Chương 2:

HÀM NHIỀU BIẾN

I. HÀM NHIỀU BIẾN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hàm nhiều biến là một ánh xạ biến 1 tập con D của R_n thành một tập con của R.

$$f : D \subset R_n \longrightarrow R$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n)$$

D gọi là miền xác định của f.

Ví dụ:

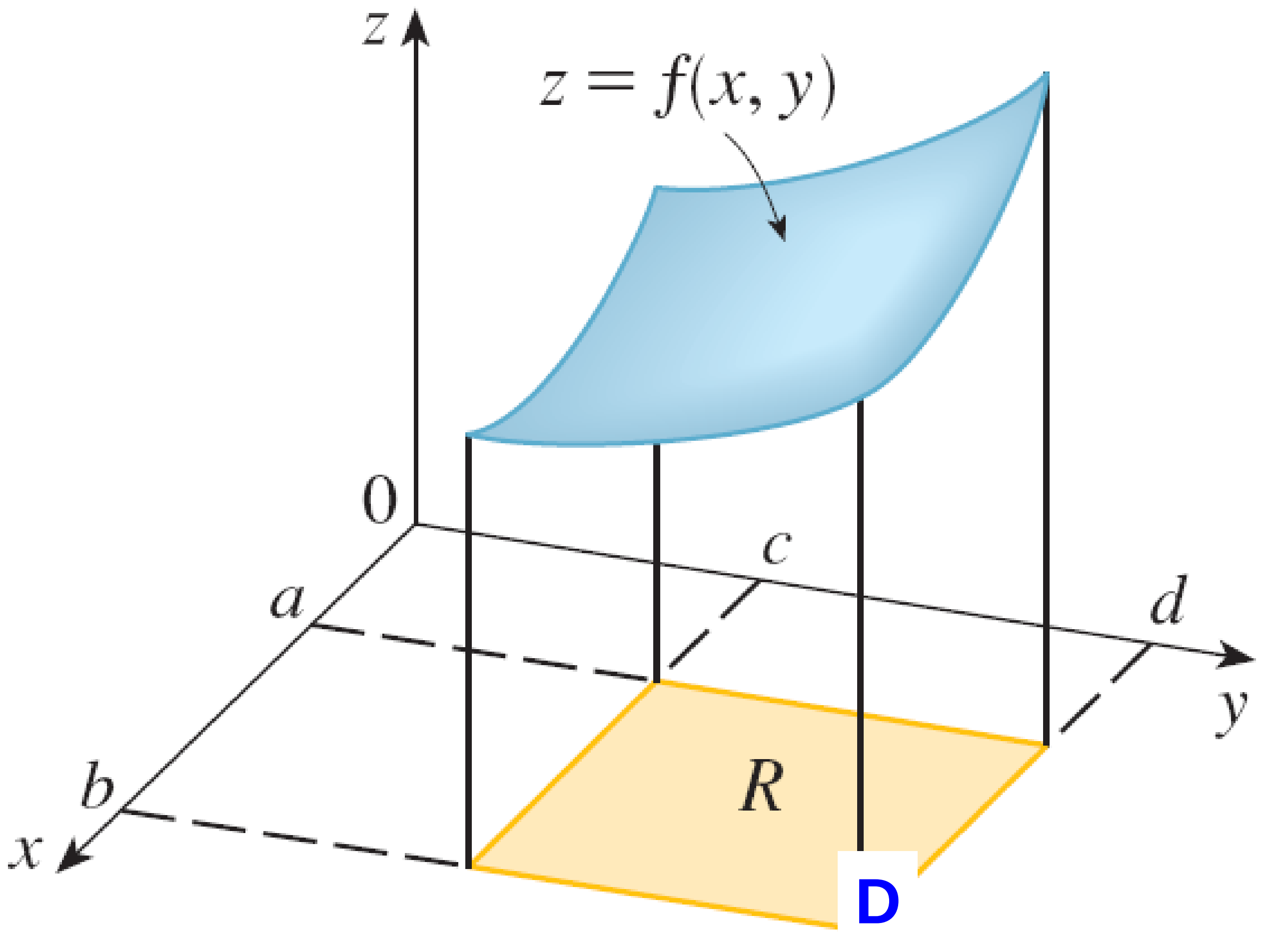
1/ $z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $D = R^2 \setminus \{(0,0)\}$

2/ $z = f(x,y) = x^y$, $D = \{(x,y) / x > 0\}$

3/ $F(x,y,z) = xz + z^2y + 2 = 0$ (hàm ẩn $z = z(x,y)$)

2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA HÀM 2 BIẾN

Hàm số $z = f(x,y)$ biểu diễn một mặt cong trong không gian



3 .GIỚI HẠN HÀM 2 BIẾN

Cho $f(x, y)$, $(x,y) \in D$. Ta nói: f hội tụ về A khi $(x,y) \to (x_0, y_0)$ nếu:

$$\forall (x_n, y_n) \in D, (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0):$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = A$$

Cách viết giới hạn:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

<u>Lưu ý</u>: *không lấy giới hạn theo x trước, y sau hoặc ngược lại.*

Ví dụ: $1/\, f(x,y) = x,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = x_0,$

Giải

Vì $D = \mathbb{R}^2$ và $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$

$\Leftrightarrow x_n \to x_0,\ y_n \to y_0$

$\Rightarrow f(x_n, y_n) = x_n \to x_0,\ \forall (x_n, y_n)$

Vậy

$$f(x,y) = y,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = y_0,$$

Ví dụ: $2/\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x+y}{\ln(x+y)} = \dfrac{2}{\ln 2}$,

Giải

Lấy $(x_n, y_n) \to (1,1)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n}{\ln(x_n + y_n)} \to \frac{2}{\ln 2}$$

Một số lưu ý

- Các phép toán và tính chất của giới hạn hàm 1 biến vẫn còn đúng cho hàm nhiều biến(tổng, hiệu, tích , thương, giới hạn kẹp,…)
- Thay tương đương VCB, VCL, khai triển Taylor, qtắc L'Hospitale chỉ áp dụng nếu chuyển được sang hàm 1 biến.
- Để ý dạng vô định khi tính giới hạn.

Ví dụ:

$$3/\ \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{xy-2x-y+2}{x-1} \quad \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (y-2) = -1$$

$$4/\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{\ln(1+xy)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sqrt{1+u}-1}{\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{u}{2}}{u} = \frac{1}{2}$$

4. HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ TÍNH CHẤT

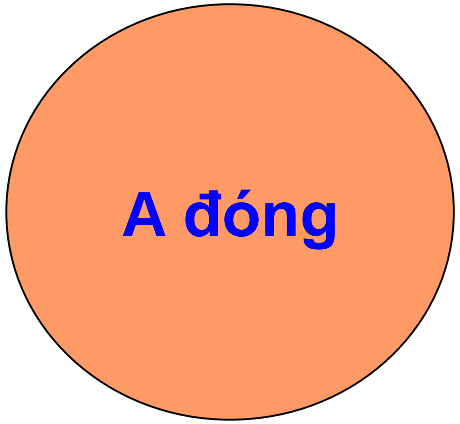
4.1. Định nghĩa: $f(x, y)$ liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$ nếu:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

4. 2. Những tính chất quan trọng của hàm số liên tục

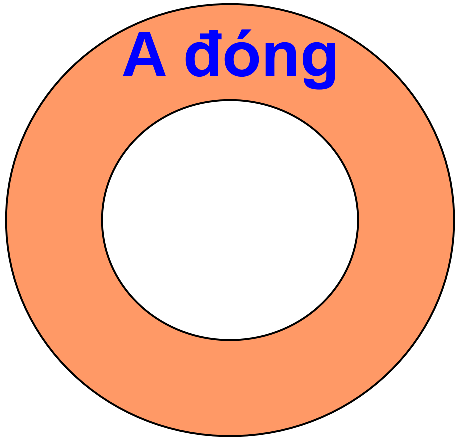
- Các hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định,
- f liên tục trên tập A đóng và bị chặn thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên A.

Lưu ý: Mọi phát biểu trên không gian n chiều cũng tương tự trên không gian 2 chiều.

