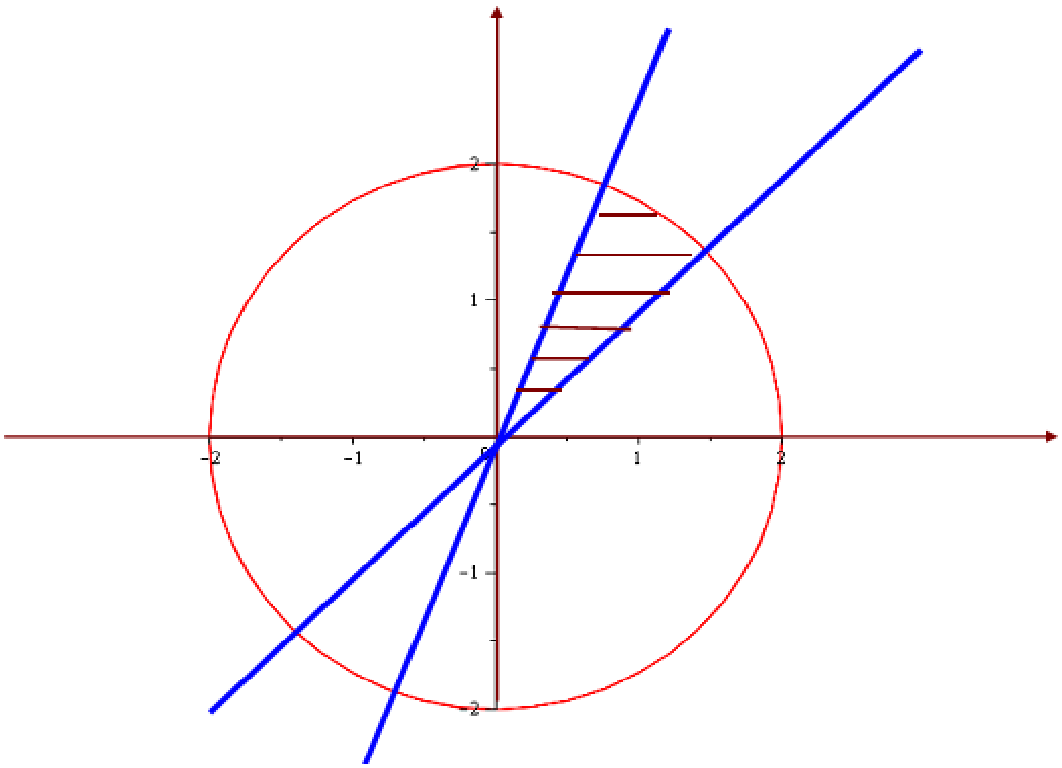
$$x^2 + y^2 = 4, y = x, y = x\sqrt{3} \quad (y \geq x)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$D: \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$$
$$0 \leq r \leq 2$$

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 \sqrt{3 - r^2} \cdot r \cdot dr$$

$$I = \frac{2\pi}{9}$$



Tích phân kép

Ví dụ (Đổi sang tọa độ cực)

Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

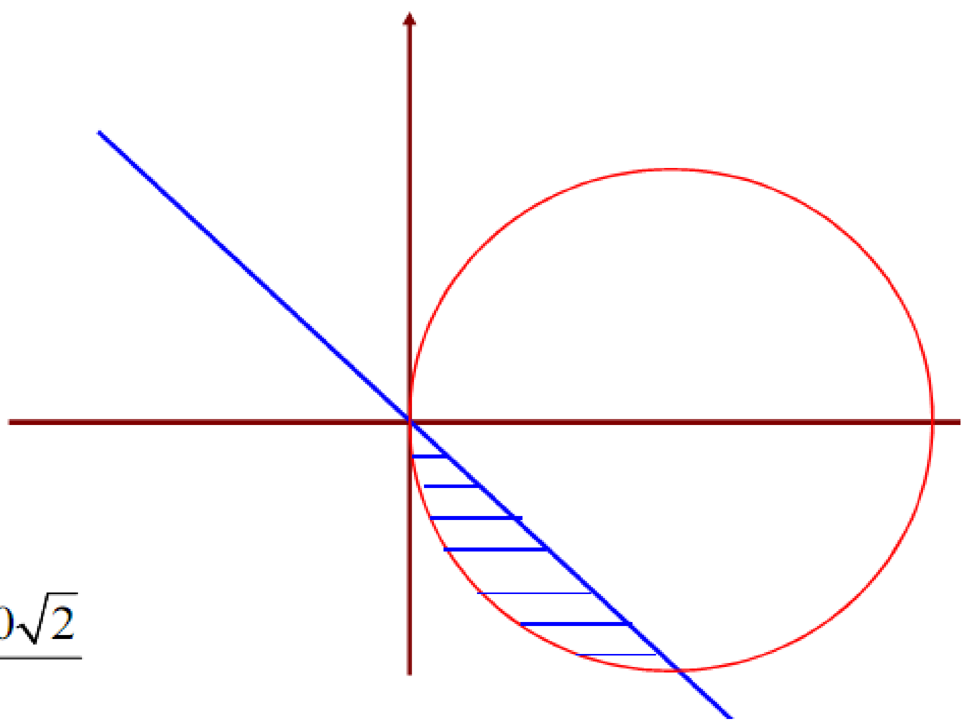
$$x^2 + y^2 \le 2x, y \le -x.$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} \frac{-\pi}{2} \le \varphi \le \frac{-\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r \cdot r \cdot dr$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{8}{3}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{16 - 10\sqrt{2}}{9}$$



Tích phân kép

Toạ độ cực mở rộng:

Trường hợp 1. Miền phẳng D là hình tròn $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le a^2$

Dùng phép đổi biến:

$$\begin{cases} x-x_0 = r\cos\varphi \\ y-y_0 = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó định thức Jacobi:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r.\sin\varphi \\ \sin\varphi & r.\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

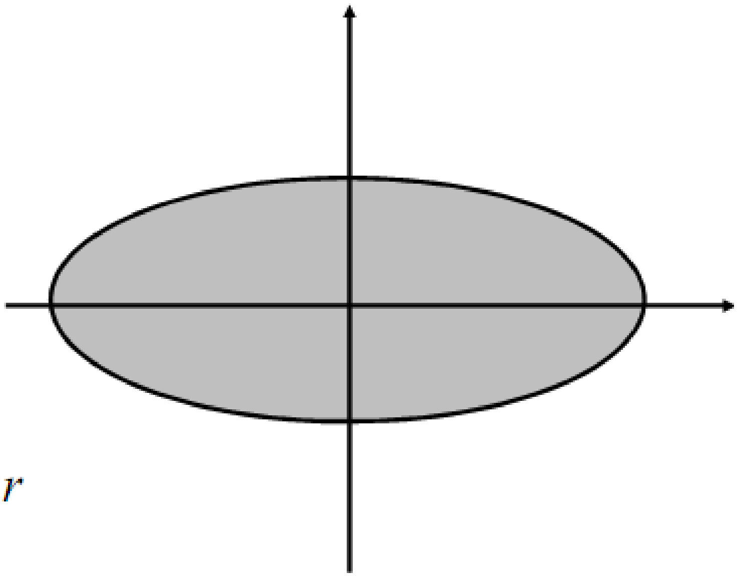
Khi lấy cận của r, φ ta coi như gốc tọa độ dời về tâm hình tròn.

Tích phân kép

Toạ độ cực mở rộng:

Trường hợp 2. Miền phẳng D ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, a>0, b>0$

Dùng phép đổi biến: $\begin{cases} \frac{x}{a} = r\cos\varphi \\ \frac{y}{b} = r\sin\varphi \end{cases}$



Khi đó định thức Jacobi:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a.\cos\varphi & -ar.\sin\varphi \\ b.\sin\varphi & br.\cos\varphi \end{vmatrix} = a.b.r$$

Khi đó cận của r, φ: $\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \end{cases}$

