

# TÍCH PHÂN BỘI BA

Nội dung:

- Bài toán mở đầu
- Định nghĩa
- Tích chất
- Cách tính
- Ứng dụng

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.1. Bài toán mở đầu (khối lượng vật thể)

- Giả sử ta cần tính khối lượng của vật thể V không đồng chất, biết mật độ (khối lượng riêng) tại  $P(x, y, z)$  là  $\rho = \rho(P) = \rho(x, y, z)$ . Ta chia V tùy ý thành n phần không dẫm lên nhau, thể tích mỗi phần là  $\Delta V_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Trong mỗi  $\Delta V_i$  ta lấy điểm  $P_i(x_i, y_i, z_i)$

Khối lượng V xấp xỉ:

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Nếu tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$  thì đó là khối lượng m của vật thể V.

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.2. Định nghĩa

- Cho hàm số  $f(x, y, z)$  xác định trong miền đo được  $V$  của không gian Oxyz. Chia miền  $V$  một cách tùy ý thành  $n$  phần không dẫm lên nhau, thể tích mỗi phần là  $\Delta V_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Trong mỗi  $\Delta V_i$  ta lấy  $P_i(x_i; y_i; z_i)$  tùy ý và lập tổng tích phân

$$I_n := \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Nếu  $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia  $V$  và cách chọn điểm  $P_i$  thì số thực  $I$  được gọi là *tích phân bộ ba* của  $f(x, y, z)$  trên  $V$ .

Ký hiệu  $I = \iiint_V f(x, y, z) dV$ .

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

**Định lý.** Hàm  $f(x, y, z)$  liên tục trong miền bị chặn, đóng  $V$  thì khả tích trong  $V$ .

• Nếu tồn tại tích phân, ta nói  $f(x, y, z)$  khả tích;  $f(x, y, z)$  là hàm dưới dấu tích phân;  $x, y, z$  là các biến tích phân.

### Nhận xét

1) Nếu chia  $V$  bởi các đường thẳng song song với các trục tọa độ thì  $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$  hay  $dV = dx dy dz$ .

$$\text{Vậy } I = \iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz .$$

2) Nếu  $f(x, y, z) \geq 0$  trên  $V$  thì  $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  là

khối lượng vật thể  $V$ , với khối lượng riêng vật chất chiếm thể tích  $V$  là  $f(x, y, z)$ .

Nếu  $f(x, y, z) = 1$  thì  $I$  là thể tích  $V$ .

3) Tích phân bội ba có các tính chất như tích phân kép.

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3. Phương pháp tính tích phân bộ ba

#### 2.3.1. Đưa về tích phân lặp

a) Giả sử miền V có giới hạn trên bởi mặt  $z = z_2(x, y)$ , giới hạn dưới bởi  $z = z_1(x, y)$ , giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz. Gọi D là hình chiếu của V trên mpOxy.

Khi đó:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dxdydz &= \iint_D \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy \\ &= \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3. Phương pháp tính tích phân bộ ba

#### 2.3.1. Đưa về tích phân lặp

Minh họa:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz$$

Phân tích khối  $V$ : Chọn mặt chiếu là  $x0y$ .

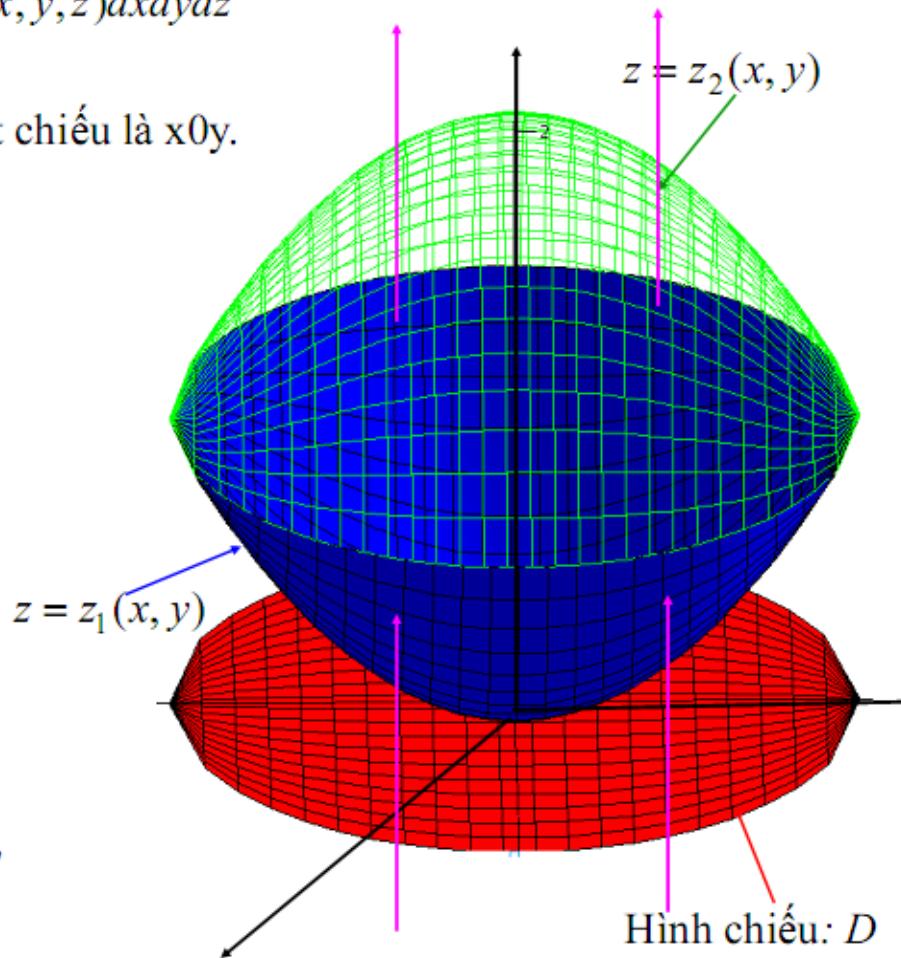
Mặt phía dưới:  $z = z_1(x, y)$

Mặt phía trên:  $z = z_2(x, y)$

Hình chiếu:  $\text{Pr}_{0xy} V = D$

$$I = \iiint_E f(x, y, z) dxdydz$$

$$= \iint_D \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dxdy$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3. Phương pháp tính tích phân bộ ba

#### 2.3.1. Đưa về tích phân lặp

- Nếu  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$  thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

- Nếu  $D = \{(x, y) : x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$  thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

b) Gọi D là hình chiếu của V trên mpOxz.

Giả sử miền V có giới hạn (theo chiều ngược với tia Oy) bởi hai mặt  $y = y_2(x, z)$  và mặt  $y = y_1(x, z)$ , giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song Oy.

