

计算物理A作业3

吕邀 PB19030789

1.作业题目

在球坐标系 (ρ, θ, φ) 下, 产生上半球面均匀分布的随机坐标点, 给出其直接抽样方法。

2.算法和主要公式

2.1 公式推导

在上半单位球面 $(\rho = 1)$ 上随机抽样, 角分布的概率密度函数 $p(\theta, \varphi)$ 是与点的位置无关的常数。

且有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi p(\theta, \varphi) \sin \theta = 1$, 则可得到 $p(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}$ 。

关于 θ 的角分布 $p(\theta)d\theta = (\int_0^{2\pi} d\varphi p(\theta, \varphi)) \sin \theta d\theta$, 则 $p(\theta) = \sin \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 。

关于 φ 的角分布 $p(\varphi)d\varphi = (\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta p(\theta, \varphi) \sin \theta) d\varphi$, 则 $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \varphi \in [0, 2\pi]$ 。

在本题中我们采取直接抽样法, 应有两个累积函数

$$\xi_1(\theta) = \int_0^\theta p(\theta) d\theta = 1 - \cos \theta, \xi_2(\varphi) = \int_0^\varphi p(\varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2\pi}$$

ξ_1 和 ξ_2 是 $[0,1]$ 区间上生成的两组伪随机数, 即得到

$$\cos \theta = 1 - \xi_1, \varphi = 2\pi\xi_2$$

换成直角坐标有

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

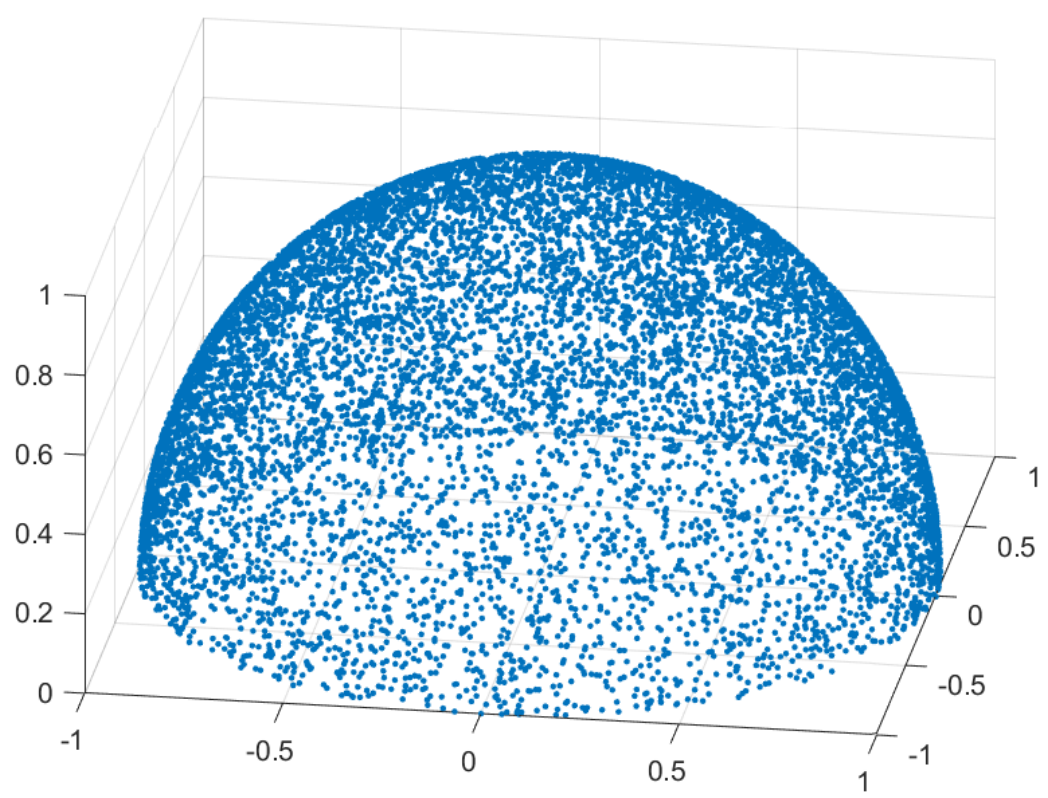
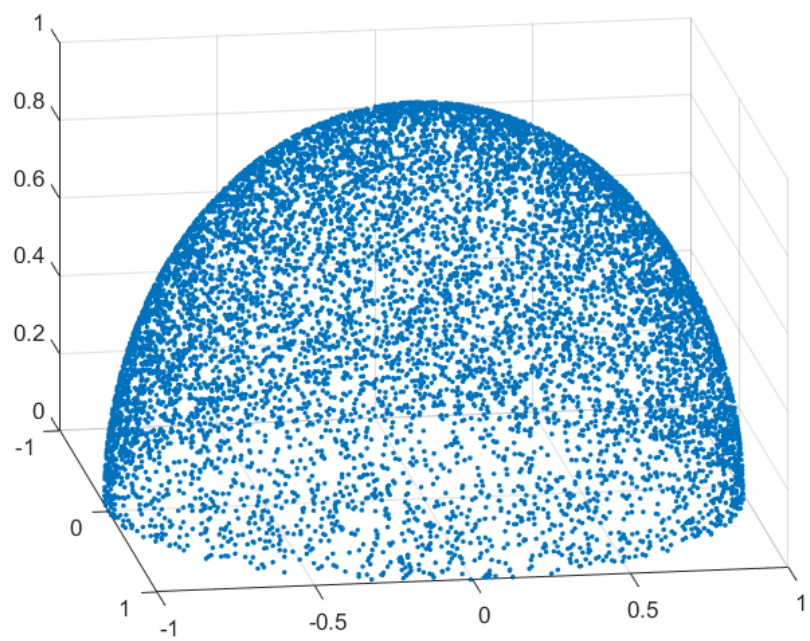
2.2 算法和程序说明