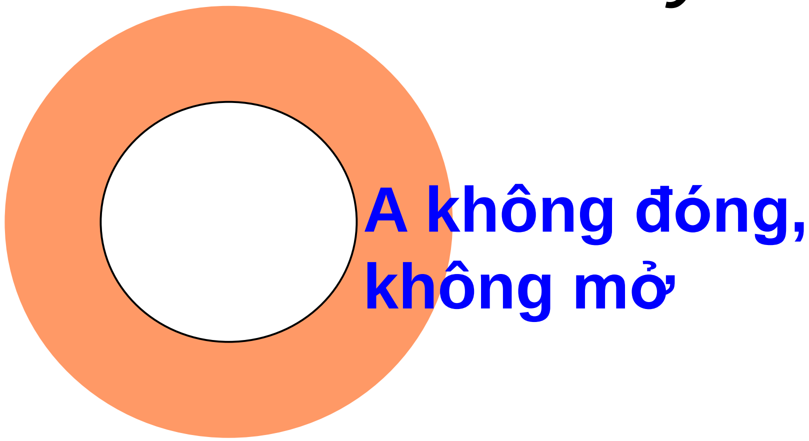


$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

$$x^2 + y^2 < R^2$$



$$R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$$



$$R_1^2 \leq x^2 + y^2 < R_2^2$$

II. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm riêng cấp 1 của $z = f(x,y)$
2. Đạo hàm riêng cấp cao của $z = f(x,y)$
3. Sự khả vi và vi phân.

1. ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

1.1. Định nghĩa:

Đạo hàm riêng cấp 1 của *f(x, y)* theo biến x tại (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

(Cố định y_0, biểu thức là hàm 1 biến theo x, tính đạo hàm của hàm này tại x_0)

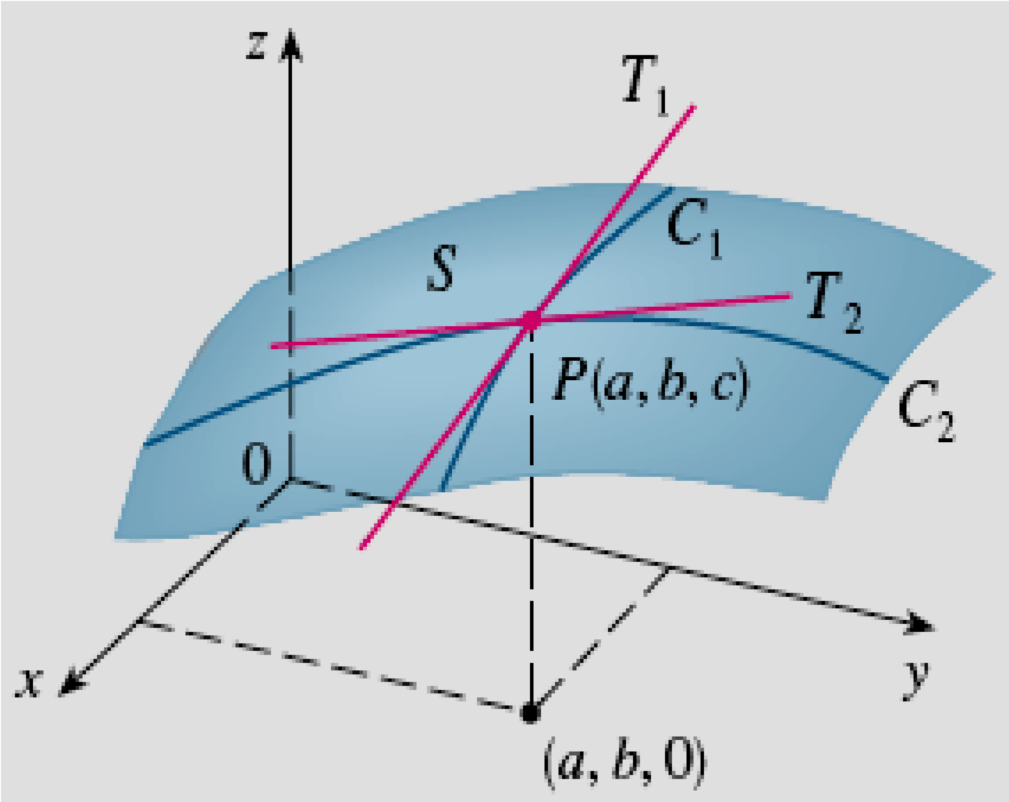
Đạo hàm riêng cấp 1 của *f(x, y)* theo biến y tại (x_0, y_0)

$$f'_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

(Cố định x_0, biểu thức là hàm 1 biến theo y, tính đạo hàm của hàm này tại y_0)

1.2. Ý nghĩa của đạo hàm riêng cấp 1

Cho mặt cong S: $z = f(x, y)$, xét $f'_x(a, \mathrm{b})$, với $c = f(a, b)$



Xem phần mặt cong S gần $P(a, b, c)$

Mặt phẳng y = b cắt S theo gt C_1 đi qua P.

(C_1) : $z = g(x) = f(x,b)$

$g'(a) = f'_x(a, b)$

$f'_x(a, b) = g'(a)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_1 của C_1 tại $x = a$.

$f'_y(a, b)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_2 của C_2

(là phần giao của S với mặt phẳng $x = a$) tại $y = b$

1.3. Ví dụ về cách tính.

1/ Cho f(x,y) = $3x^2y + xy^2$ .Tính $f'_x(1,2), f'_y(1,2)$

<u>Giải:</u>

$\boxed{f'_x(1,2)}$ cố định $y_0 = 2$, ta có hàm 1 biến

$$f(x,2) = 6x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow f'_x(1,2) = (6x^2 + 4x)'|_{x=1} = 12x + 4|_{x=1} = 16$$

$\boxed{f'_y(1,2)}$ cố định $x_0 = 1$, ta có hàm 1 biến

$$f(1,y) = 3y + y^2$$

$$\Rightarrow f'_y(1,2) = (3y + y^2)'|_{y=2} = (3 + 2y)|_{y=2} = 7$$

2/ Tính $f'_x(1,1), f'_y(1,1)$ với $f(x, y) = x^y$

Giải:

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1}, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_x(1,1) = 1 \times 1^{1-1} = 1;$$

$$f'_y(x,y) = x^y \ln x, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_y(1,1) = 1^1 \ln 1 = 0$$

3/ Tính đạo hàm riêng của $z = \ln\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

$$z = \ln\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

3/ Cho $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

b/ Tính $f'_x(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0,1)$: (0,1) không phải là điểm phân chia biểu thức.

$$f'_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \forall(x,y)\neq(0,0)$$

$$\Rightarrow f'_x(0,1)=1$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b/ Tính $f'_x(0,0)$: (0,0) là điểm phân chia biểu thức $\Rightarrow$ Tính bằng định nghĩa

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

5/ Cho $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. Tính $f'_x(x,y)$

Giải:

Hàm *f(x, y)* xác định tại mọi *(x,y)*

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Công thức trên không đúng cho (x, y) = (0, 0)

$$f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

- Tại (0, 0): tính bằng định nghĩa

$$\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \frac{e^{-\sqrt{\Delta x^2}}-1}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0^{\pm}} \frac{e^{-\sqrt{\Delta x^2}}-1}{\Delta x} = \mp 1$$

f không có đạo hàm theo x tại (0, 0) . (Nói cách khác $f'_x(0,0)$ không tồn tại).

1. 4. Ví dụ cho hàm 3 biến **(Tương tự hàm 2 biến)**

Cho $f(x,y,z) = x + ye^{xz}$ .Tính f'_x, f'_y, f'_z tại $(0,-1,2)$

$$f'_x = 1 + yze^{xz} \quad \Rightarrow f'_x(0,-1,2) = 1 - 2 = -1$$

$$f'_y = e^{xz} \quad \Rightarrow f'_y(0,-1,2) = e^0 = 1$$

$$f'_z = xye^{xz} \quad \Rightarrow f'_z(0,-1,2) = 0$$

2. ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO

2.1. Định nghĩa

Xét hàm 2 biến f(x,y) và f'_x, f'_y cũng là các hàm 2 biến

Đạo hàm riêng cấp 2 của *f* là các đạo hàm riêng cấp 1(nếu có) của f'_x, f'_y

$$f''_{xx} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad f''_{yy} = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 + xy + \cos(y - x)$. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của *f*.

