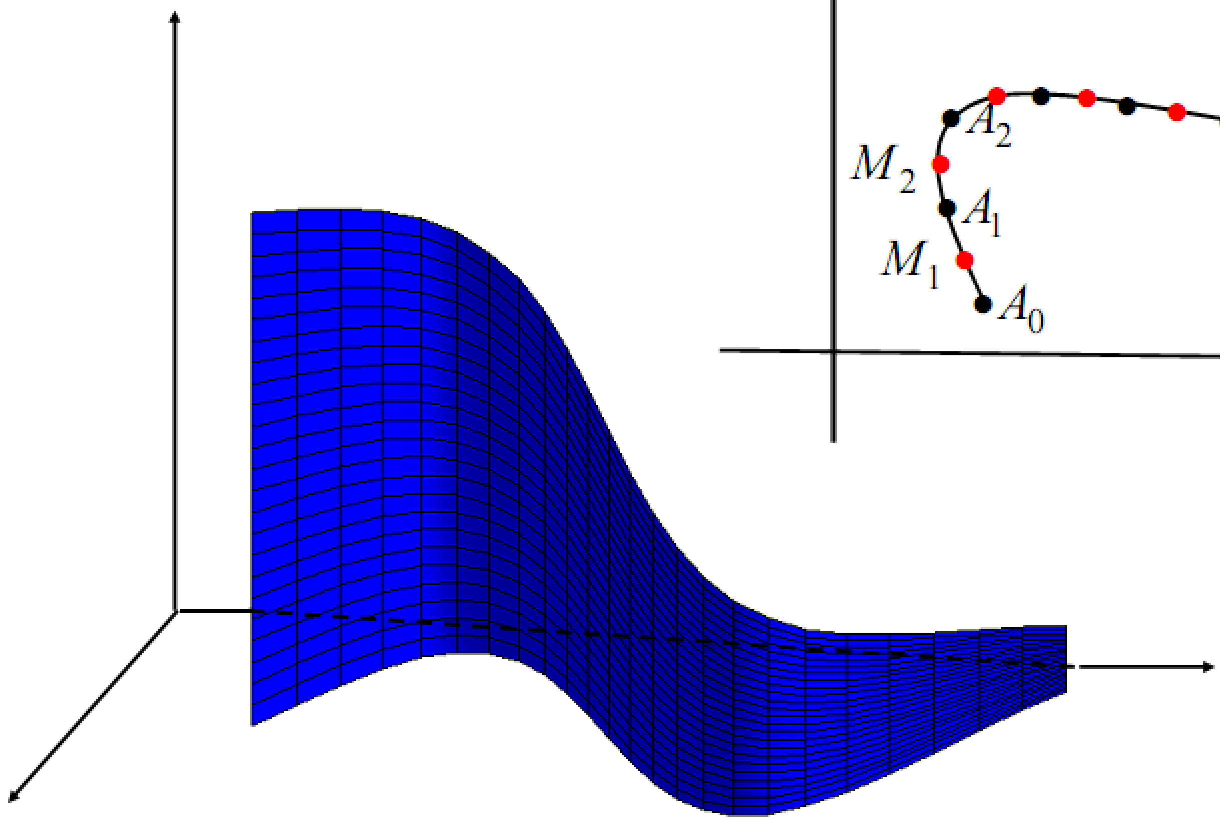
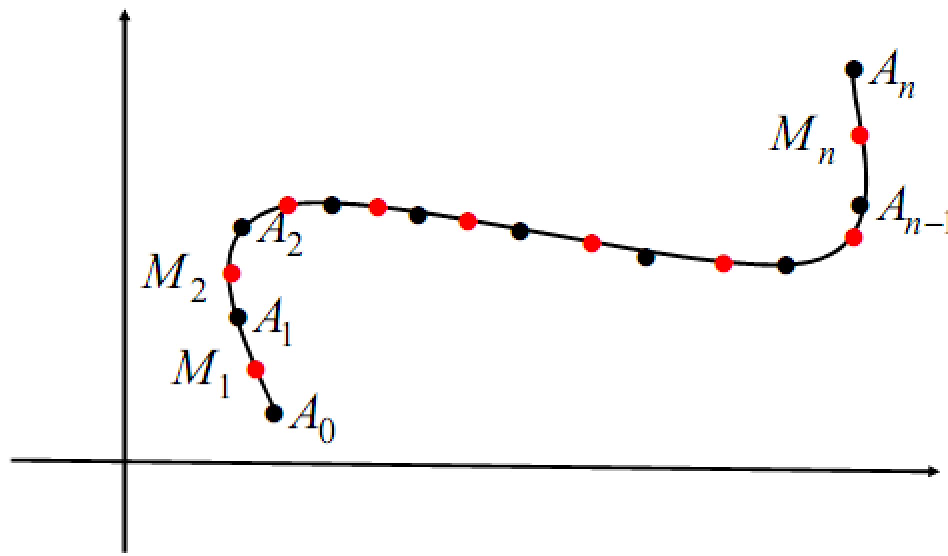
Chương 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.1. Định nghĩa





§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.1. Định nghĩa

$f = f(x, y)$ xác định trên đường cong C.

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm $A_0, A_1, ..., A_n$.

Độ dài tương ứng $L_1, L_2, ..., L_n$.

Trên mỗi cung A_iA_{i+1} lấy tuỳ ý một điểm $M_i(\overline{x_i}, \overline{y_i})$.

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot L_i$

$I = \lim_{n\to+\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia C, và cách lấy điểm M_i

$$I = \int_C f(x, y)dl$$

được gọi là tích phân đường loại một của $f=f(x,y)$ trên cung C.

