计算物理A作业15

吕遨 PB19030789

1.作业题目

以$x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$为迭代方程进行迭代：

（1）画出系统状态随参数λ的变化图，要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态；

（2）列出各个倍周期分叉处的λ，求相应的Feigenbaum常数。

2.算法和主要公式

2.1 迭代

在非线性方程迭代过程中，迭代函数的行为十分敏感地依赖于非线性的程度，即参数λ的大小。不同参数选择会导致系统最终处于完全不同的状态，比如稳态、周期态或者混沌态。

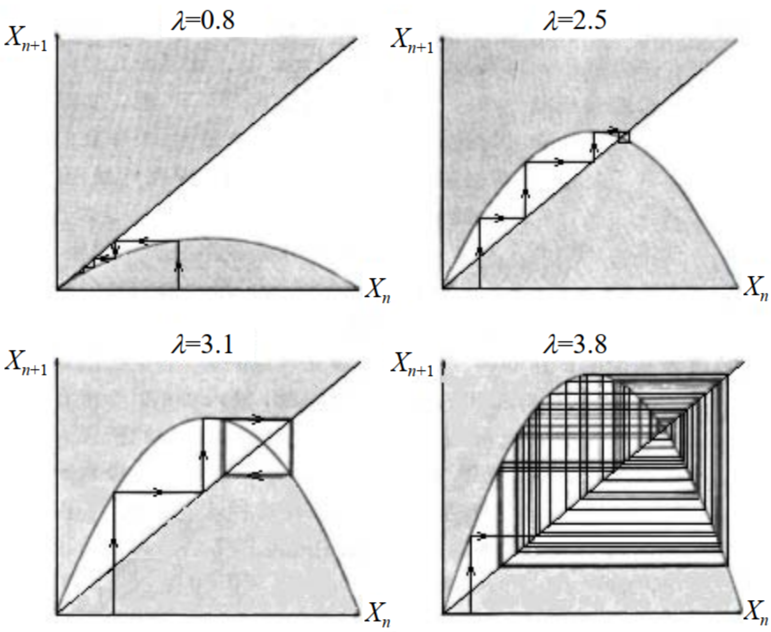


图 2.1　不同参数下的 Logistic 映射过程[3]

2.2 Feigenbaum常数

在迭代过程中，倍周期分叉间隔$\lambda_m - \lambda_{m-1}$愈来愈小，但前后分叉间距的比值趋向一个常数$\delta = 4.669201$。而且$\delta$是不依赖于迭代函数的普适常数。

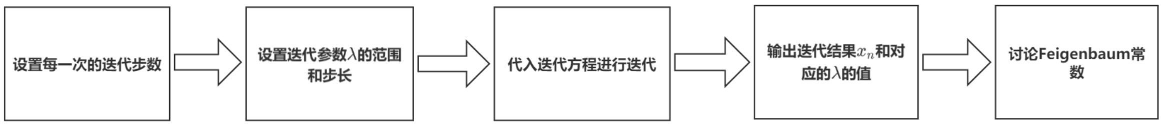
同时在纵轴方向上分叉纵向间距d_1, d_2, d_3等值。Feigenbaum发现$d_m/d_{m+1} \to \alpha(m \to \infty)$。这里$\alpha$也是一个普适常数，其数值为$\alpha = 2.502907875095892822283902873$。

δ和α这两个普适常数后来被称为Feigenbaum常数。

2.3 算法和程序说明

利用迭代方程生成迭代结果$\{x_n\}$序列，做出系统状态随参数λ的变化图像，改变λ的范围多次观察比较。这一过程在程序chaos.c中进行。这一部分产生的数据量比较大，最后的压缩文件里只放了λ其中一个范围的数据。

