

Modelagem Matemática e Computacional

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Professor: S. C. Coutinho

Pêndulo Duplo

Autores:

Bernardo Teixeira Ventura 119164074

Lucas Vilar Carneiro 119108874

1. Introdução

Um dos campos do estudo de sistemas dinâmicos são os sistemas caóticos, onde mesmo sendo conhecido o modelo matemático do mesmo, ou seja, o conjunto de equações diferenciais que regem o mesmo, a solução do problema é de certa forma instável ou imprevisível. Desta forma, pequenas variações nas condições iniciais podem gerar soluções completamente divergentes, o que não é o esperado mesmo na solução de equações diferenciais, mesmo sendo elas não lineares. De acordo com [3], um sistema é caótico se os mesmos foram sensíveis a condições iniciais, ser topologicamente transitivos e ter órbitas periódicas densas. As duas últimas características são conceitos matemáticos cujas definições e análise foge ao escopo deste trabalho, porém a sensibilidade a condições iniciais, também conhecida como “efeito borboleta” caracteriza o acima descrito, tendo sido primeiramente mencionado em [4], afirmando e discutindo o comportamento de sistemas caóticos sujeitos a variações das condições iniciais ou de parâmetros, tendo sido Henry Poincaré o responsável por propor e iniciar os estudos da teoria do caos, na década 1860.

Alguns dos problemas clássicos de sistemas caóticos são o Trator de Lorenz, descrito pelas conjunto de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma y - \sigma z \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - xz - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

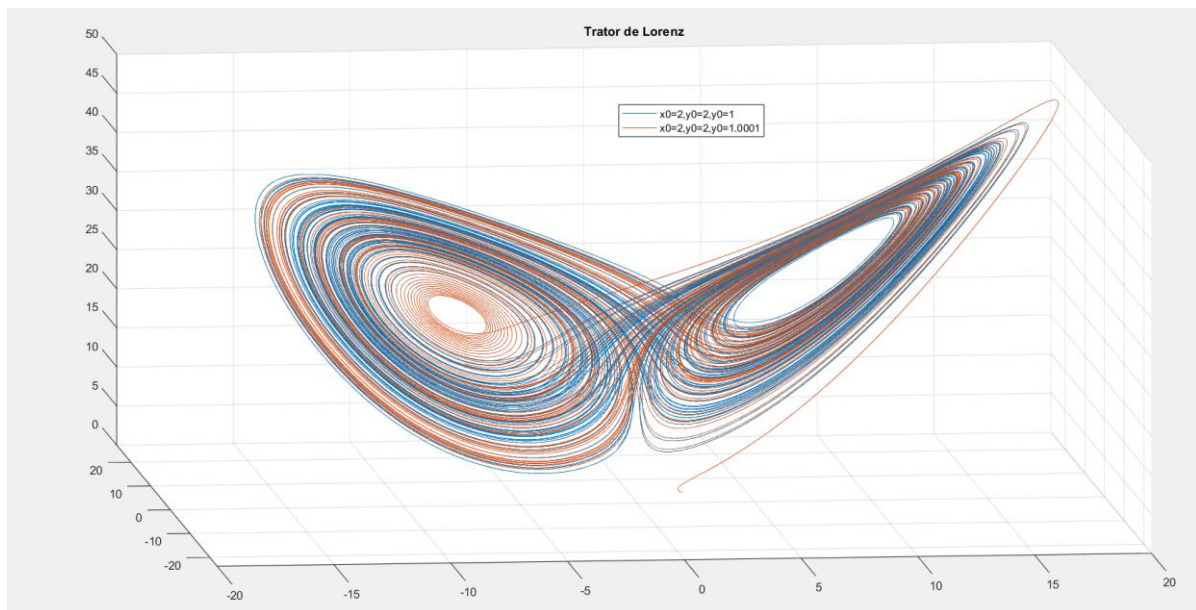


Figura 1: Trajetórias obtidas variando-se uma das condições iniciais em 10^{-4} para o trator de Lorenz.

