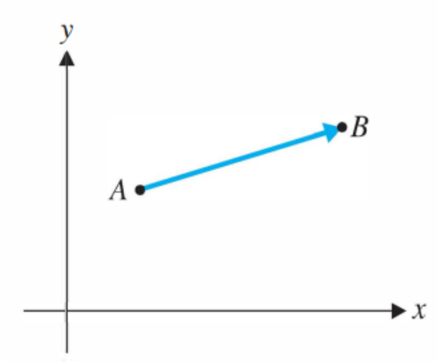
Chương 3. Không gian vectơ

3.1 Khái niệm về không gian vectơ

Nguyễn Minh Trí

Ngày 23 tháng 10 năm 2022

Trong hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy. Chọn O là giao của hai trục (trục x và trục y). Một vectơ là một *đoạn thẳng có hướng* nó tương ứng với một sự dịch chuyển từ điểm A đến điểm B.



Vectơ từ A đến B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$; điểm A được gọi là *điểm gốc* và điểm B được gọi là *điểm ngọn*. Một vectơ được kí hiệu đơn giản là v.

- Tập tất cả các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy tương ứng với tập tất cả các vectơ có điểm gốc tại O.
- Lấy điểm A, kí hiệu $a = \overrightarrow{OA}$ để chỉ vectơ có gốc tại O và ngọn tại A.
- Ta sẽ biểu diễn các vectơ tương ứng với các tọa độ của điểm ngọn. Ví dụ nếu $A = (1, 2)$ thì ta viết vectơ $a = \overrightarrow{OA} = (1, 2)$.
- Các số 1,2 trong dấu ( ) được gọi là các *thành phần* của vectơ a.
- Vectơ $\overrightarrow{OO} = (0, 0)$ được kí hiệu là θ.
- Vì mỗi vectơ trong mặt phẳng Oxy được đại diện bởi một bộ số gồm 2 thành phần nên tập tất cả các vectơ với 2 thành phần được kí hiệu là $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Kí hiệu $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Cho $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ là các vectơ trong $\mathbb{R}^2$ và một số $k \in \mathbb{R}$.

- Phép cộng hai vectơ được xác định như sau

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

- Phép nhân một số với một vectơ được xác định như sau

$$ka = (ka_1, ka_2).$$

Với hai phép toán vừa định nghĩa, ta có các tính chất sau: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ và $k, m \in \mathbb{R}$, ta có

1. $a + b \in \mathbb{R}^2$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + \theta = a = \theta + a$
4. Tồn tại vectơ $a' \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a + a' = \theta = a' + a$
5. $a + b = b + a$
6. $ka \in \mathbb{R}^2$
7. $k(a + b) = ka + kb$
8. $(k + m)a = ka + ma$
9. $(km)a = k(ma)$
10. $1a = a$

Định nghĩa 3.1.1 (Trường)

Cho $\mathbb{K}$ là một tập con của tập số phức $\mathbb{C}$. Ta nói $\mathbb{K}$ là một *trường* nếu nó thỏa các điều kiện sau:

(i) Với mọi $x, y \in \mathbb{K}$, ta có $x + y, xy \in \mathbb{K}$.

(ii) Với mọi $x \in \mathbb{K}$, ta có $-x \in \mathbb{K}$. Hơn nữa, nếu $x \neq 0$ thì $x^{-1} \in \mathbb{K}$.

(iii) Các số 0 và 1 đều thuộc $\mathbb{K}$.

Ví dụ 3.1.2

Ta thấy rằng các tập hợp $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ đều là các trường. Tuy nhiên, tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ không là trường vì điều kiện (ii) không thỏa.