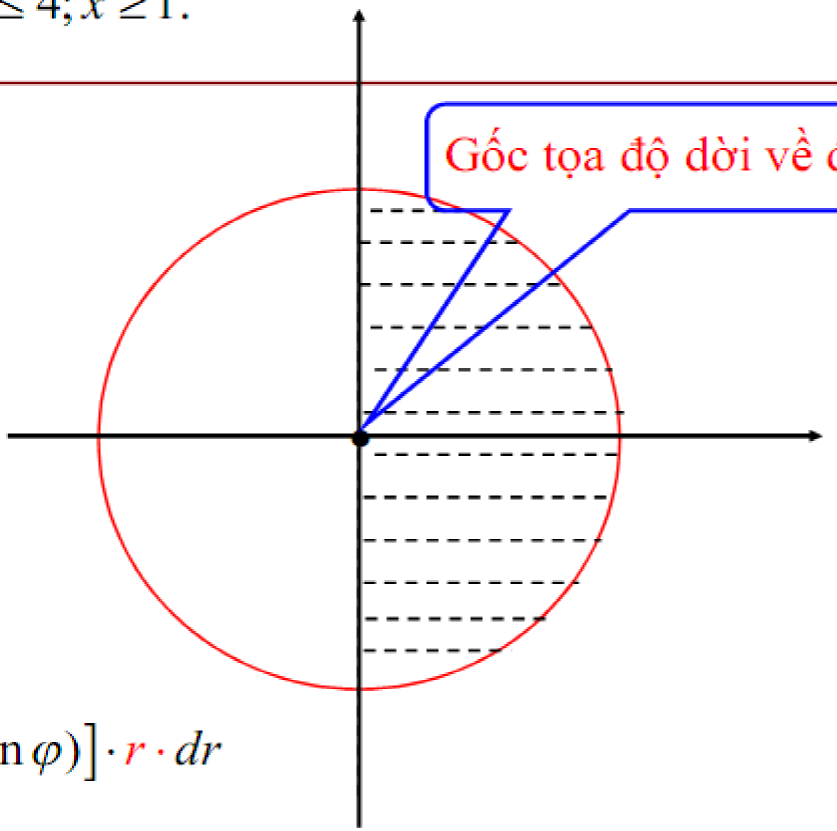
Tích phân kép

Toạ độ cực mở rộng:

Ví dụ

Tính $I = \iint_D (2x+y)dxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 4; x \ge 1.$$



$$\begin{cases} x - 1 = r\cos\varphi \\ y - 2 = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \left[2(1 + r\cos\varphi) + (2 + r\sin\varphi)\right] \cdot r \cdot dr$$

Tích phân kép

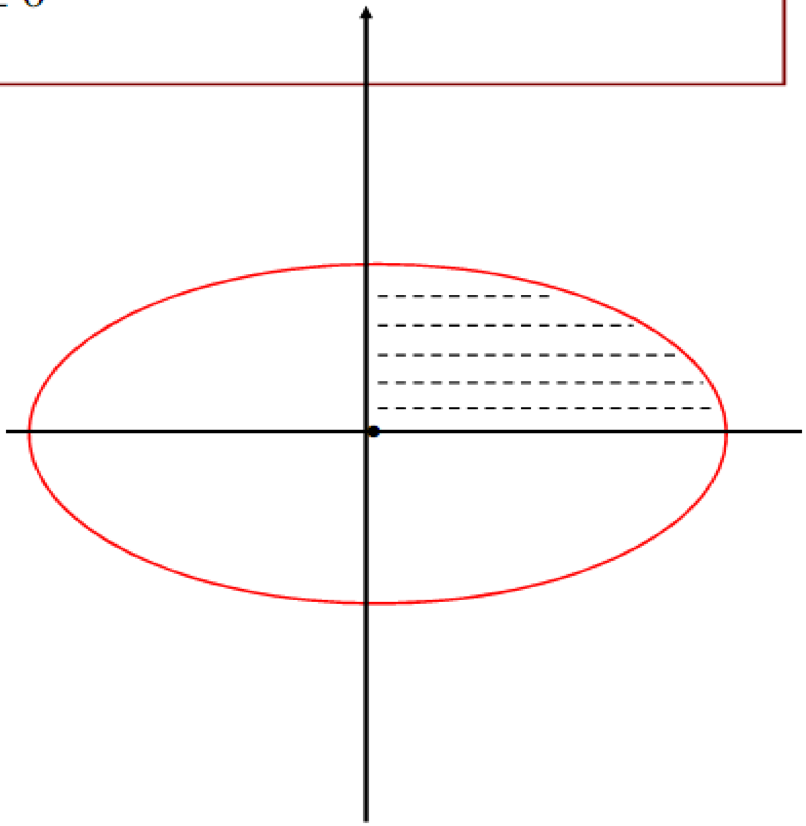
Toạ độ cực mở rộng:

