Chương 4. Không gian vectơ Euclid

Nguyễn Minh Trí

Ngày 24 tháng 12 năm 2022

4.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 4.1.1 (Tích vô hướng)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng hai vectơ $x, y \in V$ với duy nhất một số thực, kí hiệu là $\langle x, y \rangle$, thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi $x, y, z \in V; a, b \in \mathbb{R}$ ta có

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 4.1.1 (Tích vô hướng)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng hai vectơ $x, y \in V$ với duy nhất một số thực, kí hiệu là $\langle x, y \rangle$, thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi $x, y, z \in V; a, b \in \mathbb{R}$ ta có

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

4.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 4.1.1 (Tích vô hướng)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng hai vectơ $x, y \in V$ với duy nhất một số thực, kí hiệu là $\langle x, y\rangle$, thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi $x, y, z \in V; a, b \in \mathbb{R}$ ta có

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$

4.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 4.1.1 (Tích vô hướng)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng hai vectơ $x, y \in V$ với duy nhất một số thực, kí hiệu là $\langle x, y\rangle$, thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi $x, y, z \in V; a, b \in \mathbb{R}$ ta có

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Định nghĩa 4.1.1 (Tích vô hướng)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng hai vectơ $x, y \in V$ với duy nhất một số thực, kí hiệu là $\langle x, y\rangle$, thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi $x, y, z \in V; a, b \in \mathbb{R}$ ta có

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Định nghĩa 4.1.1 (Tích vô hướng)

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng hai vectơ $x, y \in V$ với duy nhất một số thực, kí hiệu là $\langle x, y \rangle$, thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi $x, y, z \in V; a, b \in \mathbb{R}$ ta có

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Định nghĩa 4.1.2

Một $\mathbb{R}$-không gian vectơ V cùng với tích vô hướng trên V được gọi là một không gian vectơ Euclid.

Ta có

- $\langle x, ay + bz\rangle$..
....
- $\langle x, ay\rangle$.................................
- $\langle x, \theta\rangle$.....................
- $\langle \sum_i a_i x_i, \sum_j b_j y_j\rangle$...

Ví dụ 4.1.3

Cho $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, đặt

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Khi đó quy tắc trên là một **tích vô hướng** (được gọi là tích vô hướng chính tắc) trên $\mathbb{R}^n$. Do đó $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ Euclid cùng với tích vô hướng này.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.1.4

Cho $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + 4x_2y_2.$$

Khi đó quy tắc đã cho là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 4.1.4

Cho $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + 4x_2y_2.$$

Khi đó quy tắc đã cho là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 4.1.5

Trên $P_2[x]$, ta cho một quy tắc như sau: với $f, g \in P_2[x]$, đặt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Quy tắc trên là tích vô hướng. Do đó $P_2[x]$ là một không gian vectơ Euclid.

Định nghĩa 4.1.6

- Cho V là một không gian vectơ Euclid. **Độ dài** của $x \in V$ là một số

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Định nghĩa 4.1.6

- Cho V là một không gian vectơ Euclid. **Độ dài** của $x \in V$ là một số

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

- Nếu $\|x\| = 1$ thì ta nói x là vectơ đơn vị.

Định nghĩa 4.1.6

- Cho V là một không gian vectơ Euclid. **Độ dài** của $x \in V$ là một số

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

- Nếu $\|x\| = 1$ thì ta nói x là vectơ đơn vị.
- Với mỗi $x \in V, x \neq \theta$ ta có vectơ đơn vị

$$\overline{x} = \frac{1}{\|x\|}x.$$

Vectơ $\overline{x}$ được gọi là sự chuẩn hóa vectơ x.

Định nghĩa 4.1.6

- Cho V là một không gian vectơ Euclid. **Độ dài** của $x \in V$ là một số

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

- Nếu $\|x\| = 1$ thì ta nói x là vectơ đơn vị.
- Với mỗi $x \in V, x \neq \theta$ ta có vectơ đơn vị

$$\overline{x} = \frac{1}{\|x\|}x.$$

  Vectơ $\overline{x}$ được gọi là sự chuẩn hóa vectơ x.
- Góc giữa x và y được xác định bởi

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|.\|y\|}$$

Ví dụ 4.1.7

Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc. Nếu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ví dụ 4.1.7

Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc. Nếu $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ví dụ 4.1.8

Trên $P_2[x]$, ta cho một tích vô hướng xác định bởi

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Tính độ dài của $f = x^2 + 2x + 3$.

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.1.9

Trong không gian vectơ Euclid $\mathbb{R}^2$ (với tích vô hướng chính tắc). Tính góc giữa hai vectơ $x = (2, 2), y = (5, 0)$.

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

Mệnh đề 4.1.10

Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V, k \in \mathbb{R}$. Khi đó

Mệnh đề 4.1.10

Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V, k \in \mathbb{R}$. Khi đó

(i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(ii) $\|kx\| = |k|.\|x\|$

(iii) (Bất đẳng thức Cauchy - Schwart) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$

(iv) (Bất đẳng thức tam giác) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

4.2 Trực giao

Định nghĩa 4.2.1

- Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vectơ x **trực giao** với vectơ y, kí hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.

Quy ước: Tập gồm một vectơ luôn được xem là trực giao.

Định nghĩa 4.2.1

- Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vectơ x **trực giao** với vectơ y, kí hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.
- Một tập con $S \neq \emptyset$ của V được gọi là **tập con trực giao** nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.

Quy ước: Tập gồm một vectơ luôn được xem là trực giao.

