HEIMADÆMI 3

TÖL203G Tölvunarfræði 2

Kári Hlynsson[1]

Háskóli Íslands

2. febrúar 2023

Verkefni 1

Breytið `FourSum.java` í `FourSumFast.java` á sama hátt og er gert með `ThreeSumFast.java`. Skilið kóða fallsins `count` (sem texta, ekki skjáskoti) og skjáskoti af keyrslu `FourSum` og `FourSumFast` á gagnaskránni 1Kints.txt. Þá eiga að finnast 13654 ferndir. Athugið að þið þurfið að laga kóðann aðeins, því textttFourSum.java notar `long` fylki í stað `int` fylkis og innlestur gagnanna er aðeins ólíkur.

Lausn

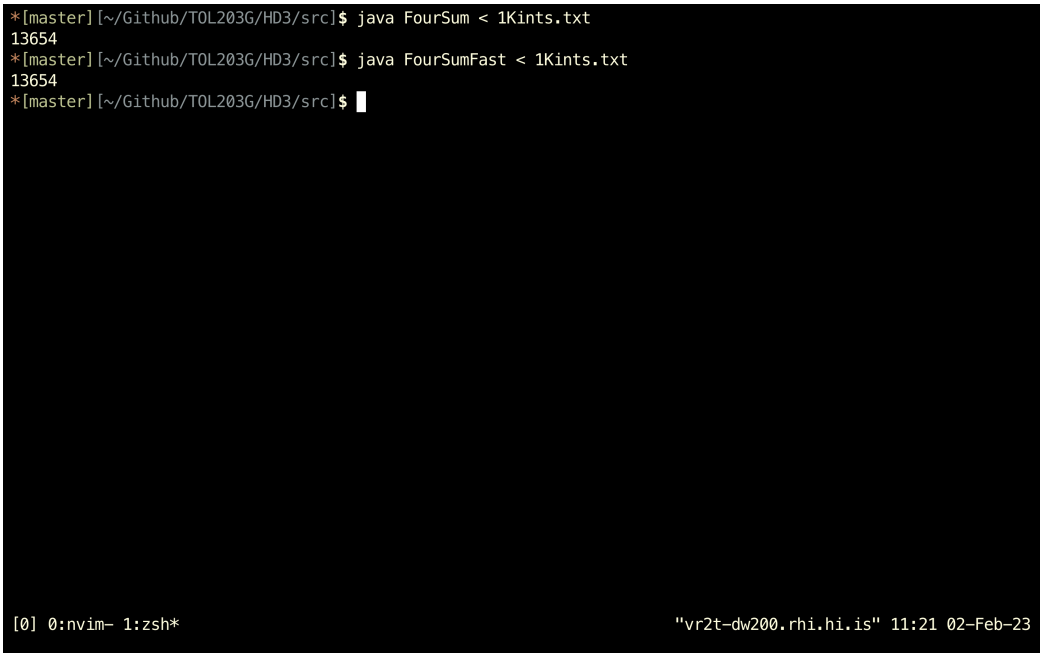
Breytingarnar eru lítillegar og sjást fyrir neðan í forriti 1.

```
49  public static int count(long[] a) {
50    int N = a.length;
51    Arrays.sort(a);
52    int cnt = 0;
53    if (containsDuplicates(a))
54      throw new IllegalArgumentException("array contains duplicates");
55    for (int i = 0; i < N; i++) {
56      for (int j = i + 1; j < N; j++) {
57        for (int k = j + 1; k < N; k++) {
58          int l = Arrays.binarySearch(a, - (a[i] + a[j] + a[k]));
59          if (l > k) cnt++;
60        }
61      }
62    }
63    return cnt;
64  }
```

Forrit 1: Fallið `count` í `FourSumFast.java`

Mynd 1 sýnir keyrslu í skel á `FourSum.java` og síðan `FourSumFast.java`.

[1]Slóð á Github kóða: `https://github.com/lvthnn/TOL203G/tree/master/HD3`



Mynd 1: Keyrsla `FourSum` og `FourSumFast` í skel

Eins og má sjá fáum við 13654 sem er viðbúinn fjöldi fernda.

Verkefni 2

Framhald af æfingadæminu að ofan.