Ví dụ

Tính $I = \iint_D (x+1)dxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1; y \ge 0; x \ge 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = r\cos\varphi \\ \dfrac{y}{2} = r\sin\varphi \end{cases}$$



$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (3.r\cos\varphi + 1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot r \cdot dr$$

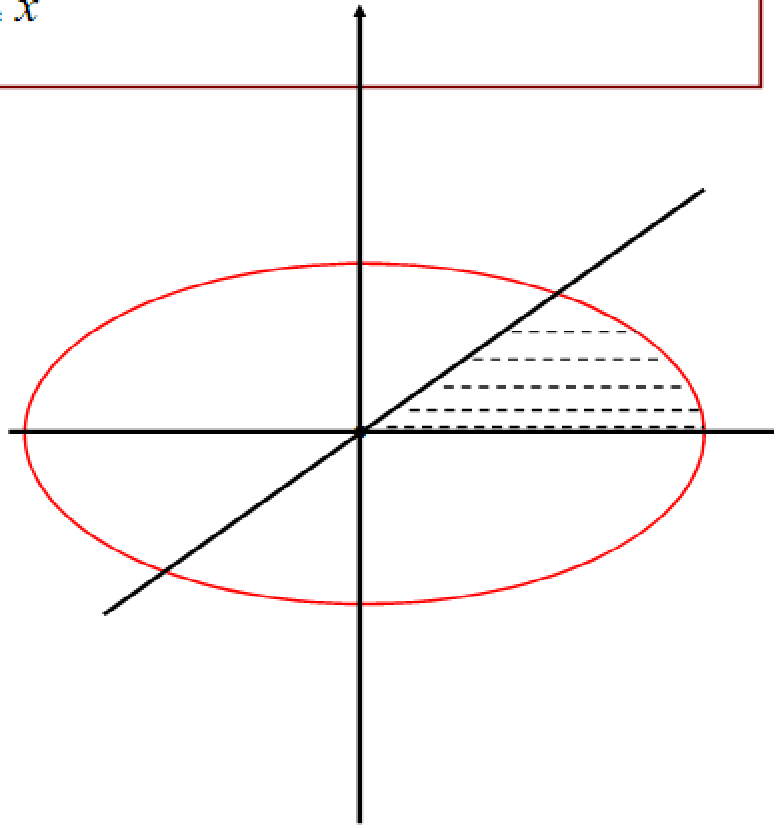
Tích phân kép

Toạ độ cực mở rộng:

Ví dụ

Tính $I = \iint_D x\,dx\,dy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

$$\frac{x^2}{3} + y^2 \le 1;\ y \ge 0;\ y \le x$$



$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}} = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y/r}{x/(r\sqrt{3})}$$

Vì đường y = x nên $\mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$I = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 \sqrt{3}.r\cos\varphi \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot r \cdot dr$$

Tích phân kép – Ứng dụng

Diện tích miền D: $S_D = \iint\limits_D 1 \cdot dxdy$

Thể tích hình trụ cong được giới hạn trên bởi f = f(x,y), giới hạn dưới bởi miền D, giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song 0z, tựa trên biên D:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Thể tích hình trụ cong được giới hạn trên bởi $f = f_2(x,y)$, giới hạn dưới bởi $f = f_1(x,y)$, giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song 0z, tựa trên biên D:

