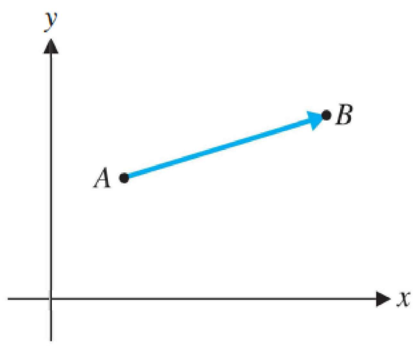
3. Không gian vectơ

3.1 Khái niệm về không gian vectơ

Trong hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy. Chọn O là giao của hai trục (trục x và trục y). Một vectơ là một đoạn thẳng có hướng nó tương ứng với một sự dịch chuyển từ điểm A đến điểm B.



Vectơ từ A đến B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$; điểm A được gọi là điểm gốc và điểm B được gọi là điểm ngọn. Một vectơ được kí hiệu đơn giản là v.

Tập tất cả các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy tương ứng với tập tất cả các vectơ có điểm gốc tại O. Với điểm A, ta kí hiệu $a = \overrightarrow{OA}$ để chỉ vectơ có gốc tại O và ngọn tại A. Một cách rất tự nhiên, ta sẽ biểu diễn các vectơ tương ứng với các tọa độ của điểm ngọn. Ví dụ nếu $A = (1,2)$ thì ta viết vectơ $a = \overrightarrow{OA} = (1,2)$. Các số 1,2 trong dấu ( ) được gọi là các thành phần của vectơ a. Vectơ $\overrightarrow{OO} = (0,0)$ được gọi là vectơ không và được kí hiệu là θ. Vì mỗi vectơ trong mặt phẳng Oxy được đại diện bởi một bộ số gồm 2 thành phần nên tập tất cả các vectơ với 2 thành phần được kí hiệu là $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

Cho $a = (a_1,a_2), b = (b_1,b_2)$ là các vectơ trong $\mathbb{R}^2$ và $k \in \mathbb{R}$. Phép cộng hai vectơ a

và b được xác định như sau

$$a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2).$$

Phép nhân với vô hướng ka là một vectơ được xác định như sau

$$ka=(ka_1,ka_2).$$

Với hai phép toán vừa định nghĩa, ta có các tính chất sau: Với mọi $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ và $k,m\in\mathbb{R}$, ta có

1. $a+b\in\mathbb{R}^2$
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. $a+\theta=a=\theta+a$
4. Tồn tại vectơ $a'\in\mathbb{R}^2$ sao cho $a+a'=0=a'+a$
5. $a+b=b+a$
6. $ka\in\mathbb{R}^2$
7. $k(a+b)=ka+kb$
8. $(k+m)a=ka+ma$
9. $(km)a=k(ma)$
10. $1a=a$

Định nghĩa 3.1.1 (Trường) Cho $\mathbb{K}$ là một tập con của tập số phức $\mathbb{C}$. Ta nói $\mathbb{K}$ là một trường nếu nó thỏa các điều kiện sau:

(i) Với mọi $x,y\in\mathbb{K}$, ta có $x+y,xy\in\mathbb{K}$;

(ii) Với mọi $x\in\mathbb{K}$, ta có $-x\in\mathbb{K}$. Hơn nữa, nếu $x\neq 0$ thì $x^{-1}\in\mathbb{K}$.

(iii) Các số 0 và 1 đều thuộc $\mathbb{K}$.

Ví dụ 3.1.2 Ta thấy $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ là các trường. Tuy nhiên, tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ không là trường vì điều kiện (ii) không thỏa. Thật vậy, nếu lấy 2 là một số nguyên thì $2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ không là một số nguyên.

Định nghĩa 3.1.3 (Không gian vectơ) Cho một tập hợp $V\neq\emptyset$ và một trường $\mathbb{K}$. Trên V có một phép toán gọi là phép cộng hai phần tử của V và phép toán thứ hai gọi là phép nhân một phần tử của $\mathbb{K}$ với một phần tử của V (hay còn gọi là phép nhân với vô hướng) sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn: Với mọi

$a, b, c \in V$ và mọi $k, m \in \mathbb{K}$, ta có

(i) $a + b \in V$

(ii) $a + b = b + a$

(iii) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iv) Tồn tại phần tử $\theta \in V$ (gọi là vectơ không) sao cho $a + \theta = \theta + a = a$

(v) Với mỗi $a \in V$, tồn tại $-a \in V$ (gọi là vectơ đối của a) sao cho $a + (-a) = (-a) + a = \theta$

(vi) $ka \in V$

(vii) $k(a + b) = ka + kb$

(viii) $(k + m)a = ka + ma$

(ix) $(km)a = k(ma)$

(x) $1a = a$

Khi đó V được gọi là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ hay một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$. Các phần tử của V được gọi là vectơ, các phần tử của $\mathbb{K}$ được gọi là vô hướng.

Ví dụ 3.1.4 Cho $V = \mathbb{R}$ và $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Phép cộng trong V là phép cộng thông thường các số thực và phép nhân vô hướnglà phép nhân thông thường các số thực. Khi đó $\mathbb{R}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Giải. Ta có các điều sau:

1. Tổng hai số thực là một số thực,
2. Phép cộng các số thực có tính kết hợp,
3. Phép cộng các số thực có tính giao hoán,
4. Vectơ không là số 0,
5. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại $-x \in \mathbb{R}$,
6. Tích của hai số thực là một số thực,
7. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $k(a + b) = ka + kb$,
8. Với mọi $k, m \in \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$ ta có $(k + m)a = ka + ma$,
9. Với mọi $k, m \in \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$, ta luôn có $(km)a = k(ma)$,
10. Với mọi $a \in \mathbb{R}$, ta có $1a = a$.

Vậy $\mathbb{R}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. $\square$

Ví dụ 3.1.5 Cho $V = \mathbb{C}$ và $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ với phép cộng trong V là phép cộng các số phức và phép nhân vô hướng chính là phép nhân một số thực với một số phức. Khi đó $\mathbb{C}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Ví dụ 3.1.6 Cho $n \in \mathbb{N}, \neq 0$ và

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

là tập hợp các bộ n-số của $\mathbb{R}$. Phép cộng và phép nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau: Với mọi $a = (a_1, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ và $k \in \mathbb{R}$ đặt

$$a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$ka = (ka_1, \dots, ka_n).$$

Chứng minh $\mathbb{R}^n$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Giải. Với mọi $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n), c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ và $k, m \in \mathbb{R}$, ta có các điều sau:

1. $a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$ vì $a_i + b_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$
2. $a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n) = b + a$
3. $(a + b) + c = \dots = a + (b + c)$
4. Vectơ không của $\mathbb{R}^n$ là $\theta = (0, \dots, 0)$,
5. Vectơ đối của a là $-a = (-a_1, \dots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$
6. $ka = (ka_1, \dots, ka_n) \in \mathbb{R}^n$ vì $ka_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$
7. $k(a + b) = k(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (ka_1 + kb_1, \dots, ka_n + kb_n) = (ka_1, \dots, ka_n) + (kb_1, \dots, kb_n) = ka + kb$,
8. $(k + m)a = ((k + m)a_1, \dots, (k + m)a_n) = (ka_1 + ma_1, \dots, ka_n + ma_n) = (ka_1, \dots, ka_n) + (ma_1, \dots, ma_n) = ka + ma$,
9. $(km)a = km(a_1, \dots, a_n) = ((km)a_1, \dots, (km)a_n) = (k(ma_1), \dots, k(ma_n))$
   $= k(ma_1, \dots, ma_n) = k(ma)$,
10. $1a = (1a_1, \dots, 1a_n) = a$.

Vậy $\mathbb{R}^n$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. □

Ví dụ 3.1.7 Cho $P_2[x] = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ là tập các đa thức biến x với hệ số thực có bậc không quá 2. Ta định nghĩa phép cộng đa thức và phép nhân một số thực với một đa thức như sau: Với

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ và } q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

thuộc $P_2[x]$. Khi đó

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

cũng có bậc không quá 2 và vì thế nó cũng thuộc $P_2[x]$. Nếu $k \in \mathbb{R}$, thì

$$kp(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2$$

cũng thuộc $P_2[x]$. Ta dễ dàng chứng minh được các điều kiện trong Định nghĩa 3.1.3.
Vectơ không là đa thức không, tức là đa thức có các hệ số đều bằng 0. Đa thức đối của đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ được kí hiệu là $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$.
Như vậy, $P_2[x]$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Ví dụ 3.1.8 Tập $\mathbb{R}[x]$ gồm các đa thức biến x với hệ số thực là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ với phép cộng các đa thức và phép nhân một số thực với một đa thức.

