计算物理A作业1

吕遨 PB19030789

1.作业题目

用Schrage方法编写随机数子程序，用指定间隔（非连续$l>1$）两个随机数作为点的坐标值绘出若干点的平面分布图。再用$\langle x^k\rangle$测试其均匀性（取不同量级的N值，讨论偏差与N的关系）、$C(l)$测试其二维独立性（总点数$N>10^7$）。

2.算法和主要公式

（1）Lehmer线性同余随机数产生器

$$I_{n+1}=(aI_n+b)\,mod\,m$$
$$x_n=I_n/m$$

在本实验中我们采用16807随机数产生器，即$a=16807,b=0,m=2^{32}-1$。

（2）由于计算机不能自动取模，故在计算过程中有可能产生数据溢出的情况，为此我们设计了Schrage方法来进行取模：

设m可表示为

$$m=aq+r,q=[m/a],r=m\,mod\,a$$

则对$r<q$和$0<z<m-1$容易得到

$$az\,mod\,m=\begin{cases}a(z\,mod\,q)-r[z/q], & if\geq 0\\ a(z\,mod\,q)-r[z/q]+m, & otherwise\end{cases}$$

我们在**schrage.c**程序中实现以上结果。

（3）用指定间隔的两个随机数作为点的坐标值绘出若干点的平面分布图，我们可以直观地从图中观察随机数点的均匀性和独立性。

（4）对于$\langle x^k\rangle$，从图像上看相当于在区间[0,1]内随机撒很多点，点的权重是$\langle x^k\rangle$，则相应的期望应该就是$\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$。

间距为l的自相关函数是

$$C(l)=\frac{\langle x_nx_{n+l}\rangle-\langle x_n\rangle^2}{\langle x_n^2\rangle-\langle x_n\rangle^2}$$

其中平均值的定义是

$$\langle x_n\rangle=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}x_n}{N}$$

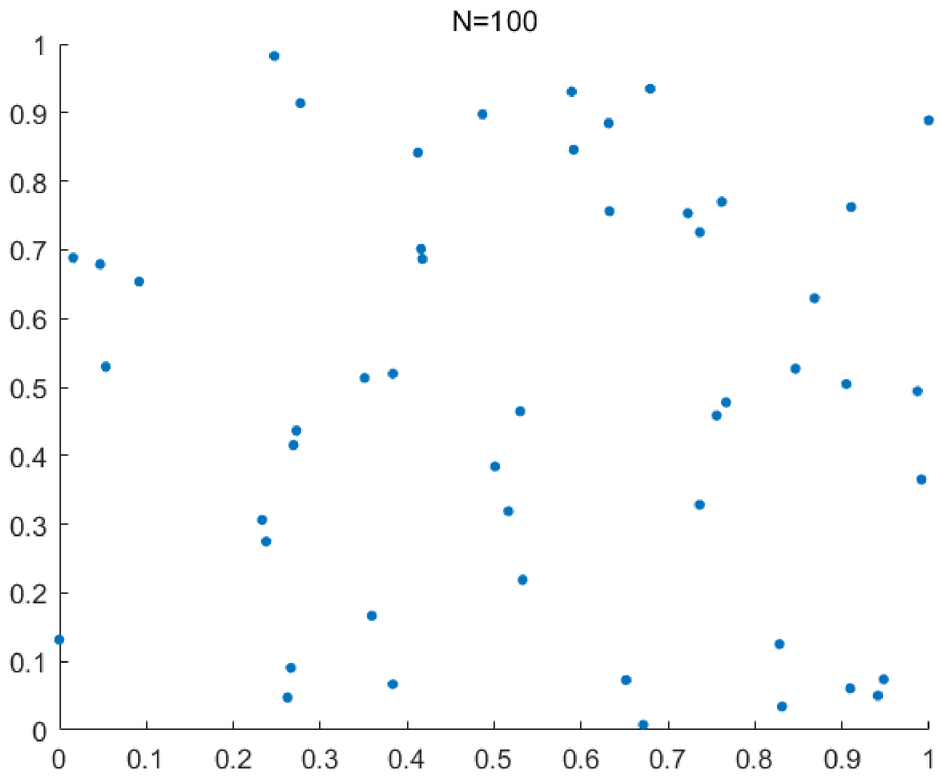
理想情况下，当两个随机数序列x_n和x_{n+l}不相关时，$\langle x_nx_{n+l}\rangle=\langle x_n\rangle\langle x_{n+l}\rangle=\langle x_n^2\rangle$，所以相关系数为0。