Giải

$$f'_x = 2x + y + \sin(y - x) \qquad f'_y = x - \sin(y - x)$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (2x + y + \sin(y - x))'_x = 2 - \cos(y - x)$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = 1 + \cos(y - x)$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x = 1 + \cos(y - x)$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = -\cos(y - x)$$

2.2. Định lý Schwartz

Tổng quát thì các đạo hàm hỗn hợp không bằng nhau $f''_{xy} \neq f''_{yx}$

Định lý Schwartz: *Nếu f(x, y) và các đạo hàm riêng*

$f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ *liên tục trong miền mở chứa* (x_0, y_0)

thì $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

- ***Đối với các hàm số thường gặp, định lý Schwartz luôn đúng tại các điểm tồn tại đạo hàm.***

- ***Định lý Schwartz cũng đúng cho đạo hàm cấp 3 trở lên*** $f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$

2.3. Cách viết đạo hàm cấp cao và cách tính:

$$\boxed{f^{(m+n)}_{x^m y^n} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)}$$

***Lưu ý*:** đối với các hàm sơ cấp tính theo thứ tự nào cũng được.

Ví dụ 1/ Cho $f(x,y) = e^{xy}$. Tính $f''_{xx}, f'''_{xyy},$

Giải

$$f'_x(x,y) = ye^{xy} \qquad f''_{xx} = y^2e^{xy}$$

$$f''_{xy}(x,y) = (1+xy)e^{xy}$$

$$f'''_{xyy}(x,y) = [x+(1+xy)x]e^{xy} = (2x+x^2y)e^{xy}$$

Cách 2: $f(x,y) = e^{xy}$

$$f''_{yy} = x^2 e^{xy}$$

$$f'''_{xyy} = f'''_{yyx} = \left(2x + x^2 y\right) e^{xy}$$

Lấy theo thứ tự này nhanh hơn cách trước.

Đạo hàm cấp cao của một số hàm

1. $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$

2. $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$

3. $\sin(ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$

4. $\cos(ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$

5. $\left[\frac{1}{ax+b}\right]^{(n)} = (-1)^n \frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

6. $[(ax+b)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)a^n(ax+b)^{\alpha-n}$

Công thức Leibnitz

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

2/ Cho $f(x,y)=\ln(2x+3y)$ Tính $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^7 \partial y^3}(-1,1)$

<u>Giải</u>

Đạo hàm *f*: 7 lần theo *x*, 3 lần theo *y*

$$\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}(x,y) = \frac{(-1)^{7-1}(7-1)!2^7}{(2x+3y)^7} = \frac{2^7 6!}{(2x+3y)^7}$$

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^7 \partial y^3}(x,y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}(x,y)\right)$$

$$6.\ \left[(ax+b)^{\alpha}\right]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)a^{n}(ax+b)^{\alpha-n}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}(x,y)\right) = \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{2^7 6!}{(2x+3y)^7}\right)$$

$$= 2^7 6! 3^3(-7)(-7-1)(-7-2)(2x+3y)^{-10}$$

$$= -2^7 \times 9! \times 3^3 \times (2x+3y)^{-10}$$

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^7 \partial y^3}(-1,1) = -2^7 \times 9! \times 3^3$$

3. SỰ KHẢ VI VÀ VI PHÂN (CẤP 1)

3.1. Vi phân cấp 1

f khả vi tại (x_0, y_0) nếu tồn tại 2 hằng số A, B sao cho:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

$$o(\rho)=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$: là VCB bậc cao hơn ρ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$

$$\boxed{df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y}$$: vi phân của *f* tại (x_0, y_0)

3.2. ĐIỀU KIỆN CẦN CỦA SỰ KHẢ VI:

1. f khả vi tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0).

2. f khả vi tại (x_0, y_0) thì f có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B$$

Vi phân của hàm 2 biến thường viết dạng:

$$\boxed{df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy}$$

3.3. ĐIỀU KIỆN ĐỦ CỦA SỰ KHẢ VI:

Cho f xác định trong miền lân cận (x_0, y_0), nếu các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

Các hàm sơ cấp thường gặp đều thỏa mãn điều kiện này.

Ví dụ: Cho $f(x,y) = x^2y^3$. Tính $df(x,y)$

Giải

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

$$= 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$$

3. 4. CÁC CÔNG THỨC TÍNH VI PHÂN: NHƯ HÀM 1 BIẾN

$$d(\alpha f) = \alpha df, \quad \alpha \in R$$
$$d(f \pm g) = df \pm dg,$$
$$d(f.g) = gdf + fdg$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Vi phân hàm n biến: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$dz = f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + \dots + f'_{x_n}dx_n$$

3.5. VI PHÂN CẤP CAO

Vi phân cấp 2 của f là vi phân của *df(x,y)* khi xem *dx*, *dy* là các hằng số.

(ta chỉ xét trường hợp các đhr hỗn hợp bằng nhau)

Cách viết: $d^2f(x, y) = d(df(x, y))$

$$d^2f = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right)$$

$$= d(f'_x)dx + d(f'_y)dy$$

$$= (f''_{xx}dx + f''_{xy}dy)dx + (f''_{yx}dx + f''_{yy}dy)dy$$

$$d^2f(x,y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

hay

$$d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Công thức trên áp dụng khi *x*, *y* là các biến độc lập .

Ví dụ: Tìm vi phân cấp 1, 2 tại (0, 1) của $f(x,y)=x^2y^2-y^3e^x$

Giải

$$*\quad f'_x=2xy^2-y^3e^x, f'_y=2x^2y-3y^2e^x$$

$$df(0,1)=f'_x(0,1)dx+f'_y(0,1)dy=-dx-3dy$$

$$*\quad f''_{xx}=2y^2-y^3e^x\ ,\ f''_{xy}=4xy-3y^2e^x\ ,\ f''_{yy}=2x^2-6ye^x$$

$$d^2f(0,1)=f''_{xx}(0,1)dx^2+2f''_{xy}(0,1)dxdy+f''_{yy}(0,1)dy^2$$

$$=dx^2+2\times(-3)dxdy-6dy^2$$

3.6.CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CHO VI PHÂN CẤP CAO

$\boxed{d^n f = d(d^{n-1} f)}$ Vi phân cấp n là vi phân của vi phân cấp $(n-1)$.

Chỉ áp dụng khi f là biểu thức đơn giản theo x, y (thường là hợp của một hàm số sơ cấp với một đa thức bậc 1 của x, y).

Công thức hình thức: (trường hợp biến độc lập)

$$\boxed{d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x,y)}$$

Trong khai triển nhị thức Newton, thay các lũy thừa của ∂ bởi cấp đạo hàm riêng tương ứng của *f*, lũy thừa của *dx*, *dy* tính như thường.

Cụ thể:

$$d^2f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^3f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f$$

$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

Ví dụ: Tính vi phân cấp 3 của $z = f(x,y) = e^{x+y}$

Giải

Cách 1:

$$dz = d(e^{x+y}) \quad = e^{x+y}dx + e^{x+y}dy \quad = e^{x+y}(dx+dy)$$

$$d^2z = d(dz) = d\left(e^{x+y}(dx+dy)\right)$$ (dx, dy là hằng)

$$= d(e^{x+y})(dx+dy) = e^{x+y}(dx+dy)^2$$

$$d^3z = d(d^2z) = d\left(e^{x+y}(dx+dy)^2\right) = e^{x+y}(dx+dy)^3$$

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

Cách 2:

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

$$d^3z = e^{x+y}\left(dx^3 + 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3\right)$$

$$\Rightarrow d^3z = e^{x+y}(dx+dy)^3$$

III. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM HỢP

1. Trường hợp 1

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Nếu z, x, y khả vi:

$$z'_v = f'_x.x'_v + f'_y.y'_v \qquad z'_u = f'_x.x'_u + f'_y.y'_u,$$

$$dz = z'_u du + z'_v dv$$

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

$$= f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv)$$

1.1.Trường hợp riêng 1

Cho $z = f(x)$ và $x = x(u, v)$

$$\boxed{z'_u = f'(x)x'_u, \quad z'_v = f'(x)x'_v}$$

$$dz = z'_u du + z'_v dv$$

$$dz = f'(x)dx = f'(x)(x'_u du + x_v dv)$$

1.2.Trường hợp riêng 2:

$z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$

$$\boxed{z'(t) = f'_x.x'(t) + f'_y.y'(t)}$$

$$dz = z'(t)dt$$

$$dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x.x'(t)dt + f'_y.y'(t)dt$$

1.3.Trường hợp riêng 3:

$$z = f(x, y),\ y = y(x)$$

$$\boxed{z'(x) = f'_x + f'_y.y'(x)}$$

$$dz = z'(x)dx$$

Lưu ý: *Khi tính đạo hàm hàm hợp, luôn viết đạo hàm của f theo biến chính. Sau đó, tùy thuộc vào yêu cầu, nhân thêm đạo hàm của biến chính vào cạnh đạo hàm của f.*

Ví dụ: 1/ Cho $z = f(x,y) = e^{xy}, \quad x = u^2, \quad y = u + v$

Tìm z'_u, z'_v, dz tại $(u, v) = (1, 1)$.