Ví dụ 3.1.9 Tập các đa thức bậc 2 hệ số thực

$$T = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

cùng với phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức không là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Giải. Ta chứng minh một trong các điều kiện của Định nghĩa 3.1.3 không được thỏa mãn. Xét điều kiện (i), lấy $p(x) = 2x^2 + x - 1, q(x) = -2x^2 + x + 3 \in T$, khi đó

$$p(x) + q(x) = 2x + 2 \notin T.$$

Như vậy, T không là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. □

Ví dụ 3.1.10 Cho $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập tất cả các ma trận cấp $m \times n$ hệ số thực. Trên $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta xét phép cộng là phép cộng hai ma trận và phép nhân với vô hướng là phép nhân một số với một ma trận. Khi đó $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ cùng với hai phép toán trên lập thành một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Giải. Với mọi $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và mọi $k, m \in \mathbb{R}$, ta có:
1. Vì $A + B$ cũng là một ma trận cấp $m \times n$ nên $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
2. $A + B = B + A$ (theo Định lí 1.1.25(i));
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (theo Định lí 1.1.25(ii));
4. Vectơ không là ma trận không 0 vì $A + 0 = 0 + A = A$;

5. Nếu $A = (a_{ij})$ thì $-A = (-a_{ij})$ thỏa $A + (-A) = 0$;
6. Ma trận kA là một ma trận cấp $m \times n$, do đó $kA \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
7. $k(A + B) = kA + kB$ (theo Định lí 1.1.25(iv));
8. $(k + m)A = kA + mA$ (theo Định lí 1.1.25(iii));
9. $(km)A = k(mA)$ (theo Định lí 1.1.25(viii));
10. $1A = A$ (theo Định lí 1.1.25(v)).

Vậy $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. □

Ví dụ 3.1.11 Cho $V = C[a,b]$ là tập hợp các hàm số thực liên tục trên $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Phép cộng và phép nhân với vô hướng trên V được định nghĩa như sau: Với mọi $f, g \in V$ và $k \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(kf)(x) = kf(x).$$

Khi đó V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Chứng minh. Vì tổng của hai hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ là một hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$, do đó điều kiện (1) của Định nghĩa 3.1.3 được thỏa mãn.
Để chứng minh phép cộng trên V có tính giao hoán, ta lấy $f, g \in V$ và với mọi $x \in [a,b]$ ta có

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Do đó $f + g = g + f$.
Phép cộng có tính kết hợp vì với bất kì các hàm số $f, g, h \in V$, ta có

$$\begin{aligned}((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x)\\ &= (f(x) + g(x)) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x) + h(x))\\ &= f(x) + (g + h)(x)\\ &= (f + (g + h))(x), \forall x \in [a,b].\end{aligned}$$

Do đó $(f + g) + h = f + (g + h)$.
Vectơ không của V, kí hiệu là θ, là hàm số $\theta : [a,b] \to [a,b]$ xác định bởi $\theta(x) = 0$ với mọi $x \in [a,b]$. Ta có θ là vectơ không vì

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x).$$

Tiếp theo, ta lấy $c, d \in \mathbb{R}$ và $f \in V$. Từ tính chất phân phối của số thực, ta được

$$\begin{aligned}((c + d)f)(x) &= (c + d)f(x)\\ &= cf(x) + df(x)\\ &= (cf)(x) + (df)(x), \forall x \in [a,b].\end{aligned}$$

vì thế $(c + d)f = cf + df$.
Các tính chất còn lại chứng minh tương tự. □

Ví dụ 3.1.12 Trên $\mathbb{R}^2$, ta định nghĩa hai phép cộng $\oplus$ và phép nhân với vô hướng $\otimes$ như sau: với mọi $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$, đặt

$$a \oplus b = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$$

và

$$k \otimes a = (ka_1, ka_2).$$

Khi đó $\mathbb{R}^2$ cùng hai phép toán bên trên không là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.
Giải. Ta cần tìm 1 điều kiện sai trong 10 điều kiện trong Đinh nghĩa không gian vectơ.
Giả sử $\theta = (x_1, x_2)$ là vectơ không

Mệnh đề 3.1.13 Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Khi đó

(i) Vectơ không θ là duy nhất.

(ii) Vectơ đối của $x \in V$ là duy nhất.

Chứng minh. (i) Giả sử $\theta, \theta^{'}$ là hai vectơ không. Ta chứng minh $0 = 0^{'}$. Thật vậy, vì θ là vectơ không nên $\theta + \theta^{'} = \theta^{'}$. Mặt khác, $\theta^{'}$ cũng là vectơ không nên $\theta + \theta^{'} = \theta$. Do đó $\theta = \theta^{'}$.

(ii) Giả sử $x^{'}, x^{''}$ là hai vectơ đối của x. Ta chứng minh $x^{'} = x^{''}$. Thật vậy, $x^{'} = x^{'} + \theta = x^{'} + (x + x'') = (x' + x) + x'' = \theta + x^{''} = x''$. □

Vì vectơ đối của x là duy nhất nên ta kí hiệu $-x$ là vectơ đối của x. Khi đó ta định nghĩa $x - y$ là $x + (-y)$.

Mệnh đề 3.1.14 Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Khi đó

(i) Với mọi $a, b, c \in V$, nếu $a + b = a + c$ thì $b = c$.

(ii) $k\theta = \theta$ và $0a = \theta$ với mọi $k \in \mathbb{K}$ và với mọi $a \in V$.

(iii) Nếu $kx = \theta$ thì $k = 0$ hoặc $x = \theta$.

(iv) $(-1)a = -a$ với mọi $a \in V$.

Chứng minh. (i) Giả sử $-a$ là vectơ đối của a. Khi đó

$$\begin{aligned} b &= b + \theta \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= (b + a) + (-a) \\ &= (a + b) + (-a) \\ &= (a + c) + (-a) \\ &= c + (a + (-a)) \\ &= c + \theta \\ &= c \end{aligned}$$

(ii) Ta có $k\theta + \theta = k\theta = k(\theta + \theta) = k\theta + k\theta$. Theo luật giản ước, suy ra $\theta = k\theta$.
Ta có $0a + \theta = 0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$. Theo luật giản ước, $\theta = 0a$.
(iii) Giả sử $k \neq 0$, ta cần chứng minh $x = \theta$. Ta có

$$\theta = \frac{1}{k}\theta = \frac{1}{k}(kx) = (\frac{1}{k}k)x = 1x = x.$$

(iv) Ta cần chứng minh $(-1)x$ là vectơ đối của x. Tức là ta cần chỉ ra $x + (-1)x = \theta$. Thật vậy,

$$x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = \theta.$$

Điều này chứng tỏ cả hai vectơ $(-1)x$ vectơ đối của x, hay $(-1)x = -x$. □

3.2 Không gian vectơ con

Định nghĩa 3.2.1 (Không gian vectơ con) Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và $X \neq \emptyset$ là một tập con của V. Ta nói X là một không gian vectơ con của V khi X cùng với hai phép toán trên V cũng là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ.

Để kiểm tra X là một không gian vectơ con của V, ta chỉ cần kiểm tra các điều sau đây.

Định lý 3.2.2 Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và $\emptyset \neq X \subseteq V$. Các điều sau đây là tương đương:

(i) Tập X là một không gian vectơ con của V.

(ii) Với mọi $x, y \in X, k \in \mathbb{K}$, ta có $x + y \in X; kx \in X$.

(iii) Với mọi $x, y \in X, k, m \in \mathbb{K}$, ta có $kx + my \in X$.

Ví dụ 3.2.3 Tập $\{\theta\}$ và V là hai không gian vectơ con của V. Không gian vectơ con $\{\theta\}$ được gọi là không gian vectơ không và kí hiệu là 0.

