Tài liệu được tham khảo bài giảng của PSG.TS Nguyễn Tiến Dũng môn **Quá trình ngẫu nhiên** cho sinh viên ngành Toán học của Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN.

# QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Lê Văn Phong

Ngày 21 tháng 7 năm 2024

# Mục lục

# Chương 1

# Nhắc lại về xác suất

## 1.1 Không gian xác suất

**Định nghĩa 1.1.1** ($\sigma-$đại số)**.** Cho tập $\Omega$ bất kỳ và xét $\mathcal{F}$ là một họ các tập con của $\Omega$. Khi đó ta nói $\mathcal{F}$ là một $\sigma$ - đại số nếu nó thoả mãn

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

ii) Nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $A^c \in \mathcal{F}$.

iii) $\forall k \geq 1$, nếu $A_k \in \mathcal{F}$ thì $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

**Ví dụ.** Cho $\Omega = [0,1]$ thì $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ là một $\sigma$ - đại số, còn $\mathcal{F}_2 = \{[0, \frac{1}{2}]; [\frac{1}{3}, 1)\}$ thì không.

**Định nghĩa 1.1.2** (Độ đo xác suất)**.** Hàm số $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1],\ A \mapsto \mathbb{P}(A)$ được gọi là một độ đo xác suất nếu nó thỏa mãn:

i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$; $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) Nếu $A_k \in \mathcal{F}$ và $A_k \cap A_j = \emptyset\ \forall k \neq j$ thì $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

**Định nghĩa 1.1.3** (Không gian xác suất)**.** Bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được gọi là một không gian xác suất

**Ví dụ.** Cho $\Omega = [0,1]$ và $\mathcal{F} = \{A \mid A \subseteq [0,1]\}$.(Các tập con của $\mathcal{F}$ có dạng $A = [a,b]$ hoặc $(a,b]$ hoặc $[a,b)$ hoặc $(a,b)$) và $\mathbb{P}(A) = b - a$. Khi đó $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất.

## 1.2 Biến ngẫu nhiên

**Định nghĩa 1.2.1** (Biến ngẫu nhiên)**.** Hàm số $X : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto X(\omega)$ được gọi là biến ngẫu nhiên nếu $X$ là $\mathcal{F}$ - đo được.

**Ví dụ.** Cho $X : [0,1] \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto 4\omega^2$. Khi đó với $B = (2;4) \in \mathbb{R}$ thì

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$$

**Lời giải.** Ta có: $2 < X(\omega) < 4 \Leftrightarrow 2 < 4\omega^2 < 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \omega^2 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \omega < 1 \Rightarrow X^{-1}(B) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right) \in \mathcal{F}$. Chứng tỏ $X$ là một biến ngẫu nhiên.

**Định nghĩa 1.2.2** (Kỳ vọng)**.** Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X$ ký hiệu là $\mathbb{E}X$ và tính bởi công thức

$$\mathbb{E}X = \int\limits_{\Omega} X(\omega)d\mathbb{P}.$$

**Lưu ý.** $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ và $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ nếu $X, Y$ là độc lập.

**Định nghĩa 1.2.3** (Không gian $L^p,\ p > 0$)**.** Cho biến ngẫu nhiên $X$, $p > 0$. Ta nói, $X \in L^p$ nếu $\mathbb{E}|X|^p < \infty$.

**Lưu ý.** Nếu $X \in L^2$ thì ta nói $X$ là bình phương khả tích.

## 1.3 Một số bất đẳng thức cơ bản

1. (Bất đẳng thức *Holder*)

$$\mathbb{E}|XY| \leqslant (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}\ \forall p,q > 0 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

2. (Bất đẳng thức *Minkowski*)

$$\|X+Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

3. (Bất đẳng thức *Jensen*) Nếu $g(X)$ là hàm lồi thì

$$\mathbb{E}(g(X)) \geqslant g(\mathbb{E}(X)).$$

4. (Bất đẳng thức *Chebyshev*) Cho $X$ là biến ngẫu nhiên không âm thì:

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a} \ \forall a > 0.$$

**Lưu ý.** Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên bất kỳ ta cần biến đổi $X$ để nhận được biến ngẫu nhiên không âm mới.

## 1.4 Sự hội tụ của dãy các biến ngẫu nhiên

Xét dãy $\{X_n\}_{n\geq 1}$ của các biến ngẫu nhiên

### 1.4.1 Hội tụ hầu chắc chắn (h.c.c)

Dãy $\{X_n\}$ được gọi là hội tụ hầu chắc chắn tới $X$ nếu:

$$\mathbb{P}\left(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

### 1.4.2 Hội tụ theo xác suất

Dãy $\{X_n\}$ được gọi là hội tụ theo xác suất tới $X$ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega : |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

**Lưu ý.** Ta chỉ cần quan tâm đến $\varepsilon$ đủ nhỏ.

### 1.4.3 Sự hội tụ theo phân phối

Dãy $\{X_n\}$ được gọi là hội tụ theo phân phối tới $X$ nếu:

$$\mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq x\right)$$

tại mọi $x$ mà vế phải là hàm liên tục.

### 1.4.4 Sự hội tụ trong $L^p$ với $p > 0$

Dãy $\{X_n\}$ được gọi là hội tụ theo chuẩn $L^p$ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|X_n - X\right| = 0$$

### 1.4.5 Bất đẳng thức Lyapunov

Với mọi $p \leq q$ ta có các bất đẳng thức sau:

$$\left(\mathbb{E}\,|X|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}\,|X|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|X\|_p \leq \|X\|_q$$

**Lưu ý.** Về mối liên hệ giữa các dạng hội tụ

- Hội tụ hầu chắc chắn có thể suy ra hội tụ theo xác suất.
- Sự hội tụ trong $L^p$ $(p > 0)$ có thể suy ra hội tụ theo xác suất.

**Ví dụ.** Xét dãy $X_n = \begin{cases} 0 & \text{với xác suất } 1 - \frac{1}{n} \\ n & \text{với xác suất } \frac{1}{n} \end{cases}$. Hãy

i. Xét sự hội tụ đến 0 theo xác suất.

ii. Xét sự hội tụ trong $L^2$.

**Lời giải.** i. Với mọi $\varepsilon > 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Chứng tỏ $X_n$ hội tụ theo xác suất đến 0.

ii. Xét sự hội tụ trong $L^2$:

$$\mathbb{E}\,|X_n - 0|^2 = \mathbb{E}\,|X_n|^2 = 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Vì vậy, dãy $X_n$ không hội tụ trong $L^2$.

## 1.5 Kỳ vọng có điều kiện

**Định nghĩa 1.5.1** (Kỳ vọng có điều kiện)**.** Cho $X$ là biến ngẫu nhiên khả tích (tức là $\mathbb{E}\,|X| < \infty$) và $\mathcal{U}$ là một $\sigma-$ đại số với $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. Kỳ vọng có điều kiện của $X$ đối với $\mathcal{U}$ là một biến ngẫu nhiên $Y$ nào đó có các tính chất sau:

i. $Y$ là $\mathcal{U}-$ đo được, tức là $Y^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{U}$ với mọi $\mathcal{B}$ thuộc $\sigma-$đại số Borel của $\mathbb{R}$.

ii. $\mathbb{E}[Y1_A] = \mathbb{E}[X1_A]\ \forall A \in \mathcal{U}$ và $\int\limits_A YdP = \int\limits_A XdP\ \forall A \in \mathcal{U}$

**Lưu ý.** Ta có thể chứng minh được $Y$ là duy nhất và thường viết $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right]$ thay vì $Y$. Khi đó $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right]\right] = \mathbb{E}X$ và $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right] = X$.

### 1.5.1 Một số tính chất của kỳ vọng có điều kiện

i. $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right] \le \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{U}\right]$ nếu $X \le Y$.

ii. $\mathbb{E}\left[X+Y|\mathcal{U}\right] = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right] + \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{U}\right]$.

ii. $\mathbb{E}\left[X\cdot Y|\mathcal{U}\right] = Y\cdot\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right]$ nếu $Y$ là $\mathcal{U}-$ đo được.

iv. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right]|\mathcal{V}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{V}\right]|\mathcal{U}\right] = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right]$ nếu $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

v. (Bất đẳng thức *Jessen*): Cho $g$ là hàm lồi thì $\left[g(X)|\mathcal{U}\right] \ge g\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right]\right)$.

vi. $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$ nếu $X$ và $\mathcal{U}$ độc lập.

**Ví dụ.** $\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{U}\right]\right)^2 \le \mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{U}\right]$.

## 1.6 $\sigma-$đại số sinh bởi một biến ngẫu nhiên

**Định nghĩa 1.6.1** ($\sigma-$đại số sinh bởi một họ các tập con của $\Omega$)**.** Cho $\mathcal{U}$ là một họ các tập con của $\Omega$. Khi đó $\sigma-$ đại số nhỏ nhất chứa $\mathcal{U}$ được gọi là $\sigma-$ đại số sinh bởi $\mathcal{U}$, kí hiệu là $\sigma(\mathcal{U})$ được định nghĩa bởi

$$\sigma(\mathcal{U}) = \bigcap\left\{\sigma - \text{đại số } \mathcal{H} : \mathcal{H} \supset \mathcal{U}\right\}$$

**Định nghĩa 1.6.2** ($\sigma-$đại số sinh bởi biến ngẫu nhiên)**.** Cho $X$ là biến ngẫu nhiên và xét tập: $\mathcal{U} = \left\{X^{-1}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \in \mathbb{R} \text{ là tập Borel}\right\}$. Khi đó ta gọi $\sigma(\mathcal{U})$ là $\sigma-$ đại số sinh bởi biến ngẫu nhiên $X$. Để nhấn mạnh sự phụ thuộc vào X ta viết $\sigma(\mathcal{X})$ thay vì $\sigma(\mathcal{U})$.

**Lưu ý.** Cho $X$ là biến ngẫu nhiên và $\mathcal{U}$ là một $\sigma-$ đại số. Ta nói $X$ và $\mathcal{U}$ là độc lập nếu các biến cố $A$ và $B$ là độc lập với mọi $A \in \sigma(X)$, $B \in \mathcal{U}$.

**Định nghĩa 1.6.3** (Kỳ vọng có điều kiện của hai biến ngẫu nhiên)**.** Cho $X$ và $Y$ là hai biến ngẫu nhiên. Kỳ vọng có điều kiện của $X$ đối với $Y$ kí hiệu là $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$ và được tính bởi $\mathbb{E}\left[X|Y\right] = \mathbb{E}\left[X|\sigma(X)\right]$.

# Chương 2

# Chuyển động Brown

## 2.1 Quá trình ngẫu nhiên

**Định nghĩa 2.1.1** (Quá trình ngẫu nhiên)**.** Hàm $X : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $(t,\omega) \longmapsto X(t,\omega)$ được gọi là một quá trình ngẫu nhiên nếu nó là $\mathcal{B} \times \mathcal{F}-$ đo được (trong đó $\mathcal{B}$ là $\sigma-$ đại số Borel của đoạn $[0,T]$).

**Lưu ý.** Nếu $t$ cố định thì $X(t,\omega)$ là một biến ngẫu nhiên , còn nếu $\omega$ cố định thì $X(t,\omega)$ là một hàm thông thường theo biến $t$ và đồ thị của hàm số $t \longmapsto X(t,\omega)$ được gọi là *quỹ đạo của quá trình ngẫu nhiên* $X(t,\omega)$. Ta thường viết $X_t$ thay cho $X(t,\omega)$.

**Định nghĩa 2.1.2** (Hàm Covariant của quá trình ngẫu nhiên)**.** Hàm Covariant của một quá trình ngẫu nhiên $(X_t)_{t\in[0,T]}$ được định nghĩa bởi $\mathbf{R}(t,s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_s - \mathbb{E}[X_s])]$, với $s,t \in [0,T]$.

