HEIMADÆMI 2

TÖL203G Tölvunarfræði 2

Kári Hlynsson

Háskóli Íslands

Vormisseri 2023

Verkefni 1.
Biðröð (*queue*) sem er útfærð með fylki sem hefur tvo vísa (*indexes*): `head` og `tail` (sjá glæru 13 í fyrirlestri 3).

(a) Hver geta gildin á þessum tveimur vísum verið þegar biðröðin er tóm? Rökstyðjið í nokkrum orðum.

(b) Hver geta gildin á þessum tveimur vísum verið þegar biðröðin er full? Rökstyðjið í nokkrum orðum.

Lausn. Látum Q tákna biðröðina sem um ræðir.

(a) Þegar Q er tóm vísa `head` og `tail` á sama stað í fylkinu. Ef við bætum hlut við á Q færist `last` áfram um eitt skref í fylkinu.

(b) Þegar Q er full vísa `head` og `tail` á sama stakið í fylkinu. Því könnum við alltaf hvort `head = tail` (eða hliðstæð útfærsla í þeirri gagnagrind sem er notuð) þegar við ætlum að bæta nýju staki við en ef svo er þurfum við að kalla á `Resize()` aðgerðina til að stækka fylkið.

Verkefni 2.
Bókin er með útfærslu á biðröð með fylki af breytilegri lengd: `ResizingArrayQueue.java`. Í henni er aðferðin `Resize` sem er notuð til að stækka/minnka fylkið þegar þörf er á. Búið til sýnidæmi þar sem þið byrjið með biðröðina á æfingunni á glæru 14 í fyrirlestri 3. Hún inniheldur 4 stök og er í fylki af stærðinni (*capacity*) 6.

(a) Setjið tvö stök inn í þessa biðröð og sýnið stöðuna á henni eftir það.

(b) Setjið svo eitt stak í viðbót (sjöunda stakið) inn í biðröðina og sýnið hvernig fylkið lítur út eftir að `Resize` aðferðin sem gefin er í bókinni hefur verið framkvæmd.

Lausn. Við samtvinnum liðina saman. Fyrir neðan sjáum við töfluna í upphafsstöðu.

`q[]`	`D`	*null*	*null*	`A`	`B`	`C`
	`0`	`1`	`2`	`3`	`4`	`5`
		`tail`		`head`		

Bætum nú stökunum `E` og `F` við, en þá lítur biðröðin svona út:

`q[]`	`D`	`E`	`F`	`A`	`B`	`C`
	`0`	`1`	`2`	`3`	`4`	`5`
				`head`		
				`tail`		

Ef við reynum nú að bæta við `G` í biðröðina er kallað á `Resize()` og stærð nýju biðraðarinnar verður tvöföld hinnar fyrri, í þessu tilfelli 12. Þá lítur biðröðin einhvern veginn svona út:

q[]	A	B	C	D	E	F	G	*null*	...
	0	1	2	3	4	5	6	7	...
	head							tail	

Þess er ekki þörf að skrifa út restina af biðröðinni, vegna þess að rest stakanna eru *null* og innihalda því litlar upplýsingar. (Að auki kæmist taflan ekki fyrir á síðunni :-|)

Verkefni 3.
Gefið slöngutáknun fyrir eftirfarandi föll:

(a) $f(N) = N\sqrt{N} + \frac{N^3+N^2\log N}{N}$

(b) $f(N) = 3(N+1)^3 + 2N^2 \log N$

(c) $f(N) = \frac{\log N^3+1}{\log N^2} + \frac{1}{N}$

Lausn.

(a) Athugum að

$$f(N) = N\sqrt{N} + \frac{N^3+N^2\log N}{N} = N\sqrt{N} + N^2 + N\log N$$

Af þessum föllum er N^2 stærsti vaxtarflokkurinn svo slöngutáknunin er $f(N) \sim N^2$.

(b) Sviginn $3(N+1)^3$ gefur þriðja stigs margliðu í N með stuðulinn 3 framan við N^3. Af þeim liðum sem koma fyrir er N^3 mest afgerandi svo $f(N) \sim 3N^3$.

(c) Reiknireglur logra gefa

$$f(N) = \frac{\log N^3+1}{\log N^2} + \frac{1}{N} = \frac{3\log N+1}{2\log N} + \frac{1}{N} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\log N} + \frac{1}{N}$$

Báðir seinni liðanna stefna á núll þegar $N \to \infty$ svo ráðandi liðurinn hér er fastinn $\frac{3}{2}$, þ.e. $f(N) \sim \frac{3}{2}$.

Verkefni 4.
Finnið vaxtarhraða á keyrslutíma sem fall af N fyrir forritsbútinn í æfingadæminu hér að ofan. Sýnið vaxtarhraðann með slöngutáknun og rökstyðjið svar ykkar með útreikningum.

Lausn. Við viljum gefa upp kostnaðarlíkan forritsbútsins fyrir neðan m.t.t. inntaksstærðar. Veljum hækkun á `sum` breytunni sem fulltrúa í greiningunni.

```
long sum = 0;
 for (long i=1; i<=N; i=2*i)
   for (long j=1; j<=2*i; j++)
       sum++;
```

Í hverri ítrun tvöfaldar ytri `for` lykkjan gildið á `i` svo við getum ætlað að hún keyri $\lg N$ sinnum.