Ví dụ 3.2.4 Tập $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

Giải. Hiển nhiên $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Ta thấy $(0,0,0) \in A$ vì $0 - 0 + 0 = 0$ do đó $A \neq \emptyset$.
Lấy $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in A$, ta cần chứng minh $a + b \in A$. Vì $a, b \in A$ nên $a_1 - a_2 - a_3 = 0$ và $b_1 - b_2 - b_3 = 0$. Khi đó $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ và

$$(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) - (a_3 + b_3) = (a_1 - a_2 - a_3) + (b_1 - b_2 - b_3) = 0.$$

Do đó $a + b \in A$.
Tiếp theo, ta chứng minh $ka \in A$ với mọi $k \in \mathbb{R}$. Thật vậy, $ka = (ka_1, ka_2, ka_3)$ và

$$ka_1 - ka_2 - ka_3 = k(a_1 - a_2 - a_3) = 0.$$

Suy ra $ka \in A$. □

Ví dụ 3.2.5 Tập $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 1\}$ không là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

Giải. Thật vậy, lấy $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in X$, khi đó

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \text{ và } y_1 + 3y_2 - y_3 = 1.$$

Mặt khác, $x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ và

$$(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = (x_1 + 3x_2 - x_3) + (y_1 + 3y_2 - y_3) = 1 + 1 = 2.$$

Như vậy $x + y \notin X$. Do đó X không là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$. □

Ví dụ 3.2.6 Ta có tập $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức có bậc không quá n với hệ số thực là một không gian vectơ trên tập số thực. Do đó $\mathbb{R}_n[x]$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}[x]$.

Ví dụ 3.2.7 Tập $U = \{p(x) \in P_2[x] \mid p(-1) = 0\}$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$.
Giải. Hiển nhiên $U \subseteq P_2[x]$. Ta thấy $p(x) = x + 1 \in P_2[x]$ thỏa mãn $p(-1) = 0$. Do đó $x + 1 \in U$ hay $U \neq \emptyset$.
Lấy $p(x), q(x) \in U$ và $k \in \mathbb{R}$, ta có $p(-1) = 0, q(-1) = 0$. Khi đó

$$p(-1) + q(-1) = 0 \text{ và } kq(-1) = 0.$$

Suy ra $p(x) + q(x), kp(x) \in U$. Như vậy U là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$.

Ví dụ 3.2.8 Chứng minh rằng tập $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$.

Giải. Dễ thấy $V \subseteq M_2(\mathbb{R})$. Ma trận 0 thuộc V do đó $V \neq \emptyset$. Lấy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in V$ và $k, m \in \mathbb{R}$, ta có ma trận

$$kA + mB = \begin{bmatrix} ka + ma' & kb + mb' \\ kc + mc' & kd + md' \end{bmatrix}$$

và $a + d = 0, a' + d' = 0$. Khi đó $(ka + ma') + (kd + md') = k(a + d) + m(a' + d') = k.0 + m.0 = 0$. Suy ra $kA + mB \in V$. Theo Định lý 3.2.2, V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$. □

Ví dụ 3.2.9 Chứng minh rằng tập $V = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ -2a & -b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \right\}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$.

Giải. Dễ thấy $V \subseteq M_2(\mathbb{R})$. Ma trận $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \in V$ do đó $V \neq \emptyset$.
Lấy $A = \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ -2a & -b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2a' & 3b' \\ -2a' & -b' \end{bmatrix} \in V$ và $k, m \in \mathbb{R}$, ta có ma trận

$$kA + mB = \begin{bmatrix} k2a + m2a' & k3b + m3b' \\ k(-2a) + m(-2a') & k(-b) + m(-b') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ka + ma') & 3(kb + mb') \\ -2(ka + ma') & -(kb + mb') \end{bmatrix} \in V.$$

Do đó V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$. □

Định lý 3.2.10 Cho $\{V_i\}_{i \in I} (I \neq \emptyset)$ là một họ các không gian vectơ con của một không gian vectơ V. Khi đó $\bigcap_{i \in I} V_i$ là không gian con của V.

Chứng minh. Đặt $U = \bigcap_{i \in I} V_i$. Ta sẽ chứng minh U là không gian con của V.

Với mọi $i \in I$, ta có V_i là không gian con của V do đó $0 \in V_i$. Suy ra $0 \in U$ hay $U \neq \emptyset$.

Với mọi $x, y \in U$, ta chứng minh $ax + by \in U$ với mọi $a, b \in \mathbb{K}$. Vì $x, y \in V_i$ và V_i là một không gian vectơ con của V với mọi $i \in I$ nên $ax + by \in V_i$ với mọi $i \in I$. Như vậy $ax + by \in U$. □

Ví dụ 3.2.11 Trong $\mathbb{R}^3$, xét hai tập hợp sau

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}; V = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

Khi đó ta có U, V là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.
Ta có $U \cap V = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ nhưng $U \cup V = \{(x, y, z) \mid y = 0 \text{ hoặc } z = 0\}$ không là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

Định lý 3.2.12 Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và A, B là các không gian vectơ con của V. Khi đó tập

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

cũng là một không gian con của V và $A + B$ được gọi là tổng của hai không gian vectơ con A, B.

Chứng minh. Vì A, B khác rỗng nên $A+B$ cũng khác rỗng. Ta chứng minh $ax+by \in A+B$ với mọi $x, y \in A+B$ và với mọi $a, b \in \mathbb{K}$. Đặt $x = x_1+y_1, y = x_2+y_2$ với $x_1, x_2 \in A, y_1, y_2 \in B$, khi đó:

$$\begin{aligned} ax + by = & \ a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) \\ = & \ (ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2) \in A + B \end{aligned}$$

vì $ax_1 + bx_2 \in A$ và $ay_1 + by_2 \in B$. □

Cho V_1, V_2 là các không gian vectơ con của V. Nếu $V = V_1 + V_2$ thì với mọi $v \in V$ đều tồn tại $v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2$ sao cho $v = v_1 + v_2$. Nếu việc biểu diễn v thành tổng $v_1 + v_2$ là duy nhất thì ta gọi V là tổng trực tiếp của V_1 và V_2.

Định nghĩa 3.2.13 (Tổng trực tiếp) Cho V_1, V_2 là các không gian vectơ con của V. Giả sử mọi vectơ $v \in V$ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $v = v_1 + v_2$ với $v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2$. Khi đó, ta kí hiệu

$$V = V_1 \oplus V_2$$

và nói V là tổng trực tiếp của V_1 và V_2.

Ví dụ 3.2.14 Cho các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ V_2 &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\ V_3 &= \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Khi đó $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. Tuy nhiên, $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_3$ nhưng nó không là tổng trực tiếp của V_1 và V_3.

Mệnh đề 3.2.15 Cho V_1, V_2 là các không gian vectơ con của V. Nếu $V_1 + V_2 = V$ và $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ thì $V = V_1 \oplus V_2$.

Chứng minh. Xem như bài tập. □

3.3 Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 3.3.1 (Tổ hợp tuyến tính) Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$. Vectơ $y \in V$ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nếu tồn tại $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ sao cho

$$y = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n.$$

Khi đó, ta cũng nói y biểu thị tuyến tính được qua các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ví dụ 3.3.2 Cho các vectơ $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó vectơ $y = (3,2,4)$ là một tổ hợp tuyến tính của e_1, e_2, e_3 vì $y = 3e_1 + 2e_2 + 4e_3$.

Ví dụ 3.3.3 Vectơ $a = (1,2,5)$ có là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $x = (1,1,1), y = (1,2,3), z = (2,1,1)$ trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Giả sử tồn tại $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$a = k_1x + k_2y + k_3z$$

hay

$$\begin{aligned}(1,2,5) &= k_1(1,1,1) + k_2(1,2,3) + k_3(2,1,1)\\ &= (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + 2k_2 + k_3, k_1 + 3k_2 + k_3)\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 1 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 = 2 \\ k_1 + 3k_2 + k_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -6 \\ k_2 = 3 \\ k_3 = 2 \end{cases}$$

Vậy $a = -6x + 3y + 2z$ hay a biểu thị tuyến tính được qua x, y, z. □

Ví dụ 3.3.4 Cho $\mathcal{F}$ là tập các hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Hỏi $\sin 2x$ có biểu thị tuyến tính qua $\sin x$ và $\cos x$ được không?

