

# 几种经典相似性度量的比较研究<sup>\*</sup>

刘宝生<sup>1,2</sup>, 闫莉萍<sup>1</sup>, 周东华<sup>1</sup>

(1. 清华大学自动化系, 北京 100084; 2. 空军装备研究院, 北京 100085)

**摘要:** 以图像匹配概率和匹配精度为准则, 对几种经典的相似性度量进行了比较研究。得出绝对差(AD)与平均绝对差(MAD)算法等价; 平方差(SD)、平均平方差(MSD)、积相关(Prod)与归一化积相关(Nprod)算法等价的结论。当图像信噪比较低时, Prod Nprod SD MSD 算法优于 AD MAD 算法; 否则, 后者优于前者。相似性度量的比较研究可为实际应用 中图像配准或景象匹配问题中相似性度量的选择提供重要的参考依据。

**关键词:** 相似性度量; 匹配精度; 捕获 匹配 虚警概率

中图法分类号: TP391.4

文献标识码: A

文章编号: 1001-3695(2006)11-0001-03

## Comparison of Some Classical Similarity Measures

LIU Bao sheng<sup>1,2</sup>, YAN Li ping<sup>1</sup>, ZHOU Dong-hua<sup>1</sup>

(1 Dept. of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2 Equipment Academy of Airforce, Beijing 100085, China)

**Abstract** In view of the image registration probability and registration precision, some classical similarity measures are compared theoretically. The conclusions drawn from this paper are: Absolute Difference (AD) and Mean Absolute Difference (MAD) are equivalent. Square Difference (SD), Mean Square Difference (MSD), Product correlation similarity measure (Prod) and the Normalized product correlation similarity measure (Nprod) are equivalent. Prod/Nprod/SD/MSD is better than AD/MAD when Signal-to-Noise Ratio (SNR) is low, otherwise AD/MAD is better than Prod/Nprod/SD/MSD. The comparison of the classical similarity measures may be used as a reference for the choice of similarity measures when some practical image registration or scene matching problems are encountered.

**Key words** Similarity Measure; Registration Precision; Capture/Registration/False Alarm Probability

## 1 引言

相似性度量是用于比较一些形状、图像、信息或数据相似性的一个函数。在图像配准、景象匹配、信息检索、计算机视觉、图像融合、遥感以及天气预报等领域, 相似性度量有着很基本但却十分重要的意义<sup>[1~5]</sup>。

据统计, 到 1979 年为止, 已经有包括内积、Dice 系数和 Jaccard 系数等在内的 60 多种不同的相似性度量<sup>[6]</sup>。随着科学技术和计算机应用技术的发展, 在一些新的应用需求下, 又产生了许多新的相似性度量, 如归一化互相关(NCC)(即归一化积相关(Prod))、相位相关、Hausdorff 距离(HD)、基于互信息(MI)的度量等<sup>[2]</sup>。然而, 虽然有许多人研究相似性度量, 但到目前为止, 却很少有人真正去研究它们之间的关系。

本文研究了几种典型的相似性度量, 之所以称它们为典型, 是因为它们自提出之日到现在, 依然被众多的研究人员广泛采用。

## 2 问题描述

设  $S$  和  $R$  分别表示实时图和基准图, 大小分别为  $M_1 \times N_1$

和  $M_2 \times N_2$  ( $M_1 \leq M_2, N_1 \leq N_2$ )。图像匹配的目的是找到  $S$  在  $R$  中的位置, 即找到  $R$  的一个与  $S$  相匹配的子图所在的坐标。一般来说, 只有一个正确的匹配位置, 而不匹配的位置则有许多。匹配位置中心与其中一个不匹配位置中心的距离称为偏移量, 记为  $j$  (图 1)。其中,  $a$  和  $b$  分别表示匹配点和不匹配点的中心,  $j$  表示它们之间的距离(偏移量)。当  $j=0$  时, 实时图和基准子图匹配<sup>[1]</sup>。