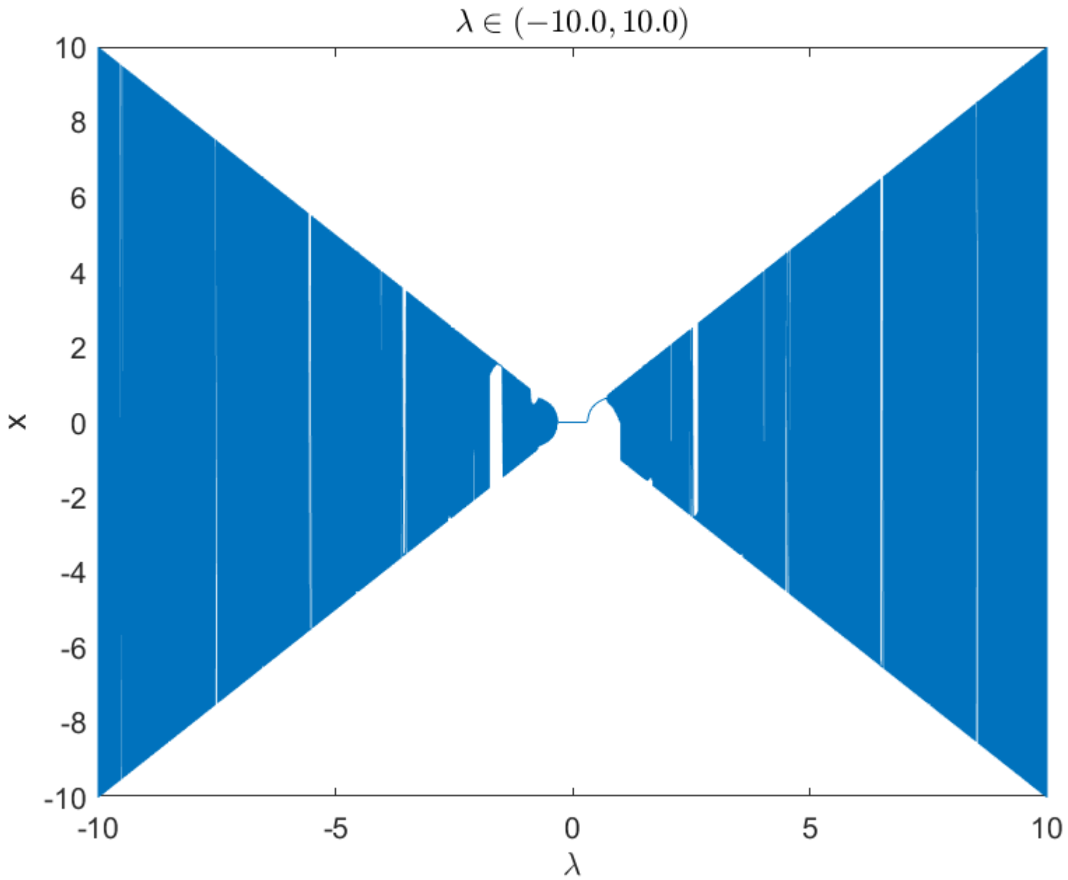
考虑2周期到64周期的分叉情况，记录每一次周期分叉处的λ值,由此计算Feigenbaum常数。这一过程在Feigenbaum.c中进行。