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Tính chất của tích phân đường loại một

1) Hàm liên tục trên cung C, bị chặn, trơn từng khúc thì khả tích trên C.

2) $L(C) = \int_C 1dl$ 3) $\int_C \alpha \cdot fdl = \alpha \cdot \int_C fdl$ 4) $\int_C (f+g)dl = \int_C fdl + \int_C gdl$

5) Tích phân đường loại một không phụ thuộc chiều lấy tích phân trên C.

6) Nếu C được chia làm hai cung C_1 và C_2 không dẫm lên nhau:

$$\int_C fdl = \int_{C_1} fdl + \int_{C_2} fdl$$

7) $\forall (x,y) \in C, f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \int_C fdl \le \int_C gdl$

8) Định lý giá trị trung bình. Nếu f(x,y) liên tục trên cung trơn C có độ dài L. Khi đó tồn tại điểm M_0 thuộc cung C, sao cho

$$\int_C fdl = f(M_0) \cdot L$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.2. Phương pháp tính

a) Đường cong C có phương trình tham số

Cung C cho bởi phương trình tham số: x = x(t), y = y(t), $t_1 \le t \le t_2$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt}$$

b) Đường cong C trong Oxy có phương trình tổng quát

Cung C cho bởi phương trình: y = y(x), $a \le x \le b$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx}$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.2. Phương pháp tính

b) Đường cong C trong Oxy có phương trình tổng quát

Tương tự, Cung C cho bởi phương trình: x = x(y), $c \le y \le d$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_c^d f(x(y),y)\cdot\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy}$$

<u>Đặc biệt</u>

- Nếu C có phương trình $y=\alpha$ (hằng số) với $a \le x \le b$ thì:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x,\alpha)dx\,.$$

- Nếu C có phương trình $x=\alpha$ (hằng số) với $a \le y \le b$ thì:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(\alpha,y)dy\,.$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.2. Phương pháp tính

Tương tự , ta có định nghĩa tích phân đường trong không gian.

$f = f(x, y, z)$ xác định trên đường cong C trong không gian.

C cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t) \end{cases}$

$$I = \int_C f(x, y, z)\,dl$$

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)).\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2} \cdot dt}$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Ví dụ

Tính $I = \int_C x^3 dl$, trong đó C là cung parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$

$$I = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx = \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{58}{15}$$

Ví dụ

Tính $I = \int_C 2x dl$, trong đó $C = C_1 + C_2$, với C_1: $y = x^2$, từ (0,0) đến (1,1) và C_2 là đường thẳng từ (1,1) đến (1,2).

$$I = \int_C 2x dl = \int_{C_1} 2x dl + \int_{C_2} 2x dl = \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx + \int_1^2 2x(y) \cdot \sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2} \cdot dy$$

$$= \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} \cdot dx + \int_1^2 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1 + (0)^2} \cdot dy = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

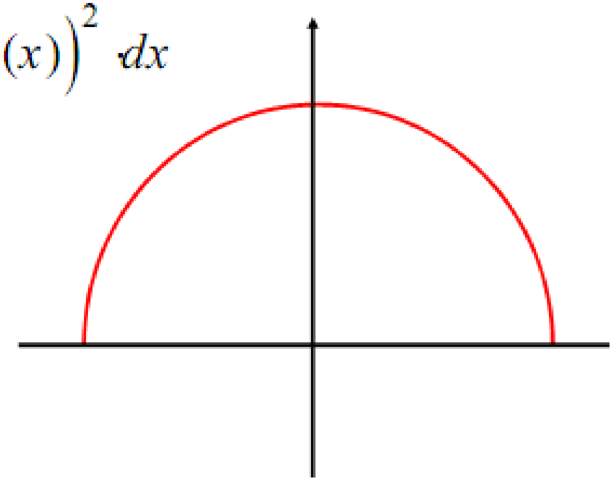
§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Ví dụ

Tính $I = \int_C (2 + x^2 y)dl$, với C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

Có thể dùng công thức $I = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx$

nhưng việc tính toán phức tạp.



Viết phương trình tham số cung C.

Đặt $x = r\cos t;\ y = r\sin t$

Vì $x^2 + y^2 = 1$, nên $r = 1$.

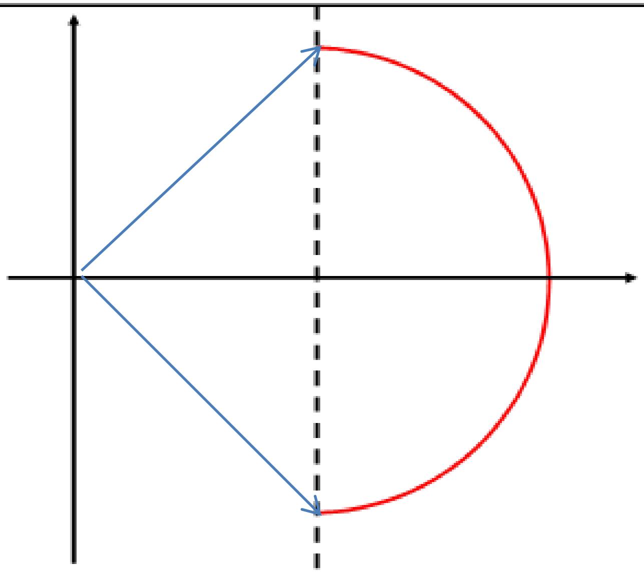
Phương trình tham số của nửa trên cung tròn: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases};\ 0 \le t \le \pi$

$$I = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \cdot \sin t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \cdot \sin t) dt = \frac{2}{3} + 2\pi$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Ví dụ

Tính $I = \int_C (x^2+y^2)dl$, với C là nửa đường tròn $x^2+y^2=2x;\ x\ge 1$.



