Kombinatorik und Elementarereignisse

Seminaraufgaben zur Kombinatorik

(1a) 6 Freunde wollen sich fotografieren lassen. Dabei soll jede Folge $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bis $6, 5, 4, 3, 2, 1$ einmal erscheinen. Wieviele Aufnahmen müssen gemacht werden?

(1b) Drei Paare eineiige Zwillinge sollen wie unter Aufgabe $(1a)$ fotografiert werden. Wieviele Aufnahmen sind nötig?

(1c) An einem Wettkampf nehmen 10 Personen teil. Nur die ersten drei Plätze werden prämiert. Auf wie viele verschiedene Arten kann sich die "Top 3" zusammensetzen?

(1d) Ein Wissenswettstreit besteht aus 10 Fragen. Für jede der Fragen sind 3 Lösungsvorschläge angegeben, von denen jeweils nur eine richtig ist. Wie viele verschiedene Tipps sind insgesamt möglich?

(1e) Bei einem Schachturnier starten 8 Wettkämpfer. Jeder soll einmal gegen jeden anderen spielen. Wieviele Spiele sind notwendig?

(1f) Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Aufteilung von 6 nicht unterscheidbaren Objekten auf 12 Fächer, wenn jedes Fach mehrere dieser Objekte aufnehmen kann?

(1g) Aus einem einfachen Romméblatt (52 Karten) werden 5 Karten willkürlich entnommen. Wieviele Möglichkeiten gibt es für eine Auswahl folgender Art: 2 Luschen, 2 Damen, 1 As?

(1h) Wie viele Permutationen der 6 Elemente $1, 2, 3, 4, 5, 6$ gibt es, so dass die Elemente $1, 3, 5$ nebeneinander, und zwar
... in der angegebenen Reihenfolge ?
... in beliebiger Reihenfolge ?

Seminaraufgaben zu Elementarereignissen

(2) Prüfen Sie, ob die folgenden Ereignisse Elementarereignisse sind: Geben Sie die Menge aller Elementarereignisse des Zufallsexperimentes an und drücken Sie ggf. die Ereignisse über Elementarereignisse aus!

(a) Abgabe von zwei Schüssen auf ein Ziel:
A_1 kein Treffer, A_2 ein Treffer, A_3 zwei Treffer

(b) Ziehen zweier Karten aus einem franz. Skatspiel, wobei nur zwischen roten und schwarzen Karten unterschieden wird:
(i) A_1 Ziehen zweier roter Karten
(ii) A_2 Ziehen zweier schwarzer Karten
(iii) A_3 1. Karte rot, 2.Karte schwarz
(iv) A_4 1 rote, 1 schwarze Karte

(3) Prüfen Sie, welche der folgenden Ereignisse jeweils paarweise unvereinbar (disjunkt) sind beim Versuch der Abgabe von zwei Schüssen auf ein Ziel: A_1 kein Treffer, A_2 ein Treffer, A_3 höchstens 1 Treffer, A_4 höchstens 1 Fehlschuss.

Aufgaben zur Nachbereitung

(1a) Wieviele verschiedene siebenstellige Zahlen kann man aus den Ziffern $(1, 2, 2, 3, 6, 6, 6)$ bilden?

(1b) Wieviele Tips sind im Zahlenlotto 5 aus 90 bei einer bestimmten Ziehung möglich?

(1c) Wieviele Möglichkeiten gibt es im Zahlenlotto 5 aus 90 bei einer bestimmten Ziehung für einen Dreier?

(1d) Wieviele verschiedene Reihenfolgen gibt es für das Aufhängen von 30 Gemälden in einer Ausstellung?

(1e) Eine Lieferung von 25 Geräten, die durch ihre Fabrikatsnummer unterscheidbar sind, enthält vier fehlerhafte Geräte.
(i) Wieviele Stichproben vom Umfang 5 sind möglich?
(ii) Wieviele Stichproben vom Umfang 5 gibt es, die genau zwei fehlerhafte Geräte enthalten?

(2) Es werden zwei Geräte geprüft, die entweder ausgefallen (0) oder funktionsfähig (L) sein können.
Die Elementarereignisse sind $\{\omega_0\} = 00$, $\{\omega_1\} = 0L$, $\{\omega_2\} = L0$, $\{\omega_3\} = LL$.
(a) Geben Sie Ω die Menge der Elementarereignisse an.

(b) Geben Sie den Ereignisraum zu diesem Versuch an.
(c) Geben Sie alle Ereignisse an, die das Ereignis $\{\omega_0, \omega_1\}$ nach sich zieht.
(d) Geben Sie die Komplementärereignisse zu $\{\omega_0, \omega_1\}$ und $\{\omega_3\}$ an.

Zusatzaufgaben

(1) Wenden Sie den binomischen Lehrsatz nachfolgend an.
(a) Bestimmen Sie das Polynom $(x-y)^3$.
(b) Bestimmen Sie den Koeffizienten vor x des Polynoms $(1-2x)^5$.

(2) Acht Personen warten vor dem Selbstbedienungsbuffet.
(a) Auf wie viele Arten kann die Schlange zusammengesetzt sein?
(b) Drei der acht Personen wählen das Fischgericht. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl dieser drei Personen?
(c) Die drei Fischliebhaber stehen direkt hintereinander. Wie viele Schlangen sind möglich?

(3) Ein Kartenspiel mit 32 verschiedenen Karten soll so unter 4 Spieler aufgeteilt werden, dass jeder genau 8 Karten erhält.
(a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es?
(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass ein Spieler alle vier Asse erhält?

(4) Drei Studenten entscheiden jeden Morgen zufällig, ob sie mit dem Fahrrad zur Uni fahren oder zu Fuß gehen. Es bezeichne F_i das Ereignis, dass der $i-$te Student mit dem Fahrrad zur Uni fährt, $i = 1, 2, 3$.
(a) Geben Sie die Elementarereignisse, Ω und die Ereignisse F_i, $i = 1, 2, 3$ mittels der Elementarereignisse an.
(b) Stellen Sie folgende Ereignisse dar.
A- Alle drei Studierenden fahren mit dem Fahrrad zur Uni
B- nur der zweite Studierende fährt mit dem Fahrrad
C- höchstens ein Studierender fährt mit dem Fahrrad
D- mindestens zwei Studierende fahren mit dem Fahrrad
E - höchstens ein Student kommt nicht mit dem Fahrrad
(c) Welcher der Ereignisse A, B, C und D sind disjunkt?
(d) Geben Sie die kleinste σ-Algebra $\mathbb{E}$ an, welche B und D umfassen.

Lösungen der Nachbereitung

(1a) 420
(1b) 43949268
(1c) 35700
(1d) 30!
(1e) (i) 53130 (ii) 7980

(2a) $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
(2b) $\mathbb{E} = P(\Omega)$
(2c) $\{\omega_0, \omega_1\}$ zieht die Ereignisse $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ und $\{\omega_0, \omega_1, \omega_3\}$ und Ω nach sich.
(2d) $\overline{\{\omega_0, \omega_1\}} = \{\omega_2, \omega_3\}$, $\overline{\{\omega_3\}} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$