Outro sistema, similar ao Trator de Lorenz, são as Equações de Rossler, descritas em [5], que são da forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + x(z - c)\end{aligned}$$

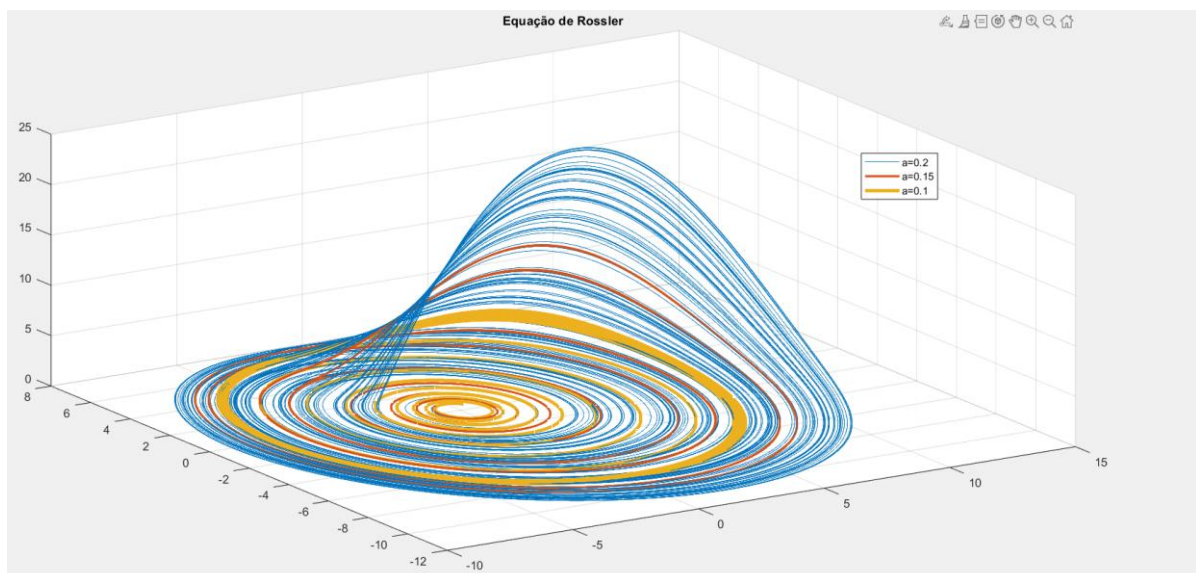


Figura 2: Trajetórias obtidas variando-se um dos parâmetros da Equação de Rössler.

Um terceiro problema caótico de grande relevância é o problema dos 3 corpos, estabelecido por Issac Newton, em 1687, que aborda a influência gravitacional de 3 corpos

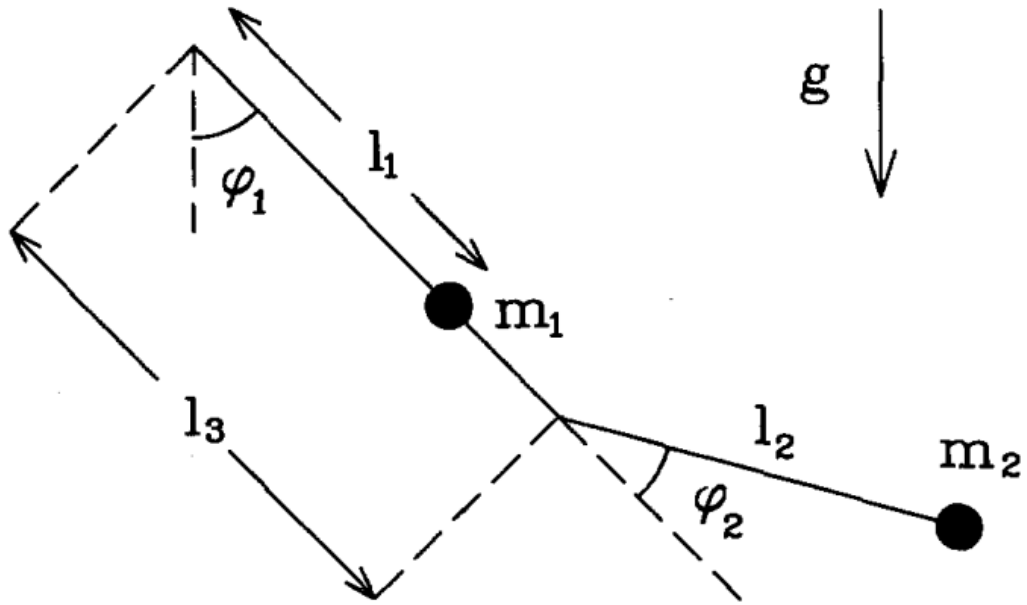
entre si, gerando um sistema com órbitas imprevisíveis, o que não acontece no problema de 2 corpos que possui solução