Viết phương trình tham số cung C.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

Vì $x^2+y^2=2x$, nên $r = 2\cos t$

Phương trình tham số của C:

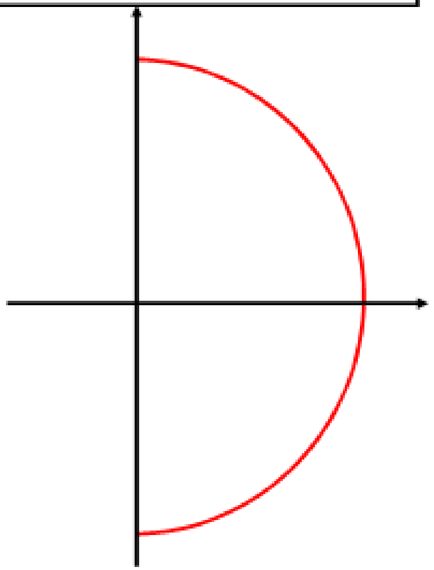
$$\begin{cases} x = 2\cos t\cdot\cos t = 1+\cos 2t \\ y = 2\cos t\cdot\sin t = \sin 2t \end{cases};\ -\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4}$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2+2\cos 2t)\sqrt{(-2\sin 2t)^2+(2\cos 2t)^2}\,dt$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Ví dụ

Tính $I = \int_C xy^4 dl$, với C là nửa bên phải đường tròn $x^2 + y^2 = 16;\ x \geq 0.$



Viết phương trình tham số cung C.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

Vì $x^2 + y^2 = 16$, nên $r = 4$

Phương trình tham số của C: $\begin{cases} x = 4 \cdot \cos t \\ y = 4 \cdot \sin t \end{cases}; \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos t \cdot 4^4 \sin^4 t\sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2}dt = 4^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \sin^4 t dt = \frac{2}{5} \cdot 4^6$$

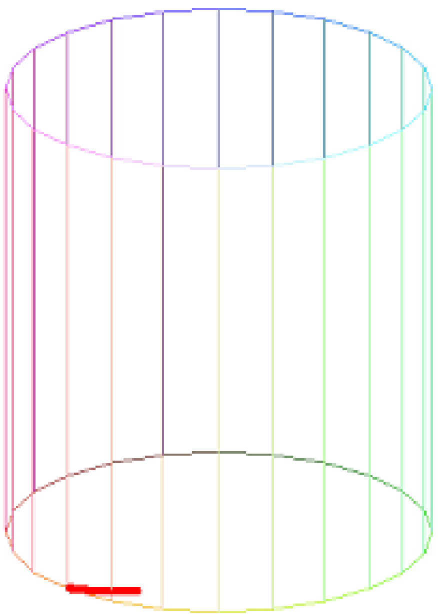
§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Ví dụ

Tính $I = \int_C (x+z)dl$, với C là đường $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = t,\ 0 \le t \le 4\pi.$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Khi t thay đổi từ thì cung C là đường cong nằm trên hình trụ.



$$I = \int_0^{4\pi} (3\cos t + t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt$$

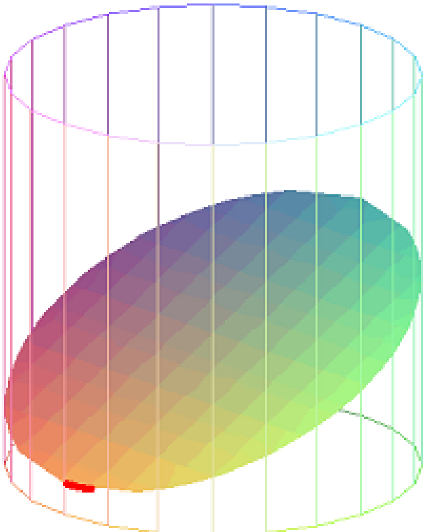
$$I = \int_0^{4\pi} (3\cos t + t)\sqrt{10}dt \ = 8\pi^2\sqrt{10}$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Ví dụ

Tính $I = \int_C 2x\,dl$, với C là giao của $x^2 + y^2 = 4$ và $x + z = 4$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = 4 - r\cos t \end{cases}$



Vì $x^2 + y^2 = 4, x + z = 4$, nên $r = 2$

Phương trình tham số của C:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 4 - 2\cos t \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} 4\cos t \cdot \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (2\sin t)^2}\,dt = 0$$

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.3. Ứng dụng

1) Độ dài cung C là $\int\limits_C dl$, với f(x, y) = 1 hoặc f(x, y, z) = 1.

2) Nếu dây vật dẫn có hình dạng C và hàm mật độ khối lượng $\rho(x,y)$ phụ thuộc vào điểm M(x, y) trên C thì khối lượng của dây vật dẫn là $m = \int\limits_C \rho(x,y)dl$.

Trọng tâm G của C là:

$$x_G = \frac{1}{m}\int\limits_C x\rho(x,y)dl\ ,\ \ y_G = \frac{1}{m}\int\limits_C y\rho(x,y)dl\ .$$

3) Nếu dây vật dẫn có hình dạng C và hàm mật độ khối lượng $\rho(x,y,z)$ phụ thuộc vào điểm M(x, y, z) trên C thì khối lượng của dây vật dẫn là $m = \int\limits_C \rho(x,y,z)dl$.