Giải. Giả sử ta có $\sin 2x = a\sin x + b\cos x$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta sẽ tìm a, b sao cho đẳng thức này xảy ra. Vì đây là các hàm số nên đẳng thức đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đầu tiên, cho $x = 0$, ta được

$$\sin 2.0 = a \sin 0 + b \cos 0 \text{ hay } 0 = a.0 = b.1$$

do đó $b = 0$. Tiếp theo, cho $x = \frac{\pi}{2}$, ta có

$$\sin 2.\frac{\pi}{2} = a \sin \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} \text{ hay } 0 = a.1 + b.0$$

do đó $a = 0$. Từ đây suy ra $\sin 2x = 0 \sin x + 0 \cos x = 0$ với mọi x. Điều này mâu thuẫn vì $\sin 2x$ không phải là hàm không. Như vậy, $\sin 2x$ không biểu thị tuyến tính được qua $\sin x$ và $\cos x$. □

Định nghĩa 3.3.5 (Bao tuyến tính) Cho $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là một tập con của một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vectơ của S được gọi là bao tuyến tính của S và được kí hiệu là $\mathrm{Span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ hoặc $\mathrm{Span}(S)$. Ta viết

$$\mathrm{Span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n \mid k_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ví dụ 3.3.6 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_3[x]$ các đa thức có bậc không quá 3, cho tập $S = \{x+1, x^2+1, -x^3-x\}$. Đa thức $x^3 + 2x^2 + x + 2$ có thuộc $\mathrm{Span}(S)$ không?

Giải. Theo định nghĩa bao tuyến tính, ta có

$$\mathrm{Span}(S) = \{a(x+1) + b(x^2+1) + c(-x^3-x) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Giả sử $x^3 + 2x^2 + x + 2 = a(x+1) + b(x^2+1) + c(-x^3-x)$. Đồng nhất hệ số hai vế, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -c = 1 \\ b = 2 \\ a - c = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ này là $a = 0, b = 2, c = -1$. Do đó $x^3 + 2x^2 + x + 2 \in \mathrm{Span}(S)$. □

Ví dụ 3.3.7 Cho $M_2(\mathbb{R})$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ gồm các ma trận vuông cấp 2. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ma trận $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ có thuộc $\mathrm{Span}\{A, B, C\}$ không?

Giải. Giả sử ta có các số thực k_1, k_2, k_3 thỏa mãn

$$D = k_1 A + k_2 B + k_3 C$$

tức là

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} &= k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ k_1 & 2k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2k_2 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_3 \\ 5k_3 & 2k_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 + 2k_2 + k_3 \\ k_1 + 5k_3 & 2k_1 - k_2 + 2k_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 & = 1 \\ -k_1 + 2k_2 + k_3 & = 2 \\ k_1 + 5k_3 & = -4 \\ 2k_1 - k_2 + 2k_3 & = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 & = 1 \\ k_2 & = 2 \\ k_3 & = -1 \end{cases}$$

Điều này cho thấy $D = 1A + 2B - C$ hay $D \in \mathsf{Span}\{A, B, C\}$. □

Mệnh đề 3.3.8 Bao tuyến tính của một tập các vectơ S là một không gian vectơ con của V. Hơn nữa, đây là không gian vectơ con nhỏ nhất của V chứa S.

Chứng minh. Hiển nhiên $\mathsf{Span}(S) \subseteq V$ và $\mathsf{Span}(S) \neq \emptyset$. Lấy $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i \in \mathsf{Span}(S)$ và $k \in \mathbb{K}$, ta có

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + \sum_{i=1}^{n} y_i a_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) a_i \in \mathsf{Span}(S)$$

và

$$rx = r \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \sum_{i=1}^{n} (r x_i) a_i \in \mathsf{Span}(S).$$

Như vậy, $\mathsf{Span}(S)$ là một không gian vectơ con của V.

Giả sử U là một không gian vectơ con của V chứa S. Nếu $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in \mathsf{Span}(S)$ thì $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in U$ vì $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U$. Do đó $\mathsf{Span}(S) \subseteq U$. Suy ra, $\mathsf{Span}(S)$ là không gian vectơ con nhỏ nhất của V chứa S. □

Chú ý. Nếu $S = \emptyset$ thì $\mathrm{Span}(S) = \{\theta\}$ vì đây là không gian vectơ con nhỏ nhất chứa $\emptyset$.

Định nghĩa 3.3.9 Bao tuyến tính của một tập các vectơ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ còn được gọi là không gian con sinh bởi các vectơ $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Định nghĩa 3.3.10 (Sự phụ thuộc tuyến tính) Tập các vectơ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ trong không gian vectơ V được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu có $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = 0.$$

Ví dụ 3.3.11 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, tập các vectơ $\{x_1 = (2, -1, 0), x_2 = (1, 3, 2), x_3 = (0, -7, -4)\}$ là phụ thuộc tuyến tính vì

$$-1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = (-2, 1, 0) + (2, 6, 4) + (0, -7, -4) = (0, 0, 0).$$

Định nghĩa 3.3.12 (Sự độc lập tuyến tính) Tập các vectơ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ trong không gian vectơ V được gọi là độc lập tuyến tính nếu

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = \theta$$

thì $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Ví dụ 3.3.13 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, tập các vectơ $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là độc lập tuyến tính.

Giải. Thật vậy, xét $k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = \theta$ hay $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$. Do đó, ta có $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ hay $\{e_1, e_2, e_3\}$ độc lập tuyến tính. □

Ví dụ 3.3.14 Cho $\mathbb{R}_n[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n. Chứng minh rằng tập các vectơ $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}_n[x]$.

Giải. Thật vậy, giả sử

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \theta$$

nghĩa là đa thức bên trái luôn bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Như vậy, tập các vectơ $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}_n[x]$. □

Ví dụ 3.3.15 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^4$, cho tập hợp

$$S = \{a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, m, 2, 3), a_3 = (2, 1, 0, m), a_4 = (0, 2, -1, -1)\}.$$

Tìm m để A độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Xét

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + k_4a_4 = 0$$

khi đó

$$(k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + mk_2 + k_3 + 2k_4, k_1 + 2k_2 - k_4, k_1 + 3k_2 + mk_3 - k_4) = (0,0,0,0)$$

Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + mk_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_4 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + mk_3 - k_4 = 0 \end{cases}$$

và ma trận hệ số bổ sung

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & m & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Tập S độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có duy nhất một nghiệm. Điều này tương đương hạng của ma trận hệ số $r(A) = 4$, tức là $\det(A) \neq 0$. Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & m-1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m-2 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m - 1 \neq 0$$

với mọi m. Do đó tập S luôn độc lập tuyến tính với mọi m. □

Mệnh đề 3.3.16 (i) Tập chứa vectơ không luôn phụ thuộc tuyến tính.
(ii) Tập gồm một vectơ $x \neq \theta$ luôn độc lập tuyến tính.
(iii) Một tập gồm hai vectơ $\{u, v\}$ trong $\mathbb{K}$-không gian vectơ V là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi hai vectơ đó tỉ lệ, tức là $u = kv$ với $k \in \mathbb{K}$.

Chứng minh. (i) Giả sử trong các vectơ $x_1, x_2, \dots, x_n$ có $x_i = \theta$. Khi đó

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_i + \cdots + 0x_n = \theta.$$

Do đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ phụ thuộc tuyến tính.

(ii) Giả sử $kx = \theta$. Khi đó $x = \theta$ hoặc $k = 0$. Từ giả thiết, ta có $k = 0$. Vậy tập $\{x\}$ độc lập tuyến tính.

(iii) Giả sử u, v phụ thuộc tuyến tính, khi đó có k_1, k_2 không đồng thời bằng 0 sao cho $k_1 u + k_2 v = \theta$. Giả sử $k_1 \neq 0$ suy ra $u = \dfrac{-k_2}{k_1} v$.

Ngược lại, nếu $u = kv$ thì $1u - kv = \theta$. Vì $1 \neq 0$ do đó tập $\{u, v\}$ là phụ thuộc tuyến tính. □

Mệnh đề 3.3.17 Tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử tập $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = \theta.$$

Giả sử $k_i \neq 0$ suy ra

$$x_i = -\frac{k_1}{k_i} x_1 - \frac{k_2}{k_i} x_2 + \cdots - \frac{k_n}{k_i} x_n$$

hay x_i biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại.

($\Leftarrow$) Giả sử

$$x_i = \sum_{j \neq i} k_j x_j$$

suy ra

$$\sum_{j \neq i} k_j x_j + (-1) x_i = \theta$$

Như vậy, tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ phụ thuộc tuyến tính. □

Mệnh đề 3.3.18 Cho tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ độc lập tuyến tính. Nếu ta thêm vào tập này một vectơ y không biểu thị tuyến tính được qua tập đó thì tập $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử tập $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y\}$ phụ thuộc tuyến tính, ta sẽ dẫn đến một mâu thuẫn.

