CHƯƠNG 4:

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

GV: Võ Thị Bích Trâm

BÀI 1:

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

I. Khái niệm chung

1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng tổng quát:

$$F(x, y, y') = 0 : \begin{cases} x\text{: biến độc lập} \\ y = y(x)\text{: hàm phải tìm} \\ y' = \dfrac{dy}{dx}\text{: đạo hàm riêng cấp 1 của y theo x} \end{cases}$$

Ví dụ: + $y' = x^2 + \sin x$

+ $x^2.e^y dx - \cos y.\tan x dy = 0$

2. Nghiệm của phương trình

- *Nghiệm tổng quát*: Với mọi hằng số có dạng $y = \varphi(x, C)$, C là hằng số tùy ý.

Ví dụ: $y' = x^2 + \sin x$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$$ là nghiệm tổng quát của phương trình

- *Nghiệm riêng*: Là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho C là một giá trị cụ thể $C = C_0$ nào đó.

Ví dụ: Cho $C = 1$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} - \cos x + 1$$ là nghiệm riêng của phương trình

II. Phương pháp giải một số phương trình vi phân cấp 1

1. Phương trình có biến phân ly (phương trình tách biến)

a. Dạng phương trình: $\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0}$

Nghiệm tổng quát của phương trình: $\boxed{\int f(x)dx + \int g(y)dy = C}$

Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân sau:

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0$$

$$\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0$$

$$\Rightarrow \int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{y}{1+y^2}dy=C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=C$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=C$$

Ta có:

$$\int\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+t^2\right)}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$$

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân sau: $x\sqrt{1-x^2}dx+y\sqrt{1-y^2}dy=0$

Giải

$$x\sqrt{1-x^2}dx+y\sqrt{1-y^2}dy=0$$

$$\Rightarrow \int x\sqrt{1-x^2}dx+\int y\sqrt{1-y^2}dy=C$$

Tính: $I=\int x\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2$

$$\Rightarrow 2tdt=-2xdx$$

$$\Rightarrow xdx=-tdt$$

$$\Rightarrow I=\int t.(-tdt)=-\int t^2dt$$

$$=-\frac{t^3}{3}=-\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$-\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}-\frac{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^3}{3}=C$$

b. Phương trình đưa về được phương trình có biến phân ly

Dạng phương trình: $M(x).Q(y)dx + N(x).P(y)dy = 0 \qquad (2)$

+ *Trường hợp 1:* $Q(y) = 0$ tại $y = a$

Thử trực tiếp xem $y = a$ có là nghiệm của phương trình (2)

+ *Trường hợp 2:* $N(x) = 0$ tại $x = b$

Thử trực tiếp xem $x = b$ có là nghiệm của phương trình (2)

+ Trường hợp 3: $Q(y).N(x) \neq 0$: Chia 2 vế của phương trình (2) cho $Q(y).N(x)$

$$(2) \Rightarrow \frac{M(x).Q(y)}{Q(y).N(x)}dx + \frac{N(x).P(y)}{Q(y).N(x)}dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{M(x)}{N(x)}dx + \frac{P(y)}{Q(y)}dy = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{M(x)}{N(x)}dx + \int \frac{P(y)}{Q(y)}dy = C$$

<u>Ví dụ:</u> Giải phương trình vi phân sau:

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0 \quad (1)$$

Mục đích: chia 2 vế của pt (1) cho $\sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-x^2}$

- Trường hợp 1: $\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0$

  $\Leftrightarrow x = \pm 1$ là nghiệm của phương trình (1).

- Trường hợp 2: $\sqrt{1-y^2} = 0 \Leftrightarrow 1-y^2 = 0$

  $\Leftrightarrow y = \pm 1$ là nghiệm của phương trình (1).