O presente trabalho irá abordar um problema clássico de dinâmica de sistemas caóticos que é o pêndulo duplo, abordado no artigo em [1] e [2], tanto analiticamente como experimentalmente. Este sistema mecânico aparentemente simples desperta o interesse para estudos de sistemas caóticos pois o mesmo apresenta grande sensibilidade a pequenas variações nas condições iniciais, ou seja, muito embora possamos resolver as equações diferenciais que regem o movimento do mesmo, para pequenas mudanças são obtidos resultados possivelmente divergentes, o que não é esperado ou natural para sistemas “bem comportados”.

2. Modelagem do problema

Por se tratar de um sistema mecânico dinâmico, ele é regido por um conjunto de equações diferenciais de 2ª ordem. A obtenção das equações de movimento pode ser feita com base em 3 teorias, que são equivalentes, mas com abordagens diferentes para o problema, sendo elas: a mecânica Newtoniana, com base na mecânica vetorial e na 2ª Lei de Newton, a mecânica Lagrangeana, com base na Equação de Euler-para minimização de funcionais e no princípio do mínimo esforço de Hamilton, e a mecânica Hamiltoniana, que é uma generalização e ampliação dos conceitos desenvolvidos por Lagrange. Neste trabalho iremos utilizar uma abordagem lagrangeana, exposta no artigo em [1], sendo obtido um sistema de 2 equações diferenciais de 2ª ordem, que será transformado em um sistema de 4 equações diferenciais de 1ª ordem para solução numérica. Os algoritmos que serão empregados na solução numérica deste problema serão o método de Euler e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, todos com passo fixo, sendo implementados em Scilab e Matlab, com o auxílio da ferramenta SIMULINK.

O sistema em análise está descrito na figura abaixo, sendo modelado com base nos dois ângulos (ϕ_1 e ϕ_2), tendo como parâmetros geométricos os comprimentos das hastes e a posição da primeira massa, além do valor das próprias massas em si.



Para o emprego da equação de Lagrange é necessário, primeiramente, construir a energia cinética total (T) do sistema, bem como a sua energia potencial (V). portanto:

$$T = \frac{1}{2}(I_2 + m_2 l_3^2)\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + m_2 l_2 l_3 \dot{\phi}_1(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos \phi_2$$

$$V = g(m_1 l_1 + m_2 l_3)(1 - \cos \phi_1) + m_2 g l_2(1 - \cos(\phi_1 + \phi_2))$$

Onde g é a aceleração da gravidade.

Aplicando a equação de Lagrange, temos que:

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Portanto, as equações para $\ddot{\phi}_1$ e $\ddot{\phi}_2$ considerando $l_3 = l_1$ e desprezando-se os momentos de inércia (I_1 e I_2), são dadas pelos determinantes:

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\sin \phi_2 & -m_1 g \sin \phi_1 & 0 \\ -1 & \cos \phi_2 & -m_1 l_1 \dot{\phi}_1^2 - m_1 g \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 [g \sin(\phi_1 + \phi_2) + l_1 \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_2] & m_2 l_2 \\ 0 & -1 & -m_2 [g \cos(\phi_1 + \phi_2) + l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_2 + l_2(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)] & 0 \end{vmatrix}}{-m_1 m_2 l_1 l_2 - l_1 l_2 m_2^2 \sin^2 \phi_2}$$

$$\ddot{\phi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\sin \phi_2 & m_1 l_1 & -m_1 g \sin \phi_1 \\ -1 & \cos \phi_2 & 0 & -m_1 l_1 \dot{\phi}_1^2 - m_1 g \cos \phi_1 \\ 0 & 0 & m_2 (l_1 \cos \phi_2 + l_2) & -m_2 [g \sin(\phi_1 + \phi_2) + l_1 \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_2] \\ 0 & -1 & -m_2 l_1 \sin \phi_2 & -m_2 [g \cos(\phi_1 + \phi_2) + l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \phi_2 + l_2(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)] \end{vmatrix}}{-m_1 m_2 l_1 l_2 - l_1 l_2 m_2^2 \sin^2 \phi_2}$$

As equações obtidas estão condizentes com as expostas em [2].