Khi đó:

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3. Phương pháp tính tích phân bộ ba

#### 2.3.1. Đưa về tích phân lặp

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz \\ &= \iint_D dx dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \end{aligned} .$$

- Nếu  $D = \{(x, z) : a \leq x \leq b, z_1(x) \leq z \leq z_2(x)\}$  thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy .$$

- Nếu  $D = \{(x, z) : x_1(z) \leq x \leq x_2(z), e \leq z \leq f\}$  thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy .$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3. Phương pháp tính tích phân bộ ba

#### 2.3.1. Đưa về tích phân lặp

c) Gọi D là hình chiếu của V trên mpOyz.

Giả sử miền V có giới hạn (theo chiều ngược với tia Ox) bởi hai mặt  $x = x_2(y, z)$  và mặt  $x = x_1(y, z)$ , giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song Ox.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz \\ &= \iint_D dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx\end{aligned}.$$

• Nếu  $D = \{(y, z) : c \leq y \leq d, z_1(y) \leq z \leq z_2(y)\}$  thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx.$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3. Phương pháp tính tích phân bộ ba

#### 2.3.1. Đưa về tích phân lặp

- Nếu  $D = \{(y, z) : y_1(z) \leq y \leq y_2(z), e \leq z \leq f\}$   
thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx .$$

#### Đặc biệt

- Nếu  $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$   
 $= [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz .$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

Ví dụ 1: Cho miền  $\Omega$  giới hạn bởi các mặt:  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + 2z = 2$ .

Viết tích phân bộ 3  $I = \iiint f(x, y, z) dx dy dz$  theo các thứ tự :

a).  $dx dy dz$

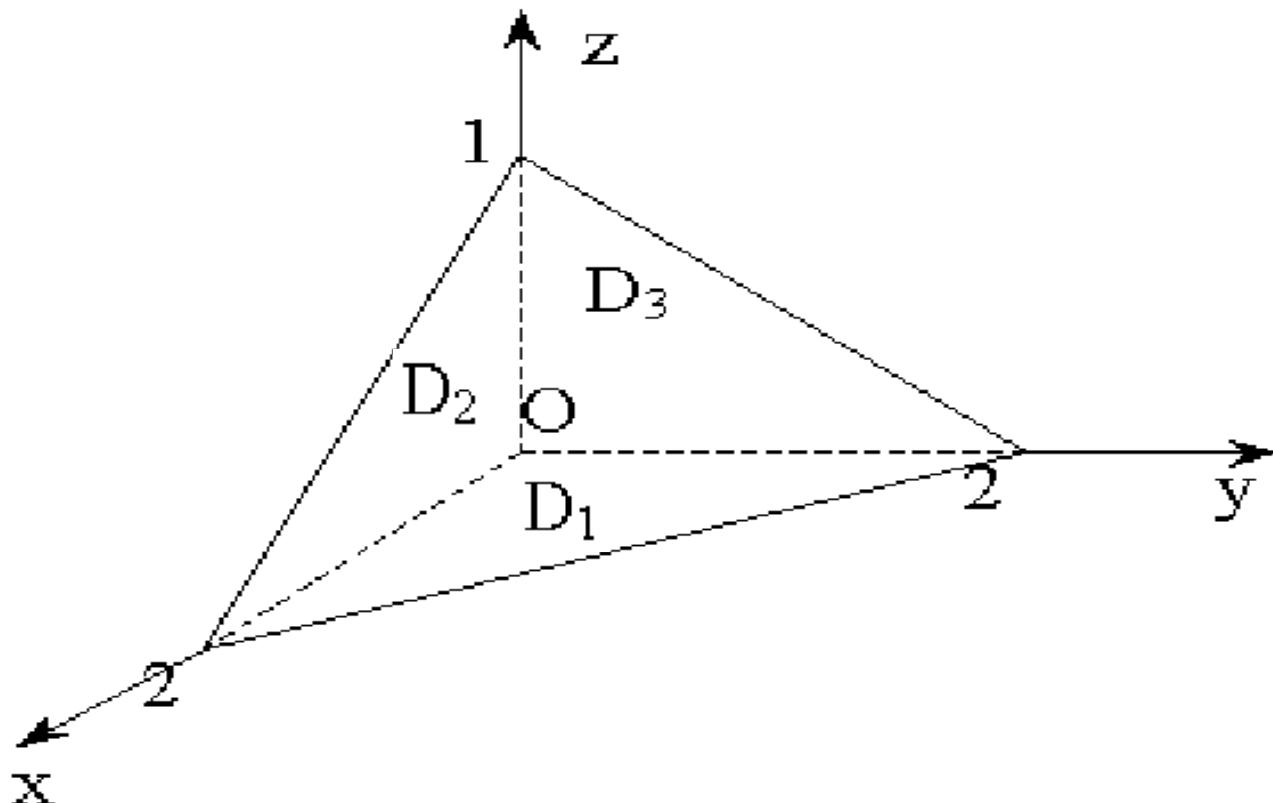
b).  $dx dz dy$

c).  $dy dz dx$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

Giải:

a). Hình chiếu của  $\Omega$  xuống mặt phẳng Oxy là miền



$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

$$z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

Giới hạn trên của  $\Omega$ :

Giới hạn dưới của  $\Omega$ :  $z = 0$

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_{2-x}^{2-\frac{x}{2}} dy \int_0^{1-\frac{x-y}{2}} f(x, y, z) dz$$

b). Hình chiếu của  $\Omega$  xuống mặt phẳng Oxz là miền

$$D_2 = \left\{ (x, z) : 0 \leq x \leq 2; 0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{2} \right\}$$

Giới hạn trên của  $\Omega$ :  $y = 2 - x - 2z$

Giới hạn dưới của  $\Omega$ :  $y = 0$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dz \int_0^{2-x-2z} f(x, y, z) dy$$

c). Hình chiếu  $\Omega$  của xuống mặt phẳng Oyz là

$$\Omega_3 = \left\{ (y, z) : 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 1 - \frac{y}{2} \right\}$$

Giới hạn trên của  $\Omega$  là :  $x = 2-y-2z$

Giới hạn dưới của  $\Omega$  là :  $x = 0$

Vậy

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} dz \int_0^{2-y-2z} f(x, y, z) dx$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

