

Stetige Zufallsgrößen

Seminaraufgaben

- (1) Bestimmen Sie zu der Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$ die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz.
- (2) Die Lebensdauer von Glühlampen sei exponentialverteilt. Durchschnittlich brennt eine Glühlampe 2000 Stunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe bereits in der Frühausfallphase bis 100 Stunden ausgefallen ist?
- (3) Die Zeitspanne, dass ein (älterer gebrauchter) PKW reparaturfrei ist sei exponentialverteilt. Durchschnittlich nach einem Jahr ist die erste Reparatur notwendig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- (a) der PKW bereits innerhalb des ersten halben Jahres repariert werden muss?
 - (b) der PKW länger als 2 Jahre ohne Reparatur läuft?
- (4) Die Zufallsgröße X sei exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(Y)$ und die Varianz $D^2(Y)$ der Zufallsvariablen
- (a) $Y = 2X$
 - (b) $Y = 3X + 2$
- (5) Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit $\mu = 1$ und $\sigma = 2$. Man ermittle
- (a) $P(X \geq 1)$
 - (b) $P(|X| > 4)$
 - (c) $P(|X - 1| > 6)$
 - (d) und bestimme $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass $P(X < \alpha) = 0.5$.
- (6) Die Länge von Werkstücken sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 25 mm und der Standardabweichung 0.05 mm . Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn die Werkstücke eine Länge von mindestens 24.93 mm haben müssen?
- (7) Eine Maschine produziert Schokoladentafeln. Auf Grund zufälliger Einflüsse kann das Gewicht der Tafeln leicht variieren. Betrachtet wird das zufällige

Gewicht einer Tafel, welches einer Normalverteilung unterliegt. Das mittlere Gewicht beträgt $100g$ und die Standardabweichung $2g$.

Bestimmen Sie den Anteil der Tafeln deren Gewicht ...

- (a) ... weniger als $97g$ beträgt.
 - (b) ... mehr als $101g$ beträgt.
 - (c) ... um mehr als $1.5g$ vom mittleren Gewicht abweicht.
 - (d) Bestimmen Sie α so, dass 93% der Tafeln im Intervall $[\mu - \alpha, \mu + \alpha]$ liegen.
- (8) Die Lebensdauer von KFZ-Batterien sei normalverteilt mit $\mu = 2$ Jahre und $\sigma = 0.5$ Jahre.
- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Batterie eine Lebensdauer von mehr als drei Jahren erreicht?
 - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Batterien eine Lebensdauer von mehr als zwei Jahren erreichen? (Tipp: Die zwei Zufallsgrößen können als unabhängig angesehen werden.)

Aufgaben zur Nachbereitung

- (1) Die Lebensdauer T eines Bauteils (in Wochen) sei exponentialverteilt mit einer erwarteten Lebensdauer von 15 Wochen. Es ist also $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda = \frac{1}{15}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil ...
- (a) ... in den ersten 10 Wochen ausfällt.
 - (b) ... mindestens 20 Wochen hält.
 - (c) ... weniger lang als die erwartete Lebensdauer hält.
 - (d) Bestimmen Sie den Median.
- (2) Die Zeit zwischen zwei nacheinander in einer Telefonzentrale ankommenden Gespräche kann als exponentialverteilt angesehen werden. Sie betrage im Mittel 10 Sekunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 2 aufeinanderfolgender Gespräche mehr als 5 Minuten vergehen?
- (3) Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit $\mu = 1$ und $\sigma = 2$. Man ermittle
- (a) $P(X < 2)$
 - (b) $P(0 \leq X < 2)$
 - (c) und bestimme $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass $P(X \geq \alpha) = 0.0548$.
- (4) Die Äpfel einer speziell gezüchteten Sorte haben ein mittleres Gewicht von $160g$. Die Standardabweichung liegt bei $50g$. Das Gewicht der Äpfel unterliege der Normalverteilung.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Apfel ...

- (a) ... weniger als 100g wiegt?
- (b) ... bis 20g vom mittleren Gewicht abweicht.
- (c) Welches mittlere Gewicht müssten die Äpfel haben, damit 60% der Äpfel mehr als 150g wiegen?

- (5) Bei einer Klausur mit einer maximalen Punktzahl von 100 Punkten seien die Resultate (näherungsweise) normalverteilt. Die mittlere Punktezahl liegt bei 60 und die Standardabweichung bei 10.
- (a) Bestimmen Sie den Anteil der Studierenden, die durchgefallen sind, wenn zum Bestehen mindestens 50 Punkte erforderlich sind.
 - (b) Die Note 2.0 wird vergeben, wenn 80 bis 95 Punkte in der Klausur erreicht wurden. Bestimmen Sie den Anteil der Studierenden, die diese Note erhalten.
 - (c) Auf welchen Wert muss die Mindestpunktzahl zum Bestehen festgelegt werden, wenn nur 10% der Studierenden durchfallen sollen?

Lösungen der Nachbereitung

- | | | | | | | | |
|------|-----------|------|--------|------|----------------|------|---------|
| (1a) | 0.487 | (1b) | 0.264 | (1c) | 0.632 | (1d) | 10,3972 |
| (2) | e^{-30} | | | | | | |
| (3a) | 0.69146 | (3b) | 0.3829 | (3c) | $\alpha = 4.2$ | | |
| (4a) | 0.1151 | (4b) | 0.3108 | (4c) | 162.5g | | |
| (5a) | 15,87% | (5b) | 2,25% | (5c) | 47,2 | | |