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.3. Ứng dụng

Trọng tâm G của C là:

$$x_G = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y,z)dl\ ,\ \ y_G = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y,z)dl\ ,$$

$$z_G = \frac{1}{m}\int_C z\rho(x,y,z)dl\ .$$

Ví dụ Tính độ dài cung tròn $x^2 + y^2 - 2x = 0$ nằm trong góc thứ nhất từ A(2; 0) đến $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ Cho một dây thép dạng nửa đường tròn trong mpOyz với phương trình $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. Biết mật độ khối lượng $\rho(x,y,z) = 2 - z$.

Tìm khối lượng và trọng tâm của dây thép.

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1. Định nghĩa

$P = P(x, y), Q = Q(x, y)$ xác định trên đường cong C.

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm

$$A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n).$$

Trên mỗi cung $A_k A_{k+1}$ lấy tuỳ ý một điểm $M_k(\overline{x_k}, \overline{y_k})$.

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) + Q(M_k) \cdot (y_k - y_{k-1}) \right)$

$I = \lim_{n \to +\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia C, và cách lấy điểm M_i

$$I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

được gọi là tích phân đường loại hai của P(x,y) và Q(x,y) trên cung C.

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1. Định nghĩa

Nhận xét

1) Tích phân đường loại 2 có tất cả các tính chất như tích phân xác định.

2) Tích phân đường loại 2 phụ thuộc vào chiều của C vì khi thay đổi chiều thì $(x_k - x_{k-1})$, $(y_k - y_{k-1})$ đổi dấu, do đó khi viết tích phân ta cần ghi rõ điểm đầu và cuối:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\ .$$

3) Từ định nghĩa tổng tích phân, ta có thể viết:

$$\int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{C} P(x,y)dx + \int_{C} Q(x,y)dy\ .$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.2. Phương pháp tính

a) Đường cong C có phương trình tham số

C: x = x(t), y = y(t), $t = a$ ứng với điểm đầu, $t = b$: điểm cuối cùng.

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t)dt + \int_a^b Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)dt}$$

b) Đường cong C trong Oxy có phương trình tổng quát

Các hàm P(x,y) và Q(x,y) liên tục trên tập mở D chứa cung trơn C.

1) C: y = y(x), $x = x_1$ là hoành độ điểm đầu, $x = x_2$: điểm cuối cung.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \Big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\cdot y'(x)\Big)dx$$

2) C: x = x(y), $y = y_1$ là tung độ điểm đầu, $y = y_2$: điểm cuối cung.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \Big(P(x(y),y)\cdot x'(y) + Q(x(y),y)\Big)dy$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

Tích phân đường loại hai trong không gian

Các hàm P(x,y,z), Q(x,y,z) và R(x,y,z) liên tục trên tập mở D chứa cung trơn AB.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k \right)$$

Cung AB có phương trình tham số: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t);\ t = a$ ứng với điểm đầu, $t = b$: điểm cuối cùng.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)dt + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t)dt + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)dt \right.$$

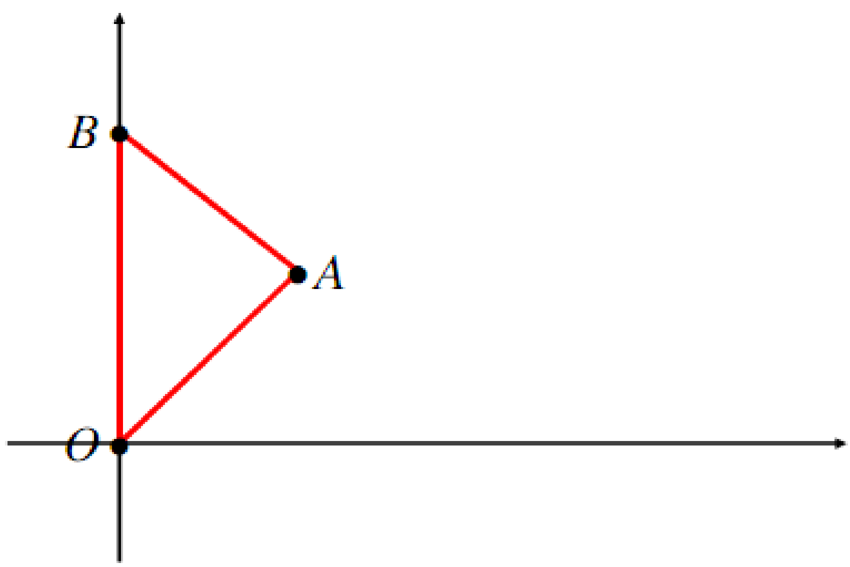
$$= \int_a^b \left(P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t) \right) dt$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

Ví dụ

Tính $I = \int_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác OAB, với O(0,0); A(1,1); B(0,2), ngược chiều kim đồng hồ.

$$I = \int_C = \int_{0A} + \int_{AB} + \int_{B0}$$



Phương trình OA: y = x

Hoành độ điểm đầu: x = 0

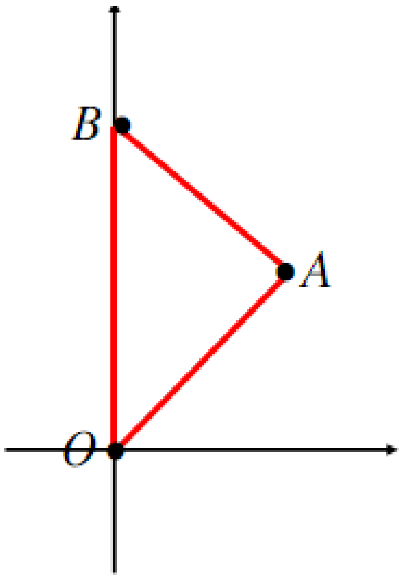
Hoành độ điểm cuối: x = 1

$$I_1 = \int_{0A} = \int_0^1 (x^2 + 3x)dx + 2 \cdot x \cdot 1dx$$

$$I_1 = \int_{0A} = \int_0^1 (x^2 + 5x)dx \quad = \frac{17}{6}$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