(a) Finnið raunhæf neðri mörk á vaxtarhraða keyrslutíma reiknirits sem leysir þetta verkefni, þ.e. hversu margar aðgerðir þurfa öll reiknirit að nota til þess að leysa þetta verkefni (sem fall af N)? Rökstyðjið svarið í nokkrum orðum.

(b) Það er hægt að leysa verkefnið á mun hraðvirkar hátt en gert var í æfingadæminu, með því að nýta sér fyrri útreikninga í B. Hugmyndin er þið eruð að reikna út `B[i,j]` þá eruð þið nýbúin að reikna út `B[i, j-1]`. Er ekki hægt að nota það gildi? Útfærið þetta reiknirit í Java og keyrið það fyrir sömu gildi á N og gert var í æfingadæminu. Hver er vaxtarhraði þessa nýja reiknirits? Skilið kóðanum (sem texta, ekki skjáskoti) og svarinu.

Lausn

Hluti (a)

Látum $\sigma(i, j) \coloneqq \sum_{k=i}^{j} a_k$.[2] Við getum sett upp töflu sem sýnir hvernig fylkið B lítur út fyrir gefna inntaksstærð N:

$\downarrow$ i $\rightarrow$ j	1	2	$\cdots$	N
1	$\sigma(1,1)$	—	$\cdots$	—
2	$\sigma(2,1)$	$\sigma(2,2)$	$\cdots$	—
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
N	$\sigma(N,1)$	$\sigma(N,2)$	$\cdots$	$\sigma(N,N)$

Tafla 1: Útlit fylkisins B.

Við miðum almenna kostanaðarlíkanið út frá fjölda fallakalla á $\sigma(i, j)$. Við sjáum að heildafjöldi kalla er $1 + 2 + \cdots + N$ svo við fáum

$$T(N) = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2} \sim \frac{1}{2}N^2$$

m.ö.o. er $T(N) \sim \Omega(N^2)$.

[2] Við notum hér bilið $1, \ldots, N$ í stað $0, \ldots, N-1$ eins og venja er fyrir í stærðfræðilegum rithætti fyrir runur. Þá er inntakið okkar heiltöluruna á forminu $a_1, \ldots, a_N$.

Hluti (b)

Við skulum hefja umfjöllunina á upprunalega fallinu. Ef við útfærum sauðakóðann sem er gefinn í æfingadæminu í Java fáum við eftirfarandi forritsbút:

```
13  public static int[][] arraysum(int[] A) {
14    int N = A.length;
15    int[][] B = new int[N][N];
16
17    for (int i = 0; i < N; i++)
18      for (int j = i; j < N; j++)
19        for (int k = i; k <= j; k++)
20          B[i][j] += A[k];
21    return B;
22  }
```

Forrit 2: Fallið `arraysum` (hægari útfærsla)

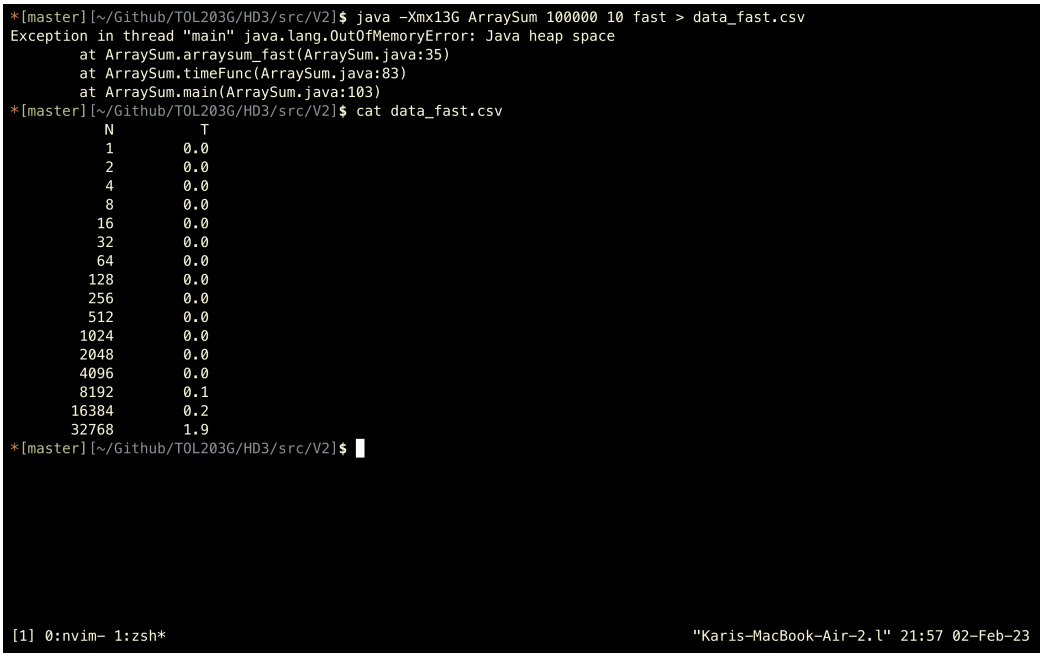
Í þessari aðferð útfærum við hlutsummufallið $\sigma(i, j)$ með því að ítra í gegnum bilið með $i \leq k \leq j$, sækja gildið a_k hverju sinni og leggja við b_{ij}. Þessi aðferð er línuleg, þ.e. kostnaður hennar er N á heildina litið og því er tímaflækja þessa forritsbúts $T(n) \sim \mathcal{O}(N^3)$.

