

CMU 16-745 最优控制笔记

吕翔宇 (Xiangyu Lyu)

lvxiangyu11@gmail.com

TU Darmstadt, Germany

GitHub: lvxiangyu11

2025 年 5 月 7 日

目录

1	引言	3
2	动力学简介	3
2.1	连续时间的动力学系统	3
2.1.1	连续动态系统的简单单摆例子	4
2.2	控制映射系统	6
2.3	Manipulator动力学	6
2.4	线性系统	7
2.5	平衡点 equilibria	7
2.5.1	平衡点的求解	7
2.5.2	稳定性分析	8
	Appendix	9

1 引言

这里是 CMU 16-745 最优控制课程的笔记。我将涵盖课程中的重要概念、定理和例子。课程目标

1. 分析动力系统的稳定性。
2. 设计稳定平衡和轨迹的LQR控制器。
3. 使用离线轨迹优化设计非线性系统的轨迹。
4. 使用在线凸优化实现模型预测控制。
5. 了解随机性和模型不稳定性的影响。
6. 无最优模型时直接优化反馈策略。

写作风格备注：(TODO: 终稿注释掉!) 额外的公式推导使用浅绿色背景框额外的例子使用浅蓝色背景框代码使用浅灰色背景

2 动力学简介

这一节面向不了解控制学、动力学的读者，以一个单摆系统为例，快速的介绍连续和离散动力学系统的基础，包括稳定性分析、线性系统和非线性系统。

2.1 连续时间的动力学系统

Continuous-Time Dynamics System (CTDS) 是一个描述系统状态随时间变化的数学模型。它通常由以下方程表示：

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

其中， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态， $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入， f 是一个描述系统的动态函数，展示了系统如何根据 u 而演化。

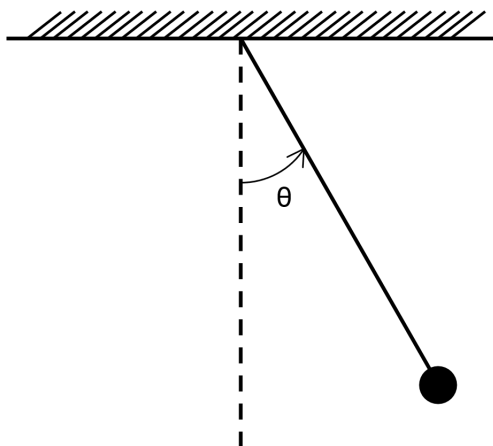


图 1: 简单单摆的物理模型。图中展示了摆球的受力情况，包括重力 mg 和拉力 \vec{T} ，以及摆球的运动方向和角度 θ 的关系。

对于1中的单摆系统，其状态 x 可以用角度 q 和速度 v 来表示。我们可以将其状态表示为：

$$x = \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix} \quad (2)$$

q 并不总是一个vector。configuration并不必须是一个vector，并且速度并不必须是configuration的导数。并且，仅在对系统的动力学描述是平滑的时候，才可以说这个系统的描述是有效的。

2.1.1 连续动态系统的简单单摆例子

考虑1中的单摆系统。我们可以用以下方程来描述它的动力学：

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) = \tau \quad (3)$$

其推导过程如下：

从拉格朗日方程推导动力学方程推导* 在这一节中，我们使用拉格朗日方法推导单摆系统的动力学方程。首先，单摆的动能为：

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

势能为：

$$V = mgl(1 - \cos \theta)$$

其中， m 是质量， l 是摆长， θ 是角度， $\dot{\theta}$ 是角速度， g 是重力加速度。拉格朗日量 L 为动能 T 与势能 V 之差，即：

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

拉格朗日方程的一般形式为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

我们计算拉格朗日量的偏导数：

1. 对于 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ ，有：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