- Trường hợp 3: chia 2 vế của pt (1) cho $\sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-x^2} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-x^2}}dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$$

Tính: $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2$

$$\Rightarrow 2tdt = -2xdx$$

$$\Rightarrow xdx = -tdt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-tdt}{t} = -\int 1dt$$

$$= -t = -\sqrt{1-x^2}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C$

2. Phương trình đẳng cấp

Dạng phương trình: $\boxed{y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$

Phương pháp giải:

Đổi biến : Đặt $u = \frac{y}{x}$ (u là hàm của biến x)

$$\Rightarrow y = u.x$$

Đạo hàm 2 vế , ta có: $y' = u'.x + u$

Khi đó: $u'.x + u = y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u)$

hay $u'.x + u = \varphi(u)$: phương trình chứa biến phân ly

Ví dụ: Giải phương trình vi phân sau:

$$(1)\ y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$(2)\ y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$$

$$(1)\; y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'.x + u$

$$(1) \Rightarrow u'.x + u = e^{-u} + u$$

$$\Rightarrow u'.x = e^{-u}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}.x = e^{-u}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{e^{-u}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow e^{u} du = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int e^{u} du = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\Rightarrow e^{u} = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT là:

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$$

$$(2)\ y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{3x^2}{x^2} - \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 3 - \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'.x + u$

$$(2) \Rightarrow u'.x + u = 3 - u - u^2$$

$$\Leftrightarrow u'.x = -u^2 - 2u + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx}.x = -u^2 - 2u + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{-u^2 - 2u + 3} = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{-u^2 - 2u + 3} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{-du}{u^2 + 2u - 3} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{-du}{(u-1)(u+3)} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$I=\int \frac{-du}{(u-1)(u+3)}=\int\left(\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+3}\right)du$$

- Tìm A, B sao cho $\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+3}=\frac{-1}{(u-1)(u+3)}$

$$\Leftrightarrow \frac{A(u+3)+B(u-1)}{(u-1)(u+3)}=\frac{-1}{(u-1)(u+3)}$$

$$\Leftrightarrow A(u+3)+B(u-1)=-1$$

$$\Leftrightarrow (A+B)u+(3A-B)=0.u-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-1}{4} \\ B=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{\frac{-1}{4}}{u-1}+\frac{\frac{1}{4}}{u+3}\right)du=\frac{1}{4}\int\left(\frac{-1}{u-1}+\frac{1}{u+3}\right)du=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u+3}-\frac{1}{u-1}\right)du$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln|u+3|-\ln|u-1|\right]=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+3}{u-1}\right|$$

- $\displaystyle\int\frac{-du}{(u-1)(u+3)}=\int\frac{dx}{x}+C$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+3}{u-1}\right|=\ln|x|+C\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\frac{y}{x}+3}{\frac{y}{x}-1}\right|=\ln|x|+C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y+3x}{y-x}\right|=\ln|x|+C$$: là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Dạng phương trình: $\boxed{y' + p(x).y = q(x) \quad (3)}$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3):

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right]}$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân sau:

(1) $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

(2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

(1) $y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$

- Ta có: $p(x) = -\frac{2}{x+1} \Rightarrow \int p(x)dx = -2\int \frac{dx}{x+1} = -2\ln|x+1|$

$$q(x) = (x+1)^3$$

- Nghiệm tổng quát của ptvp tuyến tính cấp 1 là:

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{2\ln|x+1|}.\left[C + \int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|}dx\right]$$

$$\ln\left(A^B\right) = B.(\ln A)$$

$$e^{\ln A} = A$$

$$\Rightarrow y = e^{2\ln|x+1|}.\left[C + \int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|} dx\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{\ln(x+1)^2}.\left[C + \int (x+1)^3 e^{\ln(x+1)^{-2}} dx\right]$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2.\left[C + \int (x+1)^3.(x+1)^{-2} dx\right]$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2.\left[C + \int (x+1) dx\right]$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2.\left[C + \frac{x^2}{2} + x\right]$$

(2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

- Ta có: $p(x) = 2x \Rightarrow \int p(x)dx = \int 2xdx = x^2$

$$q(x) = xe^{-x^2}$$

- Nghiệm tổng quát của ptvp tuyến tính cấp 1 là:

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{-x^2}.\left[C + \int xe^{-x^2}.e^{x^2}dx\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{-x^2}.\left[C + \int xdx\right] \Rightarrow y = e^{-x^2}.\left[C + \frac{x^2}{2}\right]$$

$$(2)\ y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$(3)\ y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, \quad y(2) = 1.$$

4. Phương trình Becnoulli

Dạng phương trình: $\boxed{y' + p(x).y = q(x).y^{\alpha} \;,\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (4)}$

Phương pháp giải:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \alpha = 1\end{array}\right.$: Phương trình (4) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