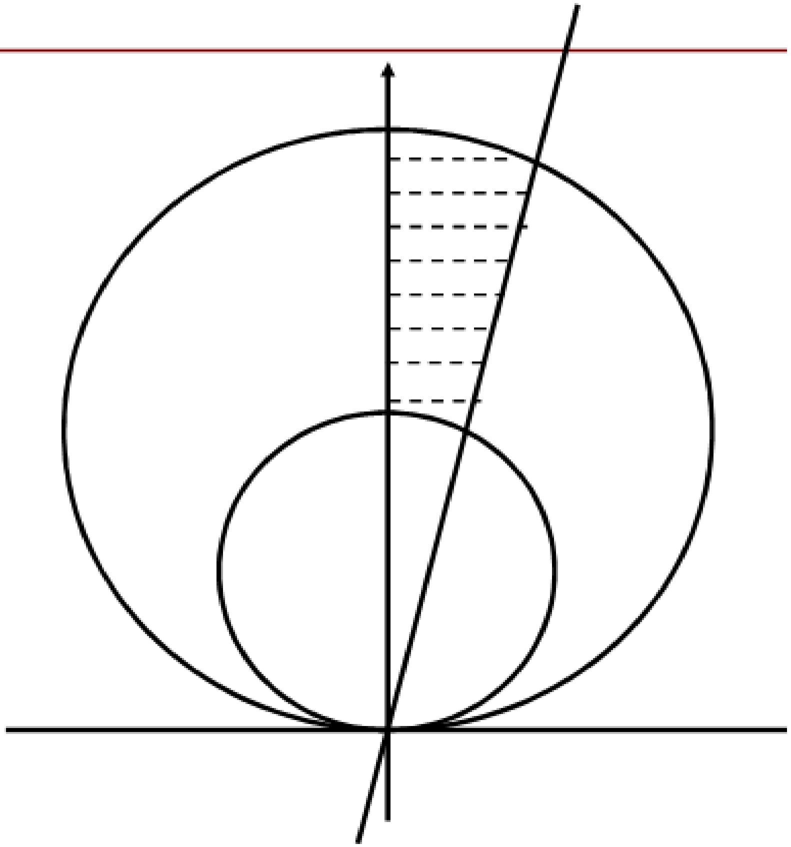
$$V = \iint\limits_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right)dxdy$$

Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ

Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 = 2y; x^2 + y^2 = 6y; y \ge x\sqrt{3}; x \ge 0$$



Diện tích miền D là:

$$S_D = \iint_D dxdy \quad = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{6\sin\varphi} rdr$$

$$S_D = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{2\sin\varphi}^{6\sin\varphi} d\varphi \quad = \int_{\pi/3}^{\pi/2} 16\sin^2\varphi d\varphi$$

$$S_D = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

Tích phân kép – Ứng dụng

Để tính thể tích khối Ω

1) Xác định mặt giới hạn bên trên: $z = z_2(x, y)$

2) Xác định mặt giới hạn bên dưới: $z = z_1(x, y)$

3) Xác định hình chiếu của Ω xuống 0xy: $D = \text{pr}_{oxy}\Omega$

$$\boxed{V_\Omega = \iint_D \left(z_2(x, y) - z_1(x, y) \right) dxdy}$$

Chú ý: 1) Có thể chiếu Ω xuống 0xz, hoặc 0yz. Khi đó mặt phía trên, mặt phía dưới phải theo hướng chiếu xuống.