Innri for lykkjan ítrar yfir bilið $\{1,\ldots,2N\}$ (í raun ítrar hún yfir allar hlutrunanna $\{1,\ldots,2i\}$ með $1 \leq i \leq N$, en vægi þeirra er lítið í samhengi við síðasta liðinn, þar sem $i \approx N$). Aðgerðin `sum++` tekur fastan tíma. Við getum nú tekið þetta saman og fáum að kostnaðarlíkanið okkar er

$$T(N) = \lg N \cdot 2N \cdot 1 \sim N \lg N$$

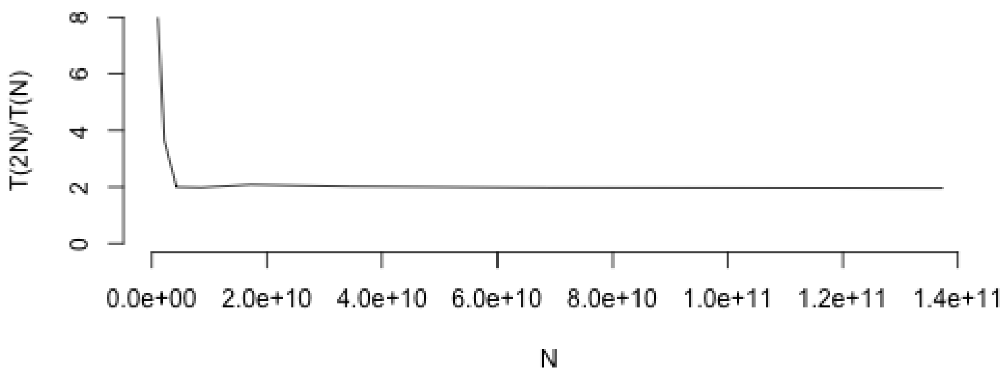
Við skulum útfæra notendaforritið `TimeFunc.java` sem notar `Stopwatch` klasann úr algs4 kóðasafninu til að bera saman kostnaðarlíkanið við hermd gildi. Klasinn er á næstu síðu.

Fyrstu tímamælingar aðrar en 0.0 fara ekki að koma fram fyrr en $N = 536870912$ svo taflan byrjar auðvitað þar. Tafla 1 á bls. 7 sýnir mælingarnar auk tvöföldunarhlutfalls fyrir $T(N)$ út frá mældu gildunum en Mynd 1 sýnir tvöföldunarhlutfallið sem fall af N. Athugum að $T(2N)/T(N)$ sem ber saman við kenningu okkar um að forritsbúturinn hafi tímaflækju $T(N) \sim N \lg N$.

```java

import edu.princeton.cs.algs4.Stopwatch;

public class TimeFunc {

  /**
   * The function we want to obtain an amortized
   * cost model for.
   *
   * @param N size of input
   * @return evaluation of sum for given N
   */
  public static long sum(long N) {
    long sum = 0;
    for (long i=1; i<=N; i=2*i)
      for (long j=1; j<=2*i; j++)
        sum++;
    return sum;
  }

  /**
   * Times the sum function.
   *
   * @param N input size to run N with
   * @return runtime in seconds
   * @see Stopwatch
   */
  public static double timeTrial(long N) {
    Stopwatch timer = new Stopwatch();
    long ignore = sum(N);
    return timer.elapsedTime();
  }

  public static void main(String[] args) {
    for (long N = 1; N <= Long.MAX_VALUE; N = 2*N)
      System.out.printf("%12d\t%7.1f\n", N, timeTrial(N));
  }

}
```

Tafla 1: Tímamælingar hermana með inntakstærð N

N	Tími (s)	$T(2N)/T(N)$
...	...	...
536870912	0.1	—
1073741824	0.8	8.00
2147483648	2.9	3.62
4294967296	5.8	2.00
8589934592	11.5	1.98
17179869184	24.0	2.09
34359738368	48.5	2.02
68719476736	95.8	1.98
137438953472	187.1	1.95



Mynd 1: Hlutfallið $T(2N)/T(N)$ sem fall af N

Verkefni 5.
Í þessu dæmi eigið þið að fylla inn í töflu þar sem línurnar eru stærð inntaks og dálkarnir vaxtarhraði á keyrslutíma (tímaflækja) nokkurra reiknirita, gefinn með slöngutáknun. Hvert sæti töflunnar á að innihalda tímann sem tiltekið reiknirit myndi taka á þessari inntaksstærð, miðað við tölvu þar sem hver aðgerð tekur 1 nsek. ($1 \cdot 10^{-9}$ sek.). Til að koma ykkur af stað er búið að fylla inn í eitt hólfið. Þetta þurfa ekki að vera nákvæm gildi (t.d. 1 klst. í stað 3536.28 sek.).

Lausn. Taflan er fyrir neðan.

	$\sim 4\lg N$	$\sim 10N\lg N$	$\sim 2N^2$	$\sim \frac{1}{10}2^N$
$N = 10$	13.3 ns	0.33 µs	0.20 µs	0.10 µs
$N = 10^2$	26.6 ns	6.64 µs	20 µs	1.27e+20 s
$N = 10^3$	39.9 ns	1.00 ms	20 ms	1.07e+291 s
$N = 10^6$	79.8 ns	0.20 s	33 mín.	Óendanlegt
$N = 10^9$	0.12 µs	5 mín.	63 ár	Óendanlegt