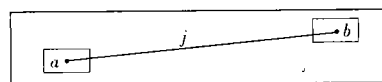


图 1 偏移量示意图

设  $R^j$  表示  $R$  的偏移量为  $j$  的一个基准子图。进一步记  $R^j$  为  $R^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_N^j) \in R^N$ ,  $S$  为  $S(y_1, y_2, \dots, y_N) \in R^N$ 。其中, 对基于灰度的图像匹配,  $N=M_1N_1$ ; 对基于特征的匹配,  $N$  表示待匹配的特征点数。为方便描述, 记  $R^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \triangleq R^0(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。将寻找  $S$  在  $R$  中位置的问题转换为在欧氏空间中寻找与  $S(y_1, y_2, \dots, y_N) \in R^N$  最相近的向量的过程。一般来说, 度量两向量的相近程度可选用向量之间的夹角最小或距离最短为标准。

本文研究几个经典的相似性度量, 分别为<sup>[1~5]</sup>

(1) 绝对差 (AD)

$$D_1(j) = \sum_{k=1}^N |x_k^j - y_k| \quad (1)$$

(2) 平均绝对差 (MAD)

收稿日期: 2005-09-20 修返日期: 2006-03-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60234010 60434020);

国家“973”计划资助项目(2002CB312200)

$$D_2(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x_k^j - y_k^j| \quad (2)$$

(3) 平方差 (SD)

$$D_3(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k^j - y_k^j)^2 \quad (3)$$

(4) 平均平方差 (MSD)

$$D_4(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k^j - y_k^j)^2 \quad (4)$$

(5) 积相关 (Prod)

$$D_5(j) = \sum_{k=1}^N x_k^j y_k^j \quad (5)$$

$$D_6(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^j y_k^j \quad (6)$$

为区别起见, 式 (5) 记为 Prod 1 式 (6) 记为 Prod 2

(6) 归一化积相关 (Nprod)

$$D_7(j) = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^j y_k^j}{\left[ \sum_{k=1}^N (x_k^j)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{k=1}^N (y_k^j)^2 \right]^{1/2}} \quad (7)$$

前四个相似性度量均为最小相似性度量, 而 Prod 和 Nprod 为最大相似性度量。

### 3 基本假设

为简化分析, 理论上一般都采用 Johnson 的假设<sup>[1]</sup>:

(1) 设基准图的每个像素均是平稳各态历经的, 并且是零均值的高斯过程, 方差为  $\sigma_x^2$ 。

(2) 实时图是被噪声污染的基准子图, 即

$$y_k = x_k + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

且假设  $n_k$  是平稳各态历经的高斯白噪声, 均值为 0 方差为  $\sigma_n^2$ 。

(3) 设基准数据不同的像素之间相互独立, 且  $x_k$  与  $n_k$  相互独立。

基于上述假设, 对于充分大的  $N$  (一般  $N \geq 30$ ), 利用中心极限定理可知, 第 2 节列出的六种相似性度量均服从高斯分布<sup>[1]</sup>。因此, 研究上述相似性度量之间的关系只需研究它们的均值与方差之间的关系。

### 4 相似性度量的比较

文献[7]隐含了一种判别相似性度量优劣的标准。设  $D_1$  和  $D_2$  是两个相似性度量,  $\mu_{ij}$  和  $\sigma_{ij}^2$  分别表示它们在匹配点 ( $j=0$ ) 和非匹配点 ( $j=1$ ) 的均值和方差。若  $\mu_{10} = \mu_{20} = 1$ ,  $\mu_{11} = \mu_{21} = 0$  且  $\sigma_{1j}^2 \leq \sigma_{2j}^2$  ( $j=0, 1$ ), 则  $D_1$  优于  $D_2$ ; 若  $\sigma_{1j}^2 = \sigma_{2j}^2$ , 则  $D_1$  与  $D_2$  等价。为方便描述, 称满足上述条件的度量为归一化相似性度量, 相应的均值和方差分别称为归一化均值和归一化方差, 称上述准则为归一化方差准则 (NVs)。

下面将基于准则 NVs 研究第 2 节列出的相似性度量之间的关系。

定理 1 设  $\xi_1, \xi_2$  为两个服从高斯分布的随机变量, 且满足  $\xi_2 = a\xi_1 + b$  其中  $a, b \in R$  为任意常数。  $\xi_1$  与  $\xi_2$  作为相似性度量, 在 NVs 准则下等价。