2) Để tìm hình chiếu của Ω xuống 0xy, ta khử z trong các phương trình của Ω

Tích phân kép – Ứng dụng

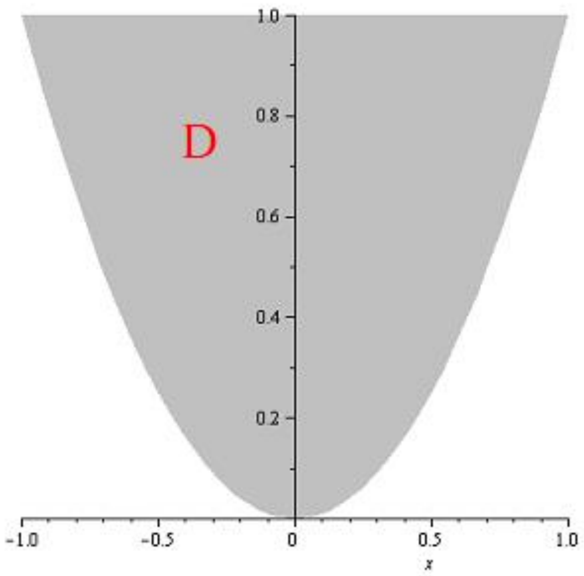
Ví dụ

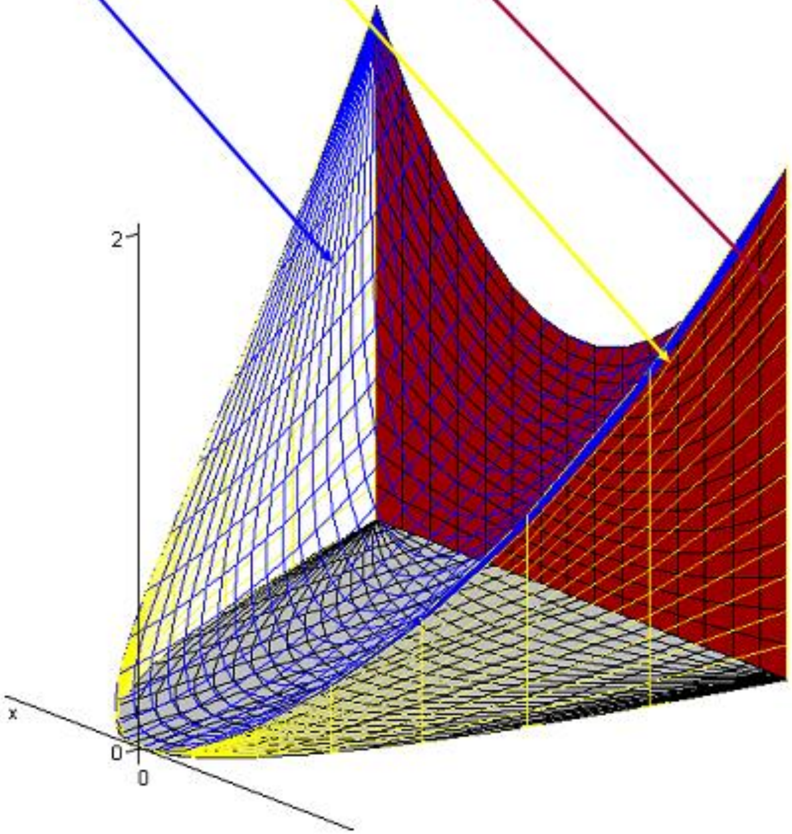
Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $z = x^2 + y^2; y = x^2; y = 1; z = 0$

Mặt trên: $z = x^2 + y^2$

Mặt phía dưới: $z = 0$

Hình chiếu: D





Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ

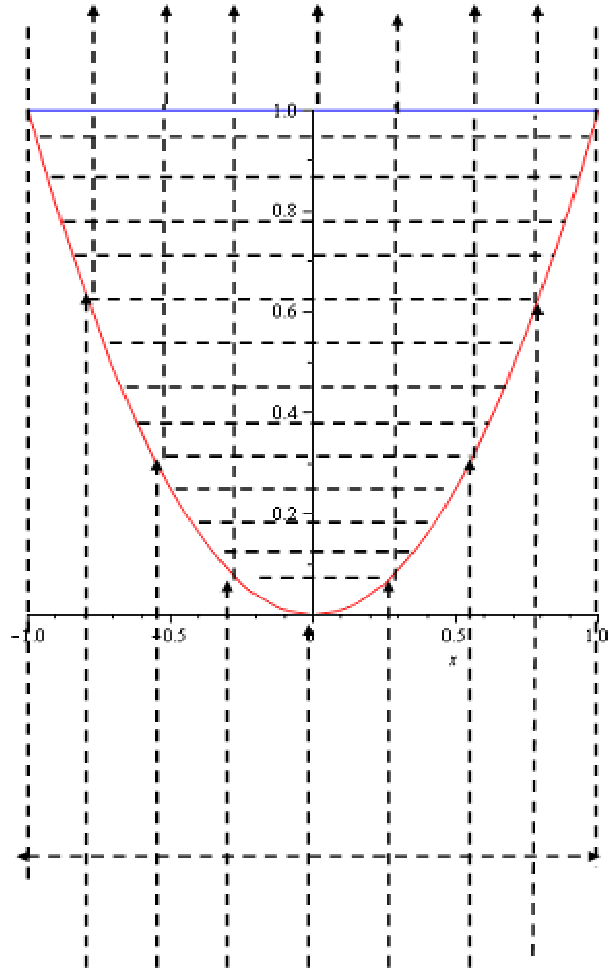
$$V = \iint_D \left(x^2 + y^2 - 0\right) dxdy$$

$$D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$V = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \left(x^2 + y^2\right) dy$$

$$V = \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx$$

$$V = \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2 + \frac{1}{3} \right) - \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) \right] dx \quad = \frac{88}{105}$$



Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ

Tính thể tích vật thể giới hạn trên bởi $(x-1)^2 + y^2 = z; 2x + z = 2$

Mặt phía trên: $z = z_2(x,y) = 2x - 2$

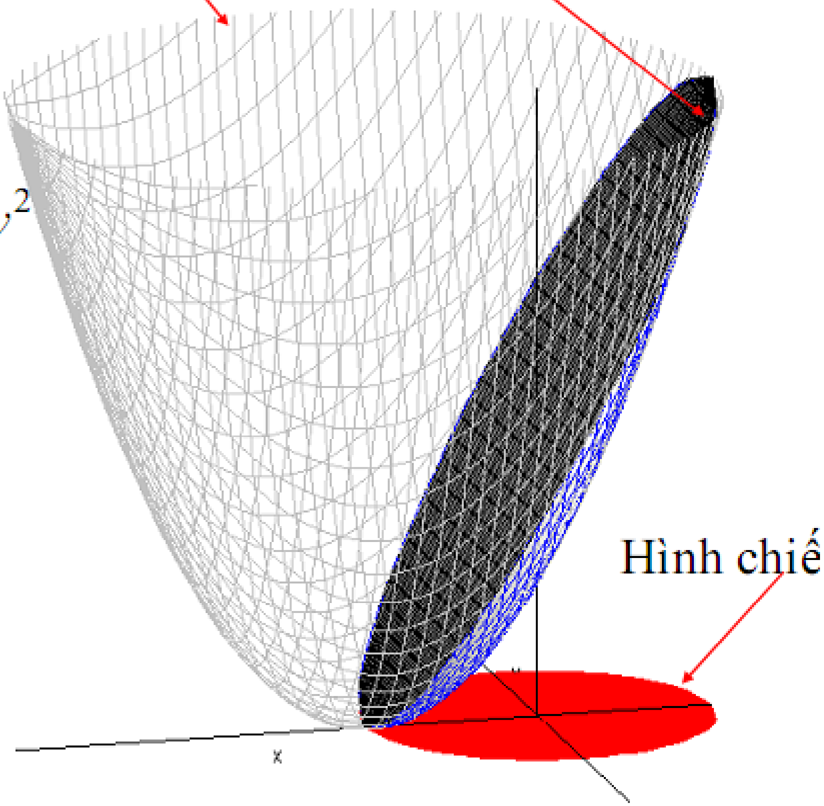
Mặt phía dưới: $z = z_1(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

Hình chiếu: khử z trong 2 phương trình

$$(x-1)^2 + y^2 = 2x - 2 \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow D: x^2 + y^2 \le 1$$

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (z_2 - z_1)\,dxdy$$



Tích phân kép – Ứng dụng

Ví dụ

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left((2-2x)-(x^2-2x+1+y^2)\right)dxdy$$

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(1-x^2-y^2\right)dxdy$$

Đổi sang tọa độ cực: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1-r^2\right)\cdot r\cdot dr \quad = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi$$

$$V = \frac{\pi}{2}$$

Tích phân kép – Ứng dụng

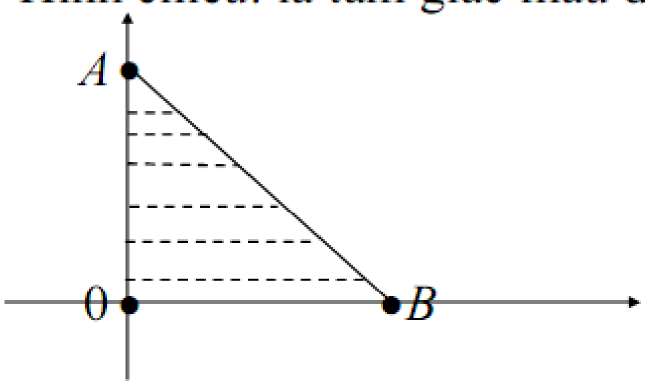
Ví dụ

Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $z = 2x^2 + y^2 + 1; x + y = 1;$ và các mặt tọa độ.

Mặt phía trên: $z = 2x^2 + y^2 + 1$

Mặt phía dưới: $z = 0$

Hình chiếu: là tam giác màu đỏ.



$$V = \iint_{\text{tam giác}} \left(2x^2 + y^2 + 1 - 0\right) dxdy$$