1.3 Hạng của ma trận

Nguyễn Minh Trí

Ngày 6 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 1.3.1

Cho A là một ma trận cấp $m \times n$. Ma trận được tạo thành từ các phần tử nằm ở giao của k hàng và k cột nào đó của A được gọi là *ma trận con* cấp k của A. Định thức của ma trận con cấp k của A được gọi là *định thức con* cấp k của A.

Ví dụ 1.3.2. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận con tạo bởi giao của các phần tử thuộc hàng 1,2 và cột 2,4 là

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.3.3

Cho ma trận $A \neq 0$ cấp $m \times n$. *Hạng* của ma trận A chính là cấp cao nhất của định thức con khác không của A.
Kí hiệu: $\mathrm{rank} A$ hoặc $r(A)$.

Quy ước: Hạng của ma trận 0 là 0.
Nhận xét 1.3.4 Ta có $r(A) = k$ khi và chỉ khi A có một định thức con khác 0 cấp k và các định thức con cấp lớn hơn k đều bằng 0.

Tìm định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A :

1. Tìm một định thức con $D_1 \neq 0$ cấp s
2. Xét tất cả các định thức cấp $s+1$ chứa D_1.
    2.1 Nếu tất cả các định thức con này đều bằng 0 hoặc không có định thức con cấp $s+1$ nào chứa D_1 thì D_1 là định thức con có cấp cao nhất khác 0 của A, do đó $r(A) = s$.
    2.2 Nếu có một định thức $D_2 \neq 0$ cấp $s+1$ thì ta tiếp tục xét các định thức cấp $s+2$ chứa D_2.

Tiếp tục quá trình cho đến khi tìm được một định thức $D \neq 0$, cấp r mà mọi định thức cấp $r+1$ chứa D đều bằng 0 hoặc không có định thức con cấp r+1 chứa D. Suy ra D là định thức con cấp cao nhất khác 0 của A.

Ví dụ 1.3.5 Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Giải. Xuất phát từ một định thức con khác 0 bất kì, chẳng hạn

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Xét các định thức cấp 3 chứa D_2

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

Ví dụ 1.3.5 Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Tiếp theo, ta xét các định thức con cấp 4 chứa D_3. Ta có hai định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy $r(A) = 3$.

Mệnh đề 1.3.6

1. Cho A là một ma trận vuông cấp n.

   1. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$.
   2. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$.

2. Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là

$$r(A) = r(A^T).$$

Định nghĩa 1.3.7

Một ma trận A cấp $m \times n$ (khác ma trận không) được gọi là ma trận hình thang (bậc thang) nó thỏa các điều kiện sau:

1. Các hàng có số khác 0 nằm ở trên các hàng gồm các số 0 (nếu có).
2. Trên hai hàng có số khác 0, số đầu tiên khác 0 (tính từ trái qua phải) của hàng dưới nằm ở bên phải cột chứa số đầu tiên khác 0 của hàng bên trên.

Ví dụ 1.3.8 Các ma trận sau đây **không** có dạng hình thang

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ma trận thứ nhất không là ma trận hình thang vì không thỏa điều kiện thứ nhất; không ma trận thứ 2 và 3 không thỏa điều kiện thứ hai.

Các ma trận sau có dạng hình thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.3.9

Phép biến đổi sơ cấp trên ma trận là một trong những phép sau:

1. Đổi chỗ hai hàng (cột) cho nhau: $h_i \leftrightarrow h_j (c_i \leftrightarrow c_j)$
2. Nhân vào hàng thứ i (cột i) với số $a \neq 0$: $h_i \to a.h_i (c_i \to a.c_i), a \neq 0$
3. Thay một hàng thứ i bởi tổng của hàng h_i và tích của một số a với một hàng h_j : (thay cột c_i bởi tổng của cột c_i và nhân một số a vào cột c_j): $h_i \to h_i + a.h_j (c_i \to c_i + a.c_j)$

Kí hiệu $A \to B$ để chỉ ma trận B nhận được từ A sau một số phép biến đổi sơ cấp trên A.

Định lý 1.3.10

1. Hạng của một ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp.
2. Mọi ma trận (khác không) đều có thể đưa về dạng hình thang nhờ các phép biến đổi sơ cấp.
3. Nếu A là một ma trận hình thang thì hạng của A bằng số hàng khác không của A.

Để tìm hạng của ma trận A, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng (hay cột) để đưa ma trận về dạng hình thang B. Khi đó $r(A) = r(B)$.

Ví dụ 1.3.11

Dùng các phép biến đổi sơ cấp để tính hạng của ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Giải.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots. & \dots. \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{.........................} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots. & \dots. \end{bmatrix}$$

Vậy $r(A) = \dots.$

Ví dụ 1.3.12

Biện luận hạng của ma trận A theo m

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & m+4 & -2 & -1 \\ 3 & m+6 & -3 & m-3 \end{bmatrix}$$

Giải.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & m+4 & -2 & -1 \\ 3 & m+6 & -3 & m-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

Bài tập 1.

Dùng các phép biến đổi sơ cấp để tính hạng của ma trận B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.

Biện luận hạng của ma trận A theo m

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2-m & 4 & m^2 \\ 1 & 1-m & 2 & 0 \\ 3 & 3-2m & 8-m & 4 \end{bmatrix}$$