Giải

$\boxed{z'_u = f'_x . x'_u + f'_y . y'_u}$ $\boxed{z'_v = f'_x . x'_v + f'_y . y'_v}$

$(u, v) = (1, 1) \Rightarrow (x, y) = (1, 2)$

$z'_u = ye^{xy} .2u + xe^{xy} .1$ $z'_v = ye^{xy} .0 + xe^{xy} .1$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_u(1,1) = 2.e^2.2 + 1.e^2.1 = 5e^2 \\ z'_v(1,1) = e^2 \end{cases}$$

$$dz(1,1) = z'_u(1,1)du + z'_v(1,1)dv = 5e^2du + e^2dv$$

2/ Cho: $z = f(x) = \sin(x + x^2), x = \arctan\left(\dfrac{u}{v}\right)$. Tính z'_u, z'_v tại (0, 1)

<u>Giải</u>

$\boxed{z'_u = f'(x).\, x'_u}$ $\boxed{z'_v = f'(x).\, x'_v}$ $x(0, 1) = 0$

$$z'_u = (1+2x)\cos(x+x^2) \times \frac{1}{v} \times \frac{1}{1+\dfrac{u^2}{v^2}}$$

$$z'_v = (1+2x)\cos(x+x^2) \times \frac{-u}{v^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{u^2}{v^2}}$$

$$\begin{cases} z'_u(0,1) = 1 \\ z'_v(0,1) = 0 \end{cases}$$

3/ Cho: $z = f(x,y) = \sin(xy)$, tính *dz(t)* tại t = 0

$$x = \arctan(t), y = e^t$$

Giải

Cách 1: *dz = z'(t)dt*, với *z'(t) = f'ₓ. x'(t) + f'ᵧ.y'(t)*,

$$z'(t) = y\cos(xy).\frac{1}{1+t^2} + x\cos(xy).e^t$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0, y = 1$$

$$\Rightarrow dz(0) = dt$$

$$z = f(x,y) = \sin(xy),\ x = \arctan(t), y = e^t$$

Cách 2:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x . x'(t)dt + f'_y . y'(t)dt$$

$$dz = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy$$

$$= y\cos(xy)\frac{dt}{1+t^2} + x\cos(xy)e^t dt$$

$$\Rightarrow dz(0) = dt$$

4/ Cho: $z = f(x,y) = \dfrac{\ln(y^2+1)}{x^2}$.

a/ Tính z'_x tại (1,0).

b/ Nếu $y = e^x$, tính $z'(x)$ tại $x = 1$

<u>Giải</u>

$$a/\ z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = -2\frac{\ln(y^2+1)}{x^3} \Rightarrow z'_x(1,0) = -2\frac{\ln(1)}{1} = 0$$

b/ $z'(x) = f'_x + f'_y . y'(x)$

$$= -2\frac{\ln(y^2+1)}{x^3} + \frac{2y}{(y^2+1)x^2}.e^x$$

$$z'(x) = -2\frac{\ln(y^2+1)}{x^3} + \frac{2y}{(y^2+1)x^2}.e^x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = e$$

$$\Rightarrow z'(1) = -2\ln(e^2+1) + \frac{2e^2}{e^2+1}$$

5/ Cho $z = f(x-y, xy)$, với f là hàm khả vi. Tính z'_x, z'_y

Giải

Đặt: $u = x - y$, $v = xy \Rightarrow z = f(u, v)$

(u, v là biến chính của f)

$$z'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x = f'_u.1 + f'_v y$$

$$z'_y = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y = f'_u.(-1) + f'_v x$$

6/ Cho $z = xf\left(\frac{x}{y^2}\right)$ với f là hàm khả vi. Chứng minh đẳng thức:

$$2xz'_x + yz'_y = 2z$$

Giải

Đặt : $u = \frac{x}{y^2}$ $\Rightarrow z = x.f(u)$

$$z'_x = f(u) + x.\left[f(u)\right]'_x$$

$$= f(u) + x.f'(u).u'_x$$

$$= f(u) + x.f'(u).\frac{1}{y^2}$$

$$z = xf\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

$$z'_y = x.\left[f(u)\right]'_y$$

$$= xf'(u).u'_y = x.f'(u).\frac{-2x}{y^3}$$

$$2xz'_x + yz'_y = 2x\left(f(u) + x.f'(u).\frac{1}{y^2}\right) + yx.f'(u).\frac{-2x}{y^3}$$

$$= 2xf(u)$$

$$= 2z$$

7/ Cho: $z = f\left(x^2 - y, xy^2\right)$ với f là hàm khả vi. Tính dz theo dx, dy.

<u>Giải</u>

Đặt: $u = x^2 - y$, $v = xy^2$ $\Rightarrow z = f(u, v)$

- <u>Cách 1</u>: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ với

$$z'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x = f'_u.2x + f'_v.y^2$$

$$z'_y = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y = f'_u.(-1) + f'_v.2xy$$

$$dz = \left(f'_u.2x + f'_v.y^2\right)dx + \left(-f'_u + f'_v.2xy\right)dy$$

- Cách 2:

$$dz = f'_u du + f'_v dv$$

$$= f'_u(u'_x dx + u'_y dy) + f'_v (v'_x dx + v'_y dy)$$

$$= f'_u(2xdx - dy) + f'_v(y^2 dx + 2xydy)$$

$$= (2xf'_u + y^2 f'_v)dx + (2xyf'_v - f'_u)dy$$

3.7. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO CỦA HÀM HỢP

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$z''_{uu} = \left(f'_x.x'_u + f'_y.y'_u\right)'_u = \left[\left(f'_x\right)'_u.x'_u + f'_x.x''_{uu}\right] + \left[\left(f'_y\right)'_u.y'_u + f'_y.y''_{uu}\right]$$

$$z''_{uv} = \left(f'_x.x'_u + f'_y.y'_u\right)'_v = \left[\left(f'_x\right)'_v.x'_u + f'_x.x''_{uv}\right] + \left[\left(f'_y\right)'_v.y'_u + f'_y.y''_{uv}\right]$$

$$z''_{vv} = \left(f'_x.x'_v + f'_y.y'_v\right)'_v = \left[\left(f'_x\right)'_v.x'_u + f'_x.x''_{uv}\right] + \left[\left(f'_y\right)'_v.y'_u + f'_y.y''_{vv}\right]$$

Các đạo hàm $(f'_x)'_u$, $(f'_x)'_v$, $(f'_y)'_u$, $(f'_y)'_v$ phải tính theo hàm hợp.

Vi phân cấp hai của hàm hợp: (*u*, *v* là biến độc lập)

Để đơn giản, viết d^2z theo *du*, *dv*

$$\boxed{d^2z = z''_{uu}du^2 + 2z''_{uv}dudv + z''_{vv}dv^2}$$

3.8. VI PHÂN CẤP 2 TÍNH THEO HÀM HỢP

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$dz = f'_x dx + f'_y dy \Rightarrow d^2 z = d(dz) = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right)$$

Với x, y là các hàm số thì <u>dx và dy không phải là hằng.</u>

$$\boxed{\Rightarrow d^2 z = d\left(f'_x\right) dx + f'_x d^2 x + d\left(f'_y\right) dy + f'_y d^2 y}$$

<u>Lưu ý</u>:

- $d(f'_x)$, $d(f'_y)$ tính theo vi phân cấp 1 của hàm hợp.
- d^2x, d^2y tính theo vi phân cấp 2 của hàm thường.