3.计算结果及分析

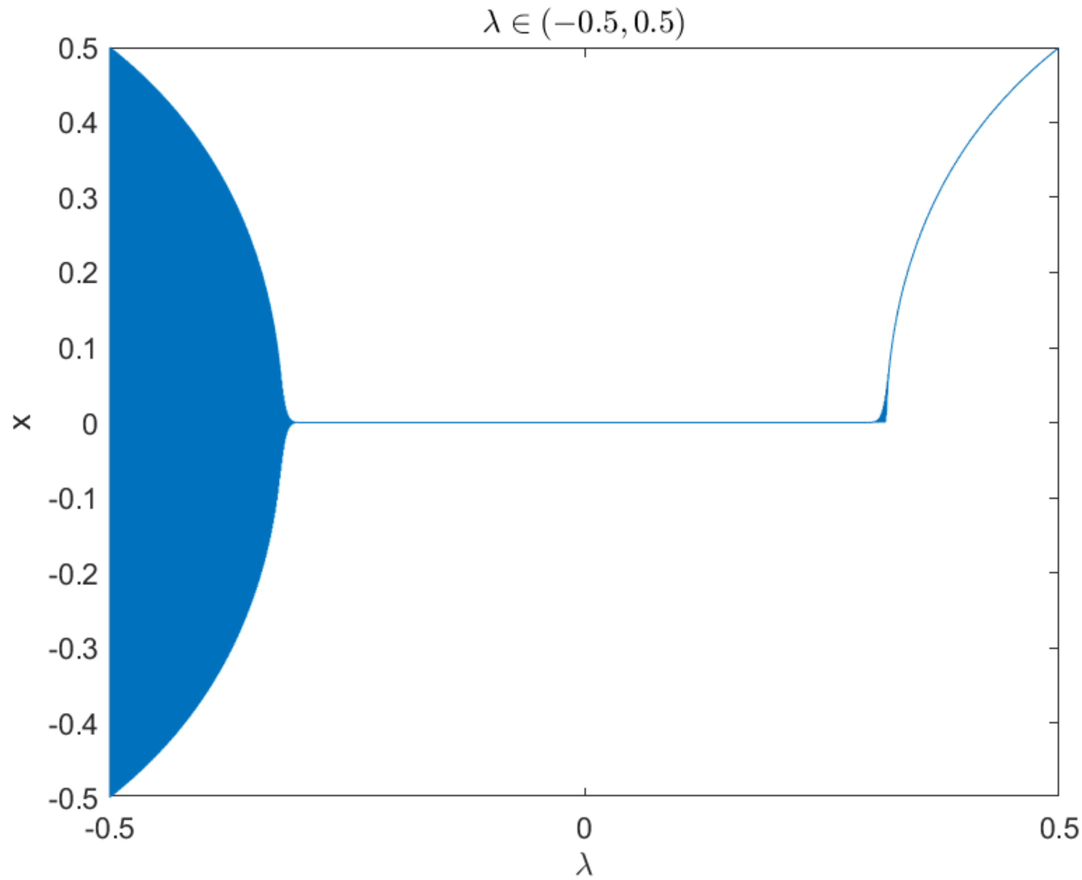
3.1 系统状态随参数λ的变化

先将λ的范围取为$(-10, 10)$，整体观察

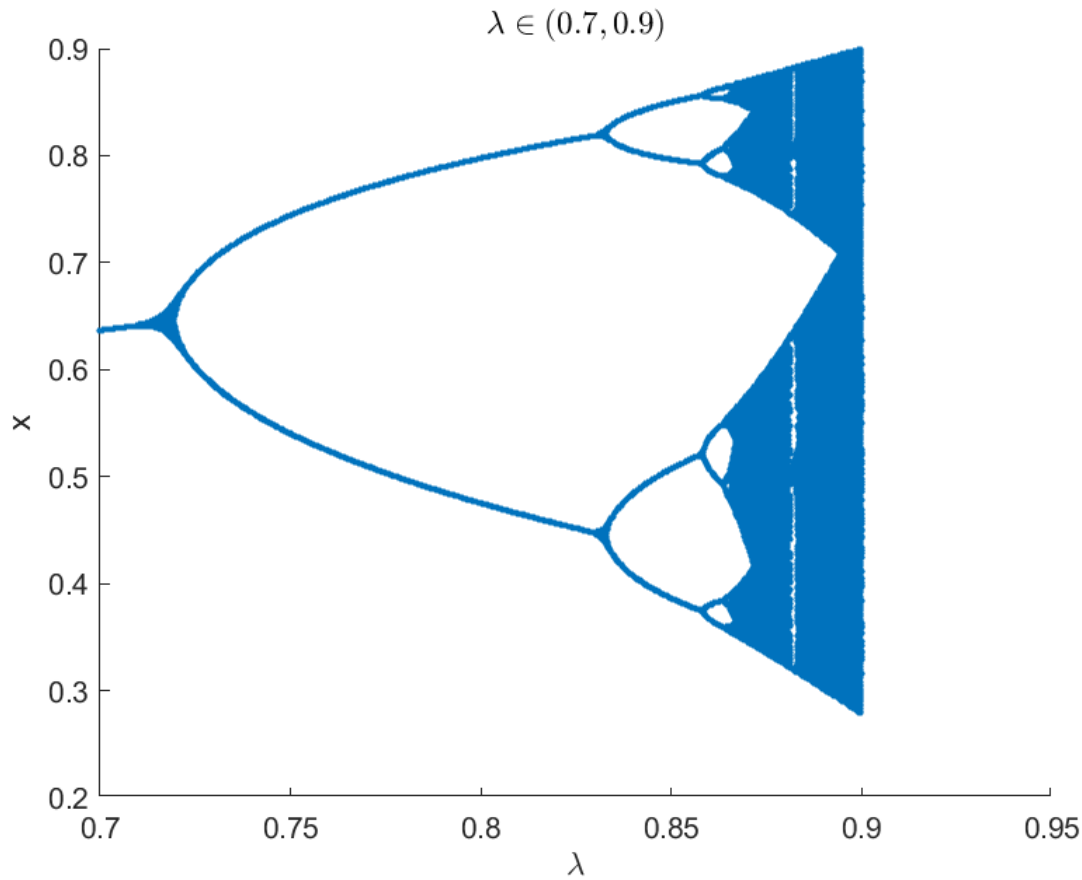


从上图中可以很明显的看出参数λ变化过程中出现的定值状态，周期状态以及混沌态。

