1.2 Định thức

Nguyễn Minh Trí

Ngày 6 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 1.2.1

Cho A là một ma trận vuông. **Định thức** của ma trận A là một số được kí hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$.
Nếu $A = [a]$ là ma trận vuông cấp 1 thì $\det(A) = a$.
Nếu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Định nghĩa 1.2.1

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ thì

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.2

Tính các định thức

a. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Định nghĩa 1.2.3 (Phần bù đại số)

Cho A là ma trận vuông cấp n, ta kí hiệu M_{ik} là ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ ma trận A bằng cách bỏ hàng thứ i và cột thứ k. Khi đó $A_{ik} = (-1)^{i+k}\det(M_{ik})$ được gọi là *phần bù đại số* của a_{ik}.

Ví dụ 1.2.4

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Phần bù đại số của a_{11} là

$$A_{11} = (\ldots\ldots)^{\ldots\ldots} \begin{vmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ví dụ 1.2.4

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Phần bù đại số của a_{21} là

$$A_{21} = (\ldots\ldots)^{\cdots\cdots\cdot} \begin{vmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Định nghĩa 1.2.5 (Định thức cấp n)

Cho A là ma trận vuông cấp n. Định thức của A được tính bởi công thức sau

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

hay

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

trong đó $1 \leq i \leq n$.

Việc dùng định nghĩa trên để tính định thức được gọi là *tính định thức bằng cách khai triển theo hàng i.*

$$\boxed{\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}}$$

Ví dụ 1.2.6

Tính định thức của ma trận

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Giải. a. Tính định thức của ma trận A bằng cách khai triển theo hàng 1

$$\det(A) = ...(....)^{.....} \begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix} + ...(....)^{.....} \begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix} + ...(....)^{.....} \begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}$$

$$= ....$$

$$= ....$$

$$\boxed{\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Tính định thức của ma trận B bằng cách khai triển theo hàng 1 như sau

$$\det(B) = ...(....)^{......} \begin{vmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{vmatrix} + ...(....)^{......} \begin{vmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{vmatrix}$$

$$+ ....(.....)^{......} \begin{vmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{vmatrix}$$

$$= ....$$

Định lý 1.2.7

Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n. Khi đó

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

trong đó $1 \leq j \leq n$.

Ví dụ 1.2.8

Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Giải. Khai triển theo cột ....

$$D = ...(.....)^{......} \begin{vmatrix} ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \end{vmatrix} = ...$$

Định lý 1.2.9

Nếu A là ma trận tam giác trên (dưới) thì định thức của A bằng tích các phần tử trên đường chéo chính, tức là

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Ví dụ 1.2.10

Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Giải. Ta có $\det(A) =$ ....

Định lý 1.2.11

Định thức không thay đổi qua phép chuyển vị, nghĩa là $|A^T| = |A|$.

Ví dụ 1.2.12

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Khi đó $\det A = \det A^T =$ ....

Mỗi tính chất của định thức nếu đã đúng trên hàng thì cũng sẽ đúng trên cột, và ngược lại. Do đó, từ nay về sau, ta chỉ phát biểu mệnh đề đối với hàng (hiển nhiên cũng đúng đối với cột).

Định lý 1.2.13

Cho A là một ma trận vuông. Nếu một trong các điều sau xảy ra

1. Ma trận A có một hàng (cột) gồm các số 0;
2. Ma trận A có hai hàng (cột) giống nhau;
3. Ma trận A có một hàng (cột) này là bội của một hàng (cột) khác;

thì $\det(A) = 0$.

Ví dụ 1.2.14

(i) Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Ví dụ 1.2.14

(ii) Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(iii) Định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Định lý 1.2.15

Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp.

1. Nếu B nhận được từ ma trận A bằng cách đổi chỗ 2 hàng (cột) của A cho nhau thì $\det(B) = -\det(A)$.
2. Nếu B nhận được từ A bằng cách nhân một hàng (cột) nào đó của A với một số c thì $\det(B) = c\det(A)$.

Ví dụ 1.2.16

(i) Đổi chỗ hai hàng cho nhau

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

(ii) Hàng thứ nhất của ma trận bên trái bằng 3 lần hàng thứ nhất của ma trận bên phải

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Hệ quả 1.2.17

Cho A là một ma trận vuông cấp n và $c \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\det(cA) = c^n \det(A).$$

Định lý 1.2.18

$$\begin{vmatrix} (h_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ua_{k1}+vb_{k1} & ua_{k2}+vb_{k2} & \dots & ua_{kn}+vb_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (h_n) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= u\begin{vmatrix} (h_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (h_n) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + v\begin{vmatrix} (h_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (h_n) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Ví dụ 1.2.19

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2e & f+2g & i+2j \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & i \\ k & l & m \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & g & j \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Định lý 1.2.20

Định thức không đổi nếu ta lấy các phần tử của một hàng nhân với một số rồi cộng với các phần tử tương ứng của một hàng khác.

Ví dụ 1.2.21

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \underset{h_3 \to h_3 - 7h_1}{\overset{h_2 \to h_2 - 4h_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{vmatrix} \overset{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nhận xét 1.2.22. Cho A là ma trận vuông và B là ma trận nhận được từ A bằng một trong ba phép biến đổi theo hàng (cột):

- Đổi chỗ hàng i và hàng j;

$$A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$$

- Nhân một số c vào hàng i;

$$A \xrightarrow{h_i \to ch_i} B \Rightarrow \det(B) = c\det(A)$$

- Nhân một số c vào hàng i rồi cộng vào hàng j

$$A \xrightarrow{h_j \to h_j + ch_i} B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$$

Tính định thức bằng cách đưa về dạng tam giác:

1. Sử dụng Nhận xét 1.2.22 để đưa định thức về dạng tam giác trên
2. Định thức bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

Ví dụ 1.2.23 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \underset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\overset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\underset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\overset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \underset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\overset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Định lý 1.2.24

Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Ví dụ 1.2.25 Kiểm tra Định lý 1.2.24 với $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

và

$$\det(AB) = 13.4 - 5.10 = 2$$

Vì $\det(A) = -2$ và $\det(B) = -1$ nên

$$\det(A).\det(B) = (-2).(-1) = 2 = \det(AB).$$

Bài tập: Tính định thức

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 1 \\ 7 & 6 & 1 & 9 & 8 \\ 2 & 7 & 9 & 13 & -3 \\ 2 & 3 & 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$