Chương 1: Ma trận - Định thức

Nguyễn Minh Trí

Ngày 6 tháng 10 năm 2022

Một số kí hiệu

- $\mathbb{N}$ tập hợp các số tự nhiên (có số 0)
- $\mathbb{Z}$ tập hợp các số nguyên
- $\mathbb{Q}$ tập hợp các số hữu tỉ
- $\mathbb{R}$ tập hợp các số thực
- $\mathbb{C}$ tập hợp các số phức
- Trong kí hiệu a_i, i được gọi là chỉ số

Định nghĩa 1.1.1

Một ma trận cấp $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ trên tập $\mathbb{R}$ là một bảng gồm $m \times n$ số được sắp xếp thành m hàng, n cột theo một thứ tự nhất định.

Ma trận A cấp $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; A = (a_{ij})_{m \times n}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$; phần tử nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A được kí hiệu là a_{ij}

Chú ý: Nếu không nói gì thêm thì ta luôn xét các ma trận trên tập số thực.

Ví dụ 1.1.2

Ta có $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp 2×3; $B = [2]$ là ma trận cấp 1×1.

Tập các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Định nghĩa 1.1.3

Một ma trận có số hàng bằng số cột (bằng n) được gọi là một ma trận vuông cấp n.

Tập các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $M_n(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1.1.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.1.5 (Ma trận không)

Ma trận không là ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0, kí hiệu là 0.

Ví dụ 1.1.6

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.7 (Ma trận chéo)

Ma trận A được gọi là ma trận **chéo** nếu A là ma trận vuông và $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Ví dụ 1.1.8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Trong ma trận vuông $A = (a_{ij})$, các a_{ii} được gọi là các phần tử nằm trên **đường chéo chính** của A.

Định nghĩa 1.1.9 (Ma trận đơn vị)

Ma trận đơn vị là ma trận vuông mà các phần tử $a_{ii} = 1$, các phần tử còn lại bằng 0, kí hiệu I_n hoặc I.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1.1.10

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.11

Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n.
1. Ma trận A được gọi là *ma trận tam giác trên* nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$.
2. Ma trận A được gọi là ma *trận tam giác dưới* nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$.

Ví dụ 1.1.12

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A là một ma trận tam giác trên, B là một ma trận tam giác dưới và C là một ma trận chéo (vừa làm tam giác trên, vừa là tam giác dưới).

Nhận xét 1.1.13

Ma trận chéo cũng là ma trận tam giác trên (dưới). Các phần tử trên đường chéo chính a_{ii} của một ma trận chéo có thể bằng 0 hoặc khác 0.

Định nghĩa 1.1.14

1. Ma trận cột là ma trận chỉ có một cột

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

2. Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng

$$\begin{bmatrix} a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.15 (Hai ma trận bằng nhau)

Hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng cấp $m \times n$, và các vị trí tương ứng cũng bằng nhau $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Định nghĩa 1.1.16 (Ma trận chuyển vị)

Ma trận chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ kí hiệu là $A^T = (b_{ij})_{n\times m}$ trong đó

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Ta cũng nói A^T là chuyển vị của ma trận A.

Ví dụ 1.1.17

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -9 & 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.1.18 (Ma trận đối xứng)

Ma trận A được gọi là ma trận *đối xứng* nếu $A = A^T$, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ 1.1.19

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A là đối xứng, ma trận B không là đối xứng.

Định nghĩa 1.1.20 (Phép cộng ma trận)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$, khi đó

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Ví dụ 1.1.21

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}$$

Định lý 1.1.22

Cho A, B, C là các ma trận cấp $m \times n$. Khi đó

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) $0 + A = A = A + 0$

Định nghĩa 1.1.23 (Nhân một số với một ma trận)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $c \in \mathbb{R}$. Phép nhân một số c với ma trận A

$$cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Ta viết $-A$ thay cho $(-1)A$. Nếu A, B là các ma trận cùng cấp thì $A - B$ được viết thay cho $A + (-1)B$.

Ví dụ 1.1.24

Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Tính $2A, -B, 2A - B$.