Phương trình AB: y = 2 – x



Hoành độ điểm đầu: x = 1

Hoành độ điểm cuối: x = 0

$$I_2 = \int_{AB} = \int_{1}^{0} (x^2 + 3(2-x))dx + 2\cdot(2-x)\cdot(-1)dx = -\frac{11}{6}$$

Phương trình BO: x = 0 Tung độ điểm đầu: y = 2

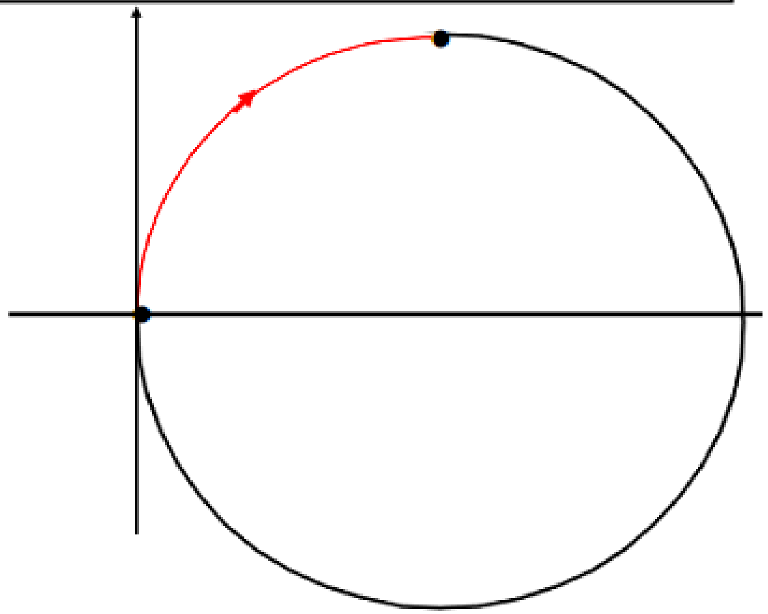
Tung độ điểm cuối: y = 0 $I_3 = \int_{BO} = \int_{2}^{0} (0^2 + 3y)0 + 2\cdot y\cdot dy = -4$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{17}{6} - \frac{11}{6} - 4 = -3$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

Ví dụ

Tính $I = \int_C ydx + xdy$, trong đó C là cung $x^2 + y^2 = 2x$ từ O(0,0) đến A(1,1) chiều kim đồng hồ.



Sử dụng tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r = 2\cos t$

Phương trình tham số cung C

$$\begin{cases} x = 2\cos t \cdot \cos t = 1 + \cos 2t \\ y = 2\cos t \cdot \sin t = \sin 2t \\ t_1 = \dfrac{\pi}{2}; t_2 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

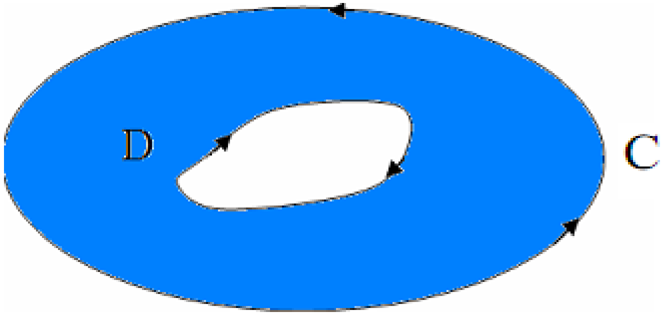
$$I = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin 2t \cdot (-2\sin 2t)dt + (1 + \cos 2t) \cdot (2\cos 2t)dt = \frac{-\pi}{2}$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Quy ước:

Cho miền D là miền liên thông, bị chặn, có biên C kín trơn từng khúc. Chiều dương của C là chiều mà khi di chuyển ta thấy miền D nằm về phía tay trái.



D – miền đa liên

Trong đa số trường hợp, chiều dương qui ước là ngược chiều kim đồng hồ. Trong trường hợp tổng quát điều này không đúng.

2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Công thức Green

D là miền đóng giới nội trong mặt phẳng xy với biên C trơn từng khúc.

P(x,y), Q(x,y) và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền mở chứa D.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Dấu + nếu chiều lấy tích phân trùng chiều dương qui ước

Điều kiện để sử dụng công thức Green:

1) C là cung kín.

2) P(x,y), Q(x,y) và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C.

2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Ứng dụng định lý Green để tính diện tích miền phẳng:

Trong công thức Green, lấy P(x,y) = -y, Q(x,y) = x, ta có:

$$\int_C xdy - ydx = 2\iint_D dxdy = 2S_D\ .$$

Vậy diện tích miền D biên C:

$$S_D = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx\ .$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

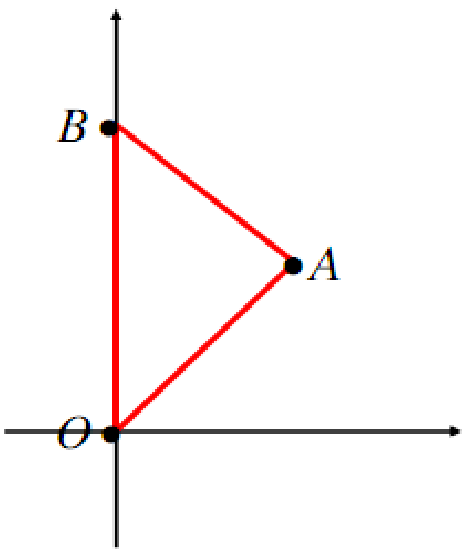
Ví dụ

Tính $I = \int\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác OAB, với O(0,0); A(1,1); B(0,2), ngược chiều kim đồng hồ.