Hin útfærslan er mun hraðvirkari. Hún gengur þannig fyrir sig að við ítrum sem áður í gegnum fylkið. Ef við erum í hornalínustaki er það fyrsta stakið sem leggur eitthvað til summunnar og því setjum við einfaldlega $B_{ij} = A_i$ ef $i = j$.[3] Ef svo er ekki þá setjum við $B_{ij} = B_{i,j-1} + A_j$ því við höfum þegar reiknað $B_{i,j-1}$. Forritsbúturinn er gefinn fyrir neðan:

```
31  public static int[][] arraysum_fast(int[] A) {
32    int N = A.length;
33    int[][] B = new int[N][N];
34
35    for (int i = 0; i < N; i++)
36      for (int j = i; j < N; j++)
37        B[i][j] = (i == j) ? A[i] : B[i][j - 1] + A[j];
38    return B;
39  }
```

Forrit 3: Fallið `arraysum_fast` (hraðari útfærsla)

[3] Þetta getur allt að eins verið A_j því $A_i = A_j$ því $i = j$.

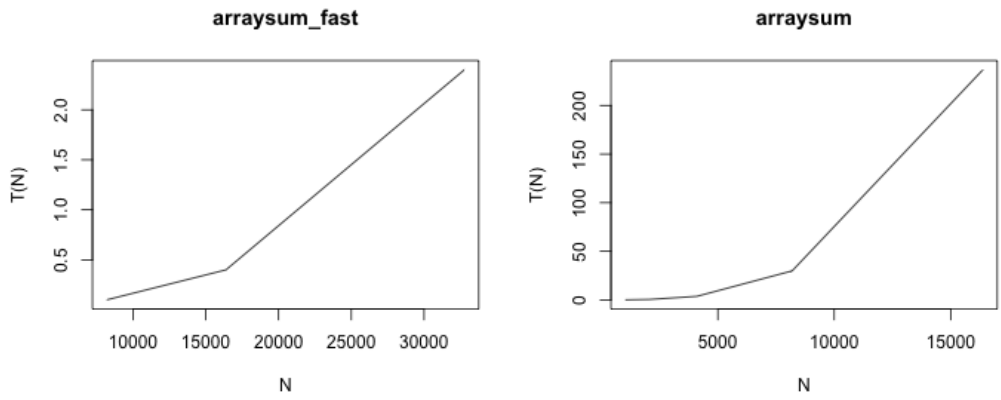


Mynd 2: Keyrsla á `ArraySum.java` og söfnun gagna

Útfærslan í forriti 3 tryggir $\sigma(i,j) \sim \mathcal{O}(1)$ þ.e. summuaðgerðin er fasti hverju sinni svo við búumst við því að $T(N) \sim \mathcal{O}(N^2)$ fyrir þessa útfærslu. Við göngum úr skugga um þetta með mælingum.