Ta có $\mathbf{R}(t,s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_s - \mathbb{E}[X_s])] = \mathbb{E}[X_tX_s] - \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X_s]$.
Nói riêng khi $s = t$ thì $\mathbf{R}(t,t) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2] = \mathbb{D}[X_t]$.

**Định nghĩa 2.1.3** (Quá trình ngẫu nhiên liên tục)**.** Quá trình ngẫu nhiên $(X_t)_{t\in[0,T]}$ được gọi là liên tục nếu quỹ đạo của nó là liên tục, tức $\mathbb{P}\big(\omega : \lim\limits_{t\to t_0} X_t = X_{t_0}\big) = 1$.

## 2.2 Định lý tiêu chuẩn liên tục Kolmogorov

**Định lí 2.2.1** (Tiêu chuẩn liên tục Kolmogorov)**.** *Cho $(X_t)_{t\in[0,T]}$ là một quá trình ngẫu nhiên.*
*Nếu $\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \le c|t-s|^\beta$ $\forall t,s \in [0,T]$ và $\alpha,\beta,c > 0$ nào đó thì quỹ đạo của $(X_t)_t$ là liên tục.*

**Ví dụ.** Cho $N$ là biến ngẫu nhiên chuẩn tắc và $X_t = \sin(t) + Nt$ với $t \in [0, T]$ là một quá trình ngẫu nhiên.

i. Tính $\mathbf{R}(t, s)$.

ii. $(X_t)_t$ có là quá trình ngẫu nhiên liên tục không?

**Lời giải.** Lưu ý rằng $\mathbb{E}[N] = 0,\ \mathbb{E}[N^2] = \mathbb{D}[N] + (\mathbb{E}[N])^2 = 1 + 0^2 = 1$.

i. Ta có $X_t = \sin(t) + Nt$ nên $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\sin(t)] + t\mathbb{E}[N] = \sin(t)\ \forall t \in [0, T]$.
Do đó $\mathbf{R}(t, s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_s - \mathbb{E}[X_s])] = \mathbb{E}[(tN)(sN)] = ts\mathbb{E}[N^2] = ts$.

ii. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 &= \mathbb{E}|(\sin(t) - \sin(s)) + (t - s)N|^2 \\
&= \mathbb{E}[((\sin(t) - \sin(s))^2 + 2(\sin(t) - \sin(s))(t - s)N + (t - s)^2 N^2] \\
&= ((\sin(t) - \sin(s))^2 + 2(\sin(t) - \sin(s))(t - s)\mathbb{E}[N] + (t - s)^2\mathbb{E}[N^2] \\
&= |\sin(t) - \sin(s)|^2 + |t - s|^2 \leq 2|t - s|^2.
\end{aligned}$$

Áp dụng tiêu chuẩn liên tục Kolmogorov trong trường hợp này với $\alpha = 2, \beta = 1, c = 2$ thì $(X_t)_t$ là một quá trình ngẫu nhiên liên tục.

## 2.3 Chuyển động Brown

**Định nghĩa 2.3.1** (Chuyển động Brown)**.** Quá trình ngẫu nhiên $(B_t)_{t \in [0,T]}$ được gọi là một chuyển động Brown nếu

i. $B_0 = 0$.

ii. $B$ có số gia dừng, tức $B_t - B_s$ có phân phối chuẩn $N(0, t - s)$ với mọi $t > s$.

iii. $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập với mọi $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

iv. Các quĩ đạo của $B$ là liên tục.

### 2.3.1 Các tính chất của chuyển động Brown

i.

$$\mathbb{E}[B_t] = 0,\ \mathbb{D}[B_t] = t.$$

Thật vậy $B_t = (B_t - B_0) \sim N(0, t - 0) = N(0, t)$.

ii.
$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min\{t, s\}.$$

Thật vậy, giả sử $t > s$ thì

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[(B_t - \mathbb{E}[B_t])(B_s - \mathbb{E}[B_s])] \\ &= \mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)(B_s - B_0)] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)] \cdot \mathbb{E}[(B_s - B_0] + \mathbb{D}[B_s] + (\mathbb{E}[B_s])^2 \\ &= 0 + s + 0^2 = s.\end{aligned}$$

Lập luận tương tự cho trường hợp $t < s$ thì $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = t$. Tóm lại $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min\{t, s\}$.
**Lưu ý**: Ở chứng minh trên với $t > s$ (tương tự cho $t < s$) thì $(B_t - B_s)$ và $(B_s - B_0)$ là độc lập nên ta có phân tích như trên.

iii.
$$\mathbb{E}[(B_s - B_t)^2] = |t - s| \ \forall t, s \in [0, T].$$

Thật vậy, $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \mathbb{D}[|B_t - B_s|] + (\mathbb{E}[|t - s|])^2 = |t - s|$(vì $t > s$ thì $(B_t - B_s) \sim N(0, t - s)$).

iv. Hàm $t \longmapsto B_t$ là liên tục Holder bậc $\frac{1}{2} - \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$, tức là $|B_t - B_s| \leq c|t - s|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$, $\forall t, s$ và $c = c(\omega) < \infty$.

**Bài tập 2.3.2.** Lần lượt tính $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^3]$, $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^4]$, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{aB_t}]$, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{B_t + B_s}]$.

### 2.3.2 Biến phân bậc $p$

**Định nghĩa 2.3.3** (Biến phân bậc $p$)**.** Trên phân hoạch $\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ của đoạn $[0, T]$ mà $d(\mathcal{P}) \coloneqq \max_k\{(t_k - t_{k-1})\} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, ta xét $V_n(B, p) = \sum_{k=1}^{n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^p$ và gọi giới hạn theo xác suất của $V_n(B, p)$ là biến phân bậc $p$ của chuyển động Brown $B$.

**Mệnh đề 2.3.4.** *Với $p = 2$ thì $V_n(B, 2) = \sum_{k=1}^{n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2$ hội tụ đến $T$ theo xác suất.*

*Chứng minh.* Ta sẽ chỉ ra $V_n(B, 2) \xrightarrow{\mathbb{P}} T$ bằng việc chứng minh

$$\mathbb{E}|V_n(B, 2) - T|^2 = \sum_{k=1}^{n} [(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})] \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Thật vậy, đặt $X_k = (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})$ thì

$$\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2] - \mathbb{E}[(t_k - t_{k-1})] = (t_k - t_{k-1}) - (t_k - t_{k-1}) = 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|V_n(B,2) - T|^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} X_iX_j\right]\\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}[X_iX_j].\end{aligned}$$

Với mọi $1 \le i < j \le n$ thì $X_i, X_j$ là độc lập, do đó $\mathbb{E}[X_iX_j] = \mathbb{E}[X_i]\cdot\mathbb{E}[X_j] = 0\cdot 0 = 0$. Còn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k^2] &= \mathbb{E}[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})]^2\\ &= \mathbb{E}[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^4] - 2(t_k - t_{k-1})\mathbb{E}[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2] + (t_k - t_{k-1})^2\\ &= 3(t_k - t_{k-1})^2 - 2(t_k - t_{k-1})^2 + (t_k - t_{k-1})^2\\ &= 2(t_k - t_{k-1})^2.\end{aligned}$$

Vì vậy $\mathbb{E}|V_n(B,2) - T|^2 = 2\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \le 2d(\mathcal{P})\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = 2d(\mathcal{P})T \xrightarrow{n\to\infty} 0.$ □

# Chương 3

# Tích phân I-tô

## 3.1 Tích phân Itô

Mục tiêu của chương này là định nghĩa được tích phân $\int_0^T f_t dB_t$.

Như đã biết
$$\int_0^T f(x)dg(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]$$
với $\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ là một phân hoạch của đoạn $[0, T]$ sao cho $d(\mathcal{P}) := \max_k \{(t_k - t_{k-1})\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ là một cách chọn điểm sao cho $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Vì vậy ta mong muốn
$$\int_0^T f_t dB_t := \int_0^T f(x)dg(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(B(t_k) - B(t_{k-1}))$$
với câu hỏi cần giải quyết là giới hạn trên phải hiểu theo nghĩa nào?

**Định nghĩa 3.1.1** (Bộ lọc sinh bởi chuyển động Brown)**.** Ta gọi $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ là một bộ lọc sinh bởi chuyển động Brown nếu với mỗi $t$ thì $\mathcal{F}_t$ là một $\sigma-$đại số sinh bởi các biến ngẫu nhiên $B_s$ $(s \le t)$. Khi đó

i) Không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ được gọi là không gian xác suất có lọc sinh bởi chuyển động Brown $B$.

ii) Quá trình ngẫu nhiên $(f_t)_{t\in[0,T]}$ được gọi là $\mathbb{F}-$tương thích nếu $f_t$ là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_t-$đo được với mọi $t \in [0, T]$.

iii) Nếu $f$ là $\mathbb{F}_t-$tương thích thì tồn tại hàm $g$ sao cho $f_t = g(B_s | s \le t)$.

**Ví dụ.** Các hàm $\sin(B_t)$, $\cos(B_t)+B_t^2$, $B_t+\sqrt{\max\limits_{0\leq s\leq t} B_s}$ là $\mathbb{F}_t-$tương thích, còn $\sin(B_{2t})$ thì không.

**Định nghĩa 3.1.2.** Ta kí hiệu $L_a^2(\Omega\times[0,T])$ là không gian các quá trình ngẫu nhiên thoả mãn

i) $f=(f_t)_{t\in[0,T]}$ là $\mathbb{F}-$tương thích.

ii) $\mathbb{E}\big[\int_0^T f_t^2 dt\big]<\infty=\int_0^T \mathbb{E}[f_t^2]dt<\infty$(bình phương khả tích).

**Định nghĩa 3.1.3** (Quá trình ngẫu nhiên đơn giản)**.** Ta gọi $f=(f_t)_{t\in[0,T]}$ là một quá trình ngẫu nhiên đơn giản nếu nó có dạng $f_t=\sum\limits_{k=0}^{n-1} e_k \mathbb{1}_{[t_k,t_{k+1}]}(t)$ với $e_k$ là biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_{t_k}-$đo được và bình phương khả tích.

Các tính chất của tích phân I-tô cho quá trình ngẫu nhiên đơn giản

i) $\mathbb{E}\Big[\int_0^T f_t dB_t\Big]=0$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T f_t dB_t &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} e_k(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})\Big]\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[e_k(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big]\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[e_k\mathbb{E}\Big[(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big](\text{do } (B_{t_{k+1}}-B_{t_k}) \text{ và } \mathcal{F}_{t_k} \text{ là độc lập}).\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[e_k\mathbb{E}\Big[(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})\Big]\Big]\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big[e_k\cdot 0\Big]=0.
\end{aligned}$$

ii) Nếu $f_t\leq g_t$ thì liệu $\int_0^T f_t dB_t\leq\int_0^T g_t dB_t$. Câu trả lời là không! Ví dụ phản chứng $\int_0^T 1dB_t=B_1$ còn $\int_0^T 2dB_t=2B_1$, còn $B_1$ và $2B_1$ là không so sánh được.

iii) (Tuyến tính) $\int_0^T(af_t+bg_t)dB_t=a\int_0^T f_t dB_t+b\int_0^T g_t dB_t$.

iv) (Đẳng cự I-tô) $\mathbb{E}\Big[\int_0^T f_t dB_t\Big]^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^T f_t^2 dt\Big]$.

**Mục tiêu**: Định nghĩa tích phân Itô cho quá trình ngẫu nhiên bất kỳ trong $L_a^2(\Omega\times[0,T])$ với $L^2(\Omega\times[0,T]) = \mathbb{E}\int_0^T f^2(t,\omega)dt$.

