

计算物理A作业2

吕邀 PB19030789

1.作业题目

用16807产生器测试随机数序列中满足关系 $X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的比重。讨论Fibonacci延迟产生器中出现这种关系的比重。

2.算法和主要公式

(1) Lehmer线性同余随机数产生器

$$I_{n+1} = (aI_n + b) \bmod m$$
$$x_n = I_n/m$$

在本实验中我们采用16807随机数产生器, 即 $a = 16807, b = 0, m = 2^{32} - 1$ 。

(2) 由于计算机不能自动取模, 故在计算过程中有可能产生数据溢出的情况, 为此我们设计了Schrage方法来进行取模:

设 m 可表示为

$$m = aq + r, q = \lfloor m/a \rfloor, r = m \bmod a$$

则对 $r < q$ 和 $0 < z < m - 1$ 容易得到

$$az \bmod m = \begin{cases} a(z \bmod q) - r[z/q], & \text{if } \geq 0 \\ a(z \bmod q) - r[z/q] + m, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(3) Fibonacci延迟产生器的思想是用序列中的两个整数进行操作得到后续的整数:

$$I_n = I_{n-p} \otimes I_{n-q}$$

其中 \otimes 可以表示加法, 减法或XOR运算等。整数对 $[p, q]$ 表示延迟。本实验中我们采用16807随机数产生器产生Fibonacci产生器的前

$\max(p, q)$ 个数据, 运算符采用加法运算符。

在《计算机程序设计艺术》的第三章中列出了一些产生长周期的延迟整数对, 这里我们随意选择几组应用到本次程序中:

表 1 产生长周期模 2 的延搁

(24, 55)	(37, 100)	(83, 258)	(273, 607)	(576, 3217)	(7083, 19937)
(38, 89)	(30, 127)	(107, 378)	(1029, 2281)	(4187, 9689)	(9739, 23209)
对于本表的扩充, 请见 N. Zierler 和 J. Brillhart, <i>Information and Control</i> 13 (1968), 541 ~ 554, 14 (1969), 566 ~ 569, 15 (1969), 67 ~ 69; 栗田良春 (Y. Kurita) 和 松本真 (M. Matsumoto), <i>Math. Comp.</i> 56 (1991), 817 ~ 821; Heringa, Blöte 和 Compagner, <i>Int. J. Mod. Phys. C3</i> (1992), 561 ~ 564					

3.计算结果及分析

理论上，如果我们产生的随机数质量足够好，且总点数N足够大，我们很容易由概率论的知识得到满足关系 $X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的比重为 $\frac{1}{6}$ ，因为它等价于在三维空间 $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ 中满足 $x < y < z$ 的概率。

下面展示程序实际运行结果

```
The account  $X_{n+1} > X_{n-1} > X_n$  of 16807 generator is 0.165990
The account  $X_{n+1} > X_{n-1} > X_n$  of Fibonacci generator(p=24,q=55) is 0.167860
The account  $X_{n+1} > X_{n-1} > X_n$  of Fibonacci generator(p=37,q=100) is 0.166380
The account  $X_{n+1} > X_{n-1} > X_n$  of Fibonacci generator(p=38,q=89) is 0.166060
The account  $X_{n+1} > X_{n-1} > X_n$  of Fibonacci generator(p=30,q=127) is 0.167350
The account  $X_{n+1} > X_{n-1} > X_n$  of Fibonacci generator(p=103,q=250) is 0.166270
```

随机数产生器	$X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的比重	误差
16807	0.165990	0.006767
Fibonacci($p = 24, q = 55$)	0.167860	0.001193
Fibonacci($p = 37, q = 100$)	0.166380	0.000287
Fibonacci($p = 38, q = 89$)	0.166060	0.000607
Fibonacci($p = 30, q = 127$)	0.167350	0.000683
Fibonacci($p = 103, q = 250$)	0.166270	0.000397

4.总结

- 1.从实验结果来看，Fibonacci延迟产生器产生的随机数质量稍稍优于16807随机数产生器。
- 2.选择不同的延迟整数对，由Fibonacci延迟产生器产生的随机数质量也不尽相同。在本实验中相对来说 $(p, q) = (37, 100)$ 这组数产生的随机数质量最好。讲义上提到，一般来说满足 $p^2 + q^2 + 1 = prime$ 的Mesine素数效果比较好，且 $[p, q]$ 较大时效果更好。实验结果与这一规则不完全符合，可能是由于取的点数N不够大，也说明参数的选择是一个多因素影响的复杂过程，不能完全依赖某一条准则。