Giải. $2A = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$

$-B = -1. \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$

$2A - B = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$

Định lý 1.1.25

Cho A, B, C là các ma trận cấp $m \times n$ và $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $(a+b)A = aA + bA$

(ii) $a(A+B) = aA + aB$

(iii) $1.A = A$

(iv) $0.A = 0$

(v) $a.0 = 0$

(vi) $a(bA) = (ab)A$

Định nghĩa 1.1.26 (Phép nhân ma trận)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Tích của hai ma trận A và B là một ma trận cấp $m \times p$, kí hiệu $AB = (c_{ik})_{m\times p}$ xác định như sau:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Chú ý. Tích hai ma trận AB chỉ thực hiện được khi **số cột của** A **bằng số hàng của** B.

Ví dụ 1.1.27

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 9 & -1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. Tính AB, BA và $A^T B^T, IA, AB^T$ trong đó I là ma trận đơn vị.

Giải.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 9 & -1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 9 & -1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}$$

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}$$

AB^T không tồn tại vì A có cấp 2×3 và B^T có cấp 2×3 (số hàng của B^T khác số cột A).

Định lý 1.1.28

Cho A, B, C là các ma trận và $a \in \mathbb{R}$. Giả sử các phép toán sau thực hiện được. Khi đó

(i) $(AB)C = A(BC)$

(ii) $IA = A$ $(A = AI)$ với I là ma trận đơn vị

(iii) $A(B + C) = AB + AC$

(iv) $(A + B)C = AC + BC$

(v) $a(AB) = (\alpha A)B = A(aB)$.

Chú ý. Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán. Tức là, AB nói chung là không bằng BA.

Cho A là một ma trận vuông. Ta viết A^k thay cho $A.A.\dots.A$ (k lần). Ta qui ước $A^0 = I$ (ma trận đơn vị).

Ví dụ 1.1.29

Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

a. Tính $A^2, (A+B)^2$ và $A^2 + 2AB + B^2$.

b. Đẳng thức $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ đúng hay sai? Vì sao?

Giải. a. Ta có

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}$$

Ta thấy rằng $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$ và

$$A + B = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}.$$

Do đó $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}.$

Ta có

$$
\begin{aligned}
A^2+2AB+B^2 &= \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots\cdot & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

b. Từ các tính toán trong a, ta thấy rằng

$$(A+B)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots A^2+2AB+B^2.$$

Ví dụ 1.1.30

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n theo n với $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

Giải. Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. \end{bmatrix}, A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. \end{bmatrix}$$

và tổng quát ta dự đoán

$$A^n = \begin{bmatrix} \dots\dots. & \dots\dots. \\ \dots\dots. & \dots\dots. \end{bmatrix} \text{ với } n \geq 1.$$

Ta sẽ chứng minh phát biểu trên bằng phương pháp quy nạp. Đầu tiên, ta chứng minh phát biểu trên đúng với $n = 1$. Khi đó

$$A^1 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} = A.$$

Giả sử

$$A^k = \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} \text{ với } k \geq 1.$$

Tiếp theo, chứng minh phát biểu đúng với $n = k + 1$. Sử dụng tính chất lũy thừa ma trận và giả thiết quy nạp,

$$\begin{aligned}
A^{k+1} = A^k A &= \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{(k+1)-1} & 2^{(k+1)-1} \\ 2^{(k+1)-1} & 2^{(k+1)-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Như vậy $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$ với mọi $n \geq 1$.

Định lý 1.1.31

Cho A, B là các ma trận cấp $m \times n$, C là ma trận cấp $n \times p$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(AC)^T = C^T A^T$

(iii) $(A^T)^T = A$

(iv) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Định nghĩa 1.1.32

Cho đa thức

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

và ma trận vuông A. Khi đó

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I,$$

trong đó I là ma trận đơn vị.

Ví dụ 1.1.33

Cho đa thức $f(x) = x^2 + 3x + 5$ và $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Tính $f(A)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 + 3A + 5I \\ &= \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$