计算物理A作业9

吕遨 PB19030789

1.作业题目

考虑泊松分布、指数分布，并再自设若干个随机分布（它们有相同或不同的μ和σ^2）,通过Monte Carlo模拟，验证中心极限定理成立（$N=2,5,10$）。

2.算法和主要公式

2.1 大数定律与中心极限定理

大数定律指出，如随机量序列$\{f_i\}$有期待值μ存在，则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i\to\mu$$

中心极限定理指出当N为有限值时，有

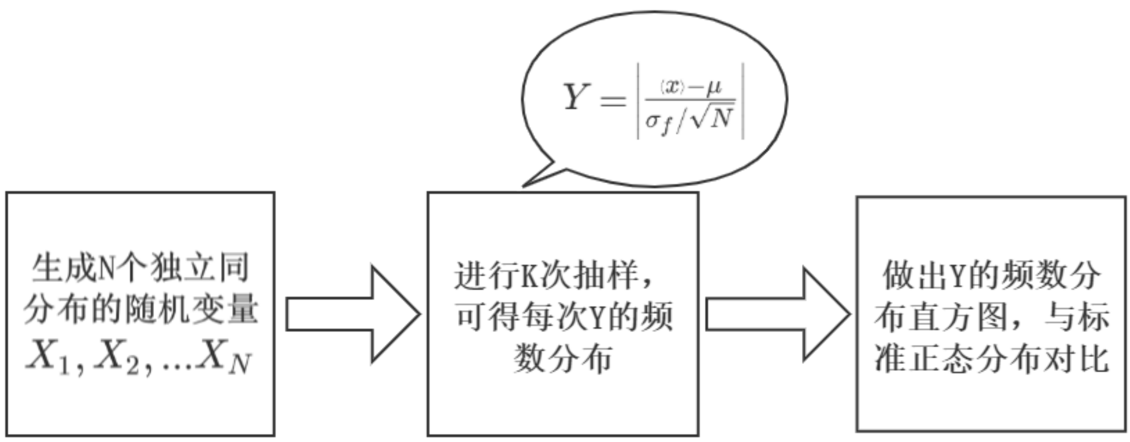
$$P\left\{\left|\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right|<\beta\right\}\to\Phi(\beta)$$

其中$\Phi(\beta)$是Gauss正态分布:

$$\Phi(\beta)=\int_{-\infty}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

用Monte Carlo方法验证中心极限定理的思路是:

生成N个独立同分布的随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_N$，它们均满足给定的分布。进行K（K可取100000）次抽样，可以得到每次抽样所得的$Y=\left|\frac{\langle X\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right|$的频数分布直方图。当$N$增大时，$Y$的分布应该越来越接近标准正态分布。我们在程序中直接可以计算出Y的频数分布，然后做出其归一化的频数分布直方图观察。



2.2 抽样函数

（1）指数分布

$$p(x)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, x \geq 0$$

均值和方差为：

$$\mu=\frac{1}{\lambda}, \sigma=\frac{1}{\lambda}$$

本题中我们取$\lambda=1$，采用直接抽样的方法：

$$x=-\ln \xi, \xi \in[0,1]$$

这一过程我们在**exp.c**程序中进行。

（2）泊松分布

$$p(x=k)=\frac{\lambda^{k}}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, k=0,1, \ldots$$

累积函数

$$P(n)=\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{k}}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, k=0,1, \ldots$$