Com isso é possível obter numericamente a solução do problema, pois para cada configuração do sistema é possível calcular as acelerações.

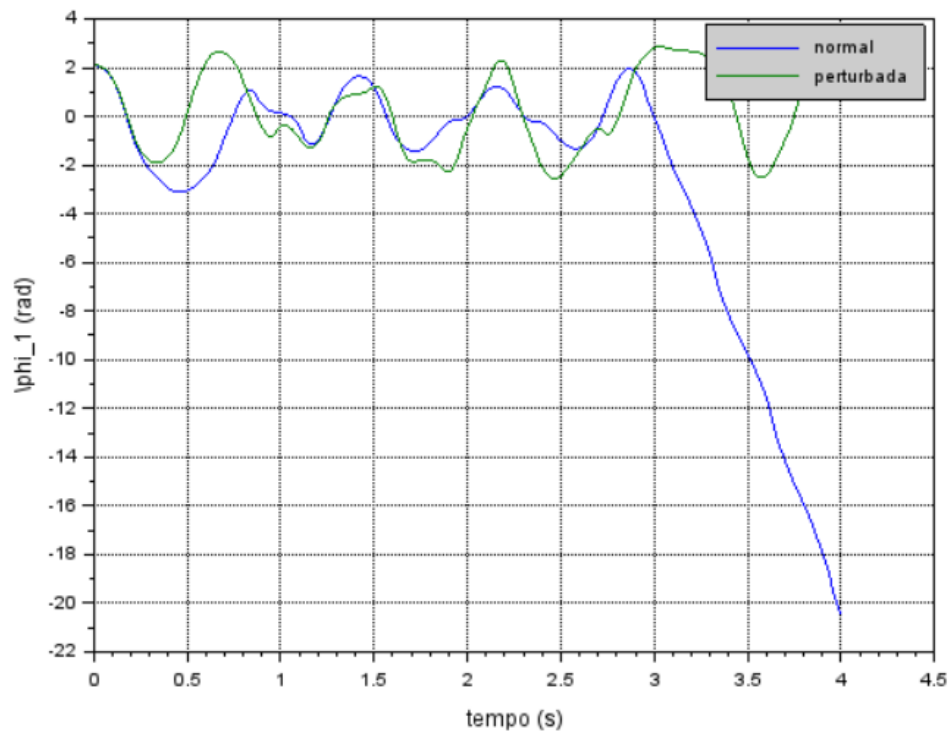
3. Solução Numérica

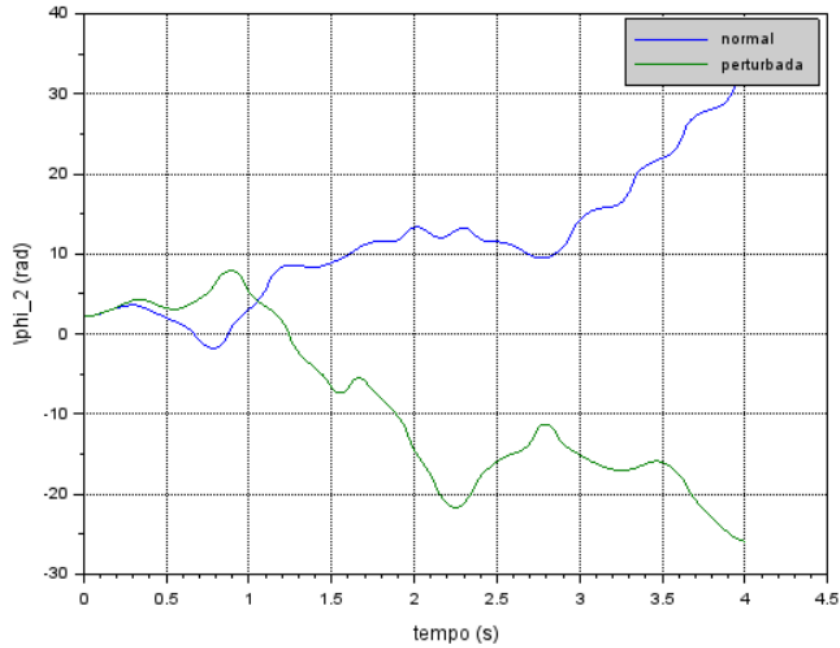
Para a solução numérica do problema o método de Euler foi implementado em Scilab, utilizando-se como condições iniciais e parâmetros do problema os valores expostos na tabela abaixo. Cabe ressaltar que o artigo fornece somente os valores para as condições iniciais, não informando os parâmetros geométricos do problema, portanto, os mesmos foram retirados de [2].