+ Nếu $\alpha \neq \{0;\ 1\}$: Chia 2 vế của phương trình (4) cho $y^{\alpha} \neq 0$

$$(4) \Rightarrow y'.y^{-\alpha} + p(x).y^{1-\alpha} = q(x) \qquad (*)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \quad \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}.y'$

$(*) \Rightarrow \dfrac{z'}{1-\alpha} + p(x).z = q(x)$: Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ: Giải phương trình vi phân sau:

$$(1)\quad y' - 2xy = 3x^3y^2$$

$$(2)\quad 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$$

(1) $y' - 2xy = 3x^3y^2$: Phương trình Becnoulli với α =2

- Trường hợp 1: $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ là nghiệm của phương trình (1)

- Trường hợp 2: Chia hai vế của phương trình (1) cho $y^2 \neq 0$, ta có:

$$(1) \Rightarrow y^{-2}y' - 2xy.y^{-2} = 3x^3$$

$$\Rightarrow y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 3x^3$$

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -1y^{-2}.y' \Rightarrow y^{-2}y' = -z'$

$$\Rightarrow -z' - 2xz = 3x^3$$

$\Rightarrow z' + 2xz = -3x^3$: Phương trình vptt cấp 1

$\Rightarrow z' + 2xz = -3x^3$: Phương trình vptt cấp 1

- Ta có: $p(x) = 2x \Rightarrow \int p(x)dx = \int 2xdx = x^2$

$$q(x) = -3x^3$$

- Nghiệm tổng quát của ptvp tuyến tính cấp 1 là:

$$z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$\Rightarrow z = e^{-x^2}.\left[C - \int 3x^3.e^{x^2}dx\right]$$

- Tính $I = \int 3x^3 e^{x^2} dx$

- Tính $I=\int 3x^3e^{x^2}dx$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$

$$\Rightarrow I=\int 3te^t\frac{dt}{2}=\frac{3}{2}\int te^t dt$$

Đặt $\begin{cases} u=t & \Rightarrow du=dt \\ dv=e^t dt & \Rightarrow v=e^t \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{2}\left[te^t-\int e^t dt\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[te^t-e^t\right]=\frac{3}{2}e^{x^2}\left[x^2-1\right]$$

$$\Rightarrow z=e^{-x^2}.\left[C-\int 3x^3.e^{x^2}dx\right]$$

$$=e^{-x^2}.\left[C-\frac{3}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)\right]$$

$$\Rightarrow y^{-1}=e^{-x^2}.\left[C-\frac{3}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)\right]$$

$\Rightarrow \frac{1}{y}=C.e^{-x^2}-\frac{3}{2}\left(x^2-1\right)$: là nghiệm của tổng quát của phương trình (1)

$$(2)\ 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow 2y' - \frac{x}{x^2-1}y = \frac{x}{y} \Leftrightarrow 2y' - \frac{x}{x^2-1}y = x.y^{-1}$$: Phương trình Becnoulli với α =-1

- Chia hai vế của phương trình (2) cho $y^{-1} \neq 0$, ta có:

$$2yy' - \frac{x}{x^2-1}y^2 = x$$

Đặt $z = y^2 \Rightarrow z' = 2y.y'$

$$\Rightarrow z' - \frac{x}{x^2-1}z = x$$: Phương trình vptt cấp 1

$$\Rightarrow z' - \frac{x}{x^2-1} z = x$$: Phương trình vptt cấp 1

- Ta có: $p(x) = \frac{-x}{x^2-1} \Rightarrow \int p(x)dx = -\int \frac{x}{x^2-1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$

  $q(x) = x$ $\qquad = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$

- Nghiệm tổng quát của ptvp tuyến tính cấp 1 là:

$$z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|}.\left[C + \int xe^{-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|}dx\right]$$

$$\ln\left(A^B\right) = B.(\ln A)$$

$$e^{\ln A} = A$$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|}.\left[C + \int xe^{-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|}dx\right]$$

$$\Rightarrow z = e^{\ln\left|x^2-1\right|^{\frac{1}{2}}}.\left[C + \int xe^{\ln\left|x^2-1\right|^{-\frac{1}{2}}}dx\right]$$

$$\Rightarrow z = \left|x^2-1\right|^{\frac{1}{2}}.\left[C + \int x\left(\left|x^2-1\right|^{-\frac{1}{2}}\right)dx\right]$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{x^2-1}.\left[C + \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx\right]$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{x^2 - 1}.\left[C + \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx\right]$$