下面将λ的范围缩小，观察图像的局部特征。



在$\lambda \in (-0.5, 0.5)$范围内可以很清楚看到系统处于定值状态（稳态）的情形。



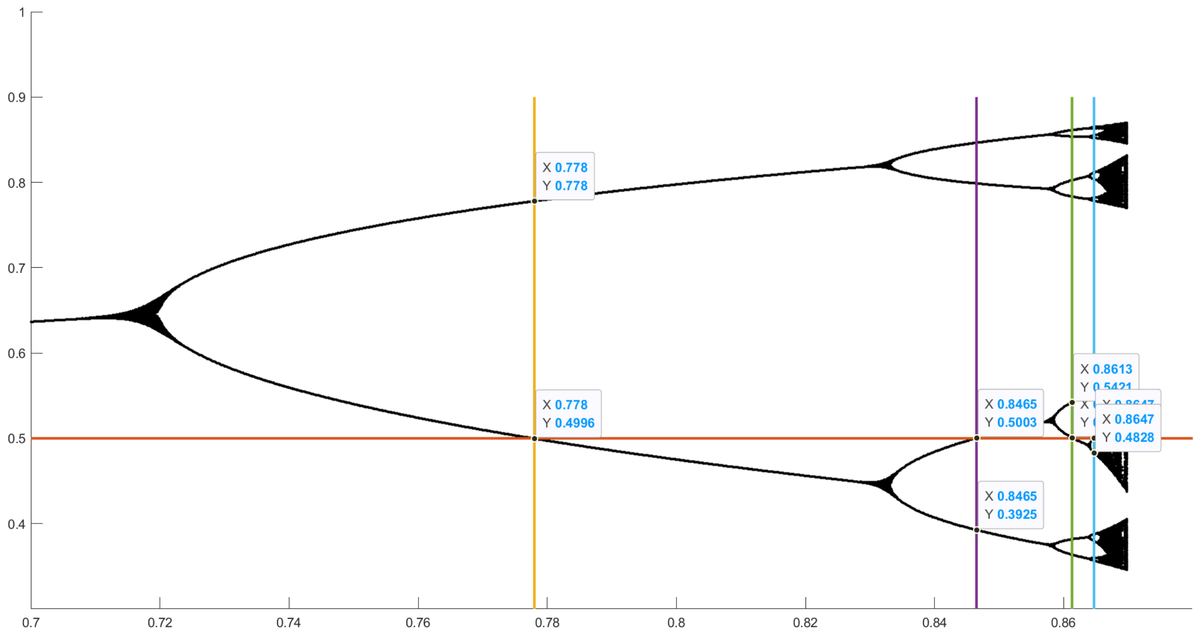
在$\lambda \in (0.7, 0.9)$范围内可以很清楚看到系统处于倍周期分叉状态的情形。