Ví dụ: 1/ Cho: $z = f(x,y) = x^2y, x = u+v, y = u-v$

Tính z''_{uu}, z''_{uv} tại $(u, v) = (1, 1)$

Giải

Ta có: x = 2, y = 0

$$z'_u = 2xy \times x'_u + x^2 \times y'_u = 2xy \times 1 + x^2 \times 1 = 2xy + x^2$$

$$z''_{uu} = \left(2xy + x^2\right)'_u = 2(x'_u y + xy'_u) + 2xx'_u$$

$$= 2(y + x) + 2x = 4x + 2y$$

$\Rightarrow z''_{uu}(1, 1) = 8$

$$x = u + v, y = u - v$$

$$z'_u = 2xy + x^2$$

$$z''_{uv} = \left(2xy + x^2\right)'_v = 2\left(x'_v y + x y'_v\right) + 2x x'_v$$

$$= 2(y - x) + 2x = 2y$$

z''$_{uv}$ (1, 1) = 0

Ví dụ: 2/ Cho: $z = f(x,y) = x^2 y, x = u + v, y = u^2$

Tính z''_{uu} tại $(u, v) = (1, 1)$

Giải

Ta có: $x = 2, y = 1$

$$z'_u = 2xy \times x'_u + x^2 \times y'_u = 2xy \times 1 + x^2 \times 2u$$

$$z''_{uu} = 2\left(xy + u.x^2\right)'_u = 2[(x'_u y + xy'_u) + (x^2 + u.2x.x'_u)]$$

$$= 2\left[(y + x.2u) + x^2 + 2ux.1\right]$$

$\Rightarrow z''_{uu}(1, 1) = 26$

3/ Cho: $z = f(x,y) = x^2 y$, với $x = t^2, y = \ln t$. Tính d^2z theo dt tại $t = 1$.

Giải

$$d^2z = z''(t)dt^2$$ (*t* là biến độc lập)

$$z'(t) = f'_x.x'(t) + f'_y.y'(t) \;= 2xy.2t + x^2.\frac{1}{t} \;= 4t^3.\ln t + t^3$$

$$z''(t) = 12t^2.\ln t + 4t^2 + 3t^2$$

$$d^2z(1) = 7dt^2$$

4/ Cho: $z = f(x^2 - y)$ với f là hàm khả vi cấp 2. Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

Giải

Đặt $u = x^2 - y \Rightarrow z = f(u)$

$$z'_x = f'(u)u'_x = f'(u).2x,\ z'_y = f'(u).(-1)$$

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(f'(u).2x\right)'_x = 2\left[f'(u) + x\left(f'(u)\right)'_x\right]$$

$$= 2\left[f'(u) + xf''(u).u'_x\right]$$

$$= 2\left[f'(u) + 2x^2 f''(u)\right]$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(f'(u).2x\right)'_y$$

$$= 2x\left(f'(u)\right)'_y = 2xf''(u).u'_y \quad = -2xf''(u)$$

$$z'_y = f'(u).(-1)$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-f'(u)\right)'_y \quad = -f''(u)u'_y \quad = f''(u)$$

IV. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM ẨN

Nhắc lại: giả sử hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Để tính $y'(x)$, lấy đạo hàm phương trình $F = 0$ theo x và giải tìm $y'(x)$ (cách 1).

Với cách là này ta xem y là hàm theo x khi lấy đạo hàm của F.

Cách 2: Sử dụng hàm hợp cho hàm nhiều biến

$$G = F(x, y) = 0, \text{ với } y = y(x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = F'_x + F'_y . y'(x) = 0$$

1. Đạo hàm của hàm ẩn 1 biến y = y(x)

$$\boxed{y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

Xem x, y là 2 biến độc lập khi lấy đạo hàm của F.

Xét hàm ẩn 2 biến z = z(x, y) xác định từ phương trình:

F(x, y, z) = 0 (1).

$$\boxed{z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

x, y, z là các biến độc lập khi tính F'_x, F'_y, F'_z.

VÍ DỤ Cho y = y(x) xác định từ pt: $e^y + xy - e = 0$ (1) . Tìm *y'(0)*.

Cách 1: (gtich 1)

Lấy đạo hàm pt đã cho: $y'e^y + y + xy' = 0$ (2)

x = 0, (1) $\Rightarrow$ y = 1,

(2) $\Rightarrow$ $y'(0)\cdot e + 1 + 0 = 0$

$$\Rightarrow y'(0) = -e^{-1}$$

Cách 2: Đặt F(x, y) = $e^y + xy - e$

(1) $\Leftrightarrow$ F(x, y) = 0

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y}{e^y + x}$$

$$\Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{e+0} = -e^{-1}$$

Ví dụ Cho z = z(x, y), thỏa pt: $F(x,y,z) = z - ye^{x/z} = 0$ (1)

Tìm z'_x, z'_y tại (x, y) = (0, 1).

Từ (1) ta có: (x, y) = (0, 1) ⇔ z = 1

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-\frac{y}{z}e^{x/z}}{1+\frac{yx}{z^2}e^{x/z}} \quad \Rightarrow z'_x(0,1) = -\frac{-1}{1+0} = 1$$

$$F(x,y,z) = z - ye^{x/z} = 0$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{x/z}}{1 + \frac{yx}{z^2} e^{x/z}}$$

$$\Rightarrow z'_y(0,1) = -\frac{-1}{1+0} = 1$$

CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

I. CỰC TRỊ TỰ DO

Hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền mở D chứa $P_0(x_0, y_0)$

1. P_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại một lân cận V của P_0 sao cho:

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \ \forall (x, y) \in V$$

Bỏ dấu " = " ta gọi P_0 là điểm cực đại chặt của f .

2. Thay $\le$ bởi $\ge$ ta có định nghĩa điểm cực tiểu.

Lưu ý: dùng định nghĩa để xét cực trị là xét dấu biểu thức sau với (x,y) gần (x_0,y_0)

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

hay

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

Δx, Δy gần 0 (nhưng không đồng thời bằng 0)

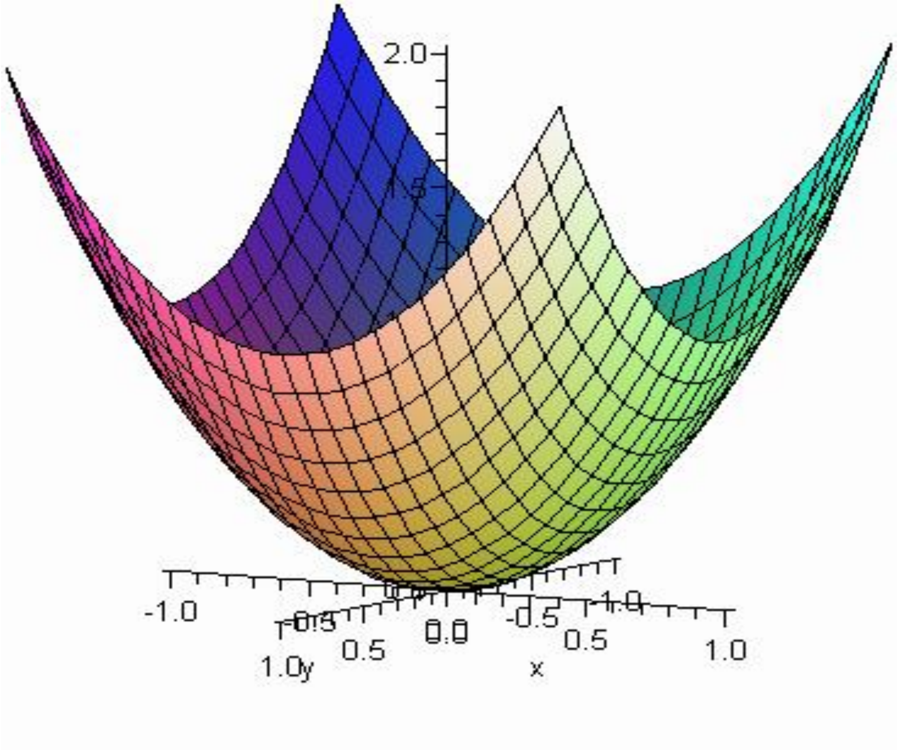
Nếu Δf giữ nguyên dấu trong 1 lân cận của (x_0, y_0) thì f đạt cực trị tại điểm này, ngược lại f không đạt cực trị tại đây.