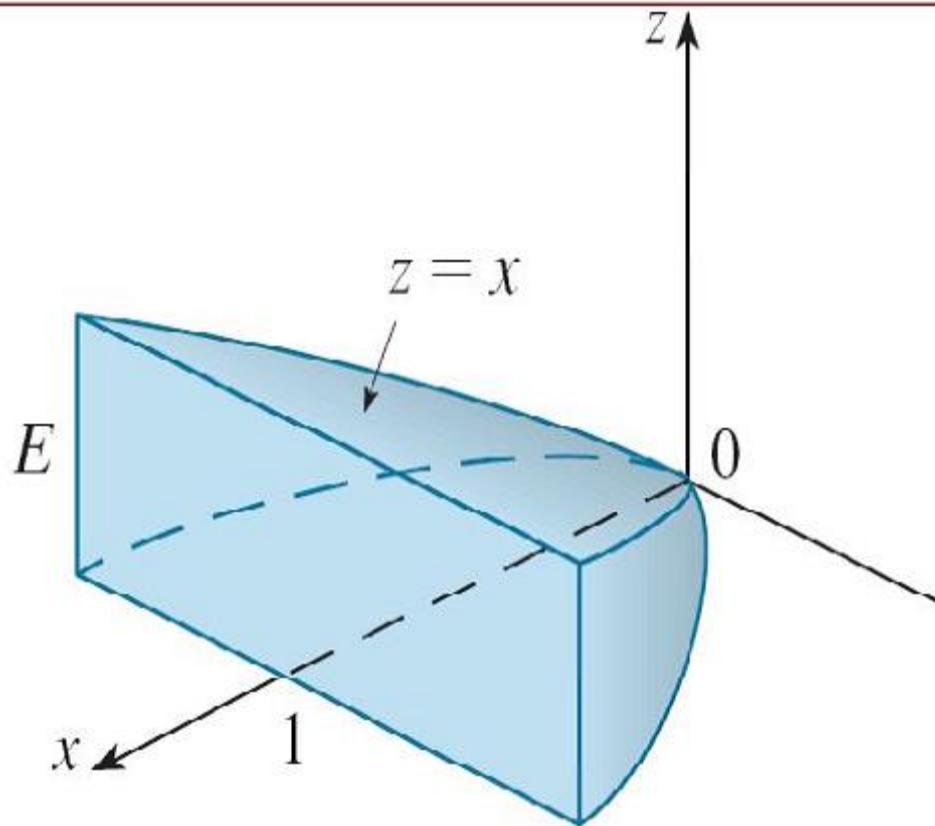
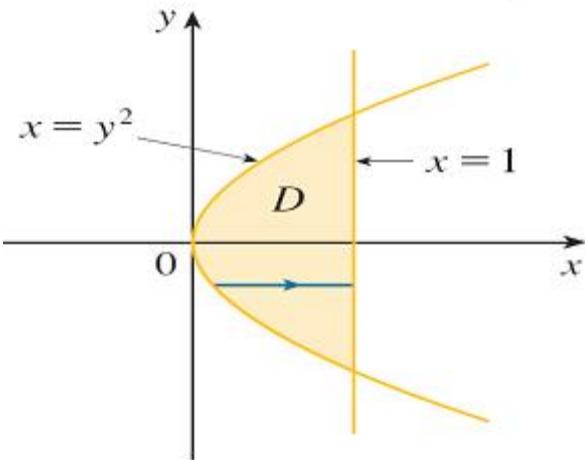
Ví dụ

Tính tích phân  $I = \iiint_E (z+1) dx dy dz$  trong đó E là vật thể giới hạn bởi  $x = y^2, z = x, z = 0, x = 1$ .

Mặt phía trên:  $z = x$

Mặt phía dưới:  $z = 0$

Hình chiếu của E xuống 0xy:



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

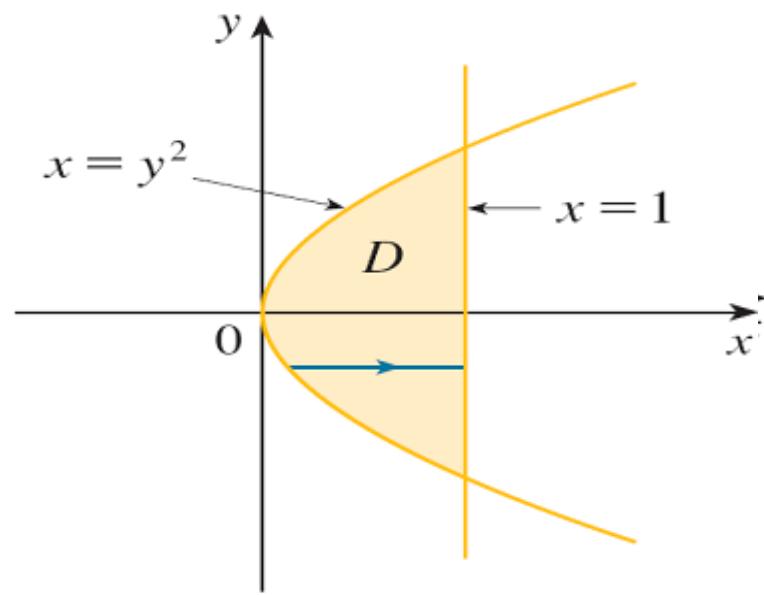
$$I = \iint_D \left[ \int_0^x (z+1) dz \right] dx dy$$

$$I = \iint_D \left[ \left( \frac{z^2}{2} + z \right) \Big|_0^x \right] dx dy$$

$$I = \iint_D \left( \frac{x^2}{2} + x \right) dx dy$$

$$I = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \left( \frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

$$I = \frac{38}{35}$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

Ví dụ

Tính tích phân bội ba  $I = \iiint_E (x + z) dxdydz$  trong đó E là vật thể giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 = 1, z = 2 - x^2 - y^2, z = 0$$

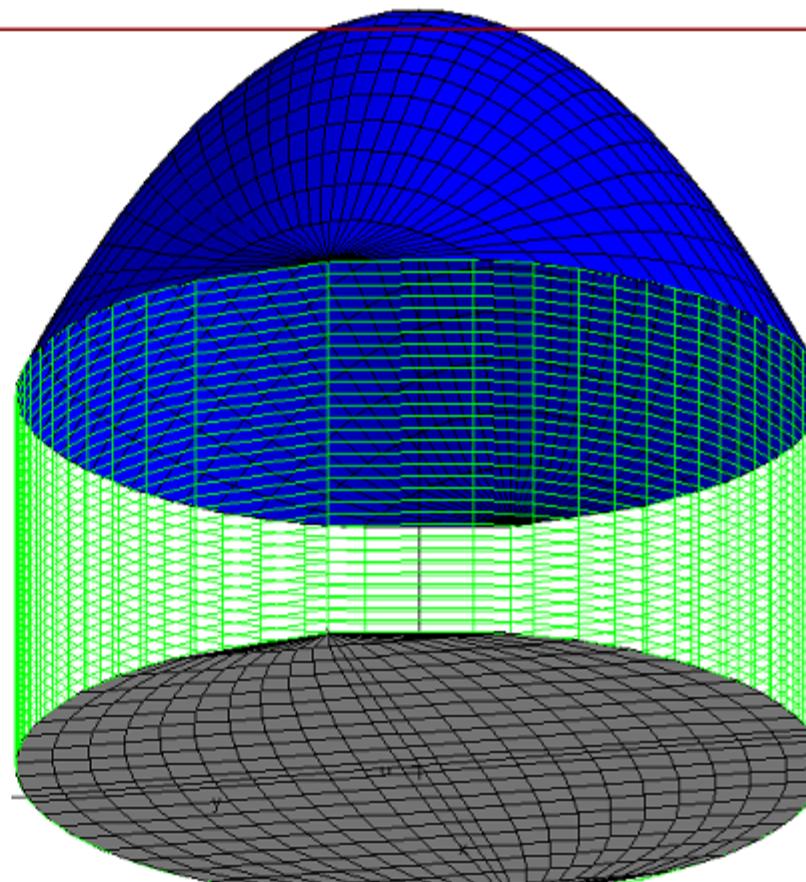
Hình chiếu của E xuống 0xy:

$$D : x^2 + y^2 \leq 1$$

Mặt phía trên:  $z_2(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

Mặt phía dưới:  $z = 0$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[ \int_0^{2-x^2-y^2} (x + z) dz \right] dx dy$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[ xz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x^2-y^2} dx dy$$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left( x(2-x^2-y^2) + \frac{(2-x^2-y^2)^2}{2} \right) dx dy$$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{(2-x^2-y^2)^2}{2} dx dy \quad \text{Đổi sang tọa độ cực.}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\left(2-r^2\right)^2}{2} \cdot r \cdot dr = \frac{7\pi}{6}$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.2. Đổi biến tổng quát

