Chương 5. Giá trị riêng - Vectơ riêng - Chéo hóa ma trận

Nguyễn Minh Trí

Ngày 24 tháng 12 năm 2022

Định nghĩa 5.1.1

Số $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là **giá trị riêng** của $A \in M_n(\mathbb{R})$

Định nghĩa 5.1.1

Số $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là **giá trị riêng** của $A \in M_n(\mathbb{R})$ nếu tồn tại ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$ thuộc $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ sao cho

$$AX = \lambda X \tag{1}$$

Định nghĩa 5.1.1

Số $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là **giá trị riêng** của $A \in M_n(\mathbb{R})$ nếu tồn tại ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$ thuộc $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ sao cho

$$AX = \lambda X \tag{1}$$

Mỗi ma trận cột khác không X thỏa mãn (1) được gọi là **vectơ riêng** của ma trận A ứng với giá trị riêng λ.

Từ (1) ta có

$$[A - \lambda I]\, X = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) ta có

$$[A - \lambda I]\, X = 0 \qquad (2)$$

Định lý 5.1.2

Số $\lambda \in \mathbb{R}$ là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$.

Từ (1) ta có

$$[A - \lambda I]\, X = 0 \qquad (2)$$

Định lý 5.1.2

Số $\lambda \in \mathbb{R}$ là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$.

Định nghĩa 5.1.3

Cho A là một ma trận vuông. Ta gọi $\det(A - \lambda I)$ là đa thức đặc trưng của A và kí hiệu là $P_A(\lambda)$.

Từ (1) ta có

$$[A - \lambda I]\, X = 0 \qquad (2)$$

Định lý 5.1.2

Số $\lambda \in \mathbb{R}$ là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$.

Định nghĩa 5.1.3

Cho A là một ma trận vuông. Ta gọi $\det(A - \lambda I)$ là đa thức đặc trưng của A và kí hiệu là $P_A(\lambda)$.

Định nghĩa 5.1.4

Cho λ là một giá trị riêng của ma trận vuông A cấp n.

Từ (1) ta có

$$[A - \lambda I]\, X = 0 \qquad (2)$$

Định lý 5.1.2

Số $\lambda \in \mathbb{R}$ là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$.

Định nghĩa 5.1.3

Cho A là một ma trận vuông. Ta gọi $\det(A - \lambda I)$ là đa thức đặc trưng của A và kí hiệu là $P_A(\lambda)$.

Định nghĩa 5.1.4

Cho λ là một giá trị riêng của ma trận vuông A cấp n. Tập

$$V(\lambda) = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$$

được gọi là **không gian con riêng** của ma trận A ứng với giá trị riêng λ.

Mệnh đề 5.1.5

Tập $V(\lambda)$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Mệnh đề 5.1.5

Tập $V(\lambda)$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 5.1.6 Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A trên tập số thực $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Mệnh đề 5.1.7

Cho A là một ma trận vuông cấp n.

1. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi các giá trị riêng của A đều khác 0.

Mệnh đề 5.1.7

Cho A là một ma trận vuông cấp n.

1. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi các giá trị riêng của A đều khác 0.
2. Nếu λ là một giá trị riêng của A thì λ^m là một giá trị riêng của A^m với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Mệnh đề 5.1.7

Cho A là một ma trận vuông cấp n.

1. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi các giá trị riêng của A đều khác 0.
2. Nếu λ là một giá trị riêng của A thì λ^m là một giá trị riêng của A^m với mọi $m \in \mathbb{N}$.
3. Nếu λ là một giá trị riêng của A và $\det A \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\lambda}$ là một giá trị riêng của A^{-1}.

Mệnh đề 5.1.7

Cho A là một ma trận vuông cấp n.

1. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi các giá trị riêng của A đều khác 0.
2. Nếu λ là một giá trị riêng của A thì λ^m là một giá trị riêng của A^m với mọi $m \in \mathbb{N}$.
3. Nếu λ là một giá trị riêng của A và $\det A \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\lambda}$ là một giá trị riêng của A^{-1}.
4. Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A cấp n thì $\det A = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

Định lý 5.1.8 (Định lý Cayley Hamilton)

Cho $P_A(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của một ma trận vuông A. Khi đó $P_A(A) = 0$ (ma trận không).

Định lý 5.1.8 (Định lý Cayley Hamilton)

Cho $P_A(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của một ma trận vuông A. Khi đó $P_A(A) = 0$ (ma trận không).

Ví dụ 5.1.9

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ có đa thức đặc trưng là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Khi đó

$$P_A(A) = A^2 - 7A + 6I = 0.$$

5.2 Chéo hóa ma trận

Định nghĩa 5.2.1

Cho A, B là các ma trận vuông. Ta nói A **đồng dạng** với B nếu tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ = B$ (hay $A = QBQ^{-1}$).

Định nghĩa 5.2.1

Cho A, B là các ma trận vuông. Ta nói A **đồng dạng** với B nếu tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ = B$ (hay $A = QBQ^{-1}$).

Định lý 5.2.2

Nếu A, B là các ma trận đồng dạng thì chúng có các giá trị riêng giống nhau.

Định nghĩa 5.2.1

Cho A, B là các ma trận vuông. Ta nói A **đồng dạng** với B nếu tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ = B$ (hay $A = QBQ^{-1}$).

Định lý 5.2.2

Nếu A, B là các ma trận đồng dạng thì chúng có các giá trị riêng giống nhau.

Định nghĩa 5.2.3

Một ma trận vuông A gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ = D$ là một ma trận chéo.

Định lý 5.2.4

Một ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Định lý 5.2.4

Một ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại một ma trận khả nghịch Q có các cột là các vectơ riêng của ma trận A sao cho $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng của A.

Định lý 5.2.4

Một ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại một ma trận khả nghịch Q có các cột là các vectơ riêng của ma trận A sao cho $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng của A.

Ví dụ 5.2.5 Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix}$

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Mệnh đề 5.2.6

Nếu ma trận vuông A cấp n có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Mệnh đề 5.2.6

Nếu ma trận vuông A cấp n có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Định lý 5.2.7

Cho A là một ma trận vuông cấp n có các giá trị riêng phân biệt là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Nếu $\dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \ldots + \dim V(\lambda_k) = n$ thì A chéo hóa được.

Bổ đề 5.2.8

Cho D là một ma trận chéo cấp n có các phần tử trên đường chéo là $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Khi đó D^m là một ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo là $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Bổ đề 5.2.8

Cho D là một ma trận chéo cấp n có các phần tử trên đường chéo là $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Khi đó D^m là một ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo là $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5.2.9 Cho $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Bổ đề 5.2.8

Cho D là một ma trận chéo cấp n có các phần tử trên đường chéo là $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Khi đó D^m là một ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo là $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5.2.9 Cho $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Khi đó $D^m = \begin{bmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^m \end{bmatrix}$ với mọi số tự nhiên m.

Bổ đề 5.2.8

Cho D là một ma trận chéo cấp n có các phần tử trên đường chéo là $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Khi đó D^m là một ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo là $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5.2.9 Cho $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Khi đó $D^m = \begin{bmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^m \end{bmatrix}$ với mọi số tự nhiên m.

Định lý 5.2.10

Cho A là một ma trận vuông và Q là ma trận thỏa mãn $Q^{-1}AQ = D$ là ma trận chéo. Khi đó $A^m = QD^mQ^{-1}$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5.2.11 Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n với $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5.2.11 Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n với $n \in \mathbb{N}$.

Giải. Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Ví dụ 5.2.11 Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n với $n \in \mathbb{N}$.

Giải. Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 2$.

Ví dụ 5.2.11 Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n với $n \in \mathbb{N}$.

Giải. Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 2$.
Với $\lambda_1 = -1$, giải phương trình $(A + I)X = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{cases}$

Ví dụ 5.2.11 Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n với $n \in \mathbb{N}$.