Látum $T_s(N)$ tákna tímaflækju meintu hægari útfærslunnar en $T_f(N)$ tákna meintu hraðari útfærsluna. Við spáðum fyrir að $T_s(N) \sim \mathcal{O}(N^3)$ og að $T_f(N) \sim \mathcal{O}(N^2)$. Við keyrum notendaforritið í skel og beinum staðalúttakinu í csv skrá til frekari úrvinnslu, eins og mynd fyrir neðan sýnir.

Mynd fyrir neðan sýnir keyrsluna á `ArraySum.java`. Notuð var stillingin `-Xmx13G` til að gefa forritinu 13 GB til keyrslu en þá getum við fengið aðeins meiri gögn. Hið sama var endurtekið á nýjan leik fyrir hægari útfærsluna. Útreiknað tvöföldunarhlutfall fyrir hægu útfærsluna var $2.292 \approx 2$ en fyrir þá hröðu fékkst $2.832 \approx 3$. Þessu ber saman við tilgátu okkar. Samanburður á keyrslutíma útfærslanna má sjá á mynd 3.



Mynd 3: Keyrslutími á `arraysum` og `arraysum_fast` eftir N

Verkefni 3

Tiltekið hótel hefur N herbergi, sem eru í röð á löngum gangi. Herbergi 0 er næst móttökunni, en herbergi $N-1$ er lengst í burtu. Öll herbergin frá 0 til $F-1$, en herbergi F til $N-1$ eru laus. Við viljum sjálf vera í herbergi F, en við vitum ekki gildið á F (aðeins að $F < N$). Til þess að finna fyrsta lausa herbergið getum við aðeins kannað eitt herbergi í einu með því að banka á hurðina og kíkja inn. Við viljum lágmarka fjölda skipta sem við bönkum á hurðir í versta tilfelli.

(a) Hver er versta tilfellis tími (sem fall af N) á reikniriti sem byrjar á herbergi 0 og rekur sig út eftir ganginum þar til fyrsta lausa herbergið er fundið?

(b) Lýsið reikniriti sem notar í versta falli $\log N$ tíma til að finna fyrsta lausa herbergið.

(c) Ef N er mikið stærra en F, þá er hægt að gera betur og nota aðeins $\sim 2 \log F$ tíma til þess að finna fyrsta lausa herbergið. Lýsið þessari aðferð og rökstyðjið vaxtarhraða hennar.

Lausn

Hluti (a)

Ef við gefum okkur að aðferðin er að fara hurð eftir hurð eftir ganginum fæst versta tilfellið þegar $F = N - 1$. Þá er tímaflækjan nokkurn veginn $\sim N$.

Hluti (b)

Til þess að útfæra þetta notum við afbrigði af binary search. Java forritið er fyrir neðan:

```
5   public static int find_room(boolean[] B) {
6     int N = B.length;
7     int lo = 0, hi = N-1;
8
9     while (lo <= hi) {
10      int mid = (lo + hi) >>> 1;
11      boolean occupied = B[mid];
12
13      if (occupied) lo = mid + 1;
14      else if (lo == mid) return mid;
15      else hi = mid;
16    }
17    return -1;
18  }
```

Forrit 4: Fallið `find_room`

Þetta forrit notar binary search og tímaflækja þess er því $T(N) \sim \mathcal{O}(\lg N)$.

Hluti (c)

bra Gefið er að F sé mun minna en N. Aðferðin sem við notum hér er að byrja frá núlli og rekja okkur með tvöföldun þangað til við komum að tómu hólfi. Til að vera viss um að við séum örugglega í F keyrum við síðan helmingunarleit á þessu bili. Heildarkostnaðurinn er $\lg F + \lg F = 2 \lg F$.

Verkefni 4

Geta eftirfarandi `id[]` fylki komið út þegar reikniritið vigtað *Quick-union* án vegþjöppunar er keyrt með $N = 8$? Teiknið upp trén í hvoru tilfelli og útskýrið hvers vegna þetta fylki er ómögulegt eða sýnið röð *union*-aðgerða sem enda í þessu fylki.