Định nghĩa 3.1.3 (Không gian vectơ)

Cho một tập hợp $V \neq \emptyset$ và $\mathbb{K}$ là một trường. Trong V, ta định nghĩa phép cộng và phép nhân một phần tử của $\mathbb{K}$ với một phần tử của V (phép nhân với vô hướng): với mọi $a, b \in V$ và $k \in \mathbb{K}$, ta kí hiệu

$$a + b, ka$$

sao cho các điều sau đây được thỏa mãn:

Với mọi $a, b, c \in V$ và $k, m \in \mathbb{K}$, ta có

(1) $a + b \in V$

(2) $a + b = b + a$

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(4) Tồn tại phần tử $\theta \in V$ (gọi là vectơ không) sao cho $a + \theta = \theta + a = a$

(5) Với mỗi $a \in V$, tồn tại $-a \in V$ (gọi là vectơ đối của a) sao cho $a + (-a) = (-a) + a = \theta$

(6) $ka \in V$

(7) $k(a + b) = ka + kb$

(8) $(k + m)a = ka + ma$

(9) $(km)a = k(ma)$

(10) $1a = a$

Khi đó V được gọi là *một* $\mathbb{K}$*-không gian vectơ* hay *một không gian vectơ trên* $\mathbb{K}$. Các phần tử của V được gọi là *vectơ*, các phần tử của $\mathbb{K}$ được gọi là *vô hướng*.

Ví dụ 3.1.4 Cho $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ và

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

là tập hợp các bộ n-số của $\mathbb{R}$. Phép cộng và phép nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau: Với mọi
$a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ và $k \in \mathbb{R}$, ta đặt

$$a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$$ka = (ka_1, \ldots, ka_n).$$

Khi đó $\mathbb{R}^n$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Giải. Với mọi $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n), c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ và $k, m \in \mathbb{R}$, ta có các điều sau:

1. $a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$ vì $a_i + b_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$
2. $a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n) = b + a$
3. $(a + b) + c = \dots = a + (b + c)$
4. Vectơ không của $\mathbb{R}^n$ là $\theta = (0, \dots, 0)$,
5. Vectơ đối của a là $-a = (-a_1, \dots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$
6. $ka = (ka_1, \dots, ka_n) \in \mathbb{R}^n$ vì $ka_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$
7. $k(a + b) = k(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (ka_1 + kb_1, \dots, ka_n + kb_n) = (ka_1, \dots, ka_n) + (kb_1, \dots, kb_n) = ka + kb$,
8. $(k + m)a = ((k + m)a_1, \dots, (k + m)a_n) = (ka_1 + ma_1, \dots, ka_n + ma_n) = (ka_1, \dots, ka_n) + (ma_1, \dots, ma_n) = ka + ma$,
9. $(km)a = km(a_1, \dots, a_n) = ((km)a_1, \dots, (km)a_n) = (k(ma_1), \dots, k(ma_n)) = k(ma_1, \dots, ma_n) = k(ma)$,
10. $1a = (1a_1, \dots, 1a_n) = a$.

Vậy $\mathbb{R}^n$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Ví dụ 3.1.5 Cho $P_2[x] = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ là tập các đa thức biến x với hệ số thực có bậc không quá 2. Ta định nghĩa phép cộng là phép cộng đa thức; phép nhân với vô hướng là phép nhân một số thực với một đa thức như sau: Với

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2[x], k \in \mathbb{R}$$

đặt

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

và

$$kp(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2.$$

Ta thấy $P_2[x]$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Vectơ không là đa thức không, tức là $\theta = 0 + 0x + 0x^2$. Vectơ đối của $p(x) = a + bx + cx^2$ được kí hiệu là $-p(x) = -a - bx - cx^2 \in P_2[x]$.

Ví dụ 3.1.6 Cho $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập tất cả các ma trận cấp $m\times n$ hệ số thực. Trên $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta xét phép cộng là phép cộng hai ma trận; phép nhân với vô hướng là phép nhân một số thực với một ma trận. Khi đó $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Giải. Với mọi $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và mọi $k, m \in \mathbb{R}$, ta có:

1. Vì $A+B$ cũng là một ma trận cấp $m\times n$ nên $A+B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
2. $A+B = B+A$
3. $A+(B+C) = (A+B)+C$
4. Vectơ không là ma trận không 0 vì $A+0 = 0+A = A$;
5. Nếu $A = (a_{ij})$ thì $-A = (-a_{ij})$ thỏa $A+(-A) = 0$;
6. Ma trận kA là một ma trận cấp $m\times n$, do đó $kA \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
7. $k(A+B) = kA+kB$
8. $(k+m)A = kA+mA$
9. $(km)A = k(mA)$
10. $1A = A$