均值和方差为

$$\mu=\lambda, \sigma=\sqrt{\lambda}$$

本题中我们取参数$\lambda=1$

抽样方法是：若$P(n)<\xi<P(n+1)$，则$x=n$。由于$P(10)$已经很接近与1，故当$\xi \geq P(10)$，我们均取$n=11$

以上过程在**poisson.c**程序中进行。

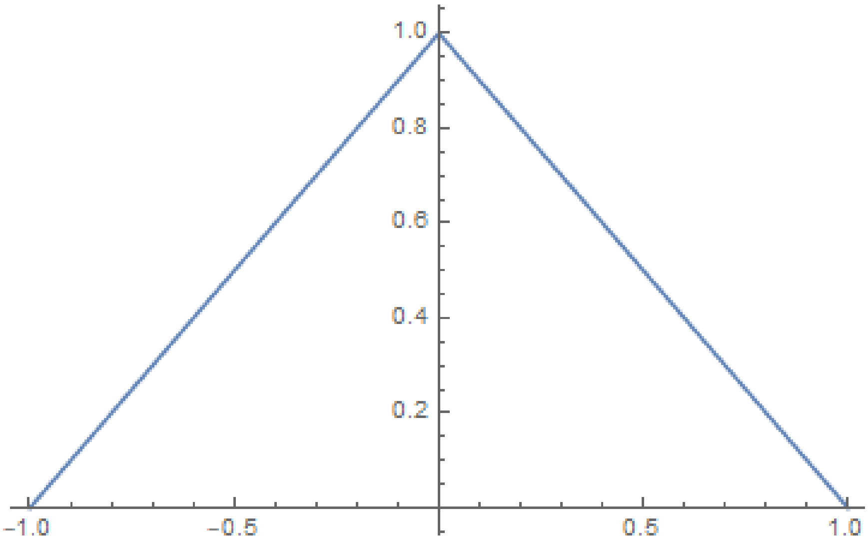
（3）自设分布$p(x)$

$$p(x)=\begin{cases}x+1, & -1 \leq x<0 \\ -x+1, & 0 \leq x \leq 1\end{cases}$$

均值和方差为

$$\lambda=0, \mu=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$p(x)$的图像是



这一分布我们采用舍选抽样的方法进行抽样，比较函数可以直接选取$F(x) = 1$。

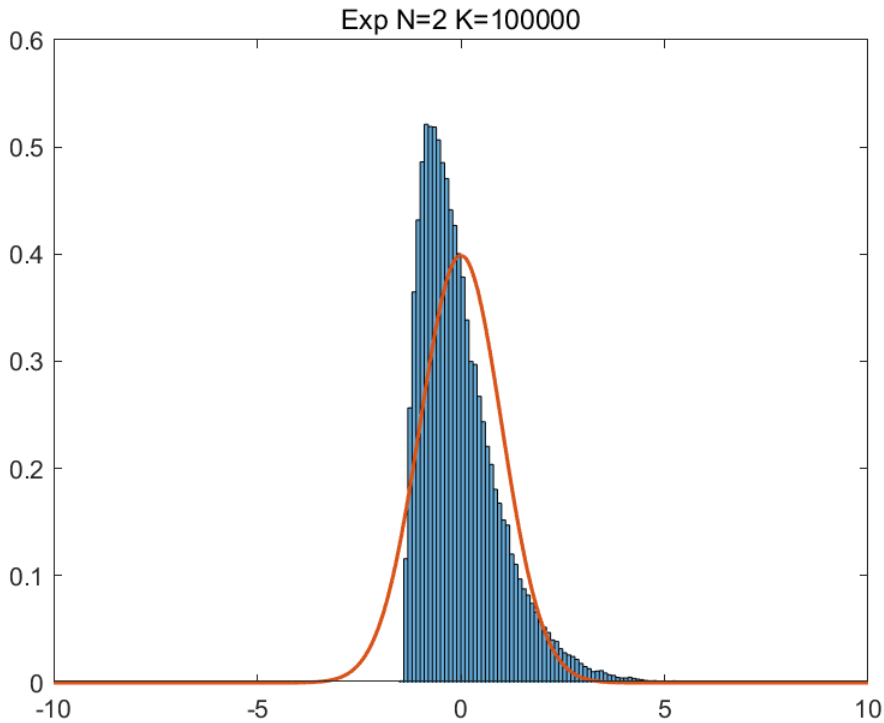
所以具体的抽样方法是取区间$[-1, 1]$上的随机数ξ_1和$[0, 1]$上的随机数ξ_2，作比较$\xi_2 \leq p(\xi_1)$，是则$\xi_x = \xi_1$，否则舍。