2. 对于 $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ ，有：

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl \sin \theta$$

将这些代入拉格朗日方程，得到：

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) - mgl \sin \theta = 0$$

即：

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

如果引入控制输入 τ ，方程变为：

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau$$

这个方程描述了单摆的动力学行为，其中 τ 是控制输入，能够影响单摆的角加速度。最终，我们得到了单摆的动力学方程：

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau$$

则系统的配置 q 可以通过单摆的角度 θ 来表示，速度 v 可以通过角速度 $\dot{\theta}$ 来表示。并且考虑到控制量 u ，通过施加到系统中的力矩(torque) τ 来控制单摆的运动。则状态可

以表示为:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

则其速度 \dot{x} 可以表示为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{\tau}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

则系统动态方程可以写为 $f(x, u)$:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{\tau}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

则这里状态是一个流形(manifold)的函数 $x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 是一个圆柱, 表示了系统的状态随时间的变化。

2.2 控制映射系统

很多系统可以定义为一个控制映射系统。这是一个上述动力系统的特殊形式, 其中控制输入通过一个映射矩阵 G 来影响系统。

$$\dot{x} = f_0(x) + G(x)u \quad (7)$$

对于上述简单单摆模型, 可以将其表示为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{\tau}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \tau \quad (8)$$

2.3 Manipulator动力学

Manipulator是一个可以在空间中移动的物体。它的动力学可以用以下方程表示 (参考《现代机器人学机构、规划与控制》的第八章, 读者感兴趣可以自行阅读, 此处略):

$$M(q)\dot{v} + C(q, v) = B(q)u \quad (9)$$

其中, $M(q)$ 是质量矩阵, $C(q, v)$ 是科里奥利力矩阵和重力项, $B(q)$ 是控制输入矩阵。这个方程描述了Manipulator的动力学行为, 其中 u 是控制输入, 能够影响Manipulator的运动。则configuration的变化可以表示为:

$$\dot{q} = G(q)v \quad (10)$$

其中, $G(q)$ 是一个映射矩阵, 将速度 v 映射到configuration的变化 \dot{q} 。则系统的运动学可以描述为:

$$\dot{x} = f(x, y) = \begin{bmatrix} G(q)v \\ -M(q)^{-1}(B(q) - C) \end{bmatrix} \quad (11)$$

在简单单摆系统中 $M(q) = ml^2$, $C(q, v) = mgl \sin(\theta)$, $B = I$, $G = I$ 。

所有机械系统都可以表述为这个形式，这是因为这个形式是一个描述Euler-Lagerange方程的不同形式(Kinetic energy - potential energy $L = T - V$)。

$$L = \frac{v^T M(q) v}{2} - V(q) \quad (12)$$

2.4 线性系统

线性系统 (Linear System) 是表述控制问题和设计控制器的通用表述方法。我们知道可以相对简单的解决一个线性系统，线性系统描述为：

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (13)$$

其中， $A(t)$ 和 $B(t)$ 是时间变化的矩阵。线性系统的解可以通过求解常微分方程来获得。线性系统的稳定性分析通常使用特征值和特征向量的方法。线性系统的控制器设计通常使用状态反馈和观测器设计的方法。

我们通常通过在现在状态附近的线性化来近似线性化非线性系统：

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (14)$$

其中 $A = \frac{\partial f}{\partial x}$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}$

2.5 平衡点 equilibria

equilibria指的是系统将会保持的位置，即一阶稳态。

$$\dot{x} = f(x, u) = 0 \quad (15)$$

在代数层面，这表示动力方程的根。对于简单单摆系统，平衡点可以表示为：

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{\tau}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

2.5.1 平衡点的求解

考虑一个简单的问题，我们如何找到一个平衡点？我们可以通过求解以下方程来找到平衡点：

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{\tau}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{ml^2} u = \frac{g}{l} \sin(\theta) \Rightarrow u = mgl \sin(\theta) \quad (17)$$

