上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程论文

COURSE PAPER

论文题目：2020 年秋季学期计算方法大作业

学生姓名:	吕东旭
学生学号:	020039910004
课程名称:	计算方法
指导教师:	曾进
学 院 (系):	微纳电子学系

计算方法大作业: 用不同数值方法计算积分 $\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx = -\frac{4}{9}$

1. 利用复化梯形公式和复化辛普森公式计算积分

取不同的步长 h，分别用复化梯形公式和复化辛普森公式计算积分，给出误差中关于 h 的函数，并与积分精确值比较两个公式的精度，是否存在一个最小的 h，使得精度不能再被改善？

本问题可以分解为三个子问题：

- 利用复化梯形公式求解给定积分问题，并给出误差中关于 h 的函数。
- 利用复化辛普森公式求解给定积分问题，并给出误差中关于 h 的函数。
- 与积分精确值比较复化梯形公式和复化辛普森公式的精度。
- 探究：是否存在一个最小的 h，使得精度不能再被改善？

根据以上分类，我们用以下四小节来分别解答这四个问题。

1.1 利用复化梯形公式求解给定积分问题，并给出误差中关于 h 的函数

令 $f(x) = \sqrt{x}\ln x$，设将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，等分点 $x_k = a + kh$，$h = \frac{b-a}{n}, k = 0,1,2,3,...,n$。由此得到复化梯形公式：

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)] \tag{0–1}$$

复合梯形公式的余项为：

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta), \eta \in (0,1) \tag{0–2}$$

在本题中，$a = 0, b = 1$，且因为 $f(0) \to -\infty$，我们这里令 $f(0) = \lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x$，同时 $f(1) = 0$。等分点 x_k 也可以写作：$x_k = kh$，其中 $h = \frac{1}{n}, k = 0,1,2,3,...,n$。根据以上分析，$f(x)$ 的复化梯形公式可以写为：

$$T_n = \frac{h}{2}\left(\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{kh}\ln(kh)\right) \tag{0–3}$$

计算 $f(x)$ 的各阶导数：

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\ln x + 2)\\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\ln x\\
f^{(3)}(x) &= \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{2}}(\frac{3}{2}\ln x - 1)\\
f^{(4)}(x) &= x^{-\frac{7}{2}} - \frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}\ln x
\end{aligned} \tag{0–4}$$

将上式带入公式 (0–2) 中，得到 $f(x)$ 复化梯形公式的误差函数：

$$R_n(f) = \frac{h^2}{48}\eta^{-\frac{3}{2}}\ln\eta \tag{0–5}$$

1.2 利用复化辛普森公式求解给定积分问题，并给出误差中关于 h 的函数

1.3 与积分精确值比较复化梯形公式和复化辛普森公式的精度

1.4 探究：是否存在一个最小的 h，使得精度不能再被改善？

致　谢

感谢那位最先制作出博士学位论文 LaTeX 模板的交大物理系同学！
感谢 William Wang 同学对模板移植做出的巨大贡献！
感谢 @weijianwen 学长一直以来的开发和维护工作！
感谢 @sjtug 以及 @dyweb 对 0.9.5 之后版本的开发和维护工作！
感谢所有为模板贡献过代码的同学们, 以及所有测试和使用模板的各位同学！
感谢 LaTeX 和 SJTUThesis，帮我节省了不少时间。