Tính: $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

Đặt $t = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow t^2 = x^2 - 1$

$$\Rightarrow 2tdt = 2xdx \Rightarrow xdx = tdt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{tdt}{t} = \int 1dt = t = \sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{x^2-1}.\left[C + \sqrt{x^2-1}\right]$$

$$\Rightarrow y^2 = \sqrt{x^2-1}.\left[C + \sqrt{x^2-1}\right]$$

: là nghiệm của tổng quát của phương trình (2)

5. Phương trình vi phân toàn phần

Dạng phương trình: $\boxed{P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \qquad (5)}$

Phương trình (5) được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu vế trái (5) là vi phân toàn phần của một hàm *u(x; y)* nào đó trong D nghĩa là:

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Điều kiện để phương trình (5) là ptvp toàn phần: $\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \left(P'_y = Q'_x\right)}$

- Chọn (x_0, y_0) sao cho $P(x_0, y_0)$ và $Q(x_0, y_0)$ có nghĩa.
- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân toàn phần:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C}$$

hoặc

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C}$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân sau:

$$(1)\,(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0\ ,\ y(0) = 0$$

$$(1)(x+y)dx+(x-y)dy=0\ ,\ y(0)=0$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y)=x+y & \Rightarrow P'_y=1 \\ Q(x,y)=x-y & \Rightarrow Q'_x=1 \end{cases}$

$\Rightarrow P'_y=Q'_x$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) là phương trình vi phân toàn phần

Chọn $(x_0,y_0)=(0,0)$, $P(x,y)\,\&\,Q(x,y)$ xác định tại (x_0,y_0)

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=C$$

$$\Rightarrow \int_0^x P(x,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y)\,dy = C$$

$$\Rightarrow \int_0^x x\,dx + \int_0^y (x-y)\,dy = C$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x + \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^y = C$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C$$: là nghiệm của tổng quát của phương trình (1)

- Ta có: $y(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

- Thay $x=0, y=0$ vào nghiệm tổng quát của phương trình, ta có:

$$\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=C \quad \Rightarrow C=0$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là: $\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=0$

$$(2)\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y)=1+e^{\frac{x}{y}} \\ Q(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow P_y^{'}=\left(\frac{x}{y}\right)_y^{'}.e^{\frac{x}{y}}=x\left(\frac{1}{y}\right)_y^{'}.e^{\frac{x}{y}}=\frac{-x}{y^2}.e^{\frac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow Q_x^{'}=\left(\frac{x}{y}\right)_x^{'}.e^{\frac{x}{y}}.\left(1-\frac{x}{y}\right)+e^{\frac{x}{y}}.\left(\frac{-1}{y}\right)=\frac{1}{y}.e^{\frac{x}{y}}.\left(1-\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y}.e^{\frac{x}{y}}=\frac{-x}{y^2}.e^{\frac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow P_y' = Q_x'$$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) là phương trình vi phân toàn phần

$$(2)\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y)=1+e^{\frac{x}{y}} \\ Q(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow P_y^{'} = Q_x^{'}$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) là phương trình vi phân toàn phần

Chọn $(x_0, y_0) = (0,1)$, $P(x,y) \& Q(x,y)$ xác định tại (x_0, y_0)

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{1}^{y} Q(0, y)\,dy = C$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{x} \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int_{1}^{y} e^{0}(1-0)\,dy = C$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int_1^y e^0 (1-0)\, dy = C$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int_1^y 1 dy = C$$

$$\Rightarrow \left(x + ye^{\frac{x}{y}}\right)_0^x + [y]_1^y = C$$

$$\Rightarrow x + ye^{\frac{x}{y}} - y + y - 1 = C$$

$\Rightarrow x + ye^{\frac{x}{y}} - 1 = C$: là nghiệm của tổng quát của phương trình (2)

Phương trình vi phân cấp 1

- Phương trình tách biến hoặc đưa được về pt tách biến
- Phương trình đẳng cấp
- Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1
- Phương trình Becnoulli
- Phương trình vi phân toàn phần