• Đặt  $\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$  và  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$

Giả sử các hàm x, y, z có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng, giới nội độ được  $V_{uvw}$  trong không gian Ouvw và  $J \neq 0$  thì:

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)). |J| . du dv dw \end{aligned}$$

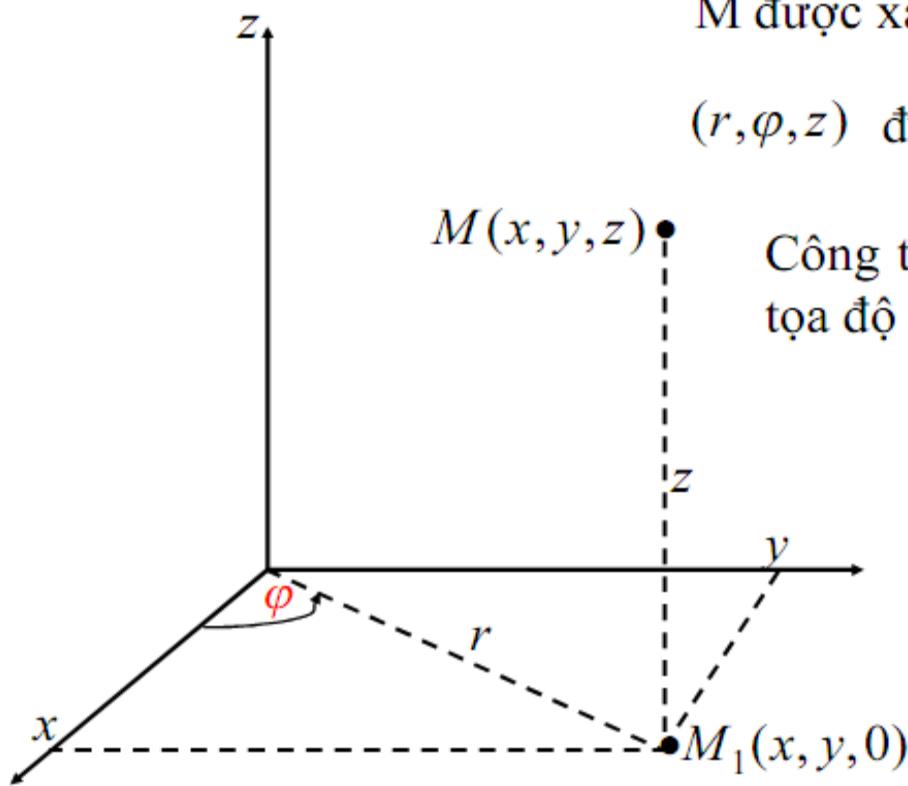
## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ trục

Điểm  $M(x,y,z)$  trong hệ trục tọa độ  $0xyz$ .

$M$  được xác định duy nhất bởi bộ  $(r, \varphi, z)$

$(r, \varphi, z)$  được gọi là **tọa độ trục** của **điểm  $M$** .



Công thức đổi biến từ tọa độ Decasters sang tọa độ trục:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = r$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

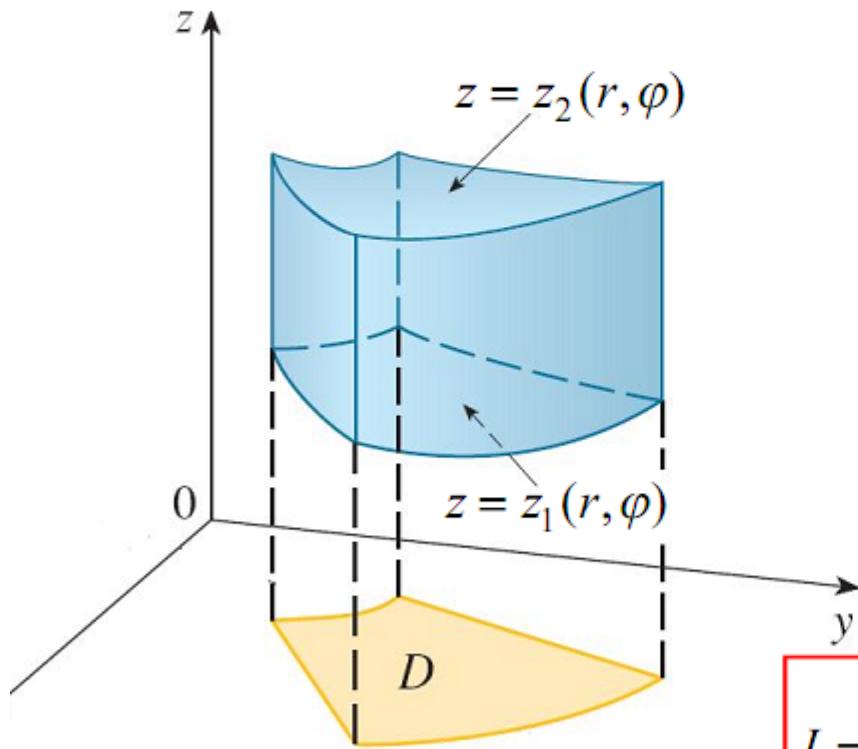
### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ trụ

Đổi biến sang tọa độ trụ.

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Mặt phía dưới:  $z = z_1(r, \varphi)$



Mặt phía trên:  $z = z_2(r, \varphi)$

Hình chiếu:  $D$

Xác định cận  $r, \varphi$  của  $D$ :

$$D : \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases}$$

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r \cdot dz$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ trụ