Ví dụ:

1/ $P(0, 0)$ là điểm cực tiểu chặt của $f(x, y) = x^2+y^2$ vì

$$\Delta f(0,0) = f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

hay $\quad f(x, y) > f(0, 0), \ \forall (x, y) \neq (0, 0)$



2/ P(0, 0) là điểm cực tiểu không chặt của

$f(x, y) = x^2y^2$

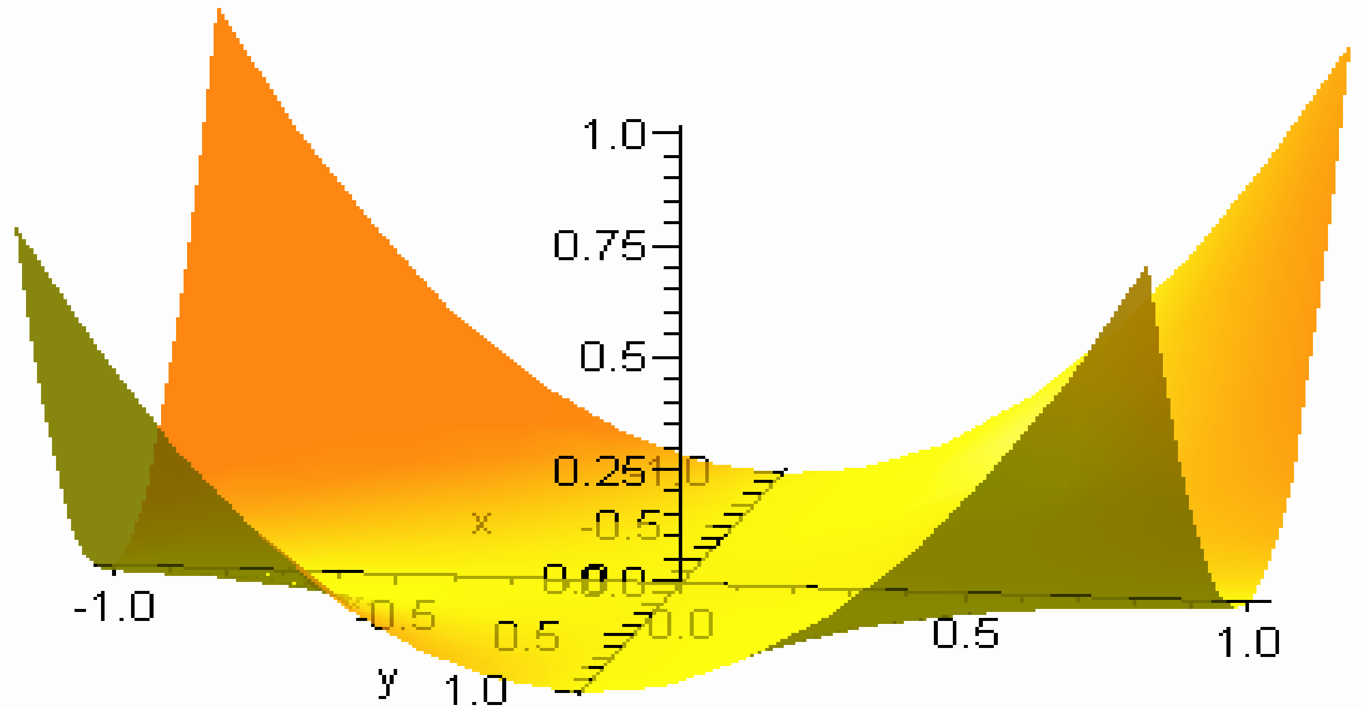
vì $\Delta f(0,0) = f(x, y) - f(0, 0) = x^2y^2 \geq 0, \forall (x, y)$

hay $f(x, y) \geq f(0, 0), \forall (x, y)$

nhưng $f(x, 0) = f(0, 0), \forall x \neq 0$

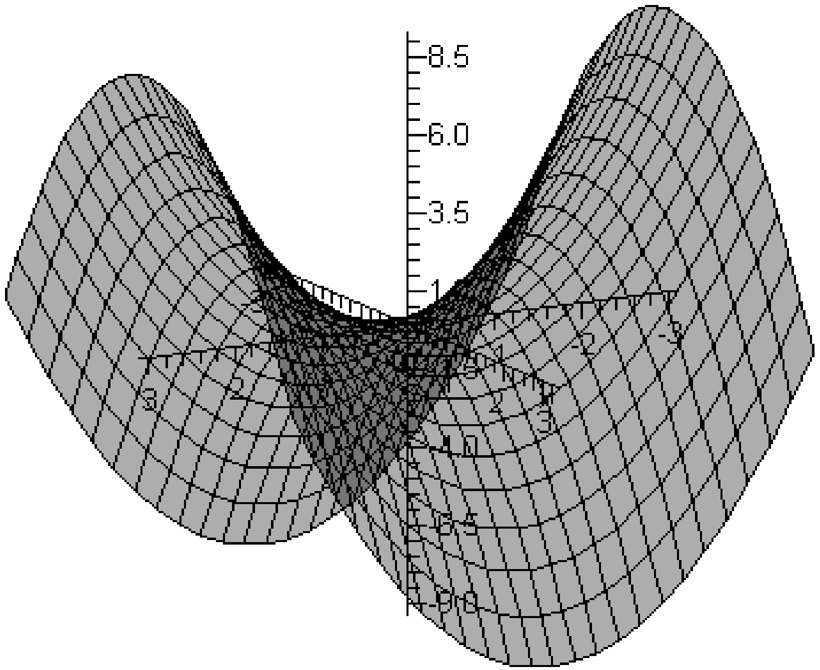
và $f(0, y) = f(0, 0), \forall y \neq 0$

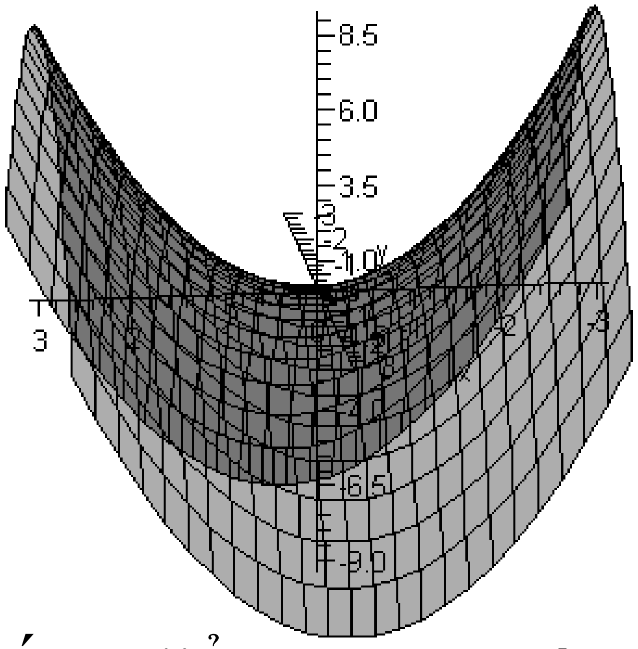
Tức là: trong lân cận V bất kỳ của (0, 0) luôn luôn có ít nhất 1 điểm (x, y) để dấu " = " xảy ra.


1.0
0.75
0.5
0.25
x
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
y

3/ $f(x, y) = x^2 - y^2$ không đạt cực trị tại (0, 0) vì

$f(x, 0\ ) > 0 = f(0, 0), \forall x \neq 0; \quad f(0, y) < f(0,0), \ \forall y \neq 0$





Trong mọi lân cận của (0,0) luôn luôn có ít nhất 2 điểm P_1, P_2 mà

$f(P_1) > f(0,0)$ và $f(P_2) < f(0,0)$.

Điều kiện cần của cực trị:

Nếu $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại $P_0(x_0, y_0)$ thì

- Hoặc $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$
- Hoặc đạo hàm riêng tại P_0 không tồn tại.

Định nghĩa:

- $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$: P_0 là điểm dừng
- P_0 là điểm tới hạn $\Leftrightarrow$ P_0 là điểm dừng hoặc đạo hàm của f tại P_0 không tồn tại

Điều kiện đủ của cực trị:

Hàm $z = f(x, y)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trong lân cận của điểm dừng $P_0(x_0, y_0)$ của f.