**Ý tưởng**: Cho $f \in L_a^2(\Omega\times[0,T])$. Ta xấp xỉ $f$ bởi dãy $(g_n)_{n\geq 1}$ các quá trình ngẫu nhiên đơn giản và định nghĩa $\int f_t dB_t = \lim_{n\to\infty}\int g_n(t)dB_t$ trong $L^2(\Omega)$. Ta thực hiện ý tưởng này trong 3 bước:

**Bổ đề 3.1.4.** *Cho $f \in L_a^2(\Omega\times[0,T])$. Khi đó tồn tại dãy các quá trình ngẫu nhiên bị chặn $(h_t^{(n)})_{n\geq 1} \subset L_a^2(\Omega\times[0,T])$ sao cho:*

$$\mathbb{E}\int_0^T \Big|f_t - h_t^{(n)}\Big|^2 dt \longrightarrow 0 \textit{ khi } n\to\infty \tag{3.1.1}$$

**Lời giải.** Cho mỗi số tự nhiên $n$, ta định nghĩa: $h_t^{(n)} = \begin{cases} n & f_t \leqslant -n \\ f_t & -n < f_t < n \\ n & f_t \geqslant n \end{cases}$ suy ra, $|h_t^{(n)}| \leqslant n \leqslant |f_t|\ \forall n$ và ta có: $h_t^{(n)} \to f_t$ khi $n\to\infty$ với mỗi $(t,\omega)$. Dùng định lý hội tụ bị chặn ta có (2.1)

**Bổ đề 3.1.5.** *Cho $f \in L_a^2(\Omega\times[0,T])$ là quá trình ngẫu nhiên bị chặn. Khi đó, tồn tại các quá trình ngẫu nhiên bị chặn và liên tục $\Big(h_t^{(n)}\Big)_{t\geqslant 1}$ sao cho (3.1.1) đúng.*

**Lời giải.** Cho mỗi số tự nhiên $n$, ta xét hàm không âm và liên tục $\psi_n$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

i) $\psi_n(x) = 0$ nếu $x \leqslant -\dfrac{1}{n}$ hoặc $x \geqslant 0$.

ii) $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)dx = 1$.

Ta định nghĩa quá trình ngẫu nhiên $h_t^{(n)}$ như sau: $h_t^{(n)} = \int_0^t \psi_n(s-t).f_s ds$. Suy ra,

$$\begin{aligned}\Big|h_t^{(n)}\Big| &\leqslant \int_0^t \psi_n(s-t)ds.\max_{(s,\omega)}|f_s| \\ &= \int_{-t}^0 \psi_n(x)dx.\max_{(s,\omega)}|f_s| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)dx.\max_{(s,\omega)}|f_s| \\ &= \max_{(s,\omega)}|f_s|\end{aligned}$$

Do đó, $h_t^{(n)}$ bị chặn.

Hơn nữa ta có:

$$\left|h_{t_1}^{(n)} - h_{t_2}^{(n)}\right| = \left|\int_0^{t_1} \psi_n(s-t_1) f_s ds - \int_0^{t_2} \psi_n(s-t_2) f_s ds\right| \quad \forall t_1, t_2.$$

Giả sử $t_1 < t_2$, khi đó:

$$\left|h_{t_1}^{(n)} - h_{t_2}^{(n)}\right| = \left|\int_0^{t_1} \big(\psi_n(s-t_1) - \psi_n(s-t_2)\big) f_s ds - \int_{t_1}^{t_2} \psi_n(s-t_2) f_s ds\right|.$$

Vì $\psi_n$ là hàm bị chặn với mỗi n cố định. Do đó, tồn tại $c > 0$ thoả mãn:

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \psi_n(s-t_2) f_s ds\right| \leq c(t_2 - t_1) \longrightarrow 0 \text{ khi } t_2 \to t_1.$$

Mặt khác, bởi tính liên tục của $\psi_n$ và Định lý hội tụ bị chặn, ta có:

$$\left|\int_0^{t_1} \big(\psi_n(s-t_1) - \psi_n(s-t_2)\big) f_s ds\right| \longrightarrow 0 \text{ khi } t_2 \to t_1.$$

Vậy $h_t^{(n)}$ là liên tục. Cuối cùng ta cần chứng minh:

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|f_t - h_t^{(n)}\right|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chú ý ta có $h_t^{(n)} \to f_t$ với mỗi $(t, \omega)$. Do đó, ta có thể sử dụng Định lý hội tụ bị chặn để kết thúc chứng minh.

**Bổ đề 3.1.6.** *Cho $f$ là quá trình ngẫu nhiên liên tục và bị chặn thuộc $L_a^2(\Omega \times [0, T])$. Khi đó, tồn tại dãy các quá trình ngẫu nhiên đơn giản $h_t^{(n)}$ trong $L_a^2(\Omega \times [0, T])$ thoả mãn* (3.1.1) *đúng.*

*Chứng minh.* Xét phân hoạch $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ và định nghĩa quá trình ngẫu nhiên $h_t^{(n)} = \sum_{K=0}^{n-1} f_{t_K} 1_{[t_K; t_{K+1})}(t)$. Với mỗi t bất kỳ thì t phải thuộc đoạn $[t_K; t_{K+1})$ nào đó. Khi đó $h_t^{(n)} = f_{t_K}$ có thể suy ra:

$$\left|h_t^{(n)} = f_{t_K}\right| = |f_t - f_{t_K}| \longrightarrow 0 \text{ khi } n \to \infty$$

vì $f$ là liên tục. Dùng Định lý hội tụ để kết thúc chứng minh. □

**Định nghĩa 3.1.7** (Tích phân Itô cho quá trình ngẫu nhiên bất kỳ)**.** Cho $f \in L_a^2(\Omega \times [0,T])$. Xét $h_t^{(n)}$ là các dãy quá trình ngẫu nhiên đơn giản trong $L_a^2(\Omega \times [0,T])$ thoả mãn:

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|f_t - f_t^{(n)}\right|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Khi đó ta định nghĩa tích phân Itô của $f$ là:

$$\int_0^T f_t dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T h_t^{(n)} dB_t \text{ trong } L^2(\Omega).$$

**Nhận xét.** Nếu $g_t^{(n)}$ là một xấp xỉ khác của $f_t$ thì ta có:

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|g_t^{(n)} - h_t^{(n)}\right|^2 dt \le 2\mathbb{E}\int_0^T \left|f_t - g_t^{(n)}\right|^2 dt + 2\mathbb{E}\int_0^T \left|f_t - h_t^{(n)}\right|^2 dt \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

và từ đó ta có:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\int_0^T h_t^{(n)} dB_t - \int_0^T g_t^{(n)} dB_t\right| &= \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(h_t^{(n)} - g_t^{(n)}\right) dB_t\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \left|h_t^{(n)} - g_t^{(n)}\right|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ khi } n \to \infty.\end{aligned}$$

Vậy định nghĩa của tích phân Itô không phụ thuộc vào lựa chọn cách xấp xỉ hàm $f$.

**Lưu ý.** Tích phân Itô cho quá trình ngẫu nhiên bất kỳ vừa định nghĩ có tất cả các tính chất như tích phân Itô cho quá trình ngẫu nhiên đơn giản. Cụ thể:

- $\mathbb{E}\int_0^T f_t dB_t = 0.$

- $E\left(\int_0^T f_t dB_t\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T f_t^2 dB_t$ (Công thức đẳng cự Itô).

**Ví dụ.** Tính tích phân $\int_0^t B_s dB_s$ bằng định nghĩa.

**Lời giải.** Ta cần xấp xỉ $B_s$ bởi quá trình ngẫu nhiên đơn giản. Xét phân hoạch $0 = t_0 <$

$t_1 < \cdots < t_n = T$ và quá trình ngẫu nhiên đơn giản $h_s^{(n)} = \sum\limits_{K=0}^{n-1} B_{t_K} 1_{t_K;t_{K+1}}(s)$. Ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^t h_s^{(n)} dB_s &= \sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K}) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{K=0}^{n-1}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 + \frac{1}{2}\sum_{K=0}^{n-1}(B^2_{t_{K+1}} - B^2_{t_K})\end{aligned}$$

Do biến phân bậc 2 của chuyển động Brown trên $[0.t]$ là $t$ nên ta có:

$$\sum_{K=0}^{n-1}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 \longrightarrow t \text{ khi } n \to \infty.$$

Mặt khác hiển nhiên ta có:

$$\sum_{K=0}^{n-1}(B^2_{t_{K+1}} - B^2_{t_K}) = B^2_{t_K} - B^2_0 = B^2_t - B^2_0 = B^2_t.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}$.

**Ví dụ.** Tính tích phân $\displaystyle\int_0^t s dB_s$ bằng định nghĩa.

**Lời giải.** Xét $h_s^n = \sum\limits_{K=0}^{n-1} t_K 1_{[t_K,t_{K+1})}(s)$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ và $\max\limits_{K=\overline{0,n-1}} |t_{K+1} - t_K| \to 0$ khi $n \to +\infty$. Ta có: $f_s - h_s^{(n)} = s.t_K$, nếu $s \in [t_K; t_{K-1})$ với $K = \overline{0, n-1}$.
Suy ra: $\displaystyle\int_0^t |f_s - h_s^{(n)}|^2 ds = \sum_{K=0}^{n-1}\int_{t_K}^{t_{K+1}} |s - t_K|^2 ds = \frac{1}{3}\sum_{K=0}^{n-1}(t_{K+1} - t_K)^2$.
Từ đó: $\displaystyle\mathbb{E}\left[\int_0^t |f_s - h_s^{(n)}|^2 ds\right] = \frac{1}{3}\sum_{K=0}^{n-1}(t_{K+1} - t_K)^2 \leqslant \frac{1}{3}\max_{K=\overline{0,n-1}} |t_{K+1} - t_K|^2 \to 0$ khi $n \to \infty$.
Do đó: $\displaystyle\int_0^t s dB_s = \int_0^t f_s dB_s = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t h_s^{(n)} dB_s$ trong $L^2(\Omega)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^t h_s^{(n)} dB_s &= \int_0^t \sum_{K=0}^{n-1} t_K.1_{[t_K;t_{K+1})}(s) dB_s \\ &= \sum_{K=0}^{n-1} t_K(B_{t_{K+1}} - B_{t_K}) \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{K=0}^{n-1} \big(t_{K+1}.B_{t_{K+1}} - t_K.B_{t_K} - B_{t_{K+1}}(t_{K+1} - t_K)\big) \\ \qquad t.B_t - \sum\limits_{K=0}^{n-1} (t_{K+1} - t_K).B_{t_{K+1}} \end{cases}\end{aligned}$$

Mà: $\displaystyle\sum_{K=0}^{n-1} B_{t_{K+1}}(t_{K+1} - t_K) \longrightarrow \int_0^t B_s ds$ khi $n \to +\infty$ trong $L^2(\Omega)$.

Nên: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^t h_s^{(n)} dB_s = t.B_t - \int_0^t B_s ds$ trong $L^2(\Omega)$.