Vì tập các vectơ trên phụ thuộc tuyến tính nên có một vectơ nào đó biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại. Theo giả thiết, vectơ y không biểu thị tuyến tính được qua tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ nên phải có một trong các vectơ x_i biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại. Không mất tính tổng quát, ta giả sử đó là vectơ x_1. Khi đó

$$x_1 = a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_m x_m + by$$

với $a_i, b \in \mathbb{K}$.

Nếu $b = 0$ thì x_1 biểu thị tuyến tính được qua các vectơ $x_2, x_3, \ldots, x_m$ do đó tập $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ phụ thuộc tuyến tính, trái giả thiết. Do đó $b \neq 0$ và suy ra

$$y = \frac{1}{b}x_1 - \frac{a_2}{b}x_2 - \frac{a_3}{b}x_3 - \cdots - \frac{a_m}{b}x_m.$$

Tức là, y biểu thị tuyến tính được qua tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy tập $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y\}$ độc lập tuyến tính. □

3.4 Tập sinh, cơ sở và chiều

Định nghĩa 3.4.1 (Tập sinh) Tập các vectơ $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ được gọi là một tập sinh của không gian vectơ V nếu mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính được qua tập B, tức là $V = \mathrm{Span}(B)$.

Ví dụ 3.4.2 Cho các vectơ $a = (1,1,1), b = (0,1,1), c = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó $\{a, b, c\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.
Giải. Với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ta sẽ chứng minh rằng x luôn biểu thị tuyến tính được qua a, b, c. Thật vậy, giả sử

$$x = k_1 a + k_2 b + k_3 c$$

hay

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= k_1(1,1,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,0,1)\\ &= (k_1, k_1 + k_2, k_1 + k_2 + k_3)\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 = x_1 \\ k_1 + k_2 = x_2 \\ k_1 + k_2 + k_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = x_1 \\ k_2 = x_2 - x_1 \\ k_3 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

Như vậy, luôn tồn tại k_1, k_2, k_3 sao cho $x = k_1 a + k_2 b + k_3 c$ hay $\{a, b, c\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.4.3 (i) Chứng minh rằng tập $S = \{x^2 + 2x + 1, x^2, x\}$ sinh ra $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$.
(ii) Chứng minh tập $T = \{x, x^2\}$ không là tập sinh của $P_2[x]$.

Giải. (i) Lấy $ax^2 + bx + c \in P_2[x]$, ta chứng minh $ax^2 + bx + c \in \mathrm{Span}(S)$. Giả sử

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= k_1(x^2 + 2x + 1 + k_2 x^2 + k_3 x\\ &= (k_1 + k_2)x^2 + (2k_1 + k_3)x + k_1\end{aligned}$$

với $k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}$. Đồng nhất hệ số hai vế, ta có hệ phương trình (biến số là k_1,k_2,k_3)

$$\begin{cases} k_1+k_2=a \\ 2k_1+k_3=b \\ k_1=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=c \\ k_2=a-c \\ k_3=b-2c \end{cases}$$

Như vậy luôn tồn tại k_1,k_2,k_3 tức là $ax^2+bx+c \in \mathrm{Span}(S)$. Do đó $\mathrm{Span}(S)=P_2[x]$.
(ii) Tập T không là tập sinh của $P_2[x]$ vì đa thức $1 \in P_2[x]$ nhưng $1 \notin Span\{x^2,x\}$.
□

Ví dụ 3.4.4 Xét $\mathbb{R}$-không gian vectơ $M_2(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp 2, tập các ma trận

$$B=\left\{M_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}; M_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}; M_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}; M_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

là một tập sinh.

Giải. Với mọi $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, ta có

$$A=aM_1+bM_2+cM_3+dM_4.$$

Do đó B là một tập sinh của $M_2(\mathbb{R})$. □

Ví dụ 3.4.5 Tìm m để $S=\{(0,1,1),(1,2,1),(1,3,m)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.
Giải. Tập S là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$ khi với mọi $x=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ đều biểu thị tuyến tính được qua S. Tức là tồn tại các số k_1,k_2,k_3 sao cho

$$x=k_1(0,1,1)+k_2(1,2,1)+k_3(1,3,m)$$

hay

$$(a,b,c)=(k_2+k_3,k_1+2k_2+3k_3,k_1+k_2+mk_3).$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} k_2+k_3=a \\ k_1+2k_2+3k_3=b \\ k_1+k_2+mk_3=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2+k_3=a \\ k_1+2k_2+3k_3=b \\ (2-m)k_3=b-a-c \end{cases}$$

Hệ phương trình trên luôn có nghiệm khi $m\neq 2$. Như vậy với $m\neq 2$ thì S là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa 3.4.6 (Cơ sở) Một cơ sở của một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V là một dãy các vectơ thỏa mãn:

(i) Các vectơ đó độc lập tuyến tính,

(ii) Các vectơ đó là một tập sinh của V.

Chú ý. Một dãy các vectơ tức là các vectơ này được sắp thứ tự. Nếu thay đổi thứ tự các vectơ trong một cơ sở thì ta được một cơ sở khác.

Ví dụ 3.4.7 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, tập

$$B = \{e_1 = (1,0,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,0,\dots,1)\}$$

là một cơ sở $\mathbb{R}^n$. Ta gọi đây là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

Giải. Chứng minh B là một tập sinh của $\mathbb{R}^n$. Với mọi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ta luôn có

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n.$$

Do đó B là một tập sinh của $\mathbb{R}^n$. Tiếp theo, ta chứng minh B độc lập tuyến tính. Giả sử

$$k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n = 0$$

tức là

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Suy ra $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Vậy B là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. □

Nhận xét 3.4.8

1. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\{(1,0),(0,1)\}$.
2. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
3. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Ví dụ 3.4.9 Chứng minh tập $B = \{x^2+2x+1, x, x^2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$.

Giải. Theo Ví dụ 3.4.3, B là một tập sinh của $P_2[x]$. Tiếp theo, ta chứng minh B độc lập tuyến tính. Giả sử

$$k_1(x^2 + 2x + 1) + k_2x^2 + k_3x = 0$$

hay

$$(k_1 + k_2)x^2 + (2k_1 + k_3)x + k_1 = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đa thức ở vế trái là đa thức không khi và chỉ khi các hệ số đều bằng 0. Điều này dẫn đến hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Do đó B độc lập tuyến tính. Vậy B là một cơ sở của $P_2[x]$. □

Ví dụ 3.4.10 Tập

$$B = \left\{ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $M_2(\mathbb{R})$. Tập B được gọi là cơ sở chính tắc của $M_2(\mathbb{R})$.

Giải. Theo Ví dụ 3.4.4, tập B là một tập sinh của $M_2(\mathbb{R})$. Tiếp theo, ta chứng minh B độc lập tuyến tính. Giả sử

$$k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 + k_4 M_4 = 0$$

tức là

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Do đó B độc lập tuyến tính. Vậy B là một cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$. □

Ví dụ 3.4.11 Trong $M_2(\mathbb{R})$, tìm cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ con

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a - 2b + c = 0 \right\}.$$

Giải. Vì $a = 2b - c$ nên

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \begin{bmatrix} 2b - c & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Suy ra tập sinh của X là $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Vì hai ma trận này không tỉ lệ nên tập sinh này độc lập tuyến tính. Vậy $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ là một cơ sở của X. □

Ví dụ 3.4.12 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^4$, cho không gian vectơ con

$$V = \{(a, b, c, d) \mid a + c = b + d = 0, a + b = 3(c + d)\}.$$

Tìm một cơ sở của V.

Giải. Ta thấy rằng tập V là tập nghiệm của hệ phương trình hệ phương trình

$$\begin{cases} a-b+c-d=0 \\ a+b-3c-3d=0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số. Đặt $c=t_1, d=t_2$, nghiệm của hệ này là

$$\begin{cases} a=-2t_1-t_2 \\ b=-t_1-2t_2 \\ c=t_1 \\ d=t_2 \end{cases} , t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Cơ sở của V là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình trên. Cho $t_1=0, t_2=0$, ta được $v_1=(-2,-1,1,0)$; cho $t_1=0, t_2=1$, ta được $v_2=(-1,-2,0,1)$. Như vậy $\{(-2,-1,1,0),(-1,-2,0,1)\}$ là một cơ sở của V. □

Ví dụ 3.4.13 Trong $\mathbb{R}^3$, tìm một cơ sở và chiều của không gian vectơ

$$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\}.$$

Giải. Ta thấy V là tập nghiệm của phương trình tuyến tính $x_1+x_2+x_3=0$. Nghiệm của phương trình này là

$$\begin{cases} x_1=-a-b \\ x_2=a \\ x_3=b \end{cases} , a, b \in \mathbb{R}.$$

Hệ nghiệm cơ bản là $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Do đó, cơ sở của V là $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ và $\dim V=2$. □

Chú ý. Một không gian vectơ có thể có nhiều cơ sở.

