计算物理A作业5

吕遨 PB19030789

1.作业题目

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在(x,y)平面上投影的几率分布函数。并由此验证Marsaglia抽样方法$x=2u\sqrt{1-r^2},y=2v\sqrt{1-r^2},z=1-2r^2$确为球面上均匀分布的随机抽样。

2.算法和主要公式

2.1 公式推导

2.1.1 球面上的随机坐标点在(x,y)平面上的投影

在第三题中我们已经推导过球面上均匀分布的点的几率分布函数$p(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}$，下面需要考虑球坐标和直角坐标的坐标变换：

$$\begin{cases} x=\sin\theta\cos\varphi \\ y=\sin\theta\sin\varphi \\ z=\cos\theta \end{cases}$$

相应的$Jacobi$行列式为$\left|\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(x,y)}\right|=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$，所以我们可以得到在$(x,y)$平面上投影的几率密度函数$g(x,y)$满足：

$$p(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上下半球关于(x,y)平面对称，投影相同，所以可以只考虑上半球面的投影，此时取$p(\theta,\varphi)=\frac{1}{2\pi}$，则

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi\cos\theta}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

这就得到了我们要求的平面上投影的几率密度函数。可以看到$r^2=x^2+y^2$越大，$g(x,y)$越大，说明随机点的分布会有中间稀疏边缘密集的特征，这一特征我们之后将作图验证。

2.1.2 Marsaglia抽样

三维球面上Marsaglia抽样的基本方法是：

（1）随机抽样一对均匀分布的随机数$(u,v)\in[0,1]$；

（2）计算$r^2=u^2+v^2$，如果$r^2>1$则重新抽样直至$r^2\leq 1$；

（3）得$x=2u\sqrt{1-r^2},y=2v\sqrt{1-r^2},z=1-2r^2$。

下面计算由Marsaglia方法得到的三维球面坐标点在(x,y)平面上的投影。

由于(u,v)均被限制在单位圆内，所以$p(u,v)=\frac{1}{\pi}$.

且$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=4(1-2(u^2+v^2))=4\sqrt{1-x^2-y^2}$.

这里我们要注意在(u,v)平面上单位圆周和原点经过上述变换之后都会映射到(x,y)的原点，所以这一个变换并不是一个一一对应的映射。

我们尝试加入一个常数对相应的几率密度函数进行简单的伸缩变化，即

$$Cp(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

得到$g(x,y)=\frac{C}{4\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$，由归一化条件$\iint g(x,y)=1$可以确定常数$C=2$，则$g(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$。可见我们用Marsaglia抽样得到的$g(x,y)$与直接抽样得到的结果相同。