Vậy $\displaystyle\int_0^t s dB_s = t.B_t - \int_0^t B_s ds.$

**Định lí 3.1.8** (Công thức tích phân từng phần)**.** *Cho $f \in L_a^2(\Omega \times [0,T])$ thoả mãn $f$ có biến phân bậc nhất hữu hạn. Khi đó, ta có:*

$$\int_0^t f_s dB_s = f_s B_s\Big|_0^t - \int_0^t B_s df_s.$$

*Đặc biệt, nếu $s \mapsto f_s$ là khả vi thì:*

$$\int_0^t f_s dB_s = f_t B_t - \int_0^t B_s.f_s' ds.$$

**Ví dụ.** Tính $\displaystyle\int_0^t sin(s) dB_s.$

**Lời giải.** Ta có: $\displaystyle\int_0^t sin(s) dB_s = sin(s).B_s\Big|_0^t - \int_0^t B_s.cos(s) ds = t.B_t - \int_0^t B_s.cos(s) ds.$

**Ví dụ.** Tính $\displaystyle\int_0^t B_s^2 dB_s.$

**Lời giải.** Xét phân hoạch $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$

**Bước 1** Xét: $\displaystyle h_t^{(n)} = \sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}^2.1_{[t_K;t_{K+1})}(t) \longrightarrow B_t^2$

**Bước 2**

$$\int_0^t h_s^{(n)} dB_s = \sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}^2 (B_{t_{K+1}} - B_{t_K}).$$

Sử dụng đồng nhất thức: $a^2(b-a) = \dfrac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \dfrac{1}{3}(b-a)^3$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\int_0^t h_s^{(n)} dB_s &= \frac{1}{3}\sum_{K=0}^{n-1}(B_{t_{K+1}}^3 - B_{t_K}^3) - \sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 - \frac{1}{3}\sum_{K=0}^{n-1}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^3 \\
&= \frac{1}{3}(B_t^3 - B_0^3) - \sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K}) \\
&- \sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}\Big((B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 - (t_{K+1} - t_K)\Big) - \frac{1}{3}\sum_{K=0}^{n-1}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^3.
\end{aligned}$$

Vì biến phân bậc 3 của chuyển động Brown bằng 0 nên $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{K=0}^{n-1}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^3 = 0$. Mà theo định nghĩa của tích phân Riemann thì

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}(B_{t_{K+1}} - B_{t_K}) = \int_0^t B_s ds.$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}\Big((B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 - (t_{K+1} - t_K)\Big)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\sum_{K=0}^{n-1} B_{t_K}^2\Big((B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 - (t_{K+1} - t_K)\Big)^2 \\
&+ 2\mathbb{E}\sum_{K<j} B_{t_K}\Big((B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 - (t_{K+1} - t_K)\Big) B_{t_j}\Big((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\Big) \\
&= \sum_{K=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[B_{t_K}^2\Big((B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 - (t_{K+1} - t_K)\Big)^2\right] \\
&= \sum_{K=0}^{n-1} t_K\mathbb{E}\Big((B_{t_{K+1}} - B_{t_K})^2 - (t_{K+1} - t_K)\Big)^2 \\
&= \sum_{K=0}^{n-1} t_K\Big(3(t_{K+1} - t_K)^2 - 2(t_{K+1} - t_K)^2 + (t_{K+1} - t_K)^2\Big) \\
&= 2\sum_{K=0}^{n-1} t_K(t_{K+1} - t_K)^2 \le \max_K(t_{K+1} - t_K)\sum_{K=0}^{n-1} t_K(t_{K+1} - t_K) \longrightarrow 0\int_0^t sds = 0.
\end{aligned}
$$

Vậy $\displaystyle\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{B_t^3}{3} - \int_0^t B_s ds.$

**Ví dụ.** Xét quá trình ngẫu nhiên $X_t = \displaystyle\int_0^t B_s^2 dB_s$. Tính hàm Covariance: $R(s,t) = \mathbb{E}[X_t \cdot X_s] = \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X_s]$.

**Lời giải.** Xét với $s < t$:

$$
\begin{aligned}
R(s,t) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t B_u^2 dB_u \int_0^s B_u^2 dB_u\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t B_u^2 dB_u \int_0^t B_u^2 1_{[0,s]}(u) dB_u.\right]
\end{aligned}
$$

Sử dụng công thức đẳng cự Itô ta có:

$$
\begin{aligned}
R(s,t) &= \mathbb{E}\int_0^t B_u^4 1_{[0,s]}(u) du \\
&= \mathbb{E}\int_0^s B_u^4 du = \int_o^s 3u^2 du = s^3 = (min(s,t))^3.
\end{aligned}
$$

**Ví dụ.** Tính $\mathbb{E}X_t^2$ với $X_t = \int_0^t e^{B_s} dB_s$, $0 \le t < T$.

**Lời giải.** Với $0 \le t < T$ ta có:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_t^2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{B_s} dB_s \int_0^t e^{B_s} dB_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{2B_s} dB_s\right] = \int_0^t \mathbb{E}(e^{2B_s}) dB_s \\
&= \int_0^t e^{\frac{2^2 s}{2}} ds = \int_0^t e^{2s} ds = \left.\frac{e^{2s}}{2}\right|_0^t = \frac{e^{2t}-1}{2}.
\end{aligned}$$

## 3.2 Một số bất đẳng thức moment

### 3.2.1 Bất đẳng thức Burkholde - David - Gundy (BGD)

Xét tích phân Itô $\int_0^t f_s dB_s$, với $0 \leqslant t \leqslant T$. Khi đó, $\forall p \geqslant 2$ ta có:

$$c_p.\mathbb{E}\Big(\int_0^T f_s^2 ds\Big)^{\frac{p}{2}} \leqslant \mathbb{E}\Big|\max_{t\in[0;T]} \int_0^T f_s dB_s\Big|^p \leqslant C_p.\mathbb{E}\Big(\int_0^T f_s^2 ds\Big)^{\frac{p}{2}}.$$

với $c_p, C_p$ là các hằng số phụ thuộc vào $p$.

**Lưu ý.** Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\int_0^T f_s^2 ds \leqslant \Big(\int_0^T (f_s^2)^{\frac{p}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{p}}.\Big(\int_0^T 1^q ds\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_0^T |f_s|^p ds\Big)^{\frac{2}{p}}.T^{\frac{p-2}{p}}$$

với $\frac{1}{q} + \frac{1}{p/2} = 1$. Do đó, $\mathbb{E}\Big(\int_0^T f_s^2 ds\Big)^{\frac{p}{2}} \leqslant T^{\frac{p-2}{2}}.\mathbb{E}\Big(\int_0^T |f_s|^p ds\Big)$.

### 3.2.2 Bất đẳng thức Martingale Doob

Ta có

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t f_s dB_s\Big| \geqslant x\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\Big|\int_0^T f_s dB_s\Big|^p}{x^p}.\forall x > 0, p \geqslant 1.$$

Đặc biệt ta có:

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0;T]}\Big|\int_0^t f_s dB_s\Big| \geqslant x\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\Big|\int_0^T f_s dB_s\Big|^2}{x^2} = \frac{\mathbb{E}\Big(\int_0^T f_s^2 ds\Big)}{x^2}.$$

**Ví dụ.** Ước lượng $\mathbb{E}\Big|\int_0^1 \sqrt{1+B_s^2}dB_s\Big|^4$.

**Lời giải.** Ta có: $\mathbb{E}\Big|\int_0^1 \sqrt{1+B_s^2}dB_s\Big|^4 \leqslant \mathbb{E}\Big(\max_{t\in[0,1]}\Big|\int_0^t \sqrt{1+B_s^2}dB_s\Big|^4\Big)$.
Áp dụng bất đẳng thức Burkholde - David - Gundy, ta có:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big|\int_0^1 \sqrt{1+B_s^2}dB_s\Big|^4 &\leqslant c_4.\mathbb{E}\Big(\int_0^1 (1+B_s^2)ds\Big)^2\\
&\leqslant c_4.\mathbb{E}\Big(\int_0^1 (1+B_s^2)^2 ds\Big)\\
&= c_4.\int_0^1 \mathbb{E}(1+2B_s^2+B_s^4)ds\\
&= c_4.\int_0^1 (1+2s+3s^2)ds\\
&= c_4.(s+s^2+s^3)\Big|_0^1\\
&= 3c_4.
\end{aligned}$$

**Ví dụ.** Ước lượng $\mathbb{E}\left|\int_0^t f_s dB_s - \int_0^u f_s dB_s\right|^p$ với $p \geq 2$ và $t, u \in [0, T]$.

**Lời giải.** Giả sử $u \leq t$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\left|\int_0^t f_s dB_s - \int_0^u f_s dB_s\right|^p\\
&= \mathbb{E}\left|\int_u^t f_s dB_s\right|^p = \mathbb{E}\left|\int_0^t f_s 1_{[u,t]}(s) dB_s\right|^p.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Burkholde - David - Gundy, ta có:

$$I \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t f_s^2 1_{[u,t]}(s) ds\right)^{\dfrac{p}{2}} = \mathbb{E}\left(\int_u^t f_s^2 ds\right)^{\dfrac{p}{2}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$I \le (t-u)^{\frac{p-2}{p}} \mathbb{E}\int_u^t |f_s|^p ds = (t-u)^{\frac{p-2}{p}} \int_u^t \mathbb{E}|f_s|^p ds.$$

Đặc biệt, nếu $\sup_s |f_s|^p \le M$ thì $I \le M(t-u)^{\frac{p}{2}}$.

Đặt $X_t = \int_0^t f_s dB_s$ thì từ ví dụ trên ta có

$$E\,|X_t - X_s|^p \le M|t-s|^{\frac{p}{2}}.$$

Như vậy, nếu tồn tại $p > 2$ thoả mãn $\sup_s \mathbb{E}|f_s|^p \le M$ thì các quỹ đạo cua $X_t$ là liên tục.

**Ví dụ.** i) Xét quá trình ngẫu nhiên $X_t = \int_0^t sinB_s dB_s$, $t \in [0,T]$. Chứng minh rằng:

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \le c|t-s|^{\frac{p}{2}} \quad \forall t, s \in [0,T], p \ge 2$$

trong đó $c > 0$ là một hằng số nào đó.

ii) Tương tự chứng minh rằng $Y_t = \int_0^t sinB_s ds$ thoả mãn:

$$\mathbb{E}|Y_t - Y_s|^p \le c|t-s|^p.$$

**Lời giải.** i) Vì $\sup_s \mathbb{E}|sinB_s|^p \le \mathbb{E}(1) = 1 = c$ nên $\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \le c|t-s|^{\frac{p}{2}}$.

ii) Giả sử với $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
|Y_t - Y_s|^p &= \left| \int_0^t sinB_u du - \int_0^s sinB_u du \right|^p \\
&= \left| \int_s^t sinB_u du \right|^p \\
&\leq \left( \int_s^t |sinB_u| du \right)^p \\
&\leq \left( \int_s^t 1 du \right)^p = |t-a|^p.
\end{aligned}$$

Cho nên: $\mathbb{E}|Y_t - Y_s|^p \leq c|t-s|^p$.