Cung C kín

$P(x,y) = x^2 + 3y; Q(x,y) = 2y$

P(x,y), Q(x,y) và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C.



$$I = \int\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy = +\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= \iint\limits_D (0 - 3)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} (-3)dy \quad = -3$$

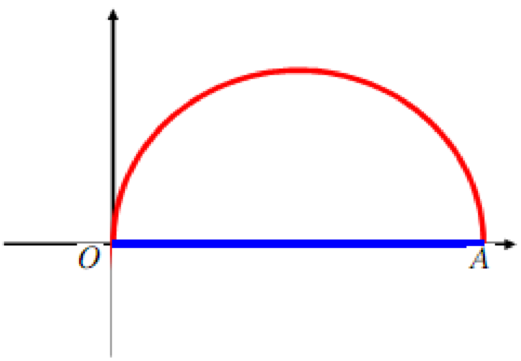
2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Ví dụ

Tính $I = \int\limits_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy,$ trong đó C nửa trên đường tròn

$x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.

Cung C không kín



$$I = \int\limits_C = \int\limits_{C \cup \overline{AO}} - \int\limits_{\overline{AO}} = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{C \cup \overline{AO}} = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= -\iint\limits_D \big(2(x+y) + 2(x-y) \big) dxdy = -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} 4r\cos\varphi \cdot r \cdot dr = -2\pi$$

$$I_2 = \int\limits_2^0 (x-0)^2 dx + (x+0)^2 0dx = -\frac{8}{3} \qquad I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Có thể giải bằng cách viết phương trình tham số cung C

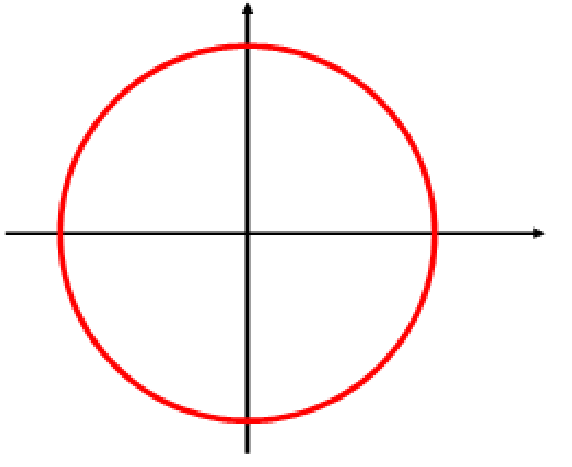
2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Ví dụ

Tính $I = \int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, trong đó C đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ ngược chiều kim đồng hồ.

Cung C kín, nhưng P, Q và các ĐHR cấp 1

không liên tục trên D, không sử dụng công thức Green được!!



Viết phương trình tham số cung C

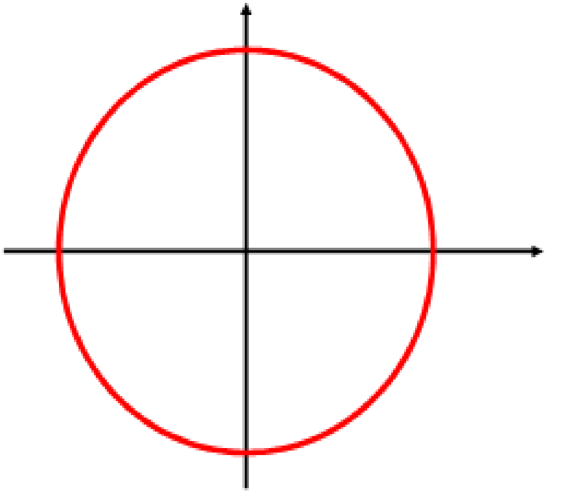
$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad t_1 = 0; t_2 = 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)dt - (2\cos t - 2\sin t)2\cos t dt}{4} = -2\pi$$

2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Tích phân trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, nên thay vào mẫu số ta có

$$I = \int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{4}$$



Có thể sử dụng công thức Green trong trường hợp này.

$$I = \frac{1}{4}\int_C (x+y)dx - (x-y)dy$$

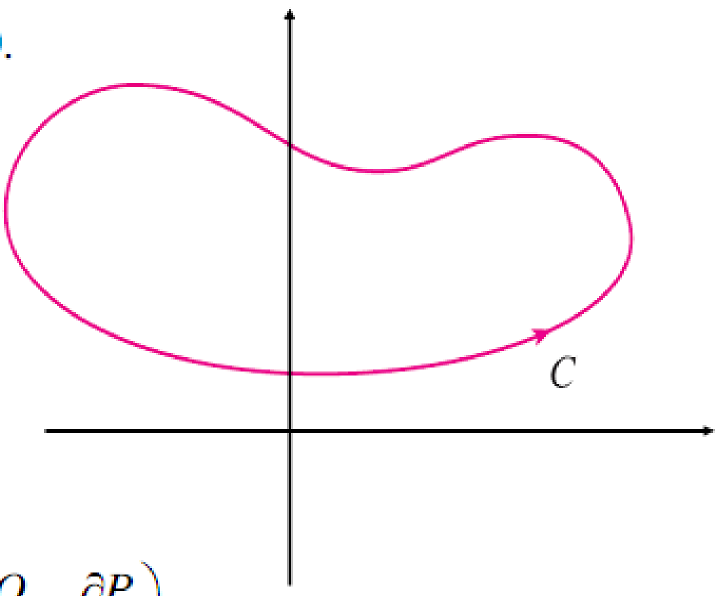
$$= \frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\le 4} (-1-1)dxdy \quad = -\frac{2}{4}\cdot S_D \quad = -2\pi$$