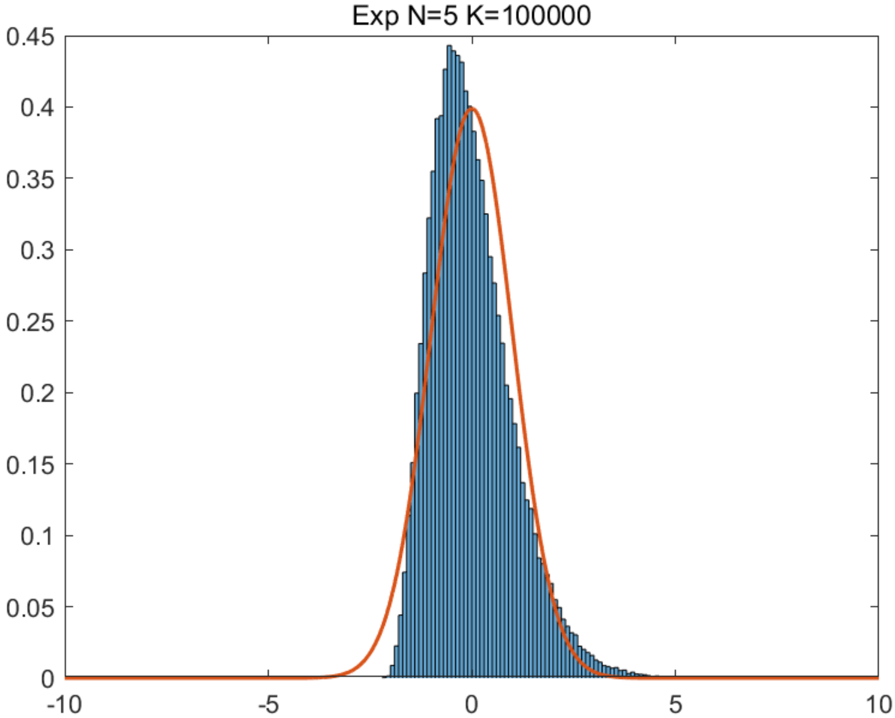
抽样效率$\eta = 0.5$。

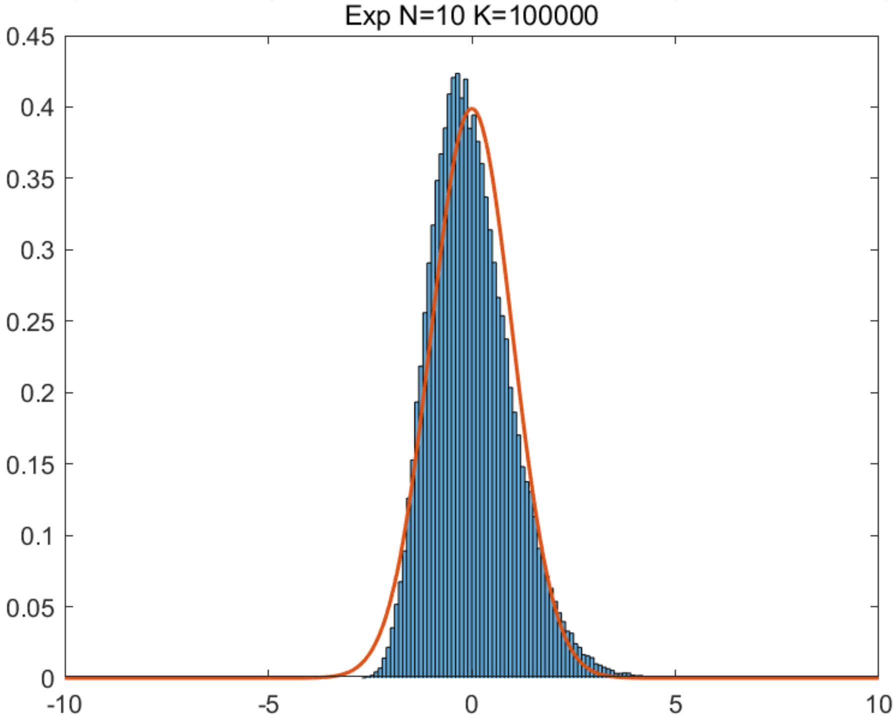
这一过程在**self_px.c**程序中进行。

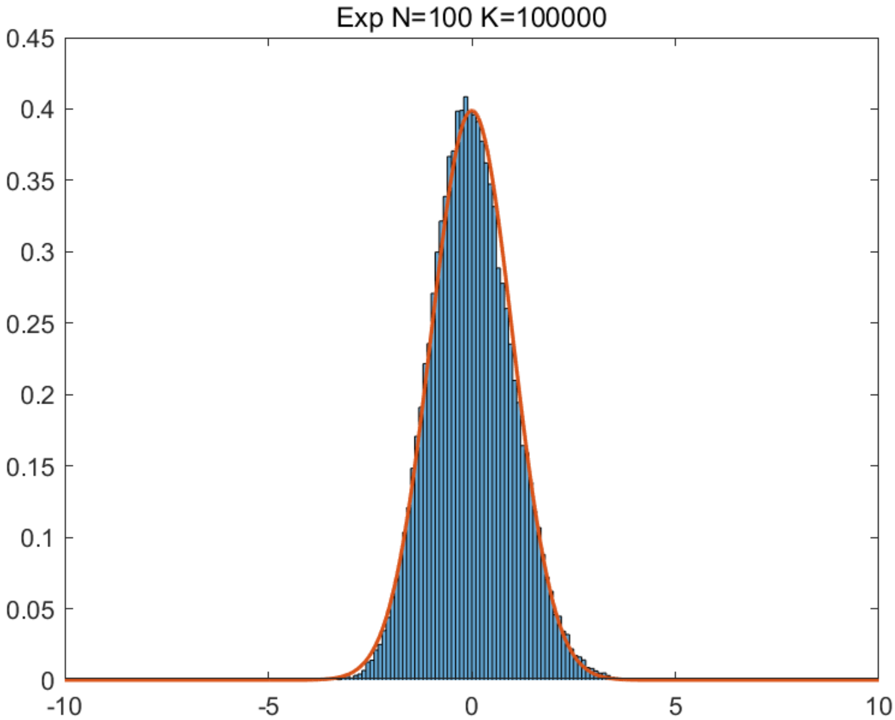