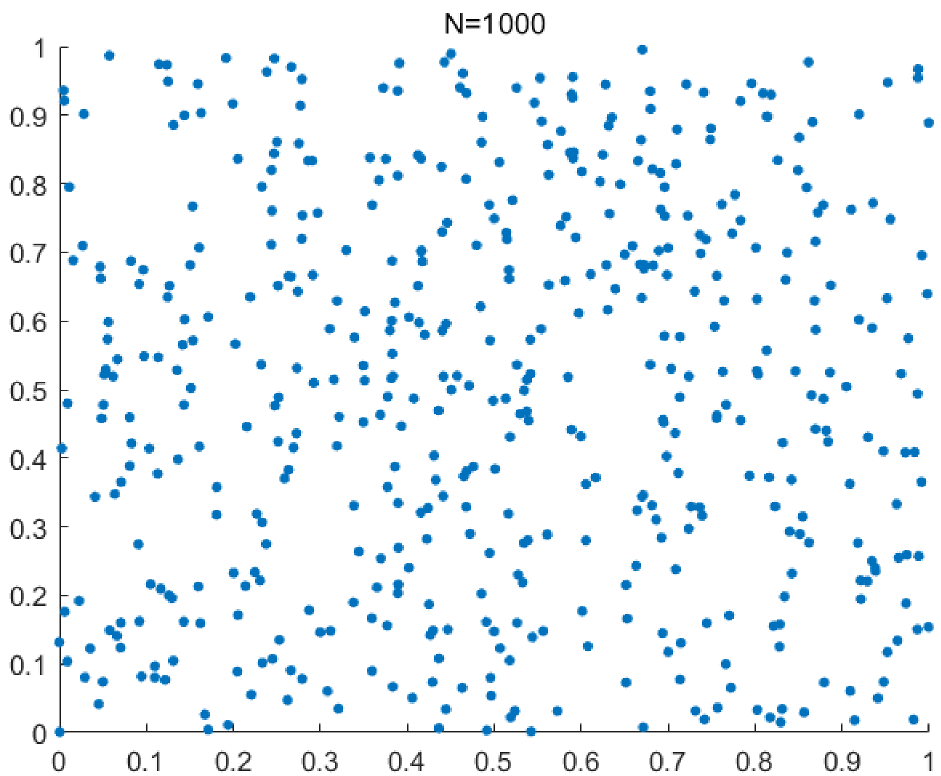
我们在**C_l.c**程序中实现上述功能。

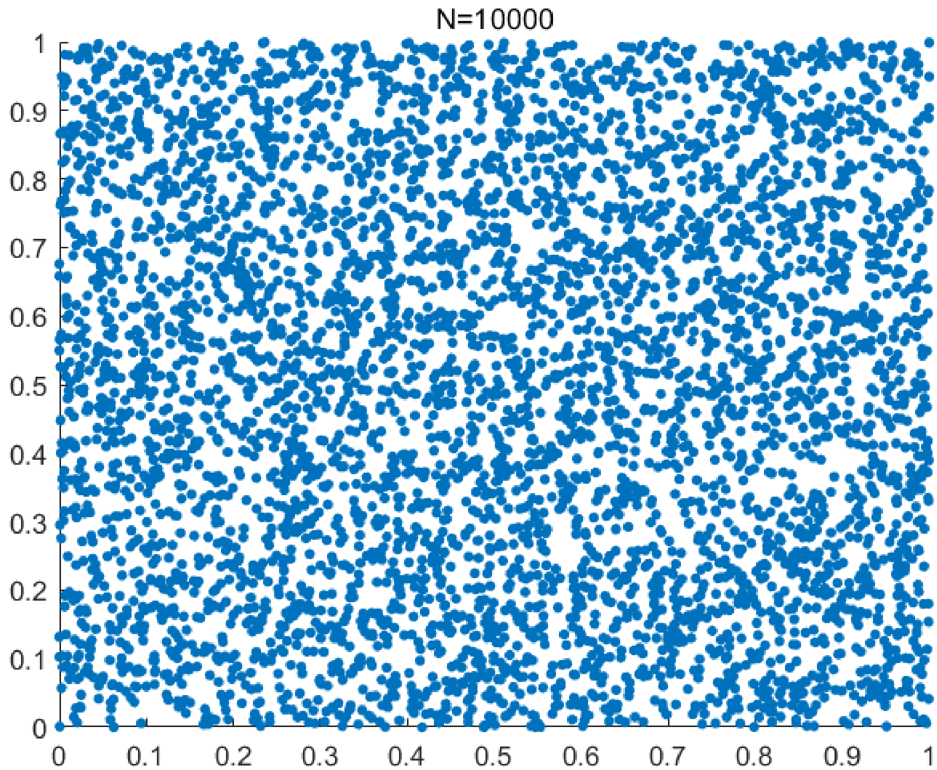
3.计算结果及分析

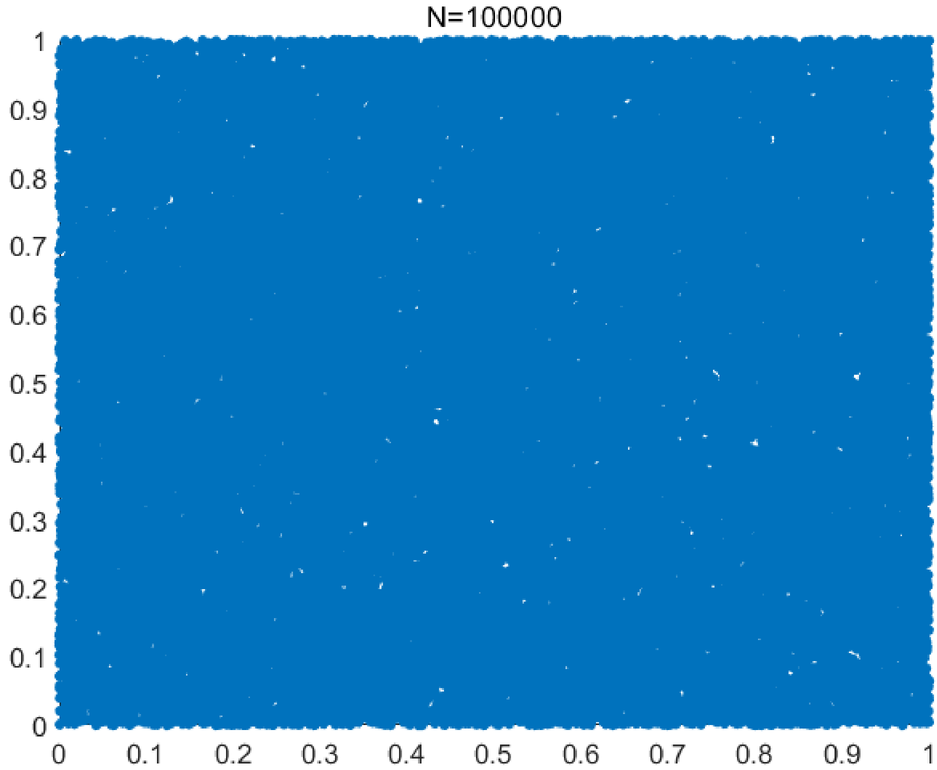
3.1 作图观察随机数点的分布

分别取N=100,1000,10000,100000,作出随机点的平面分布图如下：









我们可以看到，当N取10000和100000量级后，可以认为点均匀铺满了整个平面，我们所采用的16807随机数产生器的效果不错。

3.2 用$\langle x_k \rangle$测试均匀性

下面我们考虑均匀性指标$\langle x_k \rangle$的误差情况，我们编程分别计算出不同点数N下$\langle x^k \rangle$与其期望值$\frac{1}{k+1}$之间的误差：

N=100

```
随机数x的1阶矩为0.518425
随机数x的2阶矩为0.354780
随机数x的3阶矩为0.269625
随机数x的4阶矩为0.217525
```

k	$\langle x^k \rangle$	$\langle x^k \rangle - \frac{1}{k+1}$
1	0.518425	0.018425
2	0.354780	0.021447
3	0.269625	0.019625
4	0.217525	0.017525

N=1000

```
随机数x的1阶矩为0.497961
随机数x的2阶矩为0.326714
随机数x的3阶矩为0.240649
随机数x的4阶矩为0.189389