证明: 由 NVs 准则, 只需证明归一化后的  $\xi_1$  和  $\xi_2$  在匹配

点和非匹配点均具有相同的方差即可。

设  $\mu_{ij}$  和  $\sigma_{ij}^2$  分别表示  $\xi_1$  和  $\xi_2$  的均值和方差, 并记  $\eta_1$  和  $\eta_2$  分别为  $\xi_1$  和  $\xi_2$  按 NVs 准则归一化后的结果, 且  $\eta_i$  的均值和方差分别为  $\mu_{ij}^*$  和  $(\sigma_{ij}^*)^2$  ( $i=1, 2, j=0, 1$ )。  $j=0$  和  $j=1$  分别表示匹配和不匹配的情况, 则有

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 - \mu_{10}}{\mu_{11} - \mu_{10}} \quad (9)$$

$$\eta_2 = \frac{\xi_2 - \mu_{20}}{\mu_{21} - \mu_{20}} \quad (10)$$

$$\mu_{10}^* = \mu_{20}^* = 1 \quad (11)$$

$$\mu_{11}^* = \mu_{21}^* = 0 \quad (12)$$

由于

$$\xi_2 = a\xi_1 + b \quad (13)$$

利用期望的线性性质, 有

$$\mu_{20} = a\mu_{10} + b \quad (14)$$

$$\mu_{21} = a\mu_{11} + b \quad (15)$$

将式 (13) ~ 式 (15) 代入式 (10), 可得

$$\eta_2 = \frac{\xi_2 - \mu_{20}}{\mu_{21} - \mu_{20}} = \frac{(a\xi_1 + b) - (a\mu_{10} + b)}{(a\mu_{11} + b) - (a\mu_{10} + b)} = \frac{\xi_1 - \mu_{10}}{\mu_{11} - \mu_{10}} = \eta_1 \quad (16)$$

由式 (16) 可得

$$(\sigma_{1j}^*)^2 = (\sigma_{2j}^*)^2, \quad j=0, 1 \quad (17)$$

因此作为相似性度量,  $\xi_1$  和  $\xi_2$  在 NVs 准则下等价。

推论 1

(1) AD 与 MAD 等价;

(2) SD 与 MSD 等价;

(3) 两种形式的积相关度量, 即  $D_5(j)$  与  $D_6(j)$  等价。

推论 2

(1) SD 与 Prod 等价;

(2) Prod 与 Nprod 等价;

(3) SD, MSD, Prod 与 Nprod 等价。

证明: 由第 3 节的假设和式 (3), 有

$$D_3(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k^j - y_k^j)^2 = -2 \sum_{k=1}^N x_k^j y_k^j + \sum_{k=1}^N (x_k^j)^2 + \sum_{k=1}^N (y_k^j)^2 = -2D_5(j) + N\sigma_x^2 + N(\sigma_x^2 + \sigma_n^2) = -2D_5(j) + N(2\sigma_x^2 + \sigma_n^2) \quad (18)$$

由定理 1 可知,  $D_5(j)$  等价于  $D_3(j)$ , 即推论 2 之 (1) 得证。

由第 3 节的假设和式 (7), 有

$$D_7(j) = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^j y_k^j}{\left[ \sum_{k=1}^N (x_k^j)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{k=1}^N (y_k^j)^2 \right]^{1/2}} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^j y_k^j}{\left[ N\sigma_x^2 \right]^{1/2} \left[ N(\sigma_x^2 + \sigma_n^2) \right]^{1/2}} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}} D_6(j) \quad (19)$$

由定理 1 可得  $D_7(j)$  与  $D_6(j)$  等价, 即推论 2 之 (2) 得证。

由推论 1 以及推论 2 之 (1) 和 (2), 可知推论 2 之 (3) 得证。

下面研究相似性度量 MAD/AD 与 MSD/SD/Prod/Nprod 之间的关系。

记匹配点和不匹配点的归一化方差分别为  $(\sigma_0^*)^2$  和  $(\sigma_1^*)^2$ 。由文献[1]、推论 1 和推论 2 可得表 1 其中,  $\text{SNR} = \sigma_x^2 / \sigma_n^2$  表示信噪比, 而方差之比表示 MAD 与 Prod 对应列上方差的比值。