Vậy $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Ví dụ 3.1.7 Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và V là tập hợp các hàm số thực liên tục trên $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Phép cộng và phép nhân với vô hướng trên V được định nghĩa như sau: Với mọi $f, g \in V$ và $k \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(kf)(x) = kf(x).$$

Khi đó V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Ví dụ 3.1.8 Trên $\mathbb{R}^2$, ta định nghĩa hai phép cộng $\oplus$ và phép nhân với vô hướng $\otimes$ như sau: với mọi $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$, đặt

$$a \oplus b = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$$

và

$$k \otimes a = (ka_1, ka_2).$$

Khi đó $\mathbb{R}^2$ cùng hai phép toán bên trên không là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.
Giải. Giả vectơ không là $\theta = (x_1, x_2)$. Khi đó với mọi $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có

....

....

....

....

....

....

....

Mệnh đề 3.1.10

Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Khi đó

(1) Vectơ không θ là duy nhất.

(2) Vectơ đối của $x \in V$ là duy nhất.

(3) Với mọi $a, b, c \in V$, nếu $a + b = a + c$ thì $b = c$.

(4) $k\theta = \theta$ và $0a = \theta$ với mọi $k \in \mathbb{K}$ và $a \in V$.

(5) Nếu $kx = \theta$ thì $k = 0$ hoặc $x = \theta$.

(6) $(-1)a = -a$ với mọi $a \in V$.

3.2 Không gian vectơ con

Nguyễn Minh Trí

Ngày 23 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 3.2.1

Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và $X \subset V, X \neq \emptyset$. Ta nói X là *một không gian vectơ con* của V nếu X cùng với hai phép toán trên V cũng là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ.

Định lý 3.2.2

Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và $\emptyset \neq X \subseteq V$. Các điều sau đây là tương đương:

(i) Tập X là một không gian vectơ con của V.

(ii) Với mọi $x, y \in X, k \in \mathbb{K}$, ta có $x + y \in X; kx \in X$.

(iii) Với mọi $x, y \in X, k, m \in \mathbb{K}$, ta có $kx + my \in X$.

Ví dụ 3.2.3

Tập $\{\theta\}$ và V là hai không gian vectơ con của V. Không gian vectơ con $\{\theta\}$ được gọi là *không gian vectơ không* và kí hiệu là 0.

Ví dụ 3.2.4 Tập $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.5 Tập $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 3x_2 = 1\}$ **không** là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $\mathbb{R}^2$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.6 Tập $U = \{f(x) \in P_2[x] \mid f(1) = 0\}$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$.
Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.7 Chứng minh rằng tập $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$.
Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.8 Chứng minh rằng tập $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3a \\ -b & 2b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định lý 3.2.9

Cho $\{V_i\}_{i\in I}(I \neq \emptyset)$ là một họ các không gian vectơ con của một không gian vectơ V. Khi đó $\bigcap_{i\in I} V_i$ là không gian vectơ con của V.

Chứng minh.

Đặt $U = \bigcap\limits_{i\in I} V_i$. Ta sẽ chứng minh U là không gian con của V.

Với mọi $i \in I$, ta có V_i là không gian con của V do đó $0 \in V_i$. Suy ra $0 \in U$ hay $U \neq \emptyset$.

Với mọi $x, y \in U$, ta chứng minh $ax + by \in U$ với mọi $a, b \in \mathbb{K}$. Vì $x, y \in V_i$ và V_i là một không gian vectơ con của V với mọi $i \in I$ nên $ax + by \in V_i$ với mọi $i \in I$. Như vậy $ax + by \in U$. $\square$

3.3 Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Nguyễn Minh Trí

Ngày 23 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 3.3.1

Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$. Vectơ $y \in V$ được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nếu tồn tại $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ sao cho

$$y = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n.$$

Khi đó, ta cũng nói y *biểu thị tuyến tính* được qua các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ví dụ 3.3.2

Hãy biểu diễn vectơ x thành tổ hợp tuyến tính của các vectơ u, v, w

$$x = (5, -5, 10), u = (3, 7, 8), v = (3, -3, 6), w = (1, 9, 4)$$

Giải. ....