Bài tập: Giải các phương trình vi phân sau

(1) $y' = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

(2) $(x^2 + y)dx = xdy$

(3) $xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$

(4) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

(5) $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 xdy = 0$

BÀI 2:
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

I. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng tổng quát:

$$F(x, y, y', y'') = 0: \begin{cases} x\text{: biến độc lập} \\ y = y(x)\text{:hàm phải tìm} \\ y' = \dfrac{dy}{dx}\text{: đạo hàm riêng cấp 1 của y theo biến x} \\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}\text{: đạo hàm riêng cấp 2 của y theo biến x} \end{cases}$$

Nếu phương trình trên rút ra $y'' = f(x, y, y')$ thì phương trình vi phân cấp 1 được gọi là dạng giải ra được đối với đạo hàm.

2. Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng

Dạng phương trình: $\boxed{y'' + p.y' + q.y = f(x) \qquad (1)}$ (p, q) là hằng số

Bước 1: Xét phương trình thuần nhất tương ứng $\boxed{y'' + p.y' + q.y = 0 \qquad (2)}$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + p.k + q = 0 \quad (3)$

- Nếu $\Delta > 0$: Phương trình (3) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1;\ k_2$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) : $\boxed{\bar{y} = C_1.e^{k_1 x} + C_2.e^{k_2 x}}$ $C_1;\ C_2 = const$

- Nếu $\Delta = 0$: Phương trình (3) có 1 nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) : $\boxed{\bar{y} = (C_1 + C_2.x)e^{kx}}$ $C_1;\ C_2 = const$

- Nếu $\Delta < 0$: Phương trình (3) có 2 nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) : $\boxed{\bar{y} = e^{\alpha x}[C_1.\cos(\beta x) + C_2.\sin(\beta x)]}$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$y'' + p.y' + q.y = f(x) \qquad (1)$$

Trường hợp 1: $\boxed{f(x) = e^{\gamma x}.P_n(x)}$ $,\alpha \in \mathbb{R},\ P_n(x)$: đa thức bậc n theo biến x

- Nếu γ *không là nghiệm* của pt đặc trưng (3) thì nghiệm riêng có dạng:

$$Y = e^{\gamma x}.Q_n(x)$$

- Nếu γ *là nghiệm đơn* của pt đặc trưng (3) thì nghiệm riêng có dạng:

$$Y = x.e^{\gamma x}.Q_n(x)$$

- Nếu γ *là nghiệm kép* của pt đặc trưng (3) thì nghiệm riêng có dạng:

$$Y = x^2.e^{\gamma x}.Q_n(x)$$

Trường hợp 2: $\boxed{f(x) = e^{\theta x}.[P_n(x).\cos(\varphi x) + Q_m(x).\sin(\varphi x)]}$ $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$P_n(x)$: đa thức bậc n theo biến x

$Q_m(x)$: đa thức bậc m theo biến x

Đặt $l = \max\{n, m\}$

- Nếu $\theta \pm i\varphi$ *<u>không là nghiệm</u>* của pt đặc trưng (3) thì nghiệm riêng có dạng:

$$\boxed{Y = e^{\theta x}.[H_l(x).\cos(\varphi x) + R_l(x).\sin(\varphi x)]}$$

- Nếu $\theta \pm i\varphi$ *<u>là nghiệm</u>* của pt đặc trưng (3) thì nghiệm riêng có dạng:

$$\boxed{Y = x.e^{\theta x}.[H_l(x).\cos(\varphi x) + R_l(x).\sin(\varphi x)]}$$

<u>Bước 3:</u> Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất $\boxed{y = \bar{y} + Y}$

Trong đó: $\bar{y}$: Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (bước 1)

Y : Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (bước 2)

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân sau

1. $y'' - 2y' + y = 2.e^{3x}$

1. $y'' - 2y' + y = 2.e^{3x}$

- Bước 1: Phương trình thuần nhất: $y'' - 2y' + y = 0$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0$

$\Leftrightarrow k = 1$ (kép)

=>Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$\overline{y} = (C_1 + C_2.x)e^{1x}$, C_1, C_2 là hằng số