Định nghĩa 4.2.1

- Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vectơ x **trực giao** với vectơ y, kí hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.
- Một tập con $S \neq \emptyset$ của V được gọi là **tập con trực giao** nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.
- Một tập con trực giao S của V được gọi là **trực chuẩn** nếu $\|x\| = 1$ với mọi $x \in S$.

Quy ước: Tập gồm một vectơ luôn được xem là trực giao.

Định nghĩa 4.2.1

- Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vectơ x **trực giao** với vectơ y, kí hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.
- Một tập con $S \neq \emptyset$ của V được gọi là **tập con trực giao** nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.
- Một tập con trực giao S của V được gọi là **trực chuẩn** nếu $\|x\| = 1$ với mọi $x \in S$.

Quy ước: Tập gồm một vectơ luôn được xem là trực giao.

Định nghĩa 4.2.1

- Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vectơ x **trực giao** với vectơ y, kí hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y\rangle = 0$.
- Một tập con $S \neq \emptyset$ của V được gọi là **tập con trực giao** nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.
- Một tập con trực giao S của V được gọi là **trực chuẩn** nếu $\|x\| = 1$ với mọi $x \in S$.

Quy ước: Tập gồm một vectơ luôn được xem là trực giao.

Ví dụ 4.2.2 Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vectơ $x = (-1, 0, -1), y = (1, -2, -1), z = (1, 1, -1)$. Khi đó $S = \{x, y, z\}$ là một tập trực giao.

Định nghĩa 4.2.1

- Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vectơ x **trực giao** với vectơ y, kí hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.
- Một tập con $S \neq \emptyset$ của V được gọi là **tập con trực giao** nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.
- Một tập con trực giao S của V được gọi là **trực chuẩn** nếu $\|x\| = 1$ với mọi $x \in S$.

Quy ước: Tập gồm một vectơ luôn được xem là trực giao.

Ví dụ 4.2.2 Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vectơ $x = (-1, 0, -1), y = (1, -2, -1), z = (1, 1, -1)$. Khi đó $S = \{x, y, z\}$ là một tập trực giao.

Thật vậy, ta có

$$\langle x, y \rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\langle x, z \rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\langle y, z \rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Định nghĩa 4.2.3

Một **cơ sở trực chuẩn** của một không gian vectơ Euclid là một tập con trực chuẩn và là cơ sở.

Định nghĩa 4.2.3

Một **cơ sở trực chuẩn** của một không gian vectơ Euclid là một tập con trực chuẩn và là cơ sở.

Ví dụ 4.2.4

- Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là một cơ sở trực chuẩn.

Định nghĩa 4.2.3

Một **cơ sở trực chuẩn** của một không gian vectơ Euclid là một tập con trực chuẩn và là cơ sở.

Ví dụ 4.2.4

- Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là một cơ sở trực chuẩn.
- Trong $\mathbb{R}^2$, tập $\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \right\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Định nghĩa 4.2.3

Một **cơ sở trực chuẩn** của một không gian vectơ Euclid là một tập con trực chuẩn và là cơ sở.

Ví dụ 4.2.4

- Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là một cơ sở trực chuẩn.
- Trong $\mathbb{R}^2$, tập $\left\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Nếu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một tập trực giao không chứa vectơ không thì $\left\{\frac{1}{\|e_1\|}e_1, \frac{1}{\|e_2\|}e_2, \cdots, \frac{1}{\|e_n\|}e_n\right\}$ là một tập trực chuẩn. Quá trình này được gọi là **chuẩn hóa** tập đã cho.

Định lý 4.2.5 (Trực giao hóa Gram-Schmidt)

Cho $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một tập các vectơ của không gian Euclid V. Ta xây dựng được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ như sau:

$$v_1 = u_1$$

Định lý 4.2.5 (Trực giao hóa Gram-Schmidt)

Cho $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một tập các vectơ của không gian Euclid V. Ta xây dựng được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ như sau:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

Định lý 4.2.5 (Trực giao hóa Gram-Schmidt)

Cho $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một tập các vectơ của không gian Euclid V. Ta xây dựng được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ như sau:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2
\end{aligned}
$$

Định lý 4.2.5 (Trực giao hóa Gram-Schmidt)

Cho $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một tập các vectơ của không gian Euclid V. Ta xây dựng được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ như sau:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 \\
v_i &= u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} v_k
\end{aligned}
$$

Nhận xét 4.2.6 Quá trình trực chuẩn hóa một tập $\{u_1, \ldots, u_n\}$ bất kì.

1. Trực giao hóa Gram-Schmidt, ta được một tập trực giao $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
2. Đặt $w_i = \dfrac{1}{\|v_i\|} v_i$.
3. $\{w_1, \ldots, w_n\}$ là một tập trực chuẩn

Ví dụ 4.2.7 Trong $\mathbb{R}^3$, trực chuẩn hóa các vectơ

$$u_1 = (0, 1, 1,), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 0).$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 1. Trong $\mathbb{R}^3$, cho tập $X = \{a = (1, 2, 3), b = (-1, 2, -1)\}$. Hãy bổ sung thêm một vectơ c vào X sao cho $\{a, b, c\}$ là một tập trực giao.
Bài tập 2. Cho $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là một tập trực giao không chứa vectơ không. Chứng minh rằng A độc lập tuyến tính.
Bài tập 3. Trong $P_2[x]$ với tích vô hướng $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, trực giao hóa hệ các vectơ $\{f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = 2 - x + x^2\}$.