ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

Câu 1: Tìm cơ sở và chiều của không gian vectơ

$$T = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

Câu 2: Cho các vectơ $a_1 = (3, 0, 4), a_2 = (1, -1, 1), a_3 = (1, 4, -2)$ và $x = (5, 3, -2)$.

a. Chứng minh $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

b. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở B.

c. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở chính tắc.

Câu 3: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính A^{100}.

Câu 4: Cho dạng toàn phương f trên $\mathbb{R}^3$ và

$$E = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho với mọi $X \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$f(X) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

trong đó $[X]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

a. Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b. Chỉ ra một cơ sở U tương ứng với dạng chính tắc này.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2

Câu 1: Tìm cơ sở và chiều của không gian vectơ

$$T = \text{Span}\{(-1,2,1,1),(2,2,-1,2),(0,6,1,4),(1,4,0,3),(1,-1,1,2)\}$$

Câu 2: Cho các vectơ $a_1 = (2,1,3), a_2 = (1,-1,1), a_3 = (1,4,-2)$ và $x = (1,1,-2)$.

a. Chứng minh $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$

b. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở B.

c. Hãy trực chuẩn hóa Gram-schmidt hệ vectơ a_1, a_2, a_3.

Câu 3: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

Câu 4: Cho dạng toàn phương q trên $\mathbb{R}^3$ và E là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho với mọi $X \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$q(X) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

trong đó $[X]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

a. Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b. Chỉ ra một cơ sở U tương ứng với dạng chính tắc này