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$m_1 = m_2$	0,00046kg	$\phi_1(0) = \phi_2(0)$	120°
$l_1 = l_2$	0,07m	$\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0)$	0
g	9.81m/s ²	Passo do método de Euler	10 ⁻⁴
Tempo total de simulação	5s	----	----

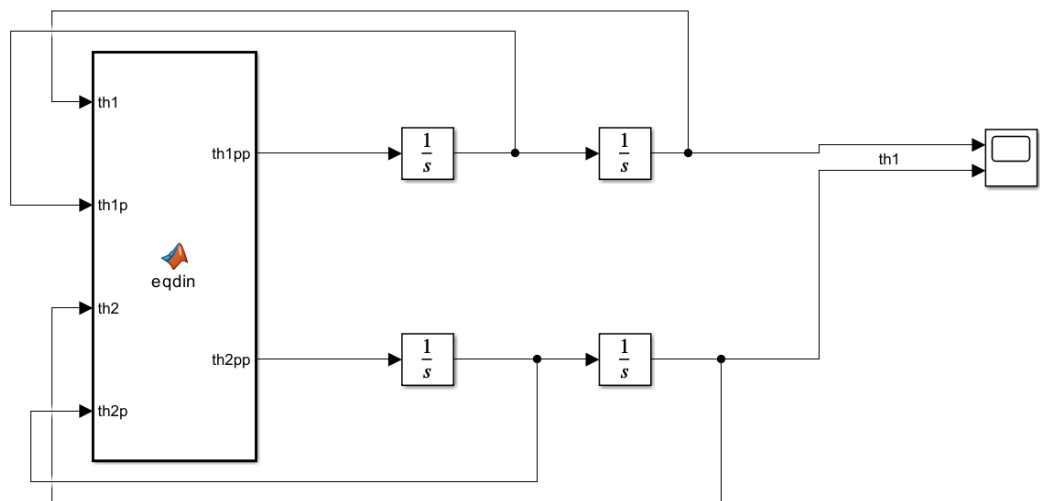
Com base no algoritmo implementado, disponibilizado em anexo neste trabalho, pode-se reproduzir o resultado exposto no trabalho onde ao se aplicar pequenas perturbações nas condições iniciais uma nova trajetória será obtida, sendo as condições iniciais perturbadas por um fator aleatório entre 0 e 0.1 atuando somente na posição inicial do sistema.

O comportamento de ϕ_1 e ϕ_2 estão expostos nas figuras abaixo.