**Ví dụ.** Xét quá trình ngẫu nhiên $X_t = \int_0^t B_s dB_s + \int_0^t B_s^2 dB_s$ với $0 \leq t \leq T$. Chứng minh rằng:

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \leq c|t-s|^{\frac{p}{2}} \quad \forall t, s \in [0,T], p \geq 2.$$

**Lời giải.** Ta có bất đẳng thức: $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall a, b > 0$. Vì vậy:

$$\begin{aligned}
|X_t - X_s|^p &= \left| \int_s^t B_u du + \int_s^t B_u^2 du \right|^p \\
&\leq 2^{p-1} \left( \left| \int_s^t B_u du \right|^p + \left| \int_s^t B_u^2 du \right|^p \right).
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \leq 2^{p-1}\mathbb{E}\left| \int_s^t B_u du \right|^p + 2^{p-1}\mathbb{E}\left| \int_s^t B_u^2 du \right|^p.$$

Áp dụng bất đẳng thức B-D-G và Holder ta có:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - X_s|^p &\leq 2^{p-1}\mathbb{E}\int_s^t |B_u|^p du \cdot (t-s)^{p-1} + 2^{p-1}C_p\mathbb{E}\left( \int_s^t B_u^4 du \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq 2^{p-1}\int_s^t \mathbb{E}|B_u|^p du \cdot (t-s)^{p-1} + 2^{p-1}C_p \int_s^t \mathbb{E}|B_u|^{2p} du \cdot (t-s)^{\frac{p}{2}-1}.
\end{aligned}$$

Vì $\sup_s \mathbb{E}|B_u|^p + \sup_s \mathbb{E}|B_u|^{2p} \leq M \quad \forall u \in [0,T]$ nên:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - X_s|^p &\leq 2^{p-1} M \left( (t-s)^p + (t-s)^{\frac{p}{2}} \right) \\
&\leq 2^{p-1} M \left( T^{\frac{p}{2}} (t-s)^{\frac{p}{2}} + (t-s)^{\frac{p}{2}} \right) \\
&\leq 2^{p-1} M (t-s)^{\frac{p}{2}} \left( T^{\frac{p}{2}} + 1 \right) = c|t-s|^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

# Chương 4

# Vi phân I-tô

## 4.1 Công thức vi phân Itô

Nhắc lại về vi phân tất định, xét $x_t = x_o + \int_0^t f_s ds$, $t \in [0; T]$.
Khi đó $x'_t = f_t$ tức $dx_t = f_t dt$. Đặt $y_t = g(t, x_t)$ với $g \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ thì

$$dy_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, x_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_t).\frac{\partial x}{\partial t}\right)dt = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, x_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_t) \cdot f_t\right)dt.$$

**Câu hỏi.** Công thức vi phân có mở rộng được cho tích phân Itô không?

**Định nghĩa 4.1.1.** $(X_t)_{t\in[0;T]}$ gọi là một quá trình ngẫu nhiên Itô nếu

$$X_t = x_0 + \int_0^t U_s ds + \int_0^t V_s dB_s \quad (*)$$

với $t \in [0; T]$. Trong đó $V \in L_a^2(\Omega \times [0; T])$ và $U$ là $\mathbb{F}$-tương thích và $\int_0^T |U_s| ds < \infty$.

**Lưu ý.** Biểu thức $(*)$ được gọi là dạng tích phân của $X_t$. Ta cũng thường viết $X_t$ dưới dạng vi phân như sau

$$\begin{aligned} dX_t &= U_t dt + V_t dB_t, t \in [0, T] \\ X_0 &= x_0. \end{aligned}$$

**Định nghĩa 4.1.2.** (Công thức vi phân Itô) Xét hàm $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ và định nghĩa

$Y_t = f(t, X_t)$. Khi đó, ta có:

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t).(dX_t)^2.$$

Trong đó, ta quy ước: $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, dB_t \cdot dB_t = dt$.

**Lưu ý.** i) $(dX_t)^2 = dX_t.dX_t = (U_t dt + V_t dB_t)(U_t dt + V_t dB_t) = V_t^2 dt$.

ii) Ta có thể viết $Y_t$ dưới dạng tích phân như sau:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}.\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s).V_s^2 ds. \\ &= f(0; X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)(U_s ds + V_s dB_s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s).V_s^2 ds \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}.U_s + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.V_s^2\right).ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s).V_s dB_s. \end{aligned}$$

iii) Chuyển động Brown $(B_t)_{t\in[0,T]}$ cũng là 1 quá trình Itô.

$$B_t = 0 + \int_0^t 0ds + \int_0^t dB_s.$$

**Ví dụ.** Xét $X_t = B_t$ và hàm $f(t, x) = t.x$. Tính vi phân Itô của $Y_t = f(t, X_t)$.

**Lời giải.** Ta có: $dY_t = X_t dt + t dX_t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (dX_t)^2 = B_t dt + t dB_t$.
Từ công thức trên ta có: $Y_t = Y_0 + \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$.
Hay: $tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$.
Như vậy: $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$.

**Ví dụ.** Tính vi phân Itô của $Y_t = B_t^2$. Từ đó, tính $\int_0^t B_s dB_s$.

**Lời giải.** Ta có: $f(t, x) = x^2, X_t = B_t$.
Do đó: $dY_t = 0dt + 2X_t dX_t + \frac{1}{2}.2(dX_t)^2 = 2.B_t dB_t + dt$.
Viết dưới dạng tích phân, ta có: $Y_t = Y_0 + \int_0^t 2B_s dB_s + t$. Do đó: $\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}$.

**Ví dụ.** Tính $\int_0^t sB_s dB_s$.

**Lời giải.** Ta có $Y_t = f(t, B_t) = tB_t^2$ với $f(t,x) = tx^2 \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$.
Áp dụng công thức vi phân Itô, ta có

$$dY_t = B_t^2 dt + 2tB_t dB_t + \frac{1}{2}.2t(dB_t)^2 = (B_t^2 + t)dt + 2tB_t dB_t.$$

Do đó

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (B_s^2 + s)ds + \int_0^t 2sB_s dB_s.$$

Vì vậy

$$\int_0^t sB_s dB_s = \frac{1}{2}\left(Y_t - Y_0 - \int_0^t (B_s^2 + s)ds\right) = \frac{1}{2}\left(t.B_t^2 - \int_0^t (B_s^2 + s)ds\right).$$

**Ví dụ.** Tính các tích phân sau:

i) $\displaystyle\int_0^t s^2 B_s^3 dB_s$

ii) $\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{s+B_s} dB_s$

iii) $\displaystyle\int_0^t \cos B_s dB_s$

**Lời giải.** i) Xét hàm $f(t,x) = t^2x^4$ và $Y_t = t^2B_t^4$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= 2tB_t^4 dt + 4t^2B_t^3 dB_t + \frac{1}{2}\cdot 12t^2B_t^2(dB_t)^2 \\ &= \left(2tB_t^4 + 6t^2B_t^2\right)dt + 4t^2B_t^3 dB_t. \end{aligned}$$

Do đó viết dưới dạng tích phân ta có:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(2sB_s^4 + 6s^2B_s^2\right)ds + \int_0^t 4s^2B_s^3 dB_s$$

Vì vây:

$$\begin{aligned} \int_0^t s^2B_s^3 dB_s &= \frac{1}{4}\left(Y_t - Y_0 - \int_0^t (2sB_s^4 + 6s^2B_s^2)ds\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(t^2B_t^4 - \int_0^t \left(2sB_s^4 + 6s^2B_s^2\right)ds\right). \end{aligned}$$

ii) Xét hàm $f(t,x) = \mathrm{e}^{t+x}$ và $Y_t = \mathrm{e}^{t+B_t}$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= \mathrm{e}^{t+B_t}dt + \mathrm{e}^{t+B_t}dB_t + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{t+B_t}(dB_t)^2 \\ &= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{t+B_t}dt + \mathrm{e}^{t+B_t}dB_t. \end{aligned}$$

Do đó viết dưới dạng tích phân ta có:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{3}{2}\mathrm{e}^{s+B_s}ds + \int_0^t \mathrm{e}^{s+B_s}dB_s$$

Vì vây:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathrm{e}^{s+B_s}dB_s &= Y_t - Y_0 - \frac{3}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{s+B_s}ds \\ &= \mathrm{e}^{t+B_t} - 1 - \frac{3}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{s+B_s}ds. \end{aligned}$$

iii) Xét hàm $f(t,x) = \sin x$ và $Y_t = \sin B_t$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= \cos B_t dB_t + \frac{1}{2}\cdot(-\sin B_t)(dB_t)^2 \\ &= \cos B_t dB_t - \frac{1}{2}\cdot \sin B_t dt. \end{aligned}$$

Do đó viết dưới dạng tích phân ta có:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \cos B_s dB_s - \int_0^t \frac{1}{2}\cdot \sin B_s ds$$

Vì vây:

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos B_s dB_s &= Y_t - Y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \sin B_s ds \\ &= \sin B_t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin B_s ds. \end{aligned}$$

**Ví dụ.** Cho $(B_t)_{t\in[0,T]}$ là chuyển động Brown. Ký hiệu $m_K(t) = \mathbb{E}B_t^K$ với $K = 0, 1, 2, \ldots$

i) Chứng minh rằng: $m_K(t) = \dfrac{1}{2}K(K-1)\displaystyle\int_0^t m_{K-2}(s)ds$.

ii) Từ đó tính $\mathbb{E}B_t^6$.

**Lời giải.** i) Xét hàm $f(t,x) = x^K$ và $Y_t = B_t^K$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= 0dt + KB_t^{K-1}dB_t + \frac{1}{2}K(K-1)B_t^{K-2}(dB_t)^2 \\ &= \frac{1}{2}K(K-1)B_t^{K-2}dt + KB_t^{K-1}dB_t. \end{aligned}$$

Do đó viết dưới dạng tích phân ta có:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t KB_s^{K-1}dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}K(K-1)B_s^{K-2}ds$$

Hay:

$$B_t^K = \int_0^t KB_s^{K-1}dB_s + \frac{1}{2}K(K-1)\int_0^t B_s^{K-2}ds$$

Lấy kì vọng hai vế ta được:

$$\mathbb{E}\left(B_t^K\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t KB_s^{K-1}dB_s + \frac{1}{2}K(K-1)\int_0^t B_s^{K-2}ds\right)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} m_K(t) &= \mathbb{E}\left(K\int_0^t B_s^{K-1}dB_s\right) + \frac{1}{2}K(K-1)\mathbb{E}\left(\int_0^t B_s^{K-2}ds\right) \\ &= 0 + \frac{1}{2}K(K-1)\int_0^t \mathbb{E}\left(B_s^{K-2}\right)ds \end{aligned}$$

Vậy $m_K(t) = \frac{1}{2}K(K-1)\int_0^t m_{K-2}(s)ds$.

ii) Ta có:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}B_t^6 = m_6(t) &= \int_0^t \frac{1}{2}\cdot 6(6-1)m_4(s)ds \\ &= 15\int_0^t m_4(s)ds. \end{aligned}$$

Mà ta lại có:

$$m_4(t) = \frac{1}{2}\cdot 4(4-1)\int_0^t m_2(s)ds = 6\int_0^t sds = 3t^2.$$

Vậy $m_6(t) = 15\int_0^t 3s^2 ds = 15t^3$.

**Ví dụ.** Xét $Y_t = \exp\left(\int_0^t B_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right)$ với $0 \leq t \leq T$. Tính $dY_t$.