Ví dụ 3.3.3

Tìm m sao cho vectơ x biểu thị tuyến tính được qua các vectơ u, v, w

$$x = (5, -5, m), u = (2, -2, 5), v = (4, 6, 10), w = (1, 9, 4)$$

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 3.3.4

Cho $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là một tập con của một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vectơ của S được gọi là *bao tuyến tính* của S và được kí hiệu là $\mathrm{Span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ hoặc $\mathrm{Span}(S)$

$$\mathrm{Span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n \mid k_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Mệnh đề 3.3.5

Bao tuyến tính của một tập các vectơ S là một không gian vectơ con của V. Hơn nữa, đây là không gian vectơ con nhỏ nhất của V chứa S.

Chú ý. Nếu $S = \emptyset$ thì $\mathrm{Span}(S) = \{\theta\}$.

Định nghĩa 3.3.6

Bao tuyến tính của một tập các vectơ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ được gọi là *không gian con sinh bởi các vectơ* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ví dụ 3.3.7 Cho $x = (1, 2, 3), y = (-1, 2, -4), z = (m, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$. Tìm m để $Span\{x, y, z\} = \mathbb{R}^3$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 3.3.8

Tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ trong không gian vectơ V được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu có $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = \theta.$$

Định nghĩa 3.3.9

Tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ trong không gian vectơ V được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = \theta$$

thì $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Ví dụ 3.3.10 Xét sự độc lập tuyến tính của các vectơ

a. $x = (2, -1, 3), y = (3, 2, 1), z = (4, 1, 2)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b. $f_1 = x^2 - 3x + 4, f_2 = -x^2 + 6x - 5, f_3 = 4x^2 + 5x - 1$ trong $P_2[x]$

c. $x = (2, -1, 3), y = (3, 2, 1), z = (4, 1, 2), t = (1, 1, 1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.3.11 Trong $M_2[\mathbb{R}]$, tìm m để các vectơ sau độc lập tuyến tính

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 4 & m \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Mệnh đề 3.3.12

1. Tập chứa vectơ không luôn phụ thuộc tuyến tính.
2. Tập gồm một vectơ $x \neq \theta$ luôn độc lập tuyến tính.
3. Một tập gồm hai vectơ $\{u, v\}$ trong $\mathbb{K}$-không gian vectơ V là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi hai vectơ đó tỉ lệ, tức là $u = kv$ với $k \in \mathbb{K}$.
4. Tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại.
5. Cho tập các vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ độc lập tuyến tính. Nếu ta thêm vào tập này một vectơ y không biểu thị tuyến tính được qua tập đó thì tập $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y\}$ cũng độc lập tuyến tính.

3.4 Tập sinh, cơ sở và chiều

Nguyễn Minh Trí

Ngày 23 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 3.4.1

Tập các vectơ $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ được gọi là một *tập sinh* của không gian vectơ V nếu mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính được qua tập B, tức là $V = \mathrm{Span}(B)$.

Ví dụ 3.4.2

Cho các vectơ $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó $\{e_1, e_2, e_3\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.3.4

Tìm m sao cho $\{x, y, z\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$, trong đó

$$x = (5, -5, m), y = (2, -2, 5), z = (4, 6, 10)$$

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4.4

Chứng minh rằng $S = \{x^2 + 2x + 1, x^2, x\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 3.4.5

Một *cơ sở* của một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V là một dãy các vectơ thỏa mãn:

(i) Các vectơ đó độc lập tuyến tính,

(ii) Các vectơ đó là một tập sinh của V.

Chú ý. Một dãy các vectơ tức là các vectơ này được sắp thứ tự. Nếu ta thay đổi thứ tự các vectơ trong một cơ sở thì ta được một cơ sở khác.

Ví dụ 3.4.6

Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, tập

$$B = \{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

là một cơ sở $\mathbb{R}^n$. Ta gọi đây là *cơ sở chính tắc* của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét 3.4.7

1. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\{(1,0),(0,1)\}$.
2. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
3. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Ví dụ 3.4.8 Chứng minh tập $B = \{x^2 - 2x + 1, x + 1, x^2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Nhận xét 3.4.9

- Tập $B = \{1, x, x^2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$ và nó được gọi là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.
- Tập $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $M_2[\mathbb{R}]$ và nó được gọi là cơ sở chính tắc của $M_2(\mathbb{R})$.