Ví dụ

Tính tích phân  $I = \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$  trong đó E là vật thể giới hạn bởi

$$z = 4, z = 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1.$$

Mặt phía trên:  $z = 4$

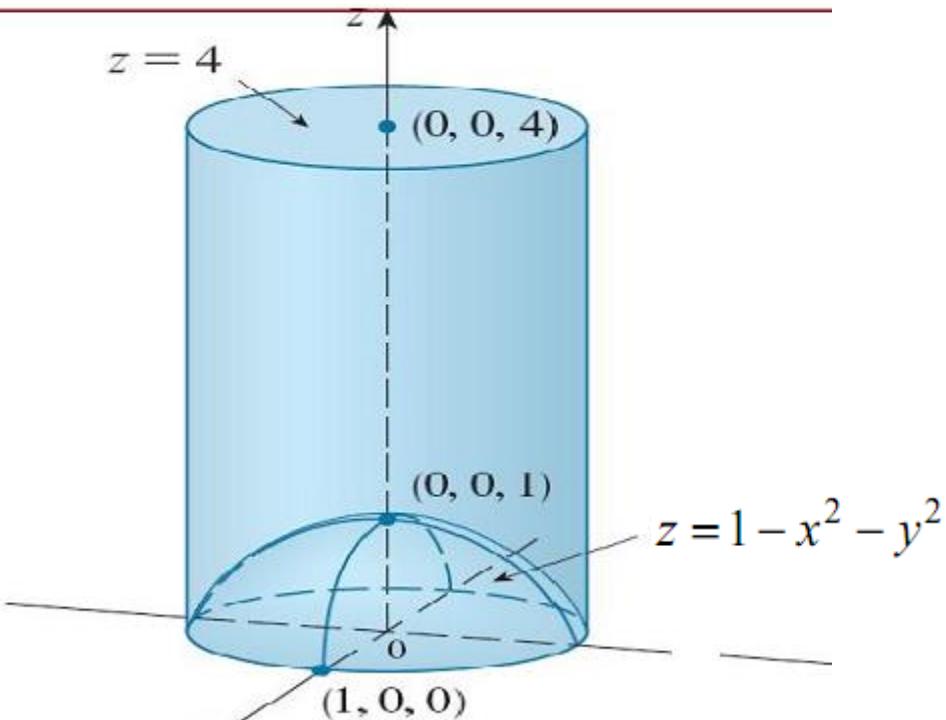
Mặt phía dưới:  $z = 1 - r^2$

Hình chiếu xuống 0xy:  $D : x^2 + y^2 \leq 1$

$$D : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{1-r^2}^4 r \cdot \mathbf{r} \cdot dz$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \left[ r^2 z \Big|_{1-r^2}^4 \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left( r^2 (3+r^2) \right) dr = \frac{12\pi}{5}$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ trụ

Tính tích phân

$$I = \iiint_E z dx dy dz$$

trong đó E là vật thể giới hạn bởi

$$z = x^2 + y^2, z = 2 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1.$$

Mặt phía trên:  $z = 2 + r^2$

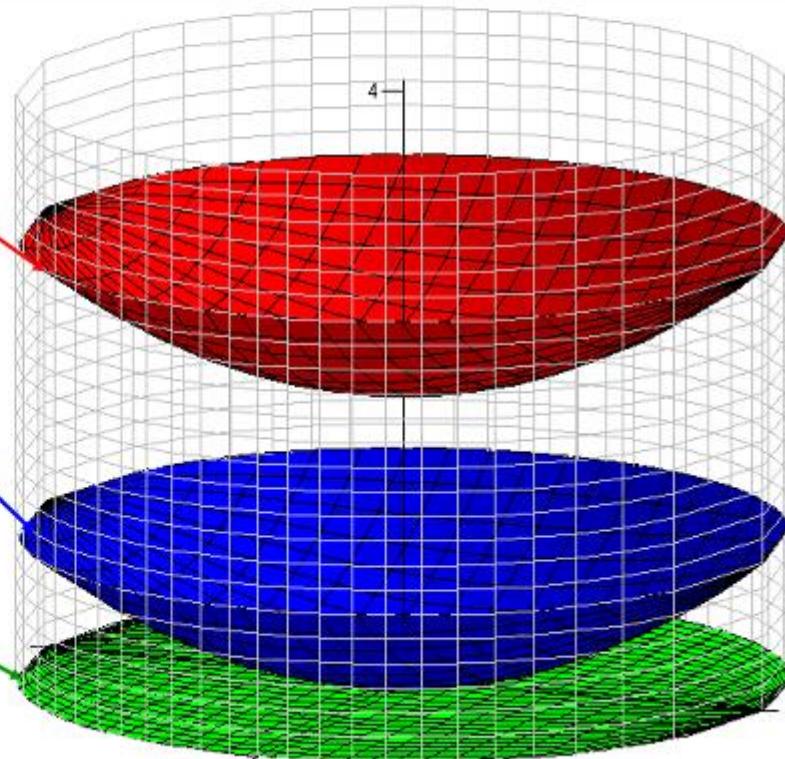
Mặt phía dưới:  $z = r^2$

Hình chiếu của E xuống 0xy:

$$D : x^2 + y^2 \leq 1$$

Cận của D:

$$D : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ trụ

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2+r^2} z \cdot \mathbf{r} \cdot dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \frac{z^2}{2} \Big|_{r^2}^{2+r^2} dr = 3\pi$$

Ví dụ

Tính tích phân  $I = \iiint_E (x^2 + z^2) dx dy dz$  trong đó E:  $2y = x^2 + z^2, y = 2$ .

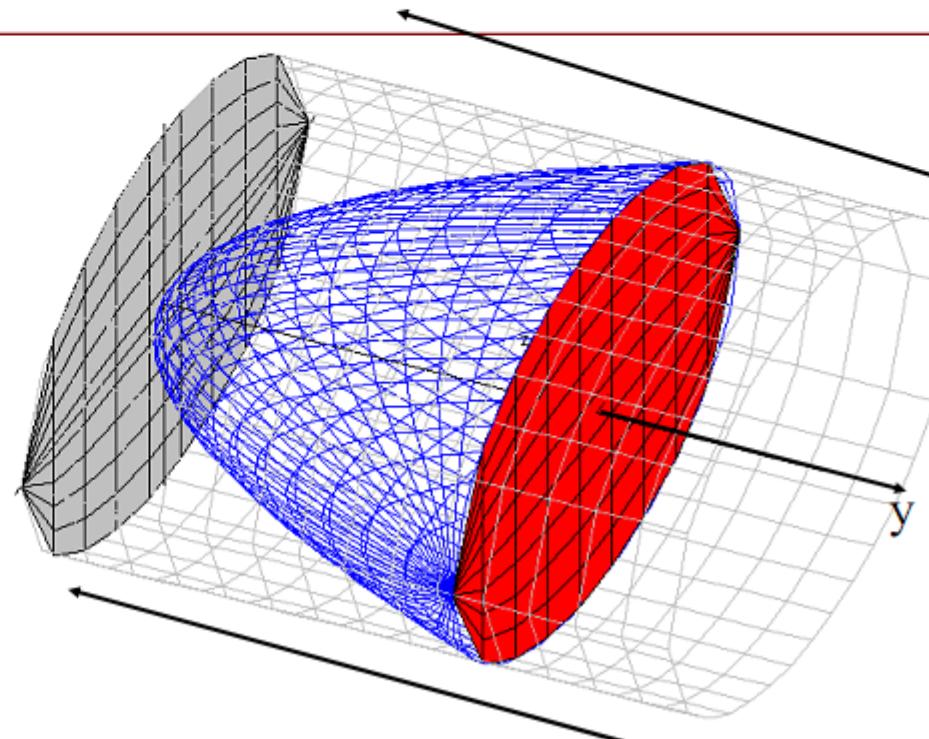
Chiếu xuống x0z

Mặt trên:  $y = 2$

Mặt dưới:  $y = \frac{r^2}{2}$

Hình chiếu:  $D: x^2 + z^2 \leq 4$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^2 r^2 \cdot \mathbf{r} \cdot dy$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