Định lý 3.4.14 Cho B là một cơ sở của một không gian vectơ V. Khi đó mọi vectơ $x\in V$ đều được biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua các vectơ của B.

Chứng minh. Vì $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ là một cơ sở của V nên B là tập sinh của V. Do đó mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính được qua B. Lấy $x\in V$ bất kì, giả sử x có hai sự biểu thị tuyến tính qua cơ sở B như sau

$$x=\sum_{i=1}^n a_ie_i \text{ và } x=\sum_{i=1}^n b_ie_i.$$

Trừ hai vế cho nhau

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n} b_i e_i = \theta$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) e_i = \theta.$$

Vì B độc lập tuyến tính nên $a_i - b_i = \theta$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Suy ra $a_i = b_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Vậy vectơ x có duy nhất sự biểu thị tuyến tính qua cơ sở B của V. □

Định nghĩa 3.4.15 (Tọa độ) Trong một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V, cho $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở và $x \in V$ là một vectơ tùy ý. Khi đó x được biểu thị tuyến tính duy nhất qua các vectơ của B, tức là

$$x = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \cdots + t_n e_n$$

với $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$. Khi đó $t_1, t_2, \ldots, t_n$ được gọi là tọa độ của vectơ x đối với cơ sở B.

Ta kí hiệu $[x]_B = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$ hay $(x)_B = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ để chỉ tọa độ của x đối với cơ sở B.

Ví dụ 3.4.16 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ là một cơ sở.
a. Tìm tọa độ của vectơ $x = (0,2,0)$ đối với cơ sở B.
b. Tìm $y \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ đối với cơ sở B là $(y)_B = (2,1,-2)$.

Giải. a. Giả sử $(0,2,0) = k_1(1,1,0) + k_2(0,1,1) + k_3(1,0,1)$, khi đó

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 2 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình này là $(1,1,-1)$. Vậy tọa độ của vectơ x đối với cơ sở B là $[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b. Ta có

$$y = 2(1,1,0) + 1(0,1,1) + (-2)(1,0,1) = (0,3,-1).$$

□

Ví dụ 3.4.17 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_3[x]$, tìm tọa độ của $v = 1+x+2x^2-3x^3$ đối với cơ sở B.
a. $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
b. $B = \{1-x, x-x^2, x^2-x^3, -1+x+x^3\}$.

Giải. a. Biểu thị tuyến tính vectơ v qua cơ sở B

$$v = 1.1 + 1.x + 2.x^2 + (-3)x^3.$$

Do đó $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.
b. Biểu thị tuyến tính vectơ v qua cơ sở B. Giả sử ta có

$$v = k_1(1-x) + k_2(x-x^2) + k_3(x^2-x^3) + k_4(-1+x+x^3)$$

hay

$$1 + x + 2x^2 - 3x^3 = k_1 - k_4 + (k_2 - k_1 + k_4)x + (k_3 - k_2)x^2 + (k_4 - k_3)x^3.$$

Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 - k_4 = 1 \\ k_2 - k_1 + k_4 = 1 \\ k_3 - k_2 = 2 \\ k_4 - k_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 4 \\ k_4 = 1 \end{cases}$$

Như vậy $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. □

Định lý 3.4.18 Số vectơ trong hai cơ sở bất kì của một không gian vectơ V đều bằng nhau.

Định nghĩa 3.4.19 (Chiều) Số vectơ trong một cơ sở bất kì của $\mathbb{K}$-không gian vectơ V được gọi là chiều của V và kí hiệu là $\dim_{\mathbb{K}} V$ hay $\dim V$. Nếu V là một không gian vectơ chỉ chứa một vectơ không thì ta định nghĩa $\dim V = 0$.

Không gian vectơ có cơ sở gồm hữu hạn các vectơ được gọi là không gian vectơ hữu hạn chiều; không gian vectơ có cơ sở gồm vô hạn các vectơ được gọi là không gian vectơ vô hạn chiều.

Ví dụ 3.4.20 Vì tập $\{(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ nên $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Nhận xét 3.4.21

1. $\dim \mathbb{R}^2 = 2; \dim \mathbb{R}^3 = 3; \dim \mathbb{R}^4 = 4$
2. $\dim P_2[x] = 3$ (xem Ví dụ 3.4.9)
3. $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ (xem Ví dụ 3.4.10). Một cách tổng quát $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \times n$.

Ví dụ 3.4.22 Xét $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}[x]$ tập các đa thức có hệ số $\mathbb{R}$. Khi đó $\mathbb{R}[x]$ là không gian vectơ vô hạn chiều trên $\mathbb{R}$.

Giải. Giả sử $\mathbb{R}[x]$ là không gian hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$. Đặt $B = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}[x]$ và $k = \max\{\deg f_1(x), \deg f_2(x), \dots, \deg f_n(x)\}$. Xét đa thức $x^{k+1} \in \mathbb{R}[x]$. Vì B là một cơ sở nên

$$x^{k+1} = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

với $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Ta thấy vế trái là đa thức có bậc $k+1$, vế phải là đa thức có bậc tối đa là k (mâu thuẫn). Vậy $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. □

Mệnh đề 3.4.23 Cho V là một không gian vectơ n chiều.

1. Mọi tập gồm n vectơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở.
2. Mọi tập sinh của V gồm n vectơ đều là cơ sở.
3. Mọi tập có nhiều hơn n vectơ đều phụ thuộc tuyến tính.

3.5 Hạng của một hệ vectơ

Định nghĩa 3.5.1 (Tập con độc lập tuyến tính tối đại) Cho S là một tập con của một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V. Một tập $B \subseteq S$ được gọi là một tập con độc lập tuyến tính tối đại của S nếu B là cơ sở của $\mathrm{Span}(S)$.

Ví dụ 3.5.2 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^2$, cho tập $S = \{(1,2),(2,3),(0,3)\}$. Tìm một tập con độc lập tuyến tính tối đại của S.

Giải. Ta thấy $\mathrm{Span}\{(1,2)\} \neq \mathrm{Span}(S)$ vì $(2,3) \in \mathrm{Span}(S)$ nhưng $(2,3) \notin \mathrm{Span}\{(1,2)\}$. Xét tập $\{(1,2),(2,3)\}$ là một tập độc lập tuyến tính trong S. Hiển nhiên, $\mathrm{Span}\{(1,2),(2,3)\} \subseteq \mathrm{Span}(S)$. Nếu ta chứng minh được rằng $(0,3) \in$

$\mathsf{Span}\{(1,2),(2,3)\}$ thì $\mathsf{Span}\{(1,2),(2,3)\} = \mathsf{Span}(S)$ và do đó $\{(1,2),(2,3)\}$ là một tập con độc lập tuyến tính tối đại của S. Giả sử

$$(0,3) \in \mathsf{Span}\{(1,2),(2,3)\}$$

tức là tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho

$$(0,3) = a(1,2) + b(2,3).$$

Từ đây, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là $a = 6, b = -3$. Như vậy, $(0,3) \in \mathsf{Span}\{(1,2),(2,3)\}$ và do đó $\{(1,2),(2,3)\}$ là một tập con độc lập tuyến tính tối đại của S. □

Chú ý. Một tập S có thể có nhiều tập con độc lập tuyến tính tối đại.

Định lý 3.5.3 Số vectơ trong các tập con độc lập tuyến tính tối đại của một tập vectơ luôn bằng nhau.

Định nghĩa 3.5.4 Số vectơ trong một tập con độc lập tuyến tính tối đại của một tập vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ được gọi là hạng của tập vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ và kí hiệu là $r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ hoặc $\mathsf{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$

Định nghĩa 3.5.5 Cho A là một ma trận cấp $m \times n$ hệ số thực.
(i) Không gian hàng của ma trận A là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi các hàng của A.
(ii) Không gian cột của ma trận A là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^m$ sinh bởi các cột của A.