2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Ví dụ

Tính $I = \int\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, trong đó C đường cong kín tùy ý không chứa gốc 0, ngược chiều kim đồng hồ.

Trường hợp 1. C không bao quanh gốc 0.



Sử dụng công thức Green.

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

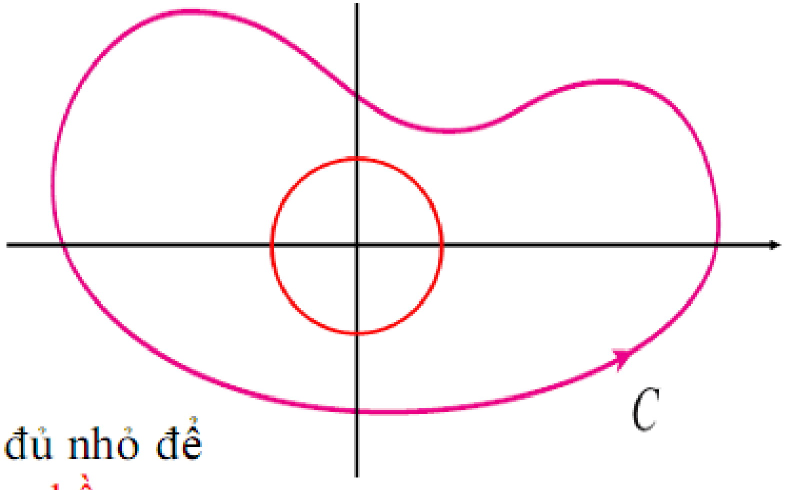
$$Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

2.3. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

Trường hợp 2. C bao quanh gốc 0.



Không sử dụng công thức Green được

vì P, Q và các ĐHR cấp 1 không liên tục trên miền D, có biên là C.

Kẻ thêm đường tròn C_1 có bán kính a đủ nhỏ để C_1 nằm lọt trong C, chọn chiều kim đồng hồ.

$$I = \int_C = \int_{C \cup C_1} - \int_{C_1} = I_1 - I_2 \qquad I_1 = \int_{C \cup C_1} \overset{Green}{=} + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Tính tích phân I_2 trên cung tròn $x^2 + y^2 = a^2$

Phương trình tham số của cung C_1: $x = a\cos t, y = a\sin t, t_1 = 2\pi, t_2 = 0$

$$I_2 = \int_{2\pi}^{0} \frac{a\cos t \cdot a\cos t \cdot dt + a\sin t \cdot a\sin t \cdot dt}{a^2} = -2\pi \qquad I = I_1 + I_2 = 2\pi$$

2.4. Điều kiện tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Định lý

Cho hàm P(x,y), Q(x,y) và các ĐHR cấp 1 của chúng liên tục trong miền mở đơn liên D chứa cung AB.

Các mệnh đề sau đây tương đương

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

2. Tích phân $I = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào hai mút A, B mà không phụ thuộc đường cong trơn từng khúc nối A với B nằm trong D.

3. Tồn tại hàm U(x,y) là vi phân toàn phần của Pdx + Qdy trong D.

$$dU(x,y) = Pdx + Qdy$$

4. Tích phân trên mọi chu tuyến kín C, trơn từng khúc trong D bằng 0.

$$I = \int\limits_{C} Pdx + Qdy = 0$$

2.4. Điều kiện tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Hệ quả

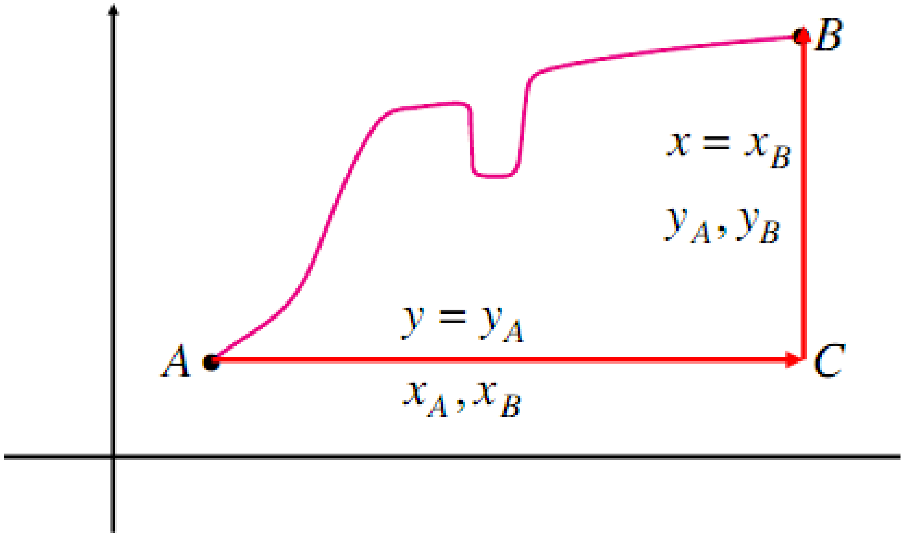
Nếu P(x, y)dx + Q(x, y)dy là vi phân toàn phần của hàm u(x, y) nào đó trong miền D, nghĩa là $P'_y = Q'_x,\ \forall (x,y) \in D$ thì:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A).$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.4. Điều kiện tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Tích phân không phụ thuộc đường đi ($\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$)



