1.4 Ma trận khả nghịch

Nguyễn Minh Trí

Ngày 6 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 1.4.1

- Cho A là ma trận vuông cấp n. Ma trận A được gọi là khả nghịch nếu có ma trận vuông B cấp n sao cho $A.B = B.A = I$ (I là ma trận đơn vị).
- Ma trận B được gọi là **ma trận nghịch đảo** của ma trận A, kí hiệu $B = A^{-1}$.
- Những ma trận vuông khả nghịch được gọi là **ma trận không suy biến**. Ngược lại, ta gọi là **ma trận suy biến**.

Ví dụ 1.4.2. Ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ vì

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Định lý 1.4.3

1. Ma trận nghịch đảo của một ma trận, nếu tồn tại, là duy nhất.
2. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

Mệnh đề 1.4.4

Cho A, B là các ma trận vuông khả nghịch. Khi đó

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
4. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ với k là một số tự nhiên nào đó,
5. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ với $c \neq 0$.

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A, ta làm như sau:

1. Lập ma trận $[A|I]$, trong đó I là ma trận đơn vị.
2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận $[A|I]$ về dạng $[I|B]$.
3. Khi đó B là ma trận nghịch đảo của A.

Chú ý. Trong quá trình biến đổi ở bước 2, nếu ma trận bên trái có một hàng 0 thì ta nói ma trận A không khả nghịch (không có ma trận nghịch đảo).

Ví dụ 1.4.5 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. Ta lập ma trận $[A|I]$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa $[A|I]$ thành $[I|B]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\dots\dots\dots\dots\dots]{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right] \xrightarrow[\dots\dots\dots\dots\dots]{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right] \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dotfill\dotfill} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dotfill\dotfill} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ -4/3 & -2 & 5/3 \end{bmatrix}.$

Ví dụ 1.4.6 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải. Thực hiện các phép biến đổi trên ma trận

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to -3h_1 + h_3]{h_2 \to -3h_1 + h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to -h_2 + h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ma trận bên trái có một hàng không. Do đó, ta không thể đưa ma trận A về ma trận đơn vị. Như vậy, không tồn tại A^{-1}.

Định nghĩa 1.4.7

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n và A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}. Khi đó

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là *ma trận phụ hợp* của A.

Định lý 1.4.8

Cho ma trận vuông A cấp n khả nghịch. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A.$$

Ví dụ 1.4.9 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Giải. Ta có $\det(A) = ...$ do đó A là ma trận khả nghịch. Các phần bù đại số

$$A_{11} = ..., A_{12} = ..., A_{13} = ...,$$
$$A_{21} = ..., A_{22} = ..., A_{23} = ...,$$
$$A_{31} = ..., A_{32} = ..., A_{33} = ...$$

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{....} \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix}.$

Hệ quả 1.4.10

Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là một ma trận khả nghịch. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.4.11 Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có $\det(A) =$ ...., do đó ma trận A khả nghịch.Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{....} \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 1.4.12

Cho A, B là các ma trận khả nghịch. Khi đó

1. $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$
2. $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $AX + kC = D \Leftrightarrow X = A^{-1}(D - kC)$

Ví dụ 1.4.13 Tìm ma trận X thỏa mãn

$$X \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải. Phương trình có dạng $XA = C$. Do đó $X = CA^{-1}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1.(-10) - 2.(-6)} \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bài tập 1.

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$