Ví dụ 3.5.6 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, khi đó không gian hàng của ma trận A là $\mathsf{Span}\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ và không gian cột của A là $\mathsf{Span}\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$.

Định lý 3.5.7 Nếu B là một ma trận nhận được từ A qua một số phép biến đổi sơ cấp trên hàng thì không gian hàng của B bằng không gian hàng của A.

Để tìm cơ sở của một không gian hàng của một ma trận A, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng ma trận bậc thang B. Khi đó cơ sở của không gian hàng của A là các vectơ được tạo bởi các hàng khác không của B.

Ví dụ 3.5.8 Tìm cơ sở của không gian hàng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Giải. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó, cơ sở của không gian hàng của A là $\{(1,1,3,1,6),(0,-3,-6,-1,-13),(0,0,0,-2,-8)\}$.

Nhận xét 3.5.9 Quy trình tìm cơ sở của một không gian vectơ sinh bởi một tập vectơ (hay tìm hạng của một tập vectơ). Tìm cơ sở và chiều của $X = Span\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ trong một không gian vectơ V. (hay tìm $r(a_1, a_2, \dots, a_m)$)

1. Lấy một cơ sở B của V (chọn cơ sở chính tắc).
2. Tìm tọa độ các vectơ a_i đối với cơ sở B.
3. Lấy các tọa độ vừa tìm được, xếp thành các hàng của một ma trận (đặt là A).
4. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng bậc thang.
5. Suy ra $\dim X = r(A)$ (hay $r(a_1, a_2, \dots, a_m) = r(A)$).
6. Các hàng khác không của ma trận A là các tọa độ của các vectơ trong cơ sở của X (hay tọa độ của các vectơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $a_1, a_2, \dots, a_m$).

Ví dụ 3.5.10 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ

$$u_1 = (1,1,4,0); u_2 = (1,1,2,4); u_3 = (2,1,1,6); u_4 = (2,3,11,2).$$

a. Tìm $r(u_1,u_2,u_3,u_4)$.
b. Tìm một tập con độc lập tuyến tính tối đại của $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$
c. Tìm một cơ sở của $X = Span\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ và $\dim X$.
Giải. a. Đặt B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$. Tọa độ của các vectơ đối với cơ sở chính tắc B

$$(u_1)_B = (1,1,4,0); (u_2)_B = (1,1,2,4); (u_3)_B = (2,1,1,6); (u_4)_B = (2,3,11,2).$$

Xét ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Như vậy $r(u_1,u_2,u_3,u_4) = 3$.
b. Từ ma trận bậc thang trong câu a, ta tìm được một tập con độc lập tuyến tính tối đại của $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ gồm 3 vectơ tương ứng với các hàng khác không là $\{u_1,u_3,u_4\}$ (ta không chọn u_2 vì hàng không của ma trận bậc thang được biến đổi từ tọa độ của u_2).
c. Thực hiện các bước như trong câu a đến khi xuất hiện ma trận bậc thang. Từ ma trận bậc thang, ta có cơ sở của $Span\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ là $\{(1,1,4,0),(0,-1,-3,2),(0,0,-4,8)\}$ và $\dim X = 3$.

Chú ý: Trong Ví dụ trên, ta có thể chọn một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ làm cơ sở của $Span\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$.

Ví dụ 3.5.11 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, tìm một cơ sở và chiều của không gian vectơ con

$$W = \mathrm{Span}\{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)\}$$

(không gian vectơ sinh bởi $(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)$).

Giải. Lấy ba vectơ trong tập sinh của W lập thành các hàng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng bậc thang

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra cơ sở của W là $\{(1,2,3),(0,-1,-2)\}$ và $\dim W = 2$. □

Một trong những ứng dụng của không gian hàng là tìm tập con độc lập tuyến tính tối đại. Tập con độc lập tuyến tính tối đại của một tập vectơ là một cơ sở của không gian vectơ sinh bởi tập vectơ đã cho. Do đó, ta sẽ vận dụng phương pháp trong Ví dụ 3.5.11 để tìm một tập con độc lập tuyến tính tối đại.

Ví dụ 3.5.12 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$, tìm một tập con độc lập tuyến tính tối đại của

$$C = \{1 + 2x + 3x^2, 2x + 4x^2, 1 + x + x^2\}.$$

Giải. Lấy các tọa độ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ của ba vectơ trên lập thành các hàng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng bậc thang

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Các hàng khác không của ma trận bậc thang sẽ tương ứng với các vectơ trong tập con độc lập tuyến tính tối đại của C. Như vậy, $\{1 + 2x + 3x^2, 2x + 4x^2\}$ là một tập con độc lập tuyến tính tối đại của C. □

3.6 Ma trận chuyển cơ sở

Cho $\mathbb{K}$-không gian vectơ V và hai cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Biểu thị tuyến tính các vectơ của tập C qua các vectơ của tập B, ta được

$$\begin{aligned} v_1 &= t_{11}u_1 + t_{12}u_2 + \cdots + t_{1n}u_n \\ v_2 &= t_{21}u_1 + t_{22}u_2 + \cdots + t_{2n}u_n \\ &\cdots \\ v_n &= t_{n1}u_1 + t_{n2}u_2 + \cdots + t_{nn}u_n \end{aligned}$$

Khi đó ma trận

$$T_{BC} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & \ldots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \ldots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở C.

Chú ý. Ma trận T_{BC} có thể biểu diễn lại thông qua tọa độ vectơ như sau

$$T_{BC} = [[v_1]_B\ [v_2]_B \dots [v_n]_B].$$

Tức là cột thứ i của ma trận T_{BC} chính là ma trận tọa độ của vectơ v_i đối với cơ sở B.

Cho vectơ x có tọa độ đối với cơ sở B là $(x)_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, tọa độ của x đối với cơ sở C là $(x)_C = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Khi đó $x = y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n$ và biểu diễn dưới dạng tọa độ đối với cơ sở B như sau

$$\begin{aligned}[x]_B &= y_1[v_1]_B + y_2[v_2] + \dots + y_n[v_n]_B \\ &= [[v_1]_B\ [v_2]_B \dots [v_n]_B] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= T_{BC}[x]_C\end{aligned}$$

với T_{BC} là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở C.

Ví dụ 3.6.1 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ cho hai cơ sở

$$B = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\} \text{ và } C = \{v_1 = (2,1), v_2 = (3,4)\}.$$

Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở C.

Giải. Biểu thị tuyến tính các vectơ trong C qua các vectơ trong B. Giả sử $v_1 = a_1u_1 + a_2u_2$, khi đó

$$(2,1) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = (a_1, a_2).$$

Suy ra $a_1 = 2, a_2 = 1$ và $v_1 = 2u_1 + u_2$.
Giả sử $v_2 = b_1u_1 + b_2u_2$, khi đó

$$(3,4) = b_1(1,0) + b_2(0,1) = (b_1, b_2).$$

Suy ra $b_1 = 3, b_2 = 4$ và $v_2 = 3u_1 + 4u_2$.
Như vậy $T_{BC} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. □

Định lý 3.6.2 Nếu T_{BC} là ma trận chuyển cơ sở từ B sang C thì ma trận chuyển cơ sở từ C sang B là T_{BC}^{-1}.

Chứng minh. Giả sử B, C là các cơ sở của không gian vectơ V. Khi đó

$$[x]_B = T_{BC}[x]_C \text{ và } [x]_C = T_{CB}[x]_B$$

suy ra $[x]_B = T_{BC}T_{CB}[x]_B$ với mọi $x \in V$. Do đó $T_{BC}T_{CB} = I$ hay $T_{CB} = T_{BC}^{-1}$. □

Ví dụ 3.6.3 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[t]$, cho các đa thức

$$p_1 = t - 3t^2, p_2 = 1 + t - 3t^2, p_3 = 1 + t^2.$$

(i) Chứng minh $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ là một cơ sở của $P_2[t]$.

(ii) Tìm $q \in P_2[t]$ biết $[q]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(iii) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở $C = \{1, t, t^2\}$.

