

Die Ungleichung von Tschebyscheff und Grenzwertsätze

Seminaraufgaben

- (1) Bei der Herstellung von Wellen ist Ausschuss, die 1 mm oder mehr vom Sollmaß von 100 mm Länge abweichen. Die zufällige schwankende Länge hat den Erwartungswert 100 mm und die Standardabweichung 0,1 mm. Wie groß ist der Ausschussanteil höchstens?
- (2) Das Gewicht von Zuckerpaketen schwankt zufällig um das Sollgewicht von 1000 g mit der Standardabweichung von 20 g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gewicht einer Zuckerpackung um weniger als 60 g vom Sollgewicht abgewichtet?
- (3) (X_i) , $i = 1, 2, \dots$ sei eine Folge unabhängiger, gleichverteilter Zufallsgrößen mit der Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel \bar{X}_n für $n = 48$ kleiner gleich 0.4 ist.
- (4) (X_i) , $i = 1, \dots, 20$ seien die Lebensdauern einer Sorte elektronischer Bauteile, die stochastisch unabhängig voneinander sind. Die X_i seien exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda = 1$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit der Abweichung des arithmetischen Mittels \bar{X}_{20} vom Erwartungswert um mehr als $\frac{1}{10}$.
- (5) Die Zufallsgrösse X genüge einer Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0.5$. Berechnen Sie ...
 - (a) ... den exakten Wert für $P(7 \leq X \leq 9)$.
 - (b) ... Näherungswert nach dem Grenzwertsatz von MOIVRE/LAPLACE ohne Stetigkeitskorrektur für $P(7 \leq X \leq 9)$.
 - (c) ... Näherungswert nach dem Grenzwertsatz von MOIVRE/LAPLACE mit Stetigkeitskorrektur für $P(7 \leq X \leq 9)$.

Aufgaben zur Nachbereitung

- (1) Eine Zufallsvariable X habe den Erwartungswert $E(X) = 10$ und die Varianz $D^2(X) = 4$.
 - (a) Welche Aussage kann über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(7 < X < 13)$ gemacht werden?

- (b) Welche Aussage kann über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(7 < X < 13)$ gemacht werden, wenn X normalverteilt ist?
- (2) $(X_i), i = 1, 2, \dots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X_i = k) = 0.1, k = 0, 1, \dots, 9; i = 1, 2, \dots$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel \bar{X}_{50} größer als 5 ist.
- (3) Bei einer Maschine sind 2% der erzeugten Produkte unbrauchbar. Die Produkte werden in Kisten zu je 1000 Stück verpackt. Die Zufallsgröße X beschreibt die zufällige Anzahl unbrauchbarer Artikel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kiste mehr als 30 defekte Stücke enthält.
- (4*) Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A bei jedem von n unabhängigen Versuchen ist gleich 0.75. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit von A um weniger als 0.01 von 0.75 abweicht, wenn ...
- (a) ... 10000 Versuche durchgeführt werden.
- (b) ... 100 Versuche durchgeführt werden.

Lösungen der Nachbereitung

- (1a) $\frac{5}{9} \approx 0,555$
- (1b) 0,8604
- (2) 0.1093
- (3) 0.0089
- (4a) 0,979
- (4b) 0,182