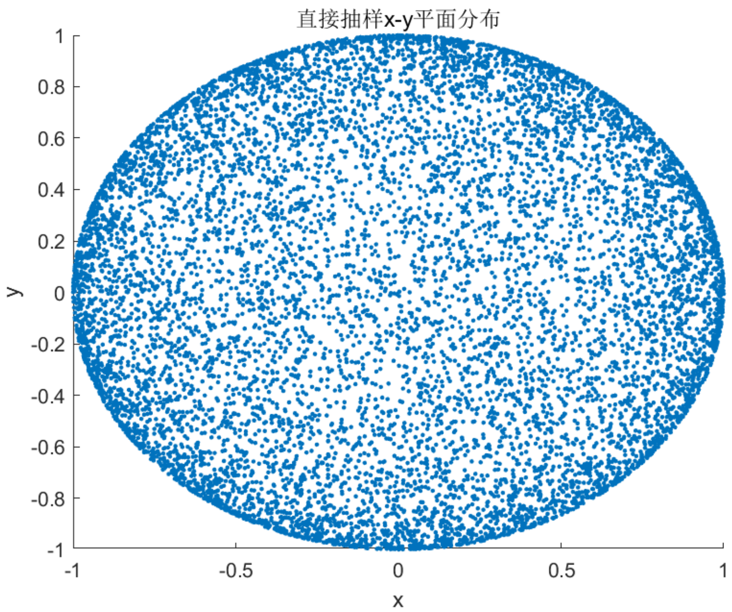
2.2 算法和程序说明

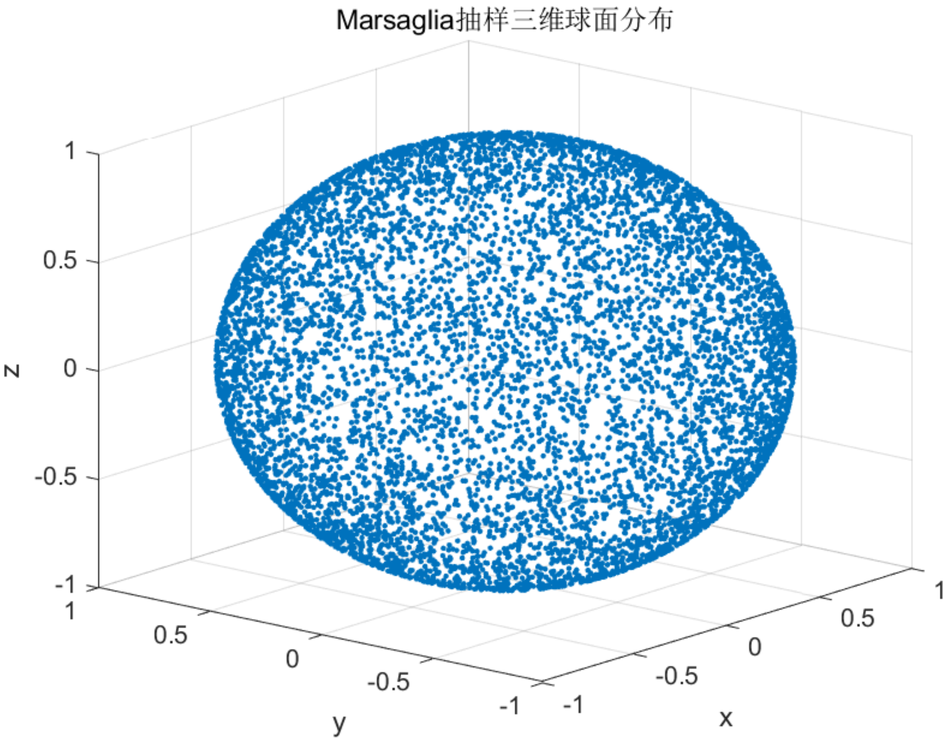
（1）首先我们用第三题中的程序用直接抽样的方法生成球面上的随机坐标点，作图观察其在(x,y)平面上投影点的分布，这一步在 direct_sampling.c程序中实现，相关数据保存在direct_xyz.txt文件中。

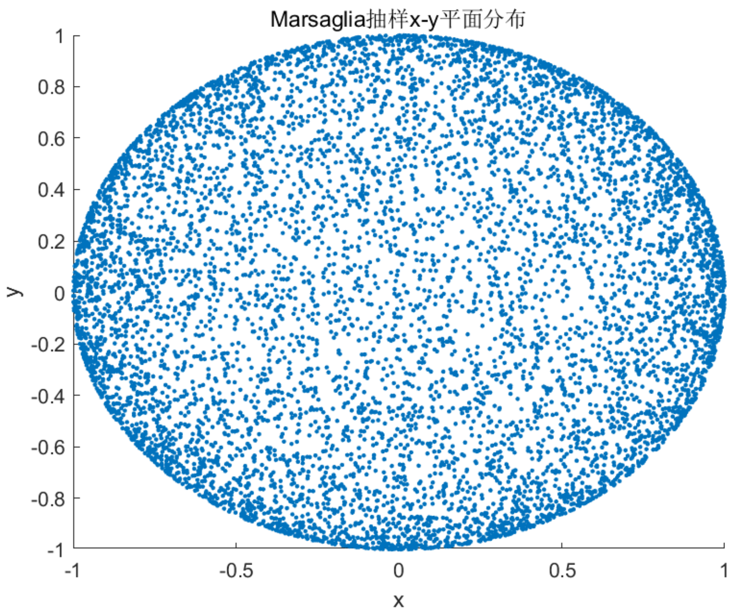
（2）我们用Marsaglia方法抽样得到三维球面上均匀分布的坐标点，同样作图观察其在(x,y)平面上投影点的分布，这一过程在marsaglia_sampling.c程序中实现，相关数据保存在marsaglia_xyz.txt文件中。

3.计算结果及分析

计算结果见下图：







从直观上看，Marsaglia抽样方法和直接抽样的效果基本一致。可以看到球面上的均匀分布在二维平面上的投影表现出中间稀疏，边缘密集的特征，这一特征我们已经在第2部分中分析$g(x,y)$性质时得到。

4.总结

Marsaglia抽样也是一种比较有效的抽样方法，在解决（高维）球面上均匀分布的抽样问题时可以避免计算三角函数，得到的效果也与直接抽样的效果相同。但Marsaglia抽样也有缺点，因为抽样过程中会舍弃掉不符合条件的点，所以会导致效率降低，特别是球面维度升高时。