**Lời giải.** Xét $X_t = -\frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds + \int_0^t B_s dB_s$. Khi đó: $Y_t = \mathrm{e}^{X_t}$ và $f(x,t) = e^x$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t} (dX_t)^2 \\ &= e^{X_t}\left(-\frac{1}{2} B_t^2 dt + B_t dB_t\right) + \frac{1}{2} e^{X_t} B_t^2 dt = B_t e^{X_t} dB_t. \end{aligned}$$

**Ví dụ.** i) Cho $a > 0$ và $\sigma \in \mathbb{R}$. Xét quá trình ngẫu nhiên $X_t = \sigma \mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as} dB_s, t \geq 0$. Chứng minh rằng $X_t$ thoả mãn:

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t, t \geq 0.$$

**Lưu ý**: $X_t$ được gọi là quá trình Ornstein - Uhlenbeck.

ii) Xét quá trình ngẫu nhiên $X_t = \sinh(c + t + B_t), t \geq 0$, trong đó $c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2} X_t\right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dB_t, \quad t \geq 0.$$

**Lưu ý.** $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$.

**Lời giải.** i) Đặt $U_t = \int_0^t \mathrm{e}^{as} dB_s \to dU_t = \mathrm{e}^{at} dB_t$. Xét hàm $f(t,u) = \sigma \mathrm{e}^{-at} u$, khi đó $X_t = f(t, U_t)$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dX_t &= -a\sigma \mathrm{e}^{-at} U_t dt + \sigma \mathrm{e}^{-at} dU_t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (dU_t)^2 \\ &= -a\sigma \mathrm{e}^{-at}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{as} dB_s\right) dt + \sigma \mathrm{e}^{-at} \mathrm{e}^{at} dB_t \\ &= -aX_t dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

ii) Đặt $U_t = B_t$, xét hàm $f(t,u) = \sinh(c + t + u) \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$. Khi đó:

$$X_t = f(t, U_t) = \sinh(c + t + U_t).$$

Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned}
dX_t &= \cosh(c+t+B_t)dt + \cosh(c+t+B_t)dB_t + \frac{1}{2}\sinh(c+t+B_t)(dB_t)^2\\
&= \left(\cosh(c+t+B_t) + \frac{1}{2}\sinh(c+t+B_t)\right) + \cosh(c+t+B_t)dB_t\\
&= \left(\sqrt{1+\sinh^2(c+t+B_t)} + \frac{1}{2}\sinh(c+t+B_t)\right) + \sqrt{1+\sinh^2(c+t+B_t)}dB_t\\
&= \left(\sqrt{1+X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right)dt + \sqrt{1+X_t^2}dB_t.
\end{aligned}$$

**Ví dụ.** Chứng minh rằng quá trình ngẫu nhiên $(X_t)_{t\in[0,T]}$ thoả mãn phương trình tương ứng.

i) $X_t = \dfrac{B_t}{1+t}$ thoả mãn $dX_t = \dfrac{-1}{1+t}X_t + \dfrac{1}{1+t}dB_t$.

ii) $X_t = \sin B_t$ thoả mãn $dX_t = -\dfrac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t$ với mọi $t$ thoả mãn $t < t_0 = \inf\left\{s : B_s \notin \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$.

iii) $X_t = a(1-t) + bt + (1-t)\displaystyle\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$, $0 \le t < 1$ thoả mãn $dX_t = \dfrac{b - X_t}{1-t}dt + dB_t$, $0 \le t < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.
**Lưu ý**: $X_t$ được gọi là cầu Brown nối hai điểm $a$ và $b$.

**Lời giải.** i) Đặt $U_t = B_t$. Xét hàm $f(t,u) = \dfrac{u}{1+t}$. Khi đó: $X_t = f(t, U_t) = \dfrac{U_t}{1+t}$.

Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned}
dX_t &= \frac{-U_t}{(1+t)^2}dt + \frac{1}{1+t}dU_t + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot (dU_t)^2\\
&= \frac{-U_t}{(1+t)^2}dt + \frac{1}{1+t}dB_t.
\end{aligned}$$

ii) Đặt $U_t = B_t$ với mọi $t < t_0 = \inf\left\{s : B_s \notin \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$. Xét hàm: $f(t,u) = \sin U_t$.

Khi đó $X_t = f(t, U_t) = \sin U_t$ Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dX_t &= 0dt + \cos U_t dU_t + \frac{1}{2}(-\sin U_t)(dU_t)^2 \\ &= \cos B_t dB_t - \frac{1}{2}\sin B_t (dB_t)^2 \\ &= \cos B_t dB_t - \frac{1}{2}\sin B_t dt \\ &= \sqrt{1 - X_t^2}dB_t - \frac{1}{2}X_t dt. \end{aligned}$$

iii) Đặt $U_t = \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$. Khi đó $dU_t = \frac{1}{1-t}dB_t$. Xét hàm $f(t,u) = a(1-t)+bt+(1-t)u$. Vì vậy

$$X_t = f(t, U_t) = a(1-t) + bt + (1-t)U_t.$$

Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dX_t &= (-a + b - U_t)dt + (1-t)dU_t + \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot (dU_t)^2 \\ &= (-a + b - U_t)dt + (1-t)\frac{1}{1-t}dB_t \\ &= dB_t - \frac{(a - b + U_t)(1-t)}{1-t}dt \\ &= dB_t - \frac{a(1-t) - b(1-t) + U_t(1-t)}{1-t}dt \\ &= dB_t - \frac{a(1-t) + bt + U_t(1-t) - B}{1-t}dt \\ &= dB_t - \frac{X_t - b}{1-t}dt = \frac{b - X_t}{1-t}dt + dB_t. \end{aligned}$$

**Ví dụ.** Giả sử quá trình ngẫu nhiên $(X_t)_{t\in[0,T]}$ thoả mãn $dX_t = aX_t dt + \sigma X_t dB_t, t \in [0,T]$ trong đó $X_0 > 0, a, \sigma \in \mathbb{R}$. Tìm $X_t$.

**Lời giải.** Đặt $Y_t = \ln X_t$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}(dX_t)^2 \\ &= \frac{aX_t dt + \sigma X_t dB_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}(\sigma X_t)^2 dt \\ &= \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Dưới dạng tích phân ta có:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dB_s.$$

hay

$$\ln X_t = \ln X_0 + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t.$$

Do đó:

$$X_t = X_0 + \mathrm{e}^{\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t}.$$

**Định lí 4.1.3.** *Xét 2 quá trình Itô:*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t U_s ds + \int_0^t V_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t \overline{U}_s ds + \int_0^t \overline{V}_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

*Cho* $f \in \mathbb{C}^{1,2,2}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ *và* $Z(t) = f(t, X_t, Y_t)$. *Khi đó, ta có:*

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t, Y_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t, Y_t)dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(t, X_t, Y_t)dY_t \\ &+ \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t)(dX_t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t)dX_t dY_t \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t, X_t, Y_t)dX_t dY_t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t)(dY_t)^2\bigg) \end{aligned}$$

**Ví dụ**: Cho

$$Z_t = t^2 \cdot B_t \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t B_s^4 ds + \int_0^t B_s^2 dB_s\right), \quad t \in [0, T].$$

Tính $dZ_t$.

**Lời giải.** Đặt:

$$X_t = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t B_s^4 + \int\limits_0^t B_s^2 dB_s, Y_t = B_t.$$

Xét hàm:

$$f(t,x,y) = t^2 y e^x$$

Ta có:

$$Z_t = f(t, X_t, Y_t).$$

Áp dụng công thức vi phân Itô, ta có:

$$\begin{aligned} dZ_t &= 2tY_t e^{X_t}dt + t^2 Y_t e^{X_t} dX_t + t^2 e^{X_t} dY_t + \frac{1}{2}\Big(t^2 Y_t e^{X_t}(dX_t)^2 + 2t^2 e^{X_t} dX_t dY_t + 0(dY_t)^2\Big). \\ &= 2tY_t e^{X_t}dt + t^2 Y_t e^{X_t}\Big(-\frac{1}{2}B_t^4 dt + B_t^2 dB_t\Big) + t^2 e^{X_t} dB_t + \frac{1}{2}\Big(t^2 Y_t e^{X_t} B_t^4 dt + 2t^2 e^{X_t} B_t^2 dt\Big). \end{aligned}$$

Do đó: $dZ_t = \Big(2tY_t e^{X_t} + t^2 e^{X_t} B_t^2\Big)dt + \Big(t^2 Y_t e^{X_t} B_t^2 + t^2 e^{X_t}\Big)dB_t.$

## 4.2 Tính chất martingale của tích phân Itô

**Định nghĩa 4.2.1.** Cho một họ các $\sigma$ - đại số $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$. Khi đó, quá trình ngẫu nhiên $(X_t)_{t\in[0,T]}$ được gọi là $\mathcal{G}$ - martingale nếu:

a) $\mathbb{E}|X_t| < \infty \quad \forall t \in [0,T]$.

b) $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{G}_s] = X_s \quad \forall s \le t$.

Đặc biệt, nếu: $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ thì ta chỉ nói $(X_t)_{t\in[0,T]}$ là một martingale.

**Nhận xét**: $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s] = \mathbb{E}[X_0] \quad \forall t, s$.

Nhắc lại kỳ vọng có điều kiện:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \begin{cases} X & \text{nếu } X \text{ là } \mathcal{F}- \text{ đo được} \\ \mathbb{E}X & \text{nếu } X \text{ và } \mathcal{F} \text{ độc lập} \end{cases}$$

**Ví dụ**: Xét xem $X_t = B_t, t \in [0,T]$ có phải là martingale không?

**Lời giải.** Hiển nhiên ta có: $\mathbb{E}|B_t| < \infty \quad \forall t \in [0, T]$. Hơn nữa ta có: Khi $s \leq t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s]\\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s]\\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s\\ &= B_s.\end{aligned}$$

Vậy: $(B_t)_{t\in[0,T]}$ là một martingale.

**Ví dụ**: Xét xem các quá trình ngẫu nhiên sau có là martingale không?

a) $X_t = B_t^2 - t, t \in [0, T]$.

b) $X_t = \mathrm{e}^{B_t - \frac{t}{2}}, t \in [0, T]$, ($X_t$ được gọi là chuyển động Brown hình học).

**Lời giải.**

a) Hiển nhiên: $\mathbb{E}|X_t| = \mathbb{E}\left|B_t^2 - t\right| \leq \mathbb{E}\left|B_t^2\right| + t = 2t < \infty, \forall t \in [0, T]$. Khi $s \leq t$ ta có:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[B_t^2|\mathcal{F}_s\right] - t\\ &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s\right] - t\\ &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)B_s|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[B_s^2|\mathcal{F}_s\right] - t\\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 + 2B_s\mathbb{E}\left[B_t - B_s|\mathcal{F}_s\right] + B_s^2 - t\\ &= t - s + 0 + B_s^2 - t = B_s^2 - s = X_s\end{aligned}$$

Vậy: $(X_t)_{t\in[0,T]}$ là một martingale.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t| &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{B_t - \frac{t}{2}}\right] = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{B_t}\right]\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} = 1 < \infty, \forall t.\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta có:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{B_t-\frac{t}{2}}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{B_t-B_s}\mathrm{e}^{B_s}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{B_s}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{B_t-B_s}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{B_s}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{B_t-B_s}\right] = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{B_s}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t-s)} \\
&= \mathrm{e}^{B_s-\frac{s}{2}} = X_s.
\end{aligned}$$

Vậy: $(X_t)_{t\in[0,T]}$ là một martingale.

**Định lí 4.2.2.** *Cho quá trình ngẫu nhiên $u \in L_a^2(\Omega \times [o,T])$. Khi đó, tích phân Itô $\int\limits_0^t u_s dB_s, t \in [0,T]$ là một martingale. Tức là ta có:*

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t u_s dB_s \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right] = \int\limits_0^t u_s dB_s, \forall t_0 \leq t.$$

**Định lí 4.2.3.** *Cho $F$ là một biến ngẫu nhiên bình phương khả tích (tức là $\mathbb{E}|F|^s < \infty$). Khi đó tồn tại một quá trình ngẫu nhiên $u \in L_a^2(\Omega \times [o,T])$ thoả mãn:*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int\limits_0^T u_s dB_s.$$

**Lưu ý**:

1. Có thể tính $u$ nếu sử dụng đạo hàm Malliavin.

2. Định lý trên được gọi là Định lý biểu diễn martingale.

