Chương 2: Hệ phương trình tuyến tính

2.1 Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

Nguyễn Minh Trí

Ngày 16 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 2.1.1

Một phương trình tuyến tính n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một phương trình có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ là các số thực.

Định nghĩa 2.1.1

Một phương trình tuyến tính n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một phương trình có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ là các số thực.

Ví dụ 2.1.2

Các phương trình sau là phương trình tuyến tính:
(i) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5.$
(ii) $\sqrt{2}x_1 + \sin(\frac{\pi}{5})x_2 + x_3 = 0.$
(iii) $x_1 - \log_3^8 x_3 = \pi^4.$

Định nghĩa 2.1.1

Một phương trình tuyến tính n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một phương trình có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ là các số thực.

Ví dụ 2.1.2

Các phương trình sau là phương trình tuyến tính:
(i) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5.$
(ii) $\sqrt{2}x_1 + \sin(\frac{\pi}{5})x_2 + x_3 = 0.$
(iii) $x_1 - \log_3^8 x_3 = \pi^4.$
Các phương trình sau không là phương trình tuyến tính:
(i) $2x^2 + 3x = 5.$
(ii) $\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 = 0.$
(iii) $\dfrac{2}{x_1} - x_3 = \pi^4.$
(iv) $x_1 + \cos x_2 + \sin x_3 = 8$

Định nghĩa 2.1.3

Một hệ phương trình tuyến tính m phương trình n biến số là một tập hợp gồm m phương trình tuyến tính n biến số được cho như sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Định nghĩa 2.1.3

Một hệ phương trình tuyến tính m phương trình n biến số là một tập hợp gồm m phương trình tuyến tính n biến số được cho như sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Các số a_{ij} được gọi là hệ số của x_j; b_i được gọi là các hệ số tự do.

Định nghĩa 2.1.3

Một hệ phương trình tuyến tính m phương trình n biến số là một tập hợp gồm m phương trình tuyến tính n biến số được cho như sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Các số a_{ij} được gọi là hệ số của x_j; b_i được gọi là các hệ số tự do.

Ví dụ 2.1.4

Hệ 3 phương trình 4 biến số

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases}$$

Định nghĩa 2.1.5

Một bộ n số thực $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ được gọi là một nghiệm của hệ (1) nếu ta thay $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ thì hai vế của hệ phương trình (1) trở thành các đẳng thức. Việc tìm tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính được gọi là *giải hệ phương trình tuyến tính*.

Định nghĩa 2.1.5

Một bộ n số thực $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ được gọi là một nghiệm của hệ (1) nếu ta thay $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ thì hai vế của hệ phương trình (1) trở thành các đẳng thức. Việc tìm tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính được gọi là *giải hệ phương trình tuyến tính*.

Ví dụ 2.1.6

Bộ số $(-3, 8, 3)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad x_2 - 3x_3 = -1 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Định nghĩa 2.1.7

Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng số biến được gọi là *tương đương* nếu chúng có các nghiệm giống nhau.

Định nghĩa 2.1.7

Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng số biến được gọi là *tương đương* nếu chúng có các nghiệm giống nhau.

Ví dụ 2.1.8

Hai hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

Định nghĩa 2.1.7

Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng số biến được gọi là *tương đương* nếu chúng có các nghiệm giống nhau.

Ví dụ 2.1.8

Hai hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

tương đương nhau vì chúng có có tập nghiệm giống nhau là

Định nghĩa 2.1.7

Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng số biến được gọi là *tương đương* nếu chúng có các nghiệm giống nhau.

Ví dụ 2.1.8

Hai hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

tương đương nhau vì chúng có có tập nghiệm giống nhau là $\{(3, -1)\}$.

Định nghĩa 2.1.9

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình n biến số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \qquad\qquad ... & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{2}$$

Định nghĩa 2.1.9

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình n biến số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{2}$$

Ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số

Định nghĩa 2.1.9

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình n biến số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \quad (2)$$

Ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số

Ma trận $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ được gọi là ma trận bổ sung (ma trận mở rộng).

Ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận biến số.

Ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận biến số.

Ma trận cột $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số tự do.

Ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận biến số.

Ma trận cột $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số tự do.

Hệ phương trình tuyến tính (2) được viết lại dưới dạng phương trình ma trận như sau

$$AX = B$$

và ta gọi đây là dạng ma trận của hệ (2).

Ví dụ 2.1.10

Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

có ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

và dạng ma trận là

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots. \\ \dots. \\ \dots. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots. \\ \dots. \\ \dots. \end{bmatrix}.$$