$$I = \int\limits_{AB} = \int\limits_{\overline{AC}} + \int\limits_{\overline{CB}} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{\overline{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx + Q(x,y_A)\cdot 0dx$$

$$I_2 = \int\limits_{\overline{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad = \int_{y_A}^{y_B} P(x_A,y)\cdot 0dy + Q(x_B,y)dy$$

$$\Rightarrow I = \int_{x_A}^{x_B} P(x,y_A)dx + \int_{y_A}^{y_B} Q(x_B,y)dy$$

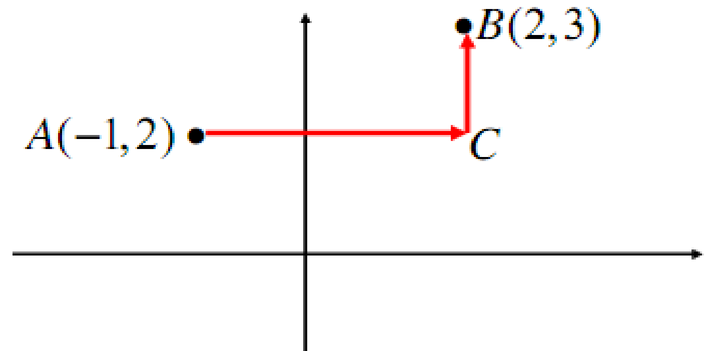
§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.4. Điều kiện tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Ví dụ

Tính $\quad I = \int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$ suy ra, tích phân không phụ thuộc đường đi.



Cách 1.

$$I = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} = \int\limits_{-1}^{2} 2dx + \int\limits_{2}^{3} 2dy = 8$$

Cách 2. Tồn tại hàm U(x,y) là vi phân toàn phần của Pdx + Qdy

$$\begin{cases} U'_x = P(x,y) \\ U'_y = Q(x,y) \end{cases}$$ tìm được hàm $U(x,y) = xy$

$$I = \int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy = U(x,y)\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = U(2,3) - U(-1,2) = 8$$

2.4. Điều kiện tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Ví dụ

Tính $I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$ suy ra, tích phân không phụ thuộc đường đi.

Tồn tại hàm U(x,y) là vi phân toàn phần của Pdx + Qdy

$$\begin{cases} U'_x = P(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (1) \\ U'_y = Q(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow U(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y)$$

$$U(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + g(y)$$

$$(2) \Rightarrow g'(y) = 0 \quad \Rightarrow g(y) = C$$

$$U(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$$

$$I = U(x,y)\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = U(6,8) - U(1,0) = 9$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.4. Điều kiện tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Ví dụ

$$I = \int_C (2ye^{xy} + e^{\alpha x}\cos y)dx + (2xe^{xy} - e^{\alpha x}\sin y)dy$$

a) Tìm hằng số α để tích phân I không phụ thuộc đường đi.

b) Với α ở câu a), tính I biết C là cung tùy ý nối A(0, π) và B(1,0).

a) Điều kiện cần để tích phân không phụ thuộc đường đi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{xy} + 2xye^{xy} - \alpha e^{\alpha x}\sin y = 2e^{xy} + 2xye^{xy} - e^{\alpha x}\sin y$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

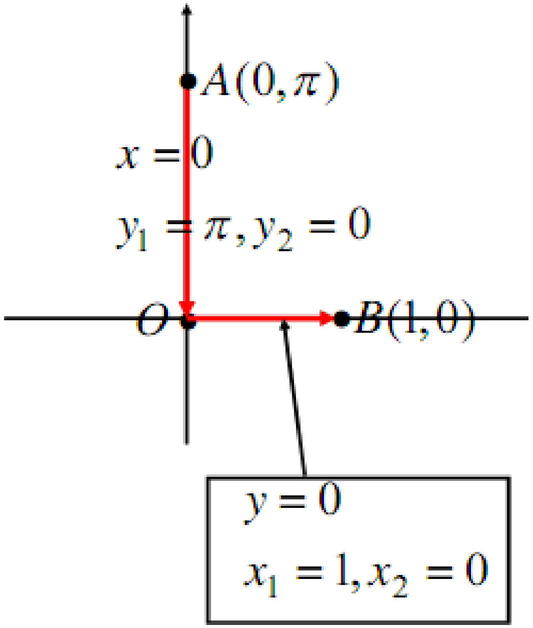
Đây cũng là điều kiện đủ vì với mọi cung C luôn tìm được miền đơn liên D chứa cung C sao cho P, Q và các ĐHR cấp 1 liên tục trên miền D.

2.4. Điều kiện tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Ví dụ

b) với $\alpha = 1$ ta có tích phân

$$I = \int_{(0,\pi)}^{(1,0)} (2ye^{xy} + e^x \cos y)dx + (2xe^{xy} - e^x \sin y)dy$$



Chú ý I không phụ thuộc đường đi.

$$I = \int_{AO} + \int_{OB}$$

$$I = \int_{\pi}^{0} -\sin y dy + \int_{0}^{1} e^x dx$$

$$I = e + 1$$