**Ví dụ**: Tìm biểu diễn tích phân Itô cho các biến ngẫu nhiên sau:

a) $F = B_T^2$

b) $F = B_T^3$

c) $F = B_T^4$

**Lời giải.** a) Áp dụng công thức vi phân Itô, ta có:

$$\begin{aligned} dB_t^2 &= 2B_t dB_t + (dB_t)^2 \\ &= dt + 2B_t dB_t. \end{aligned}$$

Vậy khi đó:

$$B_t^2 = B + 0^2 + \int_0^t ds + \int_0^t 2B_s dB_s$$

Chọn $t = T$ thì:

$$F = T + \int_0^T 2B_s dB_s.$$

Chú ý rằng $\mathbb{E}[F] = t$ nên:

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^t 2B_s dB_s.$$

b) Áp dụng công thức vi phân Itô, ta có:

$$dB_t^3 = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt$$

Chọn $t = T$ ta có:

$$F = \int_o^T 3B_s ds + \int_0^T 3B_s^2 dB_S$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$\begin{aligned}
\int_0^T 3B_s ds &= 3B_s s\Big|_0^T - \int_0^T 3s dB_s \\
&= 3B_t T - \int_0^T 3s dB_s \\
&= 3T - \int_0^T dB_s - \int_0^T 3s dB_s \\
&= \int_0^T (3T - 3s) dB_s
\end{aligned}$$

Vậy $F = \int_0^T (3T - 3s + 3B_s^2) dB_s$.

c) Áp dụng công thức vi phân Itô, ta có:

$$dB_t^4 = 4B_t^3 dB_t + 6B_t^2 dt$$

Chọn $t = T$ ta có

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^T 6B_s^2 ds + \int_0^T 4B_s^3 dB_S \\
&= 6TB_T^2 - \int_0^T 6s dB_s^2 + \int_0^T 4B_s^3 dB_S \\
&= 6TB_T^2 - \int_0^T 6s(2B_s dB_s + ds) + \int_0^T 4B_s^3 dB_S
\end{aligned}$$

Sử dụng câu a) ta có: $B_T^2 = T + \int\limits_0^T 2B_s dB_s$. Do đó:

$$F = 6T\left(T + \int\limits_0^T 2B_s dB_s\right) - \int\limits_0^T 12sB_s dB_s - 3T^2 + \int\limits_0^T 4B_s^3 dB_S$$

$$= 3T^2 + \int\limits_0^T (12TB_s - 12sB_s + 4B_s^3) dB_s.$$

# Chương 5

# Phương trình vi phân I-tô

## 5.1 Phương trình vi phân ngẫu nhiên

**Định nghĩa 5.1.1** (Phương trình vi phân ngẫu nhiên)**.** Cho $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ là một quá trình ngẫu nhiên. Khi đó phương trình

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \in [0, T] \\ X_0 &= x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

**Định nghĩa 5.1.2.** Quá trình ngẫu nhiên $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên 5.1.1 nếu

1. $X$ là $\mathbb{F}-$tương thích, tức $X_t$ là $\mathbb{F}_t-$đo được.
2. Các tích phân $\int_0^t a(s, X_s)ds$ và $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ tồn tại và thoả mãn

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad \forall t \in [0, T].$$

## 5.2 Phương trình tuyến tính tổng quát

**Định nghĩa 5.2.1** (Phương trình tuyến tính tổng quát)**.** Phương trình tuyến tính tổng quát có dạng

$$\begin{aligned} dX_t &= (a(t) + b(t)X_t)dt + (c(t) + e(t)X_t)dB_t \\ X_0 &= x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Lời giải.** 1. Xét phương trình

$$\begin{aligned} dY_t &= b(t)Y_t dt + e(t)Y_t dB_t \quad \forall t \in [0, T] \\ Y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Áp dụng công thức vi phân I-tô cho $Z_t = \ln Y_t$ ta được

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{Y_t} dY_t + \frac{1}{2} \frac{-1}{Y_t^2} (dY_t)^2 \\ &= \frac{b(t)Y_t dt + e(t)Y_t dB_t}{Y_t} + \frac{-1}{2Y_t^2} (b(t)Y_t dt + e(t)Y_t dB_t)^2 \\ &= b(t)dt + e(t)dB_t - \frac{e^2(t)}{2} dt \\ &= \left( b(t) - \frac{e^2(t)}{2} \right) dt + e(t)dB_t. \end{aligned}$$

Từ đó thu được

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0 + \int_0^t \left( b(s) - \frac{e^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t e(s)dB_s \\ Z_0 &= \ln Y_0 = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$Y_t = \exp Z_t = \exp \left( \int_0^t \left( b(s) - \frac{e^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t e(s)dB_s \right).$$

2. Đặt $U_t = \dfrac{X_t}{Y_t}$, áp dụng công thức vi phân I-tô ta được

$$dU_t = \frac{1}{Y_t} dX_t + \frac{-X_t}{Y_t^2} dY_t + \frac{1}{2} \left( 0 \cdot (dX_t)^2 + 2 \cdot \frac{-1}{Y_t^2} dX_t dY_t + \frac{2X_t}{Y_t^3} (dY_t)^2 \right).$$

Trong đó $dX_t dY_t = e(t)Y_t[c(t) + e(t)X_t]dt$ và $(dY_t)^2 = e^2(t)Y_t^2 dt$, nên

$$dU_t = \left(\frac{a(t) - c(t)e(t)}{Y_t}\right) dt + \frac{c(t)}{Y_t} dB_t$$
$$U_t = U_0 + \int_0^t \left(\frac{a(s) - c(s)e(s)}{Y_s}\right) ds + \int_0^t \frac{c(s)}{Y_s} dB_s$$
$$U_0 = \frac{X_0}{Y_0} = x.$$

Từ đó ta thu được $X_t = U_t Y_t$.

**Ví dụ.** Giải các phương trình sau

1. $\begin{cases} dX_t &= -X_t dt + dB_t, \quad t \in [0, T] \\ X_0 &= x \end{cases}$

2. $\begin{cases} dX_t &= 2dt + X_t dB_t, \quad t \in [0, T] \\ X_0 &= x \end{cases}$

**Lời giải.** 1. Xét phương trình: $\begin{cases} dY_t &= -Y_t dt \\ Y_0 &= 1 \end{cases}$

Đặt: $Z_t = lnY_t$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có

$$dZ_t = \frac{1}{Y_t} dY_t - \frac{1}{2Y_t^2}(dY_t)^2 = -dt.$$

Suy ra

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t -sds = -t.$$

Do đó $Y_t = e^{-t}$.

Đặt: $U_t = \dfrac{X_t}{Y_t}$ thì $\begin{cases} dU_t &= \left(\frac{0}{Y_t} - \frac{1 \cdot 0}{Y_t}\right) dt + \frac{1}{Y_t} dB_t = e^t dB_t \\ U_0 &= \frac{X_0}{Y_0} = x \end{cases}$

Suy ra $U_t = x + \displaystyle\int_0^t e^s dB_s$

Vậy $X_t = Y_t \cdot U_t = e^{-t}\left(x + \displaystyle\int_0^t e^s dB_s\right) = xe^{-t} + \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s.$

**Lưu ý**:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X_t &= xe^{-t} \\
\mathrm{Var}(X_t) &= E(X_t - EX_t)^2 \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_0^t e^{-2(t-s)} ds\Big) \\
&= \int_0^t e^{-2(t-s)} ds \\
&= \frac{1-e^{-2t}}{2}.
\end{aligned}
$$

2. Xét phương trình $\begin{cases} dY_t & = Y_t dB_t \\ Y_0 & = 1 \end{cases}$

Đặt: $Z_t = \ln Y_t$. Áp dụng công thức vi phân Itô, ta có

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= \frac{1}{Y_t} dY_t - \frac{1}{2Y_t^2}(dY_t)^2 \\
&= dB_t - \frac{1}{2Y_t^2} Y_t^2 dt \\
&= dB_t \\
&= \frac{1}{2} dt.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
Z_t &= Z_0 + \int_0^t dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t ds \\
&= -\frac{1}{2}t + \int_0^t dB_s \\
&= -\frac{1}{2}t + B_t.
\end{aligned}
$$

Nên

$$Y_t = e^{-\frac{1}{2}t + B_t}.$$

Xét $U_t = \dfrac{X_t}{Y_t}.$ Áp dụng công thức Itô, ta có:

$$dU_t = \left(\frac{2}{Y_t} - \frac{0}{Y_t}\right)dt + \frac{0}{Y_t}dB_t = \frac{2}{Y_t}dt$$

Do đó

$$\begin{aligned} U_t &= U_0 + 2\int\limits_0^t \frac{1}{Y_s}ds \\ &= x + 2\int\limits_0^t \frac{1}{Y_s}ds \\ &= x + 2\int\limits_0^t e^{\frac{s}{2} - B_s}ds. \end{aligned}$$

Vậy $X_t = Y_t \cdot U_t = e^{-\frac{1}{2}t + B_t}\left(x + 2\int\limits_0^t e^{\frac{s}{2} - B_s}ds\right).$

## 5.3 Phương trình bán tuyến tính

**Định nghĩa 5.3.1** (Phương trình bán tuyến tính)**.** Phương trình bán tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t)X_t dB_t, t \in [0, T] \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Lời giải.** 1. Xét quá trình ngẫu nhiên :

$$Y_t = \exp\left(-\int\limits_0^t \sigma(s)dB_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sigma^2(s)ds\right).$$

Áp dụng công thức vi phân I-tô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t\left(-\sigma(t)dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}Y_t\sigma^2(t)dt \\ &= \sigma^2(t)Y_t dt - \sigma(t)Y_t dB_t. \end{aligned}$$

2. Xét $X_t = X_t \cdot Y_t$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dZ_t &= Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t \\ &= Y_t\big(b(t,X_t)dt + \sigma(t)X_t dB_t\big) + X_t\left(\sigma^2(t)Y_t dt - \sigma(t)Y_t dB_t\right) - \sigma^2(t)X_tY_t dt \\ &= Y_t b(t,X_t)dy. \end{aligned}$$

Như vậy, $Z_t$ là nghiệm của phương trình vi phân tất định

$$dZ_t = Y_t b\left(t, \frac{Z_t}{Y_t}\right)dt.$$

Tuỳ vào hàm $b(t, X_t)$ ta có thể tìm $Z_t$ tường minh. Khi đó kết luận nghiệm là $X_t = \dfrac{Z_t}{Y_t}$.

**Ví dụ**. Giải phương trình:

$$\begin{cases} dX_t &= \dfrac{dt}{X_t} + X_t dB_t, t \in [0,t] \\ X_0 &= x > 0. \end{cases}$$

**Lời giải.** Xét quá trình ngẫu nhiên :

$$Y_t = \exp\left(-\int_0^t 1dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 1^2 ds\right) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}.$$

Coi $Y_t = f(t, B_t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}dt - \mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}dB_t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}dt \\ &= \mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}dt - \mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}dB_t \\ &= Y_t dt - Y_t dB_t. \end{aligned}$$

Xét $Z_t = X_t \cdot Y_t$. Áp dụng công thức vi phân Itô ta có:

$$\begin{aligned} dZ_t &= Y_t\left(\frac{dt}{X_t} + X_t dB_t\right) + X_t(Y_t dt - Y_t dB_t) - X_t Y_t dt \\ &= \frac{Y_t}{X_t}dt. \end{aligned}$$

Thay $X_t = \dfrac{Z_t}{Y_t}$ vào biểu thức trên ta được:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{Y_t^2}{Z_t}dt \\ Z_t dZ_t &= Y_t^2 dt \\ \int_0^t Z_s dZ_s &= \int_0^t Y_s^2 ds \\ \frac{Z_s^2}{2}\Big|_0^t &= \int_0^t \mathrm{e}^{s - 2B_s}ds. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= Z_0^2 + 2\int_0^t \mathrm{e}^{s-2B_s}ds \\ &= x^2 + 2\int_0^t \mathrm{e}^{s-2B_s}ds. \end{aligned}$$

Vì $X_0 = x > 0$ nên

$$Z_t = \sqrt{x^2 + 2\int\limits_0^t \mathrm{e}^{s-2B_s} ds}.$$

Vậy nghiệm cần tìm là:

$$X_t = \frac{Z_t}{Y_t} = \frac{\sqrt{x^2 + 2\int\limits_0^t \mathrm{e}^{s-2B_s} ds}}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2} - B_t}}.$$

**Ví dụ**: Giải các phương trình sau:

1. $\begin{cases} dX_t &= X_t^\alpha dt + \sigma X_t dB_T, t \in [0,T] \\ X_0 &= x > 0 \end{cases}$, với $\alpha, \sigma$ là các hằng số thực.