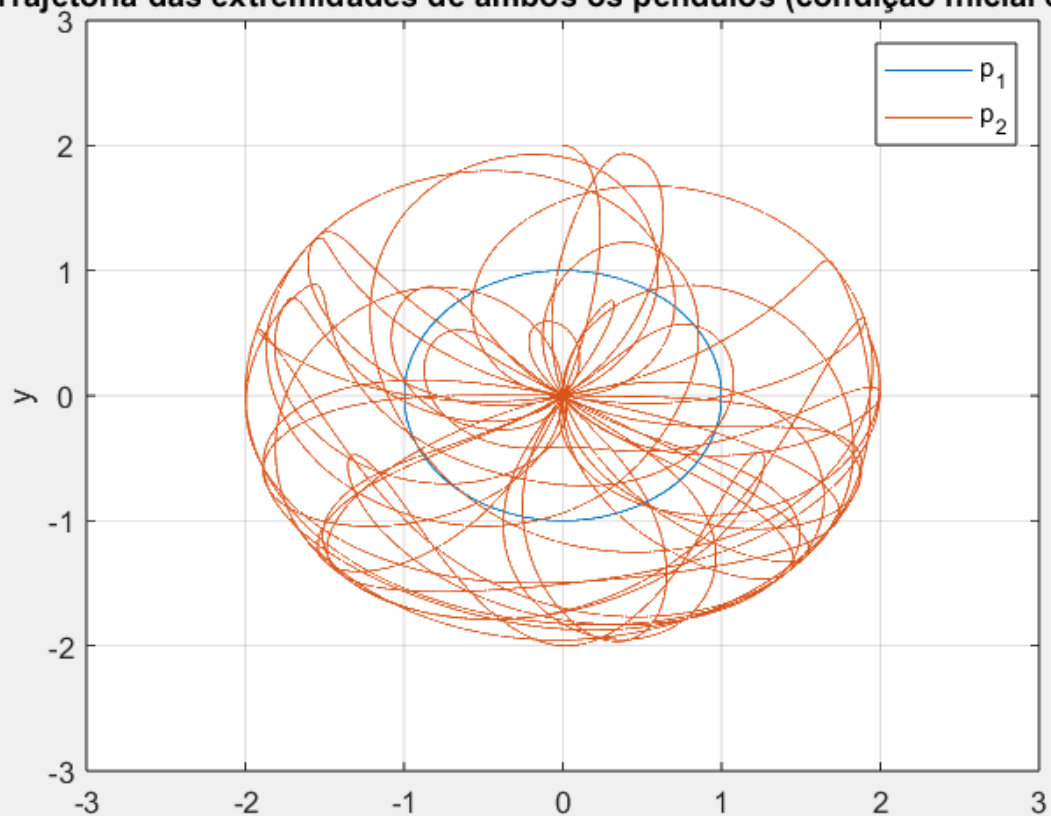


Com o código no MATLAB foram feitas duas simulações, uma considerando como condições iniciais $\phi_1 = \pi, \phi_2 = \pi + 0.001$ (para que o sistema não permaneça estático) e uma segunda variando-se as condições iniciais com um fator randômico, iniciando-se ambos os pêndulos em $\phi = 60^\circ$. As trajetórias obtidas estão expostas nas figuras abaixo.

