

计算物理A作业4

吕邀 PB19030789

1.作业题目

设pdf函数满足关系式

$$p'(x) = a\delta(x) + be^{-cx}, x \in [-1, 1]$$

讨论该函数的性质并给出抽样方法。

2.讨论函数性质

首先对题中所给关系式积分得到 $p(x)$ 的表达式：

$$p(x) = aH(x) - \frac{b}{c}e^{-cx} + d$$

其中 $H(x)$ 为Heaviside step function，即单位阶跃函数。 d 为积分常数。

概率密度函数 $p(x)$ 必须满足归一化条件

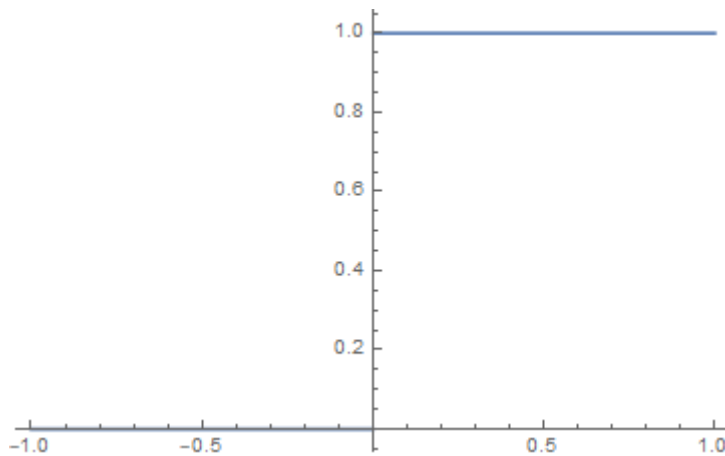
$$\int_{-1}^1 p(x)dx = 1$$

得到

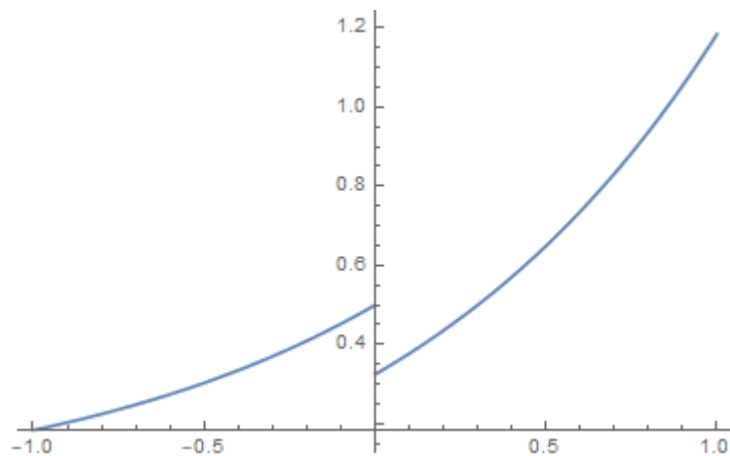
$$a - \frac{2b}{c^2}\sinh c + 2d = 1$$

这是参数 a, b, c, d 必须满足的条件。

最简单的情形，直接取 $a = 1, b = 0, d = 0$ ，此时 $p_1(x) = H(x)$ 满足归一化条件。



再考虑取 $a = 1 - \sinh 1, b = 0.5, c = -1, d = 0$ ，此时 $p_2(x) = (1 - \sinh 1)H(x) + \frac{1}{2}e^x$ ，做出图像大致观察：



事实上，只要参数 $a \neq 0$ 因为 $H(x)$ 的存在，都会使这个概率密度函数 $p(x)$ 存在间断点。其他参数选择对 $p(x)$ 性质的影响不大。

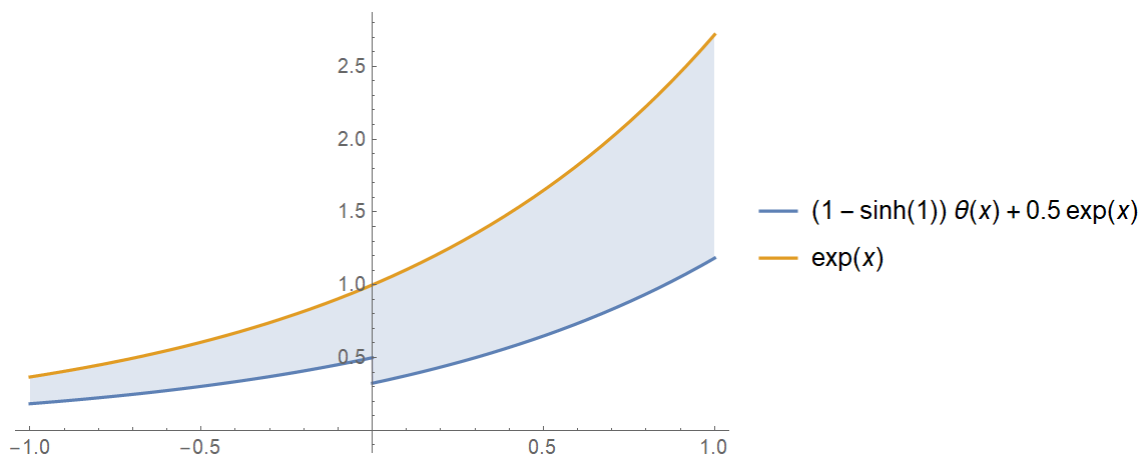
3.讨论抽样方法

(1) 对于 $p_1(x)$ ，我们考虑用简单抽样，先计算累积函数

$$\xi(x) = \int_{-1}^x p_1(x) dx = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

所以 ξ 只需取 $[0, 1]$ 之间随机数即可。

(2) 对于 $p_2(x)$ 可尝试使用舍选抽样，选择 $F(x) = e^x$ 作为比较函数。



抽样的方法是在区间 $[0, 1]$ 上生成两个随机数序列 ξ_1, ξ_2 。在 x 方向上，按权重 $F(x)$ 分布，即

$$\xi_1 = \frac{\int_{-1}^{\xi_2} F(x) dx}{\int_{-1}^1 F(x) dx}$$

反解得

$$\xi_x = \ln \left(\frac{1}{e} - 2\xi_1 \sinh 1 \right)$$

在 y 方向上

$$\xi_y = F(\xi_x)\xi_2$$

判断 $\xi_y \leq p_2(x)$ 是否成立，是则取，否则舍。

这种方法的抽样效率只有 $\int_{-1}^1 p_2(x) dx / \int_{-1}^1 F(x) dx = 0.426$ 。

4.总结

(1) 此题中给出的概率密度函数形式上有间断点，是比较特殊的密度函数。基于不同的参数选择，该函数大致呈现指数函数的类型，只是会有间断点。

(2) 舍选抽样会降低抽样效率。选择比较函数时尽可能选择与抽样函数大致形状和趋势相似的函数，这样会比较方便，也可以提高抽样的效率。