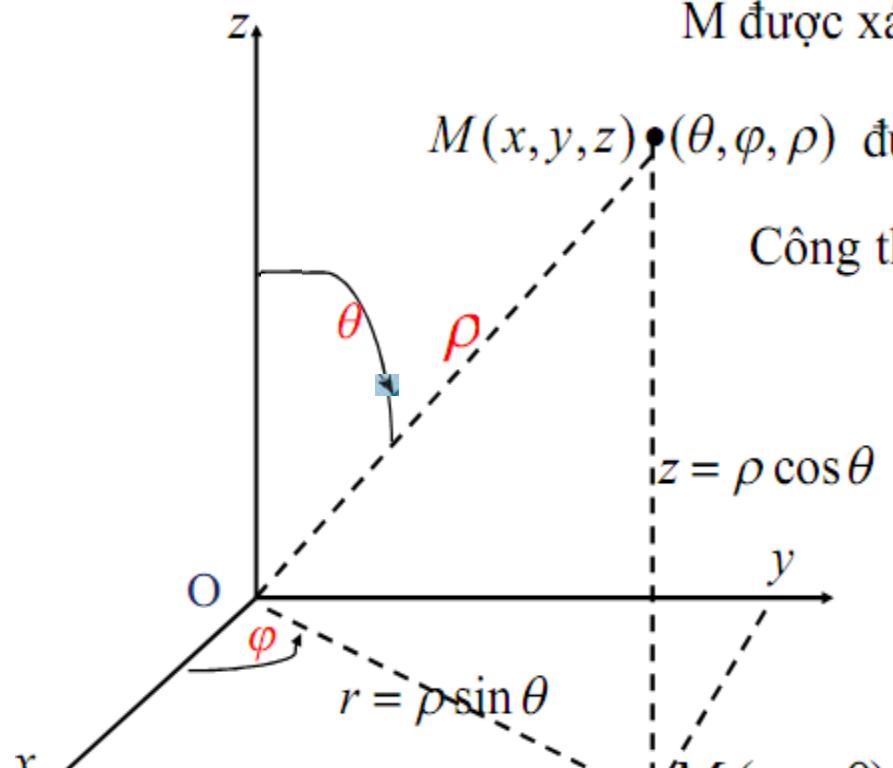
Điểm  $M(x,y,z)$  trong hệ trục tọa độ  $0xyz$ .

$M$  được xác định duy nhất bởi bộ  $(\theta, \varphi, \rho)$

$M(x,y,z)(\theta, \varphi, \rho)$  được gọi là **tọa độ cầu của điểm  $M$** .

Công thức đổi biến sang tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$



$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_\theta \\ y_\rho & y_\varphi & y_\theta \\ z_\rho & z_\varphi & z_\theta \end{vmatrix} \Rightarrow |J| = \rho^2 \cdot \sin \theta$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Giả sử trong tọa độ cầu, vật thể  $V$  được giới hạn bởi:

$$\begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho \end{aligned}$$

Chú ý:  $0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$  or  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

$0 < \rho < +\infty$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Ví dụ: Tính  $I = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$  với E là miền giới hạn bởi hai mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Giải:

Chuyển sang tọa độ cầu  $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$  ta có:

$$I = \iiint_E \rho^4 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho$$

Miền E xác định bởi:  $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^2 \rho^4 d\rho = \dots = \frac{124\pi}{5}$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Ví dụ

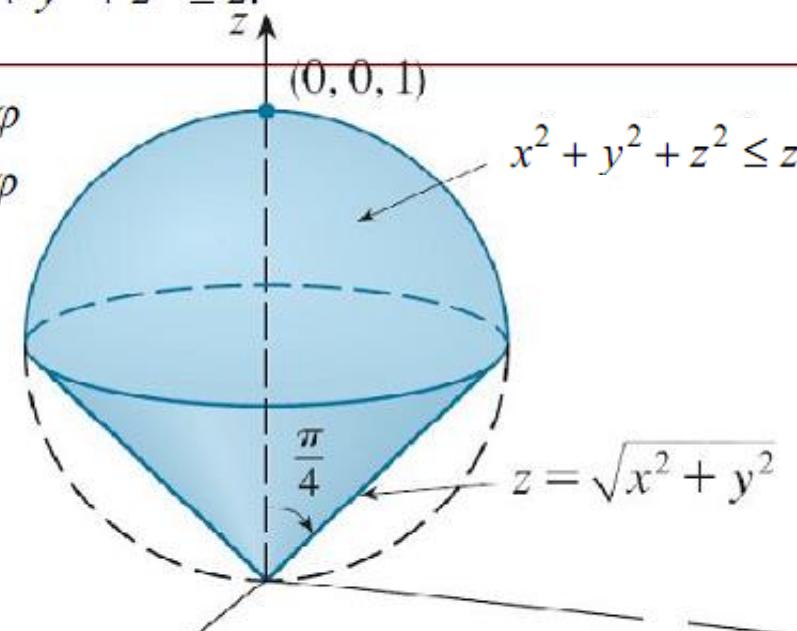
Tính tích phân  $I = \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$  trong đó E là vật thể giới hạn bởi  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ .

Đổi sang tọa độ cầu:  $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$

Xác định cận:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq \rho \leq \cos \theta$



$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos \theta} \rho \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho = \left( \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{2}}{80} \right) \pi$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Ví dụ

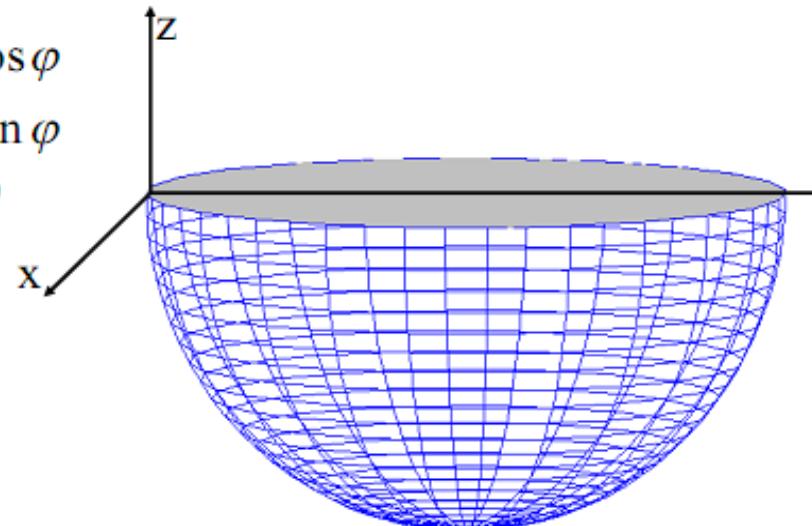
Tính tích phân  $I = \iiint_E (y+z) dx dy dz$  trong đó E là vật thể giới hạn bởi  
$$z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2y \quad (z \leq 0)$$