- Bước 2: Xét $f(x) = 2e^{3x} = e^{3x}.2$

$\gamma = 3$

$P_0(x) = 2$

Vì $\gamma = 3$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên dạng nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = e^{\gamma x}.Q_0\left(x\right)$$

$$\Rightarrow Y = e^{3x}.A$$

$$\Rightarrow Y' = 3A.e^{3x}$$

$$\Rightarrow Y'' = 9A.e^{3x}$$

$$Q_0\left(x\right) = A$$

$$Q_1\left(x\right) = Ax + B$$

$$Q_2\left(x\right) = Ax^2 + Bx + C$$

$$Q_3\left(x\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Thay Y'', Y', Y vào phương trình (1), ta có:

$$Y'' - 2Y' + Y = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow e^{3x}\left(9A - 2.3A + A\right) = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow e^{3x}\left(9A-2.3A+A\right)=2e^{3x}$$

$$\Rightarrow 4A.e^{3x}=2e^{3x}$$

$$\Rightarrow 4A=2\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

=>Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là: $Y=\frac{1}{2}e^{3x}$

- Bước 3: Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y=\overline{y}+Y$$

$$=\left(C_1+C_2.x\right)e^{x}+\frac{1}{2}e^{3x}$$

<u>Ví dụ:</u> Giải các phương trình vi phân sau

2. $y'' - 3y' + 2y = 5.e^{x}$

- <u>Bước 1</u>: Phương trình thuần nhất:

Phương trình đặc trưng:

=>Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

- <u>Bước 2</u>: Xét

Vì $\gamma = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, nên dạng nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

3. $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2 \;; y(0) = 0 \;; y'(0) = 2$

- Bước 1: Phương trình thuần nhất $y'' - 4y' = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 4 \end{array}\right.$$

=>Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$\overline{y} = C_1.e^{0x} + C_2.e^{4x} \quad ; C_1, C_2 \text{ là hằng số}$$

- Bước 2: Xét $f(x) = 4x^2 + 3x + 2 = e^{0x}\left(4x^2 + 3x + 2\right)$

$\gamma = 0$

$P_2(x) = 4x^2 + 3x + 2$

Vì $\gamma = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, nên dạng nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = x.e^{\gamma x}.Q_2(x) = x.e^{0x}.\left(Ax^2 + Bx + C\right)$$

$$\Rightarrow Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$\Rightarrow Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\Rightarrow Y'' = 6Ax + 2B$$

Thay Y'', Y', Y vào phương trình (3), ta có:

$$Y'' - 4Y' = 4x^2 + 3x + 2$$

$$\Rightarrow 6Ax + 2B - 4\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 4x^2 + 3x + 2$$

$$\Rightarrow 6Ax+2B-4\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=4x^2+3x+2$$

$$\Rightarrow -12Ax^2+\left(6A-8B\right)x+\left(2B-4C\right)=4x^2+3x+2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12A=4 \\ 6A-8B=3 \\ 2B-4C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-1}{3} \\ B=\dfrac{-5}{8} \\ C=-\dfrac{13}{16} \end{cases}$$

=>Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là:

$$Y=\frac{-1}{3}x^3-\frac{5}{8}x^2-\frac{13}{16}x$$

- Bước 3: Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (3) là:

$$y = \bar{y} + Y = C_1.e^{0x} + C_2.e^{4x} + \left(\frac{-1}{3}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{13}{16}x\right)$$

$$= C_1 + C_2.e^{4x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{13}{16}x$$

$$\Rightarrow y' = 4C_2.e^{4x} - x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{13}{16}$$

Ta có $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 4C_2 - \dfrac{13}{16} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{-45}{64} \\ C_2 = \dfrac{45}{64} \end{cases}$

- Vậy nghiệm riêng của phương trình (3) là:

$$y = \frac{-45}{64} + \frac{45}{64}.e^{4x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{13}{16}x$$

4. $y'' + 5y' + 6y = \cos 3x$

- <u>Bước 1</u>: Phương trình thuần nhất $y'' + 5y' + 6y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 5k + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -2 \\ k = -3 \end{array}\right.$$

=> Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$\boxed{\overline{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}}$ $, C_1, C_2$ là hằng số