Ví dụ 3.4.10 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^4$, cho không gian vectơ con

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4, x_1 + x_3 = 2x_2 + 2x_4\}.$$

Tìm một cơ sở của V.
Giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định lý 3.4.11

Cho B là một cơ sở của một không gian vectơ V. Khi đó mọi vectơ $x \in V$ đều được biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua các vectơ của B.

Định nghĩa 3.4.12

Trong một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V, cho $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở và $x \in V$. Nếu

$$x = t_1e_1 + t_2e_2 + \cdots + t_ne_n$$

với $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$, thì $t_1, t_2, \ldots, t_n$ được gọi là *tọa độ* của vectơ x đối với cơ sở B.

Ta kí hiệu $[x]_B = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$ hay $(x)_B = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ để chỉ tọa độ của x đối với cơ sở B.

Ví dụ 3.3.13 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho
$B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ là một cơ sở.
a. Tìm tọa độ của vectơ $x = (1,2,3)$ đối với cơ sở B.
b. Tìm tọa độ của vectơ $x = (1,2,3)$ đối với cơ sở chính tắc.
c. Tìm $y \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ đối với cơ sở B là $(y)_B = (-2,1,2)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4.14 Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$, tìm tọa độ của $v = 1 + 2x + 3x^2$ đối với cơ sở B.

a. $B = \{1, x, x^2\}$.

b. $B = \{1 - x, x - x^2, -1 + x + x^2\}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định lý 3.4.15

Số vectơ trong hai cơ sở bất kì của một không gian vectơ V đều bằng nhau.

Định nghĩa 3.4.16

Số vectơ trong một cơ sở bất kì của $\mathbb{K}$-không gian vectơ V được gọi là *chiều* của V và kí hiệu là $\dim_{\mathbb{K}} V$ hay $\dim V$. Nếu V là một không gian vectơ chỉ chứa một vectơ không thì ta định nghĩa $\dim V = 0$.

Ví dụ 3.4.17

Vì tập $\{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ nên $\dim \mathbb{R}^n = n$.

1. $\dim \mathbb{R}^2 = 2; \dim \mathbb{R}^3 = 3; \dim \mathbb{R}^4 = 4$
2. $\dim P_2[x] = 3$
3. $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4; \dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \times n.$

Mệnh đề 3.4.18

Cho V là một không gian vectơ n chiều.

1. Mọi tập gồm n vectơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở.
2. Mọi tập sinh của V gồm n vectơ đều là cơ sở.
3. Mọi tập có nhiều hơn n vectơ đều phụ thuộc tuyến tính.
4. Mọi tập độc lập tuyến tính gồm k vectơ $(k < n)$ đều có thể bổ sung thêm $n - k$ vectơ để tạo thành một cơ sở của V.

3.5 Hạng của một hệ vectơ

Nguyễn Minh Trí

Ngày 23 tháng 10 năm 2022

Định nghĩa 3.5.1

Cho A là một ma trận cấp $m \times n$ hệ số thực.
(i) Không gian hàng của ma trận A là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi các hàng của A.
(ii) Không gian cột của ma trận A là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^m$ sinh bởi các cột của A.

Ví dụ 3.5.2

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, khi đó không gian hàng của ma trận A là $\mathrm{Span}\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ và không gian cột của A là $\mathrm{Span}\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$.

Định lý 3.5.3

Nếu B là một ma trận nhận được từ A qua một số phép biến đổi sơ cấp trên hàng thì không gian hàng của B bằng không gian hàng của A.

Tìm cơ sở của không gian hàng của một ma trận A :

1. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng ma trận bậc thang B.
2. Cơ sở của không gian hàng của A là các vectơ được tạo bởi các hàng khác không của B.

Ví dụ 3.5.4 Tìm cơ sở của không gian hàng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Giải. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{bmatrix}$$

Cơ sở của không gian hàng của A là

$$\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

Định nghĩa 3.5.5

Cho S là một tập con của một $\mathbb{K}$-không gian vectơ V. Một tập $B \subseteq S$ được gọi là một *tập con độc lập tuyến tính tối đại* của S nếu B là cơ sở của $\mathrm{Span}(S)$.