表 1 归一化方差示意图

方 法	$(\sigma_0^*)^2$	$(\sigma_1^*)^2$
MAD	$\frac{\frac{\pi}{2}-1}{N(\sqrt{2\text{SNR}+1}-1)^2}$	$\frac{\frac{\pi}{2}-1}{N(1-1/\sqrt{2\text{SNR}+1})^2}$
Prod	$\frac{1}{N}\left(2+\frac{1}{\text{SNR}}\right)$	$\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{\text{SNR}}\right)$
方差之比	$\frac{\frac{\pi}{2}-1}{(\sqrt{2\text{SNR}+1}-1)^2(2+1/\text{SNR})}$	$\frac{\frac{\pi}{2}-1}{(1-1/\sqrt{2\text{SNR}+1})^2(1+1/\text{SNR})}$

仔细观察表 1 可得下面几点结论:

(1) 观察表 1 的第二行和第三行可知, 不管哪种相似性度量, 匹配点和不匹配点的归一化方差均随着信噪比 SNR 或  $N$  的增加而减少, 这表明提高信噪比或增大  $N$  可以获得较高的匹配精度。

(2) 观察表 1 的第二行和第三行可以看出, 与  $\text{Prod } N_{\text{prod}} / \text{SD } M_{\text{SD}}$  相比,  $\text{AD } \text{MAD}$  对信噪比更加敏感。

(3) 从表 1 最后一行可以看出, 当信噪比 SNR 比较小时,  $\text{Prod } N_{\text{prod}} / \text{SD } M_{\text{SD}}$  优于  $\text{AD } \text{MAD}$ ; 随着信噪比 SNR 的增大,  $\text{AD } \text{MAD}$  逐渐优于  $\text{Prod } N_{\text{prod}} / \text{SD } M_{\text{SD}}$ 。

作为 SNR 的函数, 图 2 绘出了  $\text{AD } \text{MAD}$  和  $\text{Prod } N_{\text{prod}} / \text{SD } M_{\text{SD}}$  的归一化方差, 其中  $N=64$  横轴表示 SNR, 纵轴表示归一化方差。图 2(a) 和图 2(b) 分别表示 MAD 在匹配点和不匹配点的方差; 相应地, 图 2(c) 和图 2(d) 分别表示 Prod 在匹配点和不匹配点的方差。

从图 2 可以进一步清楚地看出, 归一化方差是 SNR 的减函数。比较图 2(a) 和图 2(c) 或图 2(b) 和图 2(d) 可以看出, 与 Prod 比起来, MAD 对 SNR 更加敏感, 这与表 1 得出的结论 (1) 和结论 (2) 是一致的。

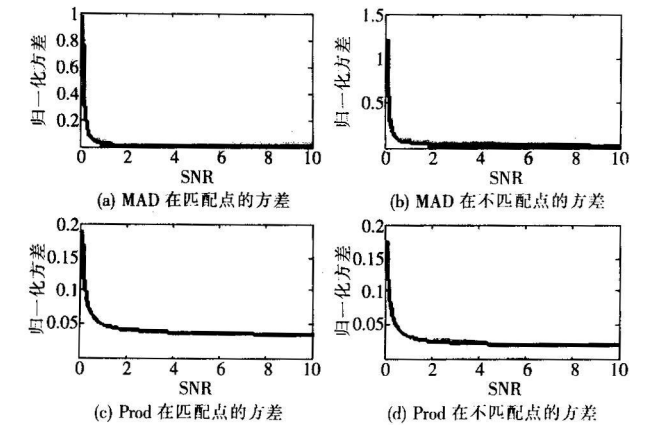


图 2 归一化方差示意图

如图 3 所示, 对应于匹配位置和不匹配位置, 作为 SNR 的函数, 画出了 MAD 与  $\text{Prod}$  方差之比的曲线。其中, 横轴表示 SNR, 纵轴表示 MAD 与  $\text{Prod}$  方差的比值。图 3(a) 和图 3(b) 分别对应匹配和非匹配点的方差比。