- <u>Bước 2</u>: Xét $f(x) = \cos(3x) = e^{0x}\left[1.\cos(3x) + 0.\sin(3x)\right]$

$$\theta \pm i\varphi = 0 \pm 3i$$

Vì $\theta \pm i\varphi = 0 \pm 3i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = e^{0x}\left[A.\cos(3x) + B.\sin(3x)\right]$$

$$\Rightarrow Y = A.\cos(3x) + B\sin(3x) \quad \times 6$$

$$\Rightarrow Y' = -3A.\sin(3x) + 3B\cos(3x) \quad \times 5$$

$$\Rightarrow Y'' = -9A.\cos(3x) - 9B\sin(3x) \quad \times 1$$

Thay Y'', Y', Y vào phương trình (4), ta có:

$$Y'' + 5Y' + 6Y = \cos(3x)$$

$$\Rightarrow (6A + 15B - 9A)\cos(3x) + (6B - 15A - 9B)\sin(3x) = \cos(3x)$$

$$\Rightarrow (6A+15B-9A)\cos(3x) + (6B-15A-9B)\sin(3x) = \cos(3x)$$

$$\Rightarrow (-3A+15B)\cos(3x)+(-15A-3B)\sin(3x)=\cos(3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A+15B=1 \\ -15A-3B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-1}{78} \\ B=\dfrac{5}{78} \end{cases}$$

=>Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là:

$$Y=\frac{-1}{78}\cos(3x)+\frac{5}{78}\sin(3x)$$

- Bước 3: Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (4) là:

$$y=\overline{y}+Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\frac{-1}{78}\cos(3x)+\frac{5}{78}\sin(3x)$$

5. $y'' + 2y' + 2y = e^{x}.\sin x$

- Bước 1: Phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + 2y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 2 = 0$

$\Leftrightarrow k = -1 \pm i$ (nghiệm phức)

=>Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$\overline{y} = e^{-1x}\left(C_1.\cos x + C_2.\sin x\right)$,C_1, C_2 là hằng số

- Bước 2: Xét $f\left(x\right) = e^{x}.\sin x = e^{1x}\left(0.\cos x + 1.\sin x\right)$

$\theta \pm i\varphi = 1 \pm 1i$

Vì $\theta \pm i\varphi = 1 \pm 1i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

$$Y = e^x\left(A.\cos x + B.\sin x\right) \quad \times 2$$

$$\Rightarrow Y' = e^x\left(A.\cos x + B.\sin x\right) + e^x\left(-A.\sin x + B.\cos x\right) \quad \times 2$$

$$\Rightarrow Y'' = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) + 2e^x\left(-A\sin x + B\cos x\right) + e^x\left(-A\cos x - B\sin x\right) \quad \times 1$$

Thay Y'', Y', Y vào phương trình (5), ta có:

$$Y'' + 2Y' + 2Y = e^x.\sin x$$

$$\Rightarrow \left(2A + 2A + 2B + 1A + 2B - 1A\right)\cos x + \left(2B + 2B - 2A + B - 2A - B\right)\sin x$$

$$= \sin x$$

$$\Rightarrow \left(2A+2A+2B+1A+2B-1\mathrm{A}\right)\cos x+\left(2B+2B-2\mathrm{A}+\mathrm{B}\text{-}2\mathrm{A}-B\right)\sin x$$

$$= \sin x$$

$$\Rightarrow \left(4A+4B\right)\cos x+\left(-4\mathrm{A}+4\mathrm{B}\right)\sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\mathrm{A}+4B=0 \\ -4\mathrm{A}+4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-1}{8} \\ B=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

=>Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là:

$$Y = e^{x}\left(\frac{-1}{8}.\cos x+\frac{1}{8}.\sin x\right)$$

- Bước 3: Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5) là:

$$y=\overline{y}+Y \;=e^{-1x}\left(C_1.\cos x+C_2.\sin x\right)+e^{x}\left(\frac{-1}{8}.\cos x+\frac{1}{8}.\sin x\right)$$

<u>Ví dụ:</u> Giải các phương trình vi phân sau

6. $y'' + 4y' + 4y = 3.e^{-2x} \quad , y'(2) = y(2) = 0$

- <u>Bước 1</u>: Phương trình thuần nhất

  Phương trình đặc trưng

=> Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

- <u>Bước 2</u>: Xét

Vì $\gamma = -2$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, nên dạng nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng:

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân sau

7. $y'' + 9y = \cos(3x) + 2e^{x}$

- Bước 1: Phương trình thuần nhất

  Phương trình đặc trưng

=> Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

- Bước 2: Xét