Đổi sang tọa độ cầu:  $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$

Xác định cận:  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

$0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta \cdot \sin \varphi$



$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \theta \cdot \sin \varphi} (\rho \sin \theta \sin \varphi + \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Ví dụ (Cách 2)

Đổi sang tọa độ cầu mở rộng

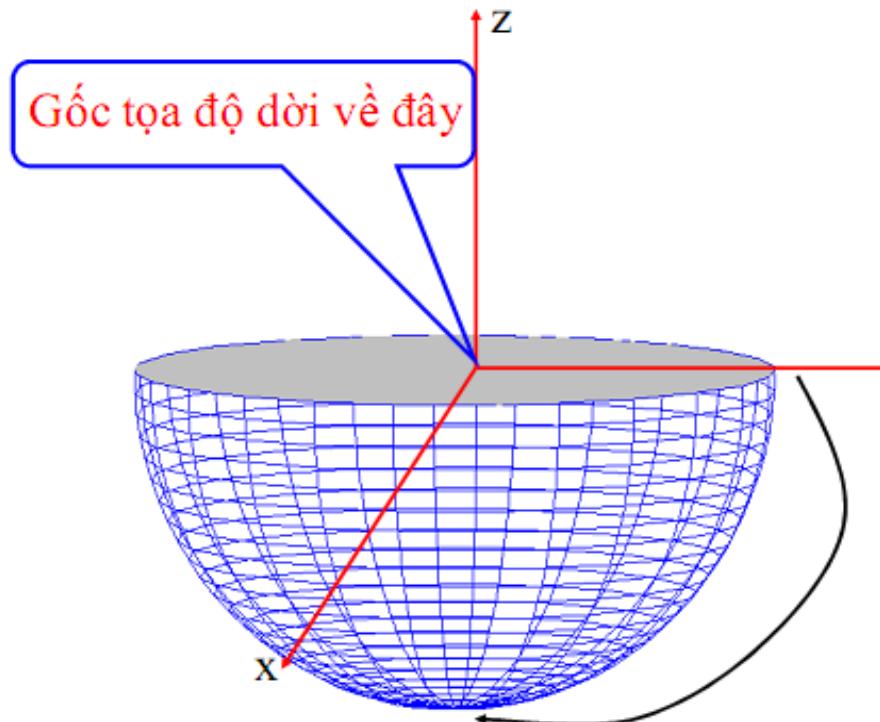
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Xác định cận:  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + \rho \sin \theta \sin \varphi + \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Ví dụ

Tính tích phân  $I = \iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz$  trong đó E là vật thể giới hạn bởi  
 $y = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (y \leq 0)$

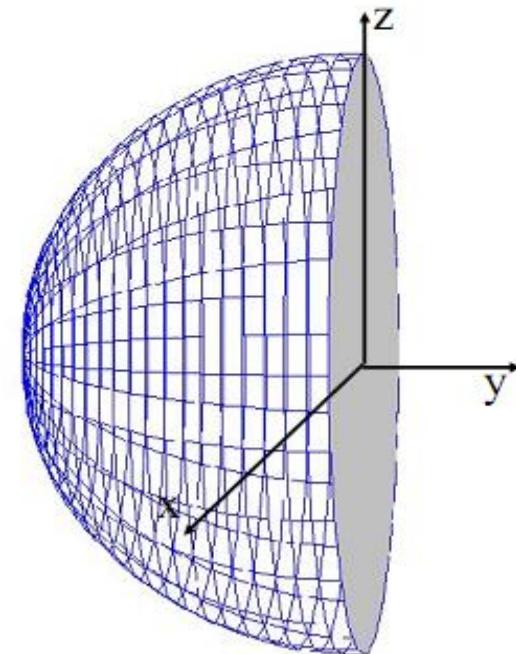
Đổi sang tọa độ cầu:  $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$

Xác định cận:  $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\pi \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho = 2\pi \frac{e-1}{3}$$



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

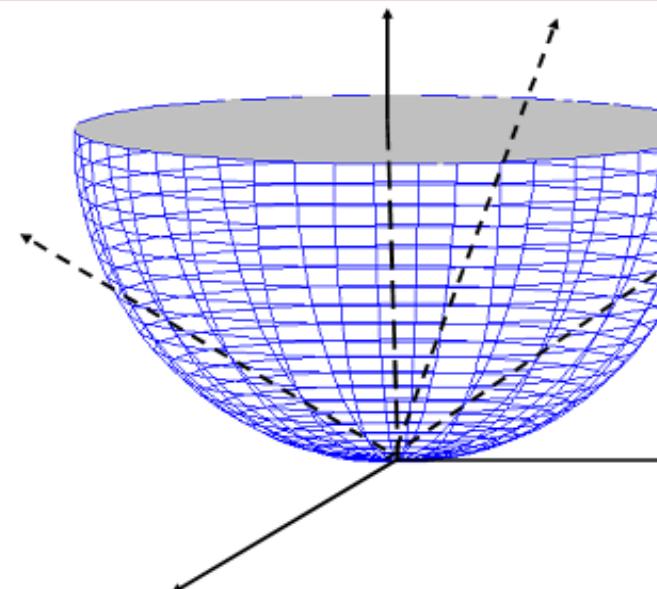
### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Ví dụ

Tính tích phân  $I = \iiint_E z dxdydz$  trong đó E là vật thể giới hạn bởi  
 $z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2z \quad (z \leq 1)$

Đổi sang tọa độ cầu:  $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$

Xác định cận:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$   
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$   
 $0 \leq \rho \leq ?$



Phải chia khối E ra làm 2 khối. Công việc tính toán rất phức tạp.

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

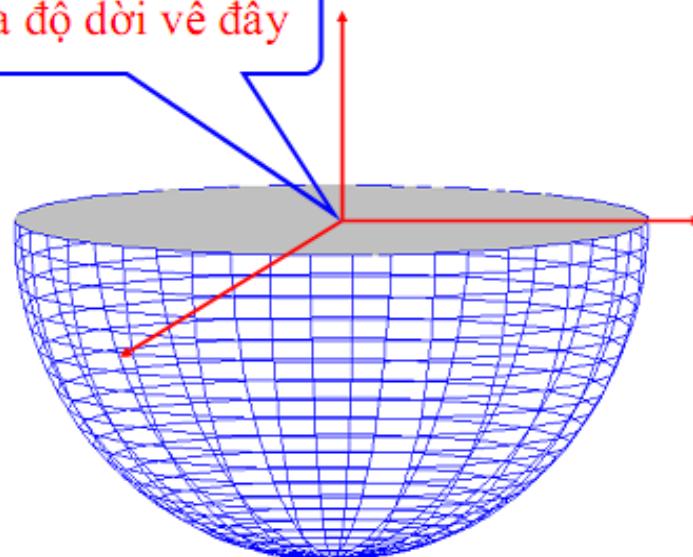
### 2.3.3. Đổi biến trong tọa độ cầu

Ví dụ

Đổi sang tọa độ cầu mở rộng

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z - 1 = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Gốc tọa độ dời về đây