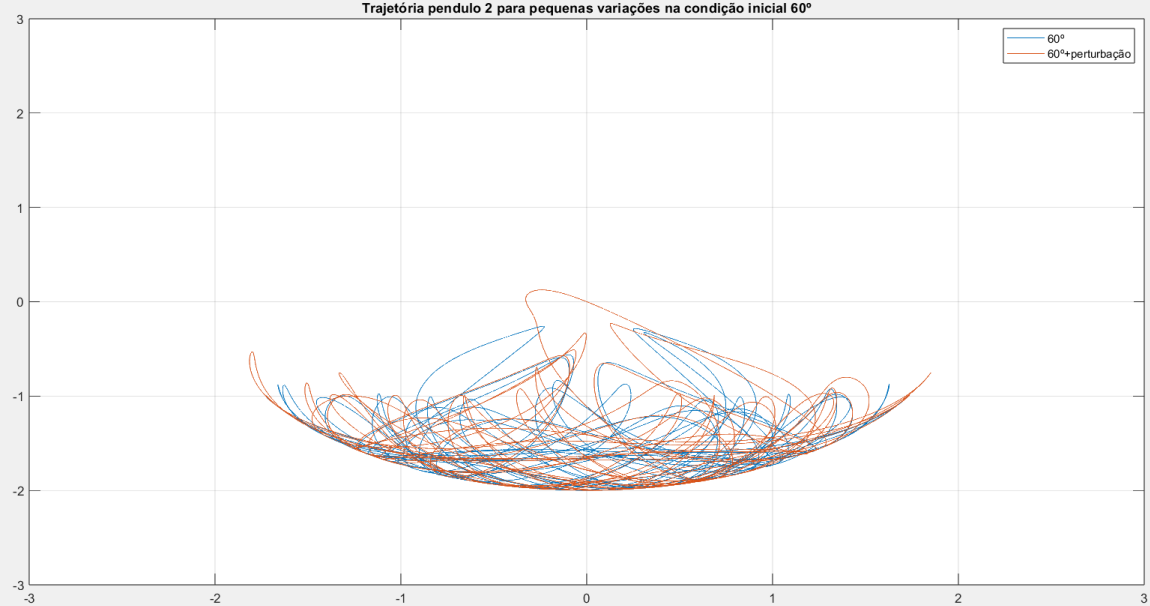


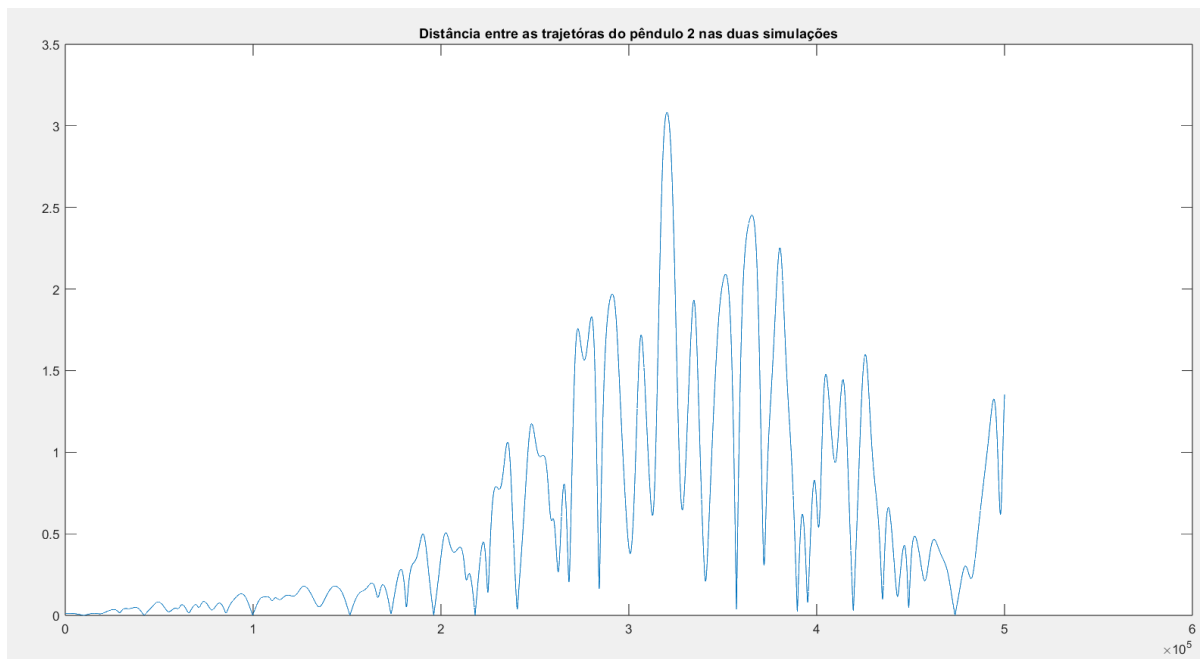
Arquitetura do código implementado no SIMULINK

Trajétória das extremidades de ambos os pêndulos (condição inicial em π)



Trajétória pendulo 2 para pequenas variações na condição inicial 60°





4. Análise dos Resultados

Ao se observar os gráficos que a alteração de menos de 5 graus (0.1rad) na condição inicial faz com que o comportamento do sistema seja bastante diferente, fazendo com que o segundo pêndulo inclusive gire para trás enquanto que na condição não perturbada o mesmo gira para frente. Desta forma, o resultado obtido se assemelha ao resultado do artigo, mesmo utilizando um método de integração relativamente simples e com um passo de integração grosseiro.

Ao final do intervalo de integração percebe-se que há uma variação quase que linear de decréscimo da variável ϕ_1 , esse comportamento pode ser causado pelo acúmulo de erro devido ao excessivo número de iterações, isso pode ser avaliado realizando outras simulações utilizando como condições iniciais um instante de tempo intermediário, porém, como o sistema é caótico, nada garante que o mesmo iria seguir a mesma trajetória.

Os resultados das simulações em MATABL caracterizam bem o caráter caótico e aperiódico do sistema, não havendo a criação de padrões na trajetória da segunda massa, bem como na segunda simulação onde para uma pequena variação, o comportamento varia visível. Além de se poder analisar o caráter caótico na observação do erro entre as simulações, o que também mostra a grande sensibilidade na variação das condições iniciais.