3.计算结果及分析

3.1 指数分布



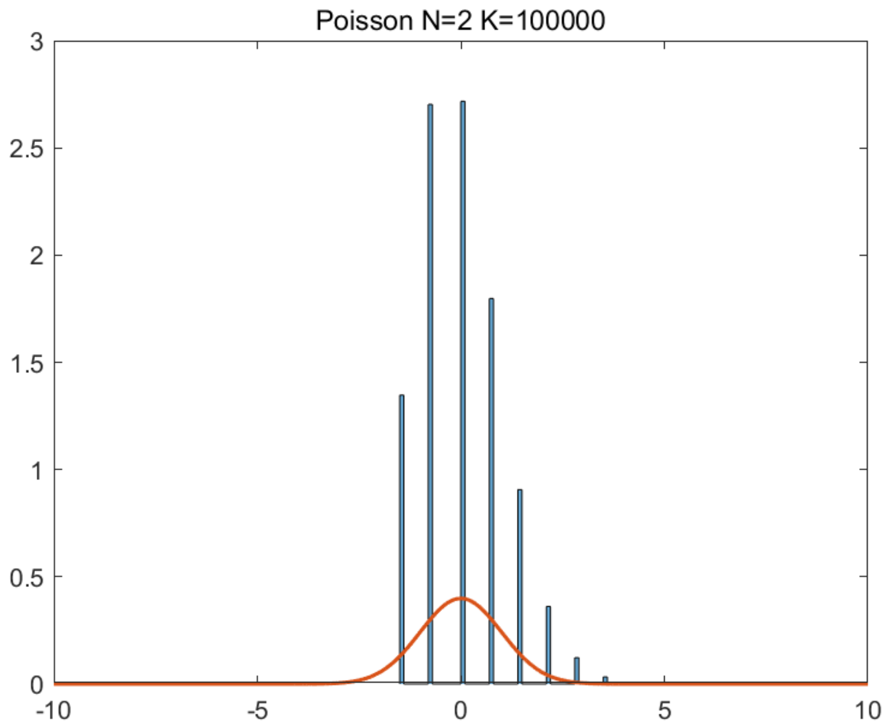

Exp N=5 K=100000
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-10
-5
0
5
10