带入 $\theta = \pi/2$, 得到 $u = mgl$ 一般来说，可以将寻找平衡点的问题转化为求解一个非线性方程组的问题。

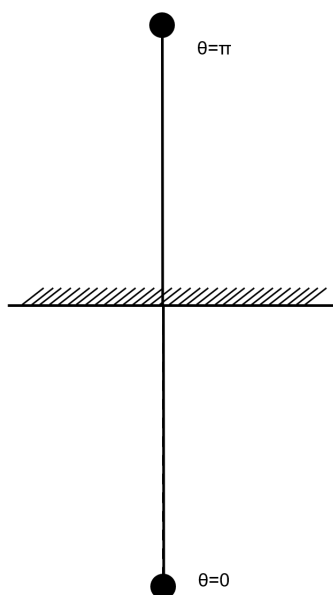


图 2: 图中展示了单摆系统的平衡点。平衡点是指系统在没有外部扰动的情况下, 能够保持静止或匀速运动的状态。

2.5.2 稳定性分析

在知道了如何求平衡点后, 我们需要知道, 如果对系统施加一个小的扰动, 系统是否会回到平衡点。考虑一个1维系统, 在这个例子中, 当 $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ 时系统是稳定的。当 $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ 时系统是不稳定的。我们可以通过线性化来分析系统的稳定性。对于一个线性系统, 我们可以通过求解特征值来判断系统的稳定性。对于一个非线性系统, 我们可以通过求解雅可比矩阵的特征值来判断系统的稳定性, 因为从这个点越推越远。这个 $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ 的区域是一个吸引子(Attractor)又称basin of attraction of system(系统吸引盆地), 而 $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ 的区域是一个排斥子(Repeller)。

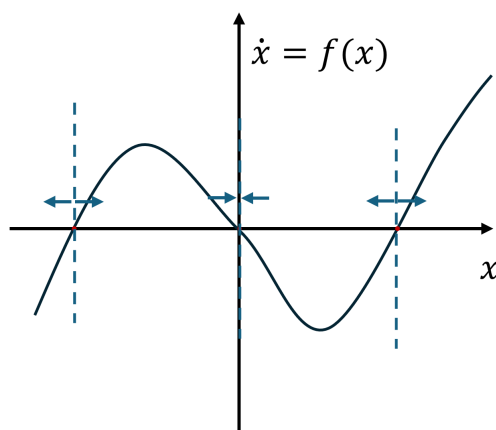


图 3: 图中展示了1维系统的稳定性分析。图中对于 $\dot{x} = 0$ 有三个解, 也就是说有三个平衡点, 但是只有中间的点满足 $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$, 而左右两侧 $f(x)$ 对 x 的偏导都是大于0, 系统下一步将采取正向的行动, 导致系统不稳定。

推广到高维系统，这个 $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ 则为是一个 Jacobian matrix。为了研究系统的稳定性，我们可以对 Jacobian matrix 进行特征值分解。对于一个线性系统，我们可以通过求解特征值来判断系统的稳定性。即，如果每个特征值的实部都小于0，则系统是渐近稳定的；如果有一个特征值的实部大于0，则系统是不稳定的；如果所有特征值的实部都等于0，则系统是边界稳定的。可以用公式描述为：

$$Re(eig(\frac{\partial f}{\partial x})) = \begin{cases} < 0 & \text{渐近稳定} \\ > 0 & \text{不稳定} \\ = 0 & \text{边界稳定} \end{cases} \quad (18)$$

Jacobian矩阵定义为：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (19)$$

在上述简单单摆系统中

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l}\sin(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

考虑平衡点 $\theta = 0$ ，我们可以得到 Jacobian 矩阵的特征值：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (21)$$

由于有一个特征值的实部大于0，表示系统在该点是一个鞍点，即系统在该点附近的运动是发散的。

考虑平衡点 $\theta = \pi$ ，我们可以得到 Jacobian 矩阵的特征值：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (22)$$

该点特征值实部为0，表示系统在该点是一个中心点，即系统在该点附近的运动是周期性的（不考虑空气摩擦力）。对于纯虚数特征值系统，这个系统叫做边缘稳定（marginally stable）。可以添加damping来使得系统稳定，如 $u = -K_d\dot{\theta}$ （摩擦力）。

Appendix