Giải. Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 2$.
Với $\lambda_1 = -1$, giải phương trình $(A + I)X = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{cases}$

Các vectơ riêng của A ứng với $\lambda_1 = -1$ là $\begin{bmatrix} -a \\ a \end{bmatrix}$ với $a \neq 0$.

Với $\lambda_2 = 2$, giải phương trình $[A - 2I]X = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Với $\lambda_2 = 2$, giải phương trình $[A - 2I]X = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} \\ x_2 = b \end{cases}$

Với $\lambda_2 = 2$, giải phương trình $[A - 2I]X = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} \\ x_2 = b \end{cases}$

Các vectơ riêng của A ứng với $\lambda_2 = 2$ là $\begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ b \end{bmatrix}$ với $b \neq 0$.

Với $\lambda_2 = 2$, giải phương trình $[A - 2I]X = 0$

$$\left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} \\ x_2 = b \end{cases}$

Các vectơ riêng của A ứng với $\lambda_2 = 2$ là $\begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ b \end{bmatrix}$ với $b \neq 0$.

Chọn các vectơ riêng độc lập tuyến tính: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Với $\lambda_2 = 2$, giải phương trình $[A - 2I]X = 0$

$$\left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} \\ x_2 = b \end{cases}$

Các vectơ riêng của A ứng với $\lambda_2 = 2$ là $\begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ b \end{bmatrix}$ với $b \neq 0$.

Chọn các vectơ riêng độc lập tuyến tính: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Đặt $P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Suy ra

$$A^n = P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n P^{-1}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
A^n &= P\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^n P^{-1}\\
&= P\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix} P^{-1}\\
&= \begin{bmatrix}\dfrac{2(-1)^n+2^n}{3} & \dfrac{(-1)^{n+1}+2^n}{3}\\ \dfrac{2(-1)^{n+1}+2^{n+1}}{3} & \dfrac{(-1)^{n+2}+2^{n+1}}{3}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.3 Chéo hóa ma trận đối xứng

Định nghĩa 5.3.1

Một ma trận vuông A được gọi là trực giao nếu $A^{-1} = A^T$.

Ví dụ 5.3.2 Ma trận $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao.

Định nghĩa 5.3.1

Một ma trận vuông A được gọi là trực giao nếu $A^{-1} = A^T$.

Ví dụ 5.3.2 Ma trận $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao.

Định lý 5.3.3

Cho A là một ma trận vuông. Các điều sau là tương đương:

(i) A là ma trận trực giao.

(ii) A^T là ma trận trực giao.

(iii) Các vectơ cột của A là một hệ trực chuẩn.

(iv) Các vectơ hàng của A là một hệ trực chuẩn.

Định nghĩa 5.3.4

Ma trận vuông A gọi là chéo hóa trực giao được nếu tồn tại ma trận trực giao Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là ma trận chéo.

Định nghĩa 5.3.4

Ma trận vuông A gọi là chéo hóa trực giao được nếu tồn tại ma trận trực giao Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là ma trận chéo.

Định lý 5.3.5

Nếu A là một ma trận đối xứng thì tồn tại một ma trận trực giao Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo.

Định nghĩa 5.3.4

Ma trận vuông A gọi là chéo hóa trực giao được nếu tồn tại ma trận trực giao Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là ma trận chéo.

Định lý 5.3.5

Nếu A là một ma trận đối xứng thì tồn tại một ma trận trực giao Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo.

Quy trình chéo hóa trực giao một ma trận đối xứng A:

1. Tìm các giá trị riêng của A.
2. Với mỗi giá trị riêng λ, giải phương trình $(A - \lambda I)X = 0$ và tìm các nghiệm cơ bản.
3. Trực giao hóa tập gồm tất cả các nghiệm cơ bản.
4. Chuẩn hóa các vectơ ở Bước 3.
5. Ma trận trực giao Q có các cột là các vectơ của Bước 4.
6. Khi đó $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo.

Ví dụ 5.3.6

Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....