Xác định cận:  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### Ứng dụng hình học

Từ định nghĩa tích phân bộ ba ta có công thức tính thể tích vật thể E:

$$V_E = \iiint_E 1 dx dy dz$$

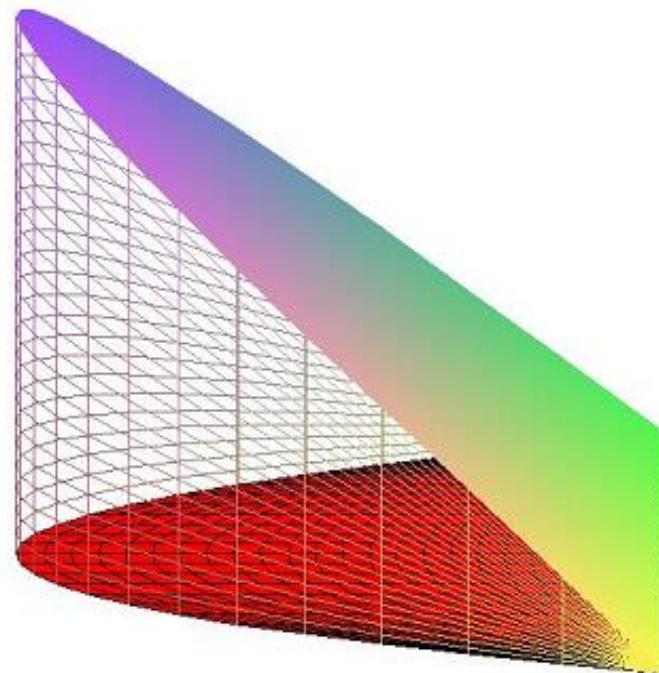
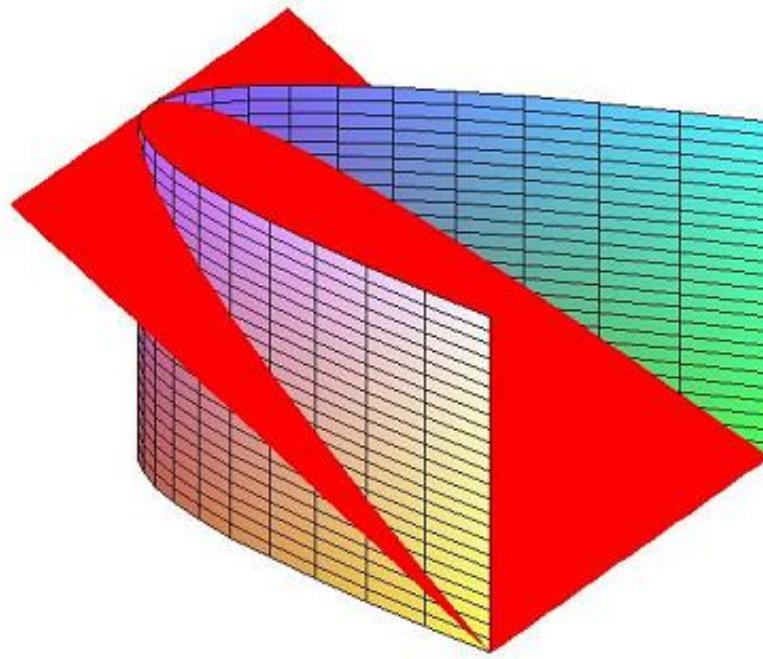
Có thể sử dụng tích phân kép để tính thể tích vật thể.

Tuy nhiên trong một số trường hợp sử dụng tích phân bộ ba tính nhanh hơn, vì tích phân bộ ba có cách đổi sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### Ứng dụng hình học

Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi  $y = x^2, y + z = 1, z = 0$ .



$$V = \iiint_E dxdydz = \iint_{\text{Parabol}} \left[ \int_0^{1-y} dz \right] dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{1-y} dz$$

## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### Ứng dụng hình học

Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi  $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

$$V = \iiint_E dxdydz$$

Sử dụng tọa độ trụ

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

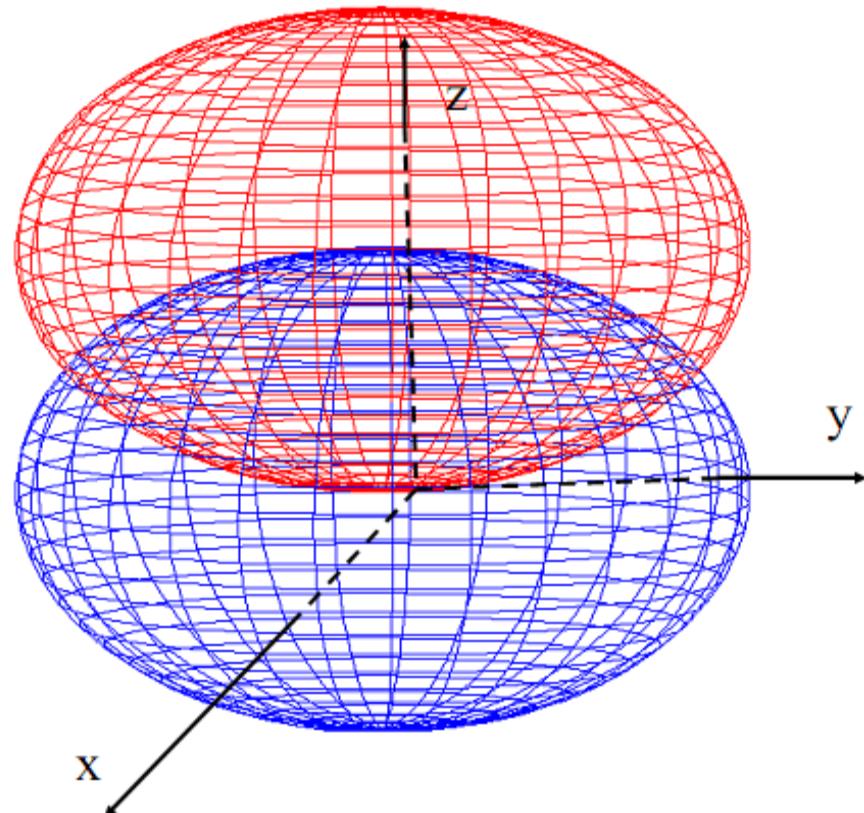
$$0 \leq r \leq \sqrt{3}$$

$$2 - \sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \textcolor{red}{r} \cdot dz$$

$$V = \frac{10\pi}{3}$$

Sử dụng tọa độ cầu tính phức tạp hơn nhiều.



## §2. TÍCH PHÂN BỘI BA

### Ứng dụng hình học

Tính thể tích vật thể E được giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$V = \iiint_E dxdydz \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Sử dụng tọa độ cầu  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$1 \leq \rho \leq 2$$

$$V = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho$$

$$V = \frac{14}{3}\pi - \frac{7\sqrt{2}}{3}\pi$$

Sử dụng tích phân kép, tính toán rất phức tạp!!