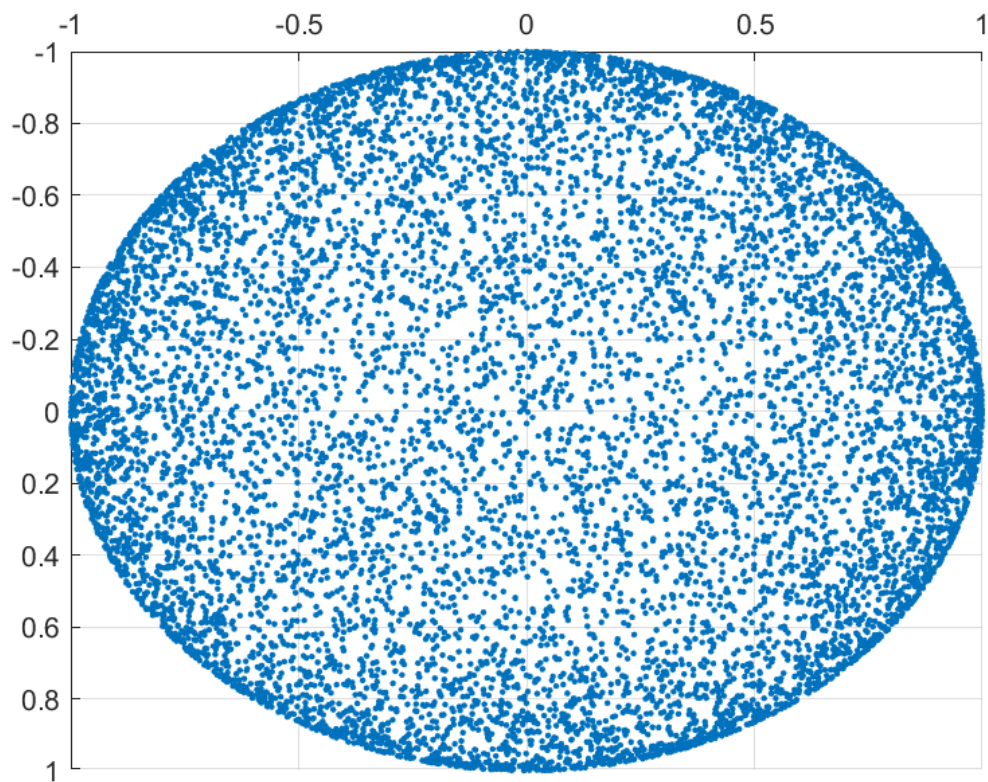
我们采用16807随机数产生器在 $[0,1]$ 内产生 $2N$ 个随机数作为上面提到的累积函数 ξ_1 和 ξ_2 , 按照2.1中推导的公式得到 $\cos \theta$ 和 φ , 再变换到直角坐标系中得到 N 个 (x, y, z) 点的坐标。以上过程我们在sampling_on_sphere.c程序中即可完成。

将生成的数据导入Matlab, 作图观察抽样效果。

3.计算结果及分析

本程序中取 $N = 10000$, 用产生的随机数点作图如下 (同一张图, 三个不同角度观察):





从三维图可以直观看出直接抽样所生成的点在球面上是均匀分布的，而球面上的均匀分布在二维平面上投影看起来中间稀疏边缘密集，这一特性将在第5题中详细讨论。

4.总结

直接抽样法简单直接，生成的上半球面随机数点直观来看比较均匀，表明直接抽样法在这种情况下是一种比较有效的方法。