Giải. (i) Giả sử

$$k_1p_1 + k_2p_2 = k_3p_3 = 0$$

khi đó ta có hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ -3k_1 - 3k_2 + k_3 = 0 \end{cases}.$$

Hệ này có duy nhất một nghiệm $(0, 0, 0)$, do đó $\{p_1, p_2, p_3\}$ độc lập tuyến tính. Mặt khác, $\dim P_2[t] = 3$. Do đó $\{p_1, p_2, p_3\}$ là một cơ sở của $P_2[t]$.
(ii) Từ tọa độ của q đối với cơ sở B, ta có

$$\begin{aligned} q &= 1p_1 + 2p_2 - 1p_3 \\ &= (t - 3t^2) + 2(1 + t - 3t^2) - (1 + t^2) = 1 + 3t - 10t^2. \end{aligned}$$

(iii) Tìm tọa độ p_1, p_2, p_3 đối với cơ sở $C = \{1, t, t^2\}$. Ta có

$$(p_1)_C = (0, 1, -3), (p_2)_C = (1, 1, -3), (p_2)_C = (1, 0, 1).$$

Ma trận chuyển cơ sở từ C sang B là $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Suy ra ma trận chuyển cơ sở từ B sang C là $T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. □

3.7 Bài tập

Bài tập 3.1 Trong các tập hợp dưới đây, tập nào là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ ? Hãy giải thích.

a. Tập $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ cùng với phép cộng và phép nhân thông thường trong

$\mathbb{R}^2$.

b. Tập $\{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ cùng với phép cộng và phép nhân thông thường trong $\mathbb{R}^2$.

c. Tập $\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$ cùng với phép cộng và phép nhân trong $M_2(\mathbb{R})$.

d. Tập $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$ cùng với phép cộng và phép nhân trong $M_2(\mathbb{R})$.

Bài tập 3.2 Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân với vô hướng trong $\mathbb{R}^2$ như sau: Với mọi $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$, đặt

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \text{ và } k(x_1,x_2) = (0, kx_2).$$

Chứng minh rằng $\mathbb{R}^2$ không là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Bài tập 3.3 Cho $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong $\mathbb{R}^+$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân vô hướng như sau

- Phép cộng $\oplus$: $\forall x,y \in \mathbb{R}^+ : x \oplus y = xy$.
- Phép nhân $\otimes$: $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall r \in R : r \otimes x = x^r$.

Chứng minh rằng $\mathbb{R}^+$ cùng với 2 phép toán trên là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Bài tập 3.4 Các tập hợp dưới đây có là không gian vectơ con của các không gian vectơ tương ứng không?
a. Tập $U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
b. Tập $V = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = x_3\}$.
c. Tập $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 3\}$.
d. Tập $X = \{ax^2 + bx + c \in P_2[x] \mid a+b+c = 0\}$.
e. Tập $Y = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a+d = 0\right\}$.
f. Tập $Y = \left\{\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ -2b & 3a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$.

Bài tập 3.5 Cho các vectơ $u = (2,3,-1), v = (1,-1,2) \in \mathbb{R}^3$.
a. Biểu thị tuyến tính vectơ $x = (1,3,4)$ qua u,v;
b. Tìm m để $y = (m,7,1)$ là tổ hợp tuyến tính của u,v;
c. Tìm điều kiện của a,b,c để $z = (a,b,c)$ biểu thị tuyến tính được qua u,v.

Bài tập 3.6 Tìm m sao cho x là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.
a. $x = (5,9,m); u_1 = (4,4,3); u_2 = (7,2,1); u_3 = (4,6,1)$
b. $x = (7,-2,m); u_1 = (2,3,5); u_2 = (3,7,8); u_3 = (1,-6,1)$

Bài tập 3.7 Trong $P_2[x]$ cho các đa thức

$$p = x^2 + 3x + 1, q = -2x^2 - x - 1.$$

a. Biểu thị tuyến tính vectơ $f = -2x^2 + 4x$ qua p, q;
b. Tìm m để $g = -2x^2 + x + m$ là tổ hợp tuyến tính của p, q.

Bài tập 3.8 Xét sự độc lập tuyến tính của các hệ vectơ sau trong các không gian vectơ tương ứng
a. $a_1 = (2,1,1), a_2 = (1,3,1), a_3 = (1,-2,0)$ trong $\mathbb{R}^3$.
b. $p_1 = 2x^2 - 3x, p_2 = x + 2, p_3 = 2x^2 - 4x + 1$ trong $P_2[x]$.
c. $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ trong $M_2(\mathbb{R})$.
d. $d_1 = (1,2,-1,3), d_2 = (3,7,9,13), d_3 = (-2,-4,2,-6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

Bài tập 3.9 Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ vectơ sau:
a. $a = (1,-3,3,1), b = (3,1,1,7), c = (0,-5,4,-2)$
b. $v_1 = (0,1,1,-1), v_2 = (3,2,-1,-8), v_3 = (2,1,-1,-5), v_4 = (-1,2,2,-1), v_5 = (-2,3,1,-3)$.

Bài tập 3.10 Cho các vectơ

$$a_1 = (1,1,5,-1,2), a_2 = (2,3,4,1,2), a_3 = (1,3,-7,5,-2), a_4 = (-1,1,a,7,b),$$

và các không gian vectơ con

$$U = Span\{a_1, a_2, a_3\}, V = Span\{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$$

a. Tìm một cơ sở và chiều của U.
b. Biện luận chiều của V theo a, b.
c. Tìm điều kiện của a, b để $U = V$.

Bài tập 3.11 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ

$$a_1 = (3,-4,3), a_2 = (1,2,-1), a_3 = (1,m,5)$$

và $X = Span\{a_1, a_2, a_3\}$.
a. Tìm m để $X = \mathbb{R}^3$.
b. Cho $m = -8$, tìm $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho $x = (a,b,c) \in X$.

Bài tập 3.12 Xác định số chiều của các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$.

a. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$.,

b. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = x_1 + x_2\}$.

c. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = x_1 + x_2, x_3 = x_1 - x_2\}$.

d. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$.

Bài tập 3.13 Xác định số chiều và cơ sở của các không gian vectơ con của $\mathbb{R}_2[x]$.

a. $V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$.

b. $V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid xp'(x) = p(x)\}$.

Bài tập 3.14 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho tập $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b - c = 0\}$.

a. Chứng minh V là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

b. Tìm cơ sở và số chiều của V.

Bài tập 3.15 Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm.

Bài tập 3.16 Tìm hạng và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của các tập vectơ dưới đây
a. $\{x_1 = (1, 0, -1, 0), x_2 = (1, 2, 1, 1), x_3 = (3, 2, 3, 2), x_4 = (1, 1, 2, 1)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
b. $\{u_1 = x^3, u_2 = 2x^2, u_3 = 3x, u_4 = 2x^2 + 3x, u_5 = 1\}$ trong $P_3[x]$.

Bài tập 3.17 Tìm hạng của các hệ vectơ sau:
a. $\{(1, 2, -1), (0, 3, 3), (2, 3, -3), (1, 1, -2)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
b. $\{(1, 3, -1, 0), (2, 0, 1, -1), (0, -1, 4, 3)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
c. $\{(-1, 0, 2, 3, 1), (2, 1, 3, -2, 0), (3, 2, 5, 1, 4), (0, 1, 4, 6, 5)\}$ trong $\mathbb{R}^5$.

Bài tập 3.18 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.
a. Chứng minh hệ vectơ $E = \{x_1 = (1, 1, 1), x_2 = (1, 1, 2), x_3 = (1, 2, 3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
b. Tìm tọa độ của vectơ $x = (2, 1, 9)$ đối với cơ sở E.

Bài tập 3.19 a. Chứng minh rằng trong $\mathbb{R}_2[x]$, tập

$$S = \{x^2 + x + 1, 2x + 1, 3\}$$

là một cơ sở của $P_2[x]$.
b. Tìm tọa độ của $u = 3x^2 - x + 7$ đối với cơ sở S.

Bài tập 3.20 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho hai hệ vectơ

$$B = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$$
$$E = \{(2,1,-1),(3,2,-5),(1,-1,m)\}$$

a. Tìm m để E là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang E khi $m = 0$.
c. Tìm tọa độ của vectơ $a = (1,0,0)$ đối với 2 cơ sở trên.

Bài tập 3.21 Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở

$$B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}; C = \{(0,0,1),(1,-1,0),(1,1,1)\}$$

a. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang C và từ C sang B.
b. Tìm tọa độ của $x = (1,-1,1)$ trong hai cơ sở đó.

Bài tập 3.22 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ , cho hai cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $C = \{v_1, v_2, v_3\}$, tromg đó

$$u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,2,2), u_3 = (0,-1,-1).$$

Cho $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ B sang C.
a. Tìm cơ sở C.
b. Cho $v \in \mathbb{R}^3$ có $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tìm v và $[v]_C$.