1. *Nếu $d^2f(x_0,y_0)$ xác định dương thì f đạt cực tiểu chặt tại P_0.*

2. *Nếu $d^2f(x_0,y_0)$ xác định âm thì f đạt cực đại chặt tại P_0.*

3. *Nếu $d^2f(x_0,y_0)$ không xác định dấu thì f không đạt cực trị tại P_0*

❖ Phương pháp tìm cực trị hàm 2 biến

1. Tìm điểm dừng $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)$

2. Tính : $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ và $\Delta = B^2 - AC$

$\begin{cases} \Delta < 0 \\ A > 0 \end{cases}$	f đạt cực tiểu tại P_0
$\begin{cases} \Delta < 0 \\ A < 0 \end{cases}$	f đạt cực đại tại P_0
$\Delta > 0$	f không đạt cực trị tại P_0
$\Delta = 0$	Xét P_0 theo định nghĩa.

Ví dụ 1: Tìm cực trị $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = (1,1) \end{array}\right.$$

$$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 6y$$

<u>Tại (0,0):</u> $A = f''_{xx}(0,0) = 0$, $B = f''_{xy}(0,0) = -3$, $C = f''_{yy}(0,0) = 0$,

$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$

$\Rightarrow$ f không đạt cực trị tại (0,0)

$$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 6y$$

Tại (1,1): A = $f''_{xx}(1,1) = 6$, B = $f''_{xy}(1,1) = -3$, C = $f''_{yy}(1,1) = 6$,

$$\begin{cases} \Delta = AC - B^2 = 36 - 9 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại (1,1), f(1,1) = -1

Ví dụ 2: Tìm cực trị z = f(x, y) = $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y) = (1,1) \\ (x,y) = (-1,-1) \\ (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại (1,1): A = $f''_{xx}(1,1) = 10$, B = $f''_{xy}(1,1) = -2$, C = $f''_{yy}(1,1) = 10$,

$$\begin{cases} \Delta = B^2 - AC = 4 - 100 < 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại (1,1), f(1,1) = -2

<u>Ví dụ 3</u>: Tìm cực trị $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$

Định nghĩa:

Hàm số $z = f(x, y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ đạt cực đại tại M_0 nếu tồn tại 1 lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M) \leq f(M_0), \quad \forall M \in V \text{ và } \varphi(M) = 0$$

Tương tự cho định nghĩa cực tiểu có điều kiện.

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Giả sử f, φ khả vi trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và

$$\varphi_x'^2(M_0) + \varphi_y'^2(M_0) \neq 0,$$

Nếu f đạt cực trị tại M_0 với điều kiện φ = 0 thì tồn tại $\lambda \in R$ sao cho

$$\begin{cases} f_x'(M_0) + \lambda\varphi_x'(M_0) = 0 \\ f_y'(M_0) + \lambda\varphi_y'(M_0) = 0 \quad (*) \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$$

λ : nhân tử Lagrange

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0 \quad (*) \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$$

1. M_0 thỏa hệ (*) gọi là điểm dừng trong bài toán cực trị có điều kiện, cũng gọi là điểm dừng của hàm Lagrange

   $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

2. $d\varphi(M_0) = 0$ (dx và dy liên kết với nhau theo hệ thức này)

Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện

Giả sử f, φ có các đhr đến cấp 2 liên tục trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và M_0 là điểm dừng của L(x,y),

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{yy}(M_0)dy^2$$

1. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định dương thì f đạt cực tiểu có điều kiện tại M_0.
2. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định âm thì f đạt cực đại có điều kiện tại M_0.

❖ Phương pháp tìm cực trị có điều kiện hàm 2 biến

Loại 1: điều kiện bậc nhất theo x, y(tìm trên đường thẳng)

$$\varphi(x, y) = ax + by + c = 0$$

$\Rightarrow$ đưa về cực trị hàm 1 biến khi thay y theo x trong f.

Loại 2:(tổng quát) dùng pp nhân tử Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

B1: tìm điểm dừng của L(x, y) : $\begin{cases} L'_x(M_0) = 0 \\ L'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$

B2: xét dấu d^2L tại M_0 có kèm đk $d\varphi(M_0) = 0$

- Xác định dương: cực tiểu
- Xác định âm: cực đại

Ví dụ 1: Tìm cực trị $z = 1 - 4x - 8y$

thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = x^2 - 8y^2 - 8 = 0$

L(x,y) = f(x, y) + λφ(x, y)

= 1 – 4x – 8y +λ (x^2 – 8y^2 – 8)

$$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, y = 1, \lambda = -1/2 \\ x = 4, y = -1, \lambda = 1/2 \end{array}\right.$$

Điểm dừng: $\begin{cases} x = -4, y = 1, \lambda = -1/2 \\ x = 4, y = -1, \lambda = 1/2 \end{cases}$

$$L''_{xx} = 2\lambda,\ \ L''_{xy} = 0,\ \ L''_{yy} = -16\lambda,\ \ d\varphi = 2xdx - 16ydy$$

Tại $M_1(-4, 1)$, $\lambda = -1/2$

$$\begin{cases} d^2L(-4,1) = -dx^2 + 8dy^2 \\ d\varphi(-4,1) = -8dx - 16dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(-4,1) = -4dy^2 + 8dy^2 = 4dy^2 > 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M_1 là điểm cực tiểu có điều kiện của f(x, y), $f(M_1) = 9$

$$L''_{xx} = 2\lambda,\ \ L''_{xy} = 0,\ \ L''_{yy} = -16\lambda,\ \ d\varphi = 2xdx - 16ydy$$

Tại $M_1(4, -1)$, $\lambda = 1/2$

$$\begin{cases} d^2L(4,-1) = dx^2 - 8dy^2 \\ d\varphi(4,-1) = 8dx + 16dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(4,-1) = 4dy^2 - 8dy^2 = -4dy^2 < 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M_2 là điểm cực đại có điều kiện của f(x,y), $f(M_2) = -7$

$$L(x,y)=xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$$

Điểm dừng của L là n_0 hệ:

$$\begin{cases} L'_x(x,y)=y+\lambda\dfrac{x}{4}=0 \\ L'_y(x,y)=x+\lambda y=0 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=2,(x,y)=(2,-1)\ \ hay\ \ (x,y)=(-2,1) \\ \lambda=-2,(x,y)=(2,1)\ \ hay\ \ (x,y)=(-2,-1) \end{array}\right.$$

$$L(x,y) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right)$$

Điểm dừng của L là n_0 hệ:

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = y + \lambda\dfrac{x}{4} = 0 \\ L'_y(x,y) = x + \lambda y = 0 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2, (x,y) = (2,-1) \;\; hay \;\; (x,y) = (-2,1) \\ \lambda = -2, (x,y) = (2,1) \;\; hay \;\; (x,y) = (-2,-1) \end{array}\right.$$

$$L''_{xx} = \frac{\lambda}{4},\ \ L''_{xy} = 1,\ \ L''_{yy} = \lambda, \qquad d\varphi(x,y) = \frac{x}{4}dx + ydy$$

Tại $P_1(2, -1)$, $\lambda = 2$

$$\begin{cases} d^2L(P_1) = \frac{1}{2}dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy \\ d\varphi(P_1) = \frac{1}{2}dx - dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2L(P_1) = 8dy^2 > 0 \\ dx = 2dy \end{cases}$$

Vậy f đạt cực tiểu có đk tại P_1, $f(P_1) = -2$.

Tương tự tại $P_2(-2, 1)$

$$L''_{xx} = \frac{\lambda}{4}, \;\; L''_{xy} = 1, \;\; L''_{yy} = \lambda, \; d\varphi(x,y) = \frac{x}{4}dx + ydy$$

Tại $P_3(2, 1)$, $\lambda = -2$

$$\begin{cases} d^2L(P_3) = -\frac{1}{2}dx^2 - 2dy^2 + 2dxdy \\ d\varphi(P_3) = \frac{1}{2}dx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2L(P_3) = -8dy^2 < 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

Vậy f đạt cực đại có đk tại P_3, $f(P_3) = 2$.