2. $\begin{cases} dX_t &= K(\alpha - \ln X_t) X_t dt + \sigma X_t dB_T, t \in [0,T] \\ X_0 &= x > 0 \end{cases}$, với $K, \alpha, \sigma > 0$.

## 5.4 Phương trình vi phân tất định

Xét phương trình vi phân tất định

$$\begin{aligned} dx_t &= x_t(b + a x_t)dt \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ x_0 &= x > 0, \end{aligned}$$

có nghiệm

$$x_t = \frac{b}{-a + e^{-bt}\dfrac{b + ax}{x}}.$$

Nếu $a < 0 < b$ thì $-a + e^{-bt}\dfrac{b+ax}{x} = a(e^{-bt} - 1) + \dfrac{be^{-bt}}{x} > 0$, khi đó $x_t$ luôn tồn tại với mọi $t \geq 0$. Nếu $a, b > 0$ thì $x_t$ chỉ tồn tại từ $t = 0$ cho đến thời điểm $T = \dfrac{-1}{b} \ln \dfrac{ax}{ax+b}$.

Bằng cách thêm một yếu tố ngẫu nhiên, ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên sau

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(b + aX_t)dt + \varepsilon X_t^2 dB_t \\ X_0 &= x > 0 \\ a, b, \varepsilon &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ta sẽ chỉ ra phương trình trên luôn có nghiệm hữu hạn với mọi $t \geq 0$.

### 5.4.1 Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm

**Bổ đề 5.4.1** (Gronwall)**.** *Giả sử hàm $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm không âm thoả mãn*

$$u(t) \leq \varepsilon + m \int_0^t u(s)ds \quad \forall t \in [a, b]$$

*với $\varepsilon, m > 0$. Khi đó ta có ước lượng sau*

$$u(t) \leq \varepsilon e^{t-a} \quad \forall t \in [a, b].$$

**Định lí 5.4.2.** *Nếu phương trình vi phân ngẫu nhiên*

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,\ t \in [0, T] \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Với $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn tồn tại $L > 0$ sao cho*

1. *(Tính chất Lipchitz)*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y| \ \forall t \in [0, T],\ x, y \in \mathbb{R}.$$

2. *(Tính chất tăng trưởng tuyến tính)*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq L(1 + |x|) \ \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}.$$

*thì nó luôn có nghiệm duy nhất.*

*Chứng minh.* 1. (Tính duy nhất nghiệm)

Giả sử $(X_t)_{t\in[0,T]}$ và $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó với mọi $t \in [0, T]$ thì

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \\ Y_t &= x + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s. \end{aligned}$$

Do đó

$$X_t - Y_t = \int_0^t [b(s, X_s) - b(s, Y_s)]ds + \int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)]dB_s.$$

Suy ra

$$|X_t - Y_t| \le \int_0^t \left|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right| ds + \left|\int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)]dB_s\right|.$$

Dẫn đến

$$|X_t - Y_t|^2 \le 2\left[\int_0^t \left|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right| ds\right]^2 + 2\left[\int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)]dB_s\right]^2.$$

Mà theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\int_0^t \left|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right| ds \le \left(\int_0^t \left|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t 1^2 ds\right)^{1/2}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t \left|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right| ds\right]^2 &\le t\int_0^t \left|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right|^2 ds \\ &\le t\int_0^t L^2 \left|X_s - Y_s\right|^2 ds \end{aligned}$$

Còn theo công thức đẳng cự I-tô thì

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)]dB_s\right]^2 &= \mathbb{E}\int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)]^2 ds \\ &\le \mathbb{E}\int_0^t L^2|X_s - Y_s|^2 ds. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 &\leq 2L^2(t+1)\mathbb{E}\int_0^t |X_s - Y_s|^2 ds \\ &\leq 2L^2(T+1)\int_0^t \mathbb{E}|X_s - Y_s|^2 ds.\end{aligned}$$

Nếu đặt $u(t) = \mathbb{E}|X_t - Y_t|^2$ thì

$$u(t) \leq 2L^2(T+1)\int_0^t u(s)ds \;\forall t \in [0,T].$$

Từ đó áp dụng bổ đề Gronwall ta được

$$0 \leq u(t) \leq 0 \cdot \exp\Big(2L^2(T+1)(t-0)\Big),$$

chứng tỏ $u(t) = \mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 = 0$, tức $X_t \overset{hcc}{=} Y_t$ với mọi $t \in [0,T]$.

2. (Sự tồn tại nghiệm) Xét dãy xấp xỉ Picard

$$\begin{aligned}X_t^{(0)} &= x \;\forall t \in [0,T] \\ X_t^{(n+1)} &= x + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB_s.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} = &\int_0^t [b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})]ds \\ &+ \int_0^t [\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})]dB_s\end{aligned}$$

Lập luận tương tự như phần trước, ta có ước lượng sau

$$\mathbb{E}\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2 \leq \underbrace{2L^2(T+1)}_{M}\int_0^t \mathbb{E}\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2 ds.$$

Trong đó

$$\begin{aligned} X_t^{(1)} - X_t^{(0)} &= \int_0^t b(s, X_s^{(0)} ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(0)}) dB_s \\ &= \int_0^t b(s,x) ds + \int_0^t \sigma(s,x) dB_s \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left| X_t^{(1)} - X_t^{(0)} \right|^2 &\le 2 \left( \int_0^t b(s,x) ds \right)^2 + 2 \left( \mathbb{E} \int_0^t \sigma(s,x) dB_s \right)^2 \\ &\le 2t \int_0^t |b(s,x)|^2 ds + 2\mathbb{E} \int_0^t \sigma^2(s,x) ds \\ &\le 2T \int_0^t L^2(1+|x|)^2 ds + 2 \int_0^t L^2(1+|x|)^2 ds \\ &\le 2TL^2(1+|x|)^2 t + 2L^2(1+|x|)^2 t \\ &\le \underbrace{2L^2(1+|x|)^2 T(T+1)}_{C}. \end{aligned}$$

Tương tự thì

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left| X_t^{(2)} - X_t^{(1)} \right|^2 &\le M \int_0^t \mathbb{E}\left| X_s^{(1)} - X_s^{(0)} \right|^2 ds \\ &\le M \int_0^t C ds = MCt. \\ \mathbb{E}\left| X_t^{(3)} - X_t^{(2)} \right|^2 &\le M \int_0^t \mathbb{E}\left| X_s^{(2)} - X_s^{(1)} \right|^2 ds \\ &\le M \int_0^t MCs ds = M^2 C \frac{t^2}{2}. \\ \mathbb{E}\left| X_t^{(4)} - X_t^{(3)} \right|^2 &\le M \int_0^t \mathbb{E}\left| X_s^{(3)} - X_s^{(2)} \right|^2 ds \\ &\le M \int_0^t M^2 C \frac{s^2}{2} ds = M^3 C \frac{t^3}{3!}. \\ &\dots \\ \mathbb{E}\left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 &\le M^n C \frac{t^n}{n!} \; \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Từ đó với mọi $m > n$, ta có

$$\begin{aligned}\left|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}\right|^2 &\leq \left(\left|X_t^{(m)} - X_t^{(m-1)}\right| + \ldots + \left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|\right)^2 \\ &\leq \left(\left|X_t^{(m)} - X_t^{(m-1)}\right|^2 + \ldots + \left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \cdot \underbrace{(1^2 + \cdots + 1^2)}_{m-n}.\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}\right|^2 &\leq (m-n)\left(\mathbb{E}\left|X_t^{(m)} - X_t^{(m-1)}\right|^2 + \ldots + \mathbb{E}\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \\ &\leq (m-n)\left(M^{m-1}C\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + M^n C\frac{t^n}{n!}\right) \\ &\leq (m-n)C\left(\frac{(MT)^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + \frac{(MT)^n}{n!}\right) \longrightarrow 0 \text{ khi } m, n \to \infty.\end{aligned}$$

Dẫn đến dãy Picard ở trên hội tụ, lấy giới hạn khi $n \to \infty$ cho biểu thức truy hồi dãy trên ta suy ra phương trình đã cho có nghiệm. Tiếp theo ta ước lượng moment nghiệm bằng cách sử dụng định lý sau

**Định lí 5.4.3.** *Giả sử các hệ số $b$ và $\sigma$ là Lipschitz và tăng trưởng tuyến tính thì*

$$\mathbb{E}|X_t|^p < \infty \ \forall t \in [0, T], p \geq 2.$$

Vì với mọi $a, b, c$ và $p > 1$ thì

$$(|a| + |b| + |c|)^p \leq 3^{p-1}(|a|^p + |b|^p + |c|^p).$$

Nên với

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

thì

$$\begin{aligned}|X_t|^p &\leq \left(|x| + \left|\int_0^t b(s, X_s)ds\right| + \left|\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s\right|\right)^p \\ &\leq 3^{p-1}\left(|x|^p + \left|\int_0^t b(s, X_s)ds\right|^p + \left|\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s\right|^p\right)\end{aligned}$$

Do đó

$$\mathbb{E}|X_t|^p \leq 3^{p-1}\left(\mathbb{E}|x|^p + \mathbb{E}\left|\int_0^t b(s,X_s)ds\right|^p + \mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s\right|^p\right)$$

Mà theo bất đẳng thức Holder thì

$$\left|\int_0^t b(s,X_s)ds\right| \leq \left(\int_0^t \left|b(s,X_s)\right|^p ds\right)^{1/p}\left(\int_0^t 1^q ds\right)^{1/q}$$

nên

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t b(s,X_s)ds\right|^p &\leq \left(\int_0^t \left|b(s,X_s)\right|^p ds\right)t^{p-1}\\ &\leq \left(\int_0^t \left|b(s,X_s)\right|^p ds\right)T^{p-1}\\ &\leq \left(\int_0^t \left[L(1+|X_s|)\right]^p ds\right)T^{p-1}.\end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $B-D-G$ và Holder thì

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s\right|^p &\leq \mathbb{E}\left|\int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2 ds\right|^{p/2}\\ &\leq T^{P/2-1}\int_0^t \mathbb{E}|\sigma(s,X_s)|^p ds\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t|^p &\le 3^{p-1}\left(|x|^p + T^{p-1}L^p\int_0^t \mathbb{E}(1+|X_s|)^p ds + T^{p/2-1}L^p\int_0^t \mathbb{E}(1+|X_s|)^p ds\right)\\
&\le 3^{p-1}\left(|x|^p + (T^{p-1}+T^{p/2-1})L^p\int_0^t \mathbb{E}(1+|X_s|)^p ds\right)\\
&\le 3^{p-1}\left(|x|^p + (T^{p-1}+T^{p/2-1})L^p\int_0^t \mathbb{E}[2^{p-1}(1+|X_s|^p)] ds\right)\\
&\le 3^{p-1}\left(|x|^p + (T^{p-1}+T^{p/2-1})L^p 2^{p-1}\int_0^t (1+\mathbb{E}|X_s|^p) ds\right)\\
&\le 3^{p-1}\left(|x|^p + (T^{p-1}+T^{p/2-1})L^p 2^{p-1}\left[T+\int_0^t \mathbb{E}|X_s|^p ds\right]\right)\\
&\le \varepsilon + m\int_0^t \mathbb{E}|X_s|^p ds \quad \text{với } \varepsilon, m \text{ nào đó.}
\end{aligned}$$

Sử dụng bổ đề Gronwall ta được

$$\mathbb{E}|X_t|^p \le \varepsilon e^{mt} \;\forall t \in [0,T].$$

Vì vậy $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty \;\forall t \in [0,T]$.

□