由图 3 可以看出, 当 SNR 比较小时, MAD 与  $\text{Prod}$  方差之比大于 1, 由  $NV_s$  可知,  $\text{Prod}$  优于 MAD; 随着 SNR 的增加, MAD 与  $\text{Prod}$  方差的比值严格递减。当  $\text{SNR} > 4$  时, 该比值小于 1, 表明 MAD 优于  $\text{Prod}$ 。当  $1 < \text{SNR} < 4$  匹配点归一化方差的比值小于 1 而不匹配点归一化方差的比值却大于 1, 此时一般说来,  $\text{Prod}$  优于 MAD, 这是因为匹配精度主要依赖于匹配位置的

方差。在实际应用中, 可以通过实验选择适当的函数作为相似性度量。

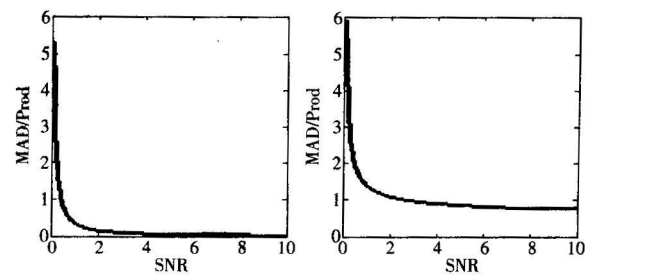


图 3 归一化方差的比值(MAD/Prod)示意图

5 结论

本文以图像匹配概率和匹配精度为准则, 对几种经典的相似性度量进行了比较研究。通过系统的分析得出结论: 绝对差 (AD) 与平均绝对差 (MAD) 算法等价; 平方差 (SD)、平均平方差 (MSD)、积相关 (Prod) 与归一化积相关 ( $N_{\text{prod}}$ ) 算法等价。当图像信噪比较低时,  $\text{Prod } N_{\text{prod}} / \text{SD } M_{\text{SD}}$  算法优于  $\text{AD } \text{MAD}$  算法; 否则,  $\text{AD } \text{MAD}$  算法优于  $\text{Prod } N_{\text{prod}} / \text{SD } M_{\text{SD}}$  算法。

值得一提的是本文所采用的方法和准则对研究最新提出的相似性度量具有一定的借鉴意义。本文对相似性度量的研究可为实际应用中图像配准或景象匹配问题中相似性度量的选择提供重要的参考依据。

参考文献:

[1] 孙仲康, 沈振康. 数字图像处理及其应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1985

[2] Zitova B, Flusser J. Image Registration Methods: A Survey [J]. Image and Vision Computing, 2003, 21(11): 977-1000.

[3] Lisa G B. A Survey of Image Registration Techniques [J]. ACM Computing Surveys, 1992, 24(4): 325-376

[4] 曹菲, 杨小冈, 缪栋, 等. 景象匹配制导基准图选定准则研究 [J]. 计算机应用研究, 2005, 22(7): 137-139

[5] 杨小冈, 曹菲, 缪栋, 等. 基于相似度比较的图像灰度匹配算法研究 [J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(5): 918-921

[6] Zhang J, Korfhage R R. A Distance and Angle Similarity Measure Method [J]. Journal of the American Society for Information Science, 1999, 50(9): 772-778

[7] Gutmann R L. Course Quantization Techniques for Correlation Navigation [C]. New Orleans: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 1977, 1199-1202

作者简介:

刘宝生 (1964), 男, 国家有突出贡献的中青年专家, 空军十大杰出青年, 高级工程师, 博士研究生, 主要研究方向为数据融合、组合导航、景象匹配与机动目标定位等; 闫莉萍 (1979), 女, 博士研究生, 主要研究方向为小波分析、数据融合、图像匹配、机动目标跟踪与定位等; 周东华 (1963), 男, 中国自动化学会理事, 副秘书长, 中国自动化学会技术过程的故障诊断与安全性专业委员会副主任兼秘书长, 教授, 博导, 主要研究方向为复杂动态系统的故障诊断与预报、容错控制、非线性系统的自适应控制、系统辨识、景象匹配、信息融合等。