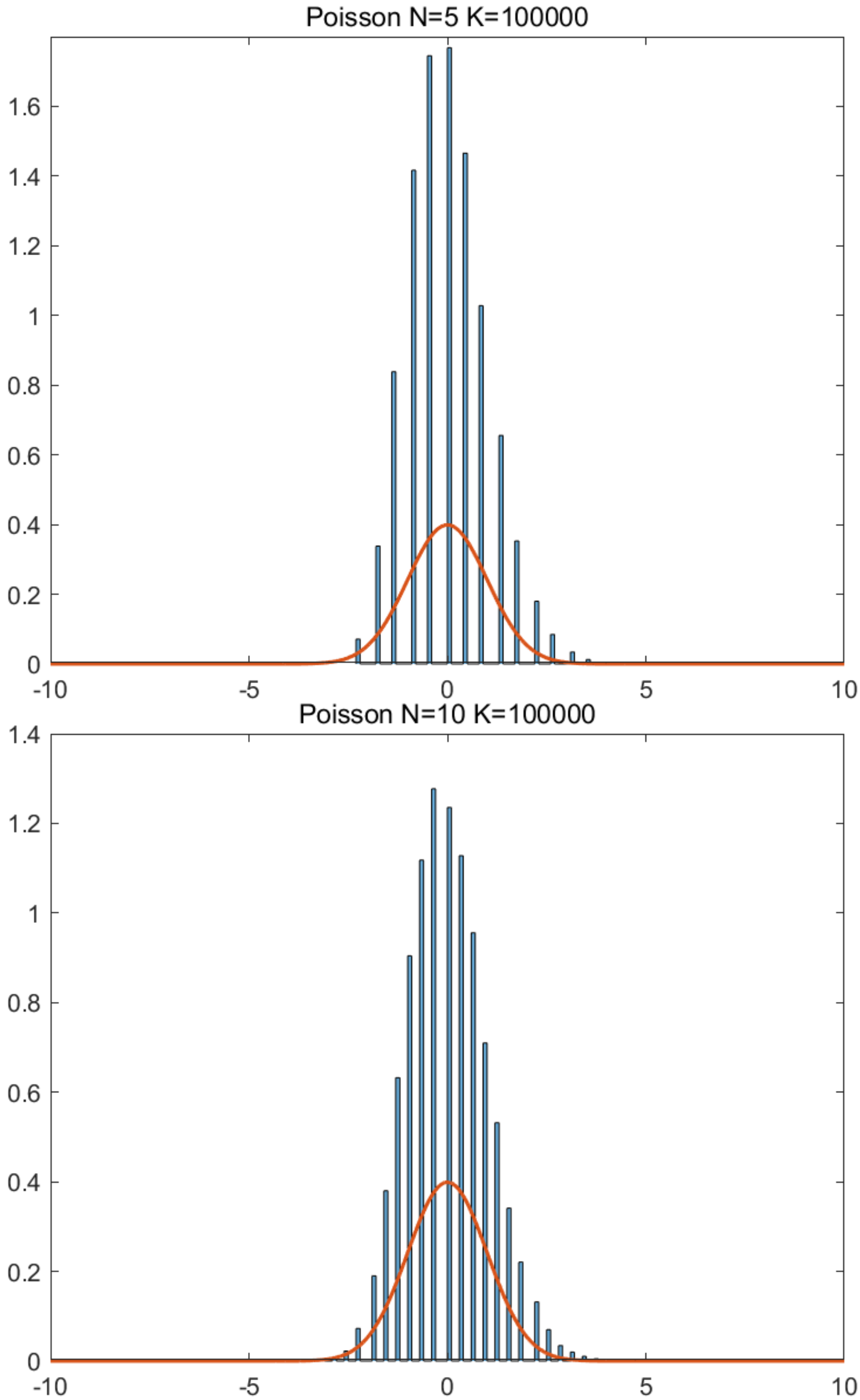

Exp N=10 K=100000
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-10
-5
0
5
10

