2.3 Phương pháp khử Gauss

Nguyễn Minh Trí

Ngày 16 tháng 10 năm 2022

Định lý 2.3.1

Các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ phương trình tuyến tính tương đương:

Định lý 2.3.1

Các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ phương trình tuyến tính tương đương:

(i) Đổi chỗ hai phương trình cho nhau, các phương trình khác giữ nguyên.

Định lý 2.3.1

Các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ phương trình tuyến tính tương đương:

(i) Đổi chỗ hai phương trình cho nhau, các phương trình khác giữ nguyên.

(ii) Nhân một số khác 0 vào một phương trình, các phương trình còn lại giữ nguyên.

Định lý 2.3.1

Các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ phương trình tuyến tính tương đương:

(i) Đổi chỗ hai phương trình cho nhau, các phương trình khác giữ nguyên.

(ii) Nhân một số khác 0 vào một phương trình, các phương trình còn lại giữ nguyên.

(iii) Cộng vào một phương trình một phương trình khác đã nhân với một số, các phương trình còn lại giữ nguyên.

Định lý 2.3.1

Các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ phương trình tuyến tính tương đương:

(i) Đổi chỗ hai phương trình cho nhau, các phương trình khác giữ nguyên.

(ii) Nhân một số khác 0 vào một phương trình, các phương trình còn lại giữ nguyên.

(iii) Cộng vào một phương trình một phương trình khác đã nhân với một số, các phương trình còn lại giữ nguyên.

Để giải một hệ phương trình tuyến tính, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang. Phương pháp này được gọi là *phương pháp khử Gauss*.

Định lý 2.3.2

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n biến số.

Định lý 2.3.2

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n biến số. Giả sử A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận bổ sung.

Định lý 2.3.2

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n biến số. Giả sử A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận bổ sung. Khi đó

i. Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Định lý 2.3.2

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n biến số. Giả sử A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận bổ sung. Khi đó

i. Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

ii. Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ thì hệ phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm.

Định lý 2.3.2

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n biến số. Giả sử A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận bổ sung. Khi đó

i. Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

ii. Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ thì hệ phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm.

iii. Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = k < n$ thì hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc $n - k$ tham số.

Định nghĩa 2.3.3

- Số đầu tiên khác 0 của một hàng (tính từ trái sang) trong một ma trận được gọi là *phần tử cơ sở* của hàng đó.

Định nghĩa 2.3.3

- Số đầu tiên khác 0 của một hàng (tính từ trái sang) trong một ma trận được gọi là *phần tử cơ sở* của hàng đó.
- Ma trận bậc thang thu gọn là ma trận bậc thang mà các phần tử cơ sở của hàng bằng 1.

Định nghĩa 2.3.3

- Số đầu tiên khác 0 của một hàng (tính từ trái sang) trong một ma trận được gọi là *phần tử cơ sở* của hàng đó.
- Ma trận bậc thang thu gọn là ma trận bậc thang mà các phần tử cơ sở của hàng bằng 1.

Ma trận bậc thang thu gọn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phương pháp khử Gauss: Các bước sau đây tóm tắt một quá trình để giải một hệ phương trình tuyến tính.

Phương pháp khử Gauss: Các bước sau đây tóm tắt một quá trình để giải một hệ phương trình tuyến tính.

1. Viết ma trận bổ sung $\overline{A}$.

Phương pháp khử Gauss: Các bước sau đây tóm tắt một quá trình để giải một hệ phương trình tuyến tính.

1. Viết ma trận bổ sung $\overline{A}$.
2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang thu gọn.

Phương pháp khử Gauss: Các bước sau đây tóm tắt một quá trình để giải một hệ phương trình tuyến tính.

1. Viết ma trận bổ sung $\overline{A}$.
2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang thu gọn.
3. Từ ma trận bậc thang, ta có một hệ phương trình tương ứng (tương đương với phương trình ban đầu).

Phương pháp khử Gauss: Các bước sau đây tóm tắt một quá trình để giải một hệ phương trình tuyến tính.

1. Viết ma trận bổ sung $\overline{A}$.
2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang thu gọn.
3. Từ ma trận bậc thang, ta có một hệ phương trình tương ứng (tương đương với phương trình ban đầu).
4. Sử dụng thay thế lùi để tìm các nghiệm.

Phương pháp khử Gauss: Các bước sau đây tóm tắt một quá trình để giải một hệ phương trình tuyến tính.

1. Viết ma trận bổ sung $\overline{A}$.
2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang thu gọn.
3. Từ ma trận bậc thang, ta có một hệ phương trình tương ứng (tương đương với phương trình ban đầu).
4. Sử dụng thay thế lùi để tìm các nghiệm.
5. Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì ta đặt các tham số tương ứng cho các biến có hệ số không phải là phần tử cơ sở.

Ví dụ 2.3.4

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -11 \\ 4x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

Ví dụ 2.3.4

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -11 \\ 4x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right] \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right]$$

Vì $r(A) = r(\overline{A}) = \dots.$ nên hệ phương trình .... nghiệm và phụ thuộc .... tham số (số biến trừ $r(A)$). Đặt .... (các biến có hệ số không phải là phần tử cơ sở), khi đó

$$x_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{ và } x_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\{(\dots\dots\dots\dots\dots\dots) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ví dụ 2.3.5

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Ví dụ 2.3.5

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Giải.

Ví dụ 2.3.5

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\dots\dots\dots\dots\dots\dots]{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right] \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(-9, 7, 4)\}$.

Ví dụ 2.3.6

Tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 7x_2 & - & 7x_3 & + & 11x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 10x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & = & 4 \end{cases}$$

Ví dụ 2.3.6

Tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 11x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 10x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right] \xrightarrow[\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots]{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

Ta thấy .... Do đó hệ phương trình ....
....

Ví dụ 2.3.8

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2.3.8

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}]{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\left[\begin{array}{cccc|c} \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right]$$

- Nếu $m \neq 7$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(\overline{A})$. Khi đó hệ phương trình vô nghiệm.

- Nếu $m \neq 7$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(\overline{A})$. Khi đó hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 7$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$.

- Nếu $m \neq 7$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(\overline{A})$. Khi đó hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 7$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. Khi đó hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc 1 tham số.

- Nếu $m \neq 7$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(\overline{A})$. Khi đó hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 7$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. Khi đó hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc 1 tham số. Đặt $x_4 = a$, khi đó

$$x_3 = \frac{7}{3}a; x_2 = 1 + x_3 - \frac{7}{3}x_4 = 1; x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -\frac{5}{3}a.$$

- Nếu $m \neq 7$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(\overline{A})$. Khi đó hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 7$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. Khi đó hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc 1 tham số. Đặt $x_4 = a$, khi đó

$$x_3 = \frac{7}{3}a; x_2 = 1 + x_3 - \frac{7}{3}x_4 = 1; x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -\frac{5}{3}a.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(-\frac{5}{3}a, 1, \frac{7}{3}a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Ví dụ 2.3.9 Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + 2y + m^2 z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \\ x + 3y + 9z = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 2.3.9 Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + 2y + m^2 z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \\ x + 3y + 9z = 3 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right] \xrightarrow[\cdots\cdots\cdots\cdots]{\cdots\cdots\cdots\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\cdots\cdots\cdots\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

Hệ phương trình có nghiệm khi .... Do đó .... hay .... Như vậy ....