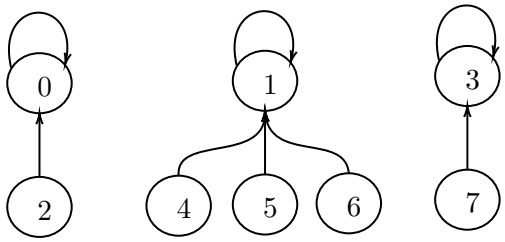
(a) 0, 1, 0, 3, 1, 1, 1, 3

(b) 5, 0, 6, 6, 5, 6, 6, 4

Lausn

Hluti (a)

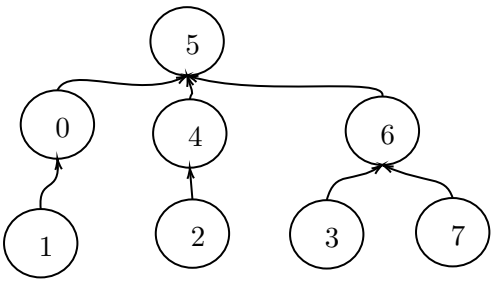
Það er hægt að mynda þetta fylki með eftirfarandi runu aðgerða: $\texttt{union}(2, 0) \rightarrow \texttt{union}(4, 1) \rightarrow \texttt{union}(5, 1) \rightarrow \texttt{union}(6, 1) \rightarrow \texttt{union}(7, 3)$. Sjá mynd 4.



Mynd 4: Tréð úr (a)-hluta

Hluti (b)

Það er ekki hægt að mynda þetta tré. Í seinustu aðgerðinni er samhengisþátturinn 5 þyngri en 6 og því myndi 6 eignast 5 sem rót. Sjá mynd 5.



Mynd 5: Tréð úr (b)-hluta

Verkefni 5

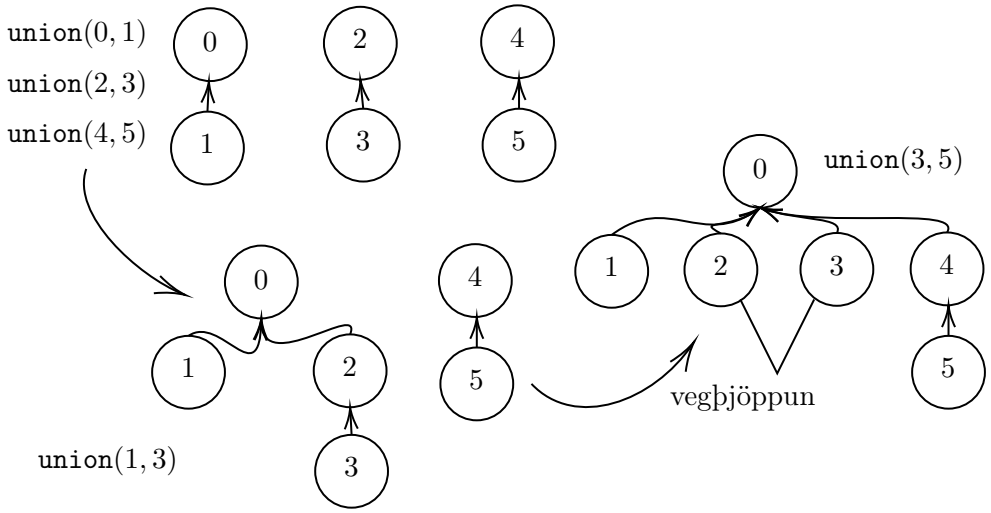
Í aðalútfærslunni á *Union-find* í kennslubókinni, `UF.java`, er notuð vegþjöppun með helmingun (*path halving*). Rekjið ykkur í gegnum kóðann í `UF.java` fyrir eftirfarandi sameiningar. Fjöldi staka er 6 og aðgerðirnar eru:

$$\texttt{union}(0,1) \to \texttt{union}(2,3) \to \texttt{union}(4,5) \to \texttt{union}(1,3) \to \texttt{union}(3,5)$$

Teiknið trén eftir tvær síðustu aðgerðirnar og bendið á hvar raunveruleg vegþjöppun á sér stað (þ.e. vegur í rótina styttist). Athugið að inni í hverri *union*-aðgerð eru tvær *find*-aðgerðir.

Lausn

Sjá mynd fyrir neðan.



Mynd 6: Tréð sem myndast.