2.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Nguyễn Minh Trí

Ngày 2 tháng 12 năm 2021

Định nghĩa 2.4.1

Hệ phương trình tuyến tính n biến số được gọi là thuần nhất nếu nó có dạng

$$AX = 0. \tag{1}$$

Định nghĩa 2.4.1

Hệ phương trình tuyến tính n biến số được gọi là thuần nhất nếu nó có dạng

$$AX = 0. \tag{1}$$

Ví dụ 2.4.2

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Bộ n-số $(0, 0, \ldots, 0)$ luôn là nghiệm của hệ phương trình (1) và nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường*.

Nhận xét 2.4.3

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n - k$ tham số.

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n - k$ tham số.

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n - k$ tham số.

Giả sử $n - k$ tham số này là $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$.

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n - k$ tham số.

Giả sử $n - k$ tham số này là $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$. Lần lượt cho:

- $t_1 = 1, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm X_1

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n - k$ tham số.

Giả sử $n - k$ tham số này là $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$. Lần lượt cho:

- $t_1 = 1, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm X_1
- $t_1 = 0, t_2 = 1, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm X_2

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n-k$ tham số.

Giả sử $n-k$ tham số này là $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$. Lần lượt cho:

- $t_1 = 1, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm X_1
- $t_1 = 0, t_2 = 1, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm X_2
- ...
- $t_1 = 0, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 1$, tìm được 1 nghiệm X_{n-k}

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n - k$ tham số.

Giả sử $n - k$ tham số này là $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$. Lần lượt cho:

- $t_1 = 1, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm X_1
- $t_1 = 0, t_2 = 1, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm X_2
- ...
- $t_1 = 0, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 1$, tìm được 1 nghiệm X_{n-k}

Khi đó $X_1, X_2, \ldots, X_{n-k}$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ví dụ 2.4.4

Tìm nghiệm và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2.4.4

Tìm nghiệm và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \end{array}\right] \xrightarrow[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots]{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \end{array}\right]$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc ...... tham số. Đặt ...., suy ra

$$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

....

....

....

....