5. Conclusão

Com base nos resultados obtidos podemos afirmar que o Método de Euler é uma ferramenta eficiente e de simples implementação na solução de equações e sistemas de equações diferenciais não lineares, tornando possível a análise comportamento de sistemas complexos com uma ferramenta de simples emprego. Além disso, a utilização de uma ferramenta como SIMULINK para a análise de sistema dinâmicos com grande facilidade e simplicidade na obtenção e análise de dados de forma integrada com o MATLAB.

Referências Bibliográficas

- [1] LEVIEN, R.B., TAN, S.M, Double Pendulum: an experiment in chaos. American Journal of Physics. Vol 61. Novembro, 1993.
- [2] SANTOS, I F. Dinâmica de Sistemas Mecânicos. Malron Books; São Pualo. 2001.
- [3] Hasselblatt, Boris; Anatole Katok (2003). *A First Course in Dynamics: With a Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press. [ISBN 978-0-521-58750-1](#).
- [4] Lorenz, E. N., Lorenzelli, F. (2003). *The Essence Of Chaos*. Reino Unido: Taylor & Francis.
- [5] [Rössler, O. E. \(1976\), "An Equation for Continuous Chaos", *Physics Letters*, 57A \(5\): 397–398, *Bibcode*:1976PhLA...57..397R, *doi*:10.1016/0375-9601\(76\)90101](#)

Anexos

Código em Scilab implementado

```
clear
clc

function dydx=f(x,y)
    m1 = 0.00046
    m2 = 0.00046
    l1 = 0.07
    l2 = 0.07
    g = 9.81;
    M1 = [0 -sin(y(4)) -m1*g*sin(y(2)) 0;
          -1*cos(y(4)) -m1*l1*y(1)^2-m1*g*cos(y(2)) 0;
          0 0 -m2*(g*sin(y(2)+y(4))+l1*y(1)^2*sin(y(4))) m2*l2;
          0 -1 -m2*(g*cos(y(2)+y(4))+l1*y(1)^2*cos(y(4))+l2*(y(1)+y(3))^2) 0];
    num1 = det(M1);
    M2 = [0 -sin(y(4)) m1*l1 -m1*g*sin(y(2));
          -1*cos(y(4)) 0 -m1*l1*y(1)^2-m1*g*cos(y(2));
          0 0 m2*(l1*cos(y(4))+l2) -m2*(g*sin(y(2)+y(4))+l1*y(1)^2*sin(y(4)));
          0 -1 -m2*l1*cos(y(4)) -m2*(g*cos(y(2)+y(4))+l1*y(1)^2*cos(y(4))+l2*(y(1)+y(3))^2)];
    num2 = det(M2);
    dydx(1) = -num1/(l1*l2*m1*m2+l1*l2*m2^2*(sin(y(4)))^2)
    dydx(2) = y(1);
    dydx(3) = -num2/(l1*l2*m1*m2+l1*l2*m2^2*(sin(y(4)))^2)
    dydx(4) = y(3);
endfunction

function Y=meteuler(x0,y0,xf,h)
    //Definição do número de intervalos
    n=abs(xf-x0)/h;
    //Atribuição de variáveis do modelo
    x=x0;
    y=y0;
    //Inicialização do vetor de saída
    Y = [x y'];
    for i=1:1:n
        y=y+h*f(x,y);
        x=x+h;
        Y=[Y;x y'];
    end
endfunction

//Condições iniciais
```

```

phi_10=120*%pi/180
phi_20=120*%pi/180+rand()/10
phi1p = 0
phi2p = 0
x0 = 0;
xf = 4;
y0 = [phi1p;phi_10;phi2p;phi_20];
h=0.0001;
Y1=meteuler(x0,y0,xf,h)
phi_102=120*%pi/180+rand()/10
phi_202=120*%pi/180+rand()/10
phi1p2 = 0
phi2p2 = 0
y0 = [phi1p2;phi_102;phi2p2;phi_202];
h=0.0001;
Y2=meteuler(x0,y0,xf,h)
figure(1)
plot(Y1(:,1),Y1(:,3),Y2(:,1),Y2(:,3))
xgrid
xlabel('tempo (s)')
ylabel('\phi_1 (rad)')
legend('normal','perturbada')
figure(2)
plot(Y1(:,1),Y1(:,5),Y2(:,1),Y2(:,5))
xgrid
xlabel('tempo (s)')
ylabel('\phi_2 (rad)')
legend('normal','perturbada')

```