Chú ý. Một tập S có thể có nhiều tập con độc lập tuyến tính tối đại.

Định lý 3.5.6

Số vectơ trong các tập con độc lập tuyến tính tối đại của một tập vectơ luôn bằng nhau.

Định nghĩa 3.5.7

Số vectơ trong một tập con độc lập tuyến tính tối đại của một tập vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ được gọi là hạng của tập vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ và kí hiệu là $r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ hoặc $\mathrm{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$

Tìm cơ sở và chiều của $X = Span\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ trong một không gian vectơ V (hay tìm $r(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ hoặc tìm một tập con độc lập tuyến tính tối đại)

1. Chọn một cơ sở B của V (chọn cơ sở chính tắc).
2. Tìm tọa độ các vectơ a_i đối với cơ sở B.
3. Lấy các tọa độ vừa tìm được, xếp thành các hàng của một ma trận (đặt là A).
4. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng bậc thang T.
5. Suy ra $\dim X = r(A)$ (hay $r(a_1, a_2, \ldots, a_m) = r(A)$).
6. Các hàng khác không của ma trận T là các tọa độ của các vectơ trong cơ sở của X (hay các hàng của ma trận A tương ứng với các hàng khác 0 của ma trận T lập thành một tập con độc lập tuyến tính tối đại của $a_1, a_2, \ldots, a_m$).

Ví dụ 3.5.8

Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1 = (1,1,4,0); u_2 = (1,1,2,4); u_3 = (2,1,1,6); u_4 = (2,3,11,2).$$

a. Tìm $r(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
b. Tìm một tập con độc lập tuyến tính tối đại của $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
c. Tìm một cơ sở của $X = Span\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ và $\dim X$.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.5.9

Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$, tìm một cơ sở của

$$Span\{1 + 2x + 3x^2, 1 + x + x^2, 2x + 4x^2\}.$$

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3.6 Ma trận chuyển cơ sở

Nguyễn Minh Trí

Ngày 23 tháng 10 năm 2022

Cho $\mathbb{K}$-không gian vectơ V và hai cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Biểu thị tuyến tính các vectơ của tập C qua các vectơ của tập B, ta được

$$\begin{gathered} v_1 = t_{11}u_1 + t_{12}u_2 + \cdots + t_{1n}u_n \\ v_2 = t_{21}u_1 + t_{22}u_2 + \cdots + t_{2n}u_n \\ \ldots \\ v_n = t_{n1}u_1 + t_{n2}u_2 + \cdots + t_{nn}u_n \end{gathered}$$

Khi đó ma trận

$$T_{BC} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & \ldots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \ldots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là *ma trận chuyển* từ cơ sở B sang cơ sở C.

Chú ý. Ma trận T_{BC} có thể biểu diễn lại thông qua tọa độ vectơ như sau

$$T_{BC} = [[v_1]_B \ [v_2]_B \dots [v_n]_B].$$

Cột thứ i của ma trận T_{BC} là ma trận tọa độ của vectơ v_i đối với cơ sở B. Cho vectơ x có tọa độ đối với cơ sở B là $(x)_B$, tọa độ của x đối với cơ sở C là $(x)_C = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Khi đó $x = y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n$ và biểu diễn dưới dạng tọa độ đối với cơ sở B như sau

$$\begin{aligned} [x]_B &= y_1[v_1]_B + y_2[v_2]_B + \dots + y_n[v_n]_B \\ &= [[v_1]_B \ [v_2]_B \dots [v_n]_B] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= T_{BC}[x]_C \end{aligned}$$

với T_{BC} là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở C.

Ví dụ 3.6.1

Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ cho hai cơ sở

$$B = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\} \text{ và } C = \{v_1 = (2,1), v_2 = (3,4)\}.$$

Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở C.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.6.2

Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_2[x]$, cho hai cơ sở

$$B = \{u_1 = 1 + 2x + 3x^2, u_2 = x + 4x^2, u_3 = 1 + x\};$$

$$C = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}.$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang C.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định lý 3.6.3

Nếu T_{BC} là ma trận chuyển cơ sở từ B sang C thì ma trận chuyển cơ sở từ C sang B là T_{BC}^{-1}.