Tương tự tại $P_4(-2, -1)$

$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

<u>Tại (-1; -1):</u> $A = f''_{xx}(-1,-1) = 10$, $B = f''_{xy}(-1,-1) = -2$, $C = f''_{yy}(-1,-1) = 10$,

$$\begin{cases} \Delta = B^2 - AC = 4 - 100 < 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại (-1,-1), $f(-1,-1) = -2$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

<u>Tại (0,0):</u>

A = $f''_{xx}(0,0)$ = -2, B = $f''_{xy}(0,0)$ = -2, C = $f''_{yy}(0,0)$ = -2,

$\Delta = B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ không có kết luận

Xét $\Delta f(0,0) = f(x,y) – f(0,0)$

$$= x^4 + y^4 – x^2 – 2xy – y^2 \ = x^4 + y^4 – (x + y)^2$$

Nếu $x = – y : \Delta f(0,0) = 2x^4 > 0$

Nếu $x = y: \Delta f(0,0) = 2x^4 – 4x^2$

$$= 2x^2(x^2 – 2) < 0 \text{ với } x \text{ gần } 0$$

Vậy trong 1 lân cận tùy của (0,0) luôn luôn có ít nhất 2 điểm P_1, P_2 mà

$f(P_1) > f(0,0)$ và $f(P_2) < f(0,0)$.

Kết luận: f không đạt cực trị tại (0, 0).

CÁCH TÌM GTLN, GTNN

1. *Tìm điểm dừng của f trên miền mở của D (phần bỏ biên).*

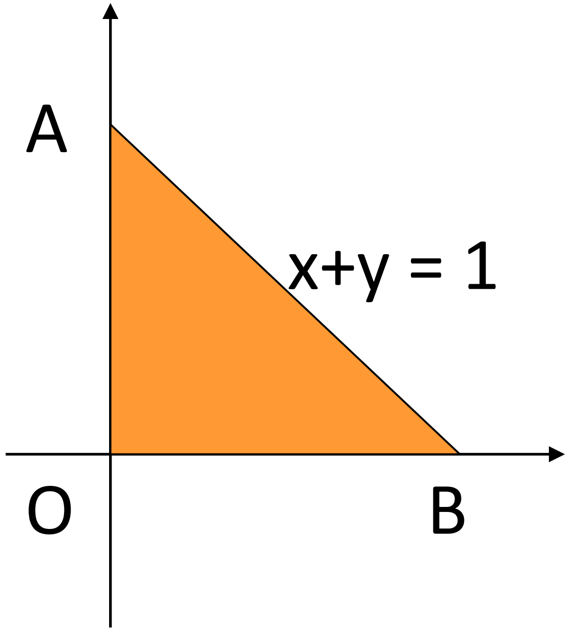
2. *Tìm các điểm đặc biệt trên biên của D*

   a. *Điểm dừng của hàm Lagrange (tổng quát).*

   b. *Nếu biên là đoạn thẳng, chuyển f về hàm 1 biến, tìm các điểm có khả năng đạt min, max của hàm 1 biến này.*

3. *So sánh giá trị của f tại các điểm trên*
   $\Rightarrow$ *min, max*

Ví dụ 1: Cho tam giác OAB, với O(0, 0), A(0, 1) và B(1, 0), tìm các điểm M(x, y) có tổng bình phương khoảng cách đến các đỉnh là lớn nhất, bé nhất.



$$OM^2 = x^2 + y^2,$$

$$AM^2 = x^2 + (y-1)^2,$$

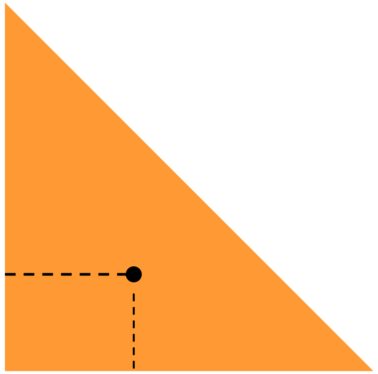
$$BM^2 = (x-1)^2 + y^2$$

Đặt z = $OM^2 + AM^2 + BM^2$

$$\Rightarrow z = f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

Bài toán trở thành: tìm GTLN, GTNN của z trên D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$

Điểm dừng của z = f(x, y) trên miền mở của D là nghiệm hệ



$$\begin{cases} f'_x = 6x - 2 = 0 \\ f'_y = 6y - 2 = 0 \\ x > 0, y > 0, x + y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

Xét trên biên D

OA: $x = 0,\ 0 \le y \le 1,\ z = 3y^2 - 2y + 2$

$z'(y) = 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1/3$

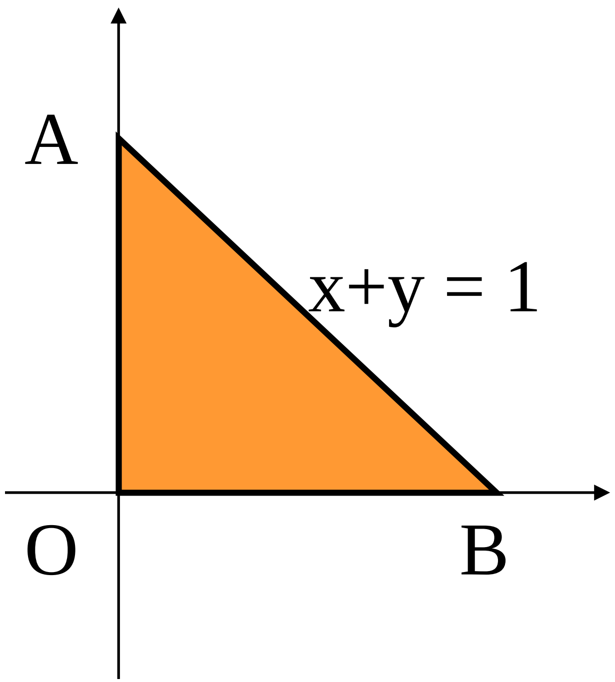
$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: (0,0), (0,1), (0,1/3)

OB: $y = 0,\ 0 \le x \le 1,\ z = 3x^2 - 2x + 2$

$z'(x) = 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/3$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt:

(0,0), (1,0), (1/3,0)



$$z = f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

AB: y = 1 – x, 0≤ x ≤ 1, z = $6x^2$ – 6x + 3

z'(x) = 12x – 6 = 0 ⇔ x = 1/2

⇒ các điểm đặc biệt: (1/2,1/2), (0,1), (1,0)

Tính f tại các điểm được chỉ ra

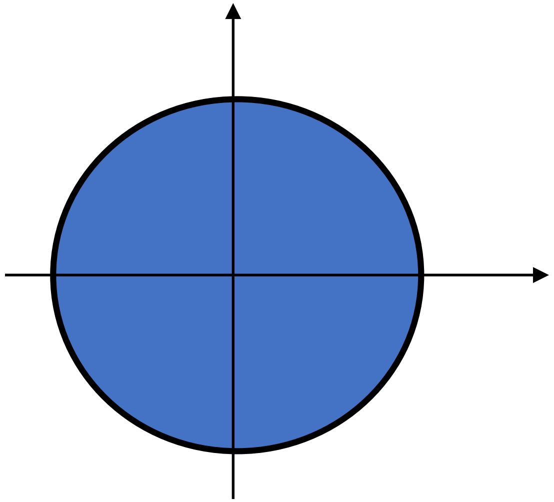
$$f(1/3,1/3) = 4/3, f(0,0) = 2, f(0,1) = 3, f(1,0) = 3$$

$$f(0,1/3) = 5/3, f(1/3,0) = 5/3, f(1/2,1/2) = 3/2$$

Vậy f_{min} = f(1/3,1/3) = 4/3,

f_{max} = f(1,0)= f(0,1) = 3

Ví dụ 2: Tìm GTLN, GTNN của z = f(x, y) = $x^2 + y^2 - 3x + 4y$ trên hình tròn D: $x^2 + y^2 \le 1$



Điểm dừng của z = f(x, y) trên miền mở của D là nghiệm hệ

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 3 = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (3/2, -2) \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \quad \text{(loại)}$$

Trên biên D: $x^2 + y^2 = 1$, xét hàm Lagrange

$$L(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Điểm đặc biệt trên biên là điểm dừng của

$$L(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x,y) = 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \; hay \; (x,y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

(Không cần chỉ ra λ.)

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -4, \quad f\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 6$$