3.2 Feigenbaum常数的计算

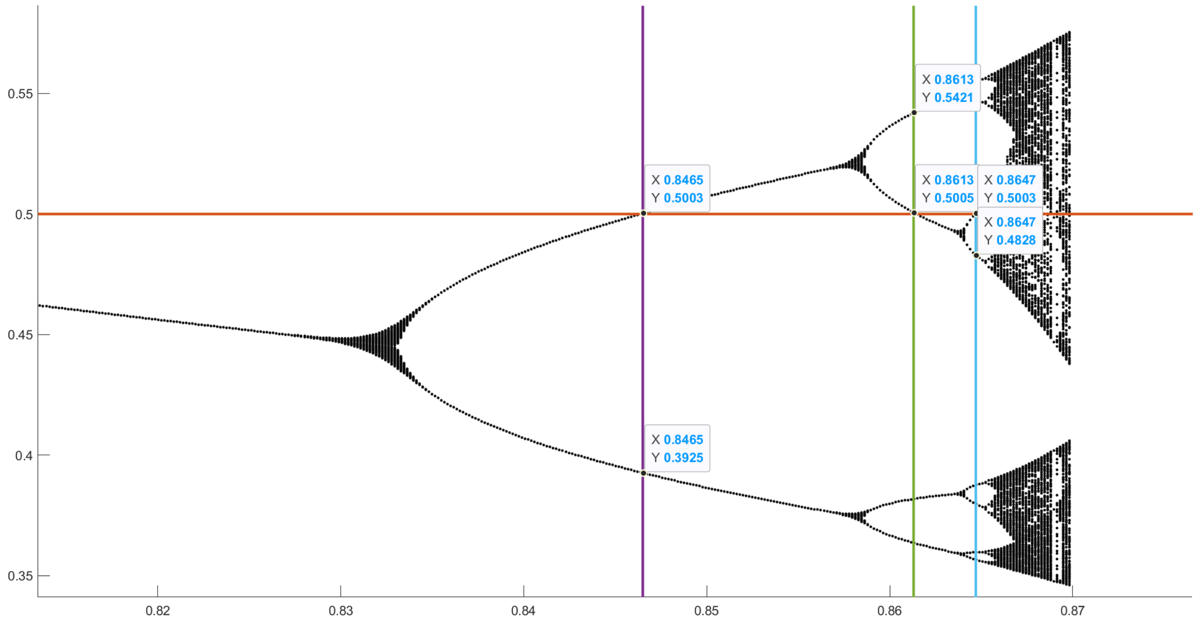
m	分叉	分叉处λ的值	$\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}$
1	$1\to 2$	0.7198504000	
2	$2\to 4$	0.8332649200	4.474772
3	$4\to 8$	0.8586102400	4.632633
4	$8\to 16$	0.8640812800	4.643085
5	$16\to 32$	0.8652596000	4.652242
6	$32\to 64$	0.8655128800	

由上表可以看到我们求出的Feigenbaum常数δ与理论值4.669201是比较接近的。误差可能主要来源于判断是否发生了周期性的分叉，由于连续两个数值非常接近，所以不太好比较。

下面求另一个Feigenbaum常数α。根据定义：



上图右下角部分放大如下图所示：



分叉	d_m	$\alpha = \frac{d_m}{d_{m+1}}$
$1 \to 2$	0.2784	
$2 \to 4$	0.1078	2.5826
$4 \to 8$	0.0416	2.5913
$8 \to 16$	0.0175	2.3771

这里求出的α与理论值2.5029比较接近。误差主要来源是不好确定图上各交点的准确坐标，因为连续两个点之间很接近。

4.总结

（1）本次作业中我们讨论了非线性方程迭代过程中系统出现的不同状态，直观上理解了混沌，倍周期分叉等现象。

（2）定量计算出的Feigenbaum常数与理论值会有一定的误差，主要原因是相邻相邻两个迭代点之间很接近，不好区分。