```

k	$\langle x^k \rangle$	$\langle x^k \rangle - \frac{1}{k+1}$
1	0.497961	-0.002039
2	0.326741	-0.006592
3	0.240649	-0.009351
4	0.189389	-0.010611

N=10000

```
随机数x的1阶矩为0.501827
随机数x的2阶矩为0.335474
随机数x的3阶矩为0.252228
随机数x的4阶矩为0.202284
```

k	$\langle x^k \rangle$	$\langle x^k \rangle - \frac{1}{k+1}$
1	0.501827	0.001827
2	0.335474	0.002140
3	0.252228	0.002228
4	0.202284	0.002284

N=100000

```
随机数x的1阶矩为0.500284

随机数x的2阶矩为0.333479

随机数x的3阶矩为0.249986

随机数x的4阶矩为0.199877
```

k	$\langle x^k \rangle$	$\langle x^k \rangle - \frac{1}{k+1}$
1	0.500284	0.000284
2	0.333479	0.000146
3	0.249986	0.000014
4	0.199877	0.000123

根据以上的计算我们可以看到，在N=100的情况下误差在10^{-2}量级，随着点数N的增加误差逐渐变小，在N=100000时误差量级基本在$10-4$，可见我们的16807随机数产生器产生的随机数均匀性还是比较好的。