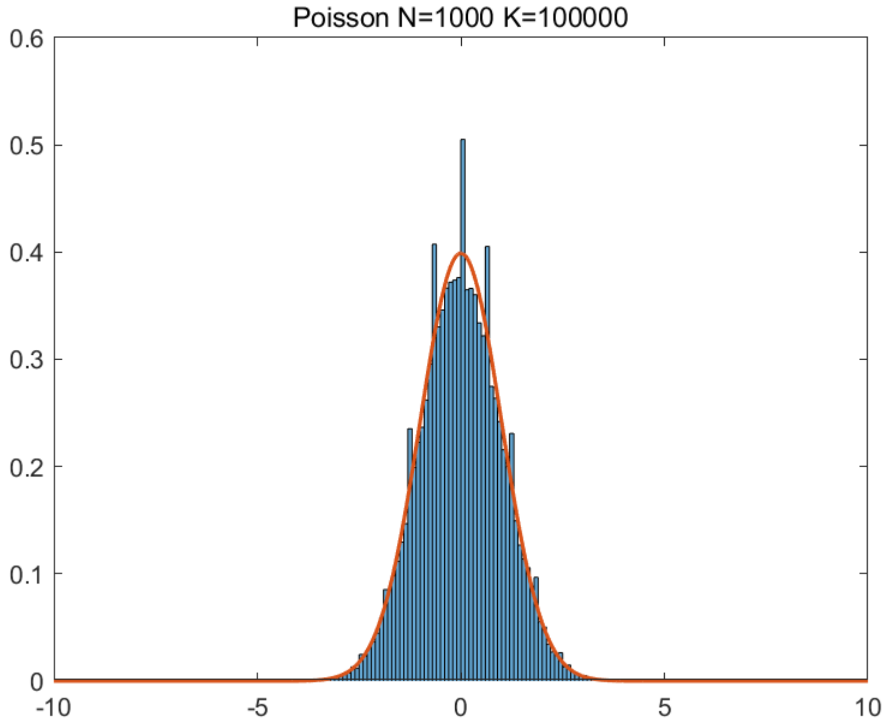


可以看到当我们取$N=10$时已经比较接近标准正态分布，当$N=100$时二者吻合的更好。

3.2 泊松分布

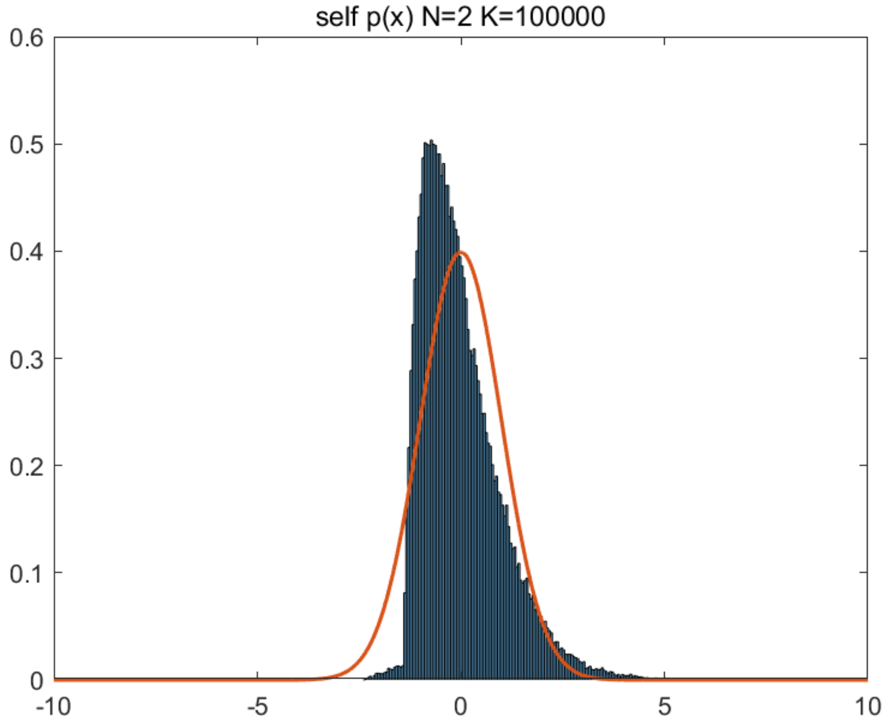


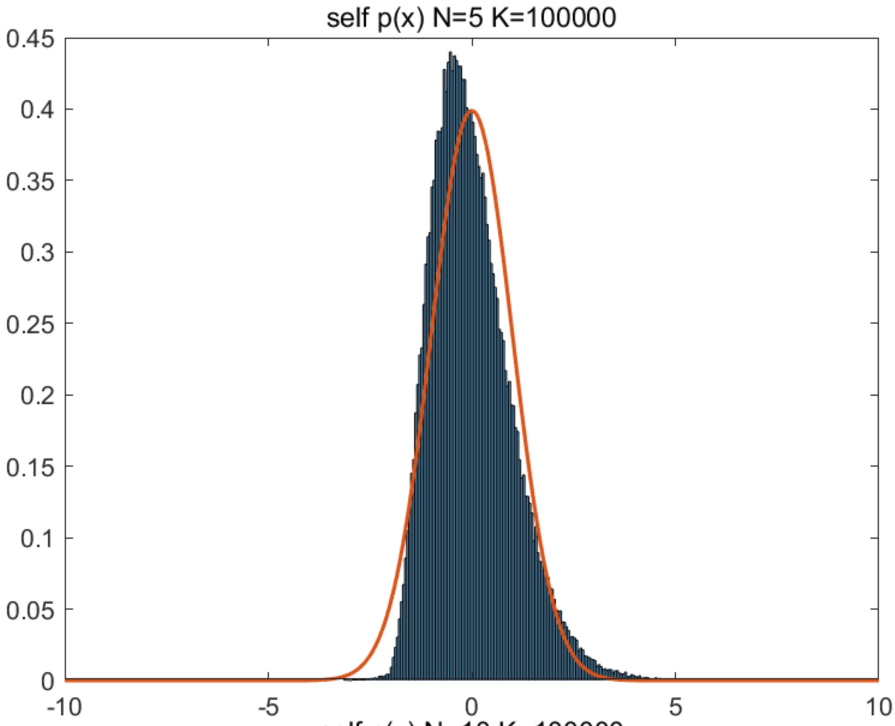

Poisson N=5 K=100000
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
-10
-5
0
5
10
Poisson N=10 K=100000
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
-10
-5
0
5
10

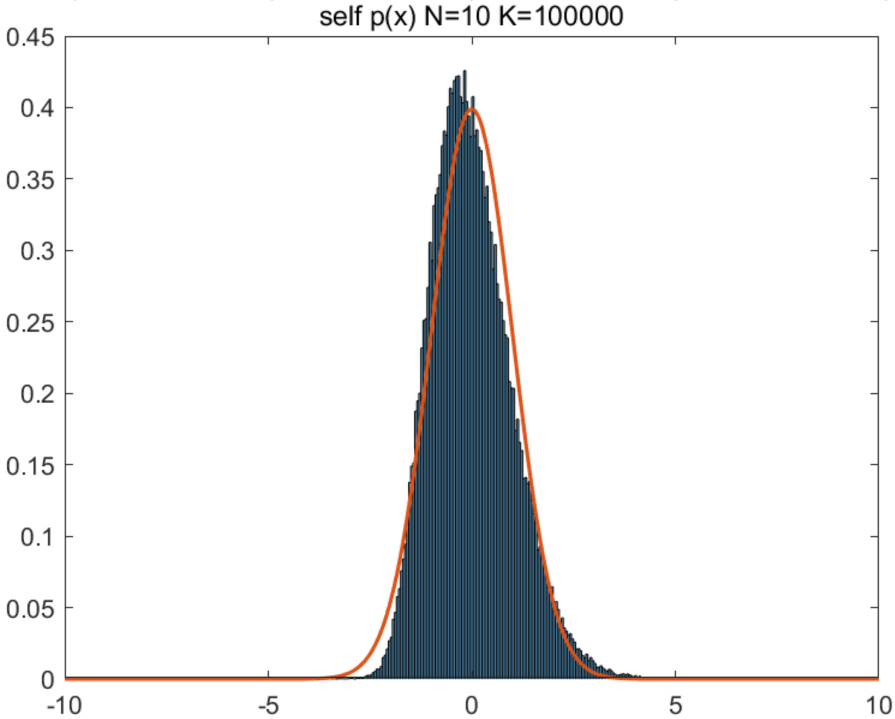


可以看出离散的泊松分布相较于连续的指数分布，收敛速度慢了很多，即使取到$N = 1000$，仍会有少数比较突出的误差点。

3.3 自设分布$p(x)$







自设的分布$p(x)$也是连续分布，作出的图像和指数分布差别不大，在$N=10$时已然接近于标准正态分布。

4.总结

（1）随着N的增大，三种不同分布下的$Y=\left|\frac{\langle X\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right|$均越来越接近与标准正态分布，验证了中心极限定理的正确性。

（2）离散分布相较于连续分布收敛的要慢一些，需要N取的更大一些才能与理论吻合的比较好。