3.3 用$C(l)$测试随机性

我们同样可以编程计算不同l下$C(l)$的数值，结果如下：

$N = 10^7$结果

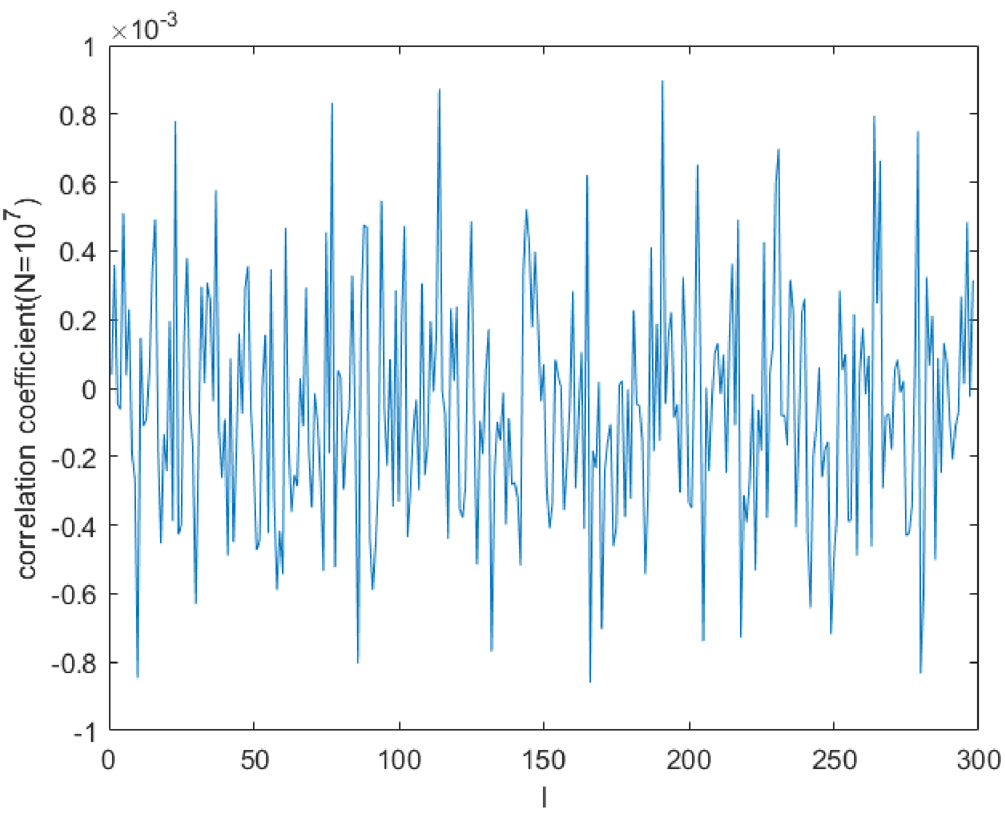
```
C(1)=0.000344
C(2)=0.000039
C(3)=0.000360
C(4)=-0.000046
C(5)=-0.000063
C(6)=0.000510
C(7)=0.000036
C(8)=0.000230
C(9)=-0.000191
C(10)=-0.000268
C(11)=-0.000847
C(12)=0.000146
C(13)=-0.000112
C(14)=-0.000090
C(15)=0.000049
C(16)=0.000335
C(17)=0.000492
C(18)=-0.000180
C(19)=-0.000454
```

$N = 2 \times 10^7$结果

```
C(1)=0.000064
C(2)=-0.000184
C(3)=0.000232
C(4)=0.000205
C(5)=0.000057
C(6)=-0.000043
```

```
c(7)=-0.000112
c(8)=0.000167
c(9)=0.000084
c(10)=-0.000361
c(11)=-0.000438
c(12)=-0.000019
c(13)=-0.000065
c(14)=0.000070
c(15)=0.000072
c(16)=0.000129
c(17)=0.000088
c(18)=-0.000123
c(19)=0.000115
```

为进一步研究$C(l)$的特性，我们可以将l取的比较大，做出$C(l)$分布情况图（在此处我们生成了300个数据）：



由以上结果我们可以看出，当N比较大时($N \geq 10^7$)，相关系数很小，基本上集中在$10^{-3} - 10^{-4}$数量级，这与$\frac{1}{\sqrt{N}}$的数量级基本一致。

随着参数l的变化，自相关系数$C(l)$时大时小，没有什么明显规律，说明只看二维关联不足以衡量随机数质量。

4.总结

1.16807生成器产生的随机数质量不错，分布比较均匀，随机独立性比较好。

2.只看二维关联函数并不能完全评价